LA DEMOSTRACIÓN EN GEOMETRÍA: UNA MIRADA EN LA EDUCACIÓN PRIMARIA

FREDY ALEJANDRO BARBOSA MELÉNDEZ
JENNY ANDREA ESCOBAR CAICEDO

UNIVERSIDAD PEDAGÓGICA NACIONAL
FACULTAD DE CIENCIA Y TECNOLOGÍA
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS
MAESTRÍA EN DOCENCIA DE LA MATEMÁTICA
OCTUBRE DE 2014

LA DEMOSTRACIÓN EN GEOMETRÍA: UNA MIRADA EN LA EDUCACIÓN PRIMARIA

FREDY ALEJANDRO BARBOSA MELÉNDEZ

2012185001

JENNY ANDREA ESCOBAR CAICEDO

2012185006

TRABAJO DE GRADO

Para optar por el título de

Magister en Docencia de la Matemática

ASESORA

LEONOR CAMARGO URIBE

UNIVERSIDAD PEDAGÓGICA NACIONAL

FACULTAD DE CIENCIA Y TECNOLOGÍA

DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS

MAESTRÍA EN DOCENCIA DE LA MATEMÁTICA

OCTUBRE DE 2014

UNIVERSIDAD PEDAGOGICA NACIONAL
Educadora de educadores

FACULTAD DE CIENCIA Y TECNOLOGÍA
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS

ACTA DE EVALUACION DE TESIS DE GRADO

Escuchada la sustentación del Trabajo de Grado titulado **"La demostración en geometría: Una mirada en la educación primaria".** Presentado por los estudiantes:

Jenny Andrea Escobar Caicedo – 2012185006
Fredy Alejandro Barbosa Meléndez – 2012185001

Como requisito parcial para optar al título de **Magíster en Docencia de la Matemática**, analizado el proceso seguido por los estudiantes en la elaboración del Trabajo y evaluada la calidad del escrito final, se le asigna la calificación de **Aprobado** con **42** Puntos.

Observaciones:

En constancia se firma a los 03 días del mes de diciembre de 2014.

JURADOS

Director(a) del Trabajo: Profesor(a) ______________ *LEONOR CAMARGO*

Jurados:

Profesor(a) ______________ *CARLOS ROBERTO PÉREZ*

Profesor (a) ______________ *ÓSCAR JAVIER MOLINA*

Dedicamos el éxito y la satisfacción de este trabajo de grado a nuestras familias quienes nos dieron su apoyo incondicional, para llevar a cabo la culminación de nuestros estudios de maestría.

A la memoría de Benjamín Meléndez y Gloria Meléndez de Barbosa quienes siempre nos dieron su apoyo incondicional para alcanzar nuestros sueños.

AGRADECIMIENTOS

Agradecemos a Dios por ayudarnos a ser más constantes y comprometidos con la realización del presente trabajo de grado. De manera muy especial, agradecemos a nuestra asesora Leonor Camargo Uribe por su orientación y colaboración, en tanto sin ellos no hubiera sido posible culminar a cabalidad este trabajo de grado. Gracias por sus consejos, aportes y sugerencias los cuales contribuyeron a nuestra formación personal y profesional.

De igual manera, agradecemos al grupo de compañeros y docentes de la Maestría en Docencia de las Matemáticas y demás personas que estuvieron presentes en nuestro proceso de formación, quiénes nos aportaron de manera significativa a ser mejores investigadores en el campo de la Educación Matemática.

A nuestras familias por su incondicional apoyo, paciencia y comprensión durante el tiempo transcurrido en nuestro proceso académico.

"Para todos los efectos, declaramos que el presente trabajo es original y de nuestra total autoría; en aquellos casos en los cuales hemos requerido del trabajo de otros autores, hemos dado los respectivos créditos."

RESUMEN ANALÍTICO EN EDUCACIÓN – RAE

1. Información General	
Tipo de documento	Tesis de grado de maestría de investigación
Acceso al documento	Universidad Pedagógica Nacional. Biblioteca Central
Título del documento	LA DEMOSTRACIÓN EN GEOMETRÍA: UNA MIRADA EN LA EDUCACIÓN PRIMARIA
Autor(es)	BARBOSA MELÉNDEZ, FREDY ALEJANDRO; ESCOBAR CAICEDO, JENNY ANDREA
Director	Dra. CAMARGO URIBE, LEONOR
Publicación	Bogotá. Universidad Pedagógica Nacional, 2014. 120 p.
Unidad Patrocinante	Universidad Pedagógica Nacional
Palabras Claves	Demostración, actividad demostrativa, andamiaje, educación primaria, normas sociomatemáticas, geometría dinámica, conjeturar y justificar.

2. Descripción
En esta investigación presentamos un estudio realizado durante el año 2012 en un curso de grado cuarto de primaria de una institución privada de la ciudad de Bogotá. El propósito es analizar la manera en que los niños se involucran en distintas acciones de introducción a la actividad demostrativa, cuando trabajan en un ambiente de resolución de problemas, haciendo uso de un programa de geometría dinámica. Los problemas propuestos a los estudiantes promueven la construcción de figuras geométricas, la exploración en busca de regularidades y la justificación de algunas propiedades con base en otras. En la investigación se puso en marcha un experimento de enseñanza a partir del diseño de una secuencia de actividades que consta de siete problemas con temas básicos de la geometría escolar. Se tomaron registros de la actividad matemática desarrollada por los estudiantes en los dos últimos problemas del experimento y se analizaron los diálogos de los estudiantes y la actividad desarrollada en el último problema, a la luz del marco teórico que propusimos para este trabajo de grado con el propósito de describir el inicio a la actividad demostrativa.

3. Fuentes
Anghileri, J. (2006). Scaffolding practices that enhance mathematics learning. *Journal of Mathematics Teacher Education,* 9, 33-52. Chazan, D. (1993). High school geometry students' justification for their views of empirical evidence and mathematical proof. *Educational Studies in Mathematics*, 24,.359-387. Mariotti, M. A. (2006). Proof and proving in Mathematics Education. In A. Gutierrez & P. Boero (Eds.). *Handbook of Research on the Psychology of Mathematics Education* (pp. 173 - 204). Rotterdam: Sense Publishers. Hanna G; de Villiers, M; Arzarello, F; Dreyfus, T; Durand-Guerrier, V; Jahnke, H.N; Lin F.L; Selden, A, Tall, D; Yevdokimov,O. (2009). ICMI Study 19: proof and proving in mathematics education: discussion document. En F.L Lin; F.J Hsieh; G, Hanna; M de Villiers. (2009). *Proof and proving in mathematics education. ICMI Study Conference Proceedings.* Mc Clain, K. (2005). A Methodology of Clasroom Teaching Experiments. En *Researching Mathematics Clasrooms: a critical examination of Methodology*. 5, 91-111. Perry, P., Camargo, L., Samper, C., Molina, O. & Echeverry, A. (2008). Geometría y Lineamientos Curriculares: Una experiencia en la formación inicial de profesores, *Memorias de ECME-9*, Valledupar, Colombia. Krummheuer, G. (1993). The Etnoghaphy of argumentation. Volumen 148 de Occasional paper: Institut für Didaktik der Mathematik,7, 229-269. Simon, M. A. & Blume, G. (1996). Justification in the mathematics classroom: A study of prospective elementary teachers. *Journal of Mathematical Behavior*,15, 3-31. Stylianides, A. J. (2007). Proof and proving in school mathematics. *Journal for Research in Mathematics Education,* 38, 289-321. Yackel, E. & Cobb, P. (1996). Sociomathematical norms, argumentation, and autonomy in mathematics. *Journal for Research in Mathematics Education*, 27 (4), 458 – 477.

4. Contenidos
1. Planteamiento del problema: En este capítulo, presentamos la formulación del problema, la justificación del estudio, los objetivos y una revisión de los antecedentes que sirvieron de base para construir los referentes teóricos del estudio.

2. Marco de referencia: En el segundo capítulo, conceptualizamos los cuatro aspectos que fundamentan el marco teórico: demostración, actividad demostrativa, andamiaje instruccional y normas sociomatemáticas.

3. Diseño metodológico: En el capítulo tres realizamos una presentación del proceso metodológico llevado a cabo durante la investigación, a través de la descripción del Experimento de Enseñanza. Exponemos la perspectiva investigativa, la contextualización del estudio, el diseño experimental y la herramienta analítica.

4. Análisis: En el capítulo cuatro mostramos el análisis realizado a los datos obtenidos durante la puesta en marcha del Experimento de Enseñanza.

5. Resultados: En el capítulo cinto hacemos una síntesis que pretende mostrar las fortalezas y dificultades que presentaron los estudiantes que participaron en el Experimento para introducirse en la actividad demostrativa.

Conclusiones: En este capítulo enunciamos algunas reflexiones finales que tienen en cuenta aspectos como: el diseño e implementación del Experimento de Enseñanza, las categorías emergentes del Experimento de Enseñanza, y el uso de la geometría dinámica en primaria.

5. Metodología
De acuerdo con el problema descrito en el primer capítulo del trabajo, la investigación se llevó a cabo a partir de la construcción e implementación de un Experimento de Enseñanza. De los siete problemas que proponemos en la secuencia de actividades, se grabó en audio y video, la actividad matemática que desarrollaron tres grupos de estudiantes alrededor del último problema, El experimento de enseñanza buscaba promover que estudiantes de cuarto de primaria se introdujeran en la práctica de demostrar en geometría, en el sentido expuesto por Stylianides (2007). A partir de los datos obtenidos en su desarrollo, se procedió al realizar su respectivo análisis. Para el análisis de la información construimos una herramienta analítica, que proporcionó las categorías de análisis con las cuales dar cuenta de la participación de los estudiantes en la actividad demostrativa. Las categorías son: la actividad demostrativa, las normas sociomatemáticas y el andamiaje instruccional.

6. Conclusiones
A partir de los análisis que realizamos del experimento de enseñanza podemos afirmar que la herramienta analítica que usamos es útil para mostrar el surgimiento del inicio a la actividad demostrativa de estudiantes de primaria. Pudimos detectar momentos en los que los niños exploran figuras en busca de invariantes, las enriquecen para hacer conexiones con hechos geométricos y, con ayuda de la profesora, justifican un invariante detectado usando un hecho geométrico conocido.

Ya implementada la propuesta, observamos que la profesora tiene un rol importante en los procesos de introducción de los estudiantes a la actividad demostrativa. En ese sentido, compartimos con Stylianides (2007) que ella, como representante experta de la cultura matemática, propicia que pueda instaurarse en la clase de matemáticas una “cultura de los por qué” (Mariotti, 2006) que favorece la argumentación en la clase de matemáticas.

Elaborado por:	BARBOSA MELÉNDEZ FREDY ALEJANDRO ESCOBAR CAICEDO JENNY ANDREA
Revisado por:	Dra. LEONOR CAMARGO URIBE

Fecha de elaboración del Resumen:	17	10	2014

TABLA DE CONTENIDO

INTRODUCCIÓN

En el presente trabajo describimos un Experimento de Enseñanza desarrollado con estudiantes de cuarto de primaria de un colegio de Bogotá que se involucran a una secuencia de problemas de geometría. El experimento buscaba favorecer su introducción a la actividad demostrativa a partir de la construcción de figuras geométricas, la exploración en busca de regularidades y la justificación de algunas propiedades con base en otras, haciendo uso de un programa de geometría dinámica, dividimos el trabajo en seis capítulos que describimos a continuación:

En el primer capítulo, presentamos el planteamiento del problema al que atendimos con esta investigación. Incluye además, la justificación, la formulación del interrogante central, el objetivo general y los objetivos específicos que apoyan nuestra pregunta de investigación. Finalizamos el capítulo con una revisión de los antecedentes sobre el campo de estudio argumentación y prueba en la escuela primaria y universitaria, que nos permitió estudiar las diferentes miradas que hacen algunos autores al área problema.

En el segundo capítulo, presentamos el marco de referencia que da soporte a la investigación. Este contempla los siguientes aspectos: demostración, actividad demostrativa, normas sociomatemáticas y andamiaje instruccional, como también una descripción del programa GeoGebraPrim como mediador para introducir a estudiantes de cuarto de primaria en la actividad demostrativa.

En el tercer capítulo, describimos el diseño metodológico implementado para dar cumplimiento a los objetivos propuestos. Dicha metodología se estructura a partir de los siguientes elementos: la perspectiva investigativa; la contextualización del estudio que incluye una caracterización de los estudiantes; el diseño experimental, que presenta aspectos centrales del experimento de enseñanza y las fuentes de recolección de la información; y por último, la herramienta analítica que enuncia la manera como se analizan los datos recogidos de la producción de los estudiantes, en el desarrollo de la secuencia de problemas.

El cuarto capítulo corresponde a los análisis que realizamos de la información obtenida de las interacciones de los estudiantes entre ellos y con el profesor en el desarrollo del problema principal. En este capítulo incluimos los siguientes aspectos: la descripción, interpretación y análisis de los episodios; la identificación de las acciones de la actividad demostrativa y el papel de las normas sociomatemáticas y del andamiaje para introducir a los estudiantes en la actividad demostrativa.

El quinto capítulo presenta los resultados del estudio. Mostramos las fortalezas del experimento de enseñanza y las dificultades que tuvieron los tres grupos de estudiantes al ser introducidos a la práctica de demostrar.

Finalmente, presentamos, a manera de reflexión, las conclusiones de este trabajo las cuales están relacionadas con los resultados encontrados durante el desarrollo de la investigación, y que se asocian con los propósitos de este estudio.

1. PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA

1.1. DESCRIPCIÓN Y FORMULACIÓN DEL PROBLEMA DE INVESTIGACIÓN

El campo problemático en el que se ubica este trabajo de grado es la argumentación y la demostración en geometría, en el ámbito de la Educación Matemática. Algunos de los aspectos que se estudian en este campo son mencionados por Hanna et. al (2009); por ejemplo, la importancia de introducir a los estudiantes a la demostración en niveles tempranos de escolaridad, el análisis de aspectos cognitivos involucrados en la demostración, las relaciones entre argumentar y demostrar y el papel de la experimentación en la actividad demostrativa.

De la misma forma, algunas líneas de investigación desarrolladas en Educación Matemática en Colombia, se han ocupado de la enseñanza y el aprendizaje de la demostración en geometría. Una de ellas es la línea Argumentación y Prueba de la Universidad Pedagógica Nacional, línea en la cual trabaja el grupo de investigación Aprendizaje y Enseñanza de la Geometría, Æ•G. Este grupo se ha centrado, en los últimos años, en abordar la enseñanza de la demostración en la formación de profesores de matemáticas. Se plantea que los profesores deben desarrollar competencias con respecto a la demostración matemática, para que así, en su vida profesional, puedan promover la actividad demostrativa en sus clases y desarrollen aproximaciones metodológicas para favorecer el aprendizaje de la demostración en cualquier nivel educativo. Los avances investigativos han servido de fundamento para la realización de estudios investigativos dirigidos a la enseñanza de la demostración en la escuela, promovidos gracias a la asesoría de trabajos de grado de la Maestría en Docencia de la Matemática.

Ubicados en este campo, este trabajo intenta abordar la enseñanza y el aprendizaje de la demostración en cuarto de primaria[1] desde una perspectiva socio-cultural, promovida por

[1]En el capítulo correspondiente al marco de referencia definimos qué entendemos por demostrar en este nivel educativo.

Vigotsky, en la cual se considera que los niños más que construir conocimiento, reconstruyen los conocimientos ya elaborados por la ciencia y la cultura, y que en dicho proceso el lenguaje hace las veces de mediador. Como lo señala Camargo (2010), esta perspectiva se caracteriza por considerar que somos seres sociales y por ende requerimos de normas que nos permiten interactuar y regular nuestras acciones en los ámbitos culturales en los que nos desenvolvemos, aprendemos con herramientas, es decir, instrumentos que generan una forma de acercarse a los objetos de conocimiento y aprendemos con la ayuda de un experto que guía nuestras reconstrucciones de conocimiento. De acuerdo con García (2010), Vigostky señaló que los niños logran la reconstrucción mencionada cuando se enfrentan a resolver problemas de manera grupal, junto a un experto que es capaz de crear experiencias que les proporcionen un marco para intentar avanzar en su conocimiento, pero sin crear tanta dependencia como para impedir que logren resolver los problemas por sí mismos.

Desde nuestra experiencia como docentes de matemáticas hemos detectado que en las clases de geometría no se le dan oportunidades a los estudiantes para que accedan a la cultura matemática a través de la demostración, es decir, no se les provee de elementos para que redescubran los teoremas de la geometría euclidiana y luego justifiquen la validez de los mismos. Así mismo, hemos visto que se hacen muy pocos esfuerzos por enseñar a argumentar, la demostración generalmente no se enseña y muy pocos profesores consideran que es un asunto que debe permear los planes de estudio en matemáticas. En algunos pocos colegios en donde se hacen esfuerzos por promover su enseñanza en la clase de geometría, estos fracasan debido a que la manera en que se introduce esta actividad, se desliga de otras actividades matemáticas como la modelación y la comunicaciòn.

En el primer semestre de 2012 llevamos a cabo un acercamiento informal que nos permite ilustrar la problemática a manera de hipótesis abordada en este trabajo. Se realizó con algunos estudiantes de la Educación Básica y Media que teníamos a cargo en el momento, a quienes les hicimos preguntas que buscaban indagar cómo argumentaban matemáticamente y cómo se enfrentaban a una demostración (en el caso de los estudiantes que tenían ese tema en el plan de estudios). Para diseñar las actividades mencionadas nos basamos en el plan de área de matemáticas de cada institución y los planteamientos expuestos por el grupo *Æ•G* (Perry et.

al. 2009) sobre el diseño de tareas. A continuación damos ejemplos de algunas respuestas representativas.

A unos estudiantes de grado sexto se les propuso una actividad con material concreto en la que se buscaba indagar si descubrían que la suma de las medidas de los ángulos de un triángulo era 180° y si podían formular una justificación de esta propiedad. Para ello, se les pidió que dibujaran un triángulo en una hoja y que señalaran los ángulos. Luego se les solicitó recortar los triángulos, dividir cada uno en tres cuñas que contuvieran uno de los ángulos y colocarlos una a continuación de la otra de tal manera que cada dos compartieran un lado. Se le pidió que hicieran lo mismo con otros dos triángulos de distinto tamaño. Finalmente, se les preguntó qué podían concluir.

La siguiente es la respuesta de Juan que es representativa de lo que contestaron varios de los niños.

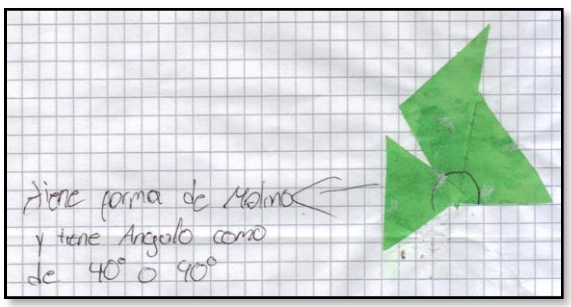


FIGURA 1

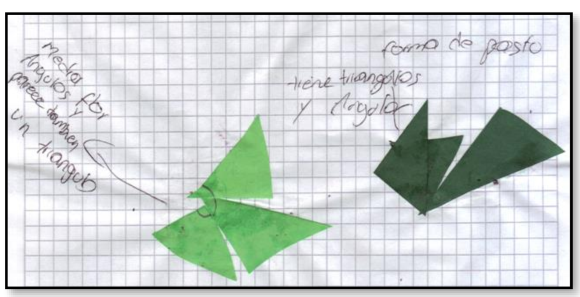


FIGURA 2

En la respuesta de Juan se observa que él combina términos matemáticos como ángulos y triángulos con formas del mundo real como pasto, hojas y molinos. Los ángulos y los triángulos son objetos físicos como los demás. Este tipo de respuesta indica que los niños no están actuando matemáticamente, no buscan generar una configuración geométrica que les permita descubrir alguna propiedad y por lo tanto no elaboran argumentos matemáticos.

A estudiantes de grado noveno se les pidió construir un triángulo rectángulo de tal manera que el lado más largo no quedara opuesto al ángulo recto y argumentaran si era o no posible hacerlo. Se esperaba que experimentaran con varios triángulos rectángulos, descubrieran que el lado más largo se opone al ángulo mayor y justificaran esta propiedad haciendo uso de las medidas relativas de los ángulos. La respuesta de Pedro es representativa de lo que hicieron la mayoría de estudiantes de ese nivel:

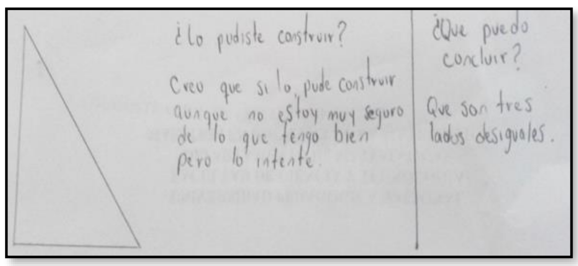


FIGURA 3

En esta respuesta se puede observar que Pedro no comprende que para sacar una conclusión debe apoyarse bien sea en una experimentación o en el uso de propiedades que considera verdaderas. El desempeño está lejos de ser geométrico. No estudia varios casos, no muestra ejemplos de lo que está afirmando ni elabora una justificación.

A estudiantes de grado décimo, cuyo plan de estudios en grado noveno incluyó hacer demostraciones a dos columnas, se les dio una demostración que estaba incompleta y se les pidió completar tanto afirmaciones como razones de pasos de justificación. Se suponía que deberían ser capaces de abordar este tipo de actividades .

Completar la demostración:

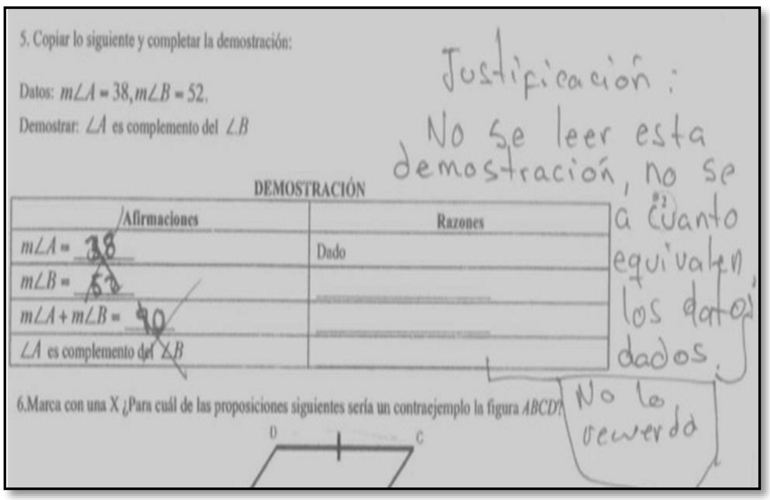
Datos: $m\angle A = 38$ y $m\angle B = 52$

Demostrar: $\angle A$ es complemento del $\angle B$

DEMOSTRACIÓN	
Afirmación	Razón
$m\angle A =$ _____	Dato
$m\angle B =$ _____	__________
$m\angle A + m\angle B =$ _____	__________
$\angle A$ es complemento del $\angle B$	__________

FIGURA 4

La siguiente es la respuesta de Sonia que es representativa de lo que hicieron gran parte de los estudiantes de este grado:


5. Copiar lo siguiente y completar la demostración:

Datos: $m\angle A = 38, m\angle B = 52.$

Demostrar: $\angle A$ es complemento del $\angle B$

DEMOSTRACIÓN	
Afirmaciones	Razones
$m\angle A =$ 38	Dado
$m\angle B =$ 52	
$m\angle A + m\angle B =$ 90	
$\angle A$ es complemento del $\angle B$	

Justificación: No se leer esta demostración, no se a cuanto equivalen los datos dados.

No lo recuerdo

6. Marca con una X ¿Para cuál de las proposiciones siguientes sería un contraejemplo la figura ABCD?

FIGURA 5

En la respuesta de Sonia se puede observar que no comprende qué es completar una demostración ni qué es lo que se espera que ellos hagan.

El acercamiento intuitivo nos permitió corroborar que, generalmente, los estudiantes no han tenido un acercamiento básico a las actividades de argumentar y demostrar, ni siquiera en el colegio en donde se supone que deben hacer demostraciones a dos columnas. No están familiarizados con enunciados de tareas en donde se les pide explorar una configuración o hacer una construcción, ni mucho menos con elaborar justificaciones para sus afirmaciones.

Lo anterior, nos lleva a pensar en la importancia que tiene abordar la enseñanza de la argumentación y la demostración en geometría, comenzando por los primeros años escolares, para así forjar las bases necesarias para que los estudiantes puedan enfrentarse a situaciones matemáticas cada vez más exigentes [2]. En consonancia con la idea de demostrar que proponemos en el marco teórico, vimos la necesidad de relacionar las actividades de exploración geométrica, argumentación y demostración alrededor de la resolución de problemas, en donde los estudiantes puedan descubrir hechos geométricos y los argumenten, usando el lenguaje matemático y las formas de razonamiento propias de su nivel educativo. Consideramos que si trabajamos en niveles tempranos de escolaridad podremos contribuir a generar una cultura en la clase de matemáticas favorable a estas prácticas.

La problemática que presentamos aquí no es local ni mucho menos nacional. Es un asunto que ha sido analizado por investigadores como Chazan (1993), Simon y Blume (1996), Maher y Martino (citado en Mariotti, 2006) y Stylianides (2007), quiénes han dedicado parte de sus investigaciones a estudiar cómo promover que niños de primaria argumenten y demuestren en la clase de geometría en niveles tempranos de escolaridad. En los estudios se menciona la importancia de los recursos usados en la clase de geometría, el papel del profesor y la cultura de la clase.

Bajo los planteamientos anteriores, formulamos nuestra pregunta de investigación:

¿Cómo articular un conjunto de normas sociomatemáticas, el andamiaje instruccional y el uso del programa GeoGebraPrim en una enseñanza que pretende introducir a estudiantes de cuarto de primaria en la práctica de demostrar en geométria?

---

[2] Adicionalmenten los autores cambiaron las instituciones donde laboraban, ocacionando que el estudio se realizaran con estudiantes de primaria.

1.2. JUSTIFICACIÓN DEL ESTUDIO

Desde finales de los años noventa y comienzos del nuevo milenio, los investigadores en Educación Matemática han señalado la necesidad de dar mayor atención a la demostración en el currículo escolar. Esta necesidad ha sido mencionada por Hanna et. al (2009) quienes recogen en un documento algunas de las discusiones entabladas por la comunidad de educadores matemáticos sobre la enseñanza y el aprendizaje de la demostración, en niveles educativos tanto escolares como universitarios. Los autores destacan como asuntos de interés: la argumentación matemática, el tipo de razonamiento que caracteriza a la disciplina matemática, el paso de la experimentación matemática a la demostración y los tipos de demostraciones que hacen los estudiantes en diversos niveles educativos, entre otros.

En Colombia, bajo la influencia de renovaciones curriculares nacionales e internacionales, los investigadores colombianos en el campo de la Educación Matemática han hecho un esfuerzo porque la demostración sea considerada en los planes curriculares. Producto de este esfuerzo es la inclusión del proceso de demostrar en los Estándares Curriculares de Matemáticas (2003), en donde se destaca que la demostración hace parte el razonamiento matemático y es fundamental para el desarrollo de competencias matemáticas, en especial en geometría.

Algunos grupos de investigación preocupados por este campo de estudio comenzaron a desarrollar trabajos investigativos para aportar al diseño curricular. Es el caso de la línea de investigación Argumentación y Prueba del grupo *Æ•G*.

Como educadores matemáticos comprendemos que la demostración es importante en nuestra disciplina y por lo tanto, esencial en el aprendizaje de la misma. Sin embargo, a partir del acercamiento informal que realizamos, observamos que a pesar de que la demostración està incluida en el currículo colombiano, particularmente en el nivel secundario en donde se esperaría que fuera enseñada esta aún no es frecuente en las aulas de clase, no es incluida por los profesores de matemáticas en sus preparaciones o en caso de que lo hagan este esfuerzo no ha dado los resultados esperados.

Esta problemática va mucho más allá del nivel secundario. Camargo et al. (2008) realizan una innovación curricular a nivel universitario de un curso de geometría plana de estudiantes en formación para profesores en matemáticas, en donde se busca impulsar una educación matemática diferente a la que se ofrece tradicionalmente, que involucra la exploración de problemas, la comunicación de ideas matematicas y la validación de las mismas, donde se plasme lo planteado en los Lineamientos Curriculares en Matemáticas con relación al desarrollo del sentido espacial y el razomaniento geométrico.

No podemos decir que esta problemática sea de tipo local. Estudios como los desarrollados por Mariotti (2006) han señalado que muchas de las dificultades que presentan los estudiantes de secundaria y universidad para aprender a demostrar están relacionadas con las pocas experiencias previas con esta práctica. La autora destaca que una forma de minimizar ésta problemática es introducir a los estudiantes en la práctica de demostrar desde el nivel de educación primaria.

Basados en los planteamientos hechos en los Estándares Curriculares de Matemáticas (2003) referentes al trabajo matemático, creemos que en la educación primaria la demostración en geometría proporciona a los estudiantes oportunidades para que ellos le den sentido a las matemáticas. Esto se logra al reconocerlas como una actividad humana condicionada por la cultura, y resultado acumulado y reorganizado por comunidades profesionales, en un cuerpo de conocimientos (definiciones, axiomas y teoremas).

Asì mismo, compartimos el planteamiento expresado en los Estándares Curriculares de Matemáticas (2003) sobre el papel que juega la resolución de situaciones problema como contexto en donde las matemáticas cobran sentido para los estudiantes. En este sentido, creemos que si los estudiantes se enfrentan a las situaciones problema de geometría plana euclidiana, a partir del uso de un software de geometría dinámica, van ganando una actitud inquisitiva, aprenden a desplegar estrategias de solución, encuentran soluciones y se interesan por verificarlas e interpretar lo razonable de las mismas.

En síntesis, con este trabajo de grado aportamos a la discusión en Educación Matemática sobre la enseñanza y el aprendizaje de la demostración, y esperamos suscitar reflexiones entre los educadores sobre la importancia que tiene la actividad de demostrar en los estudiantes. Consideramos también, que hacemos un aporte en la generación de alternativas para pensar en un currículo escolar de matemáticas que promueva la actividad demostrativa en los estudiantes de primaria.

1.3. OBJETIVOS DEL ESTUDIO

1.3.1. OBJETIVO GENERAL

- Analizar las posibilidades de promover el aprendizaje de la demostración en cuarto de primaria cuando los estudiantes trabajan en un ambiente de resolución de problemas en geometría, con el apoyo de un programa de geometría dinámica.

1.3.2. OBJETIVOS ESPECÍFICOS

- Diseñar y poner en funcionamiento una trayectoria de enseñanza que, centrada en la actividad demostrativa, favorezca el aprendizaje de conceptos básicos de geometría escolar.
- Promover normas sociomatemáticas en una clase tendiente a favorecer la actividad demostrativa en la educación primaria.
- Caracterizar el papel del profesor cuando intenta guiar a estudiantes de grado cuarto para introducirlos a la actividad demostrativa a partir de una secuencia de problemas.
- Caracterizar el apoyo que brinda el programa de geometría dinámica GeoGebraPrim en la actividad demostrativa de estudiantes de cuarto de primaria.

1.4. REVISIÓN DE LA LITERATURA

Para tener una visión general de los elementos teóricos y metodológicos sobre la investigación acerca de la enseñanza y del aprendizaje de la demostración en primaria hicimos una consulta bibliográfica de la cual presentamos siete estudios representativos, los cuales se corresponden al desarrollo de nuestro trabajo. Tratan sobre demostración, actividad demostrativa, normas sociomatemáticas y andamiaje.

1.4.1. PROOF AND PROVING IN SCHOOL MATHEMATICS (*STYLIANIDES,* 2007)

En este artículo, Stylianides (2007) propone una conceptualización de la demostración para la educación primaria, ligada a la idea de argumentación matemática y muestra una herramienta analítica para examinar algunas de las funciones que desempeña el profesor al orientar la actividad de demostrar en este nivel. El estudio hace parte del proyecto Enseñanza y Aprendizaje de las Matemáticas, de la Universidad de Michigan y se desarrolla con estudiantes de grado tercero de primaria de una escuela pública de los Estados Unidos. Las clases son conducidas por la profesora Debora Ball, quien organiza el plan curricular de las clases en unidades que abordan temas generales de las matemáticas, como son la teoría de números y la probabilidad. Las clases usualmente inician con la exploración de un problema, ya sea individualmente o por parejas; luego, los estudiantes lo discuten en grupos y finalizan con una socialización colectiva.

El autor se basa en tres episodios de clase para analizar el papel que desempeña el profesor al promover la actividad de demostrar. Estos episodios son videograbados y transcritos, para luego, ser triangulados con fragmentos de los cuadernos de los estudiantes, que revelan el trabajo desarrollado en el transcurso de las clases. Por ejemplo, en el tercer episodio se pide a los niños discutir si el número de expresiones numéricas para representar 10 es infinita. Esto debido a que en una clase anterior un estudiante había propuesto esa conjetura. Los estudiantes construyen lo que para el autor es una demostración (ver marco referencial), utilizando tácitamente la expresión algebraica $x - x + 10 = 10$, pero carecen de los recursos del lenguaje para representar su demostración en términos generales. El maestro ayuda a sus alumnos a ampliar sus modos de representar las ideas para argumentar a favor de la conjetura mediante la introducción de notación algebraica, aumentando su capacidad para producir una demostración.

En cada uno de los episodios se examinan dos tipos de argumentos: el primero es el argumento base que marca un punto de partida de la intervención instruccional; este depende de los recursos matemáticos que son aceptados y conocidos por los estudiantes, o que son accesibles para ellos. El segundo argumento, llamado argumento posterior, se considera como una demostración cuando cumple con las tres características de un argumento matemático: usa un conjunto de hechos aceptados por el grupo, usa formas de razonamiento aceptadas y usa formas comunicativas aceptadas. El análisis mencionado va acompañado de una mirada a las acciones que realiza el docente para intentar ayudar a sus estudiantes a mejorar los argumentos para el desarrollo de una demostración.

Stylianides (2007) sugiere una función activa de los profesores en la gestión de la actividad de demostrar en sus estudiantes. Esta función implica que hagan juicios sobre los argumentos que pueden calificarse como demostraciones. Así, pueden ayudar a que los estudiantes tengan un repertorio que les provee elementos para decidir cuándo un argumento es considerado como una demostración y cuándo no. El autor manifiesta que existen varios factores que pueden influir en la habilidad de los profesores para impulsar con éxito la actividad de demostrar de sus estudiantes. Dentro de estos factores se encuentra el conocimiento acerca la demostración. Si un profesor no es capaz de demostrar, probablemente va a considerar los argumentos empíricos de los estudiantes como demostraciones, en vez de considerar argumentos basados en hechos matemáticos aceptados por la comunidad.

Este artículo, nos brinda el marco de referencia para definir la demostración en la escuela primaria y nos sugiere indicadores para identificar si los estudiantes están demostrando. También nos da herramientas para describir la gestión que debe desempeñar el profesor en la clase para lograr un ambiente propicio que favorezca en los estudiantes la producción de demostraciones. En la presente investigación centramos la atención en las normas sociomatemáticas y el andamiaje que la profesora puso en juego, asuntos que definimos en el marco de referencia.

1.4.2. ASSIGNING MATHEMATICS TASKS VERSUS PROVIDING PRE-FABRICATED MATHEMATICS IN ORDER TO SUPPORT LEARNING TO PROVE. (*PERRY, CAMARGO, SAMPER, MOLINA Y ECHEVERRY*; 2009).

En este artículo Perry et al. (2009) presentan algunas tareas para introducir a estudiantes de Licenciatura en Matemáticas de la Universidad Pedagógica Nacional en la actividad demostrativa en geometría. Desde su punto de vista, al ingresar a primer semestre los estudiantes no cuentan con una experiencia escolar que les permita argumentar matemáticamente y su aproximación a los objetos geométricos es informal. Esto impide que puedan validar matemáticamente las afirmaciones que surgen del trabajo en geometría.

Antes de presentar las tareas, los autores traen a colación el constructo actividad demostrativa que han venido desarrollando en el grupo de investigación Aprendizaje y Enseñanza de la Geometría, *Æ•G*, de la Universidad Pedagógica Nacional. Este constructo se refiere a una práctica que incluye dos procesos: la conjeturación y la justificación. El proceso de conjeturación consiste en explorar una situación problema para encontrar regularidades que conlleven a la formulación de una conjetura; para ello los estudiantes pueden apoyarse en un programa de geometría dinámica. Luego, dicha conjetura pasa a un proceso de justificación, en el que se buscan y organizan los argumentos que pueden apoyar su validez. Dichos argumentos se basan en un sistema teórico que ha sido construido colectivamente por la comunidad de la clase.

Perry et al. (2009) mencionan que para propiciar un ambiente que favorezca la actividad demostrativa en las clases de geometría, estas deben ser organizadas de manera que los estudiantes puedan trabajar individual, grupal y colectivamente. Insisten en la necesidad de establecer algunas normas que regulen las construcciones hechas en programas de geometría dinámica, de manera tal, que sean un apoyo para estructurar una demostración que valide la conjetura y que cumpla con los estándares establecidos. También enfatizan en que los profesores deben jugar un rol activo para conducir a los estudiantes a la demostración, por lo que deben dominar los contenidos matemáticos para apoyar a los estudiantes cuando requieren estructurar una demostración.

Con respecto a las tareas mencionadas por los autores, presentamos aquellas que consideramos están relacionadas con nuestro trabajo de grado: establecer dentro de un conjunto específico de postulados, definiciones o teoremas, cuáles permiten determinar la validez de una proposición dada; enunciar, de manera condicional, la proposición que va ser sujeta a justificación; decidir si una proposición que es producto de una exploración puede ser sujeta a una demostración; determinar cuáles de las proposiciones demostradas por la comunidad de la clase pueden hacer parte de un sistema teórico.

Consideramos que este artículo nos proporciona una definición de actividad demostrativa que permite introducir a los estudiantes de cuarto de primaria a la práctica de demostrar. Sin embargo, como la definición atiende al desarrollo conceptual de estudiantes universitarios, creemos que es necesario adecuar dicha definición a las edades de los niños, y al desarrollo conceptual en matemáticas que se espera en este grado. Para ello, en el marco referencial del presente trabajo de grado, relacionamos la definición propuesta por *Æ•G* (2009) con la definición de demostración propuesta por Stylianides (2007).

Por otra parte, algunas de las tareas que proponen Perry et. al. (2009) fueron tomadas como punto de referencia, y fueron ajustadas al nivel de estudiantes de cuarto de primaria para realizar el diseño de la secuencia instruccional del presente trabajo de grado (ver diseño metodológico).

1.4.3. THE ETHNOGRAPHY OF ARGUMENTATION (*KRUMMHEUER*, 1993)

En este artículo Krummheuer (1993) analiza las interacciones que se dan en una clase de matemáticas de educación primaria para determinar la génesis social de la argumentación. Para ello, se apoya en una metodología etnográfica que le permite describir detalladamente los procesos que se dan en el aula y así discutir varias teorías concernientes a la argumentación. El autor considera la argumentación como un fenómeno social, en el que los individuos cooperan verbalizando sus intenciones e interpretaciones para mostrar racionalmente la validez de éstas.

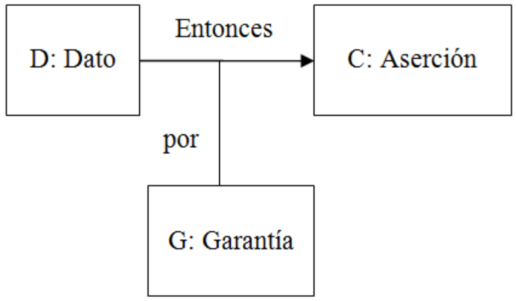
El estudio se caracteriza por estar centrado en el razonamiento matemático de los estudiantes al darles la oportunidad de discutir, explicar, justificar y ejemplificar las soluciones que dan a los problemas que les presenta el profesor. Las clases son organizadas en tres fases:

introducción, trabajo en pequeños grupos y discusión en gran grupo. En la primera fase, el profesor y los estudiantes discuten el tipo de tareas que van a abordar durante la sesión. En la segunda fase; los niños trabajan en grupos de dos o tres y explican al interior de cada grupo las formas en que resuelven los problemas propuestos; el profesor pasa por los grupos para hacer retroalimentaciones y los estudiantes llegan a acuerdos con respecto a sus soluciones. En la tercera fase, toda la clase discute las soluciones dadas por cada grupo; el profesor organiza esta discusión y sintetiza los acuerdos a los que los estudiantes llegan para dar solución a los problemas.

Respecto a la argumentación, Krummheuer (1993) menciona que tradicionalmente este proceso es conducido por una persona que confronta a una audiencia para intentar convencerla de aceptar una afirmación. Sin embargo, él señala que en las aproximaciones actuales, la argumentación ya no es un monólogo y es vista de manera colectiva. En este sentido, varias personas pueden entrar en controversia con relación a una afirmación y, para superarla, deben llevar a cabo un proceso de negociación que les permita alcanzar acuerdos. El autor define un argumento como el proceso que sigue un grupo de individuos para superar la controversia y validar la afirmación. Piensa en que este proceso puede ser reconstruido analíticamente al ser producto de la interacción social. Para ello, se apoya en Toulmin (1969, citado en Krummheuer, 1993), quien presenta un modelo que permite reconstruir la lógica de dichos argumentos. Considera que para entender el modelo de Toulmin es necesario distinguir entre dos tipos de argumentaciones: las "analíticas" y las "substanciales". Las primeras son consideradas como deductivas, en tanto, siguen el patrón *modus ponendo ponens*. Las segundas son informativas, en tanto, presentan de manera natural cómo se presentan los antecedentes, relaciones, explicaciones y justificaciones para apoyar la validez de una afirmación.

Krummheuer (1993) considera que los argumentos substanciales son los más usadas por los niños de la educación primaria en prácticas de justificación en matemáticas. Como algunos de ellos pueden transformarse en argumentos analíticos, esto permite que los niños puedan usar un sistema teórico para validar sus afirmaciones, a la vez que su conocimiento evolucione a un estatus empírico a uno teórico. Los dos modelos se presentan en la Tabla 1:

Modelo analítico	Modelo substancial



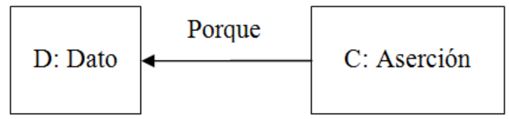


TABLA 1

El modelo analítico de Krummheuer consta de una afirmación C (Aserción) que es soportada a partir de una afirmación D (Datos) que son aquellas premisas que fundamentan la conclusión. Los datos deben ser encadenados a través de garantías, que actúan como “licencias de inferencia” que permiten llegar a la conclusión. Los datos que se ponen en el argumento dependen de las garantías que vayan a ser usadas.

El modelo substancial consta de una afirmación C (Aserción) que se liga a los D (Datos) a través del razonamiento informal que se hace para intentar justificarla, algunas veces los datos se extraen a través de una garantía que puede ser explicita o no.

Krummheuer (1993) menciona que para reconstruir un argumento sustancial de forma analítica, deben examinarse las proposiciones que hacen parte de este y definir cuáles son los datos, y las garantías que permitirían establecer un paso de inferencia para llegar a una conclusión aunque los estudiantes no expresen el argumento deductivamente.

Finalmente Krummheuer (1993) enfatiza en que los estudiantes aprenden a elaborar argumentos analíticos cuando el profesor los ayuda a usar el lenguaje apropiado que cumpla con los estándares de la comunidad matemática de referencia.

En nuestro trabajo adoptamos los esquemas propuestos por Krummheuer y Toulmin (1969, citado en Krummheuer, 1993) porque consideramos que los estudiantes de cuarto de primaria estructuran inicialmente argumentos substanciales basados en la experiencia que van adquiriendo al resolver colectivamente los problemas de geometría y, con ayuda del profesor, pueden transformarlos en argumentos analíticos aproximándose a la demostración. Así mismo, consideramos que los argumentos sustanciales están relacionados con los argumentos base que propone Stylianides (2007) y que los argumentos analíticos son los mismos argumentos posteriores denominados por Stylianides (2007), que le dan el estatus de demostración a un argumento.

1.4.4. SOCIOMATHEMATICAL NORMS, ARGUMENTATION, AND AUTONOMY IN MATHEMATICS (*YACKEL Y COBB*, 1996)

En este artículo Yackel y Cobb (1996) presentan algunas normas sociomatemáticas que favorecen la argumentación matemática en una clase con estudiantes de segundo de primaria. Estas son entendidas como aquellas que regulan la actividad matemática de la clase al estar permeadas por las creencias y valores acerca de las matemáticas.

La clase de matemáticas que se reporta en este artículo se caracteriza por permitir que los estudiantes resuelvan conjuntamente los problemas propuestos por el profesor y por darles oportunidades para que expliquen y justifiquen las soluciones que dan a dichos problemas. Algunas de las normas sociomatemáticas que se establecen son: aceptar que hay diferentes estrategias para resolver un problema, admitir diferentes soluciones al problema, explicar matemáticamente por qué una solución dada es diferente de otra y hacer juicios de valor sobre las explicaciones matemáticas que hacen otros compañeros de la clase.

Los autores consideran que las normas sociomatemáticas propuestas posibilitan que los estudiantes ganen autonomía en su aprendizaje al favorecer una disposición positiva para el trabajo en matemáticas; además, permiten que profesores y estudiantes ganen comprensión sobre aquello que puede considerarse como una explicación matemática aceptable o como una justificación matemática.

Por otra parte, Yackel y Cobb (1996) enfatizan en que el rol del profesor es fundamental para que los estudiantes interioricen las normas sociomatemáticas que les permiten desarrollar una actividad matemática legítima en el aula de clase. Sugieren que los profesores centren su tarea en preguntas, para que dichas normas vivan en la cultura de la clase.

Por lo anterior, para introducir a los estudiantes a la práctica de demostrar es necesario que los estudiantes compartan un sistema de normas sociomatemáticas con las cuales puedan establecer lo que se considera como una demostración matemáticamente aceptable. En el nivel de la escuela primaria es necesario que a los estudiantes ganen claridad sobre lo que se considera como argumento matemático, y que se les enseñe a establecer qué argumentos son más matemáticos que otros.

Para efectos de este trabajo de grado, consideramos que este artículo nos da elementos para impulsar algunas normas sociomatemáticas que permiten introducir a los estudiantes de cuarto de primaria a la práctica de demostrar. Las normas que pretendimos establecer están relacionadas con los tres componentes de la definición de demostración sugerida por Stylianides (2007). Es así como éstas deben propiciar que los estudiantes usen los hechos geométricos aceptados y conocidos por la comunidad de la clase, usen un lenguaje matemático apropiado que les permita comunicarse para argumentar y usen formas de razonamiento válidas para determinar cuándo una argumentación puede considerarse como demostración y cuándo no.

1.4.5. JUSTIFICATION IN THE MATHEMATICS CLASSROOM: A STUDY OF PROSPECTIVE ELEMENTARY TEACHERS. (*SIMON Y BLUME* 1996).

En este artículo Simon y Blume (1996) presentan un estudio que se enfoca en la justificación matemática[3] en el contexto de un curso de matemáticas para futuros profesores de primaria. Los análisis que realizan los autores proporcionan una mirada detallada de cómo establecer una norma sociomatemática para promover la justificación en la clase de matemáticas. El estudio corresponde a un Experimento de Enseñanza que se desarrolla en un curso de matemáticas que

[3]Como se verá en el marco de referencia, el término justificación matemática es próximo a la demostración en el sentido expuesto por Stylianides (2007).

tenía como propósito impulsar la comprensión de la estructura multiplicativa. El curso se dividió en dos unidades: la primera, buscaba comprender el área de un rectángulo como una relación multiplicativa entre los lados. La segunda, buscaba que los estudiantes pudieran modelar matemáticamente situaciones de la vida real, distinguiendo aquellas que se podían representar aditivamente de las que se pueden representar multiplicativamente.

En ese estudio se entiende la justificación, para nosotros demostración, como un proceso tanto social como cognitivo, en el que una comunidad tiene como propósito determinar la validez matemática de ideas para desarrollar comprensión. En este sentido, la justificación matemática tiende a ir de lo inductivo a lo deductivo. Los autores destacan que el trabajo del profesor consiste en promover el establecimiento de una comunidad matemática en el aula en que la validación surja de la problematización de las ideas matemáticas de manera que los estudiantes tiendan a ver la necesidad de hacer demostraciones deductivas de tipo explicativo.

El estudio que se presenta en este artículo nos permite analizar cómo deben instaurarse las normas sociomatemáticas en el aula de clase, por ejemplo, recordando permanentemente la norma para que viva en la cultura de la clase. Además nos da herramientas para entender cómo funciona un Experimento de Enseñanza y cómo deben reportarse los análisis en este tipo de metodología.

1.4.6. PROOF AND PROVING IN MATHEMATICS EDUCATION (*MARIOTTI*, 2006)

En este capítulo Mariotti (2006) presenta algunas discusiones que han sido llevadas a cabo por el grupo internacional de Psicología de la Educación Matemática (PME), acerca de aspectos relacionados con la demostración en la escuela, las dificultades que tienen los estudiantes para aprender a demostrar, y la enseñanza de la demostración. Con respecto a la enseñanza de la demostración, menciona que varias investigaciones en educación matemática (Bartolini Bussi, 1998; Arsac, 1992; Maher & Martino, 1996; Yackel & Cobb, 1996) han destacado la importancia de introducir a los estudiantes a la práctica de demostrar en niveles tempranos de escolaridad. Hace referencia a que algunas de ellas como la de Yackel & Cobb (1996) se han centrado en establecer una comunidad matemática de la clase.

Mariotti (2006) destaca que para que los estudiantes se introduzcan en una perspectiva teórica que les permita elaborar demostraciones, se hace necesario propiciar en el aula de clase una "cultura del por qué" (Jahnke, 2005; citado en Mariotti 2006) para describir y explicar los fenómenos que se experimentan a través de la resolución de problemas.

Con respecto a las demostraciones que se desarrollan con el apoyo de programas de geometría dinámica, Mariotti (2006) considera que estos programas permiten vincular la argumentación informal con la demostración, en tanto la capacidad gráfica de estos programas estimula la exploración matemática y se hace más fácil plantear y justificar conjeturas (Hanna 2000, citado en Mariotti; 2006). Menciona que la herramienta para arrastrar objetos que tienen los programas de geometría dinámica contribuye a tener evidencias perceptivas sobre la certeza de las afirmaciones que se hacen en el trabajo en geometría, y permite que los estudiantes accedan a la geometría teórica porque cualquier figura que se realice está relacionada con un teorema matemático.

La autora subraya que una afirmación puede ser reconstruida teniendo en cuenta el proceso de construcción de una figura, lo que permite que los estudiantes puedan realizar conjeturas, que surjan de las propiedades que se utilizan en la construcción y las propiedades que se destacan como invariantes al arrastrar elementos de la figura. Sin embargo, menciona que para que los estudiantes puedan producir enunciados condicionales es necesario que el profesor proponga problemas abiertos que puedan ser abordados por los estudiantes.

Este artículo nos proporciona elementos para el diseño e implementación de la secuencia instruccional, en tanto nos ayuda a identificar la importancia y el papel que tienen los programas de geometría dinámica para que los estudiantes, a partir de la exploración, enuncien conjeturas que puedan ser sujetas a justificación matemática.

1.4.7. SCAFFOLDING PRACTICES THAT ENHANCE MATHEMATICS LEARNING. (*ANGHILERI, J*, 2006)

En este artículo Anghileri (2006) presenta una clasificación del andamiaje que puede realizar un profesor, enfocada al aprendizaje de las matemáticas, entendido como todas aquellas formas que usa el profesor para apoyar el aprendizaje matemático de los estudiantes. El documento inicia caracterizando algunos enfoques de enseñanza relacionados con la idea de andamiaje. Luego, la autora se basa en la categorización propuesta por Roggoff (1995; citada en Anghileri, 2006) de los niveles de andamiaje en la educación en general para presentar su propuesta. Anghileri ilustra su categorización a través de ejemplos que se enfocan en el aprendizaje de la geometría y la aritmética en niveles tempranos de escolaridad.

Anghileri (2006) propone tres niveles de andamiaje. El primero, hace referencia a la planeación que hace el profesor para apoyar el aprendizaje de las matemáticas. El profesor toma decisiones sobre aquellos artefactos que van a ser usados en la clase, sobre la distribución de los estudiantes en grupos o en parejas, de tal manera que puedan colaborarse mutuamente en la resolución de problemas específicos y establece una secuencia de actividades para el aprendizaje de un concepto matemático. En este nivel no se presenta ninguna interacción directa entre el profesor y sus estudiantes.

En el segundo nivel**,** involucra las interacciones entre el profesor y los estudiantes. Clasifica esta interacción en: explicación, revisión y reestructuración, que resultan del intento del profesor por centrar a sus estudiantes en aspectos importantes de las matemáticas que están siendo consideradas. Algunas de las acciones que desarrolla el profesor son: mostrar ejemplos, explicar ideas matemáticas, parafrasear y preguntar el porqué de algunas acciones. Por otra parte, la autora menciona que las intervenciones del docente deben posibilitar el desarrollo de las ideas matemáticas de los estudiantes, animándolos a describir lo que han comprendido de las matemáticas vinculadas en la actividad.

En el tercer nivel de andamiaje, el profesor crea oportunidades para el desarrollo conceptual de sus estudiantes. Para ello, propicia un clima en el que se comprendan los conceptos matemáticos a través del trabajo colaborativo. Así mismo, busca que sus estudiantes usen herramientas de representación para desarrollar su pensamiento matemático. Además, debe generar que los estudiantes puedan construir un discurso conceptual. Esto quiere decir que el profesor debe llevar las explicaciones y justificaciones a un nivel reflexivo, en donde los estudiantes se den cuenta cómo deben presentar los discursos matemáticamente. En este sentido, el docente guía aquellas formas de presentación del discurso que son más valoradas en matemáticas, de manera que los niños sean conscientes de las formas de razonamiento matemático.

Cabe mencionar que la autora, basada en el planteamiento de Van Oers (2000; citado en Anghileri, 2006), considera que actualmente las matemáticas son una actividad de representación constructiva, en donde la simbolización juega un papel decisivo. En este sentido, el andamiaje del profesor consiste en interpretar la "notación de los estudiantes" y las soluciones que estos dan a los problemas, para buscar estrategias con las cuales apoyar a los niños para que gradualmente vayan pasando de un lenguaje informal a un lenguaje cada vez más formal. Esto quiere decir que el lenguaje informal que ellos usan para evocar imágenes familiares de los conceptos matemáticos, va convirtiéndose en lenguaje matemático que requiere el uso de símbolos, para que puedan expresar, comunicar y reflejar su actividad matemática.

Para efectos del presente trabajo de grado, nosotros enfocamos el análisis en los niveles dos y tres de andamiaje. Específicamente en acciones como parafrasear los esfuerzos que hacen los estudiantes para argumentar, enfocar a los estudiantes en los hechos geométricos necesarios para justificar una conjetura e insistir en el buen uso del lenguaje para comunicar las ideas (ver definiciones en el marco referencia). Estas acciones de andamiaje están muy ligadas con las tres características que determinan que una argumentación tenga el estatus de demostración (Stylianides, 2007). Así mismo, creemos que el andamiaje que hace el profesor también está relacionado con las normas sociomatemáticas que se promueven en el aula de clase, en tanto, estas han de permitirle a los estudiantes ir refinando el lenguaje que usan en el discurso matemático.

1.4.8. APORTES DE LOS ANTECEDENTES

A continuación presentamos los aportes que nos dejan cada uno de los estudios que revisamos para la realización de este trabajo:

Estudio	Aportes
Stylianides (2007)	Este artículo nos provee el marco de referencia para definir la demostración en la escuela primaria y nos sugiere indicadores para identificar si los estudiantes están demostrando. También nos da herramientas para describir la gestión que debe desempeñar el profesor en la clase para lograr un ambiente propicio que favorezca en los estudiantes la producción de demostraciones. En la presente investigación centramos la atención en las normas sociomatemáticas y el andamiaje que la profesora puso en juego, asuntos que definimos en el marco de referencia.
Perry, Camargo, Samper, Molina y Echeverry (2009)	Algunas de las tareas que proponen los autores fueron tomadas como punto de referencia y ajustadas al nivel de estudiantes de cuarto de primaria para realizar el diseño de la secuencia instruccional del presente trabajo de grado (ver diseño metodológico).
Krummheuer (1993)	En nuestro trabajo adoptamos los esquemas propuestos por Krummheuer y Toulmin (1969, citado en Krummheuer, 1993) porque consideramos que los estudiantes de cuarto de primaria pueden estructurar inicialmente argumentos substanciales basados en la experiencia que van adquiriendo al resolver colectivamente los problemas de geometría, y con ayuda del profesor, pueden transformarlos en argumentos analíticos aproximándose a la demostración. Así mismo, consideramos que los argumentos sustanciales están relacionados con los argumentos base que propone Stylianides (2007) y que los argumentos analíticos son los mismos argumentos posteriores propuestos por Stylianides (2007), que le dan el estatus de demostración a un argumento.
Yackel y Cobb (1996)	Para efectos de este trabajo consideramos que este artículo nos da elementos para impulsar algunas normas sociomatemáticas que

	permiten introducir a los estudiantes de cuarto de primaria a la práctica de demostrar. Las normas que pretendimos establecer están relacionadas con los tres componentes de la definición de demostración sugerida por Stylianides (2007). Es así como estas deben propiciar que los estudiantes usen los hechos geométricos aceptados y conocidos por la comunidad de la clase, usen un lenguaje matemático apropiado que les permita comunicarse para argumentar y usen formas de razonamiento válidas para determinar cuándo una argumentación puede considerarse como demostración y cuándo no.
Simon y Blume (1996)	El estudio que se presenta en éste artículo nos permite analizar cómo deben instaurarse las normas sociomatemáticas en el aula de clase, por ejemplo, recordando permanentemente la norma para que viva en la cultura de la clase. Además nos da herramientas para entender cómo funciona un Experimento de Enseñanza y cómo deben reportarse los análisis en este tipo de metodología.
Mariotti (2006)	Este artículo nos proporciona elementos para el diseño e implementación de la secuencia instruccional, en tanto nos ayuda a identificar la importancia que tienen los programas de geometría dinámica para que los estudiantes, a partir de la exploración, enuncien conjeturas que puedan ser sujetas a justificación matemática.
Anghileri (2006)	Para efectos del presente trabajo de grado, nosotros enfocamos el análisis en los niveles dos y tres de andamiaje. Específicamente en acciones como parafrasear los esfuerzos que hacen los estudiantes para argumentar, enfocar a los estudiantes en los hechos geométricos necesarios para justificar una conjetura e insistir en el buen uso del lenguaje para comunicar las ideas (ver definiciones en el marco referencia). Estas acciones de andamiaje están muy

	ligadas con las tres características que determinan que una argumentación tenga el estatus de demostración (Stylianides, 2007). Así mismo, creemos que el andamiaje que hace el profesor también está relacionado con las normas sociomatemáticas que se promueven en el aula de clase, en tanto estas han de permitirle a los estudiantes ir refinando el lenguaje que usan en el discurso matemático.

TABLA 2

2. MARCO DE REFERENCIA

A partir de nuestro propósito de pretender que estudiantes de cuarto de primaria aprendan a demostrar, propusimos un Experimento de Enseñanza que conjuga: la actividad demostrativa, las normas sociomatemáticas tendientes a introducir a los niños en formas argumentativas en matemáticas, el andamiaje instruccional enfocado a identificar propiedades para validar los hechos geométricos y el uso de la geometría dinámica para descubrir, verificar y conjeturar propiedades. Estos son los cuatro elementos que componen el marco de referencia de nuestro trabajo de grado y que vamos a definir en este capítulo.

En la figura 6 sugerimos una manera de relacionar los conceptos. De arriba hacia abajo encontramos un embudo que representa el ambiente de geometría dinámica donde se sitúan los tres componentes de nuestro marco de referencia (normas sociomatemáticas, actividad demostrativa y andamiaje). El embudo pretende representar una máquina "constituida" por la geometría dinámica enriquecida por los tres componentes mencionados.Cada uno de ellos está relacionado entre sí y la articulación entre los tres y la geometría dinámica posibilita que se "produzca" la demostración. Nos referimos a este producto, como referencia las ideas expuestas por Stylianides (2007) y las mostramos en los recuadros; con flechas dirigidas a la demostración, queremos indicar que estos elementos la nutren. Dentro del elemento "formas de razonamiento válido", destacamos que cuando los estudiantes son introducidos por primera vez a la demostración no necesariamente elaboran argumentos deductivos. Como lo señala Toulmin (1969; citado en Krummheuer, 1993) a sus edades los estudiantes elaboran argumentos substanciales, algunos de los cuales pueden convertirse en argumentos analíticos.

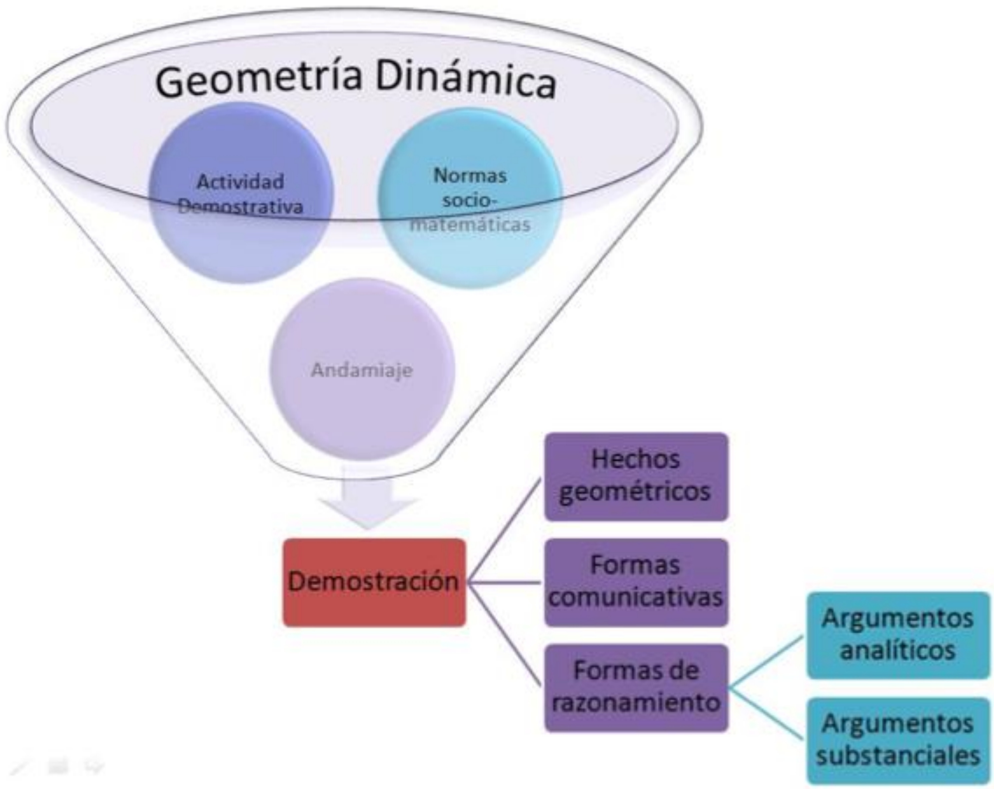


IMAGEN 1

A continuación presentamos la conceptualización de los cuatro elementos:

2.1. ACTIVIDAD DEMOSTRATIVA EN CUARTO DE PRIMARIA

Para el desarrollo de este trabajo de grado, tomamos las ideas de actividad demostrativa propuestas por el grupo de investigación Aprendizaje y Enseñanza de la Geometría Æ•G. (2009), e introducimos a dicha definición unas variantes acordes al desarrollo conceptual de los niños de cuarto de primaria.

El grupo Æ•G. de la Universidad Pedagógica Nacional considera que:

> "La actividad demostrativa es una práctica asociada a la resolución de problemas, que involucra dos procesos: la conjeturación y la justificación. Estos se relacionan porque se busca justificar aquello que se conjetura. La conjeturación incluye detectar un invariante mediante la

exploración, para verificarlo y expresarlo como solución a un problema, la justificación busca la producción de un argumento que valide dicha conjetura basados en un sistema teórico local" (Perry et al., 2009).

Las variantes que introducimos a esta definición se refieren a incluir a lo que se justifica los procedimientos que realizan los niños al construir las figuras en las que exploran, sumada a la justificación de las conjeturas que formulan. En el marco de la actividad demostrativa:

- Entendemos por explorar, llevar a cabo un conjunto de acciones en el programa de geometría dinámica para encontrar invariantes de una figura. Por ejemplo: con acciones como enriquecer una figura con una construcción auxiliar, arrastrar objetos de la figura, tomar medidas de segmentos o ángulos, identificar el doble estatus de los objetos y explicitar una propiedad de un objeto geométrico.
- Entendemos por conjeturar, enunciar una propiedad que se induce de la exploración de una figura, que puede o no ser explícitamente formulada como una condicional y de la que se tienen evidencias para afirmar que es cierta.
- Entendemos por verificar, el proceso en el cuál los niños se cercioran de la conjetura formulada, generalmente al arrastrar elementos de la construcción de la figura.
- Entendemos por justificar, elaborar argumentos substanciales o analíticos, con la ayuda del profesor. En la siguiente sección explicamos cada uno de ellos.

2.2. LA DEMOSTRACIÓN EN CUARTO DE PRIMARIA

Partimos de la conceptualización propuesta por Stylianides (2007) de demostración, para decir que un niño en cuarto de primaria demuestra cuando establece un argumento matemático, una secuencia conectada de afirmaciones a favor o en contra de un procedimiento o enunciado matemático, en el que las afirmaciones provienen de un sistema de conocimiento en el que los estudiantes:

- Usan hechos geométricos que son aceptados por la comunidad de clase. Esto quiere decir que los estudiantes los conocen, los aceptan y recurren a ellos cuando los necesitan. En nuestra investigación, estos hechos se refieren a: afirmaciones sobre propiedades de elementos de la circunferencia, triángulos y cuadriláteros en geometría plana euclidiana. Las afirmaciones son usadas para justificar conjeturas o el uso de una construcción para obtener una figura con una propiedad. Por ejemplo:

> HG 6: Si un cuadrilátero tiene diagonales congruentes y se bisecan entonces es un rectángulo.
>
> HG7. Si el punto medio de un lado de un triángulo equidista de los tres vértices entonces el triángulo es rectángulo.

- Usan formas comunicativas, es decir, términos, notación, lenguaje simbólico y expresiones aceptadas y al alcance de la comunidad de clase. En este trabajo específicamente nos vamos a referir a la manera como los estudiantes nombran objetos de la geometría plana tales como: puntos, segmentos, circunferencias, ángulos, triángulos, cuadriláteros, congruencias y bisecar. Por ejemplo, en lugar de "raya" o "línea" deben referirse a segmento; en vez de decir "segmentos iguales" ellos deben referirse a "segmentos congruentes".
- Usan formas de razonamiento que son válidas, conocidas y al alcance de la comunidad de clase. En nuestra trayectoria, el razonamiento se refiere al uso de enunciados condicionales de la forma si... entonces…, en los que los estudiantes usen hechos geométricos, en situaciones específicas, para justificar procedimientos o afirmaciones y eventualmente se refieran a un hecho geométrico general como garantía de lo que afirman. En ese sentido, se espera que los estudiantes elaboren argumentos analíticos en lugar de sustanciales. Un ejemplo de este último tipo es el siguiente:

> Sofía: Ahí podemos concluir el 7 [por el hecho geométrico 7]… que si tres segmentos congruentes comparten tienen un extremo en común y si ese extremo es el punto medio de una circunferencia [sic de un segmento] podemos decir que es recto [sic, rectángulo]. Y ¿por qué decimos que son congruentes?, porque son los mismos radios de una circunferencia.

Para analizar en profundidad el razonamiento válido adoptamos la propuesta de Krummheuer (1993) quien sugiere identificar en los argumentos que hacen los estudiantes, un cuerpo de información que van a ser los datos, la conclusión (o aserción) a la que llegan y la garantía que les permite obtener la conclusión a partir de los datos. El argumento substancial generalmente se identifica por la forma:

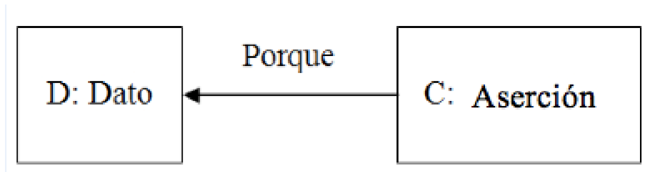


FIGURA 6

Y el argumento analítico se modela con el esquema propuesto por Toulmín (1969, citado en Krummheuer, 1993) así:

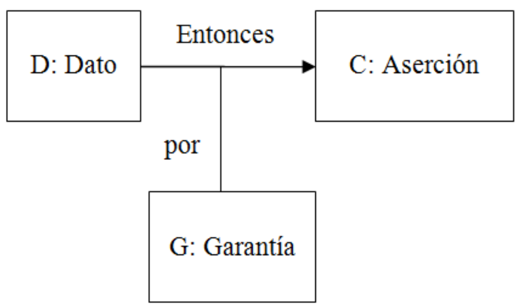


FIGURA 7

Para efectos de los análisis de los datos realizado en este trabajo, entendemos que los niños logran un razonamiento válido cuando, con ayuda del profesor, logran transformar un argumento substancial en argumento analítico. Esto quiere decir, que el argumento es respaldado por una garantía que hace parte del sistema teórico local (es decir, el conjunto de hechos conocidos y aceptados por la comunidad de la clase). Dicha garantía puede estar implícita, dadas las edades de los niños, pero las interacciones con el profesor deben llevar a explicitarla. Aunque, no siempre es posible que los niños enuncien los argumentos como condicionales, o enuncien textualmente los hechos geométricos tal cual como fueron institucionalizados, esto no quiere decir que sus argumentos analíticos pierdan validez. En otras palabras, consideramos que los niños formulan un razonamiento válido cuando: toman las propiedades que identifican a partir de las construcciones que hacen en un programa de geometría dinámica y los convierten en datos, proponen una afirmación a manera de aserción y usan uno o más hechos geométricos como garantía para llegar a la aserción, es decir, a la propiedad que han descubierto o quieren justificar.

A continuación se muestra un ejemplo de razonamiento válido, es decir, analítico que es tomado de los datos de investigación:

$\overline{BO}, \overline{AO}, \overline{CO}$, son radios de la circunferencia con centro en O $\xrightarrow{\text{entonces}}$ $\overline{BO} \equiv \overline{AO} \equiv \overline{DO}$

por

Si dos radios pertenecen a una circunferencia entonces son congruentes. (HG 1)

FIGURA 8

2.3. NORMAS SOCIOMATEMÁTICAS QUE FAVORECEN LA ACTIVIDAD DEMOSTRATIVA EN CUARTO DE PRIMARIA

Tomamos como referencia la conceptualización de Yackel y Cobb (1996), referida al uso de normas sociomatemáticas para instaurar un ambiente de clase que propicie la justificación en la clase de matemáticas. Particularmente, entendemos las normas sociomatemáticas como aquellas normas que regulan la discusión que se genera cuando los estudiantes interactúan al resolver problemas de geometría plana euclidiana, con un programa de geometría dinámica. La discusión impulsa la argumentación matemática y por ende la demostración.

Para este trabajo de grado, las normas que se establecieron en el aula de clase para introducir a los niños de cuarto de primaria a la práctica de demostrar son: hablar en el lenguaje matemático acordado, justificar las afirmaciones o las construcciones, explicitar los que se va a justificar y buscar varias maneras de justificar.

Para instaurar estas normas en la cultura de la clase, la profesora además de declararlas tuvo que recordárselas a los niños continuamente cuando ellos resolvían los problemas; así mismo, la profesora les formuló a los estudiantes algunas preguntas que pusieran en juego dichas normas sociomatemáticas.

A continuación definimos las normas sociomatemáticas en las que nos centramos en esta investigación:

Se justifica con los hechos geométricos aceptados. Esta norma se refiere a que en la clase solo se validan hechos geométricos cuando los niños usan otros que se han institucionalizado.

Se habla en el lenguaje matemático acordado. Se refiere a que no se acepta nombrar los objetos geométricos usando un lenguaje informal, los niños deben nombrar los objetos geométricos con un lenguaje matemático, ya sea al hacer las construcciones de las figuras con el programa de geometría dinámica o cuando se refieren a los objetos geométricos para justificar. Así mismo, deben enunciar de la mejor manera posible los hechos geométricos con los que van a justificar.

Se usan varios caminos para justificar. Se refiere a que luego de garantizar la validez de una afirmación con uno o más hechos geométricos conocidos y aceptados por la comunidad, los niños deben buscar otras maneras para justificarla usando otros hechos geométricos.

Se explicita lo que se debe justificar. Se refiere a que los estudiantes deben enunciar la afirmación que van a justificar con el objetivo de enfocar su atención a los hechos geométricos necesarios para validarla. Por lo tanto, ellos deben enunciar los datos que se tienen y la aserción a la que se debe llegar.

2.4. ANDAMIAJE INSTRUCCIONAL PARA FAVORECER LA ACTIVIDAD DEMOSTRATIVA EN CUARTO DE PRIMARIA

Nos basamos en las ideas expuestas por Anghileri (2006) sobre andamiaje. Lo entendemos como todos aquellos esfuerzos que hace el profesor para apoyar el aprendizaje de la demostración en sus estudiantes, esfuerzos que van posibilitando gradualmente que los estudiantes ganen autonomía para argumentar matemáticamente los procedimientos y las afirmaciones matemáticas que hacen en la clase. Pensamos que este andamiaje es importante en la medida en que logra enfocar a los estudiantes en los hechos, el lenguaje y los razonamientos acordados para justificar sus construcciones y las afirmaciones que ellos hacen.

De acuerdo a la clasificación propuesta por Anghileri (2006) en nuestro trabajo de grado nos centramos en los niveles de andamiaje dos y tres. En este sentido, entendemos que el andamiaje en el nivel dos se centra en acciones como mostrar ejemplos, explicar las ideas matemáticas, parafrasear y en generar una cultura de los por qué. Algunas de las acciones que realiza el profesor en esta fase son:

> *Impulsar la exploración dando pistas para actuar sobre la figura*: Enfocar a los estudiantes en los datos que deben ser usados en la exploración o en el argumento.
>
> *Promover la identificación de la doble naturaleza de algunos objetos geométricos:* Formular preguntas para que los estudiantes puedan identificar que un objeto geométrico pueda tener dos o más "caras". Por ejemplo, un segmento puede ser a la vez radio de una circunferencia y lado de un triángulo.
>
> *Promover la verificación de invariantespor arrastre*. Estimular el uso de la función arrastre para verificar que una conjetura es cierta o que una construcción genera una figura con cierta propiedad.

Por otra parte, entendemos el nivel tres de andamiaje como los esfuerzos que hace el profesor por generar un ambiente que propicie que los estudiantes puedan evolucionar conceptualmente, lo que implica que sus argumentaciones sean presentadas de acuerdo a los estándares matemáticos. Algunas de las acciones que realiza el profesor en esta fase son:

> *Promover el uso de formas de razonamiento válidas.* Impulsar a los estudiantes a usar una forma de razonamiento válido (argumento analítico). Para ello, formula preguntas que permitan distinguir los datos, la garantía y la aserción del argumento. Además impulsa a los estudiantes a justificar las construcciones con los hechos geométricos conocidos.

Dirigir la atención a la propiedad que se necesita en la justificación. Formular algunas preguntas que incitan a los estudiantes a nombrar los hechos geométricos conocidos que puedan ser usados como garantías de los argumentos.

Impulsar la explicitación de hechos geométricos: Impulsar a los estudiantes para que enuncien hechos geométricos que sirven como garantía en una justificación, enfatizando en propiedades centrales del hecho. Para ello, parafrasea el antecedente del hecho geométrico formulado por los estudiantes.

2.5. GEOGEBRAPRIM COMO RECURSO PARA INCENTIVAR LA ACTIVIDAD DEMOSTRATIVA EN CUARTO DE PRIMARIA

El programa de geometría dinámica que usamos para introducir a los niños a la práctica de demostrar es GeoGebraPrim. Este programa resulta ser motivante para los estudiantes de cuarto de primaria, dado que les permite construir figuras, manipularlas como si fueran concretas, animarlas, ponerles color, etc. Así se enfrentan a problemas de la geometría plana euclidiana en un entorno más amigable que el lápiz y el papel. Este programa proporciona recursos matemáticos con los cuales los niños pueden construir modelos que representen, en un mismo ejemplo, infinitas soluciones a un problema. Además, los estudiantes mediante la función arrastre pueden detectar invariantes de una figura y al arrastrar puntos libres de los cuales depende la construcción.

Consideramos que este programa permite que los niños puedan pasar del mundo experimental al mundo teórico de la geometría, en tanto, pueden buscar dentro de los hechos geométricos institucionalizados por la comunidad de la clase aquellos que les sirvan como garantías para validar las construcciones que han realizado. Así mismo, pueden verificar las conjeturas que surgen de las construcciones que han realizado, verificando mediante el arrastre que si la construcción posee determinadas características, estas se mantienen con el arrastre.

GeoGebraPrim posibilita un trabajo colaborativo, debido a que al realizar las construcciones de manera grupal, cada uno de los estudiantes aporta su saber relacionado con la geometría como su saber con respecto al manejo del programa, lo cual provoca que cada uno de los miembros del grupo se sienta comprometido con las tareas que se les proponen.

El programa contribuye al uso de formas apropiadas para comunicarse, en tanto que por lo general, cuando los estudiantes trabajan en el computador uno de ellos es quién se encarga de realizar la construcción en la pantalla de GeoGebraPrim la construcción, lo cual hace que los demás integrantes del grupo deban comunicar sus ideas matemáticas de la mejor forma posible para así poder obtener la construcción.

La característica más notable de GeoGebraPrim es la barra de herramientas. En GeoGebraPrim todas las herramientas se encuentran en el mismo menú, lo que permite mayor facilidad para su acceso. Cada ícono es mostrado de manera independiente, lo que permite que los estudiantes puedan visualizar y manipular las herramientas que necesitan más fácilmente, para la realización de una construcción geométrica. Así mismo, el profesor o los estudiantes tienen la posibilidad de confeccionar paulatinamente su propia barra de herramientas, a medida en que éstas se van incorporando en el marco conceptual trabajado. Adicionalmente, los puntos y las líneas tienen mayor grosor de las que se hacen con Geogebra, para facilitar la manipulación por parte de niños.

3. DISEÑO METODOLÓGICO

3.1. PERSPECTIVA METODOLÓGICA

La metodología de investigación del presente trabajo de grado se aproxima a un Experimento de Enseñanza que busca analizar cómo se impulsa la iniciación a la actividad demostrativa de estudiantes de cuarto de primaria en la clase de geometría y el papel que juega el profesor en el establecimiento de unas normas sociomatemáticas que promuevan dicha actividad.

Adoptamos la modalidad de Experimento de Enseñanza, porque, como señala Mariotti (2006) los estudiantes de niveles tempranos pueden ser introducidos a aspectos teóricos de la geometría plana y a formas usuales de trabajar matemáticas cuando trabajan en el marco de estos experimentos. Por esta vía, la producción que hacen los estudiantes de argumentos que inicialmente pueden ser substanciales puede dar paso a la producción de argumentos analíticos. Así mismo, otros experimentos de enseñanza, como el llevado a cabo por Simon y Blume (1996), han mostrado que los estudiantes son capaces de construir argumentos para justificar las soluciones que dan a los problemas que se les proponen, si el profesor promueve normas sociomatemáticas que estimulen la producción de argumentos matemáticos en la clase.

Cobb et al. (2002) mencionan que los experimentos de enseñanza buscan generar y evaluar teorías de aprendizaje. El aprendizaje investigado emerge de la interacción social entre los estudiantes y el profesor cuando trabajan mancomunadamente. Los experimentos son tanto empíricos como teóricos, ya que buscan provocar formas de aprendizaje mediante un diseño fundamentado que involucra ciclos de preparación y puesta en práctica, que dirige tanto el experimento como la misma clase; Mc Clain (2005) enfatiza que inicialmente es importante conjeturar cuál será la secuencia de tareas con la que se llevará la instrucción. Esta secuencia está sujeta a modificaciones y se basa en la revisión de los análisis que se hacen a diario de la actividad matemática de los estudiantes.

3.2. FASES DEL EXPERIMENTO DE ENSEÑANZA

De acuerdo con Mc Clain (2005), el diseño metodológico de un Experimento de Enseñanza está caracterizado por ser conducido en tres frases:

Diseño y planeación: La primera fase consiste en desarrollar una o varias trayectorias hipotéticas de aprendizaje que guían el desarrollo de una secuencia instruccional de tareas. De acuerdo con el autor, la revisión de la literatura en Educación Matemática, puede ayudar a establecer dichas hipótesis.

Enseñanza experimental: La segunda fase se caracteriza por el desarrollo de una trayectoria de enseñanza a partir de la secuencia de tareas que se han planeado. En nuestro caso la secuencia de tareas se propuso a grupo de estudiantes de grado cuarto de primaria, para favorece la actividad demostrativa relacionada con propiedades de triángulos y cuadriláteros. En esta segunda fase se realizan miniciclos diarios de revisión para ajustar la propuesta a los sucesos observados.

Análisis retrospectivo: La tercera fase, hace referencia a la posterior evaluación de la producción de los estudiantes, para analizar el aprendizaje logrado.

En las siguientes secciones de este capítulo presentamos las principales acciones y decisiones metodológicas correspondientes a cada fase.

3.2.1. DISEÑO Y PLANEACIÓN

En esta fase, los autores del trabajo, junto con la asesora del mismo, diseñamos una trayectoria de enseñanza que favoreciera la actividad demostrativa de los estudiantes de cuarto de primaria, partiendo de unas hipótesis sobre cómo veíamos el aprendizaje de la demostración en este nivel. Para ello, nos fundamentamos en la revisión de la literatura. A continuación presentamos las hipótesis de la investigación.

A continuación se presenta las trayectorias hipotéticas de aprendizaje y de enseñanza que se planearon.

3.2.1.1. HIPÓTESIS DE LA INVESTIGACIÓN

Después de revisar la literatura en Educación Matemática (Ver sección 1.4) consideramos que estudiantes de primaria se pueden aproximar a la actividad demostrativa si:

- Tienen la posibilidad de abordar problemas en un entorno de geometría dinámica y se les brindan oportunidades para que ellos descubran hechos geométricos y justifiquen algunos de ellos.
- El profesor promueve un ambiente de argumentación matemática en el aula de clase, a través del establecimiento de normas sociomatemáticas como las expuestas en el capítulo anterior, que hagan que los estudiantes sean cada vez más capaces de convertir argumentos sustanciales en analíticos.
- El profesor promueve una interacción con los estudiantes, que los impulse a formular razonamientos válidos en matemáticas, a identificar tanto los antecedentes como los consecuentes de las afirmaciones y a determinar los garantes que permiten conectar un dato con una conclusión.

Con base en la anterior hipótesis, decidimos que un problema apropiado para introducir a los niños a la actividad demostrativa en cuarto de primaria es:

> *Construir una circunferencia de centro O, un diámetro* $\overline{AB}$, *un punto D en ella y el triángulo ABD. Arrastrar el vértice D e investigar una propiedad del triángulo. Explicar por qué el triángulo tiene esa propiedad.*

Consideramos que los estudiantes serían capaces de descubrir y conjeturar que el triángulo *ABD* tiene un ángulo recto en *D*. Pero para poder justificar la conjetura[4] requerirían de hechos geométricos cuyos consecuentes se refirieran a un ángulo recto.

Imaginamos una trayectoria hipotética de aprendizaje, que describiría el recorrido que podrían seguir los estudiantes para justificar la conjetura que surge en el problema principal. Esto nos llevó a articular los problemas de tal forma que a partir de su resolución, surgieran un conjunto de hechos geométricos y definiciones que constituirían lo que denominamos un sistema teórico local. Entendemos por sistema teórico local una organización de enunciados o afirmaciones, algunas de las cuales se asumen como ciertas (a manera de postulado) y otras que se justifican deductivamente a partir de las anteriores (a manera de teorema). Aquellas que se tomarían como ciertas estarían soportadas en el trabajo llevado a cabo en GeoGebraPrim.

3.2.1.2. TRAYECTORIA HIPÓTETICA DE APRENDIZAJE

A continuación presentamos el sistema teórico local y las expectativas que teníamos acerca la trayectoria hipotética de aprendizaje que consideramos que los estudiantes podrían seguir para validar la conjetura que surge del problema principal. Consideramos que podrían seguir dos caminos que describimos a continuación; para la presentación de tales trayectorias nos valemos de la estructura ternaria de Toulmin (1969, citado en Krummheuer, 1993):

[4] Esta conjetura la denominaremos conjetura principal.

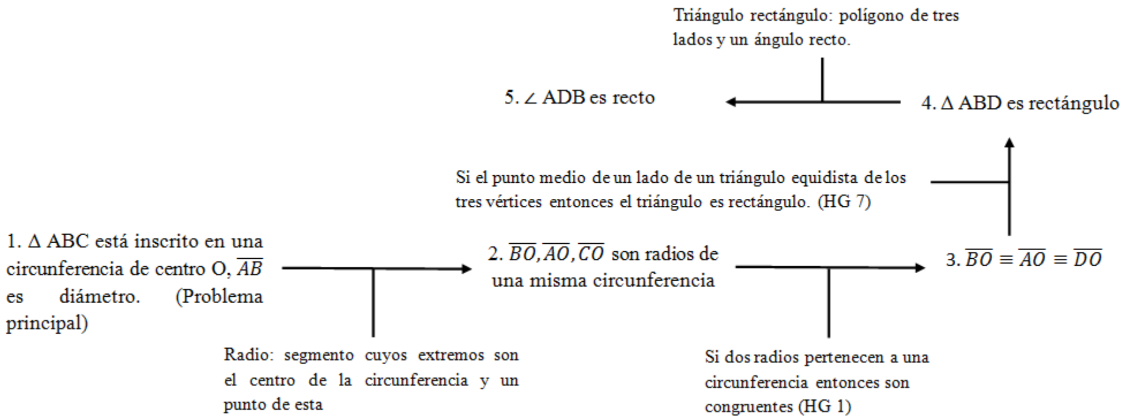


FIGURA 9. UNA PRIMERA VÍA DE ENFRENTAR LA JUSTIFICACIÓN.

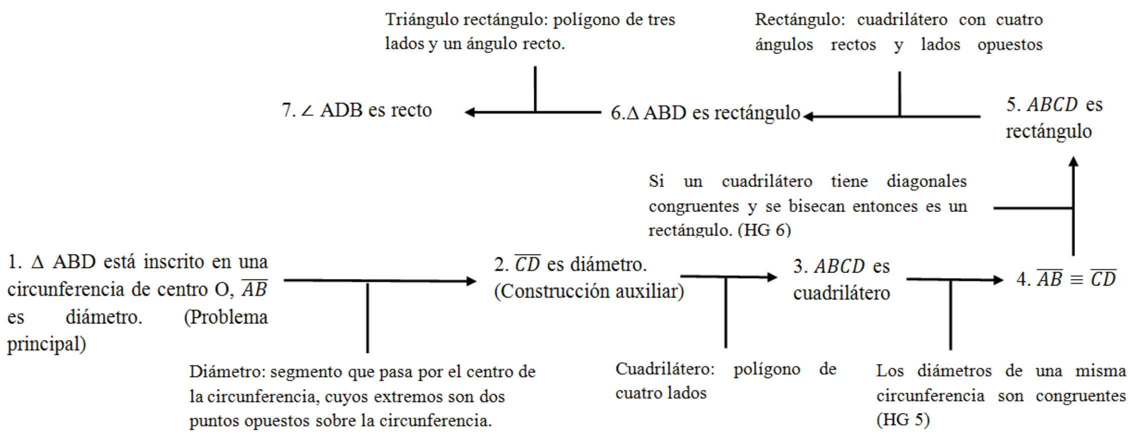


FIGURA 10. OTRA VÍA PARA JUSTIFICAR LA CONJETURA.

Por una vía, los niños podrían partir del ΔABD inscrito en una circunferencia con centro O y diámetro $\overline{AB}$, descubrir que el ángulo B es recto y concluir que $\overline{BO}, \overline{AO}, \overline{DO}$ son radios de una misma circunferencia, haciendo uso de la definición de radio. Teniendo esto, ellos podrían afirmar que $\overline{BO} \equiv \overline{AO} \equiv \overline{DO}$, por el hecho geométrico uno, dando paso a afirmar que el ΔABD es rectángulo por el hecho geométrico siete, para finalmente justificar que el ángulo D es recto utilizando la definición de triángulo rectángulo. (Figura 10) (En la tabla 3 se listan los hechos geométricos)

Por otra vía, podrían a partir del ΔABD inscrito en una circunferencia con centro O y diámetro $\overline{AB}$, podrían construir el diámetro $\overline{CD}$ y concluir que $\overline{AB} \equiv \overline{CD}$ utilizando el hecho geométrico cinco , y concluir que $\overline{BO} \equiv \overline{AO} \equiv \overline{CO} \equiv \overline{DO}$, justificándolo por el hecho geométrico uno. Teniendo ellos esto, podrían afirmar que $\overline{AB}, \overline{CD}$ se bisecan, haciendo uso de la definición de bisecar, y el hecho de que el cuadrilátero *ADBC* es rectángulo, dando paso a afirmar que el ΔABD es rectángulo, por la definición de triángulo rectángulo, para finalmente concluir que el ángulo *D* es recto. (Figura 10).

En el diseño de la trayectoria de enseñanza consideramos también la necesidad de acordar ciertas normas sociomatemáticas de la clase que permitirían a los estudiantes irse aproximando a la actividad demostrativa. En el diseño inicial no contemplamos acciones de andamiaje específicas. Estas fueron surgiendo en los análisis que se realizaban con posterioridad a las sesiones.

3.2.1.3. TRAYECTORIA HIPÓTETICA DE ENSEÑANZA

Con base en la trayectoria hipotética de aprendizaje, identificamos un conjunto de hechos geométricos que consideramos que los estudiantes podrían usar para validar la conjetura principal. En la tabla 3 los presentamos escritos como figuran en un texto de geometría, aunque algunos no fueron enunciados a los niños de esa manera, para facilitar su comprensión. Nos referimos a hechos geométricos porque, como señala Stylianides (2007), es preferible no diferenciar entre postulados y teoremas, ya que la distinción puede provocar cierto grado de dificultad en los niños. Sin embargo, si las condiciones de interacción entre los niños y el profesor se dan para hacer tal distinción, sería importante ir los introduciendo en este lenguaje.

DEFINICIONES Y HECHOS GEOMETRICOS TRABAJADOS	
DEFINICIONES	HECHOS GEOMÉTRICOS
Radio: Segmento cuyos extremos son el centro de la circunferencia y un punto de esta.	HG 1: Si dos radios pertenecen a una circunferencia entonces son congruentes.
Punto medio de un segmento: punto que divide al segmento en dos segmentos congruentes.	HG 2: Si dos circunferencias son congruentes entonces sus radios son congruentes.

Diámetro: segmento que pasa por el centro de la circunferencia y cuyos extremos son dos puntos de esta.	HG 3: Si dos radios de dos circunferencias son congruentes entonces las circunferencias son congruentes.
Congruencia de segmentos: dos segmentos son congruentes si miden lo mismo.	HG 4: Si un cuadrilátero es un rectángulo entonces sus diagonales son congruentes y se bisecan.
Rectángulo: Cuadrilátero con cuatro ángulos rectos y lados opuestos congruentes.	HG 5: Si dos diámetros pertenecen a una circunferencia entonces son congruentes.
Triángulo equilátero: triángulo con todos sus lados congruentes.	HG 6: Si un cuadrilátero tiene diagonales congruentes y se bisecan entonces es un rectángulo.
Bisecar: dividir en dos partes congruentes.	HG7. Si el punto medio de un lado de un triángulo equidista de los tres vértices entonces el triángulo es rectángulo.

TABLA 3

A continuación, presentamos un posible encadenamiento deductivo generado por la secuencia de problemas (ver figura 11) de los hechos geométricos, que consideramos podría constituir un sistema teórico local que nos guiaría en la constitución de la secuencia de problemas que se presenta en la tabla 3.

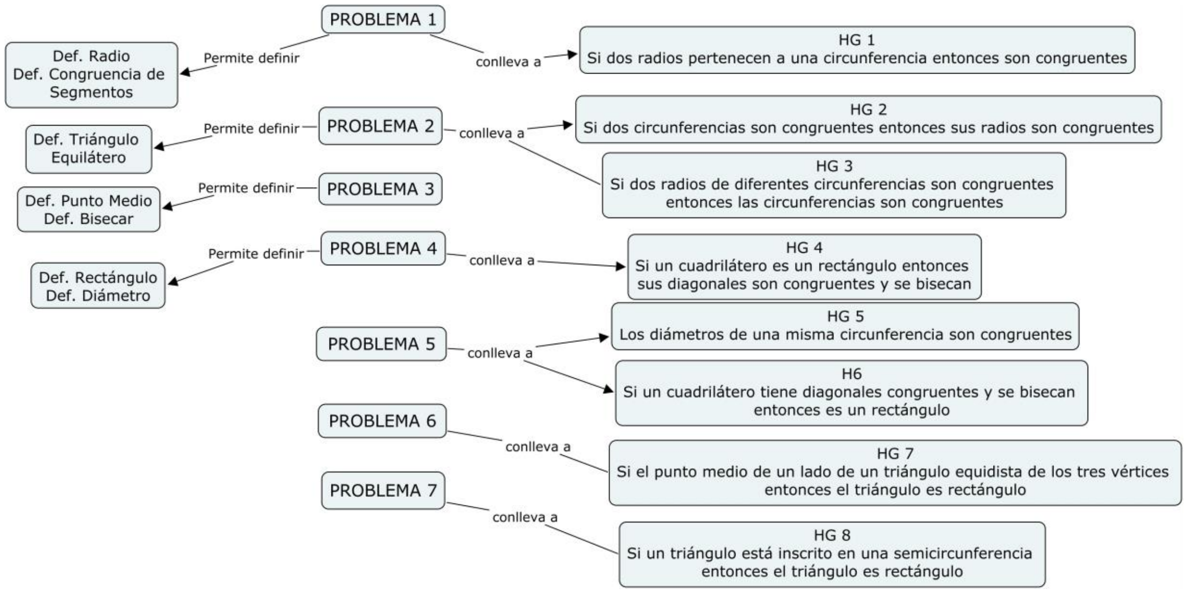


FIGURA 11. ARTICULACIÓN DE LOS PROBLEMAS CON LAS DEFINICIONES Y HECHOS GEOMÉTRICOS

	PROBLEMA	HECHOS GEOMETRICOS-DEFINICIONES
1	Construir una circunferencia cualquiera, tomar puntos sobre la circunferencia, unir los puntos con el centro mediante segmentos y determinar qué características tienen los segmentos.	Definición de radio. Definición congruencia de segmentos. HG 1
2	Construir un triángulo con los tres lados de igual medida.	Definición de triángulo equilátero. HG 2 HG3
3	Dado un segmento, construir su punto medio.	Definición de punto medio de un segmento. Definición de bisecar.
4	Construir un cuadrilátero y sus diagonales. Arrastrar los vértices hasta que parezca rectángulo. Describir propiedades de las diagonales.	Definición de rectángulo. HG 4
5	Construir $\overline{AB}$, hallar su punto medio C. Construir $\overline{DF}$ tal que $\overline{AB} \equiv \overline{DF}$ y C sea punto medio de $\overline{DF}$, trazar el cuadrilátero $AFBD$. Descubrir qué cuadrilátero puede ser.	Definición de diámetro. HG 5 HG 6

6	Construir un triángulo *ABC*, usar la herramienta punto medio para construir el punto medio D de $\overline{AB}$, trazar $\overline{DC}$. Investigar en qué triángulos pasa que $\overline{AD}$ sea congruente con $\overline{CD}$ y con $\overline{BD}$.	HG 7
7	Construir una circunferencia de centro *O*, un diámetro $\overline{AB}$, un punto *D* en ella y trazar el triángulo *ABD*. Arrastrar el vértice *D* e investigar una propiedad del triángulo. Explicar por qué el triángulo tiene esa propiedad.	HG 8

TABLA 4

3.2.2. ENSEÑANZA EXPERIMENTAL

El Experimento de Enseñanza se realizó con estudiantes de grado cuarto de primaria de un colegio privado de Bogotá[5] que pertenecen a los estratos socioeconómicos 1, 2 y 3. La experiencia se llevó a cabo en el segundo semestre del año 2013. Para este tiempo, los niños no habían tenido ninguna experiencia con el programa GeoGebraPrim. Los cursos 401, 402 y 403 en donde se desarrolló el estudio, contaban con 30 estudiantes cada uno. Las clases de geometría se desarrollaron en una sesión por semana de aproximadamente 100 minutos en cada curso. El colegio disponía de una sala de informática con 20 computadores que tenían instalado el programa de GeoGebraPrim. Allí se desarrollaron las sesiones del experimento. En total, se llevaron a cabo 8 sesiones en cada curso empleando una por cada problema, excepto en el problema seis en donde se utilizaron dos sesiones. Andrea Escobar, autora de este trabajo era la profesora de los 3 cursos y dirigió las clases durante el experimento.

Usualmente, al inicio de la clase la profesora recordaba las normas sociomatemáticas y seguidamente, realizaba la socialización de los resultados del problema propuesto en la clase anterior. Para ello, pedía a los niños que escogieran voluntariamente dos representantes del grupo para que presentaran los resultados que habían obtenido. Los niños realizaban las

[5]Este colegio es distinto a los colegios en donde se llevó a cabo la indagación de nuestro problema de investigación pues, por razones ajenas a nuestra voluntad, Andrea Escobar tuvo que cambiar de ubicación laboral en el curso de la investigación.

construcciones correspondientes y explicaban cada paso realizado. Durante la socialización, la mayoría de los estudiantes participaba discutiendo las soluciones.

Después de la socialización, se proponía un nuevo problema. Para resolverlo, los estudiantes se organizaban en grupos de dos a cinco niños; los grupos se mantuvieron a lo largo del Experimento de Enseñanza. En cada clase, la profesora les entregaba a cada grupo una hoja que contenía el enunciado del problema. Les recordaba constantemente las normas sociomatemáticas que regularían la actividad matemática en el aula y les daba la posibilidad de llamarla si requerían ayuda con respecto al problema o con respecto al uso del programa GeoGebraPrim.

Una vez resuelto el problema, cada grupo debía escribir su reporte del procedimiento, los resultados y las justificaciones usando la herramienta de "texto" del programa GeoGebraPrim. De esta forma, tenían la posibilidad de organizar las ideas matemáticas que iban a comunicar en la socialización.

Con respecto a los hechos geométricos y las definiciones, estas se iban institucionalizando en la clase a medida en que se llegaba a un acuerdo, a partir de las soluciones que se presentaban. Los hechos iban siendo consignados por los estudiantes en sus cuadernos. También,los niños llevaban un archivo en el computador en donde guardaban el trabajo que iban desarrollando en cada una de las clases. Los hechos geométricos podían ser consultados libremente cuando los necesitaran. Adicionalmente, se realizó una cartelera en donde se iban incluyendo los hechos geométricos o definiciones, para que todos los estudiantes los tuvieran en cuenta.

Con el fin de recopilar información para el análisis, se usaron 3 cámaras de video y 3 grabadoras de audio para registrar el trabajo realizado por 3 grupos, en torno al problema principal[6]. El grupo de investigación se reunió una vez por semana para ajustar el diseño de la trayectoria de enseñanza con base en la narración de sucesos de las clases que hacía la profesora Andrea

---

[6] Se previó que Fredy Alejandro Barbosa actuaría como observador no participante, pero la institución no permitió tal acompañamiento.

Escobar. Ella manifestaba preocupaciones sobre asuntos como: la formulación apropiada de preguntas, cómo responder a los niños a algunos cuestionamientos que hacían, los distintos caminos que seguían de los problemas propuestos, qué tipo de construcciones hacían al abordar dichos problemas y cómo habían justificado los hechos geométricos que iban encontrando. También se discutían las normas sociomatemáticas que se debían poner en juego, para instaurar un clima que propiciará la justificación matemática. En las reuniones que tenían como objetivo ir adecuando el diseño del Experimento de Enseñanza surgió la necesidad de prestar atención al andamiaje que estaba haciendo la profesora.

3.2.3. ANÁLISIS RETROSPECTIVO

Para llevar a cabo el análisis retrospectivo se realizó la transcripción de los videos de las sesiones del trabajo correspondientes al problema principal (problema 7). En total se transcribieron 9 archivos de video. En la transcripción se procuró detallar al máximo la actividad de los estudiantes para que la lectura fuera comprensible a cualquier lector. Para ello, se añadieron comentarios adicionales entre paréntesis cuadrados.

Seguidamente, cada integrante del equipo de investigación, individualmente, hizo la lectura inicial de las transcripciones, dividiendo cada transcripción en episodios con sentido completo, de acuerdo a la actividad demostrativa que se estaba realizando. Por ejemplo, una construcción, una exploración, la formulación de una conjetura o la búsqueda de la justificación. Luego, el grupo de investigación se reunió para compartir las propuestas de fragmentación de la transcripción en episodios y escoger la que más se ajustaba para el análisis. Una vez construidos los episodios, se eliminó información irrelevante, es decir, aquellas intervenciones que no eran concernientes a la solución del problema. En total, se configuraron 17 episodios.

El análisis de los episodios se realizó teniendo en cuenta la actividad demostrativa, las normas sociomatemáticas, el andamiaje que la impulsaba y los argumentos dados por los niños. Primero, los analizaba cada uno de los miembros del grupo de investigación individualmente y luego se analizaban grupalmente. Cada integrante del grupo de investigación señalaba aquellos fragmentos de episodio que considerara relevantes con base en las categorías de análisis que se fueron configurando a partir de la revisión de la literatura y de los análisis y las principales interpretaciones sobre la actividad de los niños; y luego, grupalmente, se buscaba llegar a un acuerdo sobre los mismos.

A continuación,(tablas 4, 5 y 6) se muestra la herramienta analítica que usamos para la realización de los análisis. En estas tablas se encuentran las tres categorías previstas en el diseño (actividad demostrativa, normas sociomatemáticas y andamiaje) que surgió de la revisión de los datos. Para cada categoría presentamos los indicadores que emergieron, los cuales se encuentran codificados para efecto de los análisis.

ACTIVIDAD DEMOSTRATIVA	
[UHG-J]	Usa hechos geométricos aceptados para justificar las propiedades
[UHG-E]	Usa hechos geométricos aceptados para explicar las construcciones
[UFV]	Usa formas de razonamiento válidas y conocidas
[UFV*]	Intento fallido al usar formas de razonamiento válidas y conocidas
[UFC]	Usa formas comunicativas aceptadas
[EBI-EF]	Explora en busca de invariantes con construcción auxiliar.
[EBI-AF]	Explora en busca de invariantes arrastrando objetos de la figura.[
[EBI – TM]	Explora en búsqueda de invariantes tomando medidas de segmentos o ángulos
[IDE]	Identifica doble estatus de objetos geométricos
[DI]	Detecta invariante
[EPG]	Explicita una propiedad de un objeto geométrico
[EPG*]	Explicita erróneamente una propiedad de un objeto geométrico
[FC]	Formula conjetura
[VI-A]	Verifica invariante por arrastre

TABLA 5

NORMAS SOCIOMATEMATICAS	
[JHG]	Se justifica con los hechos geométricos aceptados
[HLM]	Se habla en el lenguaje matemático acordado
[VFJ]	Se usan varios caminos para justificar
[EJ]	Se explicita lo que se debe justificar

TABLA 6

ANDAMIAJE	
[A-UFV]	Promueve el uso de formas de razonamiento válidas
[A-UFV*]	Intento fallido al promover el uso de formas de razonamiento válidas
[A-EBI]	Impulsar la exploración dando pistas para actuar sobre la figura
[A-UHG]	Dirige la atención a la propiedad que se necesita en la justificación.
[A-IDE]	Promueve la identificación del doble estatus de algunos objetos geométricos
[A-EHG]	Impulsa la explicitación de hechos geométricos
[A-EHG-J]	Impulsa la explicitación de hechos geométricos para justificar
[A-VI-A]	Promueve la verificación de invariantes por arrastre

TABLA 7

4. DESARROLLO DEL ANÁLISIS

A continuación hacemos un breve recuento del trabajo realizado por cada uno de los grupos de donde se obtuvo la información para el análisis retrospectivo.

El grupo SOIG está conformado por Sofía e Ignacio. Ellos realizan la construcción de una circunferencia con centro *O* y diámetro $\overline{AB}$ y ubican el punto *D* sobre esta, arrastran *D* y descubren que el ángulo *D* es recto. Para justificar el hecho trazan $\overline{AO}$, $\overline{DO}$ y $\overline{BO}$, concluyen que el triángulo *ABD* es rectángulo, justificando esa afirmación con el hecho geométrico siete. También mencionan que la congruencia de los segmentos se justifica por el hecho geométrico uno. La profesora les pide buscar otra forma de justificar la conjetura. Sofía e Ignacio realizan una construcción auxiliar, el diámetro $\overline{DC}$ porque Sofia busca construir otro triángulo, como el triángulo *ABD*,en la circunferencia con centro *O*, pero esta vez en la parte inferior de esta; para ello le sugiere a Ignacio poner un punto C en la circunferencia, lo que lleva a Ignacio a proponer que hicieran otro diámetro. Trazan el cuadrilátero *ADBC*, conjeturan que es un rectángulo y validan dicha conjetura a partir del hecho geométrico seis. Por otro lado, Sofía corrobora la conjetura para un caso particular, es decir, cuando el cuadrilátero es un cuadrado. Posteriormente, ayudados por la profesora usan la definición de rectángulo para justificar que el ángulo *D* es recto y llegan a la conclusión de que el triángulo *ABD* es un triángulo rectángulo.

El grupo CRIKALA está conformado por Cristian, Karen y Laura: Los niños hacen la construcción de una circunferencia con centro *O* y diámetro $\overline{AB}$ y ubican el punto *D* sobre esta. Se dan cuenta que el ángulo *D* es recto. Trazan $\overline{DO}$ y exploran con la herramienta "medida" la longitud de los segmentos $\overline{AO}, \overline{DO}$ y $\overline{BO}$, concluyen que son congruentes y lo justifican, con el hecho geométrico uno. La conjetura de que el triángulo *ADB* es rectángulo no la justifican con el hecho geométrico siete, porque Sofía ya había socializado la justificación. Deciden buscar otra manera para justificar la misma conjetura. A partir de la construcción del triángulo *ABD* se dan cuenta que pueden construir el cuadrilátero *ABDC* trazando el diámetro $\overline{DC}$. Cristian mide los ángulos del cuadrilátero, arrastra un vértice de este y conjetura que los segmentos $\overline{AB}$ y $\overline{DC}$ son congruentes. A partir del hecho geométrico cinco, justifica la congruencia. Los niños no logran identificar que $\overline{AB}\ y\ \overline{DC}$, además de ser diámetros de la circunferencia, son diagonales del cuadrilátero. Es así como la profesora interviene impulsando la identificación de la doble naturaleza de estos objetos: son diámetro de la circunferencia y diagonales de un cuadrilátero. Luego de que lo identifican, ella promueve el uso del hecho geométrico seis como garantía para validar que el cuadrilátero es un rectángulo, para así garantizar que el ángulo *D* es recto y por lo tanto, justificar que el triángulo *ABD* es rectángulo.

El grupo DOMA está conformado por Michel, Oscar, Daniel, Orlando y Anderson. Ellos realizan la construcción de una circunferencia con centro *O* y diámetro $\overline{AB}$ y ubican el punto *D* sobre esta. Concluyen, al arrastrar el punto *D*, que el ángulo es recto. Luego, trazan $\overline{AO}, \overline{DO}$ y $\overline{BO}$. La profesora dirige la atención de los niños en los segmentos $\overline{AO}, \overline{DO}$ y $\overline{BO}$ para así validar, a través del hecho geométrico uno, que dichos segmentos son congruentes y los invita a usar el hecho geométrico siete como garantía para validar que el triángulo *ABD* es rectángulo. Los niños no saben cómo usar el hecho geométrico siete, razón por la cual la profesora les ayuda a reconstruir dicho hecho, para que puedan usarlo en la justificación de la conjetura. Posteriormente, trazan otro diámetro, $\overline{DC}$, y visualizan que pueden construir el cuadrilátero *ADBC* y luego lo trazan. La profesora encamina a los estudiantes para que usen el hecho geométrico seis como garantía para validar que el cuadrilátero *ADBC* es rectángulo. Sin embargo, la profesora tiene que hacer un gran esfuerzo para que los niños logren identificar que los segmentos $\overline{AB}$ y $\overline{DC}$ son diámetros de la circunferencia con centro en *O* y a la vez diagonales del cuadrilátero *ADBC*, y así puedan visualizar el hecho geométrico que les sirve como garantía. Luego, la profesora reconstruye dicho hecho geométrico con los estudiantes. Posteriormente, la profesora enfoca la atención de los estudiantes en la definición de rectángulo, de manera que puedan usar dicha definición para justificar que el triángulo *ABD* es rectángulo, usando como garantía que *D* es un ángulo recto. Sin embargo, los estudiantes no alcanzan a establecer dicho argumento.

A continuación presentamos el análisis detallado de los tres grupos SOIG, CRIKALA y DOMA

4.1. ANÁLISIS GRUPO SOIG

4.1.1. EPISODIO 1. SOCIALIZACIÓN DE LOS PASOS DE EXPLORACIÓN PARA HACER LA CONSTRUCCIÓN DEL TRIÁNGULO *ABD*.

Sofía e Ignacio socializan los pasos de exploración que siguieron para la construcción de triángulo *ABD*. Mediante preguntas, la profesora impulsa a los estudiantes a justificar con hechos geométricos las construcciones realizadas. Intenta dirigir la atención de los niños en la propiedad que deben conjeturar, es decir, que el triángulo *ABD* es rectángulo con ángulo recto en *D*.

1	Sofía:	Primero hacemos una circunferencia	UFC HLM
2	Ignacio:	Trazamos un…	
3	Sofía:	Hacemos una circunferencia [con centro en *O*], una semirrecta [Traza la semirrecta[7] *AB* que pasa por *O*] si	

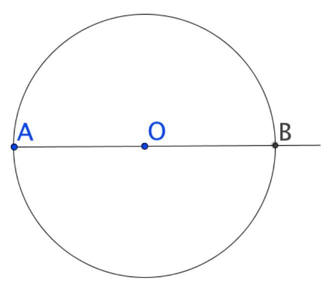


FIGURA 12

4	Ignacio:	Del punto medio [el centro *O*] al…	IDE
5	Sofía:	Del centro a cualquier otro lado de la circunferencia. Utilizamos[la opción] semirrecta porque si utilizamos segmento puedo mover esto [Se refiere a que la cuerda *AB* no sería un diámetro. Ilustramos que quería decir la estudiante en la Figura 13].	UHG-E UFC

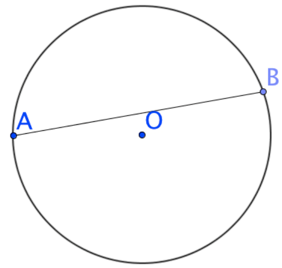


FIGURA 13

6	Ignacio:	Y no se mueve el punto *O*.	
7	Sofía:	Y no pasa por el punto centro.	
8	Profesora:	¿Y qué dice la definición de diámetro?	A-UHG
9	Sofía:	El diámetro es un segmento que pasa por toda la circunferencia	*UHG-E
10	Profesora:	¿Por toda la circunferencia?	A-UHG
11	Sofía:	No. Pasa por el centro de la circunferencia	HLM
12	Ignacio:	y sus extremos son dos puntos opuestos sobre dicha circunferencia	UHG-E
13	Profesora:	Entonces utilizando la herramienta recta o semirrecta podemos garantizar esa definición.	UHG-E
14	Sofía:	Nombramos el punto centro.	HLM
15	Ignacio:	El punto centro lo nombramos *O*.	UFC
16	Sofía:	El diámetro $\overline{AB}$, y borramos la semirrecta. [Ocultan semirrecta]	
17	Ignacio:	Ahora hacemos un punto cualquiera en la circunferencia	
18	Sofía:	y lo llamaremos *D*. Ahora hacemos otros dos circun... otros dos segmentos	
19	Ignacio:	De *B* a *D* y de *D* a *A*	

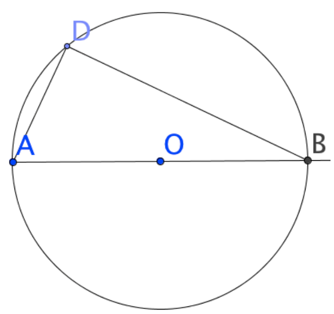


FIGURA 14

20	Sofía:	Ahora vamos hacer una construcción que será un segmento de *O* a *D*. Esto garantiza.	EBI-EF
21	Profesora:	Bueno ¿Qué queremos saber? Ó sea, devuélvete antes de hacer la figura auxiliar, y ¿que figura tenemos?	A-EHG-J
22	Sofía e Ignacio:	Un triángulo	EJ
23	Profesora:	Y ¿ese triángulo es?	A-EHG-J
24	Sofía:	Rectángulo.	EJ FC

TRANSCRIPCIÓN 1

Con respecto al aprendizaje de la demostración, se puede observar que los niños usan formas comunicativas apropiadas para reportar los pasos que siguen para construir el triángulo *ABD* [UFC][1-3, 5, 14-19]. Los niños deciden construir el diámetro $\overline{AB}$ con la herramienta "semirrecta" del programa GeoGebraPrim. Implicitamente, los estudiantes usan la definición de diámetro para explicar la decisión de construir $\overline{AB}$ con la herramienta semirrecta [UHG-E]; esto se debe a que los niños han instrumentalizado la forma de construir un diámetro. Ellos saben que si parten de una semirrecta o una recta que pase por O, les quedará una cuerda vinculada al centro. En [13] la profesora está corroborando esto. Así mismo, Ignacio menciona que *O* es punto medio de *AB*, y Sofía identifica la doble naturaleza del punto *O*, es decir, que es centro de la circunferencia y punto medio del segmento $\overline{AB}$ [IDE] [4-7]. Luego, Sofía enriquece la figura haciendo la construcción auxiliar del segmento $\overline{OD}$ e insinúa que con dicha construcción busca garantizar el hecho geométrico siete [EBI-EF] [20]. Por último, Sofía, con la ayuda de la profesora, ratifica la conjetura establecida: que el triángulo *ABD* es rectángulo. [EJ] [24]. En nuestras palabras, la conjetura que los niños deben justificar es: Si un triángulo está inscrito circunferencia y uno de sus lados es diámetro entonces el triángulo es rectángulo; esta conjetura corresponde al hecho geométrico ocho.

Con respecto al andamiaje, la profesora pregunta a los niños la definición del diámetro con el objetivo de que la usen para justificar porque $\overline{AB}$ es el diámetro de la circunferencia con centro *O* [A-UHG] [8,10]. Luego, impulsa a los estudiantes a explicitar la propiedad que se debe justificar, es decir, que el triángulo *ABD* es rectángulo [A-EHG-J] [21, 23]. Hace esto pues Sofía parece comenzar a justificar la propiedad descubierta sin haberla expresado verbalmente en el reporte que están dando a la profesora.

Con respecto a las normas sociomatemáticas, se puede observar que los niños ponen en juego la norma de "habla en el lenguaje matemático acordado" para reportar la construcción del triángulo *ABD*[HLM] [14-19]. Así mismo, el andamiaje realizado por la profesora para ratificar la conjetura junto con la norma de explicitar lo que se debe justificar, provoca que Sofía explicite la justificación que el triángulo *ABD* es rectángulo [EJ] [24].

4.1.2. EPISODIO 2. REPORTE DE LA JUSTIFICACIÓN DE LA CONGRUENCIA DE LOS SEGMENTOS $\overline{OA}$, $\overline{OB}$ Y $\overline{OD}$

La profesora pide a los niños que expliquen lo que hicieron para justificar el hecho geométrico ocho, por lo que los niños estructuran una justificación a partir del hecho geométrico siete. Dicho reporte se basa en la construcción que hace Ignacio en GeoGebraPrim. A medida que los niños hablan, Sofía, va haciendo la construcción y enriqueciendo la figura. En este caso, no parten de una semirrecta *AO*, sino de una recta, *AO.*

…			
31	Sofía:	Primero hacemos una circunferencia [con centro en *O*], trazamos su diámetro.	UFC HLM
32	Ignacio:	Utilizando recta [$\overleftrightarrow{AB}$][8]	
33	Sofía:	El diámetro se llamará $\overline{AB}$ y su centro cero[9].	
34	Ignacio:	Trazamos un punto. Cualquier punto sobre la circunferencia.	
35	Sofía:	Después hacemos… y lo nombramos *D.*	
36	Ignacio:	Hacemos un segmento de *B* a *D* y de *D* a *A*…y	

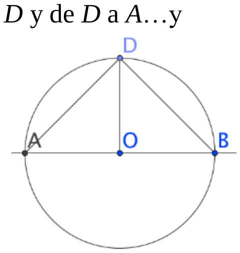


FIGURA 15

		después hacemos de *O* a *D*	EBI-EF
37	Sofía:	Ahí podemos concluir el siete [hecho geométrico]… que si tres segmentos congruentes comparten, tienen un extremo en común y si ese extremo es el punto medio de una circunferencia [probablemente quiso decir, de un segmento], podemos decir, que es recto [quiso decir, un triángulo rectángulo].	UHG-J JHG
		Y ¿por qué decimos que son congruentes?	EJ UFV
		porque son los mismos radios de una circunferencia. Siguiente.	JHG

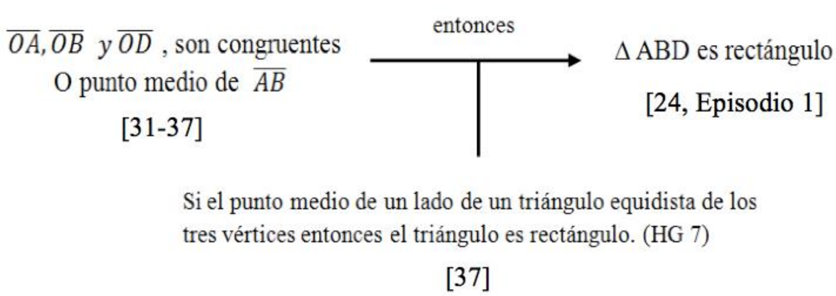
TRANSCRIPCIÓN 2

[8] Los niños habían aprendido a construir un rayo y un diámetro a partir del rayo, los niños se refieren de manera un poco descuidada a él como recta, rayo o semirrecta.

[9] Los niños querían decir que el punto *O* es punto medio de $\overline{AB}$.

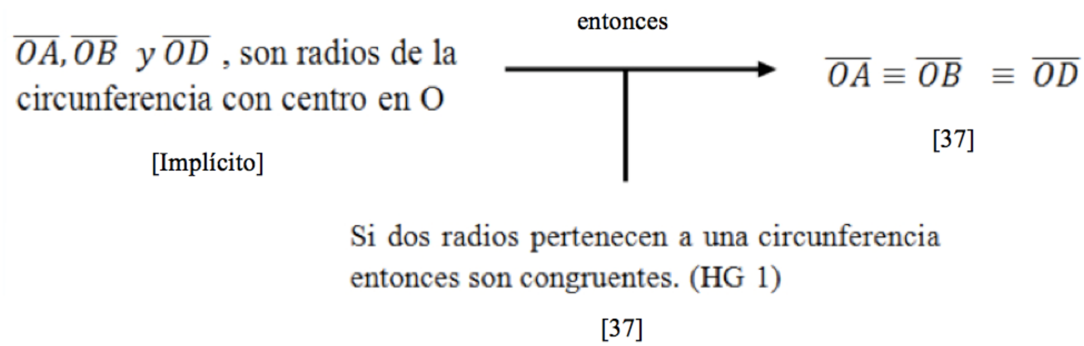
Con respecto al aprendizaje de la demostración, se observa que Sofía e Ignacio usan formas comunicativas para reconstruir los pasos de la construcción que hicieron del triángulo *ABD* [UFC] [31-36]. En [37], Sofía asocia la construcción auxiliar del $\overline{DO}$ [EBI-EF] [36] con el hecho geométrico siete, lo que la lleva a pensar que puede justificar la conjetura usando este hecho como garantía. Cuando ella dice "ahí podemos concluir el siete" posiblemente lo que enuncia es que va a usar el hecho siete como garantía en la argumentación.

Sofía abandera la producción de argumentos estructurando un argumento analítico para validar que *ABD* es un triángulo rectángulo. Para ello, usa el antecedente del hecho geométrico siete como dato, pero no específica todos los objetos geométricos que intervienen en el mismo, es decir, que $\overline{AO}, \overline{BO}$y $\overline{DO}$ son congruentes y que *O* es el punto medio de $\overline{AB}$. Se basa sólo en la construcción hecha. Usa el hecho geométrico siete para justificar que el triángulo *ABD* es rectángulo, con ángulo recto en el punto *D* (Ver línea [24], en Episodio 1). El argumento de Sofía se puede representar en el siguiente esquema:



ESQUEMA 1

En la misma intervención [37], Sofía elabora otro argumento analítico para justificarla congruencia de los segmentos $\overline{OA}$, $\overline{OB}$ y $\overline{OD}$ son congruentes, Usa el hecho geométrico uno para justificarlo. En este argumento, lo dado también está implícito en la construcción del triángulo *ABD*. Dicho argumento se representa en el siguiente esquema:



ESQUEMA 2

Con respecto a las normas sociomatemáticas, se observa que Sofía hace esfuerzos para comunicar adecuadamente lo que hicieron, haciendo uso de un lenguaje matemático apropiado, lo que evidencia que ha puesto en juego la norma sociomatemática de "hablar en el lenguaje matemático acordado" [HLM] [31-36]. De igual manera, Sofía impulsa la norma sociomatemática "se justifica con los hechos geométricos aceptados" [JHG] al preguntarse por las razones matemáticas que permiten validar que los segmentos $\overline{AO}, \overline{BO}$ y $\overline{DO}$ son congruentes [37].

4.1.3. EPISODIO 3. SOCIALIZACIÓN DE LA JUSTIFICACIÓN DE LA CONJETURA PRINCIPAL A PARTIR DEL HECHO GEOMÉTRICO SIETE.

La profesora pide a los estudiantes justificar por qué el triángulo *ABD* es rectángulo con ángulo recto en *D*. Para ello, los estudiantes explican la construcción reportada en el Episodio 1 y justifican la conjetura con los hechos geométricos siete y uno. En este episodio se puede observar que los niños se encuentran en dos niveles diferentes con relación al aprendizaje de la demostración: Ignacio está en el mundo empírico y Sofía en el mundo teórico, por eso sus demostraciones son distintas.

…

45	Profesora:	Ahora ustedes me van a justificar ¿por qué [el triángulo *ABD*] es rectángulo?	JHG

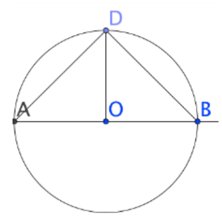


FIGURA 16

46	Sofía:	¿Por qué [el triángulo *ABD*] es rectángulo? Adicionándole un vértice [quería decir segmento] de *O* a *D*	EBI-EF
		un segmento de *O* a *D* garantizamos el punto [quería decir el hecho geométrico] siete	UHG-J
47	Ignacio:	Hacemos una semirrecta de *D* a *O*.	EBI-EF
48	Profesora:	¿Una que…?	A-UHG
49	Sofía:	Un segmento de *D* a *O* y cumplimos con el punto [quiso decir, el hecho geométrico]… con el sistema teórico local el hecho siete.	JHG
50	Profesora:	Y ¿qué dice el hecho siete?	A-EHG
51	Sofía:	Que si tres segmentos congruentes	UHG-J
52	Profesora:	¿Cuáles son los tres segmentos congruentes?	A-UHG
53	Sofía e Ignacio:	De *O* a *D*, de *O* a *B* y de *O* a *A*	EPG
54	Profesora:	Ignacio ¿por qué son congruentes?	A-UVF
55	Ignacio:	Porque todos sus lados [quería decir radios] miden lo mismo.	EPG
56	Profesora:	Pero, ¿por qué miden lo mismo?	A-UVF
57	Sofía:	Por el hecho uno; son radios de una misma circunferencia.	UHG-J
58	Ignacio:	Son congruentes.	
59	Profesora:	Listo. Tenemos tres segmentos congruentes	
60	Sofía:	Con un extremo en común eh… si ese extremo es el punto medio de un lado de un triángulo este triángulo es rectángulo.	UFV IDE
61	Profesora:	Y ¿por qué yo se que *O* es el punto medio $\overline{AB}$?	A-UVF
62	Sofía:	Porque…	UFV
63	Ignacio:	Porque de *B* a *O* mide lo mismo que dé *O* a *A*.	
64	Profesora:	Entonces estamos utilizando la definición	A-UVF
65	Sofía:	de punto medio	IDE

66 Profesora:	Y además esto es el centro	
67 Sofía:	El centro de la circunferencia.	

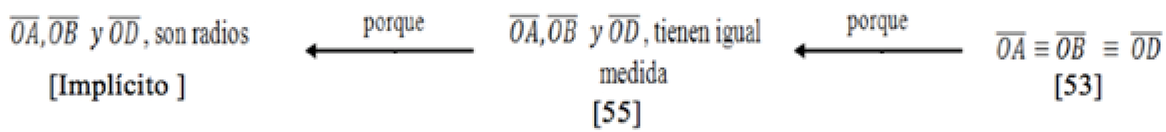
TRANSCRIPCIÓN 3

Con respecto a la actividad demostrativa, Sofía e Ignacio reportan que al construir el segmento *DO* ellos visualizaron que podían usar el hecho geométrico siete para justificar que el triángulo *ABD* es rectángulo [UHG-J] [46]. La construcción auxiliar[46, 47] les permitió reconocer que los segmento $\overline{AO}, \overline{BO}$y $\overline{DO}$son congruentes [EPG] [53, 55]. Luego, Sofía menciona que *O* tiene una doble naturaleza: es el centro de la circunferencia y el punto medio del segmento $\overline{AB}$ [IDE] [60, 65-67].

Con respecto al andamiaje, con base en la afirmación hecha por Sofía sobre la construcción auxiliar del $\overline{OD}$ [49], la profesora impulsa a los estudiantes a explicitar el hecho geométrico siete para validar la conjetura preguntándoles "¿qué dice el hecho siete?" [A-EHG] [50] y enfoca a los estudiantes en la propiedad de la congruencia de los segmentos $\overline{AO}, \overline{BO}$ y $\overline{DO}$ preguntándoles "¿Cuáles son los tres segmentos congruentes?" [A-UHG] [52]. Luego, la profesora promueve que los estudiantes realicen razonamientos válidos para justificar la congruencia de los segmentos y que *O* es el punto medio del segmento $\overline{AB}$[A-UFV] [54, 56, 61, 64].

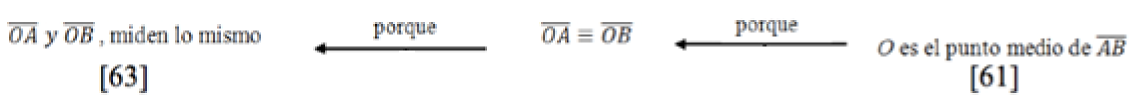
Consideramos que el apoyo que hace la profesora para que los estudiantes justifiquen tanto la congruencia de los segmentos $\overline{AO}, \overline{BO}$ y $\overline{DO}$ como que *O* es el punto medio de $\overline{AB}$ impulsa a Ignacio, con ayuda de Sofía, a estructurar dos argumentos queentrevemos son substanciales[UFV] [60, 62].

En el primero de ellos, se puede observar que Ignacio y Sofía hacen explicita la aserción de que $\overline{AO}, \overline{BO}$ y $\overline{DO}$ son los segmentos congruentes y justifican esto diciendo que dichos segmentos tienen igual medida. Posteriormente, Sofía usa como garantía para justificar la aserción el hecho geométrico uno. Pero, Ignacio se mueve en el mundo empírico en tanto las afirmaciones que hace se basan en la percepción que tiene de la figura que construyeron en GeoGebraPrim y posiblemente en la experimentación que ha hecho de la herramienta ¨distancia¨ con construcciones anteriores. Mientras que Sofía se mueve en el mundo teórico, en tanto busca la producción de un argumento analítico; aún cuando este esté desordenado, las garantías se basan en los hechos geométricos aceptados en la clase. Dicho argumento se representa en el siguiente esquema:



ESQUEMA 3

En el siguiente esquema se ratifica la idea de que Ignacio se mueve dentro de la argumentación substancial en tanto, para justificar la aserción de que O es el punto medio del segmento $\overline{AB}$ el menciona que los segmentos $\overline{OA}$ y $\overline{OB}$ deben medir lo mismo. Dicho argumento se representa en el siguiente esquema:



ESQUEMA 4

Con respecto a las normas sociomatemáticas, consideramos que Sofía pone en juego la norma "justificar con hechos geométricos aceptados" cuando, de manera autónoma, ella se da cuenta de que al construir el segmento $\overline{OD}$ puede justificar, con el hecho geométrico siete, que el triángulo *ABD* es rectángulo. Esto se evidencia cuando ella menciona "cumplimos con el punto … con el sistema teórico local el hecho siete" [JHG] [49].

Finalmente, consideramos que el apoyo hecho por profesora en éste episodio, va en busca de que los estudiantes expliciten un argumento analítico para justificar que el triángulo *ABD* es rectángulo basados en argumentos matemáticos (ver esquemas 4 y 5). Tiene éxito con Sofía, pero no con Ignacio.

4.1.4. EPISODIO 4. REPORTE DE LA JUSTIFICACIÓN DE QUE EL CUADRILÁTERO *ADBC* ES RECTÁNGULO

Después de garantizar la validez de la conjetura usando principalmente el hecho geométrico siete, la profesora pide a los estudiantes buscar otra forma de justificarla. Sofía e Ignacio, con base en la construcción del triángulo *ABD*, realizan la construcción de un rectángulo *ADBC* a partir de la construcción de otro diámetro de la circunferencia. Esto lo hacen porque al momento de explorar, Sofía buscaba construir otro triángulo semi-inscrito en la circunferencia con centro *O*, pero esta vez en el otro semiplano determinado por la recta *AB*. Para ello, sugirió a Ignacio poner un punto en la circunferencia *C*, lo que llevó a Ignacio a proponer que trazaran otro diámetro. Dicha construcción les provee fundamentos para garantizar, con el hecho geométrico seis, que el cuadrilátero es rectángulo y por lo tanto que el ángulo *D* es recto.

…			
78	Ignacio:	Vamos a mirar si…	EBI-EF
79	Sofía:	Si con más diámetros podemos hacer otra justificación.	
80	Ignacio:	Trazamos otra recta.	HLM EBI-EF
81	Sofía:	Otro diámetro	
82	Ignacio:	Otro diámetro, de *D* a *O* y un punto que llegue a la última parte [diámetro *DC*]	EBI-EF

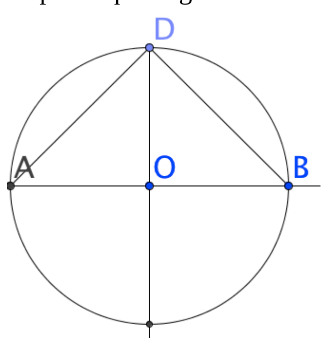


FIGURA 17

83	Sofía:	Trazamos un diámetro de *D* a *C*. Al punto lo llamaremos *C* [traza $\overleftrightarrow{DO}$ nombra punto *C*, traza el segmento *DC* y oculta $\overleftrightarrow{DO}$].	EBI-EF HLM
84	Ignacio:	Después vamos a trazar dos segmentos de *B* a *C* y de *C* a *A*.	

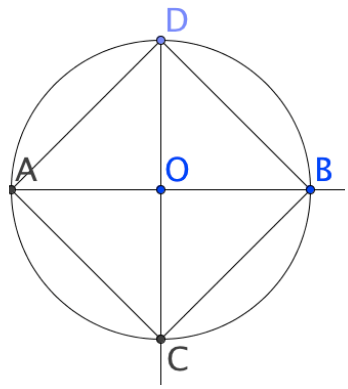


FIGURA 18

85	Sofía:	Nos podemos dar cuenta que es un y tria….	EPG
86	Ignacio:	Cuadrilátero	
87	Sofía:	Gracias, un cuadrilátero. Y podemos ver que sus diagonales se bisecan exactamente en su punto medio, o sea que esto es un rectángulo, como todo… más bien es un cuadrado, pero como todo cuadrado cumple las especificaciones de rectángulo, le vamos a decir cuadrado.	FC EPG *UFV
		Ahora vamos a ver y vamos a medir sus ángulos. [obtienen las medidas de los ángulos del cuadrilátero].	EBI-TM

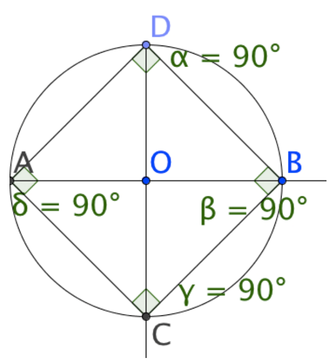


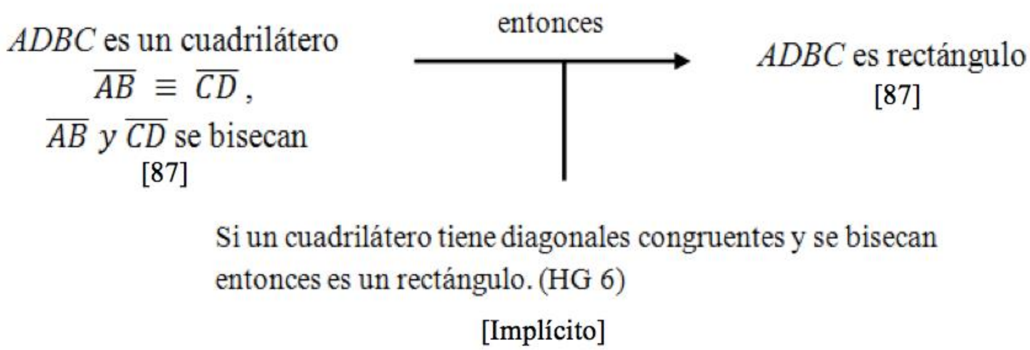
FIGURA 19

		Y van a ser todos cuatro de 90 grados, ¿la definición de cuadrado es?	EPG UFV
88	Ignacio:	¡Ah! Que todos sus ángulos son iguales, congruentes.	HLM
89	Sofía:	Un cuadrado es un cuadrilátero…	UFV
90	Ignacio:	De cuatro segmentos… lados	
91	Sofía:	Tiene todos sus lados de no… todos sus lados congruentes y todos sus ángulos son de 90 grados, podemos decir que es cuadrado	

TRANSCRIPCIÓN 4

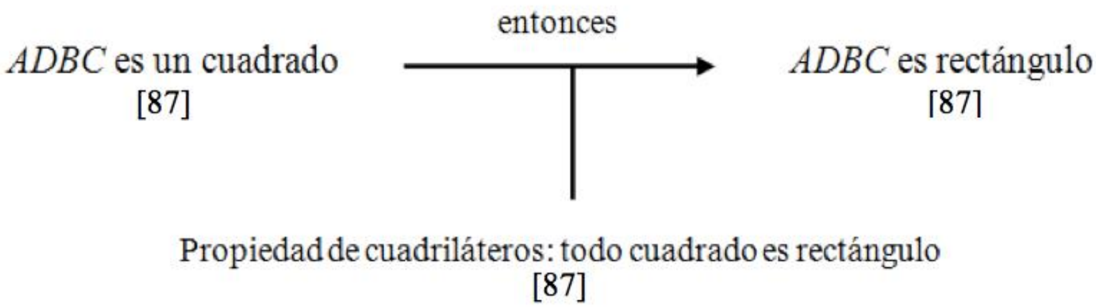
Con respecto a la actividad demostrativa, se puede observar que Sofía enriquece la construcción del triángulo *ABD*, trazando el diámetro $\overline{DC}$, y los segmentos $\overline{AC}$ y $\overline{CB}$ para construir el cuadrilátero *ADBC* [EBI-EF] [78, 79, 82-84]. Sofía, a través de la visualización de la figura, encuentra y explicita la propiedad geométrica: *ADBC* es un cuadrilátero [EPG] [86], ademásconjetura que *ADBC* es un cuadrado[FC][87].

Sofía extrae de la figura propiedades geométricas como: *ADBC* es un cuadrilátero y las diagonales $\overline{AB}$y $\overline{DC}$ se bisecan en el punto *O* [EPG], porque ella tiene como metaestructurar un argumento analítico para justificar que el triángulo *ABD* es rectángulo, usando el hecho geométrico seis. Sin embargo, Sofía falla en este intento [UFV*] [87], en tanto que no menciona que las diagonales $\overline{AB}$ y $\overline{DC}$ son congruentes para poder usar el hecho geométrico seis como garante para justificar, ni tampoco enuncia el hecho. Consideramos que los niños de la edad de Sofía, es decir, entre los 8 y 10 años, no sienten la necesidad de especificar los hechos geométricos como garantías; para ellos, puede ser sólo suficiente especificar algunas partes de la hipótesis para establecer la conclusión. A continuación, se muestra el argumento que Sofía intentó establecer:



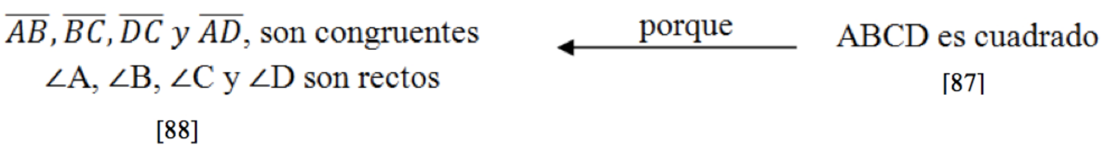
ESQUEMA 5

Después, Sofía se da cuenta que *ADBC* parece un cuadrado [EPG] [87], lo que la lleva a estructurar un argumento para convencer a Ignacio de que la construcción que ellos hicieron corresponde a la construcción de un rectángulo, aún cuando la figura sea un cuadrado [UFV] [89-91]. Por ello recurre a la propiedad “todo cuadrado es un rectángulo” para usarla como garantía [91]. Cabe mencionar que dicha propiedad fue discutida en clase antes del Experimento de Enseñanza, y por lo tanto, no hace parte del sistema teórico local construido para este estudio. Sin embargo el razonamiento realizado por Sofía corresponde a un argumento analítico que puede representarse en el siguiente esquema:



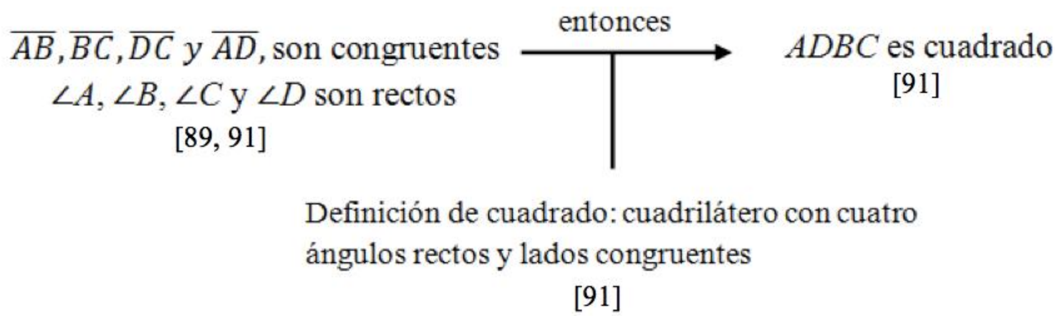
ESQUEMA 6

Sofía, para corroborar que el cuadrilátero *ABDC* es un rectángulo, decide explorar nuevamente la figura para buscar invariantes, pero esta vez, midiendo los ángulos del cuadrilátero *ABDC*[EBI – TM]; se da cuenta que miden 90 grados [EPG][87]. No evalúa la congruencia de los lados de la figura, parece que la asume visualmente. Estructura un argumento substancial [UFV] [87-91] que tiene la siguiente forma:



ESQUEMA 7

Así mismo, Sofía le pregunta a Ignacio por la definición de cuadrado [87] para usarla como garante para validar que el cuadrilátero *ADBC* es un cuadrado y así construir un razonamiento válido [UFV]. Ignacio menciona dicha definición, provocando que Sofía establezca el siguiente argumento analítico [UFV] [88-91]:



ESQUEMA 8

En síntesis, nosotros consideramos que Sofía construye argumentos analíticos en lo referente a justificar porqué el cuadrilátero *ADBC* es un rectángulo, pero como por accidente los niños producen lo que parece ser un cuadrado, Sofía estructura argumentos de tipo substancial, en tanto, ella no tiene la base teórica, es decir, un hecho geométrico que le sirva como garante para argumentar que el cuadrilátero es un cuadrado. De allí que en el momento, que no puede realizar un argumento analítico, ella recurre a un argumento substancial para justificar, lo cual puede ser algo natural para su edad.

Con respecto a las normas sociomatemáticas, se evidencia que los estudiantes se han apropiado de la norma de “se habla en el lenguaje matemático acordado” al nombrar adecuadamente los objetos geométricos que intervienen en la construcción de las figuras geométricas en GeoGebraPrim que son necesarias, ya sea, para modelar el problema que se les está planteando o para enriquecer la figura que ellos ya han construido. [HLM] [83, 84, 87].

4.1.5. EPISODIO 5. SOCIALIZACIÓN DE UNA PARTE DEL REPORTE QUE HICIERON LOS NIÑOS PARA JUSTIFICAR QUE EL CUADRILÁTERO*ABDC* ES RECTÁNGULO

La profesora pide a los niños que reporten otro camino para justificar la conjetura. Ellos se basan en la construcción que se reportó en el episodio 4. Explican la construcción del rectángulo *ADBC* y justifican cada paso con hechos geométricos conocidos. Luego, la profesora enfoca a los estudiantes hacia los objetos geométricos que intervienen en el antecedente del hecho geométrico seis para ayudarlos a justificar que el triángulo *ABD* es rectángulo en *D.*

…

108	Profesora:	Listo bien, el otro camino	VFJ
109	Sofía:	Trazar	EBI-EF
110	Profesora:	Semirrecta	
111	Sofía:	Otro diámetro, de *D*…	
112	Profesora:	¿Cómo lo llamaron?	
113	Sofía:	*DC*. Bueno, hicimos el mismo procedimiento	
114	Ignacio:	Trazamos la semirrecta, y trazamos un segmento de *C* a *B* y otro segmento de *C* a *A*.	
115	Profesora:	Listo.	

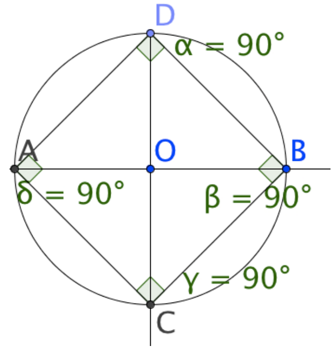


FIGURA 20

116	Sofía:	Y aquí vemos que sus diagonales se parten exactamente[quiso decir son congruentes]se bisecan en su punto medio,	EPG IDE
		así que con el hecho número seis	UHG-E
117	Profesora:	Bueno, espera… las diagonales… ¿cómo saben que estas diagonales son congruentes?	A-EHG-J
129	Sofía:	Porque son radios de una misma circunferencia	
130	Profesora:	¿son radios?	
131	Ignacio:	los diámetros	
132	Sofía:	son los diámetros de una misma circunferencia.	
133	Profesora:	Y ¿qué dice el hecho cinco?	A-EHG-J
134	Ignacio:	El hecho cinco, que todos los diámetros de una circunferencia son congruentes.	UHG-J
135	Profesora:	Bueno ya utilizamos el hecho cinco.	JHG
136	Sofía:	El uno, el dos, el tres no lo hemos usado, el cuatro también.	
137	Ignacio:	El cinco y el seis.	

138	Profesora:	Listo ya tienen que las diagonales son congruentes ¿que más tienen?	A-UHG
139	Sofía:	Tenemos que esas diagonales se bisecan en su punto medio.	EPG
140	Profesora:	Eso es bisecar, ¿qué dice la definición de bisecar?	A-UHG
141	Ignacio:	Eh… bisecar segmentos que se cruzan en el punto medio de cada uno.	UHG-J
142	Profesora:	Y ¿el punto medio de $\overline{DC}$ es?	A-IDE
143	Ignacio:	*O*	IDE
144	Sofía:	Como es el centro de la circunferencia.	
145	Ignacio:	Es el mismo de todos.	

TRANSCRIPCIÓN 5

Con respecto a las normas sociomatemáticas, la profesora pide a los niños buscar otro camino, distinto al hecho geométrico siete, para justificar que la conjetura es válida. Con ello, está estimulando la norma de “usar varios caminos para justificar” [VFJ][108]. Así mismo, la profesora promueve la norma de “justificar con hechos geométricos” cuando ella, Sofía e Ignacio hacen una recopilación de los hechos geométricos que han usado para justificar la conjetura [JHG] [135-137].

Con respecto a la actividad demostrativa, se observa que los niños enfatizan en la forma en que ellos enriquecen la figura con la construcción auxiliar del diámetro $\overline{DC}$ y los segmentos $\overline{AC}$y $\overline{BC}$[EBI-EF][109-114]. Así mismo, Sofía identifica, como una propiedad geométrica, que $\overline{AB}$ y $\overline{DC}$ son las diagonales del cuadrilátero *ADBC* [EPG] [116, 139], e identifica que estos segmentos son también diámetros de la circunferencia [IDE] [116]. Lo anterior, la lleva a pensar que puede usar el hecho geométrico seis para explicar que el cuadrilátero *ADBC* es rectángulo [UHG-E] [116].

Con respecto al andamiaje, la profesora busca que los estudiantes validen los datos que se necesitan para usar el hecho geométrico seis, es decir, que las diagonales $\overline{AB}$ y $\overline{DC}$ son congruentes y que se bisecan en el punto *O*. Para reafirmar la validez de la congruencia de las diagonales impulsa a los estudiantes a que expliciten el hecho geométrico cinco. Para ello, les pregunta “¿cómo saben que estas diagonales son congruentes?” y “¿qué dice el hecho cinco?” [A-EHG-J] [117, 133], luego enfoca a los estudiantes en la propiedad de bisecarse. Para ello les pregunta “¿qué más tienen?”, “¿qué dice la definición de bisecar?” y “¿el punto medio de $\overline{DC}$ es?” [A-UHG] [138, 140, 142].

Con respecto a la argumentación, el apoyo de la profesora [117, 133] permite que Ignacio estructure un argumento substancial que se representa en el siguiente esquema:

$$\underset{[132]}{\overline{AB} \text{ y } \overline{DC} \text{ son diámetros}} \xleftarrow{\text{porque}} \underset{[116]}{\overline{AB} \equiv \overline{DC}}$$

ESQUEMA 9

Por otra parte, las acciones realizadas por la profesora en las líneas [138, 140, 142] promueven que Sofía e Ignacio hagan uso de la bicondicionalidad de la definición de bisecar, construyendo el siguiente argumento substancial:

$$\underset{[116,\ 143]}{\begin{array}{c}\text{O es el punto medio de } \overline{DC} \\ \text{O es el punto medio de } \overline{AB}\end{array}} \xleftarrow{\text{porque}} \underset{[139]}{\begin{array}{c}\overline{AB} \text{ y } \overline{DC} \text{ se bisecan} \\ \text{en su punto medio } O\end{array}}$$

ESQUEMA 10

Consideramos que el andamiaje que hace la profesora, es muy interesante en la medida en que busca que los estudiantes construyan una cadena deductiva que les permite justificar porqué el cuadrilátero *ADBC* es un rectángulo; en este sentido, aún cuando Sofía construye argumentos analíticos independientes, es la profesora es quién ayuda a establecer la conexión en la argumentación.

4.1.6. EPISODIO 6. JUSTIFICACIÓN DE QUE EL CUADRILÁTERO *ABDC* ES RECTÁNGULO CON EL HECHO GEOMÉTRICO SEIS

Sofía hace un intento fallido por justificar que el cuadrilátero *ADBC* es rectángulo, al equivocarse en la garantía que permite validar tal afirmación. La profesora conduce a los niños a explicitar el hecho geométrico seis para validarla. Sofía se vale de las propiedades de los ángulos del cuadrado para justificar que el cuadrilátero es rectángulo.

146	Sofía:	Bueno pues aquí con esa base [se refiere a la diagonal *AB*] unimos [quiso decir, se intersecan las diagonales $\overline{AB}$ y $\overline{DC}$ en el punto *O*] formando un cuadrilátero [*ADBC*].	EPG

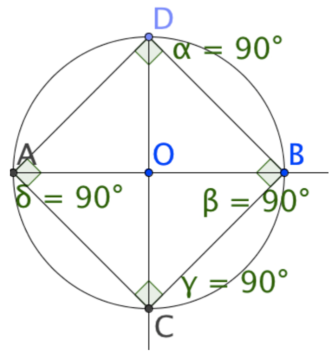


FIGURA 21

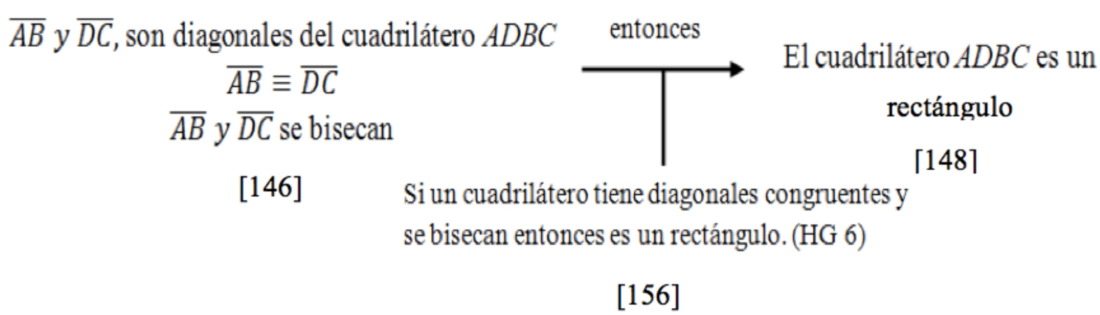
147	Profesora:	¿Y qué pasa con ese cuadrilátero?	A-UFV
148	Sofía:	Es un rectángulo por el hecho número cuatro.	UFV*
149	Profesora:	No, porque [el hecho geométrico cuatro] dice: si el cuadrilátero es un rectángulo, pero ustedes ¿de donde parten?, ¿qué hicieron primero? ¿el cuadrilátero o las diagonales?	A-UFV
150	Sofía:	Primero hicimos las diagonales.	UHG-E
151	Profesora:	¡Ah! entonces ¿cuál es el que nos sirve? […]¿Qué dice el [hecho geométrico] seis?	JHG A-EHG-J
156	Ignacio:	Si un cuadrilátero tiene diagonales congruentes y se bisecan entonces es un rectángulo.	UHG-J
157	Profesora:	Listo y ¿entonces?	JHG
158	Sofía:	Bueno pues, como sabemos un … la definición de rectángulo es la que todos sus ángulos miden 90 grados y sus diagonales ya dijimos.	VFJ UHG-J
159	Profesora:	Sí, las diagonales nos sirvieron para saber que es rectángulo.	
160	Sofía:	Aja, como un cuadrado obedece todas las[se refiere a las propiedades de las diagonales y de los ángulos] especificaciones de un rectángulo entonces lo llamaremos rectángulo. […].	

TRANSCRIPCIÓN 6

Con respecto al andamiaje, la profesora interrumpe la explicación de Sofía sobre los pasos que usó junto con Ignacio para construir el cuadrilátero *ADBC*[146]. Promueve que los niños hagan un razonamiento válido que justifique que el cuadrilátero es un rectángulo.Para ello les pregunta

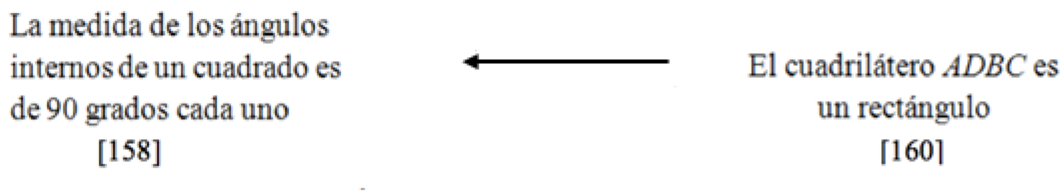
“¿Y qué pasa con ese cuadrilátero?” [A-UFV] [147]. Sofía falla en el hecho geométrico que debe usarse para garantizar la validez de la afirmación [148], pues usa la garantía inversa. La profesora decide enfocara los estudiantes en el antecedente del hecho geométrico seis para ayudarlos a realizar el paso de deducción y así establecer un razonamiento válido [A-UFV] [149]. Para ello, les formula las preguntas “¿de dónde parten?, ¿qué hicieron primero? ¿el cuadrilátero o las diagonales?”. Sofía responde que la construcción había partido de las diagonales del cuadrilátero, es decir, de los diámetros $\overline{AB}$ $y\overline{DC}$.

La profesora decide iniciar un nuevo andamiaje, pero está vez en busca de hacer explícito el hecho geométrico seis para justificar la conjetura [A-EHG-J] [151]. Para ello, recuerda la norma de justificar con hechos geométricos pidiéndoles que lean el hecho seis para así poderlo enunciar, e impulsa a los estudiantes a que lo utilicen haciendo uso de los datos que tienen, esto lo hace diciéndoles: “¡Ah! entonces ¿cuál es el que nos sirve? ¿Qué dice el seis?”. El andamiaje realizado por la profesora conduce a que, junto a ella, los estudiantes puedan construir el siguiente argumento analítico:



ESQUEMA 11

Con respecto a las normas sociomatemáticas y la actividad demostrativa, se observa que aún cuando Ignacio usa el hecho geométrico seis como garante para concluir que el cuadrilátero *ADBC* es rectángulo [UHG-J] [156], Sofía pone en juego la norma de “varios caminos para justificar” para ratificar que el cuadrilátero es un rectángulo [VFJ] [158]. Para ello, se apoya algunas propiedades del cuadrado que son conocidas por la comunidad de la clase, como son “todo cuadrado es un rectángulo” “la medida de los ángulos internos de un cuadrado es 90 grados” [UHG-J] [159-160] [10]. El argumento que construye Sofía para ratificar que el cuadrilátero es rectángulo, es un argumento substancial que se puede representar en el siguiente esquema:



ESQUEMA 12

4.1.7. EPISODIO 7. JUSTIFICACIÓN DE QUE EL TRIÁNGULO *ABD* ES RECTÁNGULO POR TENER UN ÁNGULO RECTO EN D

La profesora dirige la atención de los estudiantes sobre la conjetura que deben justificar; se enfoca en las propiedades de los ángulos del rectángulo, para que los estudiantes puedan visualizar que el ángulo *D* es recto. Esto conduce a Sofía a afirmar que el triángulo *ABD* es rectángulo.

161	Profesora:	Bueno, [tapa con una mano el triángulo *ABC*] pero el que nosotros estábamos viendo… es éste triángulo [el *ABD*].	A-UHG
…			
163	Profesora:	Y la idea era decir por qué ese triángulo era rectángulo. Entonces ¿por qué es [triángulo] rectángulo? porque [el triángulo *ABD*] pertenece a un…	A-UFV
164	Sofía:	A un cuadrado	EPG
165	Profesora:	a un cuadrado y ¿un cuadrado tiene?	A-UHG

[10] Cabe mencionar que estás propiedades son conocidas por los estudiantes, pero no hacen parte del sistema teórico local que se construyó en el Experimento de Enseñanza.

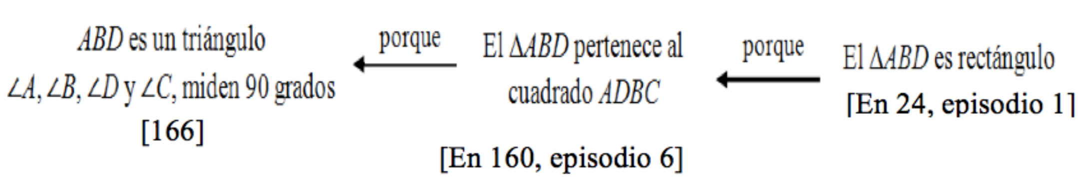
166	Sofía:	Todos sus ángulos congruentes de 90 grados.	UHG-J
167	Profesora:	De 90 grados, entonces yo puedo decir que esto mide 90 [señala el ángulo *D*] y con el simple hecho de que este mida 90 ¿este triángulo es…?	A-EBI A-UHG
168	Sofía:	Es [un triángulo] rectángulo.	EPG

TRANSCRIPCIÓN 7

Con respecto al andamiaje, la profesora tapa el triángulo *ABC* para dirigir la atención de los estudiantes en la propiedad geométrica que se debe justificar, es decir que el triángulo *ABD* es un triángulo rectángulo y que usen la propiedad que el ángulo *D* es recto para justificar [A-UHG][161]. Pide que la justifiquen [A-UFV][163]. Así mismo, la profesora busca que los niños establezcan un argumento válido, usando como garantía las propiedades y hechos geométricos relacionados con el rectángulo *ADBC*. Posteriormente, la profesora impulsa la exploración de la figura dándoles la pista "yo puedo decir que esto mide 90" [A-EBI] [167] y por lo tanto, inducirlos a que usen la propiedad geométrica "Un cuadrado tiene todos sus ángulos de 90 grados" para que los niños la asuman como garantía para establecer un razonamiento válido que permita justificar la conjetura [A-UHG] [167].

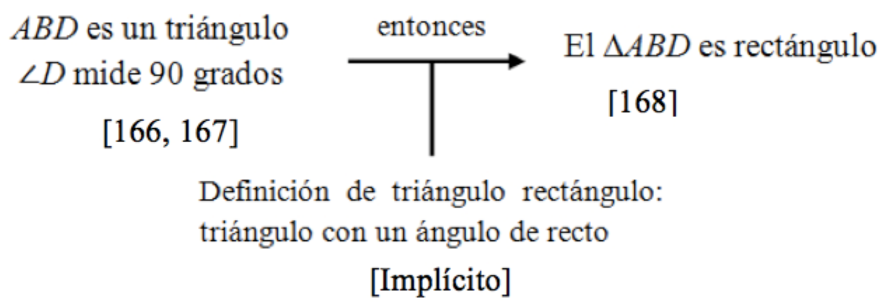
Con respecto a la actividad demostrativa, luego de que la profesora les da a los niños la pista "porque [el triángulo *ABD*] pertenece a un…"; los niños se dan cuenta que dos lados también son los lados de un cuadrado y usan este hecho en la justificación de la conjetura. Además, explicitan la propiedad geométrica a la que tenían que llegar a concluir, es decir, que el triángulo *ABD* es rectángulo [EPG] [168].

Consideramos que los esfuerzos realizados por la profesora van encaminados a que los niños logren establecer un argumento substancial de la forma:



ESQUEMA 13

Sin embargo, por problemas técnicos en la videograbación no se evidencia el momento en donde la profesora ayuda a los niños a transformar dicho argumento substancial en el siguiente argumento analítico. Pero la profesora si ayuda a los niños a estructurar el argumento analítico que permite justificar que el triángulo ABD es un triángulo rectángulo con ángulo recto en D, dicho argumento se representa en el siguiente diagrama.



ESQUEMA 14

4.2. ANALISIS GRUPO CRIKALA

4.2.1. EPISODIO 1. JUSTIFICACIÓN DE LA CONGRUENCIA DE LOS SEGMENTOS $\overline{AO}, \overline{BO}$ Y $\overline{DO}$ PARA JUSTIFICAR LA CONJETURA

Después de haber detectado que el ángulo *D* es recto, Cristian y Karen, ayudados por Laura, repiten la construcción del triángulo *ABD* inscrito en la circunferencia con centro *O* y diámetro $\overline{AB}$. Luego los tres estudiantes y por solicitud de la profesora, buscan una manera de justificar queel triángulo es rectángulo. Para ello, leen los hechos geométricos y definiciones del sistema teórico local que se ha construido colectivamente.

1	Cristian:	[Construye una circunferencia con centro *O*, localiza un punto en ella que denomina *A*, traza el rayo $\overrightarrow{AO}$, determina el punto de intersección *B* del rayo con la circunferencia, construye el segmento $\overline{AB}$ y oculta el rayo $\overrightarrow{AO}$. (Figura 24)]	

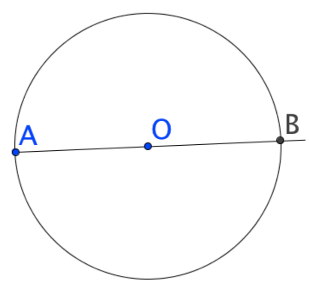


FIGURA 22

2	Laura:	Yo sé cómo hacerlo. Ese [punto] va a ser *O* [se refiere al centro de la circunferencia].	
…			
4	Cristian:	[Toma otro punto de la circunferencia, lo llama *D*y traza el radio $\overline{OD}$]. (Figura 25)	EBI-EF

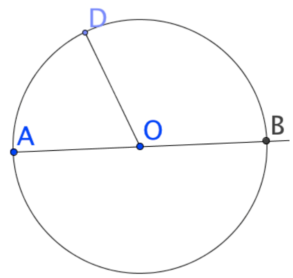


FIGURA 23

5 Karen: Espere, espere, [toma el mouse] quiero hacer algo. Quiero buscar algo de las milésimas… [Busca en el menú] herramientas de medición [mide los radios $\overline{AO}$, $\overline{BO}$y $\overline{DO}$su longitud es 2. (Figura 24)]… lo de 2 milésimas, 5 milésimas… [activa la opción de colocar cifras decimales. (Figura 25)] EBI-TM

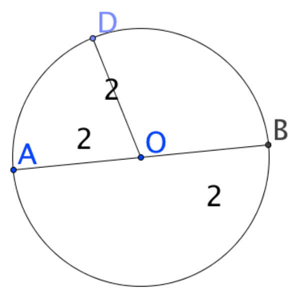


FIGURA 24

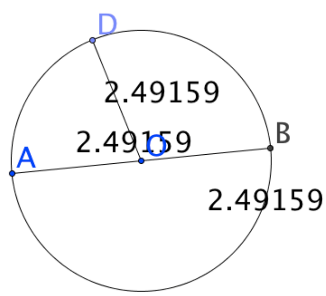


FIGURA 25

6 Cristian: Dibuje un segmento [señala$\overline{AD}$], un segmento [señala $\overline{BD}$]. EBI-EF

7 Karen: [Toma el mouse y traza los segmentos $\overline{AD}$ y $\overline{BD}$. (Figura 26)]

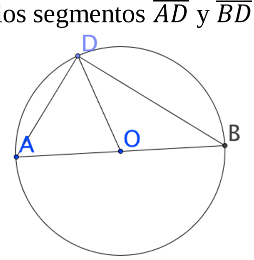


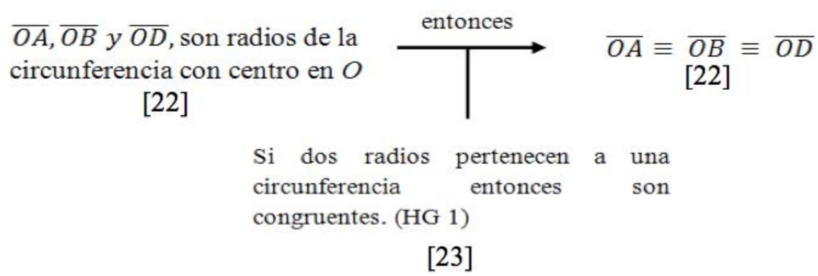
FIGURA 26

…

8	Karen:	[Busca la herramienta 'Texto'] ¿Dónde está 'Renombra'? [se refiere a la herramienta texto] Para escribir… ¿recuerdan?	
…			
9	Karen:	Cristian ¡mire…, mire lo que debe escribir¡ Primer hecho geométrico de los …	HLM JHG
…			
10	Laura:	¿Recuerdan lo que dijo Sofía?	
11	Cristian:	¡Pero si nosotros ya lo habíamos hecho! [Se refieren al uso del hecho geométrico 7 para justificar]. Hay que hacer [uso de] la segunda propiedad. [Se refiere a buscar otro camino para justificar].	VFJ
12	Karen:	Pero ¡mire! Es que mire… leamos todos los hechos geométricos otra vez: si dos radios pertenecen [leyendo en su cuaderno]	VFJ
13	Laura:	¡No! Ese ya lo utilizamos.	
14	Karen:	Por eso… eso ¡mire! ¡Este nos sirve!	
15	Cristian:	¡No! Por eso, léalos todos.	
16	Laura y Cristian:	[Leyendo]. Dos radios pertenecen a una misma circunferencia, son congruentes. Si dos circunferencias son congruentes sus radios son congruentes. Las diagonales de un rectángulo son congruentes y se bisecan.	JHG
17	Karen:	Se bisecan.	
18	Cristian:	Si un cuadrilátero es un rectángulo, entonces sus diagonales son congruentes y se bisecan.	
19	Karen:	Yo, yo, yo. Si un cuadrilátero es un rectángulo, entonces sus diagonales son congruentes y se bisecan.	
20	Cristian:	Los diámetros de una misma circunferencia son congruentes	
21	Karen:	Si un cuadrilátero tiene diagonales que son congruentes y se bisecan, entonces es un rectángulo… Bueno, en esta circunferencia…si una circunferencia…y en el primer hecho geométrico… si dos. En la primera actividad hay dos radios, y si dos radios pertenecen a una misma circunferencia son congruentes, gracias…	UHG- J
22	Laura:	Ah! entonces ese es el primer hecho geométrico que pertenece a la actividad. Coloque…	
23	Karen:	¡Pero eso es lo que se utiliza!	VFJ

TRANSCRIPCIÓN 8

Con respecto a la actividad demostrativa, en el episodio se aprecia que los estudiantes se enfrentan a la búsqueda de una justificación diferente a la que hizo Sofía (Ver Episodio SOIG), enriqueciendo la figura inicial con segmentos [EBI-EF] [4, 6] y con medidas [EBI – TM] [5]. Posiblemente, querían valerse del hecho geométrico uno para hacer la justificación y deseaban hacerlo explícito en la representación. Pero como la profesora les exige buscar otro camino los estudiantes buscan entre los hechos geométricos aceptados, cuál o cuáles podrían servir para sustentar el hecho geométrico ocho [11-21]. Momentáneamente, parece que descartan el hecho geométrico uno [13]. Sin embargo, Karen intenta usarlo para construir un razonamiento válido [UHG-J] [21], mencionándolo como garantía y expresando, como dado, que tienen una circunferencia y dos radios. Aunque no dice explícitamente la conclusión, se infiere que se quiere referir a que los segmentos $\overline{AO}$ y $\overline{OB}$son congruentes. Laura corrobora que la garantía es el hecho geométrico uno [22]. El argumento realizado por Karen y Laura es analítico; tiene la siguiente forma:



ESQUEMA 15

Con respecto al establecimiento de las normas sociomatemáticas, en el episodio se observa que los estudiantes intentan poner en prácticados de ellas: “se usan varias formas de justificar” [VFJ] [11, 13, 24] y “se justifica con los hechos geométricos aceptados” [JHG] [12,14-21]. En el primer caso, los estudiantes mencionan que la justificación tiene que ser distinta a la que presentó Sofía cuando Karen compara el garante usado por ella mencionado por Laura [VFJ][23] y Cristian rechaza la propuesta por ser igual a la de Sofía [VFJ] [11]. No tenemos claro si deciden hacerlo por iniciativa propia o por sugerencia de la profesora, pero en todo caso intentan atender la solicitud. En el segundo caso, el uso de la norma se ve reflejado en la enumeración de los hechos geométricos que tienen permitido utilizar. Cristian y Karen invitan a Laura a leer cada uno de los hechos geométricos [JHG] [10, 11].

El programa GeoGebraPrim es un apoyo a la actividad demostrativa de los estudiantes en la medida en que ellos han aprendido a activar la opción ‘Redondeo’ para que, al tomar una medida, el programa arroje un valor más preciso, utilizando decimales. Así, pueden hacer explícita la congruencia de los radios de la circunferencia y recurrir al hecho geométrico que les permite justificar que el ángulo es recto. Cuando Karen se refiere a “Quiero hacer algo, quiero buscar algo de las milésimas...” [5] está precisamente mencionando la opción que brinda GeoGebraPrim. Adicionalmente, el programa les ofrece la oportunidad de escribir sus justificaciones haciendo uso de la opción “Texto” en la cual, por instrucción de la profesora, debían reportar lo hecho en cada clase. Por eso Karen pregunta “¿Dónde ésta [la opción] ‘Renombra´?” [8].

4.2.2. EPISODIO 2. CONSTRUCCIÓN DE UN CUADRILÁTERO *ADBC* A PARTIR DE LA CONSTRUCCIÓN DEL TRIÁNGULO *ADB*

Cristian, Karen y Laura trabajan, sin ayuda de la profesora, en la búsqueda de hechos geométricos distintos al hecho siete para justificar la conjetura. Después de discutir el término bisecar, Cristian le propone a sus compañeras enriquecer la construcción del triángulo *ABD*, trazando otro diámetro $\overline{DC}$. A partir de dicha construcción auxiliar, él se da cuenta que puede construir el cuadrilátero *ADBC* con los diámetros $\overline{AB}$ y $\overline{CD}$. Los niños arrastran uno de los vértices del cuadrilátero y se dan cuenta que $\overline{AB}$ y $\overline{CD}$ son congruentes, y por lo tanto, creen que pueden usar el hecho geométrico uno en la justificación de la conjetura.

25	Cristian:	No, ¡ah! Hay que hacer otro diámetro… yo sé por qué lo hago.	EBI-EF
…			
		[Traza el rayo *DO*, determina el punto *C* de intersección de la circunferencia con el rayo, y traza los segmentos $\overline{CA}$y $\overline{CB}$. (Figura 27)]	EBI-EF

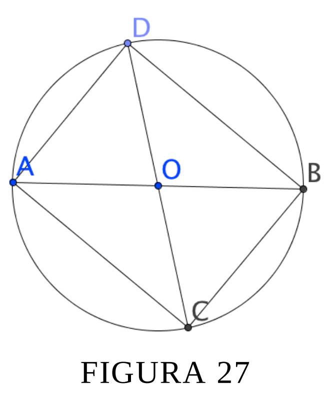


FIGURA 27

[Con la opción ‘Ángulo’ mide los ángulos del cuadrilátero *ADBC*] ¡Uh! (Figura 28)] — EBI-TM

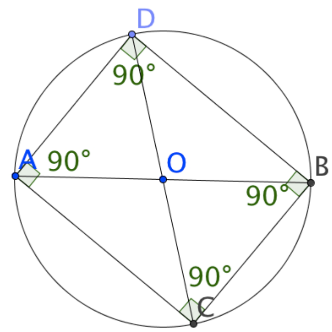


FIGURA 28

…

[Termina la construcción del cuadrilátero *ADBC*] ¡um! ¡Descubrí la propiedad!Construí una circunferencia con centro en *C*[sic O] [Arrastra en diferentes sentidos el punto *D*]. — DI FC EBI-AF VI-A

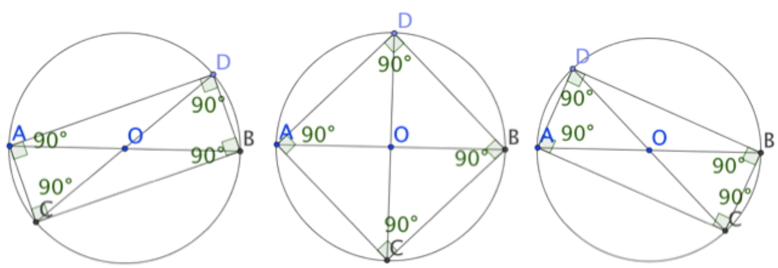


FIGURA 29

…

31	Laura:	*O*	UFC
32	Cristian:	[Comienza a dictar] Trazar el diámetro $\overline{AB}$, ubicar el punto *G* [sic *D*], ¿*G*?	
33	Laura	*D.*	
34	Karen:	¡No!, ¡pero Sofía ya lo había hecho!	VFJ

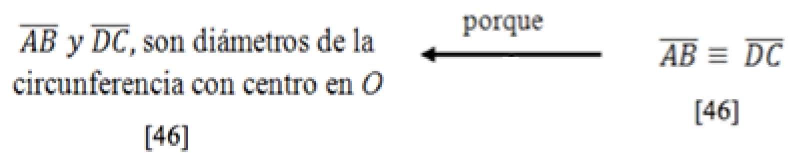
…

42	Cristian:	[Llaman a la profesora para que se acerque al grupo] Profe, ven, ¿así está bien? ¡Podría ser otra propiedad!	VFJ

43	Karen:	¿De qué? ¿De éstas? [Se refiere a los hechos geométricos conocidos]. Descubrimos otra, el primer hecho [sic, se refiere al hecho geométrico cinco] nos sirve.	
44	Cristian:	Mire. [Leyendo Si un cuadrilátero	
45	Karen:	No, el hecho geométrico:	UHG-J
46	Todos	[Lo recitan todos]. Los diámetros de una misma circunferencia son congruentes, y el diámetro auxiliar fue este.	
47	Cristian:	¡Ven profe!	

TRANSCRIPCIÓN 9

Con respecto a la actividad demostrativa, Cristian intuye que con otro diámetro en la figura puede encontrar otro camino para justificar. Posiblemente la intuición surge del hecho geométrico cinco. Sin explicar a sus compañeros qué pretende, hace la construcción auxiliar del diámetro $\overline{DC}$[EBI-EF] [25], probablemente en búsqueda de dos segmentos que se bisequen. Pero luego, traza los segmentos $\overline{AC}$ y $\overline{BC}$, formando el cuadrilátero *ADBC*, mide los ángulos del cuadrilátero y menciona que descubrió una propiedad [DI] [25]. Probablemente en ese momento se da cuenta que el cuadrilátero *ADBC* es un rectángulo, aun cuando él no lo hace explícito. Después, él mismo verifica dicho invariante arrastrando el vértice *D* para constatar que los ángulos siguen midiendo 90°,[VI-A] [25] mientras reporta a sus compañeras lo que hizo, para que ellas tomen apuntes [32]. Mientras habla, Laura le corrige los nombres que él le da a los vértices del cuadrilátero, lo que evidencia la preocupación de la estudiante por usar las formas comunicativas correctas [UFC] [31- 33]. Finalmente Karen, al observar la construcción del cuadrilátero *ADBC*, se da cuenta que pueden usar el hecho geométrico cinco en la justificación de su conjetura e invita a sus compañeros a recitarlo [UHG-J] [45]. El razonamiento realizado por los estudiantes puede considerarse como un argumento substancial, en tanto, ellos identifican que los segmentos $\overline{AB}$ y $\overline{DC}$ son congruentes e intentan justificar su congruencia a partir del hecho geométrico cinco. Dicho argumento se puede representar en el siguiente esquema:



ESQUEMA 16

Con relación a las normas sociomatemáticas, en el episodio se ve que los estudiantes tienen claro que deben buscar una forma diferente a la de Sofía para justificar la conjetura principal. Esto, para nosotros es una evidencia de que intentan cumplir las normas “varias formas de justificar” y “justificar con hechos geométricos conocidos”. El uso de la primera norma se aprecia cuando Karen cree que la construcción que realizó Cristian es semejante a la de Sofía [VFJ] [34] y parece rechazarla. En lugar de argumentar a Karen, Cristian decide apoyarse en la profesora, hecho que va en contra de los esfuerzos de la profesora porque los estudiantes se convenzan de los hechos con argumentos geométricos y no con argumentos de autoridad Mientras la llama, responde a Karen que su propuesta podría estar basada en otra propiedad [VFJ] [42]. Su reacción, lleva a Karen a buscar dentro de los hechos geométricos conocidos alguno que les pueda servir y a mencionar que ella cree que puede ser el hecho geométrico uno [VFJ] [43]. Cristian intenta hacer explícito el hecho geométrico seis que se refiere a cuadriláteros [44]. Sin embargo, es interrumpido por sus compañeras quienes leen el hecho geométrico cinco [46]. El uso de la segunda norma se hace explícito cuando los niños buscan en su listado de hechos geométricos, cuál les puede servir [JHG] [45, 46].

En cuanto al andamiaje, se puede decir que los estudiantes necesitan reportar a la profesora su propuesta de justificación para sentirse seguros con esta. No la validan de manera autónoma [42, 46]. Sin embargo, Cristian llama a la profesora cuando tiene una propuesta que sí ha encontrado por sus propios medios.

4.2.3. EPISODIO 3. ANÁLISIS DE LA DOBLE NATURALEZA DE LOS SEGMENTOS QUE SON DIÁMETROS DE LA CIRCUNFERENCIA Y A LA VEZ DIAGONALES DEL RECTÁNGULO

Una vez hecha la construcción del rayo $\overrightarrow{DO}$ y del cuadrilátero *ADBC*, Cristian, Laura y Karen llaman a la profesora para reportarle la construcción del cuadrilátero. Ellos creen que pueden usar el hecho geométrico cinco en la justificación de la conjetura. La profesora, con base en la construcción, conduce a los estudiantes a concluir que los diámetros $\overline{AB}$ y $\overline{DC}$también son las diagonales del cuadrilátero *ADBC*. Así, busca que ellos tengan elementos para avanzar en la justificación buscada.

…

51	Cristian:	Yo hice cualquier diámetro de *D* a *O*, con una recta que pasa por dos cositos [muestra los puntos *D* y *O*].	
52	Profesora:	*O* sea que si yo muevo esto, [arrastra el punto *D* en varias direcciones. Figura 30] ¡ah, si… ya! […]. Ya entendí que hiciste […] entonces hiciste el diámetro $\overline{DC}$. Listo, esa es nuestra construcción.	A-UHG EBI-AF

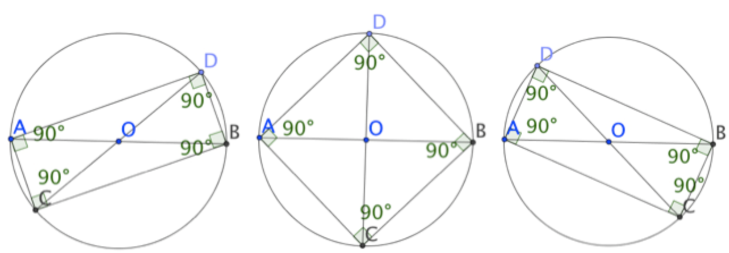


FIGURA 30

…

62	Cristian:	¿[Cuál es] la propiedad? ¿El hecho 5?	UHG-J JHG
63	Laura:	El hecho geométrico.	
64	Cristian:	[Lee] Los diámetros de una misma circunferencia son congruentes.	
65	Profesora:	Entonces, estamos diciendo que $\overline{AB}$ es congruente con $\overline{CD}$, y entonces… ¿Si se cortan los segmentos…?	A-UHG UFV
66	Cristian:	Sí, forman…	

67	Profesora:	¿Y entonces?	A-UFV
68	Cristian:	Forman, un…cua, ¡ahí sí!, una figura que forma un cuadrado y un rectángulo.	EPG
69	Profesora:	Entonces ¿que forman esas dos figuras? [señala los triángulos rectángulos *ABD* y *ABC*].	A-UHG
70	Cristian:	Cuadriláteros, forman cuadriláteros.	EPG
…			
75	Profesora:	Ustedes unieron, y se ayudaron del cuadrilátero ¿sí?, y ¿qué pasa con *AB*y *DC* además de ser diámetros de la circunferencia? Con relación al cuadrilátero ¿qué son?	A-IDE
76	Cristian:	Son congruentes.	UHG
77	Profesora:	Sí, son congruentes. Pero ¿qué son del cuadrilátero?	A-IDE
78	Cristian:	Entonces… ¡eh! Son…	
79	Profesora:	¿Qué son? ¿Qué son de ese cuadrilátero?, ¿*AB* y *CD*?	A-IDE
80	Laura:	Los diámetros, los diámetros… son diámetros.	EPG
81	Profesora:	De la circunferencia son los diámetros, pero del cuadrilátero ¿qué son?	A-IDE
82	Laura:	¡Del cuadrilátero no! ¡De la circunferencia!	
83	Profesora:	¿Qué son del cuadrilátero?, A ver ¿qué dices?, a ver, si lo movemos [arrastra el vértice *D* de *ADBC*. Figura 31]	A-IDE EBI-AF [A-VI-A]

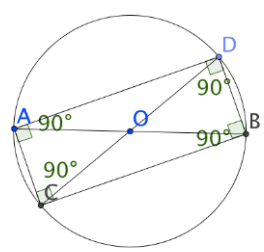


FIGURA 31

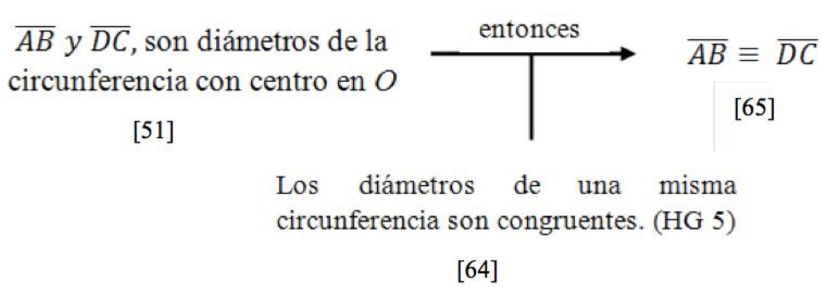
84	Laura:	¡Son diagonales!	IDE
85	Profesora:	Son las diagonales ¿del…?	A-IDE
86	Cristian:	Del cuadrilátero.	IDE

87	Profesora:	Del cuadrilátero.	A- IDE
88	Karen:	Pero rectángulo.	IDE

TRANSCRIPCIÓN 10

Con respecto a la actividad demostrativa, en este episodio se aprecia que Laura, Karen y Cristian no son capaces de elaborar solos la justificación de que el cuadrilátero *ADBC* es un rectángulo. Cristian ha relacionado la construcción de otro diámetro con un cuadrilátero y se da cuenta que es un rectángulo. Ha construido la figura que les es útil, Los tres niños buscan entre los hechos geométricos cómo garantizar que cuadrilátero es rectángulo. Afirman que el hecho que deben usar es el cinco que se refiere a la congruencia de los diámetros de una circunferencia [UHG-J] [62, 63, 64]. Pero no relacionan los diámetros con las diagonales del rectángulo y por eso no encuentran un camino para elaborar la argumentación completa.

Por otra parte, en este fragmento se observa que la profesora ayuda a los niños a estructurar un argumento analítico para validar que los diámetros $\overline{AB}$ y $\overline{CD}$ son congruentes [UHG-J] [62-64] transformando el argumento substancial que los niños habían realizado en el episodio anterior [Esquema 17]. En este argumento es ella quien expresa la conclusión. El argumento analítico tiene la siguiente forma:



ESQUEMA 17

Con respecto a las normas sociomatemáticas, en este episodio se ve que ninguno de los tres niños considera que ya han elaborado una justificación aceptable al medir los ángulos del rectángulo y obtener 90°. La medida es un mecanismo que usa Cristian para verificar la propiedad, pero no para justificarla [52]. La norma de “usar hechos geométricos para justificar” se pone en juego cuando Cristian y Laura hacen mención al hecho geométrico cinco, [JHG] [62, 63].

Con respecto al andamiaje, éste comienza cuando la profesora intenta que los niños afirmen que *ADBC* es un rectángulo, a partir del hecho geométrico seis. Les recuerda que ya concluyeron que los segmentos $\overline{AB}$ y $\overline{CD}$ son congruentes, y les da una pista, en forma de pregunta, sobre la bisección de dichos segmentos; mencionándoles: "$\overline{AB}$ es congruente con $\overline{CD}$", ¿y "entonces… ¿Si se cortan los segmentos [*AB* y *DC*]…?" [A-UHG] [65]. Pero, los estudiantes no perciben que los diámetros $\overline{AB}$ y $\overline{CD}$ también son diagonales del cuadrilátero *ADBC*. La profesora intenta entonces, que los estudiantes identifiquen la doble naturaleza de dichos objetos. Para ello, intenta que los estudiantes relacionen la congruencia de los diámetros con alguna propiedad del cuadrilátero [A-UHG] [65, 67]. Para que los estudiantes se enfoquen en los hechos geométricos necesarios para la justificación de la conjetura ella busca, probablemente, que los estudiantes visualicen el diámetro que se construyó como diagonal del cuadrilátero. Como no logra que los estudiantes establezcan la relación por su cuenta, hace preguntas directas dirigiendo la atención a la relación entre los diámetros y el cuadrilátero [A-IDE] [79, 81]. Se apoya en el programa GeoGebraPrim recurriendo al arrastre de elementos de la figura para que los estudiantes visualicen los diámetros como diagonales del rectángulo, proponiendo configuraciones en las que se hace evidente este hecho. Para ayudarlos a visualizar la propiedad, arrastra el vértice *D* en varias direcciones [A-VI-A] [83] hasta que Laura se da cuenta que también son las diagonales del cuadrilátero [84]. Finalmente, pide completar la frase: "De la circunferencia son los diámetros, pero del cuadrilátero […] ¡son las diagonales del…! [85, 87], hasta que logra que Karen complete la idea [IDE] [88].

Gracias al andamiaje de la profesora, apoyada en el programa GeoGebraPrim, los niños ven la doble naturaleza de $\overline{AB}$ y $\overline{CD}$ idea que es indispensable para elaborar la justificación que buscan. Esto se evidencia cuando Laura y Cristian se dan cuenta que $\overline{AB}$ y $\overline{CD}$ son diagonales [IDE] [84] del cuadrilátero *ADBC*[IDE] [86] y Karen a concluye que es un rectángulo.

4.2.4. EPISODIO 4. RECONSTRUCCIÓN DEL HECHO GEOMÉTRICO SEIS PARA VALIDAR LA CONJETURA

La profesora intenta que Karen, Cristian y Laura hagan explicito el hecho geométrico seis y lo pongan en juego para justificar que *ADBC*es un rectángulo (Figura 34). Para ello, reconstruye el hecho geométrico con sus estudiantes, a partir de que ya han identificado que los diámetros $\overline{AB}$ y $\overline{CD}$, que a su vez son las diagonales del cuadrilátero, son congruentes.

89	Profesora:	Y ¿cómo son esas diagonales [del cuadrilátero *ADBC*]?	A-UHG

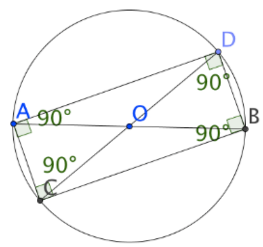


FIGURA 32

90	Laura:	Congruentes.	EPG
91	Profesora:	Son congruentes, y ¿qué más? ¿Qué más son?	A-UHG
92	Karen:	Se bisecan.	EPG
	…		
106	Profesora:	¡Ah!, y ¿qué nos puede salir?	A-UHG
107	Cristian:	El hecho 4. Y el de las definiciones.	UHG-J
108	Profesora:	¡Ah no! ¡El hecho 4 no! […]¿Nosotros, tenemos diagonales que son congruentes y se bisecan?, ¿entonces….?	A-EHG
109	Cristian:	Eso es un…	
110	Profesora:	Si un cuadrilátero tiene sus diagonales congruentes y se bisecan, entonces…	A-EHG
111	Cristian:	Otra vez.	
112	Profesora:	Si un cuadrilátero tiene diagonales congruentes y se bisecan, entonces es un…. ¡miren! ¿Qué dice el [hecho geométrico] 6?	A-UHG JHG

113	Cristian:	Si un cuadrilátero tiene ¡ahí!, entonces sería el [hecho geométrico] 6.	UHG-J
114	Profesora:	Entonces, ya, entonces tenemos que *ACBD* ¿es un…?	A-UHG
115	Laura:	Rectángulo	UHG-J
			UFV

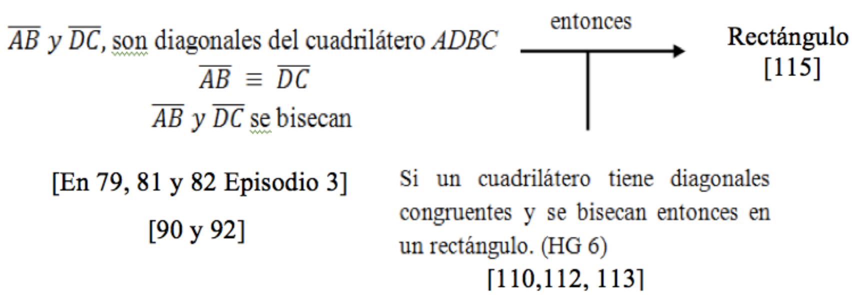
TRANSCRIPCIÓN 11

Con respecto al andamiaje, la profesora dirige la atención de los estudiantes a las dos propiedades que se tienen para poder usar el hecho geométrico seis y concluir que *ADBC* es un rectángulo. Mediante preguntas, centra la atención de los estudiantes en las propiedades geométricas de las diagonales que intervienen en el antecedente de la condicional del hecho geométrico [A-UHG] [89, 91]. Cuando Laura y Karen las explicitan [EPG] [90, 92], la profesora pregunta "¿qué nos puede salir?" [A-UHG] [90] [106] buscando con ello que los estudiantes concluyan que *ADBC* es un rectángulo.

Cristian y Karen mencionan un hecho geométrico equivocado, el hecho geométrico cuatro que dice: Si un cuadrilátero es un rectángulo entonces sus diagonales son congruentes y se bisecan. La profesora inicia otro tipo de andamiaje en busca de la explicitación del hecho geométrico. Para ello, les menciona las premisas de donde deben partir para hacer la deducción [A-EHG] [108]. Sin embargo, el paso de deducción resulta aún ser difícil para los niños, por lo cual, ella les pide completar la frase que da lugar al hecho geométrico [A-EHG] [110], incluso leyendo el hecho en sus cuadernos [A-UHG] [112]. Después, ella usa el hecho en la argumentación [UHG-J] [113] para que los estudiantes concluyan que el cuadrilátero *ABDC* es rectángulo [A-UHG] [114].

Con respecto a la actividad demostrativa, se puede observar que el andamiaje hecho por la profesora provoca que los niños expliciten las propiedades geométricas que han encontrado en la construcción del cuadrilátero *ABCD*, los segmentos $\overline{AB}$ y $\overline{CD}$ son congruentes y se bisecan. Así mismo, sólo con ayuda de la profesora los estudiantes logran organizar su razonamiento para que puedan establecer el antecedente de la condicional [EPG] [90, 92]. Pero, cuando ella les pide que busquen el hecho geométrico en donde se encuentra el antecedente de la condicional, Cristian se da cuenta que el hecho geométrico que va a servir para deducir que

ADBC es rectángulo es el hecho geométrico seis [UHG-J] [113]. Por lo anterior, Laura hace explícito el consecuente de la condicional [UHG-J] [115]. Consideramos que el argumento construido por la profesora, con intervención de los niños es el siguiente:



ESQUEMA 18

Finalmente, cuando la profesora les pide que lean la conclusión del hecho geométrico para ver qué pueden concluir ("¿qué dice el hecho geométrico?") [JHG] [112] está impulsando el uso de la norma sociomátematica de justificar con hechos geométricos conocidos. Sin embargo, su esfuerzo va más allá porque la profesora está realizando un andamiaje para que los niños aprendan a realizar un paso de deducción, usando el garante para pasar de los datos a la conclusión.

4.2.5. EPISODIO 5. JUSTIFICACIÓN DE LA CONJETURA A PARTIR DEL HECHO SEIS PARA CONCLUIR QUE EL ÁNGULO *D* ES RECTO

En este episodio la profesora pide a los estudiantes explicitar algunas propiedades del rectángulo *ADBC* (Figura 35). Con ello busca que los estudiantes justifiquen por qué el triángulo *ABD* es rectángulo con ángulo recto en *D*. Finalmente, la profesora ayuda a los estudiantes a estructurar su razonamiento para completar la justificación que valide la conjetura de Cristian quien, en el episodio 1 descubrió que el cuadrilátero formado a partir de dos diámetros de la circunferencia era un rectángulo.

116	Profesora:	Y ¿cómo sabes que es un rectángulo?	A-UFV
117	Cristian:	Tiene ángulos, tiene ángulos congruentes, tiene todos sus ángulos de 90 grados, ¿es una construcción robusta?	EPG

118	Profesora:	Claro. ¡Mira! Por qué yo lo subo, si muevo… entonces… mira lo que pasa acá. [Figura 33]	A-VI-A EBI-AF

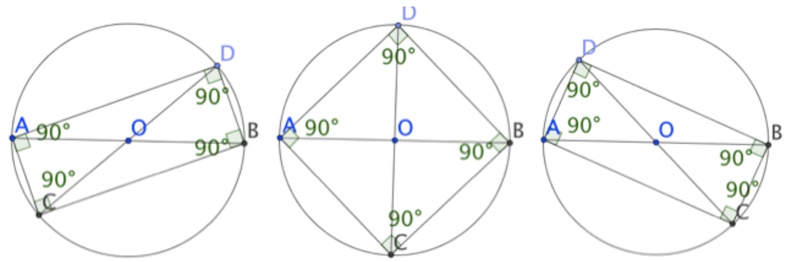


FIGURA 33

119	Cristian:	Siguen [los ángulos] de 90 grados.	VI-A
120	Profesora:	Y éstas son las construcciones robustas. […], por más que la alargues, que la achiques, […] siguen teniendo las misma propiedad, qué es el ángulo de 90 grados ¿cierto?… Listo, ¿qué pasa con el rectángulo?	A-UHG
…			
122	Laura:	Tiene diagonales congruentes y se bisecan entonces es un rectángulo	UHG-J
123	Profesora:	Listo, es un rectángulo ¿y qué es un rectángulo?	A-UHG
124	Cristian:	Es un cuadrilátero que tiene sus lados opuestos congruentes.	EPG
…			
126	Cristian:	Y sus lados contiguos desiguales, y todos sus ángulos de 90 grados.	EPG
127	Profesora:	Y todos sus ángulos de 90 grados. Entonces, si todos sus ángulos miden 90 grados, ¿por qué puedes decir que éste triángulo es rectángulo? El [triángulo] *ADB*. Porque eso es lo que queremos demostrar.	A-UFV
128	Cristian:	Porque tiene ángulos rectos.	UFV*
129	Profesora:	Tiene un ángulo recto, porque ese triángulo pertenece a un….	A-UFV
…			
132	Cristian:	¡Eh!... Un rectángulo.	EPG
133	Profesora:	Y un rectángulo ¿tiene?	A-UHG
134	Cristian:	Ángulos de 90 grados.	EPG

135	Profesora:	Ángulos de 90 grados. Entonces ¿si ven que con sólo hechos [geométricos] puedo decir que éste ángulo es recto y mide 90 grados? Sin la necesidad de utilizar la herramienta [medida]. Y ese es nuestro otro camino, ¿qué hechos y que definiciones utilizamos?	A-UFV JHG

TRANSCRIPCIÓN 12

Con respecto al andamiaje, la profesora orienta a Karen, Cristian y Laura para que realicen un razonamiento válido para garantizar que el triángulo *ABD* es un triángulo rectángulo, con base en propiedades de los ángulos del rectángulo *ADBC*[A-UFV] [116 y 127]. Para ello, la profesora induce a los niños a que corroboren mediante la función arrastre el invariante de que el ángulo *D* es recto [A-VI-A] [118] usando tanto propiedades conocidas por los estudiantes como hechos geométricos referidos a los rectángulos [A-UHG] [120, 123 y 133]. Luego propicia que los estudiantes puedan estructurar un argumento con el cuál puedan afirmar que el triángulo *ABD* es un triángulo rectángulo por tener ángulo recto en *D*. Dicho argumento, substancial, tiene la siguiente forma:

ADBC es un cuadrilátero con lados opuestos congruentes
$\angle A$, $\angle B$, $\angle C$ y $\angle D$, miden 90 grados
[124, 126]

$\xleftarrow{\text{porque}}$

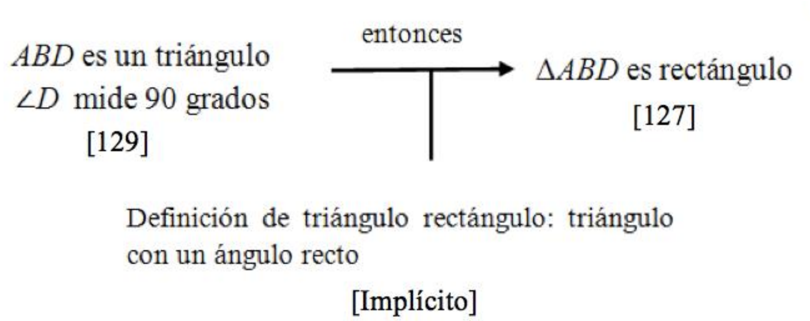
ADBC es rectángulo
[123]

ESQUEMA 19

Con respecto a la actividad demostrativa, se puede observar que los niños identifican que los ángulos del cuadrilátero *ADBC* son rectos y corroboran mediante la función arrastre, que el ángulo *D* es recto [VI-A] [117 y 119]. Así mismo, se observa que explicitan propiedades de los rectángulos que pueden servirles para estructurar el argumento substancial mencionado.

Con respecto a las normas sociomatemáticas, la profesora afianza la norma de justificar con hechos geométricos haciendo una pequeña reflexión sobre el trabajo realizado con ella para garantizar por qué el ángulo *D* es recto. Comenta que para validar una afirmación matemática es necesario recurrir a los hechos geométricos conocidos y aceptados todos y no usando las herramientas de medida del programa GeoGebraPrim para convencerse de la validez de la afirmación [JHG] [135]. En ese sentido declara la norma explícitamente.

Por otra parte, con la frase “Y ese es nuestro otro camino” [A-UFV] [135] la profesora está estimulando a que los estudiantes elaboren un argumento analítico basado en el argumento substancial que intentó elaborar con ellos. Esto puede evidenciarse cuando la profesora seguidamente les pide que identifiquen los hechos y definiciones que intervinieron en tal argumento. Posiblemente, está buscando que los estudiantes elaboren un argumento de la forma:



ESQUEMA 20

4.3.1. EPISODIO 1: JUSTIFICACIÓN DE LA CONGRUENCIA DE LOS SEGMENTOS $\overline{AO}, \overline{BO}$ Y $\overline{DO}$

Previamente a este episodio, Daniel, Óscar, Orlando, Michel y Anderson habían explorado la construcción que hicieron del triángulo ABD inscrito en la circunferencia con centro O y diámetro $\overline{AB}$, en busca de un argumento que justificara por qué el ángulo$D$ es recto. Por ello trazaron el segmento $\overline{OD}$. En este episodio los niños reportan la construcción y justifican que los segmentos $\overline{AO}, \overline{BO}$y $\overline{DO}$ son congruentes usando como garantía el hecho geométrico uno.

1	Profesora:	Michel, [veamos] hasta aquí ¿Cuál es la primera justificación?	EJ
2	Michel	¿La justificación?	
3	Profesora	Sí ¿Por qué ese triángulo [ABD] es rectángulo?	

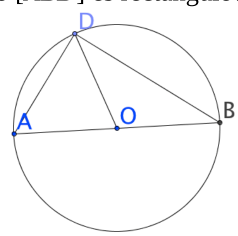


FIGURA 34

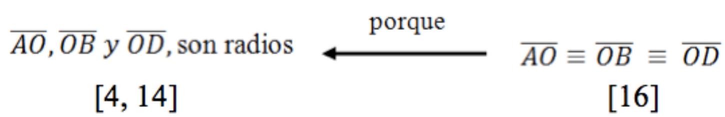
4	Michel:	Porque, eh, eh, los… ach, los segmentos comparten un mismo extremo.	EPG
5	Profesora:	¿Cómo son esos segmentos?	A-UHG
…			
12	Óscar:	Es $\overline{AO}$, $\overline{DO}$, $\overline{BO}$	EPG
13	Profesora:	¿Y qué pasa con esos segmentos?	A-UHG
14	Michel:	Eh… comparten un mismo extremo [O].	EPG
15	Profesor	Y ¿qué más?	A-UHG
16	Óscar:	Son congruentes.	EPG
17	Profesora:	¿Por qué son congruentes?	A-UHG
…			
29	Orlando	Porque son radios… congru…	UHG-J
30	Michel:	¡Congruentes!	UHG-J
31	Profesora:	¿Son radios …?	A-UHG
32	Óscar:	Porque los radios de una circunferencia siempre son congruentes, hecho geométrico número uno. Gracias.	UFV
33	Profesora:	Ah! Por eso son congruentes. Porque son radios de una misma circunferencia.	JHG
34	Anderson:	Por el hecho geométrico uno.	UHG-J

TRANSCRIPCIÓN 13

Con respecto a las normas sociomatemáticas, la profesora afianza la norma de "explicitar lo que se va a justificar" pidiendo a los niños que justifiquen por qué pueden afirmar que el triángulo *ABD* es rectángulo [EJ] [1-3]. En este mismo fragmento, la profesora también afianza la norma de "justificar con hechos geométricos aceptados", cuando conversa con los estudiantes sobre el proceso que se llevó a cabo para justificar por qué los segmentos $\overline{AO}, \overline{BO}$ y $\overline{DO}$ son congruentes y reitera que dicha justificación proviene del hecho geométrico uno [JHG] [33].

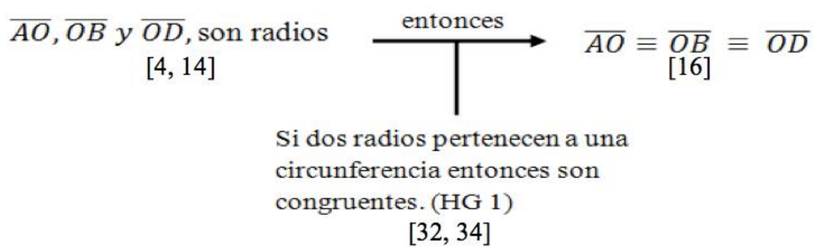
Con respecto al andamiaje, la profesora ayuda a los niños a estructurar y comunicar un argumento para justificar por qué el triángulo *ABD* es rectángulo. Para ello dirige la atención del estudiante hacia la congruencia de los segmentos $\overline{AO}, \overline{BO}$ y $\overline{DO}$ y a la justificación de la misma, al preguntarles: "¿Cómo son esos segmentos?", "¿Y qué pasa con esos segmentos?", ¿Por qué son congruentes?" y "¿Son radios?" [A-UHG] [5, 13,15]. En este sentido, busca que los niños estructuren un argumento que se base en el hecho geométrico siete. Pero para ello, trata de que los niños formulen la conclusión del mismo, de manera explícita, señalando que los tres segmentos sean congruentes [5]. Óscar específica tal propiedad, y la profesora encamina a los estudiantes al hecho geométrico uno para usarlo como garantía para validar la congruencia de los segmentos [A-UHG] [17 y 31]. Creemos que los niños de este grupo no tienen facilidad para usar los hechos geométricos en la justificación, aun cuando en las sesiones anteriores escucharon a Sofía y estos fueron institucionalizados. Por lo cual, la profesora procura que los usen.

Con respecto a la actividad demostrativa, se puede observar que Michel y Óscar visualizan (de manera perceptiva) y explicitan propiedades geométricas de los segmentos $\overline{AO}, \overline{BO}$ y $\overline{DO}$, como son que comparten el extremo *O* y que los tres segmentos son congruentes [EPG] [4, 12, 14, y 16]. Luego, gracias al andamiaje realizado por la profesora, Orlando y Michel logran estructurar un argumento substancial, diciendo que los segmentos son congruentes por ser los radios de una misma circunferencia [UFV] [17 y 32]. Dicho argumento substancial se representa en el siguiente esquema:



ESQUEMA 21

Finalmente, Óscar enuncia el hecho geométrico uno y lo usa para garantizar que los segmentos $\overline{AO}$, $\overline{BO}$ y $\overline{DO}$ son congruentes [UHG-J] [34]. El argumento analítico se representa en el siguiente esquema:



ESQUEMA 22

4.3.2. EPISODIO 2: ENUNCIACIÓN DEL HECHO GEOMÉTRICO SIETE PARA VALIDAR LA CONJETURA

Una vez hecha la construcción del segmento auxiliar $\overline{OD}$ e identificada la congruencia de los segmentos $\overline{AO}, \overline{BO}$y $\overline{DO}$ los niños se dan cuenta que pueden usar el hecho geométrico siete para justificar que el triángulo *ABD* es rectángulo. Por esta razón, con la guía de la profesora reconstruyen el hecho geométrico siete.

35 Profesora: VFJ

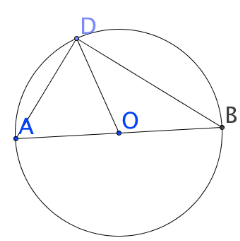


FIGURA 35

Listo, y ¿qué otro hecho geométrico utilizamos [en la justificación de que el triángulo *ABD* es rectángulo con ángulo recto en *D*]?

36 Michel El hecho geométrico siete. JHG

37 Profesora: Y ¿qué dice el [hecho geométrico] siete? A-EHG-J

…			
39	Orlando:	Si… tres segmentos son radios de una misma cir… no, no, no.	UHG-J HLM
40	Profesora:	Si tres segmentos…	A-EHG-J
…			
46	Orlando:	Si tres segmentos congruentes [$\overline{AO}$, $\overline{BO}$y $\overline{DO}$] comparten un mismo extremo [O] …	UHG-J HLM
47	Profesora:	Y ese extremo…	A-EHG-J
48	Orlando:	Y ese extremo [O] es el punto medio de $\overline{AB}$	UHG-J
49	Profesora:	de un segmento…	A-EHG-J
50	Orlando:	de un segmento	EPG
51	Profesora:	Que es el lado…	A-EHG-J
52	Orlando:	Que es el lado ¡um!	EPG
53	Profesora:	¿De quién?	A-EHG-J
54	Óscar:	De un triángulo [ABD].	EPG
…			
60	Profesora:	¡Ah! de un triángulo, entonces…	A-UFV
61	Óscar:	¡[Es] un triángulo rectángulo!	EPG
62	Profesora:	Entonces, el triángulo es un triángulo rectángulo	A-UFV
63	Orlando:	porque tiene [un ángulo que mide] 90 grados	EPG UHG-J
64	Profesora:	Bueno yo les decía, ya utilizamos el hecho geométrico el 1 y el 7. Ese es un camino. […].	VFJ

TRANSCRIPCIÓN 14

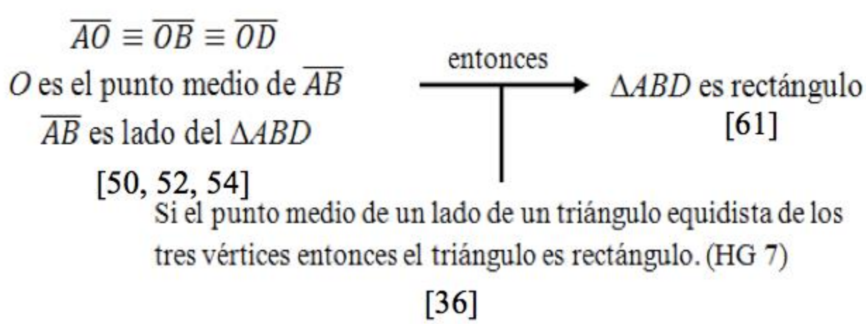
Con respecto a las normas sociomatemáticas, Michel pone en juego la norma de “justificar con los hechos geométricos aceptados” mencionando que el hecho siete puede ayudarles en la justificación [JHG] [36]. Luego, la profesora les pide a los niños enunciar tal hecho. Orlando tiene dificultades para expresarse el lenguaje matemático acordado pero él mismo se autocorrige, lo que evidencia que ha interiorizado la norma correspondiente[HLM] [39, 46].

Con respecto al andamiaje, luego de que Michel se da cuenta que pueden usar el hecho geométrico siete, la profesora guía a los niños para que puedan enunciarlo. Les pregunta, “¿qué dice el [hecho geométrico] siete?” [A-EHG-J] [37].Sin embargo, ella se da cuenta que dicha acción es insuficiente para el propósito que busca y decide ayudarles primero a reconstruir el hecho geométrico. Para ello comienza la formulación del hecho para que los niños lo completen

[A-EHG-J] [40, 47, 49, 51 y 53]. Después, inicia otro andamiaje, buscando que los estudiantes establecan un argumento válido para justificar la conjetura principal, a través del hecho geométrico siete. Para ello, con la expresión "¡Ah!, de un triángulo, entonces…" [A-UFV] [60] busca que los estudiantes se den cuenta de que lo que han dicho previamente [40, 47, 49, 51 y 53] son los datos que deben tener para usar el hecho geométrico siete como garantía para concluir que el triángulo *ABD* es rectángulo [A-UFV] [60 y 62]. Como el hecho fue institucionalizado como una expresión condicional en la clase de matemáticas, la profesora busca que los estudiantes expresen claramente el antecedente y el consecuente de la afirmación que deben validar.

Con respecto a la actividad demostrativa, se puede observar que los niños explicitan las propiedades geométricas del antecedente de la afirmación que se va a justificar, para usar el hecho geométrico siete como garantía [EPG] [50, 52, 54, 61, 63], aun cuando esto se hace de la mano de la profesora y se ve que los niños tienen dificultades para nombrar matemáticamente los objetos geométricos que intervienen en los datos. De allí que surja la necesidad de reconstruir los hechos geométricos.

De las intervenciones que hace la profesora entre vemos que ella desde un principio busca que los niños estructuren infructosamente el siguiente argumento analítico:



ESQUEMA 23

En este fragmento no se ve que los estudiantes tengan éxito en la formulación de argumentos analíticos y no tenemos evidencias de que los estudiantes puedan reconstruir el argumento, tal como la profesora esperaba que lo hicieran. Por el contrario, se puede observar que

Orlandojustifica que el triángulo *ABD* es rectángulo [UHG-J] [63], planteando el siguiente argumento substancial:

ABD es un triángulo
$\angle D$ mide 90 grados
[54, 63]

porque ←

ΔABD es rectángulo
[62]

ESQUEMA 24

4.3.3. EPISODIO 3. EXPLORACIÓN DE INVARIANTES ENRIQUECIENDO Y DETECTANDO PROPIEDADES DE LA FIGURA

Después de la conversación anterior, la profesora pide a los estudiantes buscar otra forma de jutificar que el ángulo D es recto. Michel propone realizar sobre una construcción auxiliar, el diámetro $\overline{DC}$. Suponemos que la idea surgió haciendo alusión al hecho geométrico cinco. Gracias a dicha construcción los niños logran visualizar un triángulo *BDC* con ángulo recto en *B*, y el rectángulo *ADBC*. Después de un tiempo de trabajo, la profesora se acerca y les pide el reporte de lo que han hecho.

65	Michel:	Tomamos otro diámetro [$\overline{DC}$]	EBI-EF
66	Profesora:	Entonces nos vamos a ayudarnos de una construcción auxiliar. Así como hicimos [el segmento],; vamos hacer otro … , ¿otro qué?... diámetro	A-EBI
67	Michel:	que pase por *D*.	EPG
68	Profesor:	¿El diámetro por dónde debe pasar siempre?	A-UHG
…			
72	Todos:	Por *O*.	EPG
73	Orlando:	¡Se los dije!	
74	Profesora:	Listo, ¿entonces?	A-EBI
	Michel:	[Toman un punto *C* de la circunferencia, y trazan la semirrecta $\overrightarrow{CO}$ y la arrastran hasta que pase por el punto *D*].	EBI-EF

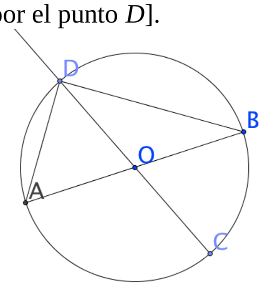


FIGURA 36

75	Profesora:	¿Qué pasó?, ¿qué miras ahí?, ¿qué puedes ver?	A-EBI
…			

77	Orlando:	Se dividió la otra parte de la circunferencia.	
78	Profesora:	Se dividió la otra parte ¿qué más?	A-UHG
…			
80	Orlando:	Se ve como un… trian [triángulo], ¡ahí! ¡ahí!	EPG
81	Profesora:	Esperen a ver. ¡Ahí!, ¡si!, ¡si! ¿Cómo qué?	A-UHG
82	Orlando:	Ahí se ve un triángulo [señala *BDC*], en esta parte es un triángulo, pero esta parte [el lado $\overline{BC}$], no está.	EPG EBI-EF

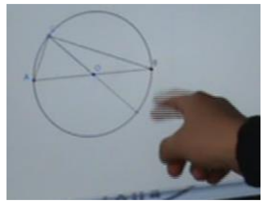


FIGURA 37

83	Profesor:	¡Ah pues ayúdame!, él dice que si trazas un segmento ¿[qué] dices?	A-EBI
84	Michel:	Si trazo un segmento entre *B* y ese puntico [*C*], ese segmento [$\overline{BC}$] forma un triángulo [*BDC*] [Construyen el segmento *BC*].	EPG EBI-EF

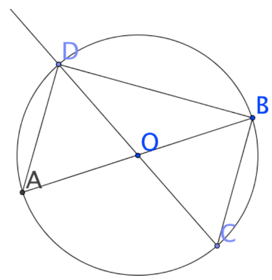


FIGURA 38

85	Profesor:	Ah ¿y [a] qué [se] parece [el cuadrilátero *ADBC*]?	A-UHG
86	Michel:	Parece un… cuadrado… rectángulo	EPG
87	Niños:	[Trazan el segmento $\overline{AC}$ para construir el cuadrilátero].	EBI-EF

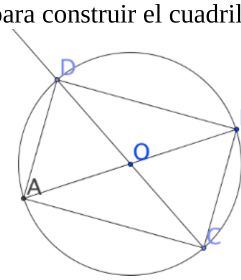


FIGURA 39

TRANSCRIPCIÓN 15

Con respecto a la actividad demostrativa, se puede observar que Michel junto a sus compañeros, enriquece la figura del triángulo *ABD* trazando otro diámetro $\overline{CD}$ y trazando el segmento $\overline{BC}$, con el objetivo de buscar una propiedad que les permita estructurar una justificación de la conjetura principal [EBI-EF] [74, 84]. A su vez, con la ayuda de la profesora, logra especificar propiedades geométricas del diámetro como son que su extremo es D y que pasa por el centro O de la circunferencia [EPG] [67, 72]. La representación les permité visualizar otra figurasy especificar sus propiedades, aun cuando no hayan trazado el segmento $\overline{AC}$. Se dan cuenta que, *ABD* es un triángulo y *ADBC* es un cuadrilátero [EPG] [80, 82, 84].

Con respecto al andamiaje, la profesora encamina a los niños a seguir la idea, propuesta por Michel, de hacer la construcción auxiliar del diámetro $\overline{DC}$[65]. Con su pregunta "¿El diámetro por dónde debe pasar siempre?" [A-UHG] [68] busca que los niños usen la herramienta semirrecta de GeoGebraPrim y garanticen que $\overline{CD}$ pase por el centro O de la circunferencia, y por lo tanto, su construcción sea robusta [68]. Luego, se refiere al cuadrilátero *ADBC* y les pregunta qué tipo de cuadrilátero creen que es. Esto con el fin de que encuentren que el cuadrilátero es un rectángulo y tengan elementos para justificar que el triángulo *ABD* es un triángulo rectángulo [A-EBI] [75, 83].

4.3.4. EPISODIO 4. RECONSTRUCCIÓN DEL HECHO GEOMÉTRICO SEIS PARA VALIDAR LA CONSTRUCCIÓN QUE HICIERON DEL RECTÁNGULO *ADBC*.

En el episodio anterior, Michel sugiere hacer la construcción auxiliar del diámetro $\overline{CD}$ y ve que el rectángulo puede ser útil en la justificación. Cuando los niños identifican el rectángulo *ADBC*, deciden usar propiedades de las diagonales en la justificación, haciendo uso del hecho geométrico seis "si un cuadrilátero tiene diagonales congruentes y se bisecan, entonces es un rectángulo". Luego, con orientación de la profesora, comienzan a reconstruir dicho hecho geométrico.

88	Profesora:	Pues argumentemos [¿Por qué el cuadrilátero *ADBC* es un rectángulo?]	A-EHG-J JHG

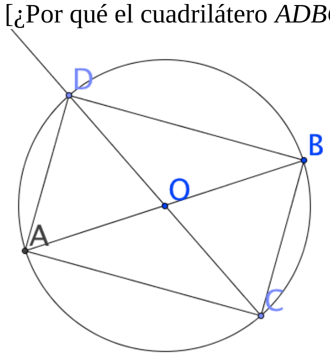


FIGURA 40

…			
91	Mario:	Esa fue la anterior actividad que hicimos [se refiere a la justificación del hecho geométrico seis].	JHG
92	Profesora:	Y ¿qué decía esa actividad?	A-EHG-J
...			
97	Anderson:	Si un cuadrilátero es un rectángulo entonces sus diagonales son congruentes y se bisecan.	UHG-J
98	Daniel: Orlando:	No, vea.[Lee].si un cuadrilátero tiene diagonales congruentes y se bisecan entonces el cuadrilátero es un rectángulo.	HLM UHG-J
…			
103	Profesora:	¿De dónde partimos? Los diámetros, ¿qué vienen siendo ahí en ese cuadrilátero? […] ¿Cuáles son los diámetros?, [el diámetro] $\overline{AB}$ y ¿cuál es el otro diámetro?	A-UHG A-IDE
…			
115	Anderson:	$\overline{DB}$.	HLM
116	Michel:	No, $\overline{DC}$.	HLM
117	Profesora:	Bueno, estos [segmentos $\overline{AB}$ y $\overline{DC}$] son los diámetros de la circunferencia. Y ¿qué son en el cuadrilátero?	A-IDE
…			
120	Óscar:	Son las diagonales.	IDE
121	Profesora:	Y ¿cómo son esas diagonales?	A-UHG
122	Mario:	Congruentes.	UHG-J
…			
126	Profesora:	¿Por qué son congruentes?	A-UHG
…			

130	Daniel:	Porque un radio que pertenece a una circunferencia son congru, ¡ay, no esa no!	HLM
131	Profesora:	Pero como estamos hablando de diámetros, ¿hay algo con diámetros en nuestros hechos?	JHG A-EHG
132	Michel:	Si, la regla hecho geométrico 5.	JHG
133	Profesora:	¡De diámetros!	A-EHG
…			
137	Orlando:	¡Ah sí! los diámetros de una circunferencia son congruentes. Es lo único que hay con diámetros.	JHG
…			
142	Profesora:	Entonces ¿qué pasa con esos diámetros?	A-EHG
143	Anderson:	Se vuelven congruentes […]son congruentes	UHG-J
…			
146	Profesora:	Bueno, aparte de ser los diámetros de la circunferencia, ¿que son del cuadrilátero?	A-IDE
147	Óscar:	Diagonales.	EPG
148	Daniel:	y se bisecan.	EPG
149	Profesora:	Cuando yo tengo diagonales congruentes y se bisecan, ¿qué pasa?	A-EHG UFV
150	Orlando:	Se forma un rectángulo.	UFV

TRANSCRIPCIÓN 16

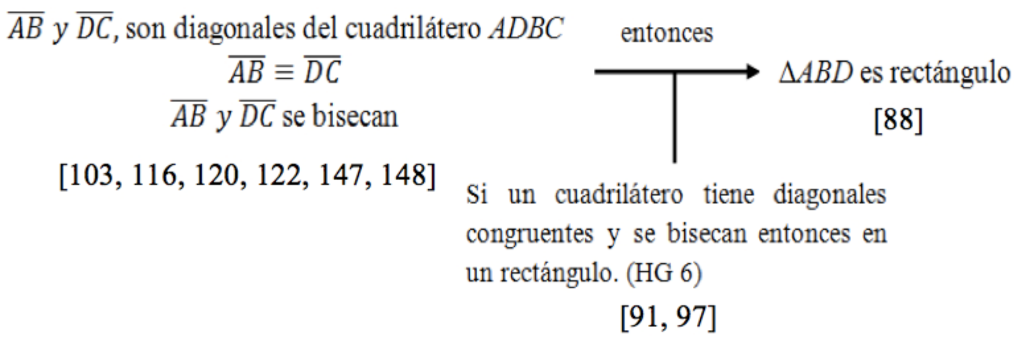
Con respecto a las normas sociomatemáticas, se puede observar que la profesora por medio de la frase “¡pues argumentemos!” [JHG] [88] refleja su intención de poner en juego la norma de “justificar con hechos geométricos aceptados”. . Esta norma también funciona cuando Mario hace mención haber realizado ya ese tipo de actividad, es decir, haber usado el hecho geométrico xxx al justificar la conjetura que surge del problema cinco [JHG] [91]. Y también se ve reflejada cuando la profesora, en un intento de que los niños encuentren la doble naturaleza de los segmentos $\overline{AB}$ y $\overline{DC}$, les pide que busquen hechos geométricos, relacionados con los diámetros [JHG] [131].

En este episodio, también se observa que la profesora promueve la norma sociomatemática de hablar en el lenguaje matemático acordado. Esto se puede evidenciar cuando Daniel y Orlando le dicen a Anderson que el hecho geométrico que puede ayudarlos a justificar que *ADBC* es un rectángulo es el hecho geométrico seis y no el cuatro [HLM] [98]. Ellos parecen entrever en el hecho las condiciones que se necesitan para afirmar que *ADBC* es un rectángulo, lo que puede estar reflejando cierta comprensión en el funcionamiento de un teorema, que es propio del lenguaje de las matemáticas. Así mismo, está norma también es usada por los estudiantes cuando ellos intentan nombrar apropiadamente los segmentos $\overline{AB}$ y $\overline{DC}$ como diagonales [HLM] [115 y 116].

Con respecto al andamiaje, luego de que Mario visualiza la figura del cuadrilátero *ADBC* y la relaciona con la justificación que hizo su grupo del hecho geométrico seis, la profesora se vale de este hallazgo para impulsar al grupo a enunciar este hecho geométrico para validar que el cuadrilátero *ADBC* es un rectángulo [A-EHG-J] [88 y 92]. Formula a los estudiantes algunas preguntas para dirigir su atención en al hecho geométrico seis [A-UHG] [103 y 121]. Sin embargo, al darse cuenta que los niños no logran enunciar el hecho geométrico, porque no han identificado que las diagonales del cuadrilátero *ADBC* son los diámetros $\overline{AB}$ y $\overline{CD}$ de la circunferencia, promueve que los estudiantes encuentren la doble naturaleza de esos objetos geométricos [A-IDE] [103, 117 y 146].

Posteriormente, la profesora impulsa a los niños a enunciar el hecho geométrico seis, mencionándoles el antecedente del hecho para que ellos digan el consecuente, y así puedan establecer la válidez del hecho que surge de la construcción. Es decir, la profesora les dice a los niños que el cuadrilátero tiene diagonales congruentes que se bisecan, y busca que ellos, concluyan que el cuadrilátero *ADBC* es rectángulo [A-EHG] [131, 133, 142 y149].

Con respecto al aprendizaje de la demostración, junto con la profesora los niños estructuran un argumento analítico para validar que el cuadrilátero es un rectángulo. Si bien, los estudiantes no mencionan la garantía explícitamente para validar la afirmación, nosotros consideramos que al estar reconstruyéndose el hecho geométrico, los estudiantes lo están tomando implícitamente como garantía para concluir que *ADBC* es un rectángulo [UFV] [149 y 150]. El esquema es:



ESQUEMA 25

4.3.5. EPISODIO 5 VERIFICACIÓN DE LA MEDIDA DEL ÁNGULO *D* POR MEDIO DEL ARRASTRE

Anderson, Michel y Orlando, vuelven a constatar que el ángulo *D* mide 90 grados, aun cuando ya lo habían justificado. Para ello, se valen de la definición del cuadrilátero *ADBC* y el arrastre.

…			
154	Profesora:	Si tengo un rectángulo ¿Qué es un rectángulo?	A-UHG
…			
158	Anderson:	Que tiene un ángulo recto.	EPG
159	Michel:	Es un cuadrilátero con cuatro ángulos rectos y dos pares de lados congruentes.	
160	Orlando:	¡Ah! yo dije.	UHG-J
161	Profesora:	¿Cómo son sus ángulos [del cuadrilátero *ADBC*]?	A-UHG
162	Todos	Rectos.	EPG
163	Orlando:	Tiene cuatro ángulos rectos.	
164	Profesora:	Entonces como es recto…	A-UFV*
165	Michel:	Mide 90 grados.	UFV
166	Profesora:	Mide 90 grados, entonces ¿qué sería el ángulo *D*?	A-VI-A
167	Orlando:	[Comprueban la medida del ángulo y hacen el arrastre]	VI-A

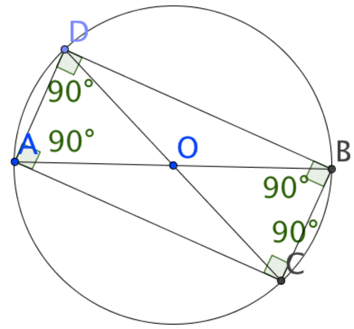


FIGURA 41

168	Profesora:	¿Cambia [la medida d]el ángulo [*D*]?	A-EHG-J
169	Todos:	No.	EPG

TRANSCRIPCIÓN 17

Con respecto al andamiaje, la profesora dirige la atención de los niños al rectángulo *ADBC* con el propósito de que identifiquen propiedades como "todos los ángulos internos de *ADBC* son rectos". Para ello, les pregunta: "¿Qué es un rectángulo?" y"¿Cómo son sus ángulos?" [A-UHG] [154 y 161]. Después de que los estudiantes mencionan que los ángulos son rectos y miden 90 grados, la profesora promueve que hagan uso de formas de razonamiento válidas para justificar que el triángulo *ABD* es rectángulo, y que usen la propiedad del ángulo *D* (es recto) como garantía para validar, es decir, que el triángulo *ABD* es rectángulo por que mide 90 grados [A-UFV][164]. Luego, estimula a los estudiantes a que usen la función arrastre para verificar que el ángulo *D* no cambia su medida. Para ello, les pregunta: ¿sería el ángulo *D*? [A-VI-A] [166]. Finalmente, induce a sus estudiantes a explicitar la definición "un triángulo rectángulo es el que tiene un ángulo que mide 90 grados" como garantía para llegar a concluir que el triángulo *ABD* es rectángulo con ángulo recto en *D*; formulándoles la pregunta "¿Cambia el ángulo [*D*]?" [A-EHG-J] [168].

Con respecto a la actividad demostrativa, se puede observar que Michel enuncia algunas propiedades de los objetos geométricos [EPG] [158, 162 y 163]. Así mismo, se observa que los estudiantes usan la herramienta de arrastre del programa GeoGebraPrim para verificar que auncuando se arrastre el ángulo *D* este siempre va a tener una medida de 90° grados, y por lo tanto, *D* siempre va a ser recto [VI-A] [158, 162 y 163].

Consideramos que gracias al andamiaje hecho por la profesora los niños pueden estructurar un argumento analítico para validar que el ángulo *D* es recto. Dicho argumento tiene como garantía la definición de ángulo recto, pero los niños no la hacen explicita. El argumento analítico tiene la siguiente forma:

El cuadrilátero *ADBC* tiene cuatro ángulos rectos **[159, 163]** $\xrightarrow{\text{entonces}}$ El cuadrilátero *ADBC* tiene cuatro ángulos que miden 90 grados cada uno **[165]** $\xrightarrow{\text{entonces}}$ $\angle D$ es recto **[158]**

ESQUEMA 26

5. RESULTADOS DEL ESTUDIO

En este capítulo, presentamos los resultados del Experimento de Enseñanza que se desarrolla en el trabajo de grado. Para organizar los resultados, hacemos tablas en donde mostramos la frecuencia con que aparecen los indicadores de las categorías que usamos en los análisis que presentamos en el capítulo anterior (ver herramienta analítica para entender los códigos que aparecen en las tablas). Hacemos una tabla para cada categoría y analizamos la información que nos arroja teniendo como referencia los propósitos del estudio, la revisión de la literatura, el marco de referencia y los análisis de los datos de investigación. Con estos análisis buscamos revelar algunos aspectos que se destacan de: la manera en que los estudiantes avanzaron en su aprendizaje de la demostración, el ambiente que se promueve en la clase, la gestión que hace el profesor, la forma en que se desarrolla el trabajo matemático de los estudiantes, y el uso del programa GeoGebraPrim; aspectos de desde nuestro punto de vista ayudan a que los estudiantes de educación primaria se introduzcan en la práctica de demostrar.

5.1. RESPECTO AL DISEÑO Y FUNCIONAMIENTO DE LA TRAYECTORIA DE ENSEÑANZA QUE FAVORECE LA ACTIVIDAD DEMOSTRATIVA

Consideramos que el diseño de la trayectoria de enseñanza que se puso en juego a través del desarrollo del Experimento de Enseñanza favoreció que los niños se introdujeran a la práctica de demostrar. Aún cuando no hicimos el análisis detallado de la actividad demostrativa que llevaron a cabo los estudiantes en los problemas previos al siete, en este último problema se observan los efectos de los esfuerzos que se realizaron para que ellos se introdujeran en la práctica de demostrar. Sin esta secuencia no hubiera sido posible cumplir con ese objetivo.

El grupo SOIG muestra que niños entre los 8 y 10 años de edad sí pueden ser introducidos a la práctica de demostrar. En el episodio 2 se puede observar que los niños, autónomamente, pueden establecer un argumento analítico para justificar la conjetura principal mediante el hecho geométrico cinco. Sin embargo, no podemos decir que todos los grupos actuaron de la misma manera. Por ejemplo, en los episodios 4 de los grupos CRIKALA y DOMA, se ven indicios de las potencialidades que tienen los niños para hacerlo, pero con la ayuda de la profesora. Esto nos permite mostrar que el Experimento de Enseñanza fue útil en ese sentido. También vemos que hay dificultades para que niños como Daniel y Anderson sigan unas instrucciones pero de manera autónoma se involucren en la actividad.

Un aspecto de la actividad demostrativa a resaltar, es que gracias a que surgió en la clase la idea de hacer otro diámetro, $\overline{DC}$, para enriquecer la construcción del triángulo ABD se pudo avanzar en la intención de buscar otra forma de justificar. Probablemente la idea surgió porque para la construcción propuesta en el problema cinco en la que tenía que hacer un rectángulo a partir de sus diagonales, habían usado la herramienta circunferencia para trazar dos diámetros y así construir el cuadrilátero que se les pedía. En una de las socializaciones se compartió esta idea y por esta razón, en la resolución del problema siete los tres grupos hicieron la construcción auxiliar del diámetro $\overline{DC}$. Sin embargo, cabe destacar el apoyo del programa GeoGebraPrim que les facilitó construir, explorar, descubrir y conjeturar propiedades de los objetos geométricos.

En la tabla 8 presentamos la frecuencia con la que aparecieron los indicadores que usamos para identificar cuándo los estudiantes realizaban actividad demostrativa para justificar las soluciones que dieron al problema siete.

GRUPO	**EBI-EF**	**EBI-AF**	**EBI-TM**	**DI**	**VI-A**	**FC**	**IDE**	**EPG**	**EPG***	**UHG- J**	**UHG-E**	**UFV**	**UFV***	**[11]UFC**
SOIG	7	0	1	0	0	2	5	10	0	9	5	5	1	4
CRIKALA	4	4	2	1	2	1	3	11	0	5	0	2	1	1
DOMA	5	0	0	0	1	0	1	20	0	12	0	4	0	1
TOTAL	**16**	**4**	**3**	**1**	**3**	**3**	**9**	**41**	**0**	**26**	**5**	**11**	**2**	**6**

TABLA 8

[11] El indicador usa forma comunicativas aceptadas (UFC) se encuentra relacionado con el indicador habla en un lenguaje matemático (HLM).

En esta tabla se puede observar que la mayor frecuencia se encuentra en el indicador de explicitación de propiedades geométricas seguido del uso de hechos geométricos para justificar propiedades. Adicionalmente, se observa que todos los grupos usaron formas comunicativas y formas de razonamiento válidas con lo cual este es un indicio de que los estudiantes se introdujeron a la práctica de demostrar, en el sentido propuesto por Stylianides (2007).

La tabla nos revela que el grupo SOIG es el único que usa hechos geométricos para explicar las construcciones. Además, con respecto a los otros grupos es el que menos número de propiedades de los objetos geométricos expresa. Suponemos que esto se debe a que este grupo se destacó en el uso del lenguaje matemático para comunicar las ideas que surgían por el trabajo de resolución de problemas, lo cual pudo haber posibilitado que Sofía recordará más fácilmente los hechos geométricos y usara solo los necesarios en la justificación de los problemas. Ello está relacionado al hecho de que Sofía fue quién más lideró las socializaciones lo que posibilitó que tuviera mayores oportunidades para explicar las justificaciones que ella e Ignacio hicieron y que tuviera la oportunidad, en tiempo real, de que la profesora corrigiera su lenguaje y lo fuera perfeccionando.

Lo anterior, ayudó a que este grupo sea en el que más aparece el indicador de enriquecer las construcciones del triángulo *ABD* y del rectángulo *ADBC*, dado que ellos alcanzaron a ganar una mayor autonomía para resolver es problema. Es el único grupo que identifica, de manera autónoma, la doble naturaleza de los segmentos $\overline{AB}\ y\ \overline{DC}$.

La tabla 8 nos muestra que el grupo CRIKALA es el que más identificó y verificó invariantes por arrastre [EBI-AF] en las construcciones con respecto a los otros dos grupos. Esto puede deberse a que el grupo procedió de manera distinta a los demás para realizar la construcción del triángulo *ABD* Una vez construido, $\overline{OA}$, $\overline{OB}$ y $\overline{OD}$ y antes de trazar el triángulo *ABD* verificaron la congruencia de los segmentos, mientras que, por ejemplo el grupo de SOIG construyó los tres segmentos y el triángulo *ABD* para luego justificar que los segmentos fueron congruentes.

CRIKALA fue el grupo que más usó la herramienta "medida de longitudes y ángulos" que les proporcionaba el programa GeoGebraPrim para detectar y verificar propiedades. Se valieron de la herramienta para verificar que los segmentos $\overline{OA}$, $\overline{OB}$ y $\overline{OD}$ eran congruentes y luego usar el hecho geométrico uno como garante para justifiar dicha propiedad. Más adelante, el grupo procedió midiendo los ángulos del rectángulo *ADBC*, y fijándose en las marcas que hace el programa (de los ángulos rectos) para intentar justificar que el triángulo *ABD* es rectángulo con ángulo recto en *D*.

Con respecto a lo anterior, consideramos que el hecho de que haya sido el grupo que más uso la herramientas de GeoGebraPrim para buscar invariantes, está muy ligado al planteamiento que hacen Hanna (2000, citado en Mariotti; 2006) y Mariotti (2006) sobre el efecto del uso de programas de geometría dinámica. Las autoras destacan que la capacidad gráfica de estos programas estimula la exploración matemática y hace que sea más fácil plantear y justificar conjeturas. En el caso de éste grupo, nosotros observamos que la manera en que proceden los niños, para justificar la validez de las construcciones, consiste inicialmente en convencerse, a través de las medidas, que las conjeturas son ciertas y luego justificarlas a través de los hechos geométricos. Esto llevó a que sea el grupo en donde menos apareció el indicador de usar hechos geométricos. Sin embargo, nosotros no vemos que esto sea negativo, en tanto somos consientes del nivel de escolaridad en el que se encuentran, y compartimos con Stylianides (2007) y Yackel y Cobb (1996) que ésta es una vía para que los estudiantes paulatinamente vayan comprendiendo qué es lo que se considera como matemáticamente aceptable para validar las conjeturas que se hacen.

En la tabla 8 se observa que el grupo DOMA es el que más especifica propiedades de los objetos geométricos y los usa para justificar la conjetura principal. En el caso del triángulo *ABD*, la visualización que hicieron de los segmentos $\overline{OA}$, $\overline{OB}$ y $\overline{OD}$ no los llevó a reconocer fácilmente que los segmentos eran congruentes. Sólo reconocieron que los segmentos tenían en común el punto *O*, lo que hizo que tuvieran gran dificultad para identificar la congruencia de dichos segmentos. Probablemente esta dificultad se debe a que les hizo falta afianzar más los hechos geométricos en la justificación de las conjeturas. Sin embargo, esto es por la personalidad misma de los niños. A diferencia de Sofía, los niños de este grupo no mostraron una actitud positiva para liderar las socializaciones y tener más oportunidades para que la profesora corrigiera su lenguaje y su razonamiento. Por esta razón, la profesora con este grupo tuvo que hacer un gran esfuerzo para que los niños enunciaran los hechos geométricos, y por lo tanto tuvieran que hacer tal enunciación casi silábicamente.

Con respecto a los 16 argumentos analíticos y 10 argumentos substanciales que elaboraron los niños, con y sin la ayuda de la profesora, consideramos que la producción de argumentos fue posible gracias al esfuerzo que hizo la profesora de establecer una "cultura del por qué" (Jahnke, 2005; citado en Mariotti, 2006). Por ejemplo, en el caso de SOIG se puede observar que ellos no se conformaron solamente con justificar con el hecho geométrico siete que el triángulo *ABD* era rectángulo, sino que fueron más allá, buscando justificar que los segmentos $\overline{OA}$, $\overline{OB}$ y $\overline{OD}$ eran congruentes, dado que el grupo buscaba entender porqué debían usar esta afirmación como dato para poder usar el hecho geométrico siete, como garantía para validar la conjetura.

A través de los análisis, pudimos corroborar la idea que plantea Krummheuer (1993) acerca de que es común que los niños, al ser introducidos en la práctica de demostrar, estructuren más argumentos substanciales que analíticos. No nos atrevemos a hablar de evolución del mundo empírico al mundo teórico de la demostración en los estudiantes con los que trabajamos, en tanto, no hicimos un seguimiento prolongado a uno de los grupos para analizar dicha evolución.

5.2 RESPECTO A LA CARACTERIZACION DEL PAPEL DEL PROFESOR PARA INTRODUCIR A LOS ESTUDIANTES A LA PRÁCTICA DE DEMOSTRAR

Para el caso de este Experimento de Enseñanza, consideramos que los estudiantes con los que se llevó a cabo este estudio, elaboraron varios argumentos analíticos gracias al apoyo de la profesora, quien les ayudo a reconstruir los hechos geométricos que se necesitaban para justificar la conjetura, de manera, que estos hechos fueran tenidos en cuenta por los estudiantes en la elaboración de los argumentos.

Creemos que la actuación de la profesora puede estar influenciada por la forma en que planeamos los dos posibles caminos que podían surgir para justificar la conjetura principal (Ver figuras 9 y 10), pero también a la intención de la profesora de propiciar un ambiente de justificación en la clase a través de la “cultura de los por qué”. Por ejemplo, si observamos los esquemas 4 y 5, y los relacionamos con el andamiaje realizado en el episodio 3 de SOIG, vemos que las preguntas que hace la profesora originan que, junto con los estudiantes, se elabore un argumento analítico.

Compartimos con Anghileri (2006) que algunas de las acciones del profesor para que estudiantes de educación primaria logren argumentar en matemáticas consiste en preguntarles “el por qué de sus acciones”. Aunque esta es una de las razones por la cuáles Krummheuer (1993) menciona que los argumentos substanciales sean los más usados para la justificación matemática en primaria, también se constituye en el punto de partida de la elaboración de argumentos analíticos. Consideramos que esta forma de proceder de la profesora también se debe precisamente al nivel de escolaridad de los niños y de sus edades porque ellos, requieren entender el porqué mismo de sus acciones, para poder avanzar en su razonamiento matemático.

En la tabla 9 presentamos la frecuencia con la que aparecieron los indicadores de la categoría de andamiaje, que nos permitieron observar la manera en la profesora apoyaba el aprendizaje de sus estudiantes para introducirlos en la práctica de demostrar.

ANDAMIAJE							
INDICADOR / GRUPO	**A-UFV**	**A-EBI**	**A-UHG**	**A-IDE**	**A-EHG**	**A-VI-A**	**A-EHG-J**
SOIG	5	0	9	0	2	0	3
CRIKALA	4	0	7	5	3	1	0
DOMA	2	3	14	3	3	1	9
TOTAL	**11**	**3**	**30**	**8**	**8**	**2**	**12**

TABLA 9

En esta tabla se puede observar que la mayor frecuencia se dio en el indicador “dirigir la atención de los estudiantes hacia la propiedad que se necesitaba para justificar”. Este hecho está relacionado con el uso de hechos geométricos para justificar propiedades y justificar construcciones, que son indicadores de la actividad demostrativa. Por ende, este fue un insumo para ayudarles a usar formas de razonamiento válidas para justificar.

De acuerdo con los resultados que se muestran en la tabla, nosotros compartimos la idea de Stylianides (2007), con respecto a que la gestión del profesor ayuda a los estudiantes a ganar un repertorio de elementos para decidir cuándo un argumento es considerado como una demostración y cuándo no. Esto se evidencia en los datos de la investigación.

En la tabla 9 se puede observar que el grupo SOIG fue el grupo que menos tuvo intervención de la profesora para justificar la conjetura principal. Ellos, por su cuenta, habían justificado la conjetura usandoel hecho geométrico siete y también habían descubierto que podían usar el hecho geométrico seis para justificar que el cuadrilátero *ADBC* era rectángulo, antes de la socialización. Lo anterior originó que la profesora no tuviera que intervenir para ayudarles a identificar la doble naturaleza de los segmentos $\overline{AB}$ y $\overline{DC}$. Por esta misma razón, SOIG no tuvo la necesidad de requerir la ayuda de la profesora para buscar invariantes y verificarlos a partir del arrastre.

En la tabla 9 se puede observar que en el grupo DOMA fue en donde más hubo intervenciones de la profesora para que los niños lograran enunciar los hechos geométricos y los pudieran usar en la justificación de la conjetura. Esto se debe a que no se acordaban de los hechos geométricos y tuvieron que ser guiados de manera cercana.

A manera de sugerencia, llamamos la atención al cuidado que debe tener el profesor con la consistencia en el impulso a la actividad demostrativa para evitar retrocesos al razonamiento cuando se supone que los niños ya están en el mundo teórico. Por ejemplo, pedirles a los estudiantes que midan o arrastren el triángulo *ABD* para verificar que el ángulo *D* mide 90 grados, no fue pertinente después de haber hecho la demostración. Hubiera sido mejor preguntarles a los niños si era necesario medirlo o arrastrar para verificar que el ángulo era recto.

5.3 RESPECTO AL ESTABLECIMIENTO DE NORMAS SOCIOMATEMATICAS PARA FAVORECER LA ACTIVIDAD DEMOSTRATIVA

Con la implementación de la trayectoria de enseñanza, hemos visto que establecer una norma sociomatemática no es un asunto solo de declarar y recordar constantemente la norma. Es necesario también que los niños la enuncien nuevamente, la recuerden y la pidan a sus compañeros para sus justificaciones, o incluso que ellos mismos se den cuenta que deben usarla para evaluar el trabajo que han desarrollado.

Si bien la profesora enuncia inicialmente las normas, su establecimiento depende del ambiente de la clase y de las exigencias de las tareas que se les propongan a los estudiantes, las cuales deben incitarlos a que ellos mismos las regulen. Por ejemplo, en el grupo de SOIG, Sofía se da cuenta que debe usar hechos geométricos para justificar por qué los segmentos $\overline{OA}$, $\overline{OB}$ y $\overline{OD}$ son congruentes y poder usar el hecho geométrico siete para justificar la conjetura principal. Así mismo, en el caso de CRIKALA, Cristian rechaza el justificar la conjetura principal con el hecho geométrico siete, lo que lolleva a poner en juego la norma de “usar varios caminos para justificar”.

En la tabla 10 presentamos la frecuencia con que aparecieron los indicadores que usamos para identificar el establecimiento de las normas sociomatemáticas.

NORMAS SOCIOMATEMATICAS				
INDICADOR / GRUPO	**JHG**	**HLM**	**VFJ**	**EJ**
SOIG	5	7	1	3
CRIKALA	4	3	4	0
DOMA	8	5	2	1
TOTAL	**17**	**15**	**7**	**4**

TABLA 10

En esta tabla se puede observar que las mayores frecuencias que aparecen corresponden a los indicadores “usa hechos geométricos para justificar” y “habla en un lenguaje matemático acordado”. Vemos que estas normas fueron importantes para que los estudiantes pudieran comunicar la exploración hecha al resolver los problemas que se les plantearon y poner en juego los hechos aprendidos.,

A partir de los resultados que proporciona la tabla 9, se puede observar que los tres grupos usaron la norma “hablar en un lenguaje matemático acordado”, lo cual está íntimamente relacionado con el hecho de que ellos usaran formas comunicativas aceptadas. Esto evidencia que el ambiente que se generó en la clase permitió que los estudiantes hayan sido introducidos a la práctica de demostrar, en el sentido de Stylianides (2007). En la tabla 8 se puede observar que el grupo SOIG fue el que más puso en juego la norma de hablar en un lenguaje matemático. Esto pudo haber sido ocasionado por el compromiso que tuvo el grupo con las socializaciones, pero también al andamiaje que hizo la profesora para la justificación de las conjeturas que surgían del trabajo de matemático desarrollado en la resolución de los problemas previos al problema siete, y también por la constancia con la que la profesora recordaba las normas para que éstas vivieran en la cultura de la clase.

La tabla también nos deja observar que este grupo fue el único que expresó en voz alta la norma de “usar varias formas de justificar”. Esto se debe a que los niños, por cuenta propia, buscaron otro camino para justificar la conjetura que surge del problema siete. Lo que permite afirmar que este grupo fue el que más afianzó la norma de “explicitar lo que se va a justificar”, posiblemente porque la profesora pudo centrar la atención del grupo en la elaboración de argumentos, con respecto a los otros grupos. Sin embargo, la tabla 9 revela que el grupo CRIKALA es el que más impulsó la norma sociomatemática de “usar varias formas de justificar”, posiblemente porque decidió no justificar que el triángulo *ABD* era rectángulo con el hecho geométrico siete para no copiarse de SOIG. Esto hizo que tuviera que buscar otra forma de justificar la misma conjetura.

Por otra parte, la tabla muestra que este grupo no puso en juego la norma de “enunciar aquello que se va a justificar”. Consideramos que esto está ligado a que sea el grupo en el que menos se observa que hayan realizado razonamientos válidos (ver tabla 7), y por ende, que la profesora haya tenido que hacer esfuerzos para que enunciaran los hechos geométricos para justificar (ver tabla 9).

En la tabla 10, se muestra que el grupo DOMA fue el grupo en donde se puso más en juego la norma “justificar con hechos geométricos”. Nosotros creemos que esto se debe a que la profesora tuvo que hacer un esfuerzo para reconstruir el hecho geométrico seis y para que lo usaran en la justificación de la conjetura principal. Lo anterior está ligado a que fue el grupo que más veces explicitó propiedades geométricas de los objetos que están vinculados en las construcciones que realizaron en el programa GeoGebraPrim.

A través de la implementación de la trayectoria de enseñanza nos dimos cuenta que sí es posible que los estudiantes sean introducidos a la práctica de demostrar en el sentido de Stylianides (2007). Vemos que esto puede lograrse si se posibilita un ambiente en la clase que favorezca la práctica de la argumentación y la justificación de las soluciones que surgen de abordar los problemas de geometría que se les proponen a los estudiantes.

Con respecto a la secuencia de problemas, consideramos que esta se puede mejorar si se añaden los siguientes elementos:

- Iniciar la secuencia de actividades incluyendo algunos problemas en donde los estudiantes puedan identificar la doble naturaleza de algunos objetos geométricos que intervienen en la secuencia de actividades que propusimos.
- Incluir algunas actividades en donde los estudiantes puedan enunciar explícitamente como condicionales propiedades de figuras geométricas.
- Lograr que los estudiantes expliciten en sus argumentos las garantías.

Observamos que el rol que juega la profesora en la gestión de la actividad demostrativa de los estudiantes es un aspecto crucial para que los niños puedan ser introducidos en la práctica de demostrar. Y compartimos con Stylianides (2007) que el docente, como representante de la cultura matemática en la clase, es el responsable de una "cultura de los por qué" (Mariotti, 2006) que favorece la argumentación y la demostración en la clase de matemáticas. Los avances que lograron los estudiantes en la práctica argumentativa en matemáticas, muestran los esfuerzos que hicieron tanto la profesora como el equipo de investigación que la acompañó por introducir a los estudiantes a la práctica de demostrar.

Los estudiantes sujetos de investigación, avanzaron considerablemente en lograr un lenguaje matemático que les permite comunicar sus ideas, lo cual es un gran avance tanto para sus edades como para el grado de escolaridad en el que se encuentran.

Los análisis que realizamos nos permiten afirmar que la herramienta analítica que usamos para realizar los mismos es útil para dar cuenta del inicio a la actividad demostrativa de estudiantes de primaria. Pudimos detectar intervenciones en las que algunos niños exploran en busca de invariantes, enriquecen la figura para hacer conexiones con hechos geométricos y, con ayuda de la profesora, justifican un invariante detectado usando un hecho geométrico conocido.

Por otra parte, consideramos que el uso del programa GeoGebraPrim fue un acierto. Favorece significativamente la introducción de los niños a la actividad demostrativa. Cuando fuimos implementando la trayectoria de enseñanza con los estudiantes de cuarto de primaria, como equipo de investigación nos dimos cuenta que aún cuando los estudiantes no habían tenido ninguna experiencia con programas de geometría dinámica, ellos gradualmente fueron aprendiendo las funciones de las herramientas que proporciona el programa para abordar las tareas que les proponíamos, hasta llegar al punto en que fueron capaces de modelar los problemas sin la ayuda del profesor. En genreal, los programas de geometría dinámica usados como apoyo a la la solución de problemas de geometría plana euclidiana proporcionan oportunidades para que los estudiantes construyan modelos que les permitan representar las múltiples soluciones a un problema, que usen dichos modelos para descubrir propiedades geométricas, y estos les sirvan como medio para buscar las razones con las cuales puedan justificar las conjeturas que hacen. Por otra parte, creemos que cuando damos la oportunidad a los estudiantes para enfrentarse a la demostración matemática con el apoyo de un programa de geometría dinámica ellos tienen la oportunidad de darle sentido a los objetos geométricos, en tanto que, a partir de su uso, pueden discutir y justificar las construcciones geometrícas que hacen. Así mismo, en la discusión matemática de sus ideas ellos tienen posibilidades para aprender la notación matemática de dichos objetos, lo que los lleva a compartir significados de los símbolos matemáticos que se usan durante el trabajo colectivo, y les proporcionan oportudiantes para determinar la eficiencia, la eficacia y la economía del lenguaje matemático.

Consideramos que este trabajo de grado nos aportó significativamente a nuestra vida profesional como profesores e investigadores, en la medida en que a través de las orientaciones de nuestra tutora y la revisión de la literatura de expertos en la argumentación y la prueba en geometría logramos diseñar y poner en funcionamiento una trayectoria de enseñanza que favoreciera el aprendizaje de conceptos de la geometría escolar centrada en la actividad demostrativa.

Finalmente, durante el trascurso de la investigación enriquecimos nuestra formación investigativa, en la medida en que hemos podido comunicar la experiencia adquirida con el desarrollo de este trabajo de grado a la comunidad de Educadores Matemáticos tanto nacionales como internacionales, mediante la participación en los siguientes eventos:

- En el XIV Evento Internacional MATECOMPU´2012 realizado en Matanzas, Cuba presentamos una comunicación breve titulada "La demostración en geometría: una mirada desde la educación primaria".
- En el 21º Encuentro de Geometría y sus Aplicaciones realizado en la Universidad Pedagógica Nacional, presentamos una comunicación breve titulada: "Un inicio a la actividad demostrativa usando GeoGebraPrim en cuarto de primaria".
- En 14º Encuentro Colombiano de Matemática Educativa, ECME-14 realizado en la ciudad de Barranquilla, hicimos el taller titulado "Uso de GeoGebraPrim para conjeturar y justificar en primaria" y presentamos la experiencia de aula titulada "GeoGebraPrim como instrumento para introducir la actividad demostrativa en cuarto de primaria".

Anghileri, J. (2006). Scaffolding practices that enhance mathematics learning. *Journal of Mathematics Teacher Education*, 9, 33-52.

Camargo, L. (2010). *Descripción y análisis de un caso de enseñanza y aprendizaje de la demostración en una comunidad de práctica de futuros profesores de matemáticas de educación secundaria.*Tesis doctoral, Universitat de València, España.

Chazan, D. (1993). High school geometry students' justification for their views of empirical evidence and mathematical proof. *Educational Studies in Mathematics*, 24,.359-387.

Clemens, S., O'daffer, P.H.A.R.E.S., & Cooney, T. (1998). Geometría–serie AWLI. Perason educación.

Mariotti, M. A. (2006). Proof and proving in Mathematics Education. In A. Gutierrez & P. Boero (Eds.). *Handbook of Research on the Psychology of Mathematics Education* (pp. 173 - 204). Rotterdam: Sense Publishers.

Hanna G; de Villiers, M; Arzarello, F; Dreyfus, T; Durand-Guerrier, V; Jahnke, H.N; Lin F.L; Selden, A, Tall, D; Yevdokimov,O. (2009). ICMI Study 19: proof and proving in mathematics education: discussion document. En F.L Lin; F.J Hsieh; G, Hanna; M de Villiers. (2009). *Proof and proving in mathematics education. ICMI Study Conference Proceedings.*

Mc Clain, K. (2005). A Methodology of Clasroom Teaching Experiments. En *Researching Mathematics Clasrooms: a critical examination of Methodology*. 5, 91-111.

Ministerio de Educación Nacional (MEN). (1998). *Lineamientos curriculares para el área de matemáticas. Áreas obligatorias y fundamentales. Colombia*: Bogota: M.E.N.

Perry, P., Camargo, L., Samper, C., Molina, O. & Echeverry, A. (2008). Geometría y Lineamientos Curriculares: Una experiencia en la formación inicial de profesores, *Memorias de ECME-9*, Valledupar, Colombia.

Perry, P., Camargo, L., Samper, C., Molina, O. & Echeverry, A. (2009). Assigning mathematics task versus providing prefabricated mathematics in order to support learning to prove. En F.L. Lin, F.J. Hsieh, G. Hanna y M. de Villiers (Eds.), Proceedings of the ICMI Study 19 Conference: Proof and proving in mathematics education. (vol. 2, pp. 124-129). Tapiei, Taiwan: National Taiwan Normal University.

Krummheuer, G. (1993). The Etnoghaphy of argumentation. Volumen 148 de Occasional paper: Institut für Didaktik der Mathematik,7, 229-269.

Simon, M. A. & Blume, G. (1996). Justification in the mathematics classroom: A study of prospective elementary teachers. *Journal of Mathematical Behavior*,15, 3-31.

Stylianides, A. J. (2007). Proof and proving in school mathematics. *Journal for Research in Mathematics Education,* 38, 289-321.

Yackel, E. & Cobb, P. (1996). Sociomathematical norms, argumentation, and autonomy in mathematics. *Journal for Research in Mathematics Education*, 27 (4), 458 - 477.