

¿Qué procesos de la competencia matemática representar se movilizan a partir del concepto de función lineal, utilizando la teoría de las situaciones didácticas?

Liliana María Campo Manquillo

Universidad Icesi

Facultad de educación

Escuela de Posgrados

Maestría en Educación

Santiago de Cali

2017

¿Qué procesos de la competencia matemática representar se movilizan a partir del concepto de función lineal, utilizando la teoría de las situaciones didácticas?

Liliana María Campo Manquillo

Director

Juan Carlos López García

Universidad Icesi

Facultad de Educación

Escuela de Posgrados

Maestría en Educación

Santiago de Cali

2017

Tabla de Contenido

Tabla de Contenido.....	3
1. Planteamiento del Problema.....	10
1.1. Objetivos de Investigación	14
1.1.1 Objetivo General.....	14
1.1.2 Objetivos Específicos	14
1.2 Justificación.....	15
2. Marco Conceptual.....	20
2.1 El álgebra.....	20
2.1.1 Concepción del Álgebra Escolar en Educación Matemática	21
2.1.2 Enseñanza y Aprendizaje del Álgebra.....	25
2.2 Representaciones y Sistemas de Representación	29
2.3 Semiótica y noética en el aprendizaje de las matemáticas	36
2.4. Modelo Teórico a Priori.....	40
2.4.1 Las Competencias Matemáticas	42
2.4.2 Componentes de una Competencia Matemática	45
2.5 Las Situaciones Didácticas en Didáctica de las Matemáticas	55
2.5.1 Las Situaciones Didácticas.....	55
2.5.2 Tipología de las Situaciones.....	56
2.5.3 La transposición Didáctica y el Contrato Didáctico	60

3. Marco Metodológico	61
3.1 Tipo de Investigación	62
3.2. Contexto Empírico de la Institución	62
3.3 Descripción de los Sujetos de la Investigación	63
3.3.1 Características Académicas de los Sujetos	65
3.4 Instrumentos a utilizar en la recolección de datos	66
3.4.1 Prueba Pre-post.....	66
3.4.2 La Situación Didáctica	69
3.4.3 Instrumento de Observación	88
3.5 Procedimiento y Fases	89
4. Análisis de Datos	94
4.1 Análisis de la prueba Pre-Post.....	94
4.2 Análisis de la Situación Didáctica en la secuencia de	
Tareas	99
4.2.1 Análisis de la Tarea 1	100
4.2.2 Análisis de la Tarea 2	114
4.2.3 Análisis de la Tarea 3	123
4.3 Análisis de la secuencia de Tareas	131
5. Conclusiones y Aportes de la Investigación	136
5.1 Conclusiones.....	136
7. ANEXOS.....	146

Agradecimientos

*Primeramente a Dios, por los dones regalados y por su constante
compañía e infinita misericordia.*

*A mi esposo por su apoyo incondicional en la realización de mis sueños,
por su amor, paciencia y credibilidad. A mis hijos por ser un motor en mi vida, por
sus palabras de aliento y por su entera confianza.*

*A mis maestros, por sus invaluable enseñanzas y profesionalismo, gracias
a los cuales hoy culmino este trabajo investigativo.*

*A mis compañeros por los momentos compartidos y por la gran
complacencia de haberlos conocido.*

Introducción

Este documento recoge la investigación realizada, para obtener el título de Magíster en Educación por la Universidad Icesi, en su programa de Maestría en educación, bajo el auspicio del Ministerio de Educación Nacional en su programa de *Becas para la Excelencia Docente*.

Esta investigación surge de la reflexión de su autora frente a las dificultades que presentan los estudiantes en el área de matemáticas correspondiente al grado noveno y que se evidencia en los desempeños de los estudiantes a nivel Nacional en las pruebas censales para este grado. El análisis de los resultados obtenidos por los estudiantes de la institución, permite establecer las dificultades que presentan los estudiantes a nivel del álgebra escolar, en particular con los problemas de variación y cambio y con el manejo de los diferentes registros de representación que utiliza el lenguaje de las matemáticas.

En el intento por delimitar el problema de investigación, se seleccionó la competencia matemática *Matematizar*, que en las competencias que evalúa las pruebas saber de matemáticas para los diferentes niveles, constituye la competencia matemática *comunicación*. Esta delimitación obedece al alto porcentaje de estudiantes ubicados en la escala insuficiente en esta competencia.

Según el Ministerio de Educación nacional, (MEN) en su documento de los estándares básicos de competencia, las matemáticas

pueden construirse, refinarse y comunicarse utilizando diferentes lenguajes y con ellos es posible expresar y representar los conceptos, leer y escribir enunciados, hablar y escuchar el discurso matemático. Es por ello que la competencia de *comunicación* a la cual nos referimos, está articulada, didácticamente, con las competencias *representar* y *matematizar*. Se centra el foco de la investigación en la competencia matemática *representar* y en los procesos asociados a ella.

Para el desarrollo de esta investigación, se estructuró en 7 sesiones o apartados. Se inicia con el planteamiento y justificación del problema de investigación. En él se presenta, tanto el problema de investigación como los objetivos que lo concretan y que guían la investigación. Además, se justifica el interés en la realización de este estudio en el área de Didáctica de la Matemática desde tres dimensiones: la experiencia personal de la autora, la estructura curricular del álgebra escolar planteada en los estándares básicos de competencias y los trabajos realizados por diversos autores desde una postura pragmática del aprendizaje. En el apartado 2, se presenta el sustento teórico de este trabajo, en él se precisa el significado de los conceptos clave que estructuran el trabajo. Para tratar a profundidad dichos conceptos, se ha estructurado este apartado en cuatro ítems centrales: (a) el álgebra escolar en Educación Matemática, (b) representaciones y sistemas de representación, (c) Modelo teórico

a priori para el desarrollo de competencias matemáticas y (d) Situaciones didácticas.

En el Apartado 3, se describe el tipo de investigación, el contexto empírico de la institución y la descripción de los sujetos, se detallan los instrumentos utilizados para la recolección de datos y se define tanto el proceso como las fases de aplicación, como elementos estructurantes del Marco metodológico. En el Apartado 4, se presenta el análisis cuantitativo de la prueba Pre-Post. Para ello, se hace lectura de los resultados obtenidos antes y después de la implementación de la situación didáctica y se cierra con un análisis comparativo que permite establecer lo ocurrido con los estudiantes de grado noveno que representan la muestra de estudio.

Posteriormente, se presentan los resultados obtenidos en la secuencia de tareas. Cada una de las tareas que componen la secuencia, dan cuenta de los avances de los estudiantes al enfrentar los diferentes momentos establecidos para su desarrollo y que enmarcan la tipología de las situaciones. Por otra parte, el análisis cualitativo está referido a identificar el nivel de avance de los estudiantes en cada uno de los procesos, que según García et al. (2015) están asociados a los aspectos cognitivo, afectivo y de tendencia de acción, propios de la competencia

matemática representar. Finaliza con un análisis comparativo, que permita establecer la incidencia de las situaciones didácticas en el proceso de enseñanza de las matemáticas, para movilizar los procesos asociados a la competencia matemática representar, a partir del concepto de función lineal.

En el apartado 5, las conclusiones y aportes que se derivan de esta investigación y en el apartado 6, las referencias correspondientes a la revisión de la literatura realizada y que ha dado sustento teórico a esta investigación.

1. Planteamiento del Problema

El propósito del presente trabajo es indagar en las capacidades referidas al pensamiento variacional en la competencia matemática representar, para resolver problemas de variación y cambio. Se atiende a los distintos tipos de representación semiótica que emergen del concepto de función lineal en básica secundaria, se centra el interés en caracterizar los procesos asociados a dicha competencia y se espera establecer el efecto que las situaciones didácticas, generan en el proceso de aprendizaje.

Cabe destacar que los procesos asociados a la competencia matemática representar, permiten establecer las capacidades de los estudiantes al codificar y decodificar información, evidencia la habilidad del estudiante para realizar conversiones y tratamientos con la información obtenida, mediante el proceso de traducción. El desarrollo de estos procesos del aspecto cognitivo de la actividad matemática de aprendizaje y las operaciones que de ella se derivan, dan cuenta de la capacidad del estudiante, para matematizar y comunicar ideas matemáticas.

En este orden de ideas, para el desarrollo de esta investigación, se tienen en cuenta estudios enmarcados en la didáctica de las matemáticas y que en los últimos años, según Sfard (2008), centran su interés no solo en los conceptos matemáticos, sino que se da preponderancia por conocer el actuar de quien aprende. Esta postura pragmática del aprendizaje direcciona la revisión bibliográfica hacia autores que proponen que el foco del aprendizaje de las matemáticas, debe estar ubicado en el sujeto que aprende, en los procesos de participación que desarrolla, en el aprendizaje colaborativo que se produce, en el discurso matemático que alcanzan los estudiantes y en la generación de una comunidad matemática de aprendizaje. Al respecto,

“la generación de dichos espacios de participación, le permiten al estudiante aprender matemáticas; concebido esto, como el proceso de convertirse en miembro de una comunidad matemática de aprendizaje”
(Sfard, 2008 p. 29).

En la misma línea de Sfard, se encuentran García et al. (2013), García, Coronado y Giraldo (2015), Bishop (2005), entre otros. Estos autores, centran el foco de sus investigaciones en el proceso de aprendizaje de los estudiantes, para generar propuestas de enseñanza desde una postura pragmática del aprendizaje. Siguiendo esta postura, este estudio presenta como estrategia de enseñanza, las situaciones didácticas, concebidas estas, en los estándares básicos de

competencias, como situaciones matemáticas y que para el desarrollo de esta investigación, se han realizado adaptaciones del Modelo Teórico a Priori y se enmarcan en las actividades de aprendizaje.

Los estándares básicos de competencia, abordan la importancia de formar ciudadanos matemáticamente competentes a partir del desarrollo de los procesos generales de la actividad matemática, además abordan los contenidos desde una perspectiva estructural, que da cuenta de una visión funcional del currículo. En esta visión, el conocimiento permite modelar situaciones reales y está orientado a la resolución de problemas en diferentes contextos (Rico y Lupiáñez, 2008, p. 95).

Atendiendo a lo expuesto, el interés de esta investigación se centra en el grado 9°, al aproximarnos al concepto de función lineal, concepto que se relaciona con *“las nociones de cambio y variación, y las diferentes representaciones asociadas a dicho concepto: enunciados verbales, las tablas, las gráficas en el plano cartesiano, las representaciones pictóricas, las formulas y las expresiones analíticas”* (MEN, 1998, p.50).

Bajo el supuesto de que las situaciones didácticas en la enseñanza de las matemáticas promueven el aprendizaje del concepto de función lineal y además las situaciones didácticas movilizan las capacidades referidas al pensamiento variacional, a través de los procesos asociados a la competencia representar, en los estudiantes de la muestra de estudio, se plantea el interrogante que moviliza el problema de investigación:

¿Qué procesos de la competencia matemática representar, se movilizan a partir del concepto de función lineal utilizando la estrategia metodológica de las situaciones didácticas en la enseñanza de las matemáticas de grado noveno en los estudiantes de la Institución Educativa Liceo Departamental?

1.1. Objetivos de Investigación

1.1.1 Objetivo General

Caracterizar los procesos que desarrollan los estudiantes a partir del concepto de función lineal y que están asociados a la competencia matemática representar, implementando las situaciones didácticas como estrategia de enseñanza.

1.1.2 Objetivos Específicos

1. Caracterizar las dificultades de los estudiantes, asociadas a los cambios de representación semiótica del concepto función lineal.
2. Diseñar una situación didáctica que conduzca al concepto de función lineal y promueva el desarrollo de la competencia matemática representar.
3. Implementar la situación didáctica y establecer su incidencia en el desarrollo de la competencia matemática representar y en la generación de aprendizaje colaborativo entre los estudiantes.
4. Evaluar la incidencia de las situaciones didácticas en la movilización de los procesos referidos a la competencia representar y su efecto en el progreso de los estudiantes frente al aprendizaje del concepto de función lineal.

1.2 Justificación

La presente investigación, es relevante por cuanto surge de la reflexión sobre el mejoramiento de la práctica educativa en términos de la apropiación del marco teórico de las situaciones didácticas de Brousseau (1991), el Modelo Teórico a Priori García et al. (2015), y de la necesidad de abordar los aprendizajes situados.

La implementación de las situaciones didácticas como estrategia de enseñanza-aprendizaje de las matemáticas, tiene su importancia en el hecho de propiciar la comunicación y negociación de significados de los conceptos matemáticos entre los estudiantes. Las situaciones didácticas, a través de las situaciones de acción, posibilitan a los estudiantes la toma de decisiones. Exponer sus opiniones y ser receptivos ante las propuestas de sus compañeros, en situaciones de formulación y comunicación. Además, las situaciones de validación permiten al estudiante generar discusión entre los compañeros y desarrollar la capacidad de justificar las afirmaciones con argumentos. Por último la organización del aprendizaje matemático, ocurre mediante las situaciones de institucionalización.

La tipología de las situaciones didácticas permite re-conceptualizar la actividad matemática de aprendizaje, mejorar la imagen de las matemáticas en la comunidad educativa, mejorar la atención, el interés y la motivación de los estudiantes por su estudio y lograr el aprendizaje en los estudiantes.

Para Bishop (2005), permitir que los estudiantes, en el aula de clase, generen una negociación de los significados de los objetos matemáticos, realicen tareas con niveles de complejidad creciente y construyan una comunidad de aprendizaje en el área de las matemáticas desde el aula de clase, conlleva a la comprensión y posterior aprendizaje de los objetos matemáticos. Esto apunta a la enculturación matemática del sujeto. Para García et al. (2015), debe asumirse el desarrollo de competencias matemáticas, como un proceso propio de la cultura y requiere que el profesor de matemáticas, asuma un compromiso, el de instalar al estudiante en el contexto de la cultura matemática, relacionarlo con ella, con las simbolizaciones, las conceptualizaciones y los valores de la cultura matemática.

Otro aspecto que justifica este estudio, consiste en proporcionar a la institución educativa un plan de mejoramiento frente a los resultados obtenidos por los estudiantes en las pruebas censales en los grados 3°, 5° 9° y 11°. En el caso particular para grado noveno, se evidencia falencias en los conocimientos básicos

asociados al pensamiento variacional, y sistemas algebraicos y analíticos, en las diferentes competencias. Los resultados que se presentan son tomados del informe por colegio ISCE MEN (2016).

En la competencia de *comunicación*,

El 43% de los estudiantes no usa ni relaciona diferentes tipos de representaciones para modelar situaciones de variación

El 36% de los estudiantes no reconoce el lenguaje algebraico como forma de representar procesos inductivos.

El 32% de los estudiantes no identifica características de graficas cartesianas en relación con la situación que representa.

Por otra parte, respecto a la competencia de *razonamiento y argumentación*, el 48% de los estudiantes no interpreta tendencias que se presentan en situación de variación. Por último, en la competencia de *Planteamiento y resolución de problemas*, el 37% de los estudiantes no resuelve problemas en situaciones de variación con funciones polinómicas y exponenciales en contextos aritméticos y geométricos.

A pesar de que la Institución Educativa Liceo Departamental, ha alcanzado resultados que la posicionan en un lugar privilegiado frente a los resultados obtenidos a nivel local y nacional, (promedio institucional 5.75, ponderación que lo ubica por encima de los promedios local y nacional que alcanzaron 5.27 y 5.46 respectivamente), estos resultados, evidencian que los estudiantes de la institución presentan dificultad al resolver problemas de variación y al relacionar las diferentes maneras de presentar la información. Este hecho ha orientado la investigación hacia la identificación de las dificultades que presentan los estudiantes en la competencia de *comunicación*. El estudio se justifica, al abordar la problemática identificada en los estudiantes al modelar situaciones de variación y cambio, al utilizar diferentes registros de representación y al realizar cambio de un registro de representación a otro.

A nivel práctico, los resultados que se obtengan fruto de la implementación y análisis de los resultados, serán socializados a la comunidad educativa, como evidencia del uso de estrategias didácticas que se desprenden del enfoque constructivista, acorde al Proyecto Educativo Institucional, (PEI). Al interior del departamento de matemática de la institución, se divulgará la perspectiva curricular del proceso *representar* en la competencia de *comunicación*, atendiendo a la coherencia vertical y horizontal en el conjunto de grados, acorde a los requerimientos del MEN en el marco del Proyecto de Integración curricular y se

espera que el estudio, impacte en el desempeño de los estudiantes en las pruebas censales en cada una de las competencias, particularmente en la competencia matemática *comunicación*, que como se mencionó antes está relacionada didácticamente con la competencia *representar*.

2. Marco Conceptual

En este apartado se presenta el marco teórico que sustenta el trabajo, en él se precisan el significado de los conceptos clave empleados. Los ejes temáticos considerados son los siguientes: Álgebra, enseñanza y aprendizaje de álgebra, sistemas de representación semiótica y sus traducciones, el modelo teórico a priori y las situaciones didácticas.

2.1 El álgebra

En este apartado, se presenta un análisis de la concepción del álgebra escolar en Educación Matemática, destacando los aspectos más relevantes para el desarrollo de este trabajo de profundización: el álgebra como el estudio de relaciones funcionales y su concepción como lenguaje o sistema de representación.

2.1.1 Concepción del Álgebra Escolar en Educación Matemática

Se centra la atención en el álgebra propia de la educación no universitaria, que en nuestro actual sistema educativo es objeto de enseñanza en los grados octavo y noveno.

El álgebra es considerada como el estudio de conjuntos de elementos, cuya naturaleza puede no estar especificada, y de las propiedades formales de sus leyes de descomposición. Es, entre otras cosas, *“una herramienta para la comprensión, expresión y comunicación de generalizaciones, para revelar estructura, para establecer conexiones y para formalizar los argumentos matemáticos”* (Rodríguez, 2015, p.22).

La concepción del álgebra escolar ha ido cambiando a lo largo de la historia de la Educación Matemática. Distintas caracterizaciones aparecen en la literatura en educación matemática. El álgebra como *“la aritmética generalizada y el estudio de procedimientos para resolver problemas, el estudio de relaciones entre cantidades, incluyendo la modelización y las funciones y el estudio de estructuras”* (Usiskin, citado por Rodríguez 2015, p. 22). En otra se concibe como *“la comprensión de patrones, relaciones entre cantidades y funciones, la*

representación de relaciones matemáticas, el análisis de situaciones y estructuras matemáticas utilizando símbolos algebraicos, el uso de modelos matemáticos para representar y comprender relaciones cuantitativas, y el análisis del cambio” (National Council of Teachers of Mathematics , 2000).

Siguiendo a Rodríguez (2015), se consideran en esta investigación, el álgebra como el estudio de la generalización de relaciones y el estudio de patrones (E1). E2, el álgebra como estudio de relaciones funcionales, es decir, de relaciones entre variables; E3, el álgebra como un medio para resolver problemas; E4, el estudio de estructuras; y E5, el álgebra como un medio de expresión de ideas matemáticas, es decir, como un lenguaje.

A continuación, describimos con cierto detalle, dos de estos enfoques: el álgebra como el *estudio de relaciones funcionales* y como *lenguaje*; esto por ser concepciones relacionadas con el desarrollo del presente trabajo.

E1. El álgebra como el Estudio de Relaciones Funcionales

La matemática de los grados octavo y noveno del ciclo de educación básica secundaria, corresponde al álgebra escolar. La estructuración mencionada, permite ubicar el álgebra escolar en el pensamiento variacional y los sistemas algebraicos. Pero, la relación del pensamiento variacional con los otros pensamientos aparece frecuentemente ya que requieren de diferentes conceptos y procedimientos relacionados con diferentes sistemas numéricos en particular con el sistema de los números reales.

El desarrollo de procesos de variación y cambio, puede iniciarse desde los primeros niveles de la educación básica primaria. Actividades como generalización de patrones numéricos y geométricos, análisis frente al aumento o disminución de la forma o el valor de una secuencia; son apropiadas para iniciar el estudio de los sistemas algebraicos (MEN 2016, p. 67). Por otra parte, el documento de estándares básicos de competencias, establece elementos conceptuales comunes que integren los diferentes pensamientos y posibilitan que los procesos de aprendizaje de la matemática se den de forma articulada en todos los tipos de pensamiento matemático.

Para el desarrollo de esta investigación, el pensamiento variacional guarda relación con el objeto de estudio. Este pensamiento puede describirse según

Vasco (2003), como una manera de pensar dinámica, que intenta producir mentalmente sistemas que relacionen variables internas de tal manera que covaríen en forma semejante a los patrones de covariación de cantidades de las mismas o distintas magnitudes en los subprocesos recortados de la realidad.

El objetivo del pensamiento variacional, es la captación y modelación de la covariación entre cantidades o magnitudes, principalmente (no exclusivamente) las variaciones en el tiempo.

“La modelación o matematización puede entenderse como la detección de esquemas que se repiten, “modelos o patrones” en situaciones cotidianas, científicas y matemáticas para reconstruirlas mentalmente” (MEN, 2006, P.53).

E2. El álgebra como Lenguaje

“El álgebra es de los únicos lenguajes formales que tiene reglas de formación basadas en la manipulación de símbolos. Ésta es una idea extendida en Educación Matemática” (Bell, citado por Rodríguez 2015, p. 25). “Este lenguaje es aplicable a las distintas áreas del conocimiento, se utiliza para representar ideas algebraicas separadas

del contexto inicial y concreto del cual surgen, es una de las fortalezas, por ser compacto e inequívoco” (Arcavi, citado por Rodríguez 2015, p. 25).

Otros autores, destacan el álgebra como lenguaje, que conforma una forma de comunicación.

2.1.2 Enseñanza y Aprendizaje del Álgebra

Los diferentes enfoques que se han presentado frente a las concepciones del álgebra, señalan diferencias para abordar la introducción y enseñanza del álgebra escolar desde diferentes perspectivas, y en los diferentes niveles de grados. Para Rodríguez (2015), un equilibrio entre las diferentes concepciones del álgebra, y la consideración de las variadas situaciones que las hacen significativas, puede permitir a los estudiantes, comprender en profundidad la pertinencia del álgebra, su estructura, el significado de los conceptos algebraicos fundamentales y el uso de razonamiento algebraico.

En Colombia, el documento de los lineamientos curriculares, considera tres aspectos para la organización del currículo de matemáticas en general,

a. Los procesos generales, relacionados con el aprendizaje, como el razonamiento, la resolución y planteamiento de problemas, la comunicación,—la modelación, y la elaboración, comparación y ejercitación de procedimientos.

b. Los conocimientos básicos relacionados con el desarrollo de los pensamientos: Numérico, espacial, métrico, variacional y aleatorio.

c. Los contextos con los que se generan situaciones problemáticas de las mismas matemáticas, de la vida diaria y de las otras ciencias (MEN, 1998).

Otro documento avalado por el MEN, es el documento de los estándares básicos de competencias donde se relaciona el aprendizaje de las matemáticas por competencias y el aprendizaje significativo y comprensivo. Aborda además,

La importancia de formar ciudadanos matemáticamente competentes a partir del desarrollo de los procesos generales de la actividad matemática, que también fueron contemplados en el documento de los lineamientos curriculares. Los estándares se presentan como niveles de avance en el desarrollo de las competencias. Además, aborda los contenidos desde una perspectiva estructural, pero da cuenta de una

visión funcional del currículo y están organizados por conjuntos de grados y tipos de pensamiento. Los enunciados de los estándares están estructurados por un proceso general, el concepto y procedimiento matemático y el contexto (MEN, 2006, p. 77).

Adicional a ello, menciona los componentes y los relaciona con los procesos de la actividad matemática:

“las competencias y los componentes se relacionan directamente con los procesos generales de la actividad matemática y los tipos de pensamiento descritos en los documentos de los lineamientos curriculares y los estándares” (ICFES, 2015, pp. 71-72).

Por otra parte, relaciona las competencias matemáticas, cuya teoría se desarrolla más adelante, con los pensamientos matemáticos:

Las competencias están organizadas en tres grupos: Razonamiento y argumentación, Comunicación, representación y modelación y Planteamiento y resolución de problemas. Los componentes responden a la reorganización de los cinco pensamientos: Numérico-variacional, geométrico métrico y aleatorio (MEN, 2006, p. 77).

Por otra parte, la *matriz de referencia*, se define como un instrumento de consulta, basado en el documento de los estándares, que presenta los aprendizajes que el ICFES evalúa en cada competencia. Estos aprendizajes, que se corresponden con las afirmaciones Saber, “*se relacionan con las evidencias, descripciones cognitivas de los aprendizajes, de lo que el estudiante debería hacer o manifestar tras el logro de los aprendizajes*” (MEN, 2015b, p. 2). La matriz de referencia se proporciona como insumo para la elaboración de las pruebas Saber 3º, 5º y 9º, y como elemento orientador en los procesos de planificación.

Desde una postura pragmática del aprendizaje, y que se asume en esta investigación, el aprendizaje debe ser situado y el desarrollo de la competencia se moviliza de acuerdo a la pragmática de uso, esto determina la construcción del conocimiento y el desarrollo de competencia matemática del estudiante. Pero a nivel nacional e internacional, la enseñanza tradicional del álgebra, genera críticas, quizá debido a la ausencia de significado de los objetos matemáticos en el aprendizaje de los conceptos del álgebra, por los estudiantes.

. Para Rodríguez (2015), esto lleva a la gran cantidad de jóvenes que por las dificultades que se presentan en esta área, fracasan en ella. Esto ha motivado

la investigación de la enseñanza y aprendizaje del álgebra para la educación matemática, enfocando su objetivo hacia la re-significación de los conceptos, al ser construidos a partir de diferentes contextos.

Para el caso de la función lineal, la estructura conceptual que posibilita su movilización, se relaciona con el estudio de las variables, tanto dependientes como independientes, las relaciones, el cambio, la variación, a partir de los diferentes registros de representación semiótica: la representación gráfica, simbólica, tabular.

2.2 Representaciones y Sistemas de Representación

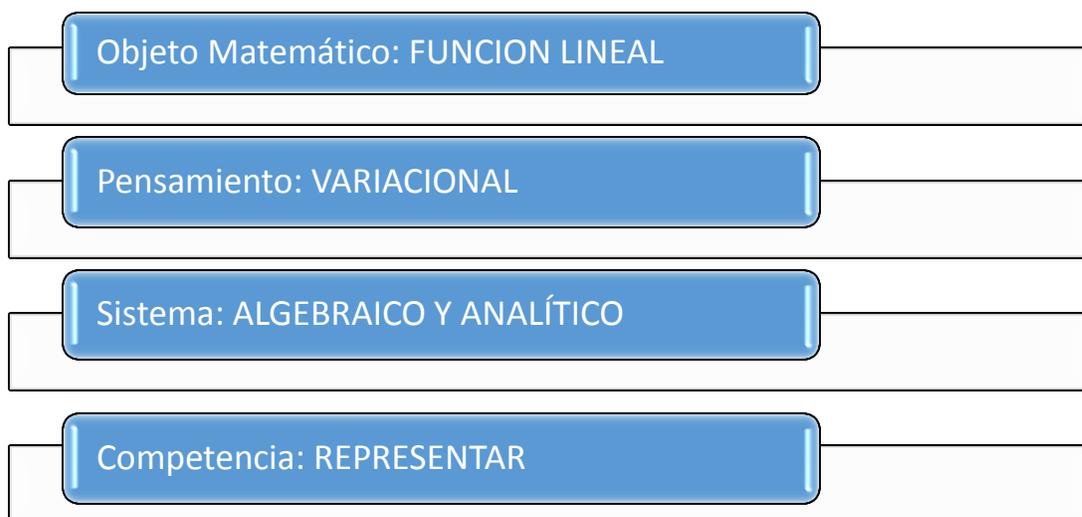
El aprendizaje de las matemáticas requiere del uso de sistemas de expresión y de representación. *“Las representaciones son el medio de que dispone el ser humano para hacer visibles sus representaciones mentales”* (García et al. 2013. Citando a Duval, 1999, p.58). Por ello, las representaciones semióticas en la matemática, cumplen la función de comunicación o expresión.

La comprensión del pensamiento variacional al interior de los sistemas algebraicos y analíticos, tiene implicaciones a nivel curricular y didáctico.

Dado que el pensamiento variacional, tiene que ver con “*el reconocimiento, la percepción, la identificación y caracterización de la variación y el cambio en diferentes contextos, así como con la descripción, modelación y representación en distintos sistemas o registros simbólicos, ya sean verbales, gráficos o algebraicos* (MEN, 2006, p. 66)”, la propuesta de investigación busca proponer una alternativa para propiciar el desarrollo de la competencia Representar asociada al aprendizaje del objeto matemático función lineal al interior del pensamiento variacional.

En concordancia con lo anterior, la tabla 2.3, muestra la coherencia vertical y horizontal, para el estándar para grado noveno, propuesto en el documento de los Estándares Básicos de Competencias: *modelación de situaciones de variación con funciones polinómicas*; en particular la *función lineal* y su relación con los estándares definidos en los diferentes pensamientos y niveles de grados.

La ubicación del objeto matemático *función Lineal*, se muestra en *el esquema*.



Fuente: Producción propia

Tabla 2.3. Coherencia Vertical y Horizontal para la Modelación de Situaciones de Variación con Funciones Polinómicas

De 8° a 9°		De 1° a 3°
COHERENCIA VERTICAL	MODELO SITUACIONES DE VARIACIÓN CON FUNCIONES POLINOMICAS. (FUNCION LINEAL)	Reconozco y describo regularidades y patrones en distintos contextos. (Numérico, geométrico, musical, entre otros)
		De 4° a 5°
		Describo e interpreto variaciones representadas en gráficas. Predigo patrones de variación en una secuencia numérica, geométrica o gráfica.
		De 6° a 7°
		Describo y represento situaciones de variación relacionando diferentes representaciones. (Diagramas, expresiones verbales y tablas)
		De 10° a 11° Utilizo las técnicas de aproximación en procesos infinitos numéricos.
COHERENCIA HORIZONTAL		
PENSAMIENTO NUMERICO	PENSAMIENTO ESPACIAL	PENSAMIENTO ALEATORIO
Utilizo números reales en sus diferentes representaciones y en diversos contextos.	Uso representaciones geométricas para resolver y formular problemas en las matemáticas y en otras disciplinas.	Reconozco tendencias que se presentan en conjunto de variables relacionadas

Fuente: Producción propia

Para culminar la delimitación de la problemática de estudio, se presenta una conceptualización de objeto matemático,

“Los objetos matemáticos son símbolos de unidad cultural que emergen de un sistema de uso que caracterizan las pragmáticas humanas y que se modifican continuamente en el tiempo, incluso según una necesidad específica” (Fandiño, 2012, p.41).

2.2.1 Sistemas de Representación Semiótica

Para expresar un concepto, el sujeto utiliza su función de expresión mediante la cual, puede describir, comunicar, mostrar o presentar las ideas frente a dicho concepto. La función lineal en particular, cuenta con diferentes sistemas de representación semiótica: el *lenguaje verbal*, el *lenguaje escrito*, la *representación tabular*, la *representación gráfica* y la *representación simbólica o algebraica*. Se presentan los diferentes tipos de representación de una función lineal en particular y posteriormente se presentan las consideraciones de cada una de dichas representaciones, las cuales aparecen en la literatura.

La noción de función como dependencia entre variables alcanza su mejor expresión a través de representaciones como las descripciones verbales, tablas de valores, gráficas o fórmulas o

ecuaciones. (García, Serrano y Espitia, 2000, pp.68, citado por García et al. 2015, p. 62).

La presente situación particular, muestra la pertinencia de las representaciones en el estudio de las funciones lineales

Expresa la cantidad de alambre requerida para cercar un terreno cuadrado de lado L . La situación puede representarse mediante los sistemas de representación tabular, gráfico y algebraico.

En la situación presentada, haciendo

x : valor del lado L ; y : cantidad de alambre requerida

La expresión que representa el perímetro, es una función lineal, representada mediante la expresión:

$$y = 4x$$

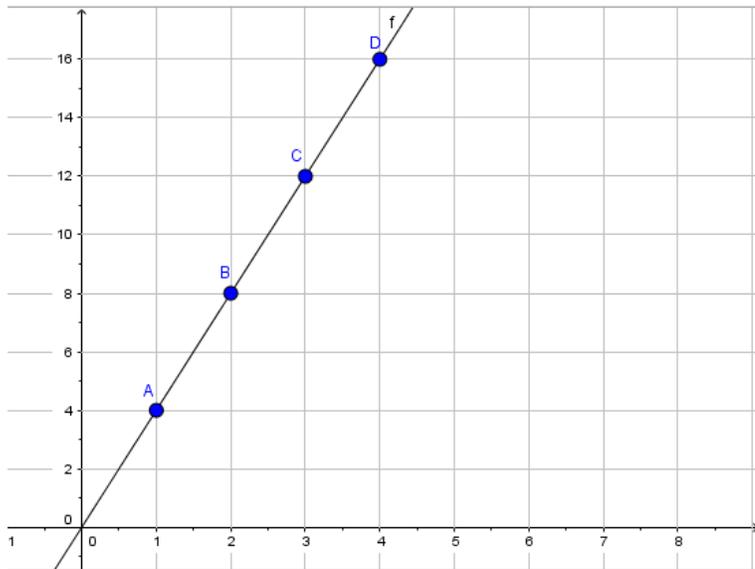
Representación algebraica

Al asignar valores arbitrarios al lado del cuadrado, se obtiene

x	1	2	3
y	4	8	12

Representación Tabular

La representación de estos puntos en el plano cartesiano,



Representación gráfica

Las representaciones anteriores, en la literatura se presentan como: El *Lenguaje Verbal*, hace referencia al uso del lenguaje común para presentar una visión descriptiva de la relación funcional y en el lenguaje escrito, realiza el tránsito de las consideraciones verbales del estudiante y los aspectos relevantes a la hora de especificarlo como medio de generalización de las situaciones. La *Representación Tabular*, da una visión cuantitativa de la situación y establece una identificación de pares de valores, de donde se obtiene una correspondencia entre las variables presentes en la situación. La *Representación Gráfica*, constituye un mecanismo esencial para expresar la relación de dependencia entre dos variables, a través de gráficas en el plano cartesiano.

Estas gráficas facilitan la lectura e interpretación de dicha relación. Por último, para Lurduy et al. (2006), *la Representación Simbólica*, que permite obtener una visión general y completa de la función lineal, tanto cualitativa como cuantitativamente. De la misma manera permite determinar valores de ambas variables con precisión.

La importancia de disponer de diferentes sistemas semióticos de representación, según Duval (1999), radica en que el sujeto puede producir representaciones del mismo objeto matemático y sin notarlo, transforma dichas representaciones de un sistema en otro. Es decir, realiza conversiones entre los sistemas, esto aumenta las capacidades cognitivas y en consecuencia sus representaciones mentales.

2.3 Semiótica y noética en el aprendizaje de las matemáticas

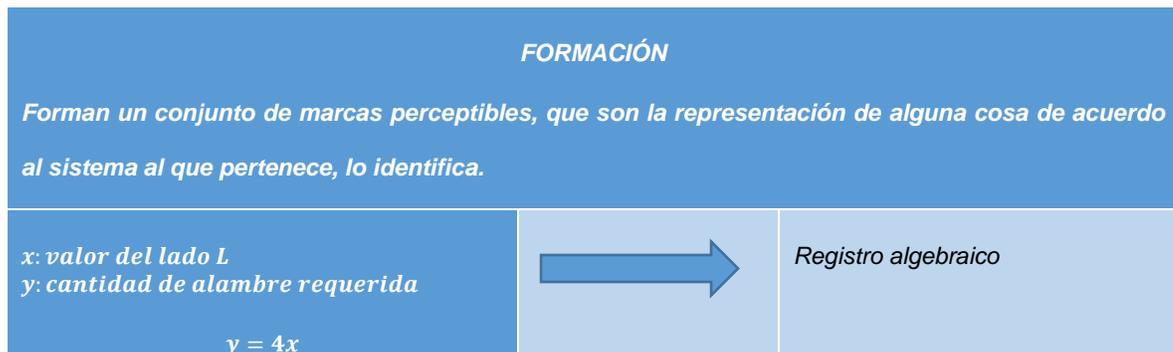
En esta parte presentamos la relación Semiósis - Noesis en el aprendizaje de las matemáticas. Se asume con Bruno D'Amore que:

Semiótica, es la representación realizada por medio de signos y la Noética, la adquisición conceptual de un objeto (D'Amore 2005, p.30)

“Las representaciones semióticas son el medio de que dispone el ser humano para hacer visibles sus representaciones mentales; de esta manera las representaciones semióticas, cumplen una función de comunicación o expresión” (Duval, 1999, p. 20). Dichas representaciones, estructuran un sistema a partir de tres actividades cognitivas: la *Formación*, los *Tratamientos* y la *Conversión*.¹

A continuación, se presentan dichas operaciones cognitivas, en relación con la función lineal, que se representó antes.

Tabla 1.3.1 Traducción a los sistemas semióticos de representación: *Formación*



Fuente: Producción propia

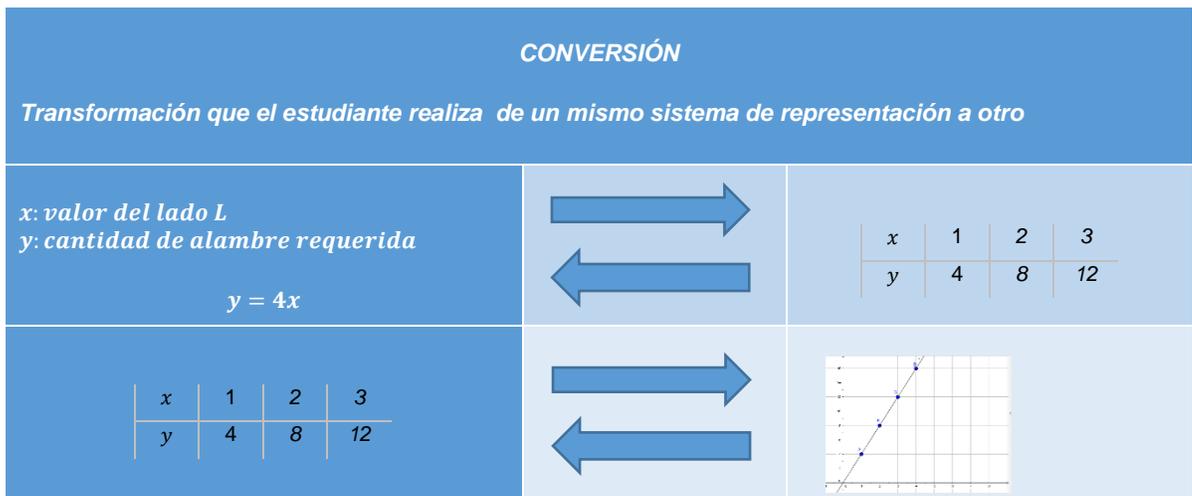
¹ Nuevamente Duval (1999), Citado por García, et. al 2013, p. 59).

2.3.2 Traducción a los sistemas semióticos de representación: Tratamiento



Fuente: Producción propia

2.3.3 Traducción a los sistemas semióticos de representación: Conversión

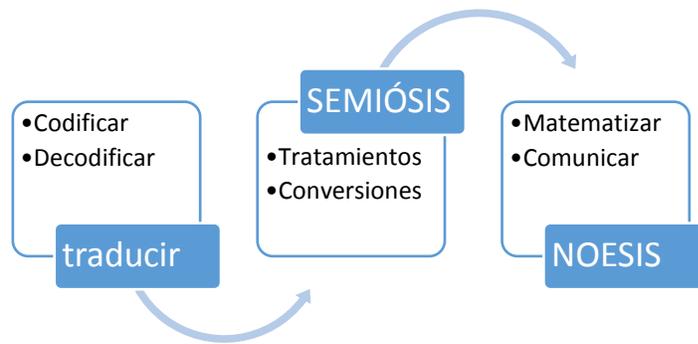


Fuente: Producción propia

Las actividades cognitivas planteadas por Duval (1999), representan para García et al. (2013), representaciones externas y conscientes y como tal son componentes de un sistema que cumplen con las funciones de expresión, transformación de la información y de objetivación o toma de conciencia. La función de expresión, facilita al ser humano comunicar, mostrar, presentar sus ideas, pensamientos o conceptos (p.59).

Para Duval (1993), La adquisición conceptual de un objeto matemático, se basa en dos características: En primer lugar, el uso de varios registros de representación, como actividad típica del pensamiento humano y en segundo lugar, en la creación y el desarrollo de sistemas semióticos de representación nuevos, es símbolo de progreso. Bajo estos planteamientos D'Amore (2005), enuncia la estrecha interdependencia entre semiótica y noética.

Los aspectos considerados en los apartados que anteceden, se presentan en un diagrama con el fin de dar mayor claridad a los planteamientos presentados con relación a la competencia representar, y su incidencia en la competencia matematizar y comunicar.



Fuente: producción propia

Otro aspecto de interés en el desarrollo teórico para el propósito que nos atañe, es el análisis y comprensión de las competencias matemáticas, en particular la competencia matemática representar, con el objeto matemático función lineal.

2.4. Modelo Teórico a Priori

El MTP se concibe como un esquema teórico que facilita la comprensión, estudio y comportamiento del desarrollo de competencias matemáticas del estudiante, y se asume como una estructura para organizar, describir, explicar y articular los componentes de la competencia matemática con la actividad matemática de aprendizaje, los objetivos de las tareas y las formas de evaluación. Su finalidad es

contribuir a planificar el desarrollo coherente y progresivo del proceso de movilización de las competencias matemáticas cuando el estudiante resuelve tareas y desarrolla procesos cognitivos, afectivos y de tendencia de acción con complejidad creciente (García y otros, 2013, p. 44-45).

El Modelo Teórico a Priori (MTP) surge como alternativa didáctica para el desarrollo de competencias y articula las tareas matemáticas, los procesos y los niveles de complejidad, con la actividad matemática de aprendizaje.

Estos elementos fueron decisivos en el diseño e implementación de la propuesta didáctica. En el diseño, por cuanto conocer la estructura de la competencia matemática y sus componentes permitió planificar y aportar mayor calidad a la práctica de enseñanza para el desarrollo de competencias matemáticas del estudiante. Además, se articularon los procesos matemáticos asociados a la competencia representar y se definieron, con niveles de complejidad creciente.

En lo sucesivo se desarrollan los aspectos que estructuran el modelo: concepciones de Las competencias matemáticas en educación matemática, las componentes de la competencia matemática, actividad matemática de

aprendizaje, los procesos asociados a la competencia matemática representar y los niveles de complejidad.

2.4.1 Las Competencias Matemáticas

El concepto de competencia puede asumirse desde dos dimensiones: La competencia asociada con la educación, para la eficacia y las demandas del mercado, y la competencia, asociada con la educación integral y la formación de sujetos críticos. Estas dos dimensiones difieren la una de la otra en el saber-hacer que de ellos se reclama. Para García et al (2015, citando a García, Acevedo y jurado, 2003), el saber-hacer eficientista y el saber-hacer centrado en contextos socioculturales, se diferencia en su uso. Tendencia orientada hacia la globalización vs el sentido ético humanístico en las decisiones sobre los usos del conocimiento y la cualificación de las condiciones de vida de las personas.

En el desarrollo de este trabajo de investigación, se asume la competencia, asociada con la educación integral y la formación de sujetos críticos y se acoge la concepción de competencia, como la que se asocia a *“La capacidad de afrontar problemas y actividades matemáticas de aprendizaje significativas y complejas por parte del estudiante, es decir, se focaliza en el aprendizaje del estudiante, no en la enseñanza”* (García et al. 2013, p. 28).

Para el caso de la competencia matemática representar, está se concibe como,

“la habilidad para relacionarse con y manejar las herramientas y el lenguaje matemático, para ello debe entender y utilizar (decodificar, interpretar y distinguir entre) diferentes tipos de representaciones de objetos, fenómenos y situaciones matemáticas, entender y utilizar las relaciones entre diferentes representaciones de la misma entidad incluido el hecho de conocer sobre sus fortalezas y limitaciones relativas” (García y otros 2012, p. 39).

La competencia matemática representar, en el caso de la función lineal, se concibe como *“la acción en la que mediante gráficas, expresiones algebraicas, tablas y lenguaje verbal entre otros, se presenta la función lineal. El resultado es una representación de la función lineal”* (García et al. 2015, p. 63).

El desarrollo de las competencias matemáticas está ligado a la solución de tres problemas particulares que permiten dar cuenta del progreso de los estudiantes. Respecto a ello, García et al. (2015), en su MTP, propone indagar

sobre los aspectos del desarrollo humano que están presentes en el desarrollo de la competencia matemática, sobre la estructura de la competencia y sus componentes y sobre la manera como las componentes se articulan con la actividad matemática de aprendizaje.

En primera instancia, estableció los aspectos asociados a la competencia matemática representar: el *cognitivo*, relacionado con el saber disciplinar; el *afectivo*, que corresponde con la disposición y la voluntad y el deseo para responder a una tarea y el de *tendencia de acción*, el hacer, la persistencia a la acción y la dedicación. En cuanto a la estructura y sus componentes, “*Una competencia matemática se constituye de tareas matemáticas, procesos matemáticos y niveles de complejidad*” (García et al. 2015, p. 26-27).

La estructura de la competencia matemática y sus componentes, se establecen a partir de la existencia de cinco procesos generales presentes en toda actividad matemática: *La resolución de problemas, el razonamiento, la comunicación, la modelación, la elaboración, comparación y ejercitación de procedimientos* (MEN, 1998).

2.4.2 Componentes de una Competencia Matemática

Se asume que los componentes de las competencias matemáticas en general y de representar, en particular “*se constituye de tareas matemáticas, procesos matemáticos y niveles de complejidad*” (Solar, 2009, p.68).

Asumiendo la concepción de Solar (2009) y Rico y Lupiañez (2008), las *tareas matemáticas* tienen un carácter específico, se relacionan con un contenido y se asocian a expectativas de aprendizaje a corto plazo formuladas para el desarrollo de procesos matemáticos que ponen en juego capacidades del estudiante.

Los *procesos matemáticos*, están en la base de la competencia. En un enfoque por competencias, los *procesos matemáticos* son organizadores del currículo; los contenidos matemáticos como elementos del dominio matemático, se deben “poner al servicio” del desarrollo de los procesos matemáticos del sujeto que aprende matemáticas. Son procesos de las competencias matemáticas: *representar, demostrar, argumentar, analizar, resolver graficar, calcular, modelizar, visualizar, codificar, decodificar, traducir, calcular, etc.* (García et al. 2015, p. 28).

Según la Organización para la Cooperación y el Desarrollo Económico (OCDE) (2006), consideran que la competencia matemática *representar*, se relaciona, con:

La capacidad de descodificar, codificar, traducir, interpretar y distinguir distintas formas de representación de objetos y situaciones matemáticos; las interrelaciones que existen entre las diversas representaciones; y la elección y alternancia entre distintos tipos de representación según las situaciones y objetivo (p. 102. Citado por García, et al. 2015, p.63).

La información de cada una de estas capacidades, se desarrolla a continuación.

La Codificación, se concibe como la presentación de las representaciones mentales a través de diferentes sistemas semióticos de representación. La codificación, “*conciérne al procesamiento inicial de los estímulos o elementos informativos, que genera una representación mental de los mismos. La información puede ser codificada mediante códigos de distinta índole: sensorial, auditivo o visual, de tipo verbal, imágenes o códigos de índole semántica*” (Rivas 2008, citado por García, et al 2015, p.68).

La Decodificación, se entiende como la “lectura del mensaje matemático que el ser humano realiza al interpretar los fenómenos matemáticos, de acuerdo a sus vivencias, experiencias, conocimiento y cultura” (Del Pozo y Arrocha sf, citado por García et al 2015, p. 69).

Por último, *la Traducción*, que hace referencia a los cambios o transformaciones que el sujeto realiza al interior de los diferentes registros de representación de diversas maneras. La traducción “se relaciona con la conversión entre las diversas formas de representación, y brinda la posibilidad de representar una misma situación de maneras o modos diferentes. Con ello, induce a determinar reflexivamente la representación más conveniente de cada situación” (Sierra, González y López (1998), citado por García, et el 2015, p.66).

Los procesos descritos, están relacionados con uno de los aspectos de desarrollo humano asociados a la competencia matemática en el aspecto cognitivo. Otros aspectos asociados y que se tendrán en cuenta, son los aspectos *afectivos y tendencia de acción*.

El *Aspecto Afectivo*, es considerado como un sistema de representación que asiste a la cognición humana y actúa como respuesta lateral a las representaciones cognitivas, el afecto en sí

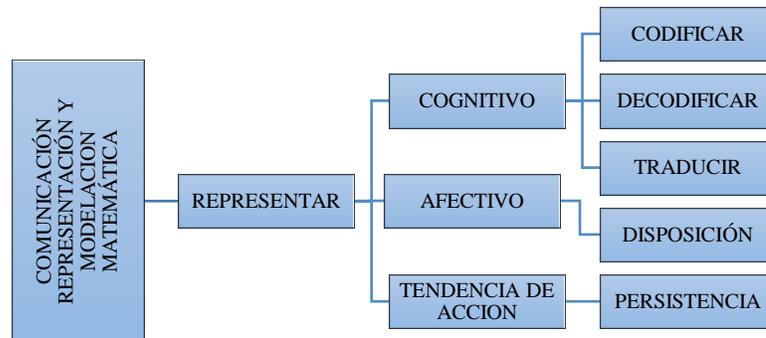
mismo tiene una función representacional en consecuencia codifica información sobre el contexto físico y social. Está relacionado con la valoración, el aprecio, la satisfacción, la curiosidad y el interés por la disciplina y su aprendizaje. El aspecto afectivo focalizan su interés en la disposición, la voluntad y el deseo que muestra el estudiante para responder a una determinada solicitud del conocimiento que puede ser externa o interna (García et al. 2015, p. 70).

El proceso de disposición, asociado al aspecto afectivo, *“está relacionado con las estructuras mentales que orientan las determinaciones de las acciones del ser humano en un contexto específico”* (García et al. 2015, p. 71).

El aspecto de Tendencia de Acción, se asume, en la misma línea de García et al. (2015), que este aspecto está relacionado con el compromiso que asume el estudiante frente a una actividad o tarea para construir su propio conocimiento. El estudiante realiza las actividades de manera motivada, muestra voluntad al responsabilizarse de ellas y evidencia los conocimientos adquiridos al enfrentar nuevas situaciones. El proceso asociado es la *persistencia*, entendida como la insistencia, firmeza o empeño en la realización de las actividades propuestas.

El siguiente esquema muestra los aspectos asociados a la competencia matemática representar desarrollada en los párrafos anteriores.

Grafico 2.3 Aspectos Asociados a la Competencia Representar



Fuente: Producción propia

Otro aspecto a considerar, se relaciona con los niveles de complejidad de las tareas matemáticas que enfrenta el estudiante. El *Nivel de Complejidad* de una competencia matemática, depende de la complejidad de las tareas matemáticas y de la complejidad de los procesos vinculados con esa competencia. Se asumen como niveles de complejidad, asociados a la competencia matemática representar, la *Reproducción*, *Conexión* y *Reflexión*; propuestos por PISA (2003, 2006. Citado por García et al. 2015, p. 29).

El nivel 1 o de *Reproducción*, exige del estudiante procedimientos rutinarios para resolver tareas con las cuales está familiarizado y que le exigen aplicar algoritmos, realizar operaciones sencillas, aplicar propiedades y, en general reproducir conocimiento ya practicado por el estudiante. No requiere de justificaciones o argumentos en los procesos desarrollados.

El nivel 2 *Conexiones*, el estudiante debe usar varias formas de representación semiótica, hacer tratamientos y conversiones en al menos dos sistemas diferentes, debe establecer relaciones matemáticas, proponer modelos de solución y argumentar los procesos y los resultados

Por último, en el nivel 3 *Reflexión*, se orienta por las estrategias que el estudiante es capaz de proponer y desarrollar para la solución de la tarea. En este nivel se presentan articulados los procesos de razonamiento, argumentación, matematización horizontal y vertical, exige creatividad para proponer estrategias de resolución de la tarea, además de soluciones novedosas, por lo que implica hacer matemáticas a un nivel más complejo.

La relación descrita entre tareas, procesos, niveles de complejidad de la competencia, con la actividad matemática de aprendizaje del estudiante, genera interacción comunicativa en el aula entre el profesor- estudiante y estudiante-

estudiante. “*Esta interacción es la fuente de comunicación en el aula, necesaria para construir el significado matemático compartido y para la negociación del desarrollo de estos significados compartidos entre profesor y estudiante*” (Bishop, 2005, p. 24)

Hasta ahora se ha presentado la estructura para organizar los elementos del MTP, para caracterizar las competencias matemáticas del estudiante. A continuación presentamos la perspectiva curricular y didáctica que este modelo imprime a la investigación. La perspectiva sociocultural acogida en esta investigación, según García et al. (2015), generan implicaciones a nivel didáctico y curricular.

La perspectiva didáctica, se focaliza en la competencia del profesor y del estudiante para planificar, ejecutar y evaluar la adecuada y oportuna articulación de dos expectativas de aprendizaje, *expectativas a corto plazo* y *expectativas a largo plazo*.

Las *expectativas a corto plazo*, según García et al. (2015), relacionados con los objetivos de las tareas, de la clase o del periodo académico, permiten planificar el trabajo en el aula por parte del profesor y contempla el diseño de tareas, enseñar a los alumnos a encontrar y movilizar recursos para aportar respuestas a las tareas y promover la reflexión metacognitivos para el éxito de la

acción. Y *las expectativas a largo plazo*, hacen referencia al desarrollo mismo de las competencias matemáticas del estudiante. Como proceso de formación humana y de enculturación, el desarrollo de competencias matemáticas no termina es continuo y dinámico, siempre habrá evolución, movilización y desarrollo.

En este orden de ideas, para aportar evidencias sobre el progreso de las competencias matemáticas del estudiante, el profesor, debe formular los objetivos, que están relacionados con el contenido, en términos de actuaciones y metas específicas. Así, *“es la calidad de la actividad matemática de aprendizaje, la que conduce al estudiante a alcanzar estos objetivos y a desarrollar los procesos matemáticos requeridos”* (García et al. 2015, p. 44).

La perspectiva curricular, se hace en términos de actuaciones, de procesos y no de conocimientos, es decir, las matemáticas se organizan curricularmente en términos de procesos matemáticos, atendiendo a que deben formularse a lo largo de los diferentes grupos de grados de escolaridad (coherencia horizontal) y expresarse como procesos propios de los diferentes pensamientos matemáticos en el que se organiza el currículo escolar.

Esta forma de organización curricular permite al profesor, planificar su propio curso de matemáticas en los diferentes grados que oriente y en los diferentes periodos, además, permite al grupo de docentes y a la institución educativa planificar el desarrollo completo del área a lo largo del año escolar. La tabla 2.4.1, presenta un ejemplo de la organización curricular para la competencia matemática representar en los diferentes pensamientos y grados.

Tabla 2.4 Organización Curricular de la competencia Representar

		REPRESENTAR				
PENSAMIENTO		1° a 3°	4° a 5°	6° a 7°	8° a 9°	10° a 11°
NUMÉRICO SISTEMAS NUMÉRICOS	Y	Uso representaciones (concretas y pictóricas) para realizar equivalencias de un número en las diferentes unidades del sistema decimal		Justifico el uso de representaciones y procedimientos en situaciones de proporcionalidad directa e inversa.	Utilizo los números reales en diferentes representaciones y en diferentes contextos	Análizo representaciones decimales de los números para diferenciar entre racionales e irracionales.
ESPACIAL SISTEMAS GEOMÉTRICOS	Y	Represento el espacio circundante para establecer relaciones espaciales.	Identifico, represento y utilizo ángulos de giros, aberturas, inclinaciones, figuras, puntas y esquinas en situaciones estáticas y dinámicas.	Represento objetos tridimensionales desde diferentes posiciones y vistas.	Uso representaciones geométricas para resolver y formular problemas en la matemática y en otras disciplinas	Identifico características de localización de objetos geométrico en sistemas de representación cartesiana y otros (polares, cilíndricas esféricas) y en particular de curvas y figuras cónicas. Describo y modelo fenómenos periódicos del mundo real usando relaciones y funciones trigonométricas.
VARIACIONAL SISTEMAS ALGEBRAICOS ANALÍTICOS	Y Y	Describo cualitativamente situaciones de cambio y variación utilizando el lenguaje natural, dibujos y gráficas	Describo e interpreto variaciones representadas en gráficos. Represento y relaciono patrones numéricos con tablas y reglas verbales	Describo y represento situaciones de variación relacionando diferentes representaciones (Diagramas, expresiones verbales generalizadas y tablas). Identifico las características de las diversas gráficas cartesianas (de puntos, continuas, formadas por segmentos, etc. En relación con la situación que representan.	Análizo en representaciones gráficas cartesianas los comportamientos de cambio de funciones específicas pertenecientes a familias de funciones polinómicas (Función lineal), racionales exponenciales y logarítmicas. Identifico la relación entre los cambios en los parámetros de la representación algebraica de una familia de funciones (Función lineal) y los cambios en las gráficas que las representan.	Utilizo las técnicas de aproximación en procesos infinitos numéricos.
ALEATORIO SISTEMAS DATOS	Y DE	Represento datos relativos a mi entorno usando objetos concretos. (Pictogramas y diagramas de barras.	Represento datos usando tablas y gráficas (pictogramas, gráficas de barras, diagramas de línea y diagramas circulares)	Identifico la relación entre un conjunto de datos y su representación. Interpreto produzco y comparo representaciones gráficas adecuadas para presentar diversos tipos de datos (diagrama de barras, diagramas circulares).	Selecciono y uso algunos métodos estadísticos adecuados al tipo de problema, de información y al nivel de la escala en la que esta se representa (nominal, ordinal, de intervalo y de razón)	
PENSAMIENTO METRICO Y SISTEMA DE MEDIDAS			Represento datos usando tablas y gráficos. (diagramas de barras, de líneas y circulares	Reconozco la relación entre un conjunto de datos y su representación.		Describo y modelo fenómenos periódicos del mundo real usando relaciones y funciones trigonométricas

Fuente: Producción propia

En cuanto a la evaluación, la valoración de la actividad matemática de aprendizaje, debe tener en cuenta la concepción y estructura de las competencias matemáticas, los tipos de evaluación a implementar atendiendo a lo cognitivo (niveles de complejidad), la evaluación de los aspectos afectivos, metacognitivos, volitivos y de uso social de la competencia. Además, debe permitir al estudiante la autocrítica de su actividad matemática y calidad de sus procesos (autoevaluación), que valore la calidad de los procesos de sus compañeros (coevaluación) y que su actividad matemática sea objeto de evaluación (heteroevaluación). Por último, que se haga en clase la evaluación de todo el proceso (metacognición).

Para abonar a la perspectiva didáctica, se acoge la teoría de las situaciones didácticas. Esta teoría establece la generación de momentos en el desarrollo de la clase que propicien la negociación de significados y la comunicación de las ideas matemáticas. Los conceptos fundamentales de la teoría se desarrollan a continuación.

2.5 Las Situaciones Didácticas en Didáctica de las Matemáticas

En este último apartado del marco teórico, centramos la atención en la teoría de las situaciones didácticas y su uso como material didáctico para la Educación la enseñanza de la Matemática. Se reflexiona sobre la utilización de las situaciones didácticas en la enseñanza de las matemáticas escolares y las ventajas de su uso para el aprendizaje del concepto de función lineal. Por último, analizamos una situación particular “el taxímetro” y su aplicación en el ámbito escolar. Nos centramos en la implementación de la situación didáctica, porque constituye el mecanismo de recolección de datos.

2.5.1 Las Situaciones Didácticas

La Teoría de las Situaciones Didácticas, propuesta por Guy Brousseau, se concibe como un modelo en el cual las matemáticas son un conjunto estructurado de saberes producidos por la cultura. La clase de matemática, por tanto, se concibe como una comunidad de producción de conocimiento a partir del reconocimiento y resolución de problemas.

Por *situación didáctica* se entiende “*una situación diseñada intencionalmente por el profesor con el fin de promover en los alumnos la construcción de saber matemático*” (García et al 2015, p. 79). La Situación Didáctica se planifica mediante actividades problematizadoras, cuya resolución, implique la emergencia del conocimiento matemático que da sentido a la clase.

Otra concepción frente a las situaciones didácticas, es como un conjunto de relaciones establecidas explícita y/o explícitamente entre un alumno o un grupo de alumnos, un cierto medio (que comprende eventualmente instrumentos u objetos) y un sistema educativo (representado por el profesor) con la finalidad de lograr que estos alumnos se apropien de un saber constituido o en vías de constitución (Panizza, 1999,p.15).

2.5.2 Tipología de las Situaciones

En las situaciones didácticas se presentan de manera secuencial los siguientes tipos de situaciones:

Situación acción. En ella, los estudiantes interactúan activamente con el medio didáctico para lograr la resolución de problemas y la adquisición de

conocimientos. Dentro de las condiciones que una *situación de acción* debería reunir para desembocar en una situación a-didáctica tenemos, por ejemplo, la formulación del problema, éste debe ser del interés del estudiante, además el tipo de pregunta formulada debe ser tal que no tenga respuesta inmediata, de modo que represente realmente un problema para el estudiante y sin la intervención directa del profesor.

Situación de formulación o comunicación. Actividad grupal que requiere de la comunicación entre los estudiantes. Se comparten experiencias en la construcción del aprendizaje, por eso, en este proceso es importante controlar la comunicación de ideas. En ese sentido, un elemento importante en esta situación, según Brousseau (1998), es la necesidad de que cada integrante del grupo participe del proceso; es decir, que todos se vean forzados a comunicar las ideas e interactuar con el medio didáctico.

Adicionalmente para Panizza (1999), La *situación de validación* ocurre una vez que los estudiantes han interactuado de forma individual o de forma grupal con el medio didáctico, se pone a juicio de un interlocutor el producto obtenido de esta interacción. Es decir, se valida lo que se ha trabajado, se ‘discute’ con el docente acerca del trabajo realizado para cerciorar si realmente es correcto.

Finalmente, la *Situación de institucionalización del saber*, esta fase es de suma importancia en el cierre de una situación didáctica. Para Panizza (1999), el docente retoma lo efectuado hasta el momento por los diferentes grupos, aporta observaciones, clarifica conceptos y da respuesta a las preguntas que generaron dificultad. Se presentan los resultados, siguiendo un orden jerárquico de los conceptos, y se deja al descubierto todo lo que estuvo detrás de la construcción de ese conocimiento.

La perspectiva de diseñar situaciones que ofrecieran al alumno la posibilidad de construir el conocimiento dio lugar a la necesidad de otorgar un papel central (dentro de la organización de la enseñanza), a la existencia de momentos de aprendizaje, concebidos como momentos en los cuales el alumno se encuentra solo frente a la resolución de un problema, sin que el maestro intervenga en cuestiones relativas al saber en juego. (Vergneug, citado por Chavarría 2006, p. 5).

Según Brousseau (1986), el reconocimiento de la necesidad de esos momentos de aprendizaje dio lugar a la noción de situación a-didáctica (o fase a-didáctica dentro de una situación didáctica). La define como el término de situación a-didáctica designa toda situación que, por una parte no puede ser

dominada de manera conveniente sin la puesta en práctica de los conocimientos o del saber que se pretende y que, por la otra, sanciona las decisiones que toma el alumno (buenas o malas) sin intervención del maestro en lo concerniente al saber que se pone en juego. (Citado por Chavarría, 2006).

Las situaciones didácticas, constituyen una orientación para la planificación del docente de las actividades que se desarrollaran en el aula y un mecanismo para que los estudiantes desarrollen competencias matemáticas y alcancen el aprendizaje de las matemáticas. Relacionando esta teoría, con la ya expuesta sobre el MTP, el progreso del estudiante, se evidencia en la calidad de la actividad matemática de aprendizaje que desarrolla. Esta calidad, está determinada por el nivel de complejidad de las tareas que enfrenta y por su actuación en los diferentes momentos que se definen en la situación didáctica.

Según García et al. (2013), este progreso se expresa cuando “*moviliza sus capacidades, demuestra voluntad, persistencia, comprensión y una aceptación cultural para hacer uso social de sus competencias matemáticas de forma ética y responsable*” (p.72).

2.5.3 La transposición Didáctica y el Contrato Didáctico

En la interrelación, profesor-estudiante-medio didáctico, coexisten dos conceptos: *la transposición didáctica y el contrato didáctico*.

El Contrato Didáctico, se refiere a la premisa establecida entre profesor y alumno. Comprende el conjunto de comportamientos que espera, tanto el alumno del profesor, como el profesor del alumno.

La transposición didáctica, es considerada por Yves Chevallard, como el conjunto de interacciones didácticas. La acción didáctica se convierte entonces en el medio general de reducción de tensión, y la acción didáctica, crea a su vez, la transposición didáctica, de manera que puede comprenderse como un medio de regulación, más que como un medio de acción aislada.

Esta aproximación “antropológica” se articula perfectamente con la teoría de las situaciones didácticas y la completa. Permite el acceso más directo a cierto número de problemas principalmente aquellos que tienen que ver con la macro-didáctica y la relación con el saber. La teoría de las situaciones didácticas, puede extender con sus métodos de modelización a este campo.

La tipología de las situaciones didácticas de Brousseau, al igual que las situaciones matemáticas planteadas en los estándares, permiten unas actuaciones similares por parte de los estudiantes; en primer lugar porque posibilitan a los estudiantes a tomar decisiones: **Situaciones de acción**, en segundo lugar, exponer sus opiniones y ser receptivos a las opiniones de los demás **Situaciones de formulación o comunicación**, generar discusión y desarrollar la capacidad de justificar las afirmaciones con argumentos. **Situaciones de validación** y organización del aprendizaje matemático fomentando la cooperación entre estudiantes y el trabajo en equipo. **Situaciones de institucionalización**.

3. Marco Metodológico

En este capítulo describimos la metodología empleada, en el problema de investigación planteado en este estudio. Iniciamos caracterizando la institución donde se desarrolló la investigación, luego se describe a los sujetos participantes. Seguidamente, se caracteriza el tipo de investigación desarrollada y se detalla el diseño de la situación didáctica y por último se describe las fases de la implementación que permitió la recolección de datos.

3.1 Tipo de Investigación

El estudio corresponde a una investigación de tipo exploratorio, descriptivo, no experimental. La investigación es cualitativa y corresponde a un estudio descriptivo por cuanto intenta describir fenómenos y eventos; esto es, detallar cómo se manifiestan las actuaciones de los estudiantes frente a una situación. Según (Hernandez, 2010), se pretende describir actuaciones de los estudiantes, a partir de la observación de lo que ocurre en el aula de clase frente a la caracterización de los procesos asociados a la competencia representar.

3.2. Contexto Empírico de la Institución

La institución educativa Liceo departamental, es consolidada mediante resolución 2819 de 26 de octubre de 2004, cuando la secretaria de educación Municipal de Santiago de Cali, ordena su fusión con las escuelas La gran Colombia y la Presentación. Este hecho, obliga a la institución a dejar su carácter netamente femenino de lado, para dar lugar a la modalidad mixta.

La sede Liceo, se encuentra ubicada en la comuna 19 en la carrera 37 No 8-38 en el barrio Eucarístico, zona urbana de Santiago de Cali. En esta sede se ofrecen los niveles de sexto a octavo en la jornada de la tarde y de noveno a once en la jornada de la mañana. El Liceo ofrece bachillerato académico y bachillerato técnico deportivo en recreación y deporte. Para el desarrollo de los procesos misionales, la institución cuenta con un cuerpo docente de 43 profesionales en las diferentes áreas del conocimiento; docentes comprometidos con su labor y de los cuales el 80% cuenta con estudios de postgrado. Estos maestros son los encargados de acompañar el proceso formativo de 1575 estudiantes de estrato 1 y 2 en los diferentes niveles que ofrece esta sede en ambas jornadas.

El Liceo departamental en sus 70 años de trabajo formativo para los jóvenes de la ciudad, ha sido reconocido por el desempeño de sus estudiantes a nivel académico y deportivo, alcanzando una posición muy superior en las pruebas externas y actualmente cuenta con la recertificación de calidad en cada uno de sus procesos. Para el año 2015 los resultados obtenidos en las pruebas saber noveno, mostraron un notable descenso de los desempeños de los estudiantes en el área de matemáticas, lo que motivó el desarrollo de la presente investigación.

3.3 Descripción de los Sujetos de la Investigación

Para realizar la investigación, se consideró como población, los estudiantes de grado noveno. La muestra seleccionada está constituida por 33 estudiantes matriculados en el grado 9°1, para el año lectivo 2016. La muestra corresponde a estudiantes matriculados en la modalidad técnico deportivo.

Para el año lectivo 2016, el Liceo en su sede central, contaba con seis grupos del grado noveno. Los 33 estudiantes que conforman la muestra, eran alumnos de la autora de este trabajo, y con ella cursaban el área de matemática, que corresponde al álgebra escolar y dada la modalidad, se cuenta con una intensidad de 4 horas semanales. Entre los integrantes de la muestra se contó con 14 hombres y 19 mujeres. Con el fin de proteger su identidad, se utilizó la notación compuesta por una letra (E) y un número, el cual corresponde con el número de lista, esta, corresponde al estricto orden alfabético. Así la denominación de los sujetos de estudio varía de E1 a E33.

Otro aspecto a tener en cuenta, es que la sede Liceo, se encuentra ubicada en la comuna 19, catalogada como estrato 3, y sólo el 15% de los estudiantes matriculados pertenecen al sector, el 85% de nuestros estudiantes, pertenecen a los estratos 1 y 2. Esto acorde a nuestra filosofía institucional de inclusión. Este hecho condiciona la situación escolar de los

estudiantes. En general, aunque el ausentismo es bajo, existe poca motivación e interés por el aprendizaje y el estudio. Realizamos la selección de los estudiantes atendiendo a la asignación académica para el año lectivo.

3.3.1 Características Académicas de los Sujetos

En Los estudiantes del grado 9°1, se evidencia un marcado desinterés hacia el aprendizaje de las matemáticas. Algunos de estos jóvenes, son deportistas destacados y cumplen con rutinas de entrenamiento extenuantes que impiden que dediquen horas de estudio extra para el área. Además, su proyecto de vida está enfocado en el deporte y no visualizan la utilidad de la matemática en la consecución de sus metas a largo plazo. Esto ha ocasionado que en los últimos años, el desempeño académico de los estudiantes que desarrollan su proceso formativo en el bachillerato técnico deportivo, ha sido bajo en el área de las matemáticas. Influenciado por factores como la desmotivación por el estudio de las matemáticas, la baja intensidad horaria de clase de matemática para esta modalidad, el cumplimiento de la formación técnica en contra jornada. Entre otras.

El grupo cuenta con 4 estudiantes que repiten por segunda vez el grado noveno, 4 estudiantes nuevos en la institución y 7 deportistas de alto rendimiento,

el resto del grupo, presentan un desempeño básico. En general, el desempeño académico del grupo en el área de matemáticas es bajo.

3.4 Instrumentos a utilizar en la recolección de datos

Los instrumentos utilizados para la recolección de información, fueron la prueba pre-post y la observación del desarrollo de la una situación didáctica en una secuencia de tareas aplicada en tres sesiones.

3.4.1 Prueba Pre-post

Para el desarrollo de esta investigación asumimos la definición de prueba pre-post de Martyn Shuttleworth², que establece que la prueba pre-post, *“constituyen el método para medir el nivel de cambio que se produce como resultado de tratamientos o intervenciones”*.

La situación propuesta en esta prueba, fue tomada de Otálora (2006) y está compuesta de 4 preguntas, su intencionalidad se explica a continuación:

² <https://explorable.com/es/disenos-de-prueba-previa-y-posterior>

La situación: Las empresas de taxis se rigen por las tarifas dispuestas por el decreto 516 de junio 19 de 2001 de la secretaria de tránsito y transporte. La utilización del servicio se mide en unidades; las cuales son registradas por el taxímetro. La unidad se marca cada 90 metros y cada 60 segundos de espera. Por cada unidad se pagan \$53. Cualquier recorrido tiene un valor inicial de 25 unidades, adicional a las unidades empleadas y en el recorrido mínimo se tarifican 50 unidades que equivalen a \$2.650 sin recargos.

1. Con base en la situación presentada, identifica:

a. Las magnitudes que aparecen en la situación

b. Las magnitudes que están relacionadas _____

c. Describa la relación existente entre las magnitudes identificadas

Esta pregunta, busca que los estudiantes identifiquen las magnitudes presentes en la situación, que establezcan las posibles relaciones entre las variables mencionadas y describan las relaciones existentes entre las magnitudes identificadas.

2. Con base en la información dada en la situación, proponga valores para los metros recorridos y complete cada una de las tablas que aparecen a continuación.

Metros recorridos								
Unidades empleadas								

Unidades empleadas								
Costo del servicio								

Metros recorridos								
Costo del servicio								

3. Ubique en un plano cartesiano, las parejas obtenidas en cada una de las tablas del punto 2.

Las preguntas No. 2 y No. 3, tienen como propósito llevar al estudiante a utilizar el lenguaje tabular y de gráficas cartesianas, para mostrar las relaciones entre las

variables e identificar la relación de dependencia e independencia entre las variables.

4. A partir de la información obtenida en los puntos 2 y 3, proponga una expresión matemática que relaciones las variables y que muestre el comportamiento de la información suministrada en los puntos anteriores.

La pregunta No.4, dará cuenta de la habilidad del estudiante para convertir las representaciones abordadas en el punto 2 y 3 al lenguaje simbólico o representación algebraica.

La aplicación de la prueba es crucial en el análisis, por cuanto permite establecer las dificultades de los estudiantes frente al tema, como la eficacia de la implementación de la situación didáctica en la apropiación de los conceptos matemático de función lineal y su impacto en el estudio de las otras funciones polinomiales.

3.4.2 La Situación Didáctica

Dada la ubicación del Liceo en su sede central, los estudiantes y empleados, pueden utilizar, de acuerdo a sus posibilidades y/o preferencias frente al servicio de transporte público: el MIO, vehículo particular, patineta, bicicleta y/o el servicio de taxi. La secuencia de tareas para la situación didáctica está relacionado con el mecanismo utilizado para el cobro del servicio de taxi, a partir del funcionamiento del taxímetro.

La situación fue tomada del taller de Ingenio Matemático para grado 10 y 11, y el diseño de las tareas para movilizar los niveles de complejidad y la adecuación para atender a la teoría de las situaciones didácticas, es construcción de la autora de esta investigación. Con el fin de contextualizar la situación, la empresa Taxi Libre fue la elegida para ilustrar la situación, la imagen se tomó de http://www.concejodecali.gov.co/Publicaciones/concejo_de_cali_condecora_a_taxis_libres_4444444

SITUACIÓN DIDÁCTICA: EL TAXIMETRO



Las empresas de taxis se rigen por las tarifas dispuestas por el decreto 516 de junio 19 de 2001 de la secretaria de tránsito y transporte. La utilización del servicio se mide en unidades; las cuales son registradas por el taxímetro. La unidad se marca cada 90 metros y cada 60 segundos de espera. Por cada unidad se pagan \$53. Cualquier recorrido tiene un valor inicial de 25 unidades adicional a las unidades empleadas y en el recorrido mínimo se tarifican 50 unidades que equivalen a \$2.650 sin recargos. (Otálora, 2006, p.9)

3.4.2.1 Secuencia de Tareas

La Situación didáctica se lleva a cabo a partir de una secuencia de tres tareas matemáticas, asumidas como eje motor de la actividad matemática.

“Una actividad matemática se entiende como un conjunto de tareas matemáticas diseñadas y propuestas por el profesor para generar

actividad matemática de aprendizaje del estudiante y desarrollo de procesos cognitivos, afectivos y de tendencia de acción de complejidad creciente en la medida en que avanza en su nivel de escolaridad (García et al. 2015, p. 28).

Analizando la complejidad de la función lineal y su importancia en el desarrollo de los cursos de algebra de 8° y 9° y las matemáticas de grados posteriores, se encontró que:

La función lineal, es una base fundamental para el estudio de las funciones reales y el desarrollo del pensamiento Variacional y numérico. Por ellos se deben tener presentes los conocimientos básicos, relacionados con la red de conceptos y procedimientos que posibilitan su movilización. (Cabra & Gómez, 2016), p.5).

Atendiendo a lo anterior, se estableció para el desarrollo de la secuencia de tareas de la situación didáctica, se requieren como variables de análisis, *las variables dependientes e independientes*, las relaciones de cambio y variación entre variables y los procesos relacionados con la representación gráfica, simbólica, tabular; interpretación de gráficas.

La secuencia consta de tres tareas, Representadas por T1, T2 y T3. Cada tarea da cuenta de las variables a analizar así:

T1. Magnitudes, variables dependientes y variables independientes.

En esta tarea el propósito es que los estudiantes identifiquen las variables que se relacionan y establezcan el tipo de relación que se presenta entre ellas. Esto, debido a la importancia que este hecho reviste en las situaciones de cambio y variación.

T2. Representación de la relación entre variables.

Una vez identificadas las relaciones entre las variables, el estudiante debe conocer las diferentes formas en que dicha relación puede representarse. El conocerlas y utilizarlas conlleva a la comprensión del concepto matemático.

T3. Cambio de un sistema de representación a otro

Esta tarea busca que el estudiante visualice el concepto matemático, independientemente del registro en el que ha sido representado. Este proceso se conoce como conversión y está relacionado con la posibilidad que tiene el estudiante de pasar de un registro de representación a otro.

Por otra parte, en concordancia con la teoría de las situaciones didácticas, la tipología de las situaciones permite que el estudiante se apropie del discurso matemático centrado en el proceso de compartir y desarrollar el significado del objeto matemático, potencie su comunicación y participación en la clase como comunidad de aprendizaje para construir conocimiento. Por ello, cada una de las tareas antes referenciadas, aunque responden a propósitos diferentes, son complementarios. La directriz para dinamizar la clase hacia estos objetivos, está referida a los momentos que se han definido en cada una de las tres tareas.

Momento 1 (M1), trabajo individual. El estudiante está en situación de acción, codifica sus representaciones mentales y las describe para comprender la situación. Por ejemplo, al iniciar a codificar, inicia el proceso de traducir el problema del mundo real al mundo de las matemáticas, es decir, inicia la matematización horizontal.

Momento 2 (M2), trabajo en parejas. En esta parte, el estudiante comparte los significados del objeto matemático y comunica a su compañero las representaciones que ha dado a la situación, las confronta con algunos argumentos. Se propicia la formulación y comunicación.

Momento 3 (M3), trabajo en grupos. Los estudiantes negocian los significados que han construido en forma individual y por parejas, validan los argumentos expuestos, construyen consensos frente a los resultados y socializan con el resto de los compañeros.

Momento 4 (M4), la plenaria de grupo. La docente propicia la socialización de los hallazgos de los estudiantes, institucionaliza el saber con el rigor propio de las matemáticas, a partir de las construcciones de los estudiantes.

En cada uno de los momentos anteriores, el estudiante debe desarrollar procesos matemáticos y no matemáticos en la actividad matemática de aprendizaje. Para ilustrar al lector al respecto se presenta una descripción completa de la secuencia de tareas.

Tabla 3.4.2.1 Tarea No 1 Magnitudes Dependientes e Independientes

TAREA		
PREGUNTA GUIA	IDEAS CLAVE	DESEMPEÑOS ESPERADOS
<p>¿Qué elementos interfieren en la asignación de la medida del taxímetro?</p> <p>¿Qué elementos interfieren en el costo del servicio?</p> <p>¿En la decisión de acceder o no al servicio de taxi?</p>	<ul style="list-style-type: none"> ▪ Identificar las magnitudes involucradas ▪ Definir la relación entre variables: dependencia e independencia ▪ Determinar elementos de la función como dominio y rango. 	<ul style="list-style-type: none"> ▪ Enuncia verbalmente las relaciones que existen entre las variables involucradas en la situación.(1) ▪ Identifica el dominio y el rango de una función. ▪ Establece la relación existente entre variables a partir de una tabla de valores ▪ Explico algunas relaciones matemáticas entre variables involucradas en la situación.

Fuente: Producción propia

SITUACIÓN DIDÁCTICA: EL TAXIMETRO



Las empresas de taxis se rigen por las tarifas dispuestas por el decreto 516 de junio 19 de 2001 de la secretaria de tránsito y transporte. La utilización del servicio se mide en unidades; las cuales son registradas por el taxímetro. La unidad se marca cada 90 metros y cada 60 segundos de espera. Por cada unidad se pagan \$53. Cualquier recorrido tiene un valor inicial de 25 unidades adicional a

las unidades empleadas y en el recorrido mínimo se tarifican 50 unidades que equivalen a \$2.650 sin recargos. (Otálora, 2006, p.9)

M1. Situación de acción

Lee cuidadosamente la situación presentada sobre el taxímetro. Con base en ello, completa los espacios en blanco

- Una magnitud es todo aquello que puede medirse. ¿Qué magnitudes, identificas en la situación planteada?

- Describe los cambios que se dan en cada una de las magnitudes encontradas en el punto 1.

- Atendiendo a las condiciones dadas en la situación, completa la siguiente tabla

Metros recorridos	90	4750	5000	5200	5640	5850	6000	6200	6640	6850
Unidades empleadas	1									

En este primer momento se busca que el estudiante, confronte sus saberes previos para dar respuesta a los cuestionamientos planteados frente a la situación. En esta parte, el estudiante en forma individual realiza procesos de codificación, decodificación y traducción. La traducción en cuanto a tratamientos; por cuanto realiza transformaciones en el mismo registro; el escrito, al describir magnitudes, variables dependientes y variables independientes.

M2. Situación de formulación y comunicación

En los puntos que siguen trabajaremos en parejas.

- Discuta con su compañero de grupo, las apreciaciones que obtuvieron de forma individual.
- Analicen y den respuesta a los interrogantes siguientes.

4. Expliquen la relación que existe entre las magnitudes identificadas y la variación que ocurre en cada una de ellas.

5. ¿Cuál es la relación numérica que existe entre la distancia recorrida y las unidades marcadas en el taxímetro? Asuma que no se requiere de tiempo de espera.

6. Describe la relación que existe entre el valor de una carrera y la distancia recorrida.

En el segundo momento, el trabajo se desarrolla en parejas, los estudiantes negocian con disposición y persistencia la validez de los resultados obtenidos frente a Magnitudes identificadas, la variación entre las magnitudes: dependiente e independiente.

M3. Situación de validación

Formen ahora, grupo de 4 estudiantes. Socialicen los resultados que han obtenido en cada uno de los puntos anteriores. Cada grupo socializará los resultados obtenidos al resto de la clase.

Presentados los resultados obtenidos por los diferentes grupos, procedan a verificar la validez de los argumentos presentados frente a la siguiente situación:

7. Si Roberto emplea el servicio de taxi recorriendo 15Km. ¿Cuánto debe pagar?

En este tercer momento, los estudiantes forman grupos de 4 estudiantes y se busca que desarrollen no sólo los procesos asociados al aspecto cognitivo relacionado con las magnitudes y la variación entre ellas, sino que cobra mayor interés e importancia los procesos afectivos y de tendencia de acción, asociados a la competencia de representar específicamente.

M4. Situación de institucionalización

Presentados los resultados obtenidos por los diferentes grupos se procede a verificar la validez de los planteamientos presentados. Se propone una situación particular: Si Roberto emplea el servicio de taxi recorriendo 6Km. ¿Cuánto debe pagar?

En este último momento, se presentan los hallazgos de los diferentes grupos propicia las participaciones de los estudiantes en la plenaria, para la institucionalización de los saberes. El maestro es determinante; por cuanto los cuestionamientos que planteen y las reflexiones que surjan permitirán la construcción colectiva y personal del objeto matemático en juego. En este caso la relación de dependencia e independencia de variables y su representación en lenguaje simbólico.

Tabla 3.4.2.2 Tarea 2 Representación de la variación entre variables

TAREA	PREGUNTA GUIA	IDEAS CLAVE	DESEMPEÑOS ESPERADOS
2	<p>¿Cómo representar las variaciones de las unidades reportadas en el taxímetro por metro recorrido?</p> <p>¿Cómo representar las variaciones en el costo por marcación en el taxímetro?</p> <p>¿Cómo representar las variaciones en el costo por metro recorrido?</p>	<ul style="list-style-type: none"> Características en las representaciones de las funciones lineales. 	<ul style="list-style-type: none"> Determina las características de las representaciones de las funciones lineales.

Fuente: Producción propia

SITUACIÓN DIDÁCTICA: EL TAXIMETRO



TAREA No 2: Representación de la variación entre magnitudes

Continuamos con la situación del Taxímetro: La utilización del servicio se mide en unidades; las cuales son registradas por el taxímetro. La unidad se marca cada 90 metros y cada 60 segundos de espera. Por cada unidad se pagan \$53. Cualquier recorrido tiene un valor inicial de 25 unidades adicional a las unidades empleadas y en el recorrido mínimo se tarifican 50 unidades que equivalen a \$2.650 sin recargos.

En esta actividad, nos interesa establecer la relación entre las magnitudes: *distancia recorrida, marcaciones en el taxímetro y costo generado por el servicio* Para ello, complete cada una de las tablas:

Tabla 1:

Metros recorridos	4770	5040	5310	5580	5850	6120	6390	6660	6930
Unidades que aparecen en el taxímetro									

Tabla 2:

Unidades que aparecen en el taxímetro									
Costo generado por el servicio									

En los puntos que siguen trabajaremos en parejas. Discuta con su compañero de grupo los resultados obtenidos y comparen los valores hallados.

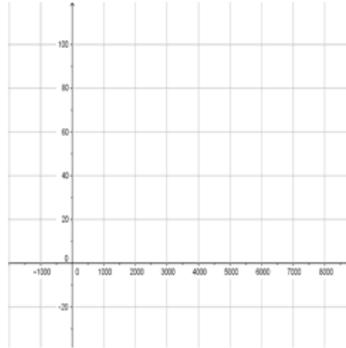
M1. Situación de acción

En este primer momento se busca identificar el nivel de comprensión que el estudiante ha alcanzado frente a la situación, a partir de ello, el estudiante relaciona la información para dar respuesta a los interrogantes planteados, de forma individual. El nivel de complejidad es de reproducción y se busca que movilice los proceso de codificar y decodificar la información. La traducción en cuanto a tratamientos; por cuanto realiza transformaciones en el mismo registro, en este caso el lenguaje tabular para representar las variaciones entre variables

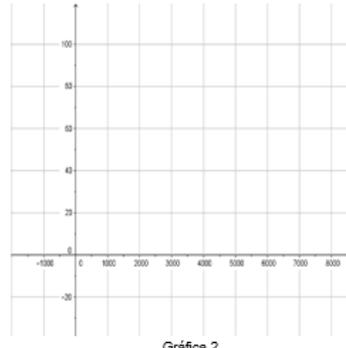
M2. Situación de formulación y comunicación

En los puntos que siguen trabajaremos en parejas. Discuta con su compañero de grupo los resultados obtenidos y comparen los valores hallados.

1. Representen la información de cada tabla en un plano cartesiano.



Gráfica 1



Gráfica 2

2. ¿Pueden unirse los puntos que ubicaste, mediante una línea recta? Expliquen tu respuesta.

Como ya se describió anteriormente, en este segundo momento, el trabajo se desarrolla en parejas, los estudiantes negocian con disposición y persistencia la validez de los resultados obtenidos frente la manera como han establecido la relación entre las variables y establecer la regla que han seguido para completar la información en las representaciones tabular y gráfica.

M3. Situación de validación

		<i>SITUACIÓN DIDÁCTICA: EL TAXIMETRO</i>				
SANTIAGO DE CALI	Versión: 01	Fecha: 18/10/2015	Página 5 de 4		LICEO DEPARTAMENTAL	

Formen ahora, grupo de 4 estudiantes y socialicen los resultados obtenidos.

3. Establezcan las similitudes y diferencias que se han obtenido en los análisis realizados. Aborden los puntos siguientes para socializar los resultados, en la plenaria
4. Construye una tabla que pueda mostrar la forma como varia el costo del servicio en función de la distancia que se recorre.
5. ¿De qué depende el costo del servicio por una carrera de taxi? Explique la respuesta.

6. ¿Cómo se puede calcular el costo por el servicio de taxi, en función de la distancia recorrida? Eplica tu respuesta

En este momento y en esta tarea el nivel de complejidad de T2, es de conexión por cuanto el estudiante debe establecer relaciones no solo entre las variables, sino relaciones entre los diferentes registros de representación abordados hasta ahora: lenguaje escrito, tabular y gráfico. El grupo debe además referirse a las relaciones entre las variables atendiendo a un lenguaje algebraico propio de las matemáticas, esto en el aspecto cognitivo, y entablar una comunicación a través de un discurso, propio de las matemáticas en los procesos asociados en el aspecto afectivo y en el de tendencia de acción.

M4. Situación de institucionalización

Socializa al grupo los resultados obtenidos y verifica la validez de los planteamientos presentados, sin perder de vista la situación.

7. ¿Cuál es la validez de la afirmación "A mayor distancia recorrida, mayor es el costo del servicio de taxi"? Explique su respuesta. Sugerencia: Revisa la gráfica 2.

En esta instancia y en situación de institucionalización, la actividad matemática de aprendizaje ha posibilitado que el estudiante presente las conclusiones propias de la tarea, atendiendo a los conceptos ya institucionalizados en T1, identificando los distintos tipos de representación que admite la función lineal.

El maestro propiciará la discusión frente a los hallazgos del grupo para dejar establecidos los aspectos relevantes en esta tarea.

3.4.2.3 Tarea No 3 Cambio de registro de representación de variación entre magnitudes

AREA	GUIA	IDEAS CLAVE	DESEMPEÑOS ESPERADOS
	<p>¿Cómo varía la unidad de marcación en el taxímetro por metro recorrido?</p> <p>¿Cómo varía el costo del servicio por metro recorrido?</p>	<ul style="list-style-type: none"> Representación de funciones a través de tablas y gráficas. Propiedades de las funciones a partir de la representación tabular. Propiedades de las funciones a partir de la representación gráfica. 	<ul style="list-style-type: none"> Defino la relación existente entre la representación tabular y gráfica. Caracterizo la función a partir de las representaciones. Explico la relación matemática con las variables involucradas en la situación.

Fuente: Producción Propia

SITUACIÓN DIDÁCTICA: EL TAXIMETRO

TAREA No 3: Cambio en la representación de variación de magnitudes

Lee la situación presentada con atención:

La utilización del servicio de taxi, se mide en unidades las cuales son registradas por el taxímetro. La unidad se marca cada 90 metros y cada 60 segundos de espera. Por cada unidad se pagan \$53. Cualquier recorrido tiene un valor inicial de 25 unidades adicional a las unidades empleadas y en el recorrido mínimo se tarifican 50 unidades que equivalen a \$2.650 sin recargos.

M1. Situación de acción

1. Completa la tabla de valores

Distancia recorrida	4770 X_1	5040 X_2	5310 X_3	5580 X_4	5850 X_5	6120 X_6	6390 X_7	6660 X_8	6930 X_9
Costo generado por el servicio									

Con base en la información obtenida en la tabla, responde los siguientes interrogantes:

2. Al realizar la diferencia entre las distancias recorridas $X_2 - X_1$, $X_3 - X_2$ y así sucesivamente, ¿Qué valores se obtienen?

$$X_2 - X_1 = \underline{\hspace{2cm}} \quad X_3 - X_2 = \underline{\hspace{2cm}} \dots$$

3. Si ahora calculas las diferencias entre los costos sucesivos, ¿Qué valores obtienes?

4. ¿Qué significado tienen los valores hallados? _____

El planteamiento de estas preguntas, busca que el estudiante establezca el comportamiento de las variables identificadas, para establecer la razón de cambio, como elemento base para establecer la ecuación de una función lineal y llegar a la representación algebraica del objeto de estudio.

M2. Situación de Formulación y comunicación

□

Discute sobre la reflexión realizada en los puntos anteriores con tus compañeros de grupo y la docente.

5. Representen los datos de la tabla, en un gráfico cartesiano.
6. Unan los puntos que ubicaron y escriban un comentario sobre lo que esto significa. En el comentario, tengan en cuenta el contexto en el que está inscrita la situación, en el contexto de uso del servicio de taxi como medio de transporte público.
7. ¿De qué depende que los puntos resultantes puedan unirse mediante una línea?

8. ¿Qué información nos da en este contexto de la situación, la inclinación de la recta? _____

9. ¿Cómo se puede calcular esta inclinación? _____

10. ¿Es posible medir dicha inclinación? Y a cuanto equivale dicha medida

11. ¿Cómo se relaciona este procedimiento con los datos de la tabla? _____

En este momento, el nivel de complejidad de esta tarea es de reproducción ya que debe realizar procesos rutinarios que ha elaborado en las tareas anteriores. Además de contrastar la información con su compañero para propiciar el aprendizaje colaborativo y generar comunidad de aprendizaje.

M3. Situación de Validación

 SANTIAGO DE CALI	SITUACIÓN DIDÁCTICA: EL TAXIMETRO			 LICEO DEPARTAMENTAL
	Versión: 01	Fecha: 18/10/2015	Página 8 de 4	

Formen ahora, grupos de 4 estudiantes y presenten los resultados obtenidos.

12. Establezcan las similitudes y diferencias que se han dado en los análisis realizados. Construya una tabla según aparece a continuación:

SIMILITUDES	DIFERENCIAS

13. Aborden las respuestas dadas a los planteamientos anteriores. Socialice los resultados en la plenaria de grupo.

M4. Situación de Institucionalización

Presentados los resultados obtenidos por los diferentes grupos se procede a verificar la validez de los planteamientos presentados, a partir de una situación particular

14. Escriba una expresión algebraica que permita calcular el costo del servicio de taxi de acuerdo a la distancia en metros recorrida. Relacione esta expresión con los datos de la tabla y el gráfico cartesiano. Escriba una conclusión al respecto.

Al finalizar esta secuencia de tareas, el estudiante ha enfrentado actividad matemática de aprendizaje con niveles de complejidad creciente desde reproducción hasta conexión. Según García et al (2015), la conexión busca que el estudiante utilice al menos dos registros de representación, establezca relaciones matemáticas, proponga modelos de solución y argumente los procesos seguidos y

los resultados. Esto es lo que se ha establecido en la propuesta de esta secuencia.

3.4.3 Instrumento de Observación

Para el registro sistemático de los comportamientos de los estudiantes frente a cada una de las tareas de la secuencia, se llevó a cabo un registro por sesión en donde el interés primordial estaba orientado a dar cuenta de las actuaciones de los estudiantes frente a cada tarea, en cada uno de los momentos establecidos, a tomar comentarios que se daban entre ellos y la construcción del conocimiento, en M1, M2 y M3. Esta parte corresponde, según (Hernandez, 2010), a una observación no participativa. En el M4, al institucionalizar los elementos objeto de cada tarea, se tornaba participativa por cuanto debía propiciar el dialogo entre los estudiantes, mediante cuestionamientos frente a los hallazgos de tres de los grupos.

Dado lo dispendioso de esta actividad, en la sesión de la tarea 3, se optó por la grabación de un video que aportó considerablemente al análisis de los comportamientos de los estudiantes frente la actividad de aprendizaje propuesta

3.5 Procedimiento y Fases

En este apartado, se detalla la planificación y desarrollo de cada una de las tres fases llevadas a cabo en la recolección de datos. Fase 1 aplicación de la prueba pre-post, Fase 2 implementación de la situación didáctica, mediante la secuencia de tareas y la Fase 3 aplicación de la prueba pre-post nuevamente. En el numeral anterior se presentó la estructuración de los instrumentos de recolección de datos: la prueba pre-post y la secuencia de tareas de la situación didáctica.

Previo al desarrollo de la fase 1, se informó a los estudiantes y a los padres de familia, sobre la intención de trabajar algunos temas del álgebra de noveno de forma distinta a como estaban acostumbrados en clase. Bajo la acogida de la propuesta tanto de los padres de familia como de los estudiantes, se desarrollaron actividades encaminadas a mostrar la importancia de la matemática en situaciones cotidianas y con base en ello los estudiantes identificaron la utilidad de la matemática en el desarrollo de su proyecto de vida.

Esta actividad sirvió para obtener información individual del desempeño de los estudiantes al hacer uso social de las matemáticas. Estos primeros datos dejaron en evidencia la dificultad de los estudiantes para comunicar ideas en y con las matemáticas de ahí su desinterés por aprenderlas.

La primera y tercera fase, consistió en la aplicación de la prueba pre-post, para determinar el estado inicial de los sujetos de la muestra para luego contrastarlo con los resultados obtenidos en la misma prueba pero posterior a la implementación de la estrategia metodológica. Esto con el propósito de establecer ¿qué paso con los estudiantes de grado 9°1?

En La segunda fase, consistente en la selección y aplicación de la secuencia didáctica, se tuvo en cuenta una situación relacionada con vivencias de los estudiantes y que motivará a su participación en las actividades. Cabe aclarar que en grado noveno, los problemas de cambio y variación que admiten distintos sistemas de representación, son las funciones. Definido el alcance del proyecto, la situación didáctica constituyó una secuencia formada por tres tareas que dan cuenta de los elementos estructurales de las funciones, en particular la función lineal. Ellos son: *Identificación y clasificación de variables*, la *Representación de las relaciones de variación* y el *Cambio de registro de representación de variación de magnitudes*.

Atendiendo a lo expuesto, se plantearon preguntas relacionadas con los elementos primordiales citados en el párrafo anterior. Además se establecieron las ideas clave, los desempeños esperados y las actividades de aprendizaje, indicando el nivel de complejidad presente en cada una de ellas. Cada tarea de la secuencia, responde a un elemento estructural para la comprensión del concepto función lineal. Se proponen cuestionamientos en cada una de las tareas de la secuencia, se busca que el estudiante enfrente niveles complejidad en aumento; el desarrollo de la tarea, requiere de reproducción, conexión y reflexión. *“Esto en concordancia con el aumento en las demandas cognitivas, que le permitan avanzar en su conocimiento”* (García et al. 2015, p. 200).

Algunos de los procedimientos que debe realizar según García y otro (2003), son algorítmicos, pero otros le plantean preguntas que buscan que el estudiante interprete la información y realice conexiones entre los conceptos en ella involucrados y reflexione frente a los procesos desarrollados. Las relaciones mencionadas se presentan en la tabla 3.5.1

Adicional a los elementos fundamentales en el estudio de la función lineal, otro aspecto de suma importancia en esta investigación, está ligado a la acción de representar. *“representar es el resultado de hacer presente algo con figuras, tablas y lenguaje o palabras”* (García et al. 2013, p. 63).

Tabla 3.5.1 Planeación de la Secuencia de Tareas

SESION	PREGUNTA GUIA	IDEAS CLAVE	DESEMPEÑOS ESPERADOS	ACTIVIDADES DE APRENDIZAJE	NIVELES DE COMPLEJIDAD
1	<p>¿Qué elementos interfieren en la asignación de la medida del taxímetro?</p> <p>¿Qué elementos interfieren en el costo del servicio?</p> <p>¿En la decisión de acceder o no al servicio de taxi?</p>	<ul style="list-style-type: none"> Identificar las magnitudes involucradas. Definir la relación de entre dos variables: dependiente e independiente. Determinar los elementos de la función, como dominio y rango. 	<ul style="list-style-type: none"> Enuncia verbalmente las relaciones que existen entre las variables involucradas en la situación. Identifica el dominio y el rango de una función. Establece la relación existente entre variables a partir de una tabla de valores. Explico algunas relaciones matemáticas entre las variables involucradas. 	<p>TAREA No 1:</p> <p>Variables dependientes e independientes</p>	<p>Reproducción</p> <p>Conexión:</p> <p>Comprende y resuelve</p>
2	<p>¿Cómo representar las variaciones de las unidades reportadas en el taxímetro por metro recorrido?</p> <p>¿Cómo representar las variaciones en el costo por marcación en el taxímetro?</p>	<ul style="list-style-type: none"> Características de las representaciones de las funciones lineales. 	<ul style="list-style-type: none"> Determina las características de las representaciones de las funciones lineales. 	<p>TAREA No 2:</p> <p>Representación de la variación entre magnitudes</p>	<p>Reproducción</p> <p>Conexión:</p> <p>Comprende y resuelve</p>
3	<p>¿Cómo varía la unidad de marcación en el taxímetro con la distancia recorrida?</p> <p>¿Cómo varía el costo del servicio por unidad de del taxímetro?</p>	<ul style="list-style-type: none"> Representación de funciones a través de tablas y gráficas. Propiedades de las funciones a partir de la representación tabular. Propiedades de las funciones a partir de la representación gráfica. 	<ul style="list-style-type: none"> Defino la relación existente entre la representación tabular y gráfica. Caracterizo la función a partir de las representaciones. Explico la relación matemática con las variables involucradas en la situación. 	<p>TAREA No 3:</p> <p>Cambio en la representación de variación de magnitudes</p>	<p>Reproducción</p> <p>Conexión:</p> <p>Comprende y resuelve</p> <p>Reflexión:</p> <p>Crear Modelos propios: Suponer, Argumentar y formular preguntas</p>

Fuente: Elaboración propia

En este caso, se requiere establecer indicadores que den cuenta de los procesos específicos asociados a la competencia representar a partir de los sistemas de representación semiótica, mediante lenguaje algebraico, simbólico, tabular y gráfico de la función lineal. La relación existente entre los elementos mencionados en el párrafo anterior, se muestra en la tabla 3.5.2.

Tabla 3.5.2 Aspectos y procesos asociados a la competencia Matemática representar. Tomado de García et al. (2013)

COMPE TENCIA		CONCEPTO	ASPECTOS ASOCIADOS A LA COMPETENCIA	PROCESOS ASOCIADOS A LA COMPETENCIA
PENSAMIENTO VARIACIONAL Y LOS SISTEMAS ALGEBRAICOS Y ANALÍTICOS	REPRESENTAR	Movilización que realizan los estudiantes de los aspectos cognitivos, afectivos y tendencia de acción, para participar en la solución de problemas que requieren procesos de codificación, decodificación y traducción asociados a la función lineal (García et al. 2013, p. 74)	COGNITIVO	CODIFICACIÓN
				DESCODIFICACIÓN
				TRADUCCION
			APECTIVO	DISPOSICION
			TENDENCIA DE ACCION	PERSISTENCIA

4. Análisis de Datos

En este apartado, se presenta un análisis cuantitativo y un análisis cualitativo de los datos obtenidos en la investigación. El análisis cuantitativo corresponde a un análisis comparativo entre los resultados obtenidos en la prueba Pre-Post, en los momentos de su aplicación.

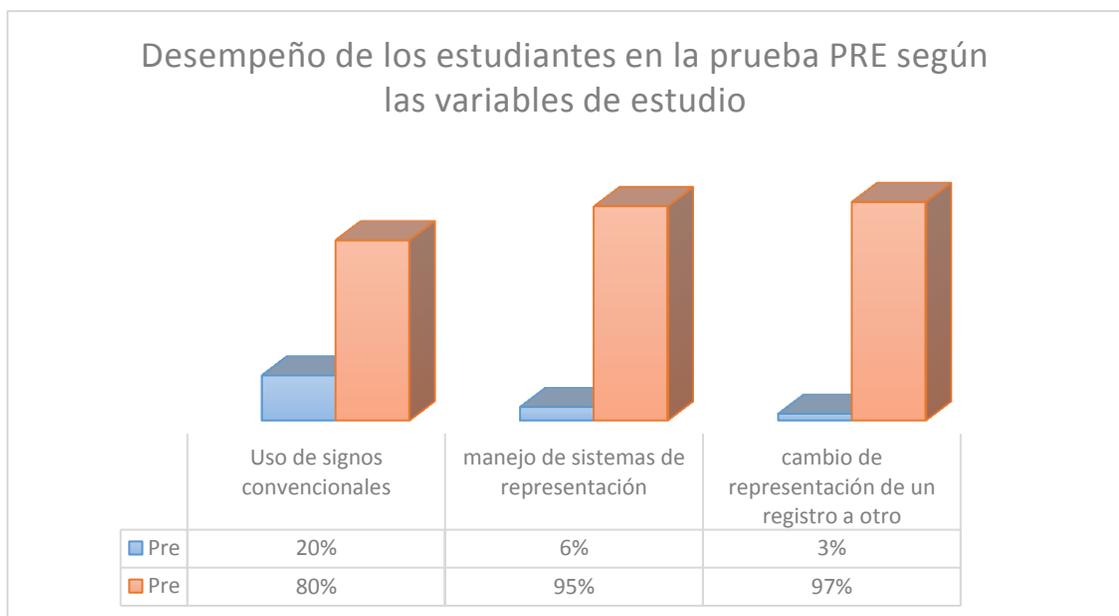
El análisis cualitativo, se realiza a partir de la observación de los desempeños de los estudiantes al enfrentar cada una de las tareas de la secuencia atendiendo a los diferentes momentos y a los procesos asociados a la competencia matemática representar.

4.1 Análisis de la prueba Pre-Post

La prueba Pre-Post, es el instrumento diseñado en relación con las variables de estudio del objeto matemático función lineal. En ella se buscó, que el estudiante de cuenta del uso de signos convencionales, para representar magnitudes dependientes e independientes, del manejo de sistemas de representación (tabular, gráfico y algebraico) y del cambio de representación de un registro a otro.

El gráfico No.1, muestra los resultados obtenidos por los estudiantes en esta prueba. Se relaciona mediante desempeños altos, al porcentaje de estudiantes que obtuvieron valoración de 3 o 4 y desempeños bajos, el porcentaje de estudiantes que obtuvieron valoraciones inferiores.

Gráfica No.1 Resultados de la prueba Pre-Post (inicio)



El gráfico muestra que las dificultades de los estudiantes están asociadas a la competencia matemática representar. Según Duval (1999), Las representaciones semióticas son el medio de que dispone el ser humano para hacer visibles sus representaciones mentales. Hacer visibles están representaciones mentales, es lo que para García et al. (2015), está relacionado

con el proceso de codificar; asociado al aspecto cognitivo de la competencia representar.

Dado que los objetos matemáticos, no son objetos tangibles y reales, se requiere de la utilización de símbolos y distintos tipos de representación como fundamento dialógico para desarrollar una relación comunicativa en, con y acerca de las matemáticas (García et al. 2015, p. 54).

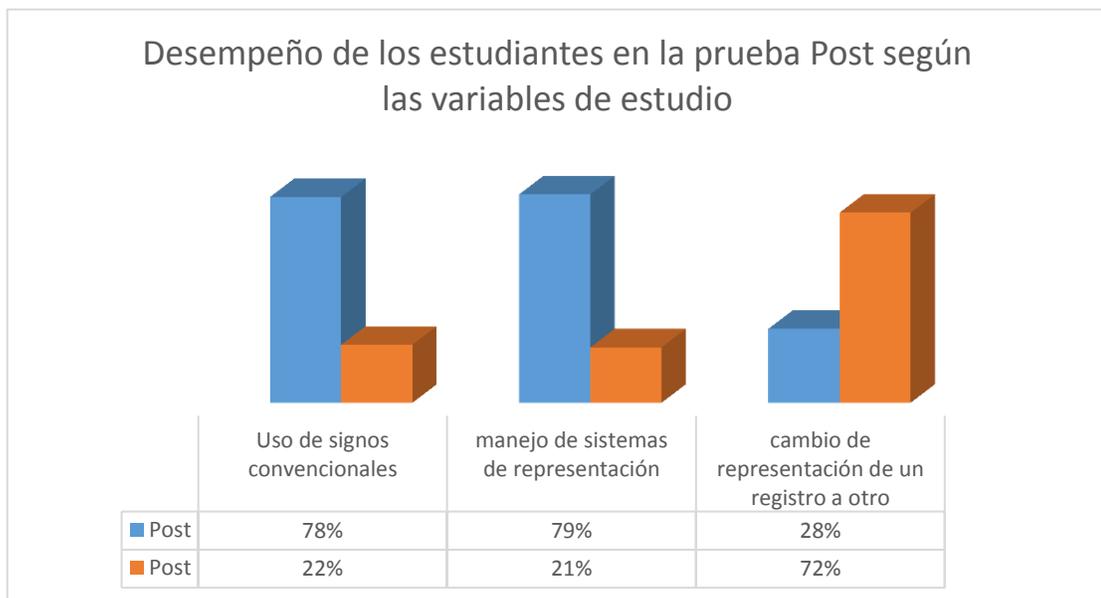
Al respecto, Niss (2000) plantea que la habilidad de la persona para manejar símbolos y formalismos matemáticos y expresar entidades matemáticas en situaciones y en contextos, está ligado a la competencia matemática de representar

Para la *Organización para la Cooperación y el Desarrollo económico*, OCDE, en su *Programa Internacional para la evaluación de estudiantes*, PISA, expresa que *representar*, es una competencia matemática que se relaciona con:

La capacidad de codificar, decodificar, traducir, interpretar y distinguir distintas formas de representación de objetos y situaciones matemáticas; las interrelaciones que existen entre las diversas representaciones; y la elección y alternancia entre distintos tipos de representación según las situaciones y objetivo. (OCDE 2006, p. 102, citado por García et al. 2013, p. 63).

El gráfico No.2, muestra los resultados obtenidos por los estudiantes en la prueba post. Se relaciona mediante desempeños altos, al porcentaje de estudiantes que obtuvieron valoración de 3 o 4 y desempeños bajos, el porcentaje de estudiantes que obtuvieron valoraciones inferiores.

Gráfica No.2 Resultados de la prueba Pre-Post (final)

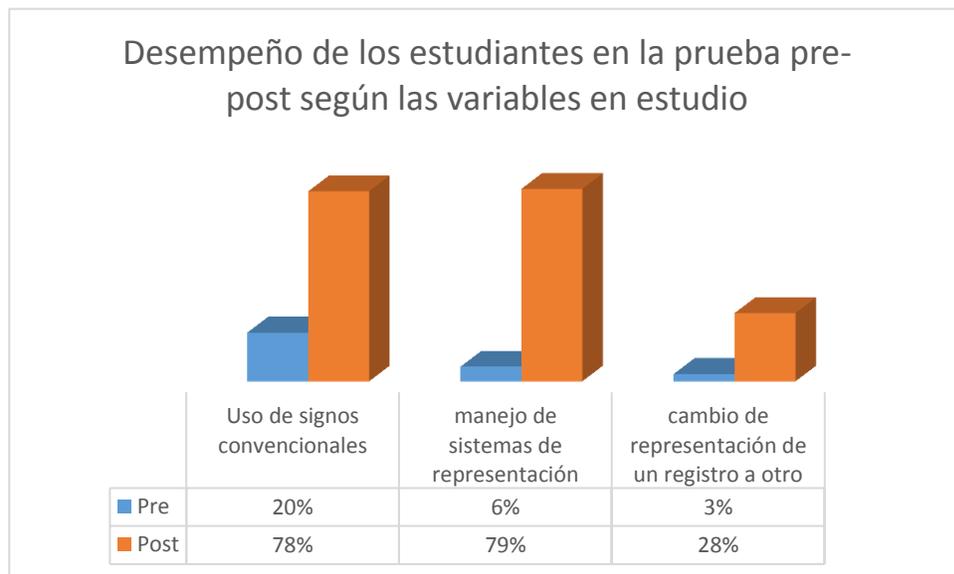


Estos resultados dejan ver un notable progreso en los desempeños de los estudiantes. Por una parte, el 78% de los estudiantes alcanzan el uso convencional de signos y símbolos matemáticos, el 79% manejan los sistemas de representación (tabular y gráfico) y aún se evidencia falencias en los procesos de conversión. Esto se traduce en falencias en el registro de representación algebraica. Para Duval (1999), el sujeto debe disponer de mínimo de dos registros

de representación y realizar conversiones entre ellos. Se evidencia un notable progreso en la semiósis del aprendizaje de los estudiantes.

A continuación, se presenta un análisis comparativo de los resultados de la prueba Pre-post. Esto permite establecer el mejoramiento de los desempeños de los estudiantes posterior a la implementación de la situación didáctica en la secuencia de tareas para propiciar actividad matemática de aprendizaje.

Gráfico No.3 Gráfico comparativo de los resultados obtenidos en la prueba Pre-Post



Estos resultados permiten evidenciar el progreso de los estudiantes respecto a los aspectos valorados. El uso de signos convencionales y el manejo

de sistemas de representación muestran su progreso en la parte semiótica del aprendizaje. Por otra parte, el 25% de los estudiantes con limitaciones en los procesos de tratamientos y conversiones al traducir la información de un registro de representación a otro, las han superado y se han acercado a la parte noética del aprendizaje. Para D'Amore la relación semiósis noésis se evidencia al finalizar la intervención pedagógica y didáctica.

El diseño e implementación de la situación didáctica, a través de la secuencia de tareas matemáticas, permitió al estudiante desarrollar procesos de codificar, decodificar y traducir; los cuales están asociados a la competencia matemática representar. Esto es posible si *“las prácticas de enseñanza y aprendizaje se focalizan en compartir y desarrollar el significado de los objetos matemáticos en la clase como comunidad de aprendizaje”* García et al. (2015, p.45).

4.2 Análisis de la Situación Didáctica en la secuencia de Tareas

Para el desarrollo de este apartado se realiza un análisis de los resultados obtenidos al implementar la metodología propuesta. Para ello, en primera instancia se presenta el análisis por cada una de las tareas. A nivel cualitativo para dar

cuenta del desempeño de los estudiantes en cada una de las situaciones y a nivel cuantitativo para establecer el comportamiento de los procesos de la competencia representar en los estudiantes. Posteriormente, el análisis conjunto de T1, T2 y T3 que corresponde a toda la secuencia. Los indicadores asociados a cada uno de los procesos asociados a la competencia se presentan en la tabla 4.2

4.2.1 Análisis de la Tarea 1

La actividad matemática de los estudiantes, aportó a los objetos matemáticos que hacen parte de la estructura conceptual del objeto matemático función lineal: magnitud, variable, variables dependientes y variables independientes. Además, responde a los aspectos cognitivos asociados a la competencia *representar*.

Tabla 4.2 indicadores asociados a cada uno de los procesos asociados a la competencia matemática representar

PENSAMIENTO VARIACIONAL Y LOS SISTEMAS ALGEBRAICOS Y ANALITICOS		PERCE	
REPRESENTAR Motivación que realicen los estudiantes de los aspectos cognitivos, afectivos y tendencia de acción, para participar en la solución de problemas que requieren procesos de codificación, decodificación y traducción asociados a la función lineal	COGNITIVO	CODIFICACIÓN Utiliza el lenguaje escrito para describir relaciones, variaciones y representaciones entre las variables involucradas en la situación. CC(1,2y3) Describe en lenguaje matemático, las relaciones existentes entre las diferentes variables identificadas. CC(3)	TARIFAS EN EL SERVICIO DE TAXI TAREA1: Magnitudes, variables dependientes e independientes TAREA2: Representación de la variación entre las variables TAREA3: Cambio de representación de las variables
		DESCODIFICACIÓN Establece mediante tablas de valores, la relación de dependencia entre dos variables. CD(1-2) Relaciona la información utilizando el lenguaje tabular y gráfico, acorde con la situación. CD(2y3) Comunica de forma oral y escrita las relaciones que existen entre las variables involucradas en la situación y la manera como puede presentar dicha información. CD(1-2 y3)	
		TRADUCCION Reconoce las características de las funciones lineales, a partir de sus diferentes representaciones. Tratamiento CT(2y3) Representa la información de la situación en diferentes registros de representación: conversiones. CT(3)	
	AFECTIVO	DISPOSICION Participa con voluntad e interés en el desarrollo de las actividades individuales y escucha con atención los argumentos de sus compañeros para validar la información en el grupo. AD(1,2y3) Comparte los procedimientos realizados y los resultados obtenidos a fin de validar las respuestas AD	
		PERSISTENCIA Muestra interés en participar en la socialización grupal mostrando los aportes del respectivo equipo.	
	TENDENCIA DE ACCION		

En primer lugar, se presenta el análisis de los resultados obtenidos por los estudiantes, frente a la *Identificación y clasificación de variables*, objetivo de la tarea 1 (T1). Se atiende a cada uno de los momentos M1, M2, M3 y M4 que dan cuenta de la tipología de las situaciones didácticas. En segundo lugar, el análisis se realiza atendiendo a los procesos asociados a los aspectos cognitivo, afectivo y de tendencia de acción asociados a la competencia matemática representar.

En M1, los estudiantes hacen uso de sus saberes previos, para interpretar la información y utilizan los sistemas de representación simbólico y verbal. El trabajo se desarrolla en forma individual (Ver figura 1). Para el desarrollo de la tarea 1, se tomó 29 estudiantes que asistieron a clase, para realizar la respectiva sistematización.



Figura 1

Atendiendo a las consignas de la actividad matemática de aprendizaje, generada por la T1, se obtuvo información a partir del f relacionada con los indicadores 1, 4, 7, 8 y 10 (Ver tabla 5.2), para valorar el proceso y los resultados en cada una de las competencias específicas asociadas a la competencia representar.

Sobre la base conceptual de las variables, como “símbolo que se usa para representar los elementos de un conjunto dado”, se evidenció por ejemplo, que E9 realizó una descripción de las magnitudes y de la relación entre ellos. E32 fue el único de los estudiantes que en situación de acción, describe las variables en al menos dos sistemas semióticos de representación: lenguaje verbal y lenguaje tabular; indicadores 1 y 3. (Ver figura 2 y figura 3)

Las magnitudes encontradas en el texto, son las unidades y el valor del recorrido que varían según los metros recorridos.

2. Describe los cambios que se dan en cada una de las magnitudes encontradas en el punto 1.
Las unidades y el valor del transporte varían según los metros recorridos dados por el movimiento del taxi

Figura 1

2. Describe los cambios que se dan en cada una de las magnitudes encontradas en el punto 1/
La distancia y la tarifa cambian dependiendo que tan lejos este tu destino, la tarifa cambia también por más tiempo de espera.

3. Atendiendo a las condiciones dadas en la situación, completa la siguiente tabla

Metros recorridos	90	4750	5000	5200	5640	5850	6000	6200	6640	6850
Unidades empleadas	1	78	81	83	88	90	92	94	99	101

E

s de
 anot

ar que el resto de los estudiantes del

Figura 2

grupo, presentaron dificultades en la comprensión e interpretación de los puntos 1 y 2, al intentar utilizar el sistema de representación tabular. Los cálculos realizados, dan cuenta de la falta de comprensión frente a lo leído. Una ilustración al respecto se muestra en la figura 4

- Una magnitud es todo aquello que puede medirse. ¿Qué magnitudes, identificas en la situación planteada?
la magnitud es la utilización del
servicio de taxi
- Describe los cambios que se dan en cada una de las magnitudes encontradas en el punto 1.
marca cada 40 metros cada 60 segundos
de espera y se pagan \$53 adicionales a la unidad, y al Reco
- Atendiendo a las condiciones dadas en la situación, completa la siguiente tabla

Metros recorridos	90	4750	5000	5200	5640	5850	6000	6200	6640	6850
Unidades empleadas	1	53	55	57	62	65	68	68	73	76

Figura 4

En M2, el trabajo se desarrolla en parejas, los estudiantes negocian la validez de los resultados obtenidos frente a las magnitudes identificadas, la variación dependiente e independiente entre magnitudes.

Una conversación que se suscitó entre los estudiantes del grupo 16 conformado para el desarrollo de esta tarea, por E23 y E32, permite evidenciar el nivel de negociación de conocimiento entre ellos al validar la información de E32 bajo los siguientes argumentos:

E32: *¿por qué colocaste 57,7 para 4750m?*

E23: *porque dividí 4750 entre 90*

E32: *...y las 25 unidades iniciales ¿Dónde las dejaste?*

E23: *¿cuáles 25 unidades?*

E32: ¡Lee! y lee en voz alta *Cualquier recorrido tiene un valor inicial de 25 unidades.*

E32: *Si es bien que hayas dividido entre 90 pero luego súmale los 25*

E23: *claro, espérate corrijo*

3. Atendiendo a las condiciones dadas en la situación, completa la siguiente tabla

Metros recorridos	90	4750	5000	5200	5640	5850	6000	6200	6640	6850
Unidades empleadas	1	52,7	55,5	57,7	62,6	65	66,6	68,8	73,7	76,1
		78	81	83	88	90	92	94	99	101

Figura 5

E23 muestra disposición para corregir y la necesidad de explicación frente a los cambios que va a realizar. Por otra parte, deja los resultados por él obtenidos para validar más adelante. Desarrollan los puntos de la actividad y se evidencia avance en E23 en cuanto a la descripción de las relaciones entre las magnitudes.

En el grupo 2 conformado por E9 y E33 se encuentra una descripción muy cercana a lo esperado y que evidencia una amplia comprensión de la situación que se está trabajando. La figura 6, muestra la descripción realizada.

4. Expliquen la relación que existe entre las magnitudes identificadas y la variación que ocurre en cada una de ellas.
Las unidades y el valor del transporte tienen un vínculo estrecho, puesto que estas magnitudes varían según el número de metros recorridos y el número de segundos esperados.
5. ¿Cuál es la relación numérica que existe entre la distancia recorrida y las unidades marcadas en el taxímetro? Asuma que no se requiere de tiempo de espera.
sin contar con el tiempo de espera, la relación numérica que existe entre el número de unidades y metros recorridos es el siguiente = 90 metros equivalen a 1 unidad.
6. Describe la relación que existe entre el valor de una carrera y la distancia recorrida.
El valor de una carrera depende de la distancia recorrida, porque esta última se transforma en unidades cada cierto tiempo y cada unidad tiene un costo de 53 \$.

Figura 6

En el tercer momento, los estudiantes forman grupos de 4 estudiantes y se busca que desarrollen no sólo los procesos asociados al aspecto cognitivo relacionado con las magnitudes y la variación entre ellas, sino que cobra mayor interés e importancia los procesos afectivos y de tendencia de acción, asociados a la competencia de representar específicamente. La figura 7, siguiente muestra la adecuación del espacio para propiciar el trabajo.



Figura 7

A la espera de los resultados de los otros compañeros el grupo 16 se une con el grupo 3. En lo sucesivo será el grupo G1, conformado por E9, E33, E23 y E32. Al reunirse:

E32: *¿Qué hicieron ustedes?*

E23: *Déjame ver tu tabla del punto 1, dirigiéndose a E9*

E9: *Inicialmente no le había sumado el 25 de la tarifa inicial*

E23: *Emocionado ¡yo tampoco!*

E33: *sigamos*

E23: *“perateee”! aquí dice que debemos comparar los resultados*

E32: *yo si sume el 25 desde el principio.*

E9: *Miren el último punto ¡uffff!*

E32 *¿Qué dice?*

E23: Lee: *Si Roberto emplea el servicio de taxi recorriendo 15km.
¿Cuánto debe pagar? ¿Ahí que hacemos?*

E33: *“Lo que hicimos con los de la tabla, 15000 lo dividimos entre
90, le sumamos el 25 y multiplicamos por 53”*

Aunque no se evidencia un discurso matemático como tal, los estudiantes han comunicado entre compañeros los procedimientos y resultados obtenidos. Esto para Bishop (2005), constituye negociación de los significados matemáticos.

En el último momento, se presentan los hallazgos de los diferentes grupos en la plenaria, para la institucionalización de los saberes. El maestro pregunta sobre los diferentes puntos de la tarea y consigna en el tablero las respuestas por ellos dadas. En este momento se institucionaliza el saber en la medida en que las respuestas dadas y las reflexiones que surjan, permiten la construcción colectiva y personal de objeto matemático que está en juego. En este caso la relación de dependencia e independencia de variables y se representación en lenguaje simbólico.

En T1, el nivel de complejidad corresponde a reproducción por cuanto el estudiante debe realizar procedimientos que conoce y utiliza el

lenguaje como mecanismo para representar sus ideas. En la representación tabular se requiere de las operaciones elementales.

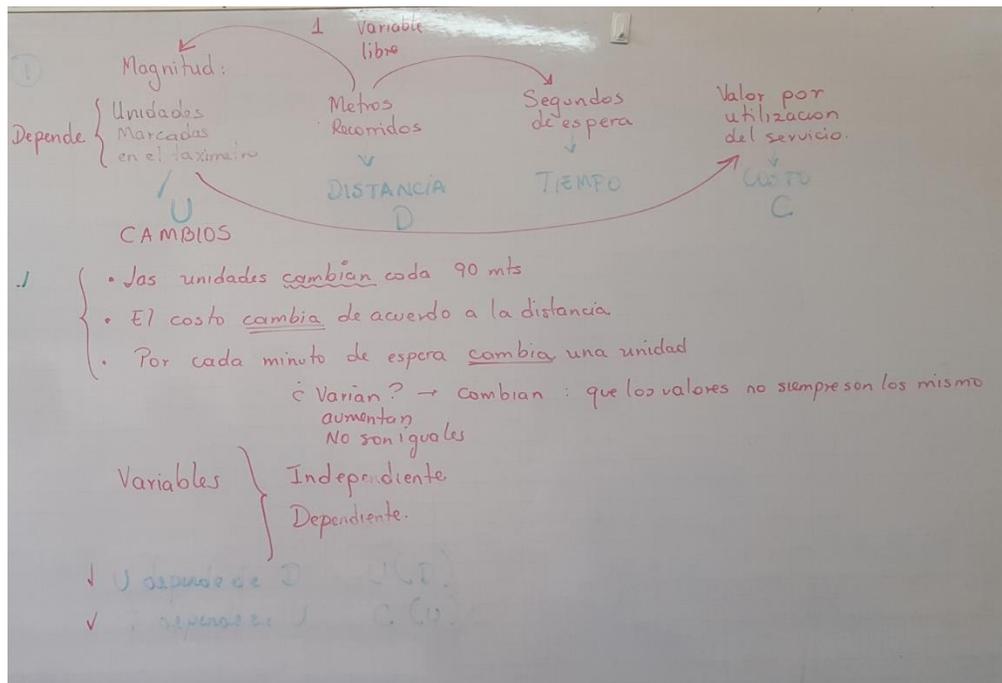


Figura 8

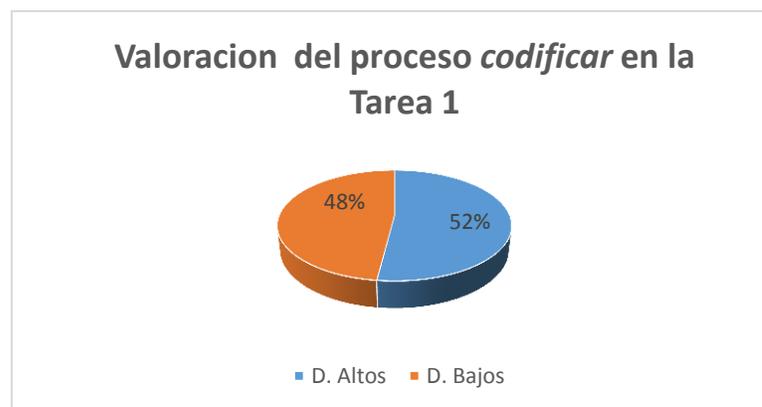
Fuente: producción propia

En concordancia con lo antes expresado, todo el grupo de estudiantes mostró disposición para desarrollar la tarea. En algunos grupos los errores presentados en forma individual, en los puntos 1 y 2, persistieron durante los tres momentos anteriores a la institucionalización, por cuanto no tuvieron aporte de sus compañeros ya que los cuatro integrantes desconocieron el hecho de la tarifa inicial. Se presentaron dificultades en cuanto a la capacidad de describir,

consideraban que en una actividad de matemáticas, no se describe con el lenguaje verbal o escrito sino con fórmulas y operaciones.

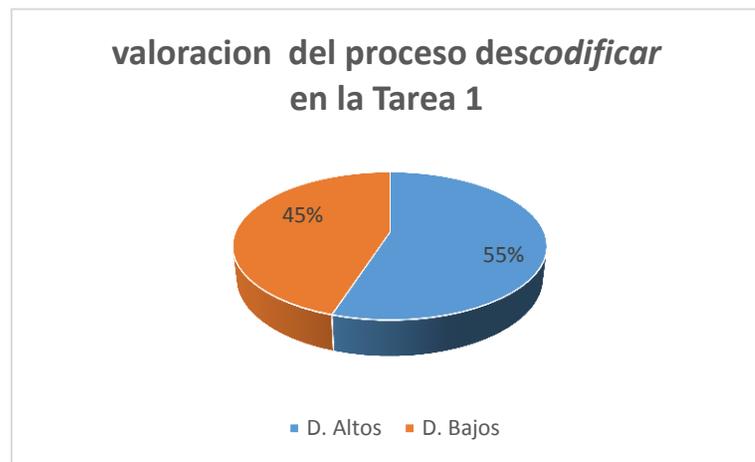
Frente a la *Identificación y clasificación de variables*, objetivo de la tarea 1, los gráficos muestran el nivel de apropiación de los estudiantes, en el aspecto cognitivo asociado a la competencia *representar*. En el aspecto cognitivo, se destacan los procesos de codificar, decodificar y traducir. En el aspecto afectivo, el proceso disposición y en el aspecto de tendencia de acción, el proceso de persistencia. Los resultados obtenidos por los estudiantes se muestran en el anexo 7.3, al final del documento.

Gráfica No 4 Análisis del proceso Codificar en T1



El 52% de los estudiantes logran codificar la información suministrada en la tarea 1, utilizando el lenguaje verbal y escrito. Para Rivas (2008), la información puede ser codificada mediante códigos de tipo verbal, semántico, gráfico, entre otros. El 45% de ellos, logran además codificar la información en lenguaje tabular. Estos resultados se obtienen de la actividad al finalizar la sesión.

Gráfica No. 5 Análisis del proceso Decodificar en T1



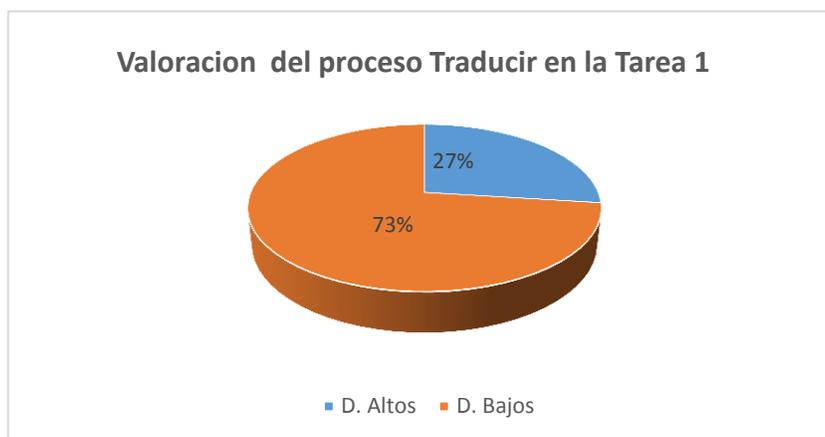
El gráfico muestra que el 45% de los estudiantes no logra interpretar el mensaje matemático presente en la situación. Esto, según García et al. 2015, citando a Del Poza y Arrocha 2013, se debe a la falta de lectura del mensaje matemático que el ser humano realiza al interpretar los fenómenos matemáticos, de acuerdo a sus vivencias, experiencias, conocimiento y cultura. El 55% que logra interpretar dicha información lo hace colaborativamente en M1 y M2 cuando

el trabajo no es individual, es decir, a partir de la negociación del significado del objeto matemático, en las situaciones de formulación y comunicación.

Estos resultados permiten evidenciar las dificultades que presentan los estudiantes para comunicar procesos y procedimientos. Esta dificultad está asociada a las limitaciones que tienen para simbolizar (codificar y decodificar) y conceptualizar.

La competencia representar, se relaciona con la semiótica, en consecuencia, dificultades para representar, implica limitaciones en las operaciones de tratamiento y conversión de las representaciones.

Gráfica No. 6 Análisis del proceso Traducir en la T1



Este proceso de la competencia matemática representar es el más débil entre el grupo de estudiantes al terminar la tarea 1. El 73% de los estudiantes

presentan dificultad. Para Sierra et al. (1998), La traducción brinda la posibilidad de representar una misma situación, de maneras o modos diferentes utilizando diversas formas de representación y escoger entre la más conveniente.

Las dificultades para simbolizar, a partir de los procesos asociados a la competencia representar (codificar, decodificar y traducir), implica limitaciones en la capacidad de representar por medio de signos, lo que para D'Amore (2005), constituye la semiósis del aprendizaje. Como consecuencia lógica, implica limitaciones para hacer tratamiento y conversión y, por tanto, para conceptualizar y argumentar (Noesis).

Si el estudiante tiene dificultades para simbolizar tendrá limitaciones para conceptualizar (relación Semiósis – noesis). Estas limitaciones se presentan por cuanto el estudiante no ha comprendido la situación planteada, en palabras de García et al. (2013), el estudiante tiene limitaciones para representar una situación del mundo real, al mundo de las matemáticas, proceso conocido como matematización horizontal. Desde luego, las limitaciones se verán también en la matematización vertical.

Por otra parte, en cuanto a los procesos de disposición y persistencia, se generó desánimo en algunos estudiantes al inicio de la actividad. Este desánimo o desmotivación frente a la actividad se debe a *“las configuraciones cognitivas y*

afectivas del estudiante que codifican insuficiencia de comprensión y sentimientos de aburrimiento y falta de compromiso” (García et al. 2015, p. 70)

4.2.2 Análisis de la Tarea 2

La actividad matemática de los estudiantes, aportó a los objetos matemáticos que hacen parte de la estructura conceptual del objeto matemático función lineal, en este caso, la Representación de la Relación entre Variables y responde a los procesos asociados a los aspectos cognitivos, afectivo y de tendencia de acción de la competencia *representar*.

En este apartado, realizamos el análisis de los resultados obtenidos por los estudiantes frente a la Representación de la Relación entre Variables, objetivo de la tarea 2 (T2), en cada uno de los momentos M1, M2, M3 y M4 que dan cuenta de la tipología de las situaciones y más adelante el análisis atenderá a los procesos asociados a la competencia.

En M1, los estudiantes hacen uso de sus saberes previos, para interpretar la información y hacen uso de códigos de representación verbal, tabular y gráfico. El trabajo se desarrolla en forma individual en el M1, con 31 estudiantes que

asistieron a clase para el desarrollo de la T2 y con los cuales se realizó la sistematización.

Los 31 estudiantes desarrollaron las actividades propuestas en T2. Atendiendo a las consignas de la actividad matemática de aprendizaje, generada por la tarea 2, se obtuvo información relacionada con los indicadores 3, 5, 8 y 10 de la tabla de indicadores (Ver tabla 5.2). El nivel de complejidad de la tarea 2, corresponde al nivel de reproducción en el M1 y de conexión en M2 y M3.

Para el desarrollo del M1 en la T2, los estudiantes parten de la representación tabular. Deben diligenciar dos tablas con base en la información suministrada por la situación. Esta primera parte de la tarea tiene como nivel de complejidad la reproducción. El estudiante utiliza, como menciona PISA, procedimientos rutinarios que ya conoce. Esto permitió que tiempo empleado en esta primera parte de la tarea, a diferencia de la anterior fuese inferior.

TAREA No 2: Representación de la variación entre magnitudes

Lea detenidamente la situación problema que se plantea. Nos interesa establecer la relación entre las magnitudes: *distancia recorrida, marcaciones en el taxímetro y costo generado por el servicio* Para ello, complete cada una de las tablas:

Tabla 1:

Metros recorridos	4770	5040	5310	5580	5850	6120	6390	6660	6930
Unidades que aparecen en el taxímetro	78	81	84	87	90	93	96	99	102

Tabla 2:

Unidades que aparecen en el taxímetro	78	81	84	87	90	93	96	99	102
Costo generado por el servicio	\$4.134	\$4.243	\$4.452	\$4.611	\$4.770	\$4.929	\$5.088	\$5.247	\$5.406

Figura 9

En el M2, trabajo en parejas, la disposición de los estudiantes es mayor por cuanto concuerdan sus respuestas, con las del compañero. Según García et al. (2015), las disposiciones son el resultado temporal y dinámico de la aplicación de procedimientos y operaciones, no son automáticas están direccionadas por el ser humano determinan su actuar. Además, su perseverancia obedece a que ha superado los obstáculos, en este caso la información que debe consignar.

El estudiante E2, realizó las operaciones de forma concentrada y con gran disposición en M1, pero al reunirse con E29, este mostró malestar por cuanto E2 no tuvo en cuenta toda la información. E2 realizó las correcciones correspondientes mostrando gran empeño por corregir los errores presentados. Esto, según García et al. (2015), codifica insuficiencia de comprensión y sentimiento de aburrimiento. E2 continúa el desarrollo de la actividad mostrando perseverancia.

TAREA No 2: Representación de la variación entre magnitudes

Lea detenidamente la situación problema que se plantea. Nos interesa establecer la relación entre las magnitudes: *distancia recorrida, marcaciones en el taxímetro y costo generado por el servicio* Para ello, complete cada una de las tablas:

Tabla 1:

Metros recorridos	4770	5040	5310	5580	5850	6120	6390	6660	6930
Unidades que aparecen en el taxímetro	53	56	59	62	65	68	71	74	77
	78	81	84	87	90	93	96	99	102

Tabla 2:

Unidades que aparecen en el taxímetro	53 78	56 81	59 84	62 87	65 90	68 93	71 96	74 99	77 102
Costo generado por el servicio	2804	4293	4452	4611	4770	4929	5088	5247	5406
	4134								

Figura 10 Desempeño en situación de acción de E2

E2 elaboró la gráfica con la información ya corregida y presentó a sus compañeros en M3. La gráfica se muestra en la figura 11. Esto, suscito los siguientes interrogantes entre ellos:

E2: "Miren la gráfica"

E23: *¿Cómo ubicaste los puntos? Yo no he podido ubicar esos puntos*

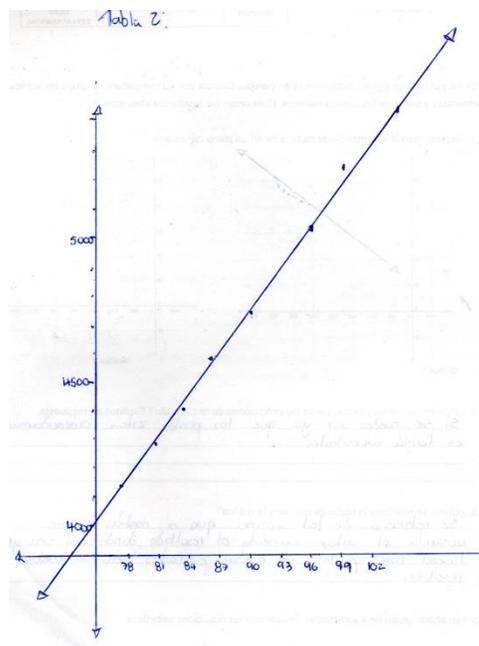


Figura 11. Producción de E2

E2: "por eso yo lo hice en otra hoja"

E29: *¿Por qué te dio tan grande?*

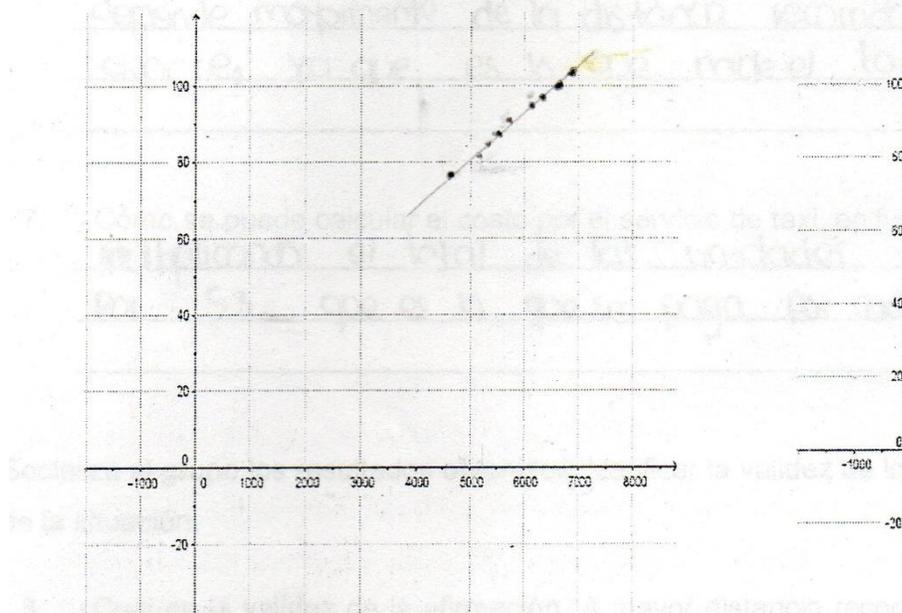
E32: *es por la escala*

E23: *Pero ¿de dónde sacó los valores?... ¿Cuál gráfica es esa?*

E2: *la gráfica 2, la es las unidades del taxímetro y el costo de la carrera.*

E29: *ahhh yo estoy haciendo la otra, la de distancia recorrida y las marcaciones...son distintas. Miren como quedo*

1. Representen la información de cada tabla en un plano cartesiano



Gráfica 1

Figura 12 Producción de E29

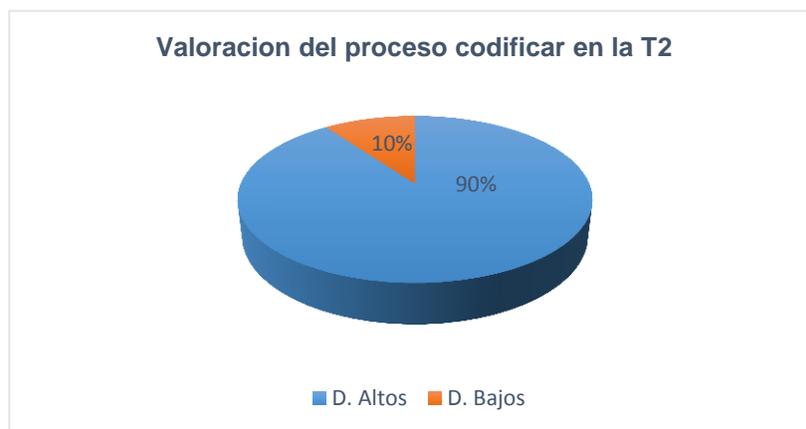
E32: *la gráfica de E2 está mal debe parar en 50*

E2: *¿por qué? es que las gráficas siguen*

Ya en M4, los estudiantes presentan sus inquietudes y frente a los planteamientos de E2 y E32 se realiza la aclaración frente a la escala y a la pertinencia de ampliar las gráficas, sobre todo cuando ellas representan situaciones de la vida real.

Frente a la *Representación de las Relaciones de Variación*, los gráficos muestran el nivel de apropiación de los estudiantes, en el aspecto cognitivo asociado a la competencia *representar* y sus procesos de codificar, decodificar y traducir. Los resultados se presentan en forma disgregada.

Gráfica No. 7 Análisis del proceso Codificar en T2



El 90% de los estudiantes logran codificar la información suministrada en la tarea 2, utilizando el lenguaje verbal, escrito y tabular. Para Rivas (2008), la información puede ser codificada mediante códigos de tipo verbal, semántico, gráfico, entre otros. Estos resultados se obtienen de la actividad al finalizar la sesión.

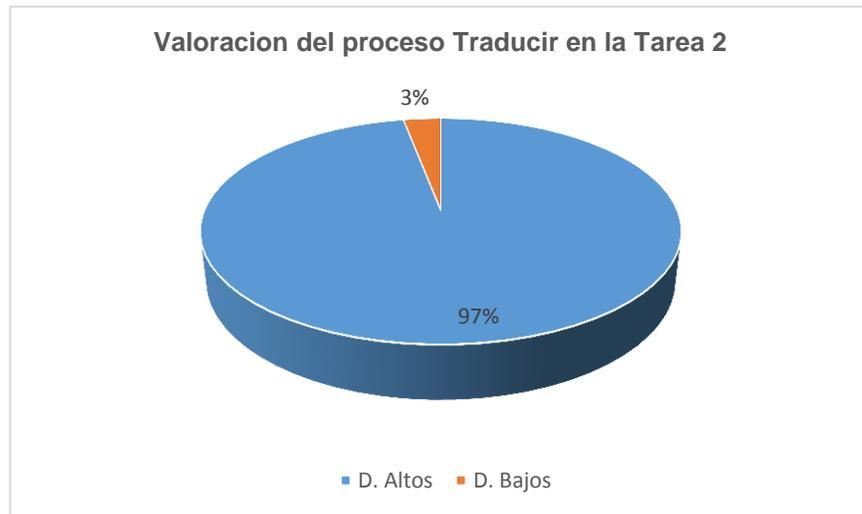
Gráfica No. 8 Análisis del proceso Decodificar en T2



El gráfico muestra que 94% de los estudiantes logra interpretar el mensaje matemático presente en la situación. Esto, según García et al. 2015, citando a Del Poza y Arrocha 2013, se debe a la lectura del mensaje matemático, que el ser humano realiza al interpretar los fenómenos matemáticos, de acuerdo a sus vivencias, experiencias, conocimiento y cultura. El 55% de estos logra interpretar dicha información lo hace colaborativamente en M1 y M2 cuando el trabajo no es

individual, es decir, a partir de la negociación del significado del objeto matemático, en las situaciones de formulación y comunicación.

Gráfica No. 9 Análisis del proceso Decodificar en T2



Este proceso de la competencia matemática representar, presenta un notorio crecimiento en T2 con respecto a T1. El estudiante en el desarrollo de T1, presentó limitaciones para simbolizar y por tanto para comprender y argumentar, lo cual se evidenció en las falencias al comunicar los resultados obtenidos.

En T2, el 90% de los estudiantes alcanzó el proceso de matematización horizontal. Ya en el mundo de las matemáticas, el 94% de los estudiantes desarrollaron matematización vertical, al representar la situación en registro tabular y gráfico. Esto además muestra la capacidad de realizar tratamientos y conversiones entre los tipos de registro, lo cual evidencia un avance significativo

en cuanto a la semiósis en el aprendizaje de las matemáticas. Por otro lado, el comprender la situación, les permitió argumentar los procedimientos realizados y comunicar las ideas matemáticas, dando cuenta de la comprensión o noesis en el aprendizaje de los estudiantes

En general, Los resultados obtenidos, en T2, muestran un “progreso” de los estudiantes frente a los procesos matemáticos y no matemáticos asociados a la competencia matemática representar. Esto se debe a que *“las tareas con niveles de complejidad creciente, permiten que el estudiante acceda a niveles más elevados de la competencia”* (García et al. 2015, p. 200). Además, la planificación de la situación didáctica por parte del maestro, muestra la incidencia de esta, al generar momentos para el desarrollo de la clase. Retomando las palabras de Sfard, *“Los resultados dan cuenta de que generar comunidad de aprendizaje, potenciar espacios donde se promueva el discurso matemático, permite negociar significados y alcanzar la comprensión”* (Sfard, 2005, p. 29).

Otro elemento importante en el análisis, está relacionado con los procesos de disposición y persistencia, asociado al aspecto afectivo y de tendencia de acción. Para el desarrollo de T2, el estudiante estaba motivado, la valoración, el aprecio y satisfacción al confrontar los resultados generaron interés y persistencia en el desarrollo de la actividad. Este aspecto es crucial por cuanto según García et al (2015), repercuten en el aprendizaje.

4.2.3 Análisis de la Tarea 3

Para finalizar, se realiza el análisis de los resultados obtenidos por los estudiantes, frente *al Cambio de registro de representación de variación de magnitudes*, atendiendo a los aspectos cognitivos antes mencionados. Atendiendo a las consignas de la actividad matemática de aprendizaje, generada por la tarea 3, se obtuvo información relacionada con los indicadores No.2, No.3, No.4, No.5, y No.7 de la Tabla 5.2. El nivel de complejidad de la tarea 3, corresponde al nivel de conexión en M1 y de reflexión en M 2 y M3. Estos elementos caracterizan la presencia de niveles de complejidad creciente en el desarrollo de la secuencia de tareas.

En T1 y en T2, el estudiante enfrentó la actividad de representar una situación atendiendo a su representación verbal, escrita y tabular. Para la tarea 3 el objetivo primordial es que el estudiante obtenga la representación algebraica que modela la situación. Para Duval (999), el acceder al menos a dos registros de representación y realizar conversiones entre ellos asume la comprensión del objeto matemático.

A continuación se presentan los resultados de algunos estudiantes en donde se hace evidente la utilización de diversos registros de representación y la conversión de uno a otro.

El estudiante E9, mostró un gran avance en el indicador 2, *analiza e interpreta la información suministrada y establece canales para el manejo de la información*. Utiliza diferentes registros (del tabular al registro escrito en lenguaje usual) de representación para presentar la información. Se evidencia la lectura de la información de la tabla de valores y la comprensión de los procesos a desarrollar. A continuación se muestran sus desarrollos en T3.

Metros recorridos	4770	5040	5310	5580	5850	6120	6390	6660	6930
Costo generado por el servicio	4,134	4,293	4,452	4,611	4,770	4,929	5,088	5,247	5,406
		159	159	159	159	159	159	159	159

Con base en la información obtenida en la tabla, responde los siguientes interrogantes:

1. Al realizar la diferencia entre los costos sucesivos en la tabla, ¿Qué valores se obtienen?

El valor hallado en las restas de los costos sucesivos siempre es 159

2. ¿Cómo son las diferencias entre los costos del servicio de taxi? siempre son iguales

3. ¿Qué significado tienen los valores hallados? Que el valor del servicio del taxi se diferencia en 159 cada vez que aumentamos metro

Figura 13. Producción de E9

Por otra parte, propone mecanismos para llegar al fin de la actividad muestra la curiosidad e interés por la disciplina. Martínez y Oswaldo (2008), manifiestan que cuando en el aspecto afectivo se expresa aceptación llevando a la motivación de la persona hacia un objeto de conocimiento. De ahí la importancia

de la disposición para acceder a los conocimientos de las matemáticas en particular.

4. ¿Qué información nos da en este contexto, la inclinación de la recta? La grafica es lineal ya que la diferencia entre los metros recorridos siempre es la misma lo que causa que ocurra lo mismo con los costos de
5. ¿Cómo se puede calcular esta inclinación? Esta inclinación se puede calcular relacionando o uniendo los metros recorridos con el respectivo costo del servicio, en un punto de interseccion en la grafica, esto sucesivamente con todos los valores
6. ¿Cómo se relaciona este procedimiento con los datos de la tabla? la tabla nos ayuda a encontrar los valores para ubicar los puntos en el plano cartesiano que nos demuestran una relacion mas avanzada que en la tabla.

Figura 14. Producción de E9

Este proceso de disposición, frente al aspecto afectivo fue de gran importancia en el desarrollo de la secuencia porque logró movilizar a los estudiantes hacia la participación del desarrollo de la secuencia.

En cuanto a los procesos asociados al aspecto cognitivo, (codificar, decodificar y traducir), se evidencian desarrollos en los estudiantes. Gran parte ha logrado describir mediante códigos gráficos, verbales y escritos la información que presenta la situación, presentándola utilizando diferentes registros (tabular y lenguaje verbal), se evidencia una movilización en las capacidades de los estudiantes en cada uno de los procesos a lo largo de la secuencia de tareas. Este avance representa movilización de procesos y, por tanto, desarrollo de

competencias y mejoramiento de la calidad matemática de aprendizaje de los estudiantes. Se verifica la relación antes descrita de Semiósis – Noésis.

En el M4, los estudiantes en situación de institucionalización manifiestan diversas expresiones en la búsqueda de la expresión algebraica que modela la situación. Se construyó a partir de los siguientes aportes:

G1: ¡Nosotras encontramos una expresión ¡

Profesora: venga un integrante y copia lo hallado en el tablero

9. Escriba una expresión algebraica que permita calcular el costo del servicio de taxi de acuerdo a la distancia en metros recorrida. Relacione esta expresión con los datos de la tabla y el gráfico cartesiano. Escriba una conclusión al respecto.

$$c(x) = \left(\frac{x}{90} + 25\right)$$

Figura 15. Producción de G1: E1, E6, E27 y E31

G2: ¡tenemos una diferente!

$$9. \frac{1}{90 \text{ m}} + 25 \times 53 = x$$

Con esto podremos sacar el costo por cada metro que se recorriera y ubicarlo en el plano cartesiano

Figura 16. Producción de G2: E12, E16, E24 y E32

9. Escriba una expresión algebraica que permita calcular el costo del servicio de taxi de acuerdo a la distancia en metros recorrida. Relacione esta expresión con los datos de la tabla y el gráfico cartesiano. Escriba una conclusión al respecto.

$$f(x) = x \div 90 + 25 \cdot 53 \quad C(x) = 53 \left(\frac{x}{90} + 25 \right)$$

Se continuo con la dinámica establecida y algunos grupos evitaban proponer y participar, por cuanto la expresión que ellos proponían ya aparecía en el tablero.

9. Escriba una expresión algebraica que permita calcular el costo del servicio de taxi de acuerdo a la distancia en metros recorrida. Relacione esta expresión con los datos de la tabla y el gráfico cartesiano. Escriba una conclusión al respecto.

$$f(x) = 90 + 53x$$

Figura 16. Producción de G3: E3, E23, E29 y E33

Los integrantes del grupo G1 ante esta propuesta manifiestan que hace falta el 25 y que de donde salió el 90. Al validar cada una de las expresiones propuestas, el grupo 4 presento una última expresión que contó con el aval del grupo.

9- $x =$ metros recorridos
 $y =$ el costo
Algebraica \Rightarrow
$$f(x) = x \div 90 + 25 \cdot 53$$

Figura 17. Producción de G4: E9, E2

El grupo G4, muestra un gran avance al establecer la presencia de variables utilizando lenguaje matemático. Pese a que se ha incurrido en un error propio de la jerarquía de las operaciones y que no analizaremos aquí por cuanto no es el objeto de este estudio, se toma como una expresión apropiada por cuanto se hace referencia a las variables y se aclara que el precio por unidad debe multiplicar a todas las unidades empleadas incluidas las adicionales.

Finalmente los estudiantes confirman la presencia de variables, el tipo de variables presentes en la situación y la importancia de contar con diferentes registros para su representación.

Frente al Cambio de registro de representación de variación de magnitudes, objetivo de la tarea 3, los gráficos muestran el nivel de apropiación de los estudiantes, en el aspecto cognitivo asociado a la competencia *representar* y sus procesos de codificar, decodificar y traducir. Los resultados se presentan a continuación:

Tabla 4.2.3 Valoración de los resultados de los Procesos Codificar, Decodificar y Traducir para la Tarea 3

PROCESOS ASOCIADOS A LA COMPETENCIA					
	CODIFICAR	DECODIFICAR	TRADUCIR	DISPOSICIÓN	PERSISTENCIA
D. Altos	84%	72%	84%	64%	76%
D. Bajos	16%	18%	16%	36%	24%

Fuente: Producción propia

En la Tarea 3, el 84% de los estudiantes, desarrollan procesos de codificación, el 72%, procesos de decodificación y el 84% alcanzan la traducción. Además en cuanto a los procesos de disposición y persistencia, se identificó un leve descenso en la disposición y participación en el desarrollo de las actividades.

“La fluctuación en el movimiento de los porcentajes carece de sentido sino se tiene en cuenta que estas, representan un movimiento en el porcentaje de estudiantes que acceden a los procesos asociados a la competencia representar” (Rico (2009), citado por García et al. 20015, p. 68).

El hecho de que el 84% de los estudiantes, codifiquen la información, significa que desarrollan una actividad de pensamiento que demanda signos o gráficos para expresar un concepto matemático.

El 72% de los estudiantes muestra capacidades para decodificar, que es la habilidad de traducir información de un código, a otro con el cual él está familiarizado y esto le da la oportunidad de articular la información nueva con la ya existente. En situación de formulación o comunicación el estudiante accede a otros códigos, *“la comunicación en una clase de matemáticas se ocupa de compartir significados y conexiones de índole matemático”* (Bishop 2005, p. 24). Este hecho permite que el estudiante haga uso social de las matemáticas, vea la pertinencia en su contexto y dote de significado los objetos matemáticos.

El 84% de los estudiantes traducen de un sistema de representación a otro, esto representa la capacidad de representar una misma situación de maneras o modos diferentes, y con ello, escoge reflexivamente la más conveniente, a través de tratamientos y/o conversiones. Para Duval (1999) estas transformaciones que tienen los objetos matemáticos de pasar de un registro de representación a otro, es una de las mayores dificultades de los estudiantes y acceder a ellas muestra la comprensión del objeto matemático en cuestión.

Este incremento en los porcentajes de estudiantes que acceden a la competencia matemática representar, está ligado con los momentos en que se ha dividido la clase y que ha dado lugar a la tipología de las situaciones y que permite

el trabajo colaborativo en el aula de clase y a los niveles de complejidad creciente propuesto en las tareas de la secuencia.

4.3 Análisis de la secuencia de Tareas

En esta parte se presenta la triangulación con base en el seguimiento realizado a la actividad matemática de aprendizaje de los estudiantes, generada por las tareas: *Magnitudes, variables dependientes y variables independientes*, T1; *representación de la relación entre variables*, T2 y *Cambio de un sistema de representación a otro*, T3. El objetivo de este análisis es determinar si realmente se movilizan las capacidades referidas al pensamiento variacional a través de los procesos asociados a la competencia matemática representar, en la secuencia de tareas. Estas tareas están relacionadas con el aprendizaje del objeto matemático función lineal. Para *García et al. (2015)*,

“La noción de función como dependencia entre variables alcanza su mejor expresión a través de representaciones como las descripciones verbales, tablas de valores, gráficas o fórmulas o ecuaciones. (p. 62).

En los indicadores inscritos en el proceso codificar, asociado a la competencia matemática representar, se obtuvo que el 52% de los estudiantes describen variaciones y *relaciones entre las variables* involucradas en la tarea 1.

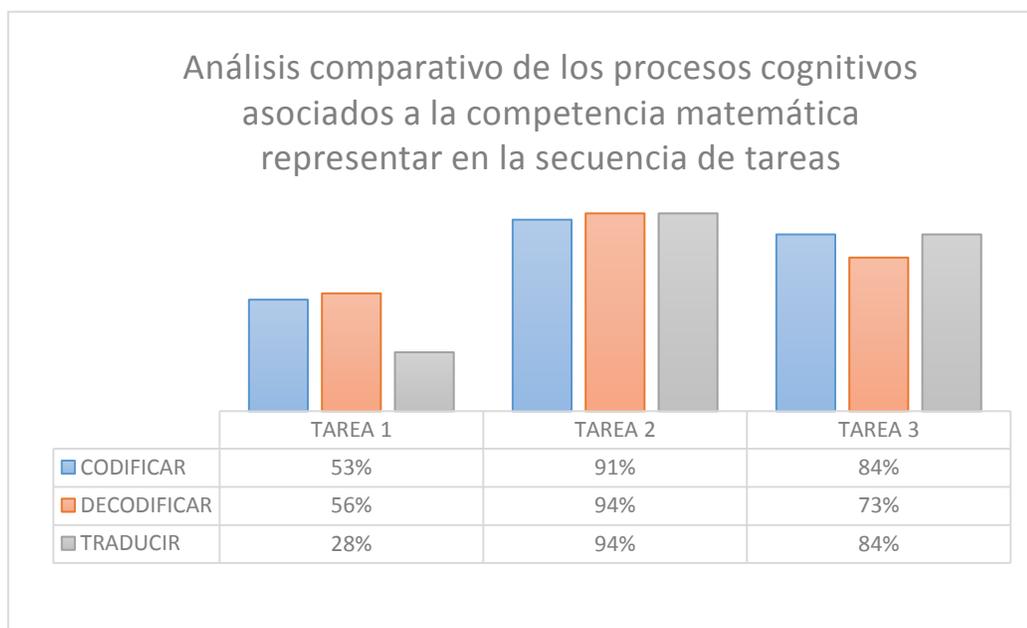
El 91% de los estudiantes *analiza e interpreta la información suministrada y establece canales para el manejo de la información* y el 84% de los estudiantes, *reconoce el comportamiento funcional entre las variables involucradas en la situación planteada*. Estos resultados dejan ver un incremento en la capacidad para codificar la información, cuando el estudiante avanza en el desarrollo de la secuencia de tareas y su acercamiento a la comprensión del objeto matemático.

Y continúa *García et al. (2015)*, diciendo

“...La necesidad de proponer tareas que demanden la traslación entre las diferentes representaciones y aún las transformaciones dentro de un mismo sistema de representación. Particularmente las tablas de valores y las gráficas cartesianas ayudan a desarrollar un pensamiento sobre la variación y sobre sus patrones de comportamiento” (p. 60)

Los descriptores del proceso *decodificar*, muestran un considerable incremento en las capacidades de los estudiantes para decodificar, al pasar de la tarea 1 a la tarea 3. El 56% de los estudiantes, *Interpreta la información dada a partir de sus vivencias y establece los tipos de relación existentes entre las variables identificadas*; esto en la tarea 1, mientras que en la tarea 2, el 94% de los estudiantes *realiza cálculos y gráficos para generar registros de representación de la información planteada* y el 73% *Utiliza el lenguaje matemático para describir el comportamiento funcional de las variables*.

Por último, para el proceso traducir, los resultados obtenidos, indican que el 28% de los estudiantes, *establece relaciones de dependencia e independencia entre variables y realiza conversiones del lenguaje oral y escrito, al lenguaje matemático (tabular y algebraico)*, El 94% de los estudiantes, *representa la información de la situación en diferentes registros de representación (Oral, escrito, tabular y gráficos cartesianos) Conversión* y el 84% de los estudiantes *reconoce las características de las funciones lineales a partir de conversiones entre sus diferentes registros de representación.*



El gráfico, muestra el incremento en el porcentaje de estudiantes que, a lo largo del desarrollo de la secuencia, alcanzan los indicadores correspondientes al aspecto cognitivo en cada uno de los proceso a él asociados. Dado que el proceso de traducir está asociado a la posibilidad de realizar cambios de representación de un sistema a otro, es decir, de realizar tratamientos y

conversiones (semiósis), analicemos los resultados obtenidos en este proceso a lo largo de la secuencia de tareas.

Por ejemplo, en T1, sólo el 28% de los estudiantes realizaron proceso de traducción y se estableció en el análisis de T1, que esto obedeció a las limitaciones que presentaban en la matematización horizontal y que se evidenció en la falta de comprensión, la desmotivación por el trabajo propuesto y la poca persistencia para dar respuesta a lo planteado.

En T2, el estudiante superó la matematización horizontal y ya en el mundo de las matemáticas, representó la información de la situación tanto en lenguaje tabular como gráfico. Claramente se evidencian aspectos de la matematización vertical, entendida esta, como la movilización de la información en diferentes registros, al interior de las matemáticas. Este progreso de los estudiantes, les permitió generar una dinámica distinta en los diferentes momentos de la situación, se evidenció el aprendizaje colaborativo, la generación de una comunidad en el aula de clase, que comunica ideas matemáticas y negocia significados que le permiten comprender y apropiarse el significado del objeto matemático.

En T3, si bien mostró un leve descenso, este no superó el obtenido en T1. Este comportamiento puede explicarse atendiendo al nivel de complejidad propuesto en T3. Hasta ahora los estudiantes interpretaron la

información y la representaron en otros registros de representación semiótica. Se evidencia preferencia por la representación verbal, tabular y gráfica, expresan comprensión conceptual (Noésis), frente a las magnitudes, las variables, la relación entre variables, y las representan utilizando signos convencionales de las matemáticas. En T3 además, se solicitó obtener la representación algebraica de la situación de variación y cambio, presente en el taxímetro.

5. Conclusiones y Aportes de la Investigación

El problema de investigación que aborda esta tesis de maestría, es el desarrollo de la competencia matemática representar en los estudiantes de grado noveno, a partir del concepto de función lineal. Para ello se caracterizaron los procesos asociados a esta competencia y acogiendo la teoría de las situaciones didácticas y el Modelo Teórico a Priori, se implementó una estrategia en busca del desarrollo de capacidades referidas al pensamiento variacional.

A continuación, se presentan las conclusiones obtenidas en relación a cada uno de estos objetivos específicos.

5.1 Conclusiones

El análisis del desempeño de los estudiantes en la prueba pre-post, permite dar respuesta al primer objetivo específico: **Caracterizar las dificultades de los estudiantes, asociadas a los cambios de representación semiótica del concepto función lineal.**

En dicho análisis se evidencia un alto porcentaje de estudiantes que no hacen uso de los signos propios de las matemáticas para representar las relaciones de cambio entre variables. Esto muestra dificultades en el proceso de matematización horizontal; del mundo real al mundo de las matemáticas, y matematización vertical, movilidad entre los diferentes tipos de representaciones. El estudiante no comprende la situación y, por lo tanto, se le dificulta utilizar signos para representarla. Por otra parte, existen factores socio-culturales que inciden en la interpretación de la información. “No existe noética *sin semiótica*” (D’Amore, 2005, p. 34)

Respecto al objetivo 2, **diseñar una situación didáctica que conduzca al concepto de función lineal y promueva el desarrollo de la competencia matemática representar en los estudiantes**, se concluye que el diseño de la situación didáctica, articulado al desarrollo de competencias matemáticas a través de las tareas matemáticas con niveles de complejidad creciente, movilizó los aspectos cognitivos, afectivos y de tendencia de acción en el desarrollo de la actividad matemática de aprendizaje del estudiante.

La implementación de la situación didáctica, y el abordaje de la tipología de las situaciones, es un modelo que orienta la planificación del profesor en el aula. La comunicación y el trabajo colaborativo entre los estudiantes, moviliza no sólo los aspectos cognitivos, sino, los procesos asociados a los aspectos afectivos y de

tendencia de acción. Además, la articulación con el MTA, permitió generar una propuesta de organización curricular y didáctica para el objeto de estudio, además, constituye un insumo para la organización curricular en la institución educativa.

Respecto al objetivo 3, **Implementar la situación didáctica y establecer su incidencia en el desarrollo de la competencia matemática representar y en la generación de aprendizaje colaborativo entre los estudiantes.** La teoría de las situaciones didácticas, permite que el estudiante sea un participante activo en el proceso, posibilita el dialogo entre pares. Los estudiantes respondieron positivamente frente a una propuesta de esta naturaleza, trabajaron en equipos, participaron en la consolidación de las ideas y mejoró el clima de aula. A nivel pedagógico, esta investigación se suscribe en la investigación en educación matemática bajo una postura pragmática del aprendizaje y busca contribuir a la enculturación matemática; se propició en el aula de clase comunidades de aprendizaje, donde se generó discurso matemático, negociación de significado y comprensión de los conceptos matemáticos.

Por último, **Evaluar la incidencia de las situaciones didácticas en la movilización de los procesos referidos a la competencia matemática representar y su efecto en el progreso de los estudiantes frente al**

aprendizaje del concepto de función lineal, se concluye que la implementación de la situación didáctica muestra el impacto de esta estrategia cuando la planificación y el diseño de las tareas obedecen a objetivos claros y coherentes con la actividad matemática de aprendizaje. La institución educativa cuenta ahora con un insumo para la construcción de propuesta en la misma línea para los diferentes niveles de grados de escolaridad y generar una cultura de aprendizaje por competencias.

5.2 Aportes de la investigación

El desarrollo de esta investigación adopta una visión socio-cultural del aprendizaje de las matemáticas, se enmarca dentro de las investigaciones en educación matemática, que conciben el aprendizaje como la capacidad que tiene el ser humano de participar e integrarse en una comunidad. Esta visión centra el interés de la enseñanza de la matemática, en el sujeto que aprende y da preponderancia a las interrelaciones que ocurren en el aula para la construcción de significados compartidos, negociados de la cultura matemática.

Esta postura teórica, genera rupturas e implicaciones a nivel curricular y didáctico. Es por ello que considero que el desarrollo de la investigación, constituye un aporte al respecto por cuanto presenta una perspectiva curricular y didáctica para el desarrollo de la competencia matemática representar a partir del concepto función lineal. En la perspectiva curricular, los procesos matemáticos se conciben como la base para el desarrollo de la competencia en el estudiante, y la importancia de los contenidos, radica en la contribución de estos, al desarrollo de procesos matemáticos. El análisis previo al diseño de la perspectiva, atiende a la lectura y traducción de los resultados obtenidos por los estudiantes de la Institución en las pruebas censales y el Índice Sintético de Calidad Educativa emanado por el MEN.

La perspectiva didáctica, se establece desde la relación entre la competencia matemática representar y la actividad matemática de aprendizaje del estudiante, obedeciendo a dos expectativas de aprendizaje: Las expectativas a corto plazo, relacionadas con los procesos de codificar, decodificar y traducir la información, en el aspecto cognitivo, la disposición y la persistencia en los aspectos afectivos y de tendencia de acción. Las expectativas de aprendizaje a largo plazo, referidas al desarrollo de la competencia matemática representar.

Adicional a esto, la articulación didáctica de la Teoría de las Situaciones Didácticas y el Modelo Teórico a Priori, orienta la planificación del profesor de matemáticas. Las situaciones didácticas, a través de la tipología de las situaciones, porque el establecer momentos durante el desarrollo de la clase, propicia la participación, comunicación y negociación entre los estudiantes del objeto matemático en juego. El MTP, da lineamientos y orientaciones para la construcción de actividades que propicien la actuación de los estudiantes a través de tareas matemáticas con niveles de complejidad creciente que posibilite el desarrollo de las competencias atendiendo a las expectativas de aprendizaje.

Se debe tener en cuenta, a manera de recomendación, que para la institucionalización de la propuesta, la Institución educativa Liceo departamental debe empoderar al departamento de matemáticas, las siguientes tareas:

1. Establecer espacios de sensibilización frente a la propuesta a los docentes del departamento de matemáticas.
2. Realizar una etapa de experimentación restringida a los grados novenos, en un periodo lectivo.
3. Evaluar los resultados obtenidos en estos grados y con los docentes implicados realizar los ajustes pertinentes.

4. Definir etapas de implementación en los diferentes niveles de grados en forma gradual, para realiza una expansión restringida.

6. Bibliografía

- Arellano, F. (2009). Algunas dificultades que presentan los estudiantes al asociar ecuaciones lineales con su respectiva gráfica. En A. L. educativa, *Leston* (págs. 357-365). México: Comité Latinoamericano de matemática Educativa A.C. Obtenido de funes.uniandes.edu.co
- Bishop, A. (2005). *Aproximación sociocultural a la educación matemática*. Santiago de Cali, Valle del Cauca, Colombia: Universidad del Valle.
- Brousseau, G. (1991). *Théorie des situations didactiques*. . La Pensée sauvage: Grenoble.
- Cabra, F., & Gómez, J. (17 de octubre de 2016). La función Lineal en diferentes Contextos. Recuperado el 23 de agosto de 2016, de Colombia Aprende: www.colombiaprende.edu.co/html/mediateca/1607/article-110456.html
- Chavarria, J. (2006, año 1). teoría de situaciones didacticas. (E. Matemática, Ed.) *Cuadernos de investigación y formación en educación matemática*, Número 2. Obtenido de www.redalyc.org
- Chevallard, Y. (1997). *La Trasposición Didáctica. Del saber sabio al saber enseñado*. Barcelona- España: AIQUE Grupo Editor. Recuperado el 19 de 02 de 2017, de <https://es.slideshare.net/observatorio2015/yves-chevallard-la-trasposicion-didactica-del-saber-sabio-al-saber-enseado>

- Consejo de Santiago de Cali. (7 de agosto de 2016). *Consejodecali.gov.co*. Recuperado el 24 de mayo de 2017, de *Consejodecali.gov.co*: http://www.consejodecali.gov.co/Publicaciones/consejo_de_cali_condecora_a_taxis_libres_4444444
- D'Amore, B. (2005). *Bases filosóficas, pedagógicas, epistemológicas y conceptuales de la didáctica de la matemática*. México: Reverté S.A.
- Duval, R. (1999). *Semiosos y pensamiento humano. Registros semióticos y aprendizajes*. México D.F: Universidad del Valle.
- Fandiño, M. (2012). *Múltiples aspectos del aprendizaje de la matemática*. Bologna: Magisterio.
- García, B., Coronado, A., & Giraldo, A. (2015). *Orientaciones didácticas para el desarrollo de competencias matemáticas*. Florencia: Universidad de la Amazonía.
- García, B., Coronado, A., Montealegre, L., Albeiro, G., Tovar, B. A., Samuel, M., & Dawson, C. (2013). *Competencias Matemáticas y actividad matemática de aprendizaje*. Florencia: Universidad de la Amazonía.
- García, B., Coronado, A., Montealegre, I., Tovar, B., Albeiro, G., Morales, S., & Cortes, D. (2012). *Competencias Matemáticas*. Florencia- caquetá: Universidad de la Amazonía.
- Hernandez, R. F. (2010). *Metodología de la investigación*. México: McGRAW-HILL / INTERAMERICANA EDITORES, S.A. DE C.V. Obtenido de www.FreeLibros.com.
- Lurduy, O. S. (13 de diciembre de 2010). *Funes Repertorio Digital*. Obtenido de Funes Repertorio Digital: <http://asocolme.com/sitio/>

- Martyn, S. (3 de noviembre de 2009). *explorable*. Recuperado el 31 de mayo de 2017, de *explorable*: <https://explorable.com/es/disenos-de-prueba-previa-y-posterior>
- MEN. (1998). *Matemáticas- Lineamientos Curriculares*. (MEN, Ed.) Bogotá: MEN.
- MEN. (2006). *Estandares Básicos de Competencias en Lenguaje, Matemáticas, Ciencias y Ciudadanas*. Bogotá D.C.: Imprenta Nacional de Colombia.
- Molina, M. (7 de junio de 2011). *funes.uniandes.edu.co*. Recuperado el 4 de junio de 2017, de *funes.uniandes.edu.co*: http://funes.uniandes.edu.co/1834/1/405_Ramirez2011Elsigno_SEIEM13.pdf
- National Council of teacher of Mathematics. (2000). *Principios y estandares para la educación Matemática*. Sevilla- España: Proyecto Sur.
- Otalora, J. M. (2006). *Taller Ingenio matemático 10 y 11*. Bogotá: Voluntad.
- Panizza, M. (1999). Recuperado el 07 de abril de 2017, de www.crecerysonreir.org/docs/matematicas_teorico.pdf
- Qualding, D. (1982). La importancia de las matemáticas. *Perspectivas*, 443-452.
- Rico, L., & Lupiañez, J. (2008). *Competencias Matemáticas desde una perspectiva curricular*. Madrid: Alianza Editorial.
- Rodriguez, S. (05 de Noviembre de 2015). *Funes: repositorio digital de documentos en Educación Matemática*. Obtenido de Funes: repositorio digital de documentos en Educación Matemática: <http://funes.uniandes.edu.co/7656/>

Sfard, A. (2008). *Aprendizaje de las matemáticas escolares desde un enfoque comunicacional*. Santiago de Cali: Universidad del Valle.

Shuttleworth, M. (3 de Octubre de 2009). *Explorable.com*. Recuperado el 24 de mayo de 2017, de Explorable.com: <https://explorable.com/es/disenos-de-prueba-previa-y-posterior>

Vasco, C. (2000). *Pensamiento Variacional*. Cali: Universidad del Valle.

7. ANEXOS

En este apartado, se adjunta los instrumentos utilizados para la recolección de información, que como hemos descrito en apartados anteriores del trabajo, son dos: La prueba pre, que también constituye la prueba post y la situación didáctica; que consta de una secuencia de tres tareas, aplicadas en cuatro sesiones de dos horas cada una.

Anexo 7.1 Prueba Pre-post

 SANTIAGO DE CALI	SITUACIÓN DIDÁCTICA: EL TAXIMETRO			 LICEO DEPARTAMENTAL
	Versión: 01	Fecha: 18/10/2015	Página 147 de 4	

NOMBRE: _____

Lea cuidadosamente la situación que se presenta a continuación.

Las empresas de taxis se rigen por las tarifas dispuestas por el decreto 516 de junio 19 de 2001 de la secretaria de tránsito y transporte. La utilización del servicio se mide en unidades; las cuales son registradas por el taxímetro. La unidad se marca cada 90 metros y cada 60 segundos de espera. Por cada unidad se pagan \$53. Cualquier recorrido tiene un valor inicial de 25 unidades, adicional a las unidades empleadas y en el recorrido mínimo se tarifican 50 unidades que equivalen a \$2.650 sin recargos.

5 Con base en la situación presentada, identifica:

- Las magnitudes que aparecen en la situación _____,
_____, _____
- Las magnitudes que están relacionadas y describa dicha relación _____

- La relación existente entre las magnitudes identificadas _____

6 Con base en la información dada en la situación, proponga valores para los metros recorridos y complete cada una de las tablas que aparecen a continuación.

a.

Metros recorridos								
Unidades empleadas								

b.

Unidades empleadas								
Costo del servicio								

c.

Metros recorridos								
Costo del servicio								

7 Ubique en un plano cartesiano, las parejas obtenidas en cada una de las tablas del punto 2.

8 A partir de la información obtenida en los puntos 2 y 3, proponga una expresión matemática que relaciones las variables y que muestre el comportamiento de la información suministrada en los puntos anteriores.

 SANTIAGO DE CALI	SITUACIÓN DIDÁCTICA: EL TAXIMETRO				 LICEO DEPARTAMENTAL
	Versión: 01	Fecha: 18/10/2015	Página 149 de 4		

NOMBRE: _____



Lea cuidadosamente la situación que se presenta a continuación.

Las empresas de taxis se rigen por las tarifas dispuestas por el decreto 516 de junio 19 de 2001 de la secretaria de tránsito y transporte. La utilización del servicio se mide en unidades; las cuales son registradas por el taxímetro. La unidad se marca cada 90 metros y cada 60 segundos de espera. Por cada unidad se pagan \$53. Cualquier recorrido tiene un valor inicial de 25 unidades, adicional a

las unidades empleadas y en el recorrido mínimo se tarifican 50 unidades que equivalen a \$2.650 sin recargos.

TAREA No 1: Magnitudes dependientes e independientes

Momento 1. Con base en la información, completa los espacios en blanco.

1. Una magnitud es aquello susceptible de ser medido. ¿Qué magnitudes, identificas en la situación planteada?

2. Describe los cambios que se dan en cada una de las magnitudes identificadas en el punto 1.

3. Atendiendo a las condiciones dadas en la situación, completa la siguiente tabla

Metros recorridos	90	4750	5000	5200	5640	5850	6000	6200	6640	6850
Unidades empleadas	26									

Momento 2. En los puntos que siguen trabajaremos en parejas. Discuta con su compañero de grupo, las apreciaciones que obtuvieron de forma individual, analicen los siguientes cuestionamientos y den respuesta.

4. Expliquen la relación que existe entre las magnitudes identificadas y la variación que ocurre en cada una de ellas.

5. ¿Cuál es la relación numérica que existe entre la distancia recorrida y las unidades marcadas en el taxímetro? Asuma que no se requiere de tiempo de espera.
 6. Describan la relación que existe entre el valor de una carrera y la distancia recorrida.
-

Momento 3. Formen ahora, grupos de 4 estudiantes. Socialicen los resultados que han obtenido en cada uno de los puntos anteriores. Cada grupo socializará los resultados obtenidos al resto de la clase.

Momento 4. Presentados los resultados obtenidos por los diferentes grupos, procedan a verificar la validez de los argumentos presentados frente a la siguiente situación:

7. Si Roberto emplea el servicio de taxi y recorre 15Km. ¿Cuánto debe pagar por el servicio prestado?

 SANTIAGO DE CALI	SITUACIÓN DIDÁCTICA: EL TAXIMETRO				 LICEO DEPARTAMENTAL
	Versión: 01	Fecha: 18/10/2015	Página 152 de 4		

NOMBRE:

TAREA No 2: Representación de la variación entre magnitudes

Continuamos con la situación del Taxímetro: La utilización del servicio se mide en unidades; las cuales son registradas por el taxímetro. La unidad se marca cada 90 metros. Por cada unidad se pagan \$53. Cualquier recorrido tiene un valor inicial de 25 unidades adicional a las unidades empleadas y en el recorrido mínimo se tarifican 50 unidades que equivalen a \$2.650 sin recargos. En este caso no se atenderá al tiempo de espera.

Momento 1. En esta actividad, nos interesa establecer la relación entre las magnitudes: *distancia recorrida, marcaciones en el taxímetro y costo generado por el servicio* Para ello

1. Complete cada una de las tablas:

Tabla 1:

	4750	5000	5200	5640	5850	6000	6200	6640	6850
Metros recorridos									
Unidades empleadas									

Tabla 2:

Marcaciones del taxímetro									
Costo generado									

Momento 2. En los puntos que siguen trabajaremos en parejas. Discuta con su compañero de grupo, los resultados obtenidos en cada una, comparen y justifiquen los valores hallados.

2. Representen la información de cada tabla, en el plano cartesiano.
3. ¿Pueden unirse los puntos que ubicaste, mediante una línea recta? Expliquen tu respuesta.

Momento 3. Formen ahora, grupo de 4 estudiantes y socialicen los resultados obtenidos.

4. Establezcan las similitudes y diferencias que se han obtenido en los análisis realizados. Aborden los puntos siguientes para socializar los resultados, en la plenaria
5. Construye una tabla que pueda mostrar la forma como varia el costo del servicio en función de la distancia que se recorre.

6. ¿De qué depende el costo del servicio por una carrera de taxi? Explique la respuesta. _____
7. ¿Cómo se puede calcular el costo por el servicio de taxi, en función de la distancia recorrida? Explica tu respuesta
-

Momento 4. Socialicen al grupo los resultados obtenidos y verifiquen la validez de los planteamientos presentados, sin perder de vista la situación.

¿Cuál es la validez de la afirmación “A mayor distancia recorrida, mayor es el costo del servicio de taxi”? Explique su respuesta, atendiendo a las gráficas realizadas en el punto 3.

 SANTIAGO DE CALI	SITUACIÓN DIDÁCTICA: EL TAXIMETRO				 LICEO DEPARTAMENTAL
	Versión: 01	Fecha: 18/10/2015	Página 155 de 4		

NOMBRE: _____

TAREA No 3: Cambio en la representación de variación de magnitudes

Lee cuidadosamente la situación presentada sobre el taxímetro.

Las empresas de taxis se rigen por las tarifas dispuestas por el decreto 516 de junio 19 de 2001 de la secretaria de tránsito y transporte. La utilización del servicio se mide en unidades; las cuales son registradas por el taxímetro. La unidad se marca cada 90 metros y cada 60 segundos de espera. Por cada unidad se pagan \$53. Cualquier recorrido tiene un valor inicial de 25 unidades adicional a las unidades empleadas y en el recorrido mínimo se tarifican 50 unidades que equivalen a \$2.650 sin recargos. (Otálora, 2006, p.9)

7. ¿Es posible medir dicha inclinación? ¿a cuánto equivale dicha medida?

8. ¿Qué relación existe entre los datos de la tabla y el procedimiento anterior?

Formen ahora, grupo de 4 estudiantes y presenten los resultados obtenidos.

9. Establezcan las similitudes y diferencias que se han dado en los análisis realizados. Aborden las respuestas dadas a los planteamientos anteriores.

Socialice los resultados en la plenaria de grupo.

10. Escriba una expresión algebraica que permita calcular el costo del servicio de taxi por distancia en metros recorrida. Verifique la expresión obtenida, con los la información de la tabla de valores y el gráfico elaborado.

nexo 7.4 Rejilla de evaluación T1

Aspectos	DESEMPEÑOS ALTOS		DESEMPEÑOS BAJOS	
	4	3	2	1
CODIFICACIÓN	Describe variaciones y relaciones, entre las variables involucradas en la situación.(Preg. 1-2)	Describe relaciones, entre las variables involucradas en la situación.	Describe variaciones entre las magnitudes involucradas en la situación.	No describe variaciones ni relaciones, entre las variables involucradas en la situación.
DESCODIFICACIÓN	Interpreta la información dada a partir de sus vivencias y establece los tipos de relación existentes entre las variables identificadas. (preg. 4, 5 y 6)	Interpreta la información dada y presenta en tablas de valores las relaciones existentes entre las diferentes variables identificadas.	Presenta en tablas de valores las relaciones existentes entre las diferentes variables identificadas.	Se le dificulta interpretar la información dada. Tiene dificultad para presentar las relaciones entre las variables en tablas de valores.
TRADUCCION	Establece relaciones de dependencia e independencia entre variables y realiza conversiones del lenguaje oral y escrito al lenguaje matemático (tabular y algebraico).(preg. 3 y 6)	Realiza conversiones del lenguaje oral y escrito al lenguaje tabular al establecer relaciones entre variables.	Establece relaciones de dependencia e independencia entre variables	Se le dificulta establecer relaciones de dependencia e independencia entre variables
DISPOSICIÓN	Participa con voluntad e interés en el desarrollo de las actividades individuales y escucha con atención los argumentos de sus compañeros para validar la información en el grupo	Participa en el desarrollo de las actividades individuales y comparte la información que ha obtenido en su análisis.	Desarrolla las actividades en forma individual, aun en el trabajo en grupo.	Desarrollo las actividades individuales pero no participa en las construcciones del grupo. Se distrae.
PERSISTENCIA	Muestra interés en participar en la socialización grupal, argumentando y justificando los procedimientos utilizados y los resultados hallados en su búsqueda por dar respuesta a las demandas planteadas.	Participa de la socialización grupal, mostrando los aportes del respectivo equipo.	Su aporte al grupo es mínimo y su participación en la socialización no evidencia interés por dar respuesta a las demandas planteadas	No muestra interés por dar respuesta a las demandas planteadas. Su participación en el equipo NO es significativa

Anexo 7.5 Rejilla de evaluación T2

Aspectos	DESEMPEÑOS ALTOS			DESEMPEÑOS BAJOS
	4	3	2	1
CODIFICACIÓN	Analiza e interpreta la información suministrada y establece canales para el manejo la de información.	Interpreta la información suministrada y establece el canal para el manejo la de información.	Describe la información suministrada.	Presenta dificultad al interpretar la información y esto impide el desarrollo de la actividad propuesta.
DESCODIFICACIÓN	Realiza cálculos y gráficos para generar registros de representación de la información planteada.(Preg. 2y3)	Realiza cálculos para generar registros de representación de la información planteada.	Describe en forma oral y escrita la información planteada en la situación.	Presenta dificultad al elaborar registros de representación de la situación.
TRADUCCION	Representa la información de la situación en diferentes registros de representación (Oral, escrito, tabular y gráficos cartesianos) Conversión. CT(3).	Representa la información de la situación en diferentes registros de representación (Oral, escrito, tabular)	Representa la información de la situación en diferentes registros de representación (Oral, escrito)	No representa la información de la situación planteada, utilizando los registros de representación.
DISPOSICIÓN	Participa con voluntad e interés en el desarrollo de las actividades individuales y escucha con atención los argumentos de sus compañeros para validar la información en el grupo	Participa en el desarrollo de las actividades individuales y comparte la información que ha obtenido en su análisis.	Desarrolla las actividades en forma individual, aun en el trabajo en grupo.	Desarrolla las actividades individuales pero evita participar del trabajo en grupo.
PERSISTENCIA	Muestra interés en participar en la socialización grupal, argumentando y justificando los procedimientos utilizados y los resultados hallados en su búsqueda por dar respuesta a las demandas planteadas.	Participa de la socialización grupal, mostrando los aportes del respectivo equipo.	Su aporte al grupo es mínimo y su participación en la socialización no evidencia interés por dar respuesta a las demandas planteadas	No muestra interés por dar respuesta a las demandas planteadas. Su participación en el equipo NO es significativa

Anexo 7.6 Rejilla de evaluación T3

Aspectos	DESEMPEÑOS ALTOS		DESEMPEÑOS BAJOS	
	4	3	2	1
CODIFICACIÓN	Reconoce el comportamiento funcional entre las variables involucradas en la situación planteada.	Reconoce las variables involucradas en la situación, evidenciando un comportamiento particular entre ellas. Dependencia e independencia.	Identifica las variables involucradas en la situación.	Realiza cálculos para dar respuesta a los requerimientos.
DESCODIFICACIÓN	Utiliza el lenguaje matemático para describir el comportamiento funcional de las variables.	Identifica un comportamiento funcional entre las variables y lo representa en diferentes registros.	Describe en forma oral, escrita y tabular la dependencia entre variables, aún no utiliza el lenguaje matemático	No identifica comportamiento alguno entre las variables que involucra la situación
TRADUCCION	Reconoce las características de las funciones lineales a partir de conversiones entre sus diferentes registros de representación CT(2y3).	Establece relaciones de dependencia e independencia de las variables, a partir de diferentes registros.	Reconoce la dependencia e independencia de las variables involucradas en la situación.	Identifica la variación entre las magnitudes, pero se le dificulta establecer relaciones de dependencia entre ellas.
DISPOSICIÓN	Participa con voluntad e interés en el desarrollo de las actividades individuales y escucha con atención los argumentos de sus compañeros para validar la información en el grupo	Participa en el desarrollo de las actividades individuales y comparte la información que ha obtenido en su análisis.	Desarrolla las actividades en forma individual, aun en el trabajo en grupo.	Desarrollo las actividades individuales pero evita participar del trabajo en grupo.
PERSISTENCIA	Muestra interés en participar en la socialización grupal, argumentando y justificando los procedimientos utilizados y los resultados hallados en su búsqueda por dar respuesta a las demandas planteadas.	Participa de la socialización grupal, mostrando los aportes del respectivo equipo.	Su aporte al grupo es mínimo y su participación en la socialización no evidencia interés por dar respuesta a las demandas planteadas.	No muestra interés por dar respuesta a las demandas planteadas. Su participación en el equipo NO aporta a dar respuesta a lo planteado.