

EL SIGNIFICADO DE LA DERIVADA

Javier Martínez Plazas¹

javiermartinezplazas@yahoo.com

Ferney Anturí Vargas²

feanva@gmail.com

Jaime Quintero Molina³

jaimequinterom@hotmail.com

Dwight Oswaldo Escalante⁴

dwiges001@hotmail.com

Universidad de la Amazonia

Resumen. En esta ponencia se presentan los resultados de la guía didáctica “*Significado de la Derivada*” desarrollada con los estudiantes del grado once C y la profesora Esperanza Yepes de la institución educativa San Francisco de Asís, construida al interior del Seminario “*Una mirada más profunda al Cálculo Diferencial e Integral*” como resultado de la reflexión del análisis documental y de libros de texto de matemáticas (o cálculo diferencial) sobre cómo abordar el significado de la derivada sin hacer uso del concepto de límite.

CONTEXTUALIZACIÓN

Los libros de texto de matemáticas presentan conceptos cargados de formalidad y abstracción descuidando el significado de los objetos matemáticos abordados, situación que genera problemas de aprendizaje. El enfoque Ontológico-Semiótico de las funciones cognitivas del doctor Juan D. Godino permite encontrar el significado de los conceptos matemáticos y el entendimiento de los objetos matemáticos. Los Sistemas de Representación de Duval permiten la movilidad de un concepto matemático por diferentes formas de representación, logrando la visualización de su significado; razón por la cual se utilizan como referente teórico para el este estudio. La presente ponencia es el resultado del desarrollo del seminario de profundización como opción de grado “*Una mirada más profunda al Cálculo Diferencial e Integral*”

¹Docente de la Licenciatura en Matemáticas y Física. Miembro y líder del Colectivo Investigación en Tecnologías de Educación Matemática, CITEM-UA. Esp. en Ciencias Físicas. Mag. en Matemáticas aplicadas.

²Docente de la Licenciatura en Matemáticas y Física. Miembro y líder del Colectivo Investigación en Tecnologías de Educación Matemática. Mag. en Matemáticas aplicadas.

³Licenciado en Matemáticas y Física. Universidad de la Amazonia. 2011.

⁴Licenciado en Matemáticas y Física. Universidad de la Amazonia. 2011.

desarrollado al interior de la Licenciatura en Matemáticas y Física (Universidad de la Amazonia) con la participación de quince estudiantes.

La presente ponencia expone ante la comunidad académica una forma de abordar el *Significado de la Derivada* sin utilizar el concepto de límite, partiendo de construcciones geométricas, diligenciamiento de tablas y modelación algebraica de las regularidades y patrones que se generan al estudiar la variación de las pendientes de segmentos (de diferente longitud) sobre la curva de una función.

Se expone al interior de ésta, como parte final, los resultados y las conclusiones que se obtuvieron con el desarrollo de la guía didáctica "*El Significado de la Derivada*" en la institución educativa San Francisco de Asís, con estudiantes del grado once C y la profesora Esperanza Yepes, a la cual aprovecho para agradecer toda la colaboración prestada.

Es de anotar que la presente ponencia no es el resultado de una investigación, sino de un estudio desarrollado al interior del seminario de profundización, por tanto no hay un soporte científico riguroso, sin embargo contiene elementos teóricos que lo hacen robusto en los resultados.

Los estudiantes Ladibier Losada Montoya, Jaime Quintero Molina, Yamileth Díaz Delgado, Dwight Oswaldo Escalante, Carol Andrea Ramírez conformaron el equipo que desarrolló el trabajo aquí presentado. Aprovecho el espacio para felicitarlos (a ellos y demás compañeros) y desearles éxitos profesionales.

REFERENTES TEÓRICOS.

Enfoque ontológico-semiótico (EOS) de las funciones cognitivas.

Uno de los grandes aporte que realiza el enfoque Ontológico Semiótico de las funciones cognitivas radica en el análisis de los significados de los objetos matemáticos; encontrar el significado de un objeto matemático basado en los significados personal e institucional, permite no solo abordar el proceso de aprendizaje (elemento sustancial de la didáctica) sino también de la enseñanza, siendo los conflictos semióticos los generadores y dinamizadores de dicha actividad.

Estos conflictos se abordan en investigaciones presentadas por los doctores Juan D, Godino, Carmen Batanero y sus colaboradores en el marco de grupos de investigación de la Universidad de Granada España, donde se aplica una técnica de análisis que tiene como base el modelo ontológico (naturaleza de los objetos) y un modelo semiótico (estudio de los signos) los cuales se integran para el desarrollo de una cognición en matemática.

Diferentes investigadores han planteado elementos que aportan al avance de la didáctica, uno de ellos, Balacheff (1990) plantea los siguientes interrogantes como esenciales para la didáctica: ¿Qué significado matemático de las concepciones de los alumnos podemos inferir a partir de una observación de su conducta? ¿Qué clase de significado pueden construir los alumnos en el contexto de la enseñanza de las matemáticas? ¿Cuál es la relación entre el significado del contenido a enseñar y el del conocimiento matemático elegido como referencia? ¿Cómo podemos caracterizar el significado de los conceptos matemáticos?

A su vez Sierpinska (1990), plantea de igual manera como básica para la Didáctica de la Matemática la idea de significado y la relaciona íntimamente con la comprensión: "Comprender el concepto será entonces concebido como el acto de captar su significado. Este acto será probablemente un acto de generalización y síntesis de significados relacionados a elementos particulares de la "estructura" del concepto (la "estructura" es la red de sentidos de las sentencias que hemos considerado). Estos significados particulares tienen que ser captados en actos de comprensión" (p. 27). En esencia se busca que sea el estudiante desde su propia práctica personal genere el significado de los objetos matemáticos.

Sistemas de Representación.

Uno de los elementos considerados claves para concebir el significado de un objeto matemático son los diferentes sistemas de representación, al respecto Duval(1993) plantea que "la particularidad del aprendizaje de las matemáticas hace que esta actividad cognitiva requiera de la utilización de sistemas de expresión y de representación distintos a los del lenguaje natural o de las imágenes: variados sistemas de escritura para los números, notaciones simbólicas para los objetos, escrituras algebraicas y lógica que toman el estatus de lenguaje paralelo al lenguaje natural para expresar las relaciones y las operaciones", dentro de las representaciones que éste identifica están: figuras geométricas, representaciones en

perspectiva, gráficos cartesianos, redes, diagramas, esquemas...etc, de esta afirmación se podría identificar como las principales, las de lenguaje natural (escritura para los números), notaciones simbólicas para los objetos y escrituras algebraicas y lógicas.

Al querer comunicar nuestras ideas, pensamientos o razonamientos es necesario recurrir a representaciones diferentes a la literal (a cualquier lenguaje), se puede utilizar dibujos, tablas, símbolos, etc., permitiendo exteriorizar las representaciones internas que por sí solas no podrían comunicar nada, aún más se necesita la puesta en común entre personas de una sociedad, crear una convención o ley que permita el entendimiento entre las partes. Wl respecto Rico (2000) expresa que “Hay que destacar, también, la idea de que las representaciones no están aisladas, sino que se articulan en sistemas estructurados”.

Para este caso seguiremos los tipos de representación que identifica Duval(1993), los que clasifica en tres tipos: registro de la lengua natural o verbal, registro algebraico y registro tablas y gráfico, cada uno con sus propias reglas y significación.

El análisis de contenido se realizó a través del análisis de texto identificando la forma como los textos usados en la educación media presentan el significado de la *derivada*. A partir de los resultados del análisis de contenido se diseñó una guía didáctica que permitiera llegar al significado de la derivada a partir de construcciones geométricas, identificación de regularidades y generación de patrones, para terminar con la modelación matemática de la función *derivada*, teniendo como elemento importante “*no usar el concepto de límite*”.

El trabajo termina con la construcción de la unidad didáctica “*El significado de la Derivada*”.Participaron 12 estudiantes del grado 11C en el desarrollo de la guía (intervención en el aula), distribuidos en tres grupos de cuatro estudiantes cada uno.

Descripción de la Experiencia de Aula.

La guía didáctica se denominó: SIGNIFICADO DE LA DERIVADA, se realizó la intervención en el grado11° C de la *Institución Educativa San Francisco de Asís*; asignatura Matemáticas (especialidad en matemáticas).

La competencia a desarrollar fue: “Generar el significado de la derivada para facilitar el entendimiento de la definición formal de derivada a partir de la geometría euclidiana mediante la construcción de segmentos secantes y el cálculo de sus pendientes”.

La guía didáctica está estructurada en dos momentos, el **ambiente diagnóstico** y la **etapa de intervención**. La primera, ubica al estudiante mediante características propias de rectas y curvas, particularmente el comportamiento de la pendiente. En la segunda etapa se busca a partir de la gráfica de una función cuadrática y la construcción de segmentos punto a punto (puntos sobre la curva), determinar la variación de la pendiente de cada uno de los segmentos secantes a la curva; posteriormente hacer variaciones de distancia entre las abscisas y analizar el cambio en el valor de la variación de la pendiente, hasta determinar el patrón que generan dichas variaciones y a partir de éstas determinar el modelo pertinente para la pendiente de la recta tangente que pasa por cada uno de los puntos sobre la curva. Concluyendo de este trabajo el significado de la derivada.

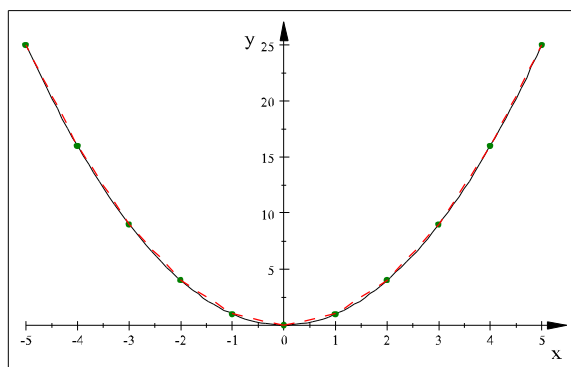


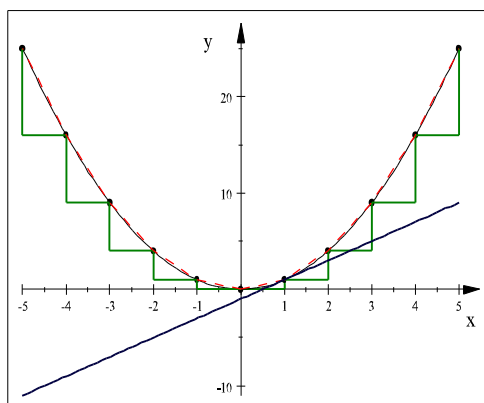
Tabla de datos generales (tabla No. 1)

x	$f(x)$	m	Δm	$\Delta m/h$
-2				
-1				
0				
1				
2				

Logros y dificultades evidenciadas.

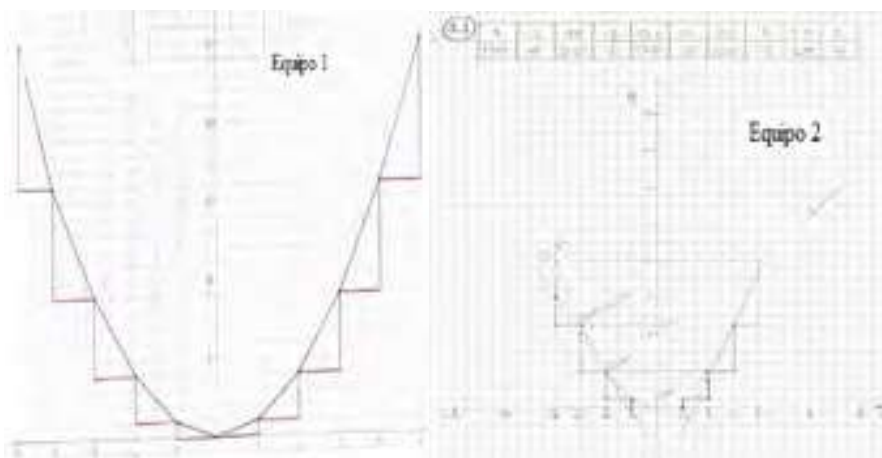
A partir de los resultados registrados en la tabla se hace análisis a los datos obtenidos en la última columna, se determina la expresión que modela la pendiente de la recta tangente a cada punto sobre la curva. Además se utilizan los segmentos verticales y horizontales construidos en cada uno de los segmentos secantes para establecer la relación de variación de la pendiente de la recta tangente generando así el significado de la derivada.

Todas las construcciones se muestran en la siguiente gráfica.



INTERVALO PASO UNO A UNO

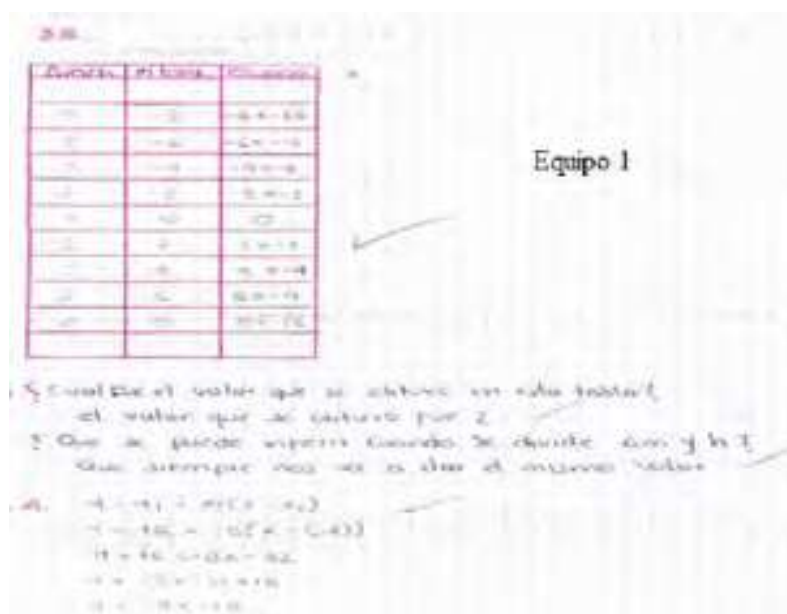
Discusión. Los tres equipos de trabajo no tuvieron inconvenientes para construir la gráfica de la función $f(x) = x^2$, los segmentos secantes, el cálculo de la pendiente y el diligenciamiento de la tabla, como se aprecia en los gráficos a continuación.



En esta imagen se evidencia la buena construcción de los segmentos secantes con sus respectivos segmentos verticales y horizontales.



En la imagen anterior se observa cómo los estudiantes logran calcular sin problema y correctamente la pendiente y la variación de la pendiente (imagen del lado izquierdo), generando a partir de éstos respuestas correctas a las preguntas orientadoras planteadas en la guía didáctica (imagen al lado derecho).



En esta imagen se observa como los estudiantes logran calcular la función de la recta tangente en cada punto sobre la curva. Aquí ellos logran identificar que el resultado de hacer constante

el valor de Δ por medio de la división con el paso h , y luego acumularlo sucesivamente obtiene el valor de la pendiente de la recta tangente que pasa por dicho punto. A partir de estos resultados el estudiante encuentra que la variación de la curva punto a punto, se puede modelar mediante otra función, la cual es la derivada y significa el comportamiento de la variación de la curva en cualquier punto.

Reflexiones finales.

Un elemento que se encontró en el análisis a los libros de textos de matemáticas de grado once, es que presentan la derivada como la pendiente de la recta tangente a un punto de la curva o como el límite de un cociente (definición formal), y por lo general los estudiantes empiezan a repetirlo sin la claridad de lo que están manifestando, “*se convierte en frase de cajón*” y falta de significado.

Con el desarrollo de la guía didáctica, *Significado de la Derivada*, los estudiantes lograron encontrar el significado de ésta, se evidenció una clase posterior a la cual se desarrolló la guía didáctica que la formalización del concepto de derivada no generó problemas de aprendizaje y la incorporación del concepto de límite se realizó de manera natural y sencilla⁵.

De esta manera se propone una alternativa didáctica para abordar el significado del concepto de derivada sin utilizar el concepto de límite y sin perder formalidad y rigurosidad matemática; se contribuye a la enseñanza y aprendizaje del concepto de derivada, se hacen visibles los sistemas de representación semiótica de Duval, el manejo gráfico, tabular y algebraico son fundamentales para alcanzar objetivo de la guía didáctica.

Un elemento importante en el desarrollo de este estudio es la sinergia que se genera entre los estudiantes en el momento de desarrollar la guía didáctica generando así aprendizaje significativo y colaborativo; el docente se convierte en acompañante y orientador del proceso, se trasciende de la clase magistral a la clase dinámica, el estudiante se convierte en actor relevante de su propio aprendizaje. Otro elemento para resaltar es que los estudiantes

⁵Esta afirmación se realiza dado que la profesora Esperanza Yepes, titular de la asignatura en el grado 11C, lo expuso públicamente el día 23 de septiembre de 2011, durante la sustentación de los productos del seminario de profundización “Una mirada más profunda al cálculo diferencial e integral”

alcanzaron la competencia propuesta en la guía didáctica, situación que permite concluir que el trabajo propuesto se cumplió al cien por ciento.

BIBLIOGRAFIA

[1] Medina, Ana C. *Concepciones históricas asociadas al concepto de límite e implicaciones didácticas*. Universidad Pedagógica nacional. 2008.

[2] Blázquez, S. y Ortega, T. *Breaks in the understanding of the concept of limit in High School students*. Departamento de Análisis Matemático y Didáctica de la Matemática. Facultad de Educación. Universidad de Valladolid, 1998.

[3] Ceballos, T. *El Análisis De La Variación Como Un Significado De La Derivada*. Facultad De Ingeniería, División De Ciencias Básicas, Departamento De Matemáticas Avanzadas- Unam. 2008.

[4] Porta, L. y Silva, M. “*La investigación cualitativa: El Análisis de Contenido en la investigación educativa*”. Universidad Nacional de Mar del Plata. Universidad Nacional de la Patagonia Austral. 2007.

[5] Sánchez, G. y otros. *La Comprensión de la Derivada como Objeto de Investigación en Didáctica de la Matemática*. Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa, 11(2): 267-296. 2008.

[6] Badillo, E. *La derivada como objeto matemático y como objeto de enseñanza y aprendizaje en profesores de matemática de Colombia*. “*La derivada un concepto a caballo entre la matemática y la física*”. Bellaterra. 2003.

[7] Ortega, S. y otros. *¿Cómo enseñan las derivadas los profesores de cálculo, en la Universidad?* Departamento de Matemática. Facultad de Ciencias Naturales, Matemáticas y del Medio Ambiente. Universidad Tecnológica Metropolitana. Chile. 2010.

[8] Lineamientos Curriculares. Ministerio de Educación Nacional. Colombia. 1998.

[9] Estándares Básicos de Competencias en Matemáticas. Ministerio de Educación Nacional. Colombia. 2006.