

## ELEMENTOS ARTICULADORES PARA LOS MODOS DE COMPRENDER EL CONCEPTO DE DERIVADA

**Irma Pinto Rojas, Marcela Parraguez González**

Universidad Católica del Norte (Chile), Pontificia Universidad Católica de Valparaíso (Chile)

ipinto@ucn.cl, marcela.parraguez@pucv.cl

**Palabras clave:** elementos articuladores, modos de pensamiento, comprensión, derivada.

**Key words:** articulating elements, modes of thinking, understanding, derivative.

**RESUMEN:** Este reporte describe los elementos matemáticos articuladores en los modos de pensar el concepto de derivada de una función real de variable real. Estos modos se han sustentado en el pensamiento práctico y teórico de Sierpinska, y se han validado con un análisis histórico-epistemológico, cognitivo y didáctico con base en la epistemología de Cauchy, los modos que se proponen para comprender este concepto son: modo Geométrico-Gráfico-Convergente (GGC), Analítico-Operacional (AO) y Analítico-Estructural (AE). Para alcanzar este objetivo se diseñan secuencias didácticas que son aplicadas a un grupo de estudio, con metodología de estudio de casos, con informantes de primeros años de nivel universitario.

**ABSTRACT:** This report describes the mathematical articulating elements for the modes of thinking the concept of derivative a real function of real variable. These modes are supported by the practical and theoretical thinking of Sierpinska, and validated by historical-epistemological, cognitive and didactic analysis, based on the epistemology of Cauchy, which are proposed to understand this concept modes are: mode Geometric-Graphical-Convergent (GGC), Analytical-Operational (AO) and Analytical-Structural (AE). To achieve this objective are designed teaching sequences that are applied to a study group with case study methodology, with students the early years of university level.

## ■ INTRODUCCIÓN

Esta investigación tiene una perspectiva cognitiva cuya motivación inicial fue describir cómo el objeto matemático “derivada”, es comprendido por estudiantes de nivel universitario (19 años y más). Con este propósito se consideró un estudio desde un marco teórico cognitivo de la didáctica de la matemática, Los Modos de Pensamiento, propuesto por Sierpinska, (2000), marco que fue variado para el objetivo de este estudio, desde esta perspectiva teórica se define la comprensión profunda de la derivada como la capacidad que los estudiantes tienen para transitar desde un pensamiento práctico a un pensamiento teórico del concepto de derivada y se observa cuando un estudiante resuelve problemas del cálculo diferencial. A partir de la observación de estas producciones, se plantea, indagar respecto a los elementos matemáticos que propician este tránsito, que para este estudio serán llamados los elementos articuladores. La búsqueda de los elementos que favorecen el tránsito entre estos modos de pensar la derivada, permite plantear la pregunta que guiará esta investigación. ¿Cuáles son los elementos articuladores entre los modos GGC, AO y AE que permiten la comprensión profunda, del concepto de derivada?

Un desafío en esta etapa, será dar respuesta a esta pregunta, por lo que se han planteado los siguientes objetivos:

1. Determinar los elementos de conexión entre las formas de comprender la derivada.
2. La búsqueda de estos elementos conectores que pudiera estar en el ámbito de la matemática o de la física o de otra disciplina.
3. Una vez determinados estos articuladores serán validados a través de la realización de una secuencia de enseñanza y actividades de aprendizaje para la comprensión de la derivada.

## ■ MARCO TEÓRICO

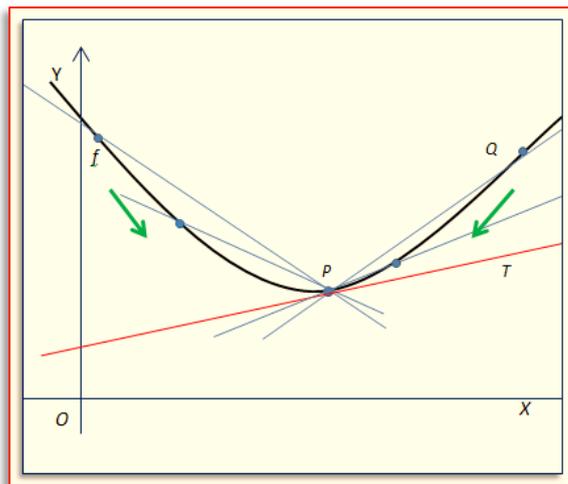
El marco teórico que sustenta esta investigación corresponde a una variación del marco teórico-*Los Modos de Pensamiento* de Anna Sierpinska-, un referente teórico que se focaliza en la actividad cognitiva exigida al sujeto que realiza una actividad matemática, es decir, observa la interacción del pensamiento con el objeto. En Sierpinska (2000) se caracterizan dos tipos de pensamiento, el pensamiento práctico, definido como una acción inmediata entre el sujeto y el objeto, alusivo a hechos observables y el pensamiento teórico, referido a la comprensión como la reflexión de los resultados de una acción, que considera la producción de sistemas conceptuales internos coherentes, sustentados en un sistema lógico de signos, por tanto reflexivo, sistémico y analítico. Sin embargo las autoras presentan una variación de este marco para el estudio en otra área de la matemática, en este caso el cálculo diferencial. Se plantea entonces la coexistencia de tres modos de pensar la derivada, presentados en Pinto y Parraguez (2015), de la siguiente forma:

### **Modo Geométrico-Gráfico-Convergente del concepto de Derivada (GGC).**

Desde un estudio histórico-epistemológico del concepto de derivada, se define la recta tangente en un punto del gráfico de una función real de variable real, el elemento matemático fundamental para conseguir la imagen directa observable del concepto, sin embargo la noción de tangencia no forma parte del pensamiento práctico propuesto por Sierpinska, Nadozier y Oktaç (2002), se hace necesario una extensión del modo SG, que será llamado en adelante el modo Geométrico-Gráfico-Convergente (GGC) en relación a la comprensión del concepto derivada.

Es posible determinar una recta secante desde  $P$ , un punto fijo de la curva, a cualquier otro punto de ésta, a medida que éste se desplaza a lo largo de su gráfica, (Figura 1), se llegará a una posición límite que será representada por la recta tangente, el tránsito de la recta secante llegando a esta posición límite, que es cuando está próximo a  $P$  será representada por la pendiente de la recta tangente que será la imagen directa de la derivada de la función en  $P$ .

**Figura 1.** Representación del Modo Geométrico- Gráfico- Convergente del concepto de Derivada



### Modo Analítico Operacional del concepto de Derivada (AO).

La idea de aproximar la recta tangente con múltiples rectas secantes que tienen distancias progresivamente más pequeñas entre los dos puntos que cruzan la función, (Figura 1), considera la recta tangente como la mejor aproximación lineal de la función alrededor de dicho punto. Se define entonces el concepto de derivada como el límite de las pendientes de las rectas secantes al aproximarlas a la recta tangente.

La derivada de  $f$  en el punto  $P$  es el límite del valor del cociente diferencial, en la medida que las rectas secantes se aproximan a la recta tangente, esto es:

$$f'(x_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

Si este límite existe, entonces se dice que la derivada de  $f$  en el punto  $P$  es  $f'(x_0)$ .

En la aproximación lineal anterior, se sustenta que para definir el concepto de derivada en su forma (AO) se propició, considerar la definición de límite presentada por Cauchy, por tal razón el modo AA definido por Sierpinska pierde su carácter aritmético, emergiendo lo operacional del concepto, por lo que se reformula como el modo AO, para el caso específico de la derivada.

Con esta idea se define: Derivada de una función  $f$  definida en su dominio y continua, como la pendiente de la recta tangente de  $f$  en el punto  $P: (x_0, f(x_0))$ .

### Modo Analítico Estructural del concepto de Derivada (AE):

Para definir el concepto de derivada en su forma (AE), es necesario mirar desde el modo AO, como se ha desarrollado el concepto de derivada de una función real de una sola variable, y desde esa

perspectiva seguir los elementos estructurales que permiten la generalización de este concepto como el elemento matemático que articula el modo AO y AE y que a su vez, permite definir el operador derivada desde la comprensión de la derivada en un punto a su comprensión de la derivada de una función en un punto cualquiera,  $f'(x)$ , es este concepto matemático que permite junto con sus propiedades la representación de derivada en el modo AE, se consideran así las reglas de derivación, los teoremas y el operador inverso (integración). Una función es diferenciable cuando el operador está bien definido. La derivada en este contexto será el operador derivada como transformación lineal, el operador inverso de la derivada, en el espacio vectorial de las funciones diferenciables.

Estos modos definidos para la derivada constituyen las vías de acceso a una comprensión profunda de la derivada, siendo la coordinación de ellos a través de elementos de conexión el objetivo principal de este estudio.

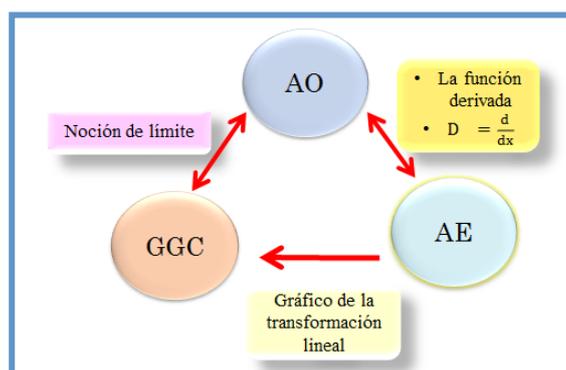
## ■ METODOLOGÍA

Se propone una metodología en tres etapas, primero, determinar los elementos matemáticos de conexión entre las formas de comprender la derivada, desde un análisis epistemológico y didáctico del concepto, junto con la observación de los datos proporcionados por los informantes, segundo, validar estos articuladores con la aplicación de nuevos instrumentos y entrevistas en profundidad y tercero, concluir con la realización de una secuencia de enseñanza y actividades de aprendizaje del concepto, que serán relevantes para la comprensión de la derivada.

En este sentido, la primera etapa en desarrollo, considera las producciones de los estudiantes en la etapa de validación de los tres modos definidos, con la aplicación de una metodología cualitativa de naturaleza descriptiva y hermenéutica (Stake, 2010) para lo que se consideró un estudio de casos múltiples con dos grupos de informantes, el primer grupo denotado CASO1 está formado por diez estudiantes que están cursando la asignatura de Cálculo Diferencial, seis de pedagogía en educación media y cuatro estudiantes de licenciatura en matemáticas, rotulados E1-E10, el CASO2 formado por tres estudiantes de licenciatura en matemáticas que han cursado recientemente el curso de ecuaciones diferenciales, rotulados E1, E2, E3.

Emerge desde un análisis histórico-epistemológico y de los resultados obtenidos del grupo de estudio, los tres articuladores matemáticos de los Modos de pensar el concepto de Derivada, se muestran en la Figura 2.

**Figura 2.** Descripción de los elementos articuladores entre los modos de pensar el concepto de derivada.



## ■ RESULTADOS

En una etapa inicial se presenta el concepto de límite como un articulador bidireccional, lo mismo con el concepto de función derivada y el gráfico de la transformación lineal se visualiza también bidireccional. Se presentarán algunos resultados de la búsqueda de articuladores.

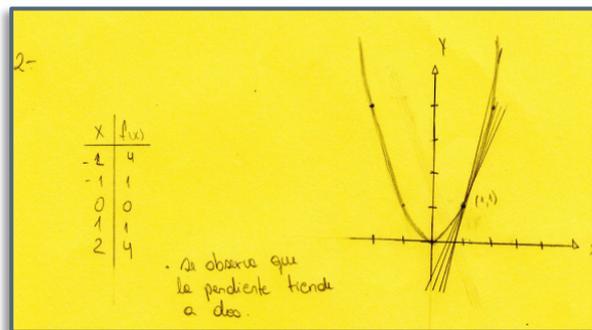
Pregunta 3: Sea la función  $f(x) = x^2$ , en el punto (1,1), la tabla muestra los valores resultantes del cociente  $\frac{f(1)-f(x)}{1-x}$  que son las pendientes de las rectas secantes cuando  $x$  se aproxima a  $x = 1$ .

$x$	0.59	0.9	0.99	0.999	1.001	1.01	1.1
$\frac{f(1)-f(x)}{1-x}$	1.59	1.9	1.99	1.999	2.001	2.01	2.1

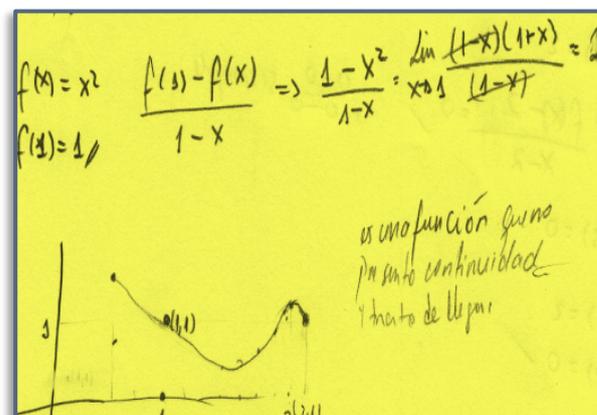
Esta pregunta, intencionada a situar al estudiante en el modo GGC, pretende que muestre rectas secantes aproximándose a la tangente en términos geométricos e identifique a la recta tangente, con la idea que muestre el tránsito hacia el modo analítico operacional (AO).

Desde una perspectiva teórica, el análisis de la reproducción del estudiante muestra que está situado en el modo GGC, sin poder transitar hacia el modo AO.

**Figura 3.** Informante E2, Se visualiza el concepto de límite en un punto.



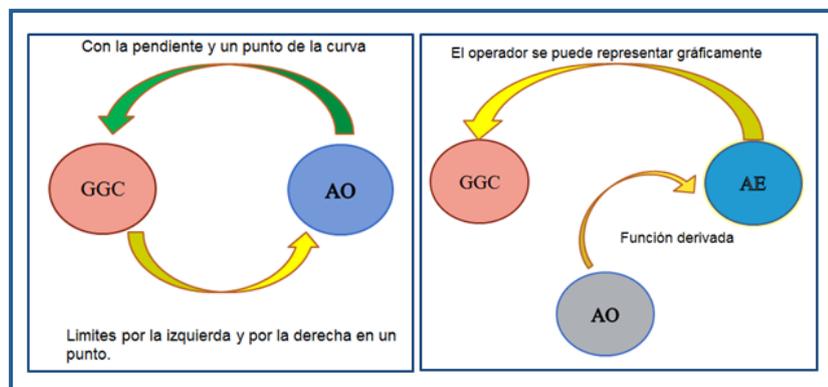
**Figura 4.** Informante E7, este estudiante va directamente al modo AO.



## ■ CONCLUSIONES

Se muestra en la Figura 5 los elementos matemáticos que coordinan los modos de pensamiento para la derivada, que están siendo analizados como elementos articuladores.

**Figura 5.** Esquema de los articuladores matemáticos en proceso de validación.



El análisis de las respuestas del grupo de estudio muestra que los estudiantes confunden  $f'(x_0)$  y  $f'(x)$ , esto posiblemente se debe a que la derivada como función se propone como un articulador, por lo que habría que complementar la aplicación de un nuevo instrumento con una entrevista en profundidad.

Tanto la noción de límite como el de función derivada son elementos articuladores, que emergen del análisis Histórico-epistemológico, (Steward, 2007) y se presentan bidireccionales, las evidencias empíricas muestran que los estudiantes que no se familiarizan con estos elementos tienen dificultad para la comprensión del concepto de derivada.

El elemento articulador entre el modo GGC y AE no emerge de la epistemología y como se observa en la Figura 5 es unidireccional, lo que indica que se debe indagar en la búsqueda de algún candidato a articulador en la otra dirección.

## ■ REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- Pinto, I. y Parraguez, M. (2015). El concepto de derivada desde la teoría de los modos de pensamiento, sustentada en la epistemología de Cauchy. *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa* 28, 337-344. México: Comité Latinoamericano de Matemática Educativa.
- Sierpinska, A. (2000). *On some Aspects of Student's thinking in Linear Algebra. The Teaching of Linear Algebra in Question* (pp. 209-246). Netherlands: Kluwer Academic Publishers.
- Sierpinska, A., Nnadozie, A. y Oktac, A. (2002) *A Study of relationships between theoretical thinking and high achievement in linear algebra*. Concordia University: Montreal.
- Stake, R. (2010). *Investigación con estudio de casos*. Madrid: Morata.
- Steward, I. (2007). *Historia de las matemáticas en los últimos 10.000 años*. España: Drakontos.