ANÁLISIS DE TEXTOS USANDO LA TEORÍA APOE: EL CASO DEL PRINCIPIO DE INDUCCIÓN EN EL LIBRO DE GRIMALDI

Isabel García Martínez, Marcela Parraguez González
Universidad Católica del Norte (Chile), Pontificia Universidad Católica de Valparaíso (Chile)
igarcia@ucn.cl, marcela.parraguez@pucv.cl

Palabras clave: APOE, libro de texto, inducción, paso base

Key words: APOS, textbook, induction, basis step

RESUMEN: En este trabajo se analiza el tópico de inducción matemática del libro de Grimaldi a través de la teoría APOE. Ello se hace a partir de una descomposición genética diseñada por Dubinsky y Lewin para dicho concepto. Se indaga la relación que existe entre la manera de abordar este tema en el libro y las estructuras mentales mostradas en la descomposición genética. En este libro, se enfatiza la importancia del paso base del principio de inducción matemática, el cual no está declarado de manera explícita en la descomposición genética de Dubinsky y Lewin. La secuencia de ejercicios que propone Grimaldi, promueve la encapsulación del principio de inducción matemática como construcción mental objeto, a partir del paso base y del paso inductivo como procesos.

ABSTRACT: In this paper the topic of mathematical induction of the book of Grimaldi is analyzed by the APOS theory. This is done from a genetic decomposition designed by Dubinsky and Lewin to this concept. It explores the relationship between the approach to this topic in the book and mental structures shown in genetic decomposition. In this book, the importance of the basis step of the principle of mathematical induction is emphasized, which is not said explicitly in the genetic decomposition of Dubinsky and Lewin. The sequence of exercises proposed by Grimaldi, promotes the encapsulation of the principle of mathematical induction as a mental construct object from basis step and the inductive step as processes.

INTRODUCCIÓN

En este trabajo se analiza la unidad de inducción matemática del libro *Matemáticas discreta y combinatoria: Una introducción con aplicaciones* (Grimaldi, 1997), por ser un libro que se utiliza como referente en varios cursos universitarios chilenos para abordar el tema de inducción matemática.

Se propone analizar la presentación que Grimaldi realiza de este tópico desde la teoría APOE, porque ella nos brinda elementos para indagar en la construcción de este concepto en aprendices.

A partir del análisis del libro de Grimaldi con esta teoría, se puede reafirmar la conclusión del trabajo de García-Martínez y Parraguez (2015), esto es: la construcción mental "paso base" es fundamental para construir el concepto inducción matemática como objeto. Donde el "paso base" es una de los dos pasos que se requieren para realizar una demostración por el método de inducción y consiste en determinar si la propiedad que se quiere demostrar se cumple para un primer elemento (Grimaldi, 1997), como se verá más adelante.

MARCO TEÓRICO

La teoría APOE (Acción, Proceso, Objeto, Esquema) es un marco teórico cognitivo, creado por Ed Dubinsky, a partir de la abstracción reflexiva de Piaget (Dubinsky, 1996). Posteriormente se ha seguido desarrollando por otros investigadores (Arnon et al., 2014).

Según esta teoría, las estructuras mentales necesarias para construir un concepto matemático son: acción, proceso, objeto y esquema. Se dice que un estudiante muestra una concepción acción de un determinado concepto matemático cuando lo percibe como algo externo y debe realizar todos los pasos para resolver una tarea que involucre dicho concepto. Cuando un estudiante repite una acción, hasta ser capaz de resolver tareas sin necesidad del estímulo externo, ni de efectuar todos los pasos, se dice que él ha interiorizado la acción en un proceso. A su vez, dos o más procesos pueden ser coordinados para obtener otro proceso. Cuando el estudiante ve el proceso como un todo y puede actuar sobre él, se dice que lo ha encapsulado en un objeto. Si un estudiante muestra la concepción objeto de un determinado concepto matemático, podrá desencapsularlo para ver los procesos que dieron origen a dicho objeto. Al conjunto de acciones, procesos, objetos y esquemas relacionados con un concepto matemático determinado, se lo denomina esquema, el cual es una estructura coherente e inacabada, ya que un esquema puede asimilar nuevos objetos para luego acomodarlos. Los mecanismos mentales que permiten pasar de un estado a otro son las abstracciones reflexivas, algunas de ellas son: interiorización, coordinación, reversión, asimilación, encapsulación y desencapsulación.

La teoría APOE, también tiene incorporado un ciclo de investigación compuesto por tres componentes: análisis teórico o descomposición genética (DG), diseño y aplicación de instrumentos, y análisis y verificación de los datos (Asiala et al., 1996). La DG es un modelo cognitivo hipotético que muestra las estructuras y mecanismos mentales que un estudiante debería construir para aprender un concepto matemático determinado (Arnon, et al., 2014). Se construyen instrumentos para validar, o no, la DG, los cuales se analizan y si fuera necesario se refina la DG y se sigue el ciclo las veces que sea necesario, hasta que la DG sea validada.

ANÁLISIS DE LA UNIDAD DE INDUCCIÓN MATEMÁTICA EN EL LIBRO DE GRIMALDI

En este apartado, se analiza el libro de Grimaldi desde lo cognitivo, a través de la teoría APOE, permitiendo obtener algunos elementos importantes para el diseño de una DG.

En el capítulo 4 de este libro, el autor comienza mostrando una diferencia entre $\mathbb{Z}^+$y $\mathbb{Q}^+$ o $\mathbb{R}^+$ para enunciar el principio del buen orden:

“Cualquier subconjunto no vacío de $\mathbb{Z}^+$ contiene un elemento mínimo.” (Grimaldi, 1997, p. 184).

En Grimaldi (1997) se enuncia y demuestra el principio de inducción matemática a través del siguiente teorema:

Teorema: *Principio de inducción finita o de inducción matemática.* Sea $S(n)$ una proposición matemática abierta (o un conjunto de tales proposiciones abiertas), en la que aparece una o varias veces la variable n, que representa a un entero positivo.

a) Si $S(1)$ es verdadera; y

b) siempre que $S(k)$ sea verdadera (para algún $k \epsilon \mathbb{Z}^+$ particular, pero elegido al azar), entonces $S(k+1)$ será verdadera;

entonces $S(n)$ es verdadera para todo $n \epsilon \mathbb{Z}^+$. (Grimaldi, 1997, p. 184)

Como se puede interpretar, en el teorema de inducción matemática, este autor describe con precisión la inducción a partir de dos pasos: el paso base (a) y el paso inductivo (b). Para demostrarlo, Grimaldi se basa en el principio del buen orden, pero luego observa que este último se puede demostrar suponiendo verdadero el principio de inducción matemática.

A partir de nuestra experiencia como docentes en el tema, no podemos dejar de mencionar una forma más general de presentar explícitamente el principio de inducción matemática, esto es, como el mismo Grimaldi ha señalado, indicando que en la parte (a) de dicho principio, se puede reemplazar el 1 por cualquier otro número entero. Y lo enuncia de la siguiente manera:

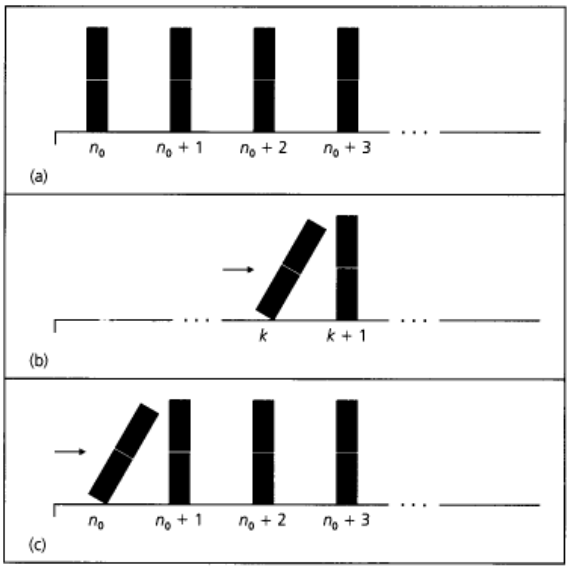
$$\left[S(n_0) \wedge \left[(\forall k \geq n_0)\big(S(k) \Rightarrow S(k+1)\big)\right]\right] \Rightarrow (\forall n \geq n_0)\, S(n).$$

(Grimaldi, 1997, p. 185).

En este enunciado, el principio de inducción matemática es visto como un objeto, desde el punto de vista de la teoría APOE, porque se ve el proceso como un todo y es posible actuar sobre él.

También es interesante ver como Grimaldi hace una analogía entre el principio de inducción matemática y una forma intuitiva de verlo usando fichas de dominó (Figura 1).

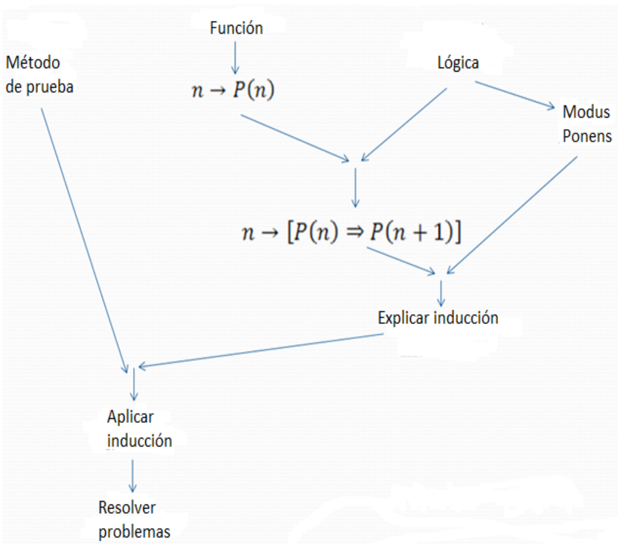
Figura 1. El principio de inducción matemática visto con fichas de dominó (Grimaldi, 1997, p. 185).



Las fichas se colocan en forma vertical, a una distancia tal que si se cae una ficha hacia la derecha, la siguiente también se caerá y además se cae la primera ficha (que ocupa el lugar n_0).

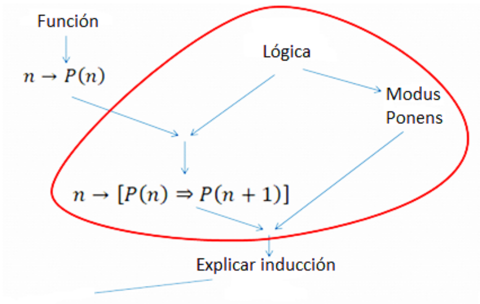
La indagación desde lo cognitivo, comienza con un análisis teórico que se plasma en una DG para la inducción matemática, diseñada por Dubinsky y Lewin (Arnon et al., 2014, p. 31) la cual se presenta en la Figura 2.

Figura 2. DG de inducción matemática diseñada por Dubinsky y Lewin (1986).



Si se presta atención en la Figura 3, se puede apreciar, al interior de la línea roja, el modelo de construcción de la DG al realizar los pasos indicados en la forma intuitiva del principio de inducción.

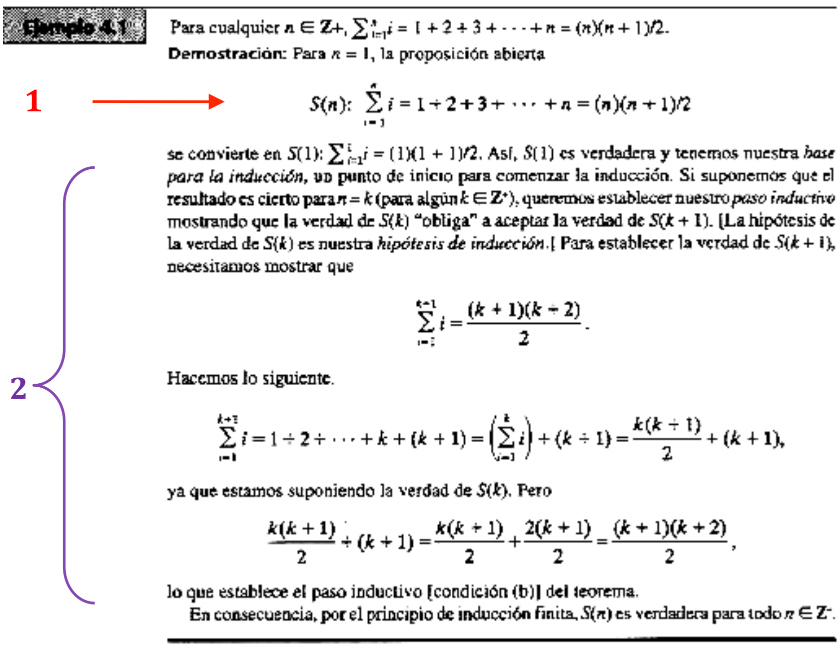
Figura 3. Modelo de construcción de la DG que se sigue al ver el principio de inducción matemática de manera intuitiva.



Por la regla de eliminación del cuantificador universal, de $(\forall k)(S(k) \Rightarrow S(k+1))$, se puede deducir $(S(n_0) \Rightarrow S(n_0+1))$ y aplicando *Modus Ponens* y el hecho de que $S(n_0)$ es verdadera, se deduce que $S(n_0+1)$ es verdadera. Luego, análogamente, se obtiene $(S(n_0+1) \Rightarrow S(n_0+2))$ y se aplica nuevamente *Modus Ponens* (ya que $S(n_0+1)$ es verdadera) para deducir que $S(n_0+2)$ es verdadera. Y así sucesivamente.

En el ejemplo 4.1 de dicho libro, que se muestra en la Figura 4, se realiza una demostración usando el principio de inducción matemática.

Figura 4. Ejemplo de demostración usando el principio de inducción matemática(Grimaldi, 1997, p. 186).



Ejemplo 4.1 Para cualquier $n \in \mathbf{Z}+$, $\sum_{i=1}^{n} i = 1 + 2 + 3 + \cdots + n = (n)(n+1)/2$.

Demostración: Para $n = 1$, la proposición abierta

1

$$S(n):\ \sum_{i=1}^{n} i = 1 + 2 + 3 + \cdots + n = (n)(n+1)/2$$

se convierte en $S(1)$: $\sum_{i=1}^{1} i = (1)(1+1)/2$. Así, $S(1)$ es verdadera y tenemos nuestra *base para la inducción*, un punto de inicio para comenzar la inducción. Si suponemos que el resultado es cierto para $n = k$ (para algún $k \in \mathbf{Z}^+$), queremos establecer nuestro *paso inductivo* mostrando que la verdad de $S(k)$ "obliga" a aceptar la verdad de $S(k+1)$. [La hipótesis de la verdad de $S(k)$ es nuestra *hipótesis de inducción*.] Para establecer la verdad de $S(k+1)$, necesitamos mostrar que

2

$$\sum_{i=1}^{k+1} i = \frac{(k+1)(k+2)}{2}.$$

Hacemos lo siguiente.

$$\sum_{i=1}^{k+1} i = 1 + 2 + \cdots + k + (k+1) = \left(\sum_{i=1}^{k} i\right) + (k+1) = \frac{k(k+1)}{2} + (k+1),$$

ya que estamos suponiendo la verdad de $S(k)$. Pero

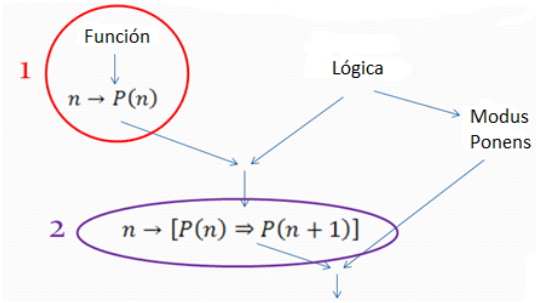
$$\frac{k(k+1)}{2} + (k+1) = \frac{k(k+1)}{2} + \frac{2(k+1)}{2} = \frac{(k+1)(k+2)}{2},$$

lo que establece el paso inductivo [condición (b)] del teorema.

En consecuencia, por el principio de inducción finita, $S(n)$ es verdadera para todo $n \in \mathbf{Z}^+$.

En las Figuras 4 y 5 se puede observar que los números **1** y **2** relacionan los tramos de la demostración (Figura 4) con las partes correspondientes de la DG (Figura 5).

Figura 5. Fragmento de la de la Figura 2 de la DG de Dubinsky y Lewin.



En un ejemplo del libro de Grimaldi (1997), se observa la importancia que se le da al paso base del principio de inducción matemática. En dicho ejemplo se demuestra el paso inductivo (Ver Figura 5) para la siguiente proposición abierta

$$S(n): \sum_{i=1}^{n} i = \frac{n^2+n+2}{2}$$

(Grimaldi, 1997, p. 188)

y que dicha función proposicional es falsa para cualquier número natural, a pesar de cumplirse el paso inductivo del principio de inducción.

CONCLUSIÓN Y DISCUSIÓN

Si bien la presentación que realiza Grimaldi (1997) del principio de inducción sigue el mismo formato de diversos libros de matemática universitarios, él a diferencia de otros, muestra a través de variados ejemplos, la importancia del paso base. Otros autores también mencionan este punto, pero no tan explícitamente, por ejemplo Apostol (1984) lo muestra en un ejercicio que deja planteado a los lectores.

Interpretando la secuencia de ejemplos que presenta Grimaldi (1997), sostenemos que ellos promueven la encapsulación del principio de inducción matemática a partir de los procesos del paso base y del paso inductivo.

Agradecimientos. Este trabajo está siendo posible gracias al apoyo recibido del CONICYT para el desarrollo del proyecto Fondecyt Regular No. 1140801.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Apostol, T. (1984). *Calculus. Cálculo con funciones de una variable, con una introducción al álgebra lineal.* España: Editorial Reverté, S.A.

Arnon, I., Cottril, J., Dubinsky, E., Oktaç, A., Roa, S., Trigueros, M. & Weller, K. (2014). *APOS Theory. A framework for research and curriculum development in mathematics education.* New York: Springer.

Asiala, M., Brown, A., De Vries, D.J., Dubinsky, E., Mathews, D. & Thomas, K. (1996). A framework for research and curriculum development in undergraduate mathematics education. In J. Kaput, A. H. Schoenfeld, E. Dubinsky (Eds.) *Research in Collegiate Mathematics Education, 2,* 1-32. U.S.A.: American Mathematical Society.

Dubinsky, E. (1996). Aplicación de la perspectiva piagetiana a la educación matemática universitaria. *Educación matemática, 8* (3), 25-41.

Dubinsky, E. y Lewin, P. (1986). Reflective abstraction in mathematics education: The genetic decomposition of induction and compactness. *The Journal of Mathematical Behavior*, *5*, 55-92.

García-Martínez, I. y Parraguez, M. (2015). Refinamiento de una descomposición genética para el concepto de inducción matemática. *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa 28*, 765-773. México: Comité Latinoamericano de Matemática Educativa.

Grimaldi, R. (1997). *Matemáticas discreta y combinatoria. Una introducción con aplicaciones.* Estados Unidos: Addison - Wesley Iberoamericana, S. A.