REVISTA EMA
1999, VOL. 5, Nº 1, 68-79

MENOS POR MENOS... CONSIDERACIONES PREVIAS A UNA PROPUESTA DIDÁCTICA

HERNANDO ALFONSO

En este artículo se presentan algunas estrategias para la enseñanza de las llamadas "reglas de los signos" para la multiplicación. Estas reglas se basan en razonamientos que, a su vez, están fundamentados en conceptos que los alumnos probablemente conocen y manejan. Se evita entonces recurrir a analogías o a convenciones de la geometría, la física, la economía, etc., que privilegian la memoria y que pueden reforzar la creencia, por parte de los alumnos, de que la matemática es una especie de juego poco divertido y con reglas acomodaticias o carentes de significado.

INTRODUCCIÓN

Cuando se diseñan recursos didácticos para la enseñanza de las "reglas de los signos" en la multiplicación, es conveniente tener en cuenta precisiones que pueden orientar en la búsqueda de estrategias aceptables para tratar un tema que no es muy cercano a la intuición y que depende de la representación simbólica de los números y del uso adecuado y consciente de ciertos operadores.

Existen recursos más o menos ingeniosos para la enseñanza del tema; algunos se basan en analogías (como el de asociar "amigos" con " +" y "enemigos" con " –" en frases tales como "los enemigos de mis enemigos son mis amigos"), en convenciones de tipo geométrico que por ser convenciones resultan arbitrarias, en consideraciones físicas relacionadas con problemas de movimiento que pueden no ser suficientemente adecuadas para el nivel en el que se aborda el problema aritmético, o en problemas sobre ingresos y deudas en los que los signos juegan también un papel convencional[1]. En to-

1. Y no es que en matemáticas no haya convenciones; los símbolos lo son; la representación de los positivos a la derecha y los negativos a la izquierda del cero también lo es. La elección de un determinado conjunto de axiomas es, en alguna medida, arbitraria. Sin embargo, no todo es convencional, libre o arbitrario. Una vez que se han aceptado las reglas de juego (los axiomas, las definiciones, etc.) se debe ser consecuente y coherente con ellas, si uno quiere mantenerse dentro de la lógica que preside e informa el razonamiento.

dos estos casos, al menos hasta donde el autor conoce, se llega finalmente a enunciar unas reglas que el alumno memoriza, sin estar muy convencido de que ellas funcionan de la misma manera fuera del contexto de los ejemplos particulares que se han considerado.

Una justificación teórica aceptable, desde el punto de vista matemático, podría resultar "impotable" para el nivel en que aparece por primera vez el tema de los números con signo, a saber, el estudio de los enteros. Lo que aquí se presenta, es un intento de "potabilizar" la cuestión, utilizando conceptos que corresponden a este nivel y formas elementales de razonamiento que probablemente están al alcance de los alumnos.

Muchas de las consideraciones que se hacen a continuación pueden ser demasiado elementales, desde el punto de vista del lector; pero debe entenderse que esta presentación contiene una sugerencia didáctica en la que se pretende hacer énfasis en los conceptos necesarios para llegar, de una manera natural, a las conclusiones buscadas.

PRERREQUISITOS ARITMÉTICOS

No debe sorprendernos la dificultad que tienen los estudiantes al pasar de los naturales a los enteros, para aceptar y manejar adecuadamente los números negativos; esta dificultad tiene un antecedente histórico. Pasaron muchos años para que los números negativos dejaran de ser una simple especulación teórica y se los admitiera como parte integrante de la aritmética. El significado concreto de un entero negativo como una deuda, o como medida de una temperatura por debajo de cero, abrió el camino para la aceptación inicial; pero quedaban por delante los problemas inherentes a las operaciones aritméticas con esta nueva clase de números; este proceso requirió más tiempo aún.

La discusión que se desarrolla aquí tendrá como referentes a los números enteros y específicamente a la multiplicación entre ellos; pero tiene toda la generalidad necesaria para aplicar los mismos razonamientos a otros conjuntos de números y aun a otras entidades de comportamiento similar.

Se supone que el alumno está familiarizado con las llamadas operaciones fundamentales en los números naturales (adición, sustracción, multiplicación, división) y con la relación de orden que hace posible la sustracción. Se supone así mismo, que conoce las reglas que rigen a estas operaciones; en particular, que en el esquema [minuendo] - [sustraendo], el sustraendo no debe ser mayor que el minuendo y esto significa que existe un número natural (puede ser incluso cero) que sumado con el sustraendo da como resultado el minuendo. Además, debe ser claro que este número, cuando existe, es único y se llama la diferencia. En resumen, debe ser claro para el alumno que:

$$[\text{minuendo}] - [\text{sustraendo}] = [\text{diferencia}]$$
$$[\text{diferencia}] + [\text{sustraendo}] = [\text{minuendo}]$$

Por otra parte, es de la mayor importancia aceptar que uno puede realizar la misma transformación lícita, cualquiera que ella sea, a los dos lados de una igualdad, sin que la igualdad resultante se altere.

Conviene que el alumno se familiarice con la elaboración de razonamientos sencillos como el del ejemplo que se dará más adelante, en el que se pone en evidencia el papel depredador que juega el cero en la multiplicación entre números naturales.

Para motivar el ejemplo anunciado, comencemos por el caso de 5×0, que usualmente se entiende como "5 veces cero" y se puede expresar en términos de adición; en este caso, se toma a cero como sumando, cinco veces. Es fácil aceptar entonces que $5 \times 0 = 0$. Sin embargo, tomar cero veces a 5, no se acepta tan fácilmente; se podría decir que también debe dar cero, por la propiedad conmutativa de la multiplicación. Pero esto es, de algún modo, eludir el problema, en términos del significado intuitivo; se puede lograr un convencimiento mayor, por parte del alumno, si se le presenta un modelo de razonamiento como el siguiente:

> 0×5 tiene que ser un número natural porque 0 y 5 lo son.
>
> Como 0 es lo mismo que $0 + 0$, se puede escribir $(0 + 0) \times 5$, en lugar de 0×5.
>
> Pero, por la propiedad distributiva de la multiplicación, con respecto a la adición, $(0 + 0) \times 5 = (0 \times 5) + (0 \times 5)$.
>
> Además, 0×5 es lo mismo que $0 + (0 \times 5)$.
>
> Con base en lo que precede se deduce que la expresión $0 + (0 \times 5)$ representa el mismo número que la expresión $(0 \times 5) + (0 \times 5)$, pues cada una de ellas representa lo mismo que 0×5.
>
> Entonces se puede escribir $(0 \times 5) + (0 \times 5) = 0 + (0 \times 5)$. Si se resta a los dos lados de la igualdad anterior, la expresión 0×5, se obtiene $0 \times 5 = 0$.

En el razonamiento anterior no hay nada que el alumno de este nivel no deba conocer, en términos de leyes aritméticas; lo nuevo es, por supuesto, la estrategia de razonamiento para llegar a la conclusión final. En este proceso está incluida una dosis de habilidad para armar adecuadamente el "rompecabezas", teniendo en mente la meta a la que se pretende llegar. La habilidad a la que se ha hecho referencia, es algo que se aprende solamente en la acción misma; es, en cierto modo, como aprender a caminar y tan útil como ello; fomenta y estimula la actitud crítica y aporta un factor de seguridad al conocimiento; evita la aceptación acrítica y la creencia en la posible arbitrariedad de las reglas. Se debe entender esto como una introducción a la actividad matemática conocida como “demostración”.

Conviene, seguramente, practicar el ejercicio cambiando a 5 por otros factores numéricos particulares, usando el modelo de razonamiento hasta que el alumno se dé cuenta de que el proceso no depende del número particular que esté usando como factor acompañante del cero y llegue a la necesidad de generalizar, de representar los números con letras, por ejemplo.

El conocimiento de la aritmética de los números naturales sirve de base para el estudio de los números enteros. Si se ha usado una representación geométrica para los naturales y se le ha dado un significado físico de desplazamiento en un sentido o en el otro sobre la recta numérica a las operaciones adición y sustracción, estas posibilidades se pueden usar con ventaja en el conjunto de los números enteros, en el que no existe restricción alguna para efectuar desplazamientos correspondientes a la sustracción, por razón de haber ampliado a una recta numérica, lo que para los naturales estaba limitado a una semirrecta o rayo, con origen en el punto cero. Ahora se pude avanzar o retroceder sin restricción alguna.

…	•	•	•	•	•	•	•	…
…	-3	-2	-1	0	1	2	3	…

Esta representación invita al uso de un lenguaje geométrico con el cual se evidencia, por ejemplo, la simetría con respecto al punto cero (manera simplificada de decir “el punto correspondiente a cero”). De modo que cada número entero tiene su simétrico: el simétrico de 3 es –3, el simétrico de –8 es 8, etc. Naturalmente, el simétrico de cero es él mismo.

OPERADORES

El significado que se dará aquí a la palabra “operador” corresponde a la idea de algo que transforma, en el sentido usado por Dienes (1969).

Con un lenguaje más ligado a la aritmética que a la geometría, se dice que todo número entero tiene su *opuesto* (o inverso aditivo); o sea que el opuesto de –5 es 5, el opuesto de 0 es 0, el opuesto de 14 es –14, etc.

En cualquiera de las dos formas de expresarse, “el opuesto de” o “el simétrico de” son *operadores* numéricos, o sea expresiones que transforman números en números; en este caso, el operador “el opuesto de” transforma a –5 en 5, a 8 en –8, a 0 en 0, a 45 en –45, etc.

En el lenguaje cotidiano también se usan operadores; por ejemplo: Caín es un conocido personaje de la Historia Sagrada (malo él, según dicen); pero si se le antepone el operador “el padre de” a Caín, lo que se obtiene como resultado ya no es Caín; es Adán.

Algunos operadores se anulan cuando se usan sucesivamente dos veces; este no es el caso de el “padre de”, que aplicado sucesivamente dos veces, da como resultado “el abuelo de”. Pero el operador “el opuesto de” y el operador “el simétrico de” (que en el caso de la recta numérica se pueden usar indistintamente para significar lo mismo) sí tienen la propiedad de anularse cuando se usan sucesivamente dos veces; así, por ejemplo, el simétrico del simétrico de –6 es el mismo –6. Es un efecto similar al que produce un interruptor eléctrico: se acciona una vez y prende la luz (si estaba apagada); se vuelve a accionar y apaga la luz (si estaba encendida); pero si se acciona sucesivamente dos veces (o cualquier número par de veces) la luz queda en el mismo estado inicial.

PROPIEDADES DEL OPERADOR “EL OPUESTO DE”

Es indispensable, para el tema que nos ocupa, hacer suficiente énfasis en las siguientes propiedades del operador “el opuesto de”, sobre las cuales se hará un comentario posterior:

1) Si se suma un número entero con su opuesto, el resultado es cero.
2) El opuesto del opuesto de un número entero dado es ese mismo número entero.
3) Todo número entero se puede expresar como el opuesto de un número entero.
4) Si la suma de dos enteros da como resultado cero, cada uno de ellos es el opuesto del otro.
5) El opuesto de una suma de dos (o más) números enteros es igual a la suma de los opuestos de los números involucrados.

La primera de estas propiedades define lo que caracteriza al opuesto de un número entero: es el número que sumado con él da cero. Esta propiedad no existe en los números naturales, en donde la suma de dos números con resultado cero no puede darse, a menos que los dos sumandos sean cero.

La segunda propiedad se acepta fácilmente, si se usa el modelo geométrico en el que el opuesto se asocia con el simétrico. Se puede justificar también a la luz de la definición del opuesto, con un razonamiento como el siguiente:

> A = el opuesto de ■, significa que A + ■ = 0.
>
> Si ■ es "el opuesto de A", la igualdad que precede se cumple porque corresponde precisamente a la definición dada de opuesto de un número entero.

Debido a su carácter algo sutil, el razonamiento anterior es opcional; para los efectos didácticos buscados, basta la asociación con el lenguaje geométrico mencionada antes.

La tercera propiedad se acepta fácilmente, ya que si uno piensa en un número entero cualquiera, sólo pueden darse tres casos: (i) es positivo; (ii) es negativo; (iii) es cero. En el primer caso, el número dado es el opuesto de un número negativo; en el caso (ii), es el opuesto de un número positivo; en el caso (iii), es el opuesto de sí mismo.

En cuanto a la cuarta propiedad, según la cual si la suma de dos números enteros es cero, cada uno de ellos es el opuesto del otro, el siguiente es un razonamiento que puede convencer.

> Llamemos A y B dos números cuya suma da cero: $A + B = 0$.
>
> Si sumamos el opuesto de B a cada lado de esta igualdad, obtenemos A = opuesto de B.
>
> Ahora, sumemos opuesto de A a los dos lados de la misma igualdad. Obtenemos, B = opuesto de A.

En el razonamiento anterior no se han hecho explícitos algunos pasos intermedios ni las justificaciones pertinentes, que el alumno puede aportar fácilmente. Como estamos en las puertas del álgebra, el uso de letras para representar números no especificados, debe ser posible y aceptable.

En cuanto a la última propiedad, la afirmación se puede expresar así, para números A, B cualesquiera:

$$\text{el opuesto de } (A + B) = [\text{el opuesto de } A] + [\text{el opuesto de } B]$$

Lo que se afirma, entonces, es que la expresión que está al lado derecho de la igualdad es el opuesto del número expresado con $A + B$. Para que esto sea cierto, de acuerdo con el concepto de opuesto, se requiere que la expresión de la derecha, sumada con $A + B$, dé como resultado cero. Esto se verifica efectivamente, como se puede ver cuando se escribe,

$$[\text{el opuesto de } A] + [\text{el opuesto de } B] + (B + A).$$

Aquí se ha usado la propiedad conmutativa de la adición; al reasociar convenientemente los sumandos, se obtiene cero como resultado. Se puede hacer un razonamiento similar al anterior para más de dos sumandos.

SOBRE LA SIMBOLIZACIÓN

Al simbolizar los números enteros, se emplean los mismos símbolos que se venían usando para los números naturales; para distinguir a los números negativos se acostumbra colocar, como prefijo, una rayita horizontal; la misma que ha servido en los naturales para indicar sustracción. Estrictamente hablando, se debería colocar el signo $+$ como prefijo a los positivos; pero esto no es absolutamente necesario para distinguirlos de los negativos. Además, como el conjunto de los enteros no negativos (que incluye al cero) se comporta de la misma manera que los naturales para las operaciones fundamentales y para el orden, el uso ha consagrado, con buenas razones, esta manera de simbolizar. El uso de la rayita horizontal para distinguir a los negativos evita el uso de nuevos símbolos, pero debe manejarse con cuidado para evitar confusiones, porque como se verá, también se usa para designar al opuesto de un número.

La sustracción entre enteros tiene un significado similar al que tiene en los naturales; por ejemplo, se cumple $5 - 8 = -3$, porque $-3 + 8 = 5$; $4 - (-9) = 13$, porque $13 + (-9) = 4$. Estas operaciones se pueden realizar mediante desplazamientos adecuados sobre la recta numérica, sin la restricción de orden necesaria para los naturales. En los enteros la sustracción es posible en cualquier caso, y además, como se verá, se puede considerar como caso especial de adición. Para el efecto, comparemos lo que ocurre en los siguientes casos: $5 - 9 = -4$, $5 + (-9) = -4$. La conclusión es que $5 - 9$ da el mismo resultado que $5 + (-9)$; a partir de casos como este, es fácil conjeturar que la diferencia entre dos enteros se debe poder expresar como la suma entre el minuendo y el opuesto del sustraendo. Esta conjetura deja de serlo mediante un razonamiento de tipo general: si A, B designan dos números enteros cualesquiera, $A - B$ debe ser lo mismo que A + [el opuesto de B].

Dicho de otra manera, $A - B = A$ + [el opuesto de B]. Lo que aparece a la derecha de esta igualdad debe ser, entonces, el número que sumado con B

(el sustraendo), dé como resultado A (el minuendo). Como puede verse, esto se cumple efectivamente.

Vamos a buscar ahora una buena razón para denotar con "$-B$" al opuesto del número entero B, sea él positivo, negativo, o cero. Si se considera la igualdad $A - B = A +$ [el opuesto de B] y se suma a la izquierda de cada lado [el opuesto de A], se obtiene como resultado, $0 - B = 0 +$ [el opuesto de B], o sea, simplemente, $0 - B =$ [el opuesto de B]. Esta puede ser una buena justificación para designar con "$0 - B$" al opuesto de cualquier número entero B, sea él positivo, negativo o cero.

De modo que, por ejemplo, el opuesto de 3 se designaría mediante "$0 - 3$"; el opuesto de -2, con "$0 - (-2)$", etc. Sin embargo, el cargar siempre con ese minuendo cero, resulta incómodo y no es absolutamente necesario, como se verá; si el número es positivo, como 3, su opuesto es -3, que es el resultado de $0 - 3$; por tanto, $0 - 3 = -3$. Si el número es negativo, como -2, su opuesto es $0 - (-2)$, o sea $0 +$ [el opuesto de (-2)], que es $0 + 2$, o sea 2; al denotar "el opuesto de (-2)" con "$-(-2)$", conviene leer esta última igualdad (o, por lo menos entenderla como tal) así: "opuesto de menos dos" y no "menos menos dos", ya que la rayita del "menos" y la palabra que lo expresa se han venido usando antes del símbolo de un número positivo particular. Por la misma razón, "$-B$" se debe leer "el opuesto de B" y no "menos B", ya que B es símbolo de un número no especificado, que puede ser positivo o negativo, o cero. Cabe anotar que -0 es lo mismo que 0, por la simple razón de que $0 + 0 = 0$. O sea que el cero cumple (trivialmente) la condición que caracteriza al opuesto de cero: el que sumado con él da como resultado cero.

Una vez adoptada y comprendida sin dudas esta simbolización, las propiedades enunciadas antes para el operador "el opuesto de" se pueden enunciar de manera formal así:

1) Si A es cualquier número entero, $A + (-A) = 0$.

2) Si A es cualquier número entero, $-(-A) = A$.

3) Si A es cualquier número entero, entonces existe un número entero B, único para cada A, tal que $A = -B$.

4) Si A, B designan números enteros cualesquiera y $A + B = 0$, entonces, $A = -B$ y $B = -A$.

5) Si A, B designan números enteros cualesquiera, $-(A + B) = (-A) + (-B)$.

EL OPERADOR "EL OPUESTO DE" EN LA MULTIPLICACIÓN

Lo que se estudia ahora es el tema central de este artículo y concierne al producto de dos números enteros cualesquiera. Si los factores considerados son ambos positivos, el producto se realiza como entre números naturales y se puede expresar, como en los naturales, en términos de adición. Los problemas de comprensión se suelen presentar cuando uno de los factores es negativo, o ambos lo son. Una situación concreta que lleva a multiplicar números enteros de diferente signo, puede ser la siguiente: un contratista anota sus ingresos usando números positivos y sus gastos, usando números negativos; o sea que anota 200, por ejemplo, cuando ha percibido esa cantidad de unidades monetarias y anota –400 cuando tiene que pagar esa cantidad. Debido al contrato que ha firmado, debe pagar $400 por cada día que demore en entregar la obra, después del plazo fijado; si se demora 3 días, debe efectuar $3 \times (-400)$ para obtener lo que debe pagar como multa. Esto lo puede resolver con adición y efectuarlo como aprendió a hacerlo sobre la recta numérica (aunque quizás no necesite ya hacer el dibujo).

Sin embargo, una operación como $(-5) \times 4$ no corresponde a una situación tan sencilla o cotidiana como la que precede, porque tomar a 4 como sumando "menos 5 veces" no se acepta fácilmente. Más difícil aún es darle un significado de la vida diaria a un caso como $(-5) \times (-4)$. Estas situaciones suelen presentarse en el curso de un desarrollo, por ejemplo al resolver una ecuación. En el primero de los dos ejemplos que se acaban de mencionar, se podría eludir el asunto olímpicamente, diciendo: use la propiedad conmutativa de la multiplicación. Pero esta salida (lícita, aunque no aceptable desde un punto de vista intuitivo) no sirve de nada en el caso de $(-5) \times (-4)$.

Es necesario, entonces, enfocar el problema desde un punto de vista eficiente, que cubra todos los casos posibles en los que intervengan como factores números enteros cualesquiera, positivos o negativos, sin tener que recurrir a situaciones particulares, muchas veces forzadas, para tratar de darle asidero intuitivo a una situación que es de carácter estructural (Mason, 1999, p. 244). El estudiante debe llegar a la convicción de que las reglas que, finalmente se enuncian en forma general, deben aceptarse por razones de coherencia; los argumentos deben ser tan claros que el alumno se convenza de que es la única salida lógica posible y no que se trata de una simple convención.

Para el caso de $(-5) \times 4$ vamos a considerar los resultados posibles mediante el examen de las siguientes alternativas que cubren todas las posibilidades:

a. el resultado es el mismo de 5×4,

b. el resultado es el opuesto de 5×4,

c. el resultado es un número diferente de los anteriores.

La primera alternativa es un absurdo; de ella se deduce que 5 es lo mismo que su opuesto. Esto sólo ocurre para el cero.

Si la segunda alternativa es correcta, o sea si se cumple que $(-5) \times 4$ es el opuesto de 5×4, entonces al sumar a 5×4 con $(-5) \times 4$, debe dar cero. Esto ocurre efectivamente y se verifica usando la propiedad distributiva, en su forma recolectiva y la propiedad absorbente del cero en la multiplicación que sigue siendo válida para los enteros:

$$[\,(-5) \times 4] + (5 \times 4) = [\,(-5) + 5] \times 4 = 0 \times 4 = 0$$

La conclusión es que $(-5) \times 4 = -20$.

La tercera alternativa se descarta fácilmente, ya que el producto de dos enteros da como resultado un número entero bien determinado (y ya lo obtuvimos, en la segunda alternativa).

Para el caso de $5 \times (-4)$, vale el mismo razonamiento y se concluye que el resultado es también el opuesto de 5×4.

En estos razonamientos no han intervenido para nada los números particulares que se han considerado; se podría haber razonado de la misma manera con otros números, o con números enteros no especificados, *A* y *B*. Se llega entonces a la generalización siguiente:

$$\begin{aligned} [\text{el opuesto de } A] \times B &= \text{el opuesto de } (A \times B) \\ A \times [\text{el opuesto de } B] &= \text{el opuesto de } (A \times B) \end{aligned}$$

que se puede leer “el opuesto del producto de dos números enteros es igual al producto entre uno de ellos y el opuesto del otro”. Leído así, se enfatiza que aquí no vale la *linealidad* que sí tiene lugar cuando se dice que “el opuesto de la suma de dos enteros es igual a la suma de los opuestos”; el opuesto de un producto NO es el producto de los opuestos.

Si se usa la notación “–” para “el opuesto de”, la generalización enunciada antes queda:

$$\begin{aligned} (-A) \times B &= -(A \times B) \\ A \times (-B) &= -(A \times B) \end{aligned}$$

Para el caso de $(-5) \times (-4)$, podemos usar un recurso ingenioso; usemos el esquema $\blacksquare \times (-4)$, que, como se sabe, se puede reemplazar por $-(\blacksquare \times 4)$. Este último esquema se puede reemplazar por $(-\blacksquare) \times 4$. Ahora, destapamos el “gallo tapado” que es –5 y llegamos a 5×4, como resultado final. Este razonamiento se puede repetir con otros números, o, de una vez, con letras que simbolicen números enteros no especificados.

> En resumen, el opuesto de un producto de dos factores es igual al producto de uno de los factores por el opuesto del otro y el producto de los opuestos de dos factores es igual al producto de esos factores.

Como se puede observar, en el enunciado anterior no se mencionan signos para nada. Y es que no es cuestión de signos; es cuestión de opuestos. La “regla de los opuestos para la multiplicación”, como se debería llamar, sirve para números cualesquiera, sin tener en cuenta los signos que los afecten.

CONSIDERACIÓN FINAL

La afirmación “$-(-A) = A$” se suele justificar diciendo algo como “porque como menos por menos es igual a más…”. Aquí se confunde al signo “–” que está actuando como un operador con un factor de multiplicación. Debe observarse que $(-1) \times A$ se puede expresar como $-(1 \times A)$ o sea como $-A$; la conclusión es que $-A = (-1) \times A$; pero no tiene significado “$(-) \times A$”. Es lícito afirmar que $-(-A) = (-1) \times (-A)$, que como se sabe es igual a $1 \times A$ o sea que el resultado final es A. En $-(-A)$, los dos “–” son operadores (el opuesto de); la expresión $(-1) \times (-A)$ es una multiplicación entre el número entero negativo –1 y el opuesto de un número entero no especificado, designado con A.

Se espera que este artículo promueva en el lector inquietudes que le conduzcan a aprovechar el conocimiento que sus alumnos tienen de las leyes formales de las operaciones aritméticas para diseñar una secuencia de actividades que lleven de una manera natural y lógica al manejo del operador “el opuesto de” en relación con la multiplicación.

El enfoque razonado y centrado en operadores y no en los signos de los números, tiene un alcance general que sirve no sólo para otros conjuntos numéricos (racionales, reales, complejos), sino para cualquier estructura algebraica en la que aparezca una situación similar como por ejemplo en un espacio vectorial.

REFERENCIAS

Dienes, Z.P. (1969). *Iniciación al álgebra. Estados y operadores, II*. Barcelona: Editorial Teide. (Traducción de Ricardo Pons).

Mason, J. (1999). Incitación al estudiante para que use su capacidad natural de expresar generalidad: las secuencias de Tunja. *Revista EMA, 4* (3), 232-246.

Hernando Alfonso
Profesor honorario
Universidad Pedagógica Nacional
Bogotá, Colombia