

PRELIMINARES AL MODELO DE ESTOCÁSTICOS PARA LA FORMACIÓN TECNOLÓGICA

Omar Pablo Torres Vargas, Ana María Ojeda Salazar

CINVESTAV-IPN (México)

optorres@cinvestav.mx, amojeda@cinvestav.mx

Palabras clave: formación en estocásticos, observación participante, desempeño de estudiantes.

Key words: training in stochastics, participant observation, students' performance.

RESUMEN: Se presenta una parte de una investigación que examinó la implementación de la propuesta para estocásticos del bachillerato tecnológico en un aula de Matemáticas I (DEMS, 2014), a fin de caracterizar la formación respectiva del estudiante bachiller. Mediante la aplicación de un cuestionario de diagnóstico y la observación durante la enseñanza (Wittrock, 1986), se analizaron los desempeños de 88 estudiantes de nuevo ingreso y de tercer semestre. Entrevistamos a tres de ellos para profundizar en su comprensión de las ideas de estocásticos implicadas en el cuestionario y las que fueron objeto de la enseñanza. Los resultados revelaron el predominio de un pensamiento determinista y de una formación matemática básica deficiente.

ABSTRACT: It is the first stage of a wider, qualitative research, based on the category of model (Badiou, 1978), we examined the implementation of the technological baccalaureate proposal for stochastics in the Mathematics I (DEMS, 2014) classroom, in order to characterize the corresponding student training. By applying a diagnosis questionnaire and by participant observation during the teaching (Wittrock, 1986), the performances of 88 incoming and third semester students were analyzed. Furthermore, three of them were interviewed to deepen in their understanding of the ideas of stochastics involved in the questionnaire and those that were taught. The results revealed the predominance of a deterministic thinking and of a deficient mathematics basic training.

■ INTRODUCCIÓN

El objetivo de esta primera parte de la investigación que se presenta es caracterizar la enseñanza de estocásticos en el bachillerato tecnológico y el razonamiento probabilístico resultante de sus estudiantes, para identificar las condiciones iniciales en el tema al ingreso al sistema tecnológico superior. Esa caracterización requiere también de la inspección de las propuestas institucionales de ambos sistemas educativos. Cabría preguntarse entonces qué tanto la enseñanza, guiada por el currículum propuesto institucionalmente, contribuye a que el estudiante advierta a la actividad científica fundamentada en un sistema formal matemático.

En el marco de un acuerdo académico colegiado (CECyT No 4 IPN/DME Cinvestav) esta investigación dio inicio en agosto de 2014 cuando se puso en práctica en el bachillerato tecnológico el programa de estudio *DEMS, 2014*, que proponía para el primer semestre la unidad de aprendizaje *Matemáticas I* con los temas: los números reales, su aplicación en la estadística y la noción de función. A dos meses de su implementación, el programa se interrumpió (véase http://www.dems.ipn.mx/Documents/acuerdo_lineamientos.pdf) y, a partir de enero de 2015, se le sustituyó por el programa anterior (*DEMS, 2008*), que propone la unidad de aprendizaje *Probabilidad y Estadística* para el sexto semestre. Este cambio permitió investigar en los semestres primero y sexto la comprensión de ideas fundamentales de estocásticos de los jóvenes bachilleres como antecedente a la propuesta de un instituto tecnológico SNEST (2010) y a la comprensión de estocásticos resultante de sus estudiantes.

Aquí nos referimos solamente a los resultados obtenidos con estudiantes bachilleres del primer semestre, que cursaban la asignatura *Matemáticas I*.

■ REFERENTES TEÓRICOS

Elementos de orden epistemológico, cognitivo y social sustentan esta investigación relativa a la comprensión de ideas fundamentales de estocásticos (Heitele, 1975) resultante de una enseñanza escolarizada.

Eje epistemológico

Según Badiou (1978), para que un modelo constituya una cobertura ideológica de la ciencia, como concepto de la lógica matemática debe ser sostén de una noción descriptiva de la actividad científica. Heitele (1975) propone una lista de diez ideas fundamentales como guía continua para un currículum en espiral que describe a los estocásticos: medida de probabilidad, espacio muestra, adición de probabilidades, regla del producto e independencia, equiprobabilidad y simetría, combinatoria, modelo de urna y simulación, variable estocástica, ley de los grandes números y muestra. Para su propuesta, Heitele adopta el punto de vista de “racionalidad a distancia” (p. 193) para el modelo de estocásticos que presenta, según la cual, con la abstracción creciente, las frecuencias de los datos que se recopilan “emergen como hechos reales” (p. 193) más bien que como datos del modelo. De esta forma argumenta que la enseñanza deductiva de estocásticos no contribuye a que el estudiante vaya teniendo aspiraciones científicas en la cotidianidad.

Mediante el triángulo epistemológico, Steinbring (2005) plantea la interrelación necesaria entre *objeto*, *signo* y *concepto* en la constitución del concepto matemático, y lo utiliza en el análisis de la interacción en el aula.

Eje cognitivo

Las investigaciones de Vygotsky (1997) sobre los procesos del pensamiento que se activan con la palabra y sus resultados sobre el estudio de la conciencia fueron motivo de la obra de Frawley (1999). Este autor señala la existencia de tres tipos de subjetividad: el *procesamiento no consciente* que funciona como un reflejo y como la mediación poco profunda de la estimulación y la respuesta; la *conciencia*, como el procesamiento de las cualidades de la experiencia; y la *metaconciencia*, que consiste en la organización deliberada de la experiencia.

De la experiencia con el entorno se deriva un pensamiento tácito (Gigerenzer, 2008), automático y dependiente del reconocimiento de rasgos de las situaciones en juego, que puede o no activar al pensamiento probabilístico. Varios autores (por ejemplo, Fischbein, 1975; Hogarth, 2002) recomiendan tomar en cuenta ese pensamiento tácito en la enseñanza de estocásticos.

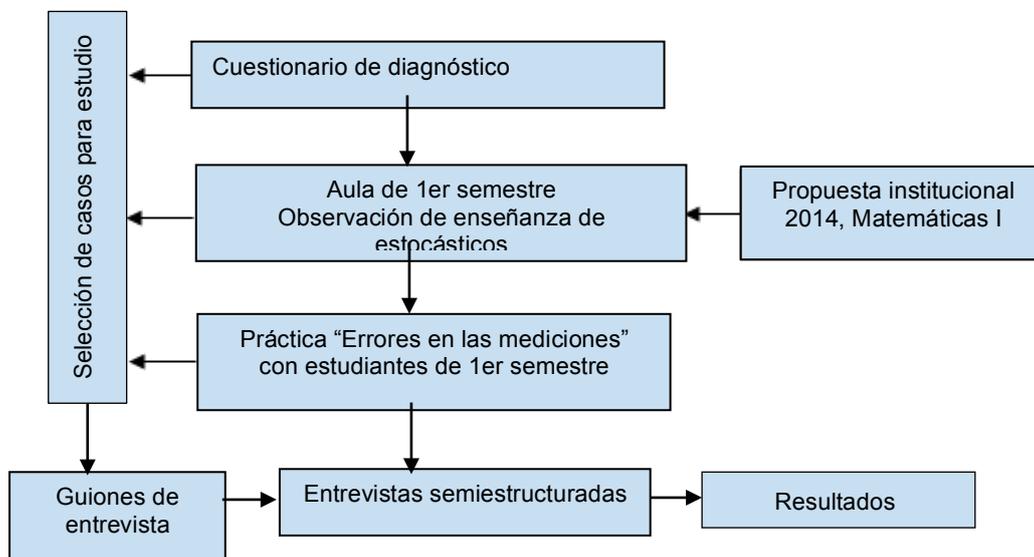
Eje social

Un aspecto de la observación como proceso contextualizado es considerarla conducto para representar la realidad existente en las situaciones que surgen en el medio educativo; es decir, la observación participante “se enfoca en la descripción de la realidad además de ayudar a los estudiantes, por etapas sucesivas, a que se sustraigan de ella poco a poco para construir progresivamente un modelo matemático” (IREM, 1997, pág. 57). O sea, como el etnólogo, los estudiantes tienen que sustraerse poco a poco de esa realidad para lograr modelarla matemáticamente. “El tratamiento por separado de los métodos y de la teoría que guía los estudios individuales permite el desarrollo de conceptos sobre la índole de la observación como estrategia para representar aspectos de la realidad” (Wittrock, 1986, pág. 307).

■ MÉTODO Y TÉCNICAS

La investigación, interpretativa, considera la realidad de la organización local de la enseñanza y del aprendizaje en el aula (Wittrock, 1986). En la primera etapa de esta investigación, *en curso* (véase www.matedu.cinvestav.mx/~cognicion) y cualitativa (Borovcnik, 2014), se caracterizó la comprensión de 88 estudiantes de primer y tercer semestres de bachillerato tecnológico de algunas ideas de estocásticos, a partir de la organización mostrada en la Figura 1.

Figura 1. Organización de la primera etapa de la investigación.



Instrumentos de recopilación de datos

Se aplicó un cuestionario de diagnóstico, en dos modalidades, A y B, diseñado por docentes de la institución y su aplicación satisfizo la necesidad común a la docencia y a esta investigación de identificar los conocimientos matemáticos adquiridos en la educación secundaria (SEP, 2011) con los que ingresa el estudiante al nivel medio superior. La modalidad A incluyó tres reactivos relativos a estocásticos, de los cuales dos fueron de preguntas abiertas y uno de opción múltiple; mientras que la modalidad B incluyó tres preguntas de opción múltiple (véase la Tabla 1).

Para *situar* la investigación en las condiciones educativas reales, en las actividades específicas propuestas, y perfilar una selección de estudiantes para entrevista, en el aula de *Matemáticas I* de un grupo de 46 estudiantes de primer semestre, observamos y registramos en bitácora cuatro clases, de 50 minutos cada una. El docente condujo tres: números reales; su aplicación en la estadística; y noción de función; este investigador condujo la cuarta.

En la primera sesión, los estudiantes, en equipos de cuatro, compararon y discutieron sus respuestas a una actividad propuesta días anteriores basada en el texto “Funciones ¿con qué se comen?”, para que se familiarizaran con la noción de función. En la segunda sesión se agruparon cuatro o cinco estudiantes para solucionar dos problemas (“Los trenes” y “La compañía de teléfonos”), relativos a números reales y noción de función. En la tercera sesión se realizó la actividad “Tarifa vs. Distancia” para introducir el tema de regresión lineal mediante el tratamiento de datos e interpretación de una tabla.

En la cuarta sesión, este investigador aplicó la práctica “Errores en las mediciones”, que comúnmente se desarrolla en la asignatura *Física I*, pero consideramos: a) que el programa de *Matemáticas I* indica “resolver y analizar situaciones problemáticas mediante el pensamiento aritmético, estadístico y probabilístico en su entorno académico y social como parte de su formación propedéutica y tecnológica, que le permita comunicar y argumentar los resultados obtenidos mediante el razonamiento matemático” (DEMS, 2014, p. 50); y b) el señalamiento de Badiou (1978) de que “el concepto de modelo no designa un conocimiento matemático exterior por formalizar, sino un material matemático por experimentar” (p. 56). El objetivo de la práctica fue que, mediante un acercamiento efectivo a mediciones físicas directas, el estudiante estimara el valor más probable de una longitud e identificara una aproximación normal en la distribución de las medidas obtenidas en equipo. La práctica consistió en: 1) efectuar y registrar en tablas en hojas de control, treinta y cinco mediciones individuales e independientes de un segmento de recta, empleando un segmento diferente de la regla en cada ocasión; 2) agruparlas e identificar sus frecuencias; 3) trazar el histograma correspondiente; 4) calcular la media y la desviación estándar respectivas; y 5) responder a seis preguntas relacionadas con la actividad.

Para profundizar en la comprensión de los estudiantes de algunas ideas de estocásticos implicadas en los reactivos del cuestionario de diagnóstico y en el tratamiento de errores aleatorios en las mediciones, de ese grupo de estudiantes se identificaron tres casos para estudio (Díaz, Mendoza y Porras, 2011), “Estudiante α ”, “Estudiante β ” y “Estudiante γ ”; se les entrevistó en formato semiestructurado (Zazkis y Hazzan, 1999), de acuerdo a un guión personalizado con 20 preguntas relativas a sus respuestas en el cuestionario de diagnóstico, a sus respuestas en la práctica y a partir del análisis de los episodios de las enseñanzas en el aula.

A los datos recopilados en la investigación (propuesta institucional, diagnóstico, desarrollo de la enseñanza y entrevistas) se les caracterizó mediante los criterios de la célula de análisis (Ojeda, 2006): ideas fundamentales de estocásticos, otros conceptos matemáticos, recursos semióticos, términos empleados, situaciones de referencia.

■ RESULTADOS

Propuesta institucional

La propuesta institucional es un elemento de orden social. En la revisión de los libros de texto (Hernández, 1978, por ejemplo) recomendados en la propuesta (DEMS, 2008; 2014) se pone especial atención al concepto de variación, desde los puntos de vista determinista y probabilístico. La estrategia de enseñanza que propone el bachillerato tecnológico se sintetiza en el programa de la unidad de aprendizaje *Matemáticas I*, la cual considera la utilización de la estadística descriptiva y la aplicación de la probabilidad “en la interpretación y solución de situaciones problemáticas relacionadas con su entorno académico y social, que le permita tomar decisiones fundamentadas” (DEMS, 2014, p. 50). Las ideas fundamentales de estocásticos identificadas en las *competencias particulares 2* y *3* son: *variable estocástica*, por los valores estadísticos y su descripción mediante las medidas de tendencia central y las de dispersión, y por la frecuencia de los datos obtenidos o propuestos; *combinatoria* (técnicas de conteo); *adición de probabilidades*; y *regla del producto* en el tema de “probabilidad condicionada” e *independencia*.

Diagnóstico

La Tabla 1 resume los resultados de la aplicación del cuestionario de diagnóstico a 48 estudiantes de nuevo ingreso (26 en la modalidad A y 22 en la modalidad B) y 40 de tercer semestre (18 en la modalidad A y 22 en la modalidad B), para los reactivos de estocásticos.

Tabla 1. Clasificación primaria de las respuestas al cuestionario de diagnóstico

Reactivo	Tipo	Idea fundamental	Correctas	Incorrectas	Omitidas
Modalidad A					
3.	Abierto	Combinatoria: combinaciones.	8	30	6
6.	Abierto	Variable estocástica: Media.	6	14	24
		Mediana.	3	24	17
		Moda.	27	2	15
7.1	Opción múltiple	Adición de probabilidades: frecuencia relativa.	19	17	8
Modalidad B					
13.	Opción múltiple	Variable estocástica: Media, mediana y moda.	17	25	2
14.	Opción múltiple	Adición de probabilidades: frecuencia relativa.	1	40	3
15.	Opción múltiple	Regla del producto e independencia: intersección de eventos.	26	16	2

Para el tercer reactivo del cuestionario diagnóstico, acerca de determinar el número de posibles combinaciones de cuatro elementos tomados de dos en dos, 18% (8 de 44 estudiantes) de las respuestas fueron correctas. Para una muestra de ocho datos numéricos en el sexto reactivo, al proponer calcular sus medidas de tendencia central, la moda fue identificada de manera más inmediata (61% de respuestas correctas (27 de 44 estudiantes)) que la media, cuyo cálculo fue realizado correctamente sólo por seis estudiantes (14%).

La enseñanza y la práctica

El resultado del proceso observacional, cuyo registro en bitácora fue analizado, indicó rasgos de los estudiantes durante la enseñanza que consideramos en el diseño de los reactivos de la práctica “Errores en las mediciones”. Un ejemplo de esos rasgos es privilegiar el cálculo de las medidas de dispersión sin la interpretación correspondiente en la variabilidad del conjunto de datos.

Al inicio de la sesión se hicieron explícitos el nombre de la práctica y el objetivo del acercamiento a un conjunto de mediciones de la misma magnitud efectuadas para estimar su valor más probable. Se esperaba que el estudiante prefigurara la distribución normal de las medidas obtenidas. No obstante, al igual que sucedió con estudiantes universitarios (Torres, 2013), los de bachillerato también inadvirtieron el azar en las mediciones realizadas y eligieron la moda como resultado del conjunto de 35 mediciones efectuadas de una misma longitud, en vez de la media, que es el valor más probable. Además, resultó el desconocimiento de cómo trazar un histograma de frecuencias completo a partir de las mediciones efectuadas.

Las entrevistas

Se caracterizaron las respuestas de los tres estudiantes entrevistados a cada pregunta del guión personalizado respectivo. Por ejemplo, la Tabla 2 muestra la caracterización del desempeño de la estudiante α en la séptima pregunta del guión de entrevista. Esta estudiante, que en la modalidad B del cuestionario de diagnóstico contestó correctamente seis de los 15 reactivos planteados pero sin exponer el procedimiento respectivo, e incorrectamente a nueve de ellos, en el reactivo relativo a las medidas de tendencia central no eligió la opción correcta, aunque se mostró participativa en el aula durante la enseñanza.

Tabla 2. Caracterización de la respuesta de α a la pregunta 7 en la entrevista.

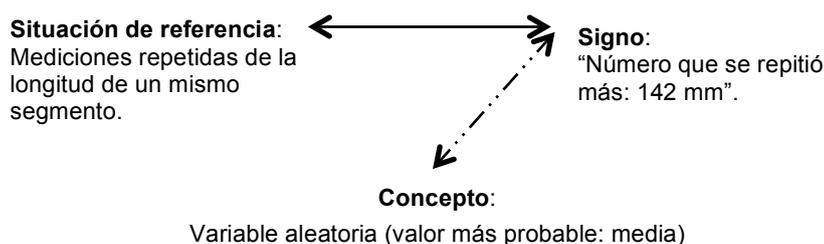
Pregunta de entrevista	Situación planteada en la práctica	Ideas fundamentales de estocásticos	Otros conceptos matemáticos	Recursos para organizar y tratar los datos	Términos empleados
7. ¿Cuál es el valor más probable de la longitud del segmento?	Calcular el valor de la media de 35 mediciones de un segmento y dar un resultado de las mediciones efectuadas.	Independencia, Variable aleatoria, Ley de los grandes números, Muestra.	Operaciones aritméticas, orden en los reales.	Signos numéricos y algebraicos, lengua natural, tabla.	Se aproximaría media, todos, estos, medidas, al azar, se repitió más.

El fragmento de la entrevista correspondiente a la Tabla 2 reveló el conocimiento deficiente de α de la media (“E” indica al entrevistador y “ α ” a la estudiante entrevistada):

- E ¿Sí existe el valor verdadero o uno se aproxima al valor verdadero?
- α Pues, se aproximaría yo creo, porque...
- E ¿De qué manera te aproximas? ¿Con tus medidas, con el cálculo de la media o, cómo?
- α Pienso que con el cálculo de la media. Porque sería como la suma de todos éstos [señala con su mano las lecturas de las mediciones ordenadas en la tabla 2 de su hoja de respuestas de la práctica], algo así. Es que no me acuerdo muy bien cómo hicimos la media porque sí fueron varios pasos y sí, fue un poco complicado. Pero yo digo que sería la media [señala con el índice el resultado que ella proporcionó en la práctica del cálculo de la media], que sería un valor un poco más exacto que estas medidas [vuelve a indicar la tabla que contiene sus mediciones ordenadas] que fueron tomadas al azar.
- E ¿Entonces para qué te sirvió calcular la media?
- α Supongo que para saber cuál número se repitió más o algo así. No entendí el propósito de la práctica, pero la tratamos de resolver lo mejor que pudimos.

Al comienzo del pasaje de la entrevista, la estudiante α dio evidencia de un significado intuitivo del concepto “media” como la aproximación al valor “verdadero” en cuestión y su cálculo de la media aritmética de las mediciones efectuadas en la práctica (143.3 mm) fue correcto; no obstante, α no lo asoció al valor más probable (“verdadero”) de la longitud del segmento, sino al valor de la moda, con lo que exhibió un desconocimiento de la intervención del azar (véase la Figura 2). La estimación del valor más probable de la longitud del segmento dado en las hojas de control, como objetivo de la práctica, fue obtenido correctamente por la estudiante α , con el valor de 143.3 mm para la media aritmética del conjunto de sus mediciones. Pero tanto en las hojas de control como en la entrevista anunció el valor de la moda, 142 mm, como resultado de las mediciones efectuadas, argumentando que “estuvo presente más frecuentemente” y porque fue “el número que más se repitió”.

Figura 2. Triángulo epistemológico para “variable aleatoria” según α .



Explícitamente, la estudiante α declaró no haber comprendido el propósito de la práctica y, al hacer un análisis mediante el triángulo epistemológico (Steinbring, 2005) de la constitución del concepto “variable aleatoria” como la media aritmética, ella evidenció una ruptura de la doble interrelación entre el signo y el concepto. El tipo de subjetividad reflejado en las respuestas de α corresponde al consciente (Frawley, 1999) al exhibir en la entrevista un procesamiento de las cualidades de las mediciones efectuadas en la revisión del cálculo de la media, aunque su reacción instintiva en acción (Gigerenzer, 2008) haya sido reconocer al número con mayor repetición como el verdadero.

■ COMENTARIOS

Aunque reducida, la información que se obtiene del proceso de la enseñanza, observada en condiciones reales, de la descripción de la variación de mediciones efectivas de la misma magnitud en el desarrollo de la práctica y de la entrevista, indica aspectos relevantes de la enseñanza que pueden contribuir a que poco a poco se revele a los estudiantes un modelo de estocásticos (Heitele, 1975) y al objetivo último de que ellos lo adviertan como sustento de la actividad científica (Badiou, 1978). Pero esta formación en estocásticos debe ser continua, a lo largo de toda la educación. En particular, en ausencia de una educación en probabilidad se enfrentará una dificultad creciente con la edad para erradicar sesgos del pensamiento probabilístico (Fischbein, 1975).

La deficiente formación matemática básica de los estudiantes de la unidad de aprendizaje *Matemáticas I* participantes en esta etapa de la investigación, así como su inadvertencia de la necesidad de tratar los datos para reducir los efectos del azar y dar un resultado de las mediciones en la práctica, apuntan a su insensibilidad a la variación de los datos, aunque el programa de estudios propone el tratamiento de las medidas de tendencia central, de posición y de dispersión “para resolver situaciones mediante la aplicación correcta del lenguaje, símbolos matemáticos, intuición sobre fenómenos de azar y el uso de una metodología para la toma de decisiones” (DEMS, 2014, p. 50).

Estos resultados motivaron una observación, también participante, de la enseñanza de la asignatura *Probabilidad y Estadística* (DEMS, 2008, programa vigente) a un grupo de estudiantes de sexto semestre y la implementación de estrategias de enseñanza que destacaran la naturaleza aleatoria de los fenómenos propuestos para su estudio. Los resultados por obtener, junto con los aquí reportados, informarán de los antecedentes en estocásticos con que se puede arribar a la formación tecnológica en el nivel superior.

■ REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- Badiou, A. (1978). *El concepto de modelo. Bases para una epistemología materialista de las matemáticas*. Tercera Edición. México: Siglo Veintiuno Editores.
- Borovcnik, M. (2014). Empirical research on understanding probability and related concepts - A review of vital issues. In de Sousa, B. & Gould, R. (Eds.) *Proceedings of the Ninth International Conference on Teaching Statistics (ICOTS9, July, 2014), Flagstaff, Arizona, USA*. Voorburg, the Netherlands: International Statistics Institute.

- Díaz, S.; Mendoza, V. M., Porras, C. M. (2011). Una guía para la elaboración de estudios de caso. *Razón y palabra*. No. 75. www.razonypalabra.org.mx
- Dirección de Educación Media Superior (DEMS). (2008). *Programa de Estudios de la unidad de Aprendizaje: Probabilidad y Estadística*. México, D. F.: IPN
- Dirección de Educación Media Superior (DEMS). (2014). *Programa de Estudios de la unidad de Aprendizaje: Matemáticas I*. México, D. F.: IPN
- Fischbein, E. (1975). *The Intuitive Sources of Probabilistic Thinking in Children*. Dördrecht: Reidel.
- Frawley, W. (1999). *Vygotsky y la ciencia cognitiva*. España: Paidós.
- Gigerenzer, G. (2008). *Decisiones instintivas: La inteligencia del inconsciente*. España: Ariel.
- Heitele, D. (1975). An Epistemological View on Fundamental Stochastic Ideas. *Educational Studies in Mathematics* Vol. 6, No. 2, pp. 187-205. Netherlands: Reidel.
- Hernández, O. (1978). *Elementos de Probabilidad y Estadística*. México: Fondo de Cultura Económica.
- IREM, (1997). Enseigner les probabilités au Lycée. *Ouvertures statistiques, enjeux épistémologiques, questions didactiques, idées d'activités*. pp. 54-104. France: Réseau des IREM – Direction des Lycées et Collèges.
- Hogarth, R. M. (2002). *Educación la intuición. El desarrollo del sexto sentido*. España: Paidós.
- Ojeda, A. M. (2006). Estrategia para un perfil nuevo de docencia: Un ensayo en la enseñanza de estocásticos. *Matemática educativa, treinta años*, pp. 195-214. México: Santillana-Cinvestav.
- SEP (2011). *Programas de estudio 2011. Guía para el maestro. Educación Básica. Secundaria. Matemáticas*. México: Comisión Nacional de Libros de Texto Gratuitos.
- SNEST (2010, abril). *Planes de Estudio Actualizados del SNEST. Probabilidad y Estadística*. Recuperado el 20/02/2014, de <http://itmorelia.edu.mx/2012/Escolarizado.html>
- Steinbring, H. (2005). *The Construction of New Mathematical Knowledge in Classroom Interaction. An Epistemological Perspective*. USA: Springer.
- Torres, O. (2013). *Limitaciones en la adquisición de ideas fundamentales de estocásticos por estudiantes de ingeniería: El caso de un instituto tecnológico*. Tesis de maestría no publicada. México: Cinvestav.
- Vygotsky, L. (1997). *Pensamiento y lenguaje*. Madrid, España: Visor.
- Wittrock, M. (1986). *La investigación de la enseñanza II*. Barcelona, España: Paidós.
- Zazkis, R., Hazzan, O. (1999). Interviewing in Mathematics Education Research: Choosing the Questions. *Journal of Mathematics Behaviour*, 17 (4), pp. 429-439. USA: Elsevier Science Inc.