REVISTA EMA
2000, VOL. 5, Nº 2, 152-169

UNA PROPUESTA PARA ABORDAR EL TEOREMA DE PITÁGORAS EN CLASE

PATRICIA PERRY

En este artículo se expone una propuesta de enseñanza para presentar el teorema de Pitágoras a alumnos de educación media. También se refieren algunos detalles del análisis que fundamentó la propuesta. Esta incluye trabajo de los estudiantes en torno a la desigualdad triangular, a la relación pitagórica y a expresiones algebraicas.

INTRODUCCIÓN

De la amplia gama de actividades que son propias de un docente, una que disfruto especialmente es el diseño de tareas de enseñanza pues la percibo como una oportunidad importante para la creatividad en la búsqueda de alternativas, para la aplicación del conocimiento profesional construido a través de la experiencia laboral y para el ejercicio de la autonomía en la toma de decisiones, tres circunstancias que para mí pueden compensar algunos sinsabores que el docente enfrenta en su quehacer diario.

La propuesta de enseñanza que se presenta en este artículo es resultado de la reflexión[1] que hice para cumplir con una tarea que formulé en un programa de desarrollo profesional para docentes de matemáticas del que he sido profesora. Bajo el supuesto de que es posible y conveniente que el profesor se ponga en el lugar de sus estudiantes para poder juzgar aspectos de la tarea que les ha planteado (e.g., lo que la tarea puede poner en juego y significar para los alumnos) quise vivir, por lo menos parcialmente, una experiencia similar a la de mis alumnos del programa. Digo parcialmente porque aunque lo hubiera querido no habría podido vivirla de manera completa. La tarea[2] incluía no sólo un análisis que condujera al diseño de una propuesta de enseñanza de un contenido matemático y la propuesta misma, sino también ponerla en práctica y observar algo específico con respecto a su implementación; actividad que yo no podía hacer pues en dicho momento no tenía a mi cargo cursos de matemáticas.

1. Las varias versiones por las que pasó la propuesta hasta llegar a la que aquí se presenta fueron mejoradas con los valiosos comentarios de diferentes colegas; quiero agradecer particularmente a Hernando Alfonso, a Luisa Andrade y a Pedro Gómez.
2. El cuestionario de la tarea es una versión adaptada del cuestionario presentado en Herbst (1998, pp. 175-177).

Me decidí a trabajar el teorema de Pitágoras por su relevancia dentro de las matemáticas escolares, por su riqueza de conexiones con otros conceptos y otros temas, y porque asociado a la relación pitagórica, hay un error que los estudiantes suelen cometer con alguna frecuencia y me interesaba buscar una alternativa para abordarlo.

A pesar de que en muchas ocasiones había trabajado en el diseño de situaciones de enseñanza para el salón de clase, esta vez el proceso que viví se caracterizó por una reflexión sistemática y productiva que atribuyo en buena medida a la forma como me aproximé al problema. Durante todo el proceso tuve en mente unas pocas preguntas que me impulsaban a indagar y concretar qué era lo que en esencia pretendía que los estudiantes vieran, notaran, y también me llevaban a pensar cómo evaluar con cierta confianza el logro de mis propósitos. Comencé por hacer un análisis en el que consideré con cierto detalle el tema matemático de interés y aspectos de enseñanza y aprendizaje del tema. Cuando había avanzado un poco en el análisis vi la necesidad de comenzar a concretarlo en el diseño mismo y así lo hice. Al ir buscando alternativas de tareas y preguntas encaminadas a lograr lo que me había propuesto, fui haciendo algunos cambios en el análisis —i.e., ampliaciones y modificaciones. De esa manera, para llegar a la propuesta de enseñanza que aquí se presenta viví un proceso dinámico que fluyó del análisis a priori de la situación al diseño curricular y de éste, nuevamente al análisis, proceso que tuvo tres iteraciones; en la última hice una lectura global para detectar una vez más incoherencias, inconsistencias y fallas.

Soy consciente de que el análisis que he hecho se podría mejorar: por un lado, se podrían haber contemplado aspectos de la fenomenología y la historia del contenido matemático implicado; por otro lado, con una experiencia más vívida con respecto a la enseñanza y aprendizaje del tema específico, podría haber hecho consideraciones más puntuales y profundas. Sé también que la propuesta sería más clara y precisa si hubiera explicitado mi posición en relación con la enseñanza y el aprendizaje con miras a justificar, por ejemplo, la selección de las preguntas y tareas propuestas.

La intención del artículo es mostrar la complejidad que tiene el diseño de tareas de enseñanza y presentar algunos de los elementos que se deben tener en cuenta en esta labor. Para esto se exponen detalles del análisis que fundamentó la propuesta y la propuesta misma.

ASPECTOS DEL ANÁLISIS INICIAL

Como parte del análisis del contenido matemático, se comenzó por identificar los conceptos centrales en el enunciado del teorema, es decir, los conceptos sobre los cuales se construye el significado de éste. Al hacerlo se evidenció que, según como se enuncie, hay implicados unos u otros conceptos. Es posible enunciarlo en términos de áreas, de medidas de área o de cuadrados de medidas de longitud[3]. Esto llevó a hacer una revisión de las distintas formas en que se puede presentar el teorema, y por tanto, a trabajar en el análisis de instrucción. De la gran diversidad de pruebas que se conocen del teorema de Pitágoras se consideraron seis presentadas en Alfonso (1997, pp. 222-224; 281-285) y para cada una de ellas se identificaron los conceptos y procedimientos implicados. Posteriormente, como parte del análisis cognitivo, se identificaron errores que los estudiantes cometen relacionados con el teorema y el buscar posibles causas o explicaciones condujo a reconocer temas que puede ser relevante trabajar en forma asociada con el teorema.

Como resultado de este análisis conjunto se reconocieron cinco temas relacionados estrechamente con el enunciado del teorema y con las pruebas consideradas, a saber: triángulos rectángulos, triángulos, cuadriláteros convexos, segmentos de recta y expresiones algebraicas. El esquema de la Figura Nº 1 resume en gran medida la exploración del contenido matemático realizada a partir y como consecuencia de dicho análisis.

Cabe anotar que para trabajar en la indagación del contenido matemático así como para ilustrarlo, se usó la herramienta de los esquemas conceptuales. Emplear tal herramienta constituye una oportunidad de penetrar en el contenido matemático a través de la identificación, selección, organización y relación de conceptos; su utilización en el diseño de actividades de enseñanza posibilita una visión global y estructurada del contenido matemático, base importante para tomar decisiones instruccionales.

Las decisiones tomadas a partir del análisis tuvieron en cuenta tanto aspectos del contenido matemático como consideraciones didácticas y de aprendizaje. Se optó por enunciar el teorema en términos de medidas de área y no en términos de cuadrados de medidas de longitud porque es posible visualizar lo primero pero no lo segundo, y además, la prueba para el teorema en el segundo caso requiere buena cantidad de elaboración lo que puede dificultar las cosas innecesariamente. Dado que el teorema se establece en tér-

---

3. Si el teorema se piensa en términos de áreas se puede enunciar así: el área del cuadrado de lado congruente con la hipotenusa de un triángulo rectángulo es igual que la suma de las áreas de los cuadrados de lados congruentes con los catetos de dicho triángulo. En términos de medidas de áreas se puede enunciar así: la medida del área del cuadrado de lado congruente con la hipotenusa de un triángulo rectángulo es igual que la suma de las medidas de las áreas de los cuadrados de lados congruentes con los catetos de dicho triángulo. Si se piensa en términos de los números que miden las longitudes de los lados del triángulo, se puede enunciar así: el cuadrado (como potencia) de la medida de la longitud de la hipotenusa de un triángulo rectángulo es igual que la suma de los cuadrados de las medidas de las longitudes de los catetos de dicho triángulo.

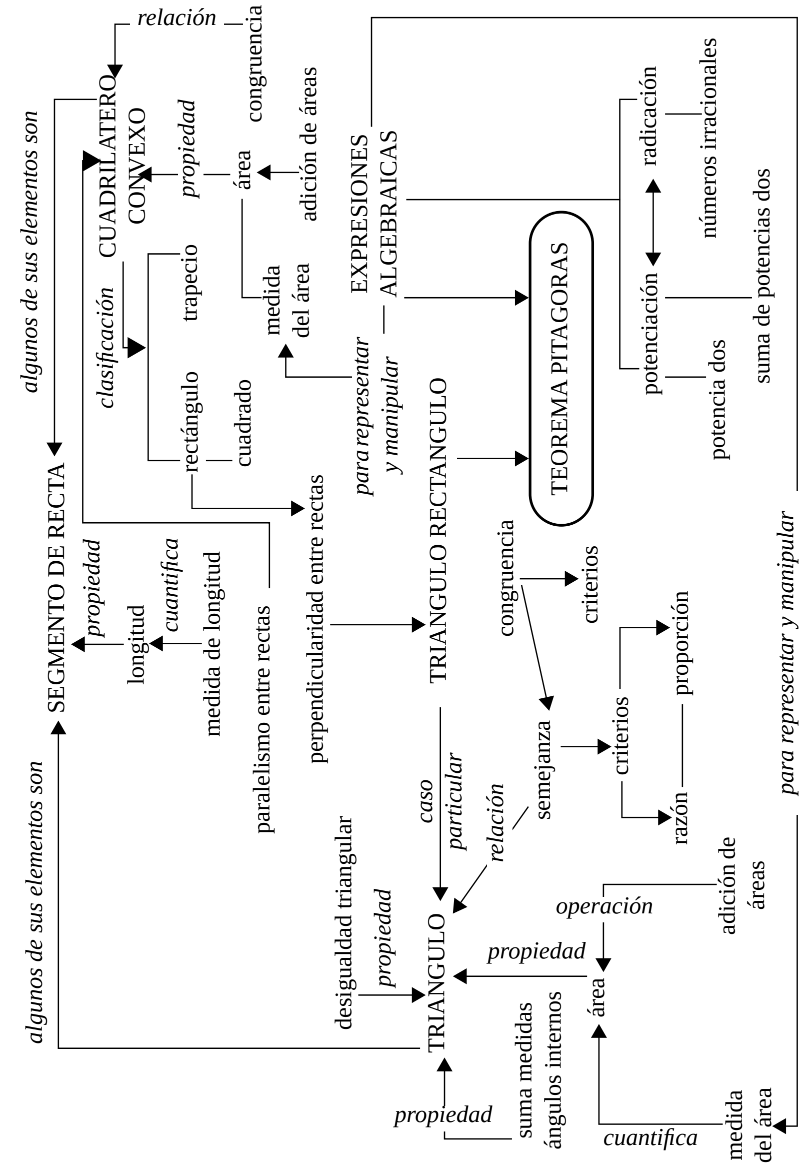


Figura Nº 1. Esquema conceptual relativo al enunciado y a algunas pruebas del teorema de Pitágoras minos de medidas de áreas de cuadrados cuyos lados son respectivamente congruentes con los lados del triángulo rectángulo —y por tanto, se puede hacer coincidir un lado de cada cuadrado con el correspondiente lado del triángulo— podría parecer que, desde un punto de vista didáctico, una prueba apropiada en este caso fuera una en la que la representación gráfica contribuyera lo más posible a visualizar el enunciado del teorema. Pese a ver la ventaja anotada anteriormente, en dos de las pruebas encontradas se desistió de ellas por considerar que las construcciones auxiliares y los prerrequisitos para llevarlas a cabo son innecesariamente difíciles para el simple propósito de que los estudiantes vean que el resultado es cierto y vale para todos los triángulos rectángulos. Se eligió entonces una prueba que aunque se apoya en una representación gráfica en la que no se evidencia directamente el enunciado del teorema, compromete pocos requisitos y facilita ver la igualdad a la que se refiere el teorema —aunque sin relacionarla con el triángulo. La decisión anterior puso de manifiesto la necesidad de construir un puente que acercara, que relacionara directamente, el enunciado del teorema y la representación gráfica en la que se basa su prueba (ver Figura N^{o} 2). Todas esas decisiones fueron motivadas especialmente por el interés de que los estudiantes entiendan una prueba del teorema y puedan participar activamente en la construcción de ella.

Con la decisión de cómo enunciar el teorema y qué prueba utilizar podría haberse terminado el análisis para la propuesta. Sin embargo, no fue así, y se continuó con el análisis cognitivo.

Al pensar en errores típicos de los estudiantes cuando aplican el resultado del teorema, como estrategia para identificar elementos o aspectos del contenido que por su naturaleza son difíciles y por tanto ameritan un tratamiento especial, se encontró que es sobresaliente el error $\left(a^2 + b^2 = c^2\right) \rightarrow (a + b = c)$ donde *a*, *b* y *c* representan respectivamente las medidas de las longitudes de los catetos y la de la hipotenusa de un triángulo rectángulo o en otros casos en los que no hay relación directa a cuestiones geométricas. Dicho error no es inherente al teorema de Pitágoras pues un estudiante que maneje apropiadamente las expresiones algebraicas podría no cometer el error mencionado sin necesidad de comprender el significado geométrico del teorema. Sin embargo, se tiene la hipótesis de que no reconocer aquella deducción como errónea refleja un manejo mecánico, no significativo, tanto del resultado del teorema como de su relación con otros hechos matemáticos. Que un estudiante acepte como correcto, por ejemplo, que $\left(3^2 + 4^2 = c^2\right) \rightarrow (3 + 4 = c)$ induce a pensar, en el contexto de los triángulos rectángulos, que no ve que los números 3, 4 y 7 serían las medidas de los lados de un triángulo y, en todo caso, no imagina el objeto al que se estaría refiriendo indirectamente; es decir, no da significado geométrico, en términos de los lados del triángulo, a la expresión que se refiere a la relación pitagórica. Y, en el contexto de la prueba del teorema, induce a pensar que no establece la correspondiente relación entre las áreas de los cuadrados y las longitudes de los lados de dichos cuadrados; no ha imaginado una representación gráfica de tal situación. La reflexión anterior condujo a ver la necesidad y pertinencia de enmarcar el contenido del teorema de Pitágoras entre dos conceptos fundamentales que pueden servir como mecanismo para dar significado al resultado que enuncia el teorema y controlar la ocurrencia del error al aplicar el enunciado. Dichos conceptos son, de una parte, la desigualdad triangular y el rango de variación de la medida de la longitud de un lado de un triángulo cuando se han fijado las medidas de los otros dos lados; y, de otra parte, algunas características de las expresiones algebraicas —i.e., una expresión puede representar tanto un proceso como un resultado; el operador raíz cuadrada para la adición no es lineal.

PROPUESTA Y ALGUNOS ASPECTOS DEL ANÁLISIS POSTERIOR

Para complementar el análisis cognitivo, desde la perspectiva del aprendizaje del tema, y el de la instrucción, desde la perspectiva de lo que el profesor quiere lograr, se respondieron dos preguntas, que estuvieron presentes como guía para el trabajo del diseño.

1) Con las tareas de enseñanza que se van a diseñar, ¿qué se quiere que los estudiantes vean, qué se espera que ellos noten con respecto a los tres conceptos identificados anteriormente?
2) ¿Cómo se puede averiguar con cierta confianza si se lograron los propósitos establecidos?

Es conveniente hacer dos comentarios al respecto de las preguntas anteriores y lo que puede significar para un profesor responder a ellas. Con alguna frecuencia, como un lugar común, los profesores tenemos que responder a la pregunta “¿cuál es su objetivo para esta clase?” Y, la respuesta que damos suele ser otro lugar común del estilo “... que los alumnos aprendan/adquieran/construyan el concepto de...” y “... que los alumnos desarrollen su capacidad para...”. Son lugares comunes porque son preguntas y respuestas hechas sin ahondar en lo que ellas implican en términos del aprendizaje y la enseñanza. ¿Tiene sentido pensar que en una hora de clase, con una o dos actividades que se realicen durante ella, los alumnos aprenden/adquieren/construyen un concepto matemático o desarrollan la capacidad para...? Probablemente no. Y, lo que es peor, pensar en esos términos contribuye a eludir una reflexión de parte del profesor acerca de aspectos esenciales del aprendizaje y la enseñanza de los contenidos matemáticos particulares. Pensar acerca de elementos específicos o características puntuales de un concepto que el profesor quiere destacar o discutir de manera especial ante o con sus estudiantes a través de involucrarlos en una determinada actividad es una pregunta fundamental que exige del profesor una respuesta más genuina, que además le puede servir como guía para mirar la coherencia entre lo que pretende en cada clase y lo que propone para lograrlo.

La segunda pregunta aborda un aspecto de importancia vital para el aprendizaje y la enseñanza: la inferencia que el profesor tiene que hacer permanentemente para establecer en qué medida sus estudiantes están dando sentido y significado e integrando apropiadamente los mensajes e ideas que a través de las diferentes actividades e interacciones el profesor tenía la intención de poner en juego o destacar. Un indicador utilizado con mucha frecuencia cuando la tarea propuesta es el desarrollo de una guía de trabajo, es “la cercanía” de las respuestas de los alumnos a unas respuestas deseables o consideradas correctas. A pesar de que efectivamente ese puede ser un indicador, no es claro que sea el único ni el mejor, aunque sí el más obvio. No es tan evidente que las preguntas con sus correspondientes respuestas a través de las cuales se fue construyendo un mensaje, una idea que era nueva para los alumnos, constituyan el mejor indicador para constatar la calidad del proceso vivido en la clase y de sus resultados en los estudiantes. Así pues, para responder la segunda pregunta formulada se buscaron diversas alternativas que pueden contribuir a dar información acerca del sentido que dio el alumno a la actividad.

A continuación, para cada uno de los dos conceptos elegidos —desigualdad triangular y expresiones algebraicas— y para la relación pitagórica en sí misma, se da una respuesta particular a las dos preguntas formuladas y se presentan las tareas de enseñanza que se diseñaron utilizando el análisis hecho a través de las respuestas.

Desigualdad triangular

Con relación a la desigualdad triangular se pretende trabajar con los estudiantes tres ideas principales. Se quiere que los estudiantes:

1) Se den cuenta de que tal concepto establece una cierta relación entre las medidas de las longitudes de los lados de cualquier triángulo, en particular, de un triángulo rectángulo y que se entra en contradicción con dicha relación cuando se deduce $a + b = c$ a partir del hecho de que $a^2 + b^2 = c^2$, en el contexto de los triángulos rectángulos.

2) Vean que la medida de la longitud de cualquier lado de un triángulo, dadas las medidas de los otros dos lados, tiene un cierto rango de variación y establezcan cuál es dicho rango.

3) Adopten la desigualdad triangular y la información con respecto al rango de variación como una referencia común para el curso y les sirva como criterio de autoridad para establecer si la medida encontrada para uno de los lados de un triángulo puede ser correcta o definitivamente no puede serlo.

Primera tarea: trabajo en grupos pequeños

Para responder a las siguientes preguntas trabajen en grupos de tres alumnos. Se quiere que discutan entre los miembros del grupo las preguntas formuladas para llegar a dar una respuesta que sea el consenso del grupo. Si no lo logran escriban las diferentes respuestas. Tengan presente que siempre es necesario justificar sus respuestas.

1) Un mensajero debe ir con frecuencia del punto A al punto C. El punto B no está en la recta que une A con C. A veces el mensajero hace el recorrido pasando por B (va directo de A a B y luego va directo de B a C) y otras veces va directo de A a C. Comparen las longitudes del recorrido que hace en cada caso; para hacerlo consideren diversas posiciones del punto B. ¿Qué pueden decir?

2) Con base en las situaciones consideradas en el ítem anterior, ¿ven alguna propiedad que crean que se debe cumplir en los triángulos? Si es así, enúncienla.

3) Si dos lados de un triángulo miden respectivamente 3 y 4 centímetros. ¿Cuáles son algunas posibles medidas del otro lado? Ilustren sus respuestas con ejemplos.

4) Dibujen los triángulos cuyos lados miden: (a) 3, 4 y 5.8 centímetros; (b) 3, 4 y 1.8 centímetros; (c) 3, 4 y 5 centímetros; (d) 3, 4 y 12 centímetros.

5) ¿Cómo sería la representación gráfica de un triángulo cuyos lados midieran 3, 4 y 7 centímetros? Expliquen su respuesta.

6) ¿Cómo sería la representación gráfica de un triángulo cuyos lados midieran 3, 4 y 1 centímetros? Expliquen su respuesta.

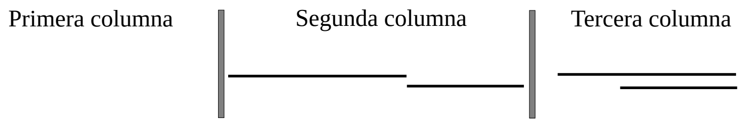
7) A continuación se dan las medidas de dos lados de tres triángulos: (a) 3 y 4 centímetros, (b) 5 y 9 centímetros, (c) 7.5 y 2.5 centímetros. Para cada caso determinen ¿cuánto puede medir el tercer lado? ¿Es única la respuesta? ¿Hay valores que no puede tomar la medida del otro lado? Expliquen su respuesta.

Después del trabajo en grupos pequeños se hará una puesta en común para establecer a qué resultados llegaron los diversos grupos y comenzar a formular conjeturas acerca del rango de variación de la medida de la longitud del tercer lado de un triángulo.

Segunda tarea: trabajo en el grupo grande

Con esta tarea se pretende que el alumno pueda ver cómo varía la medida de uno de los lados de un triángulo cuando las medidas de los otros dos lados son valores fijos. El trabajo es individual. El profesor formula la primera pregunta, da tiempo para que los alumnos la respondan en sus cuadernos y antes de seguir con la segunda pregunta se hace una discusión para conocer las respuestas de los alumnos, aclarar dudas e ir construyendo el discurso en torno al tema. De manera similar se continúa para abordar la siguiente serie de preguntas. (Se requiere regla —para unir puntos colineales y no para medir— y compás —para comparar longitudes o trazar arcos de circunferencia.)

1) Divida en tres columnas la hoja en la que va a trabajar. En la segunda columna dibuje tal como se muestra dos segmentos de recta (preferible que sean de diferente longitud y que la diferencia sea notoria). Dese cuenta de la forma como están colocados tales segmentos. En la tercera columna dibuje, tal como se muestra, dos segmentos de recta congruentes con los que trazó anteriormente. Dése cuenta de la forma como están colocados tales segmentos.



2) En la primera columna vamos a trazar una gran cantidad de triángulos dos de cuyos lados sean congruentes con los segmentos trazados en la segunda y tercera columna. Para ello, dibuje un segmento de recta congruente con el más largo que trazó en la segunda columna y —por comodidad— trácelo en posición horizontal. Con el compás haga centro en el extremo izquierdo del segmento y trace una circunferencia de radio congruente con el segmento más corto que trazó en la segunda columna. Con esa construcción auxiliar, usted puede dibujar muchísimos triángulos que tengan dos de sus lados congruentes con los segmentos trazados en la segunda columna. Dibuje ocho de ellos.

3) ¿Puede decir algo con respecto a la longitud del tercer lado de los triángulos en términos de las longitudes de los otros dos lados (los de longitud congruente con los segmentos trazados)? ¿Qué puede decir?

4) En lo que sigue, vamos a comparar la longitud del tercer lado de cada uno de los ocho triángulos con la suma de las longitudes de los otros dos lados y con la diferencia de las longitudes de los mismos. Para ello, en la segunda y tercera columna, debajo de los segmentos que dibujó al inicio, trace segmentos congruentes con el tercer lado de los diferentes triángulos construidos. En cada caso, trace los segmentos de manera que le sea fácil comparar sus longitudes con la del segmento que resulta de unir los dos trazados al principio o de recor-

tar del más largo un pedazo congruente con el más corto. En ambos casos haga la comparación y exprese lo que encuentra.

Hemos estado trabajando con varios triángulos que tienen dos de sus lados respectivamente congruentes, pero el tercer lado no. Llamemos a y b las medidas de los lados congruentes de los diversos triángulos y c la medida del tercer lado.

5) Entre los triángulos que tienen dos lados de medidas a y b, ¿existe alguno cuyo tercer lado mida $a + b$? ¿Por qué? ¿Existe algún triángulo cuyo tercer lado mida más que $a + b$? ¿Por qué?

6) Entre los triángulos que tienen dos lados de medidas a y b, ¿existe alguno cuyo tercer lado mida $a - b$? Por qué? ¿Existe algún triángulo cuyo tercer lado mida menos que $a - b$? ¿Por qué?

7) Escriba un texto en el que exprese el resultado obtenido con esta actividad.

Como actividad final que permita dar cuenta de qué se logró en los estudiantes puede propiciarse un espacio donde ellos puedan expresar con sus palabras el resultado al que se ha llegado después de haber realizado todo el proceso. Para ver si utilizan el resultado establecido con respecto al rango de variación, como criterio para construir triángulos, se podría formular, por ejemplo, la siguiente pregunta:

Dé las medidas de tres segmentos con los cuales no sea posible construir un triángulo y explique por qué está seguro de que no se puede construir dicha figura.

Relación pitagórica

Con respecto a la relación pitagórica se quiere que a través de la actividad los estudiantes puedan centrar su atención en dos asuntos relevantes del correspondiente contenido matemático.

1) Vean que la relación pitagórica se cumple en todos los triángulos rectángulos y sólo en ellos[4].

2) Vean o noten que la relación que establece el enunciado del teorema es entre las medidas de las áreas de los cuadrados de lados respectivamente congruentes a los lados del triángulo rectángulo, pero que de dicha relación se puede deducir la correspondiente relación entre las medidas de longitud de los lados del triángulo.

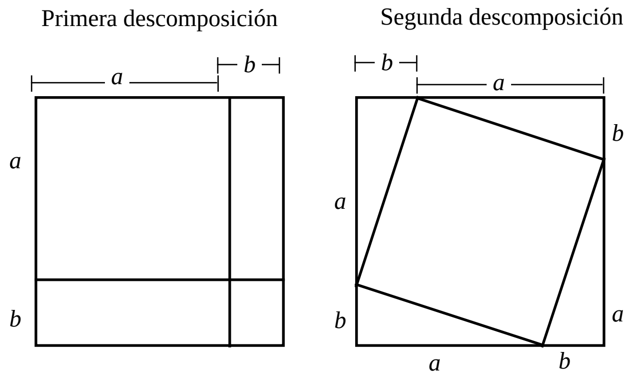
4. En realidad el teorema de Pitágoras sólo establece uno de los sentidos de dicha relación: la que enuncia que si un triángulo es rectángulo, entonces se cumple la relación pitagórica. No obstante, en esta propuesta se pretende que el estudiante vislumbre la equivalencia.

Primera tarea: trabajo en grupos pequeños

Para responder a las siguientes preguntas trabajarán en grupos de tres alumnos. Deberán escribir la respuesta a la penúltima pregunta en un pliego de cartulina para hacer en la clase una exposición sobre los diferentes casos tratados.

Las letras *a* y *b* de la figura siguiente representan las medidas de longitud de los segmentos marcados; pueden tomar cualquier valor positivo, pero el mismo para cada letra en ambas figuras.

1) Describan detalladamente, por separado, las dos figuras que se muestran a continuación. ¿Qué relación hay entre las dos figuras? Atendiendo a la descomposición de cada región, ¿ven que se cumplan igualdades entre áreas de las dos figuras? ¿Qué igualdades? Marquen con el mismo color las áreas iguales en las dos figuras.



Dos descomposiciones del área de un cuadrado de lado a + b

2) Darío y Bertha afirman que "... parece que el cuadrado de lado *a* de la figura de la izquierda tiene área igual al cuadrilátero que en la figura de la derecha está rodeado por los cuatro triángulos". ¿Consideran ustedes que dicha afirmación sea verdadera? ¿Por qué?

3) En la segunda descomposición, el cuadrilátero que está rodeado por cuatro triángulos **es** un cuadrado. Expliquen por qué se puede asegurar que sus lados son congruentes y que sus ángulos son rectos.

Llamemos *c* la medida del cuadrado que está rodeado por cuatro triángulos rectángulos en la segunda descomposición, es decir, llamemos, *c* la medida de la hipotenusa de dichos triángulos.

4) Expresen la medida del área del cuadrado de lado $a + b$, utilizando las dos descomposiciones que se presentan en el primer punto de esta tarea.

5) ¿Qué relación hay entre las dos expresiones anteriores? ¿Por qué? Escriban dicha relación.
6) Escriban una expresión en la que utilizando la información de las dos descomposiciones, digan a qué es igual la medida del área del cuadrado cuyo lado mide *c*.
7) Revisen la respuesta a la pregunta 2. ¿La justificación dada es adecuada?
8) Con valores específicos para *a* y *b*, comprueben para dos casos diferentes la relación que se encontró en la pregunta sexta. Hagan la correspondiente representación gráfica.
9) Expresen por escrito el resultado al que se llegó con esta actividad.

La discusión posterior al trabajo en grupo partirá de la respuesta que dieron los alumnos a las dos últimas preguntas, y se buscarán oportunidades para revisar indirectamente las respuestas a otras preguntas y especialmente a las justificaciones que debían dar.

Segunda tarea: trabajo en el grupo grande

Para establecer la relación pitagórica, el profesor hará una explicación basada en el resultado al que se llegó con la actividad anterior. Dicha explicación se centrará en que es posible leer el resultado obtenido, $a^2 + b^2 = c^2$, refiriéndose a un triángulo rectángulo ya que *a*, *b* y *c* en la segunda descomposición con la que se trabajó representan respectivamente las medidas de las longitudes de los dos catetos y la hipotenusa de un triángulo rectángulo (ver Figura Nº 2). Lo más natural y coherente con lo hecho hasta ahora es enunciar el teorema de Pitágoras en términos de medidas de áreas de los cuadrados construidos sobre los lados del triángulo rectángulo.

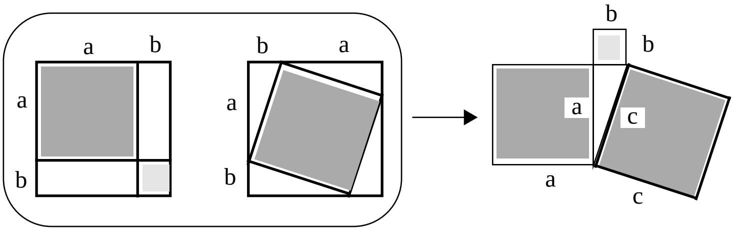
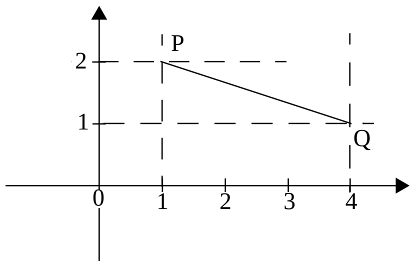


Figura Nº 2. Representación gráfica para una demostración del teorema de Pitágoras

Tercera tarea: trabajo en grupos pequeños y puesta en común

Para realizar esta tarea, los estudiantes dispondrán de cierto tiempo para discutir y responder cada pregunta. Antes de continuar el trabajo con la siguiente pregunta se hará una puesta en común para revisar respuestas e ir aclarando dudas.

1) Se sabe que los cuadrados construidos sobre los catetos de un triángulo rectángulo (el lado de cada cuadrado coincide con uno de los catetos) tienen área igual a 36 y 64 centímetros cuadrados. ¿Cuál es la medida del área del cuadrado construido sobre la hipotenusa?
2) Si se conoce la medida del área de un cuadrado es posible deducir la medida de la longitud del lado del cuadrado. ¿Es verdadera dicha afirmación? Expliquen su respuesta.
3) Utilice la información de los dos ítems anteriores para construir con precisión el triángulo descrito en el ítem 1.
4) Sobre uno de los catetos de un triángulo rectángulo y coincidente con dicho cateto se puede construir un cuadrado cuya área mide 144 centímetros cuadrados; el otro cateto del triángulo mide 5 centímetros. Dibujen tal triángulo y expliquen su respuesta. ¿Cuánto mide la hipotenusa?
5) La hipotenusa y un cateto de un triángulo rectángulo miden 6 y 4 centímetros respectivamente. ¿Cuánto mide el área del cuadrado (de lado congruente con el otro cateto) que se puede construir sobre el otro cateto del triángulo? ¿Cuánto mide la longitud de dicho cateto?
6) Consideren la información dada en la siguiente gráfica para calcular la medida de la longitud del segmento cuyos extremos son P y Q.



Cuarta tarea: trabajo para pensar por fuera de clase

1) Las medidas de los lados de un triángulo son 8, 10.2, y 6 centímetros. Un estudiante de octavo grado afirma que tal triángulo es rectángulo. ¿Tiene razón el estudiante? ¿Por qué?
2) La relación pitagórica se cumple para **todos** los triángulos rectángulos. ¿Se cumplirá algo similar para triángulos que no sean rectángulos? Es decir, si el triángulo ABC no es rectángulo y sus lados miden a, b y c siendo c la medida del lado más largo, ¿se cumple que $a^2 + b^2 = c^2$? Para responder a esta pregunta explore la situación tomando medidas y haciendo cálculos.
3) Con base en las cuatro actividades anteriores, redacte un párrafo acerca del teorema de Pitágoras.

Para examinar si los estudiantes entendieron cuáles son las condiciones bajo las que se cumple la relación pitagórica, se puede observar si en el escrito en el que hablen del teorema se refieren a triángulos rectángulos. Por otra parte, se puede observar si para aplicar la relación tienen en cuenta qué clase de triángulo es el que se tiene. También se puede observar si se dan cuenta de que el hecho de que la relación se cumpla para todos los triángulos rectángulos hace que no sea posible tener un triángulo rectángulo en el que la relación no se cumpla; para ello, se observará la respuesta que den a la primera pregunta de la cuarta tarea.

Como actividad final que permita constatar cuál es, para los estudiantes, la relación que establece el teorema de Pitágoras y cuál es la relación que se puede deducir de éste, se puede observar el manejo de las representaciones verbales y gráficas que utilicen y las justificaciones que construyan, en las respuestas que den a las preguntas de la tercera tarea.

Expresiones algebraicas implicadas

Con respecto a las expresiones algebraicas se ha considerado relevante trabajar con los estudiantes en tres asuntos. Se quiere que:

1) Noten, en el contexto de los triángulos rectángulos, el error que se comete cuando se deduce que $a + b = c$ a partir de $a^2 + b^2 = c^2$ y vean que es un error que entra en contradicción con lo que enuncia la desigualdad triangular.

2) Se den cuenta de que las expresiones algebraicas denotan tanto un proceso como el resultado de dicho proceso.

3) Se den cuenta de que el operador raíz cuadrada para la adición no es lineal.

Primera tarea: trabajo individual

Inicialmente los estudiantes trabajarán en forma individual. Después se reunirán en grupos de a tres para discutir sus respuestas y llegar a una respuesta del grupo.

1) Tres casas (C, D y E) están ubicadas formando ángulo recto, con D en el vértice de dicho ángulo. La distancia entre C y D es de 3 km. y la distancia entre D y E es de 4 km. Alberto dice que la distancia entre C y E es de 7 km. porque:
   (a) Como las casas están ubicadas formando ángulo recto, se puede construir un triángulo rectángulo que tenga como vértices a C, D y E y se puede aplicar el teorema de Pitágoras.
   (b) Al aplicar el teorema de Pitágoras se cumple que:
   $3^2 + 4^2 = (\text{distancia entre C y E})^2$

(c) De lo anterior se deduce que:

$3 + 4 =$ (distancia entre C y E)

(d) Por tanto, la distancia entre C y E es 7 kilómetros.

¿Usted qué opina del razonamiento y de los cálculos realizados por Alberto? Explique su respuesta tanto como pueda.

2) Según los resultados establecidos en clases anteriores, si dos de los lados de un triángulo miden 3 y 4 unidades de longitud, ¿cómo sería tal triángulo si su tercer lado midiera 7 unidades de longitud? ¿Puede entonces ser correcta la afirmación de Alberto con respecto a la distancia entre C y E? Explique.

3) El razonamiento de Alberto, que lo conduce a afirmar que $3^2 + 4^2 =$ (distancia entre C y E)^2, es correcto pues lo que ha hecho es aplicar correctamente el teorema de Pitágoras en un caso en el que se puede aplicar, pues el triángulo es rectángulo. Según tal afirmación, ¿cuál es el valor del cuadrado de la distancia entre C y E? Y, por tanto, ¿cuál es el valor de la distancia entre C y E?

4) Explíquele a Alberto en dónde estuvo su error, por qué es error y cómo se corrige.

5) Desde la geometría, las expresiones algebraicas a^2 y a (a es positivo) se pueden interpretar respectivamente como la medida del área de un cuadrado cuyo lado mide precisamente a. En términos geométricos, explique qué se está afirmando cuando se hace la siguiente deducción

$$\left(3^2 + 4^2 = x^2\right) \rightarrow (3 + 4 = x).$$

Muestre gráficamente que el cuadrado de lado 7 es de mayor tamaño que el cuadrado cuya área (x^2) es igual a la suma de las áreas de los dos cuadrados dados.

6) La hipotenusa y uno de los catetos de un triángulo rectángulo miden respectivamente $2p$ y $3q$ unidades de longitud, siendo p y q números positivos.

   a. Asigne valores específicos a p y a q para construir tres de tales triángulos. Represéntelos gráficamente.

   b. Para cada uno de los tres triángulos, llame c la medida del otro cateto y calcúlela. Exponga detallada y organizadamente los cálculos.

   c. Enuncie todos los pasos seguidos para calcular la medida del cateto.

7) Al asignar valores específicos a p y a q, las medidas de la hipotenusa y de uno de los catetos del triángulo rectángulo que así se define, son valores numéricos y por tanto conocidos. Con dichos valores es posible calcular la medida del otro cateto aplicando el enunciado del teorema de Pitágoras y deduciendo el valor de la incógnita. Pero, ¿qué sucede si no se han asignado valores específicos a p ni a q, y por tanto las medidas de la hipotenusa y de uno de los catetos no son valores numéricos sino expresiones algebraicas? ¿Es diferente el proceso para establecer la expresión que representa la medida del otro cateto? ¿En qué se diferencia? Escriba la expresión que representa la medida del otro cateto.

8) Para los triángulos rectángulos que se describen a continuación, determine la medida que falta:

   a. Uno de los catetos mide 5 unidades y la hipotenusa mide $13a$ unidades.

   b. Uno de los catetos mide $4x$ unidades y el otro mide $5z$ unidades.

9) Las medidas de los lados de un triángulo rectángulo cumplen que $x^2+y^2=z^2$. Explique por qué $z \neq x + y$. Escriba la expresión correcta para z y explique su respuesta.

Al final de esta tarea se hará una puesta en común; se discutirán sobre todo las justificaciones correspondientes.

Segunda tarea: trabajo para la casa

1) Escriba un texto en el que resuma las ideas principales que se discutieron en la secuencia de tareas para desarrollar el tema del teorema de Pitágoras. Haga las aclaraciones que considere importantes y dé los ejemplos que considere que pueden ayudar a aclarar lo que está diciendo.

REFLEXIÓN FINAL

Para concluir este artículo haré una reflexión breve en torno a la propuesta de enseñanza y a algunos aspectos de la experiencia vivida al elaborar dicha propuesta.

Qué tan adecuada puede resultar una propuesta de enseñanza para un tema específico cuando al implementarse en el salón de clase depende ya no sólo de la calidad de la propuesta misma sino de factores contextuales tales como características propias del grupo de alumnos (e.g., el conocimiento previo que tienen, la forma que tienen de trabajar en la clase de matemáticas, el lenguaje que manejan, etc.), características propias del profesor (e.g., el conocimiento que tiene de sus alumnos y del tema, la capacidad que tiene de prever las respuestas de los estudiantes, la capacidad que tiene de percibir e interpretar las señales que dan los alumnos en relación con lo que están entendiendo, etc.), y características de la interacción que se genere en el salón de clase entre el profesor y los alumnos y entre los alumnos en torno al conocimiento matemático específico que se está tratando.

Las consideraciones anteriores sugieren que no tendría sentido pretender seguir al pie de la letra la propuesta de enseñanza que aquí se presenta —dado el caso que un profesor la encontrara atractiva o interesante. En dicho caso, debería haber un análisis cuidadoso que permitiera hacer las modificaciones necesarias según el contexto en el que se fuera a implementar. Tal análisis debería incluir entre otras cosas la exploración del conocimiento —

conceptual y procedimental— que es prerrequisito para poder involucrarse satisfactoriamente en el desarrollo de las diferentes tareas.

Como quedó dicho al inicio, emprendí el trabajo que aquí se presenta para tener elementos de juicio con respecto a lo que puede significar para un profesor llegar a elaborar una propuesta de enseñanza de un tema específico sobre la base de un análisis que contemple el conocimiento matemático involucrado, su enseñanza y aprendizaje. Como resultado de esta experiencia vivida puedo decir que se trata de una tarea ardua principalmente porque involucrarse seriamente en su realización exige unas condiciones y unos comportamientos que no son los que uno como docente acostumbra tener.

En primer lugar se requiere encontrarle sentido a la realización de la tarea. Lo habitual es preparar las clases sobre la marcha del curso, basándose principalmente en la intuición, conocimiento y razonamiento pedagógico del profesor, con muy poco tiempo disponible para llevar a cabo un análisis detallado, para planear las tareas que se propondrán a los alumnos y para revisarlas antes de implementarlas. Por tanto, para el profesor que a eso está acostumbrado no necesariamente le es obvia la importancia y los beneficios que puede tener invertir tanto esfuerzo y tiempo al diseño de una clase particular. En segundo lugar la realización de la tarea —el diseño de una propuesta de enseñanza fundamentada en un análisis— demanda de parte del profesor una serie de capacidades que no necesariamente tiene desarrolladas tanto como es menester, como son por ejemplo la capacidad para hacer previsiones, la capacidad para considerar diversas alternativas y elegir entre ellas con base en razones didácticas, la capacidad para monitorear su propio pensamiento y así tener un alto grado de consciencia con respecto a las muchas decisiones que toma y a lo que las fundamenta y la capacidad para asumir una posición crítica frente a sus propias propuestas.

Para terminar, quiero destacar dos hechos que me fueron evidentes durante el proceso de construcción de la propuesta de enseñanza. En realidad, hacer el análisis que fundamenta la propuesta de enseñanza y elaborar la propuesta no conforman un proceso lineal en el sentido de que una de las actividades tenga lugar después de la otra. El proceso, más bien, es cíclico y cada una de las dos actividades alimenta y es alimentada por la otra. Por otra parte, elaborar una propuesta de enseñanza —aun sin contar con la información que arroja su implementación en un determinado contexto— puede ser un proceso que sale enriquecido grandemente en la medida en que se someta a la crítica tanto de colegas como de quien la formuló. En este caso particular hice tres versiones anteriores a la que aquí presento y puedo asegurar que hay diferencias sustanciales entre la primera y la última versión gracias a un esfuerzo sistemático de revisión y reflexión en el que algunos colegas tuvieron mucho que ver. No obstante reconozco que esta última versión de la propuesta se puede mejorar; por ejemplo, las tareas que se presentan en la subsección titulada *Expresiones algebraicas implicadas* no tienen el grado de explicitación que sería deseable en relación con el propósito de lograr que los estudiantes "se den cuenta de que el operador raíz cuadrada para la adición no es lineal".

Aunque el trabajo descrito ha sido arduo no puede considerarse terminado o perfecto. Siempre será posible encontrar nuevos aspectos que considerar o cambiar, suprimir o mejorar. Sin embargo, esto es inherente al proceso de búsqueda que debe estar presente en una actividad de diseño curricular.

REFERENCIAS

Alfonso, H. (1997). *Geometría plana y del espacio desde un punto de vista euclidiano*. Bogotá.

Herbst, P. (1998). Reflexiones sobre las prácticas de la enseñanza en la formación profesional de los docentes en matemáticas. *Revista EMA, 3* (2), 170-180.

Patricia Perry
"una empresa docente"
Universidad de los Andes
A.A. 4976
Bogotá, Colombia
E-mail: pperry@uniandes.edu.co