ALGUNOS ASPECTOS FILOSÓFICOS SOBRE LA NATURALEZA DE LOS OBJETOS MATEMÁTICOS DESDE EL PLATONISMO Y EL FICCIONALISMO

FERNANDO SALAZAR RODRIGUEZ

CARMEN ELISA VILLEGAS O.

UNVERSIDAD DEL VALLE
INSTITUTO DE EDUCACIÓN Y PEDAGOGÍA
ÁREA DE EDUCACION MATEMATICA
SANTIAGO DE CALI, 2016

ALGUNOS ASPECTOS FILOSÓFICOS SOBRE LA NATURALEZA DE LOS OBJETOS MATEMÁTICOS DESDE EL PLATONISMO Y EL FICCIONALISMO

FERNANDO SALAZAR RODRIGUEZ

Código: 0637482

CARMEN ELISA VILLEGAS O.

Código: 0938395

Trabajo de grado presentado como requisito para optar
a los títulos de
Licenciado en Matemáticas y Física
y Licenciada en Educación Básica con énfasis en Matemáticas

DIRECTORA

M.g. MÓNICA A. APONTE

UNVERSIDAD DEL VALLE
INSTITUTO DE EDUCACIÓN Y PEDAGOGÍA
ÁREA DE EDUCACION MATEMATICA
SANTIAGO DE CALI, 2016

RESUMEN

En el presente trabajo se realiza una indagación filosófica sobre la naturaleza de los objetos matemáticos desde el platonismo radical y el ficcionalismo, principalmente desde la perspectiva de Mark Balaguer. Esto, con el objetivo de analizar una epistemología viable que permita responder a algunos retos epistemológicos plateados por Benacerraf, en relación a cómo seres espacio-temporales pueden acceder a objetos matemáticos entendidos como objetos no espacio-temporales. Para ello se propone una indagación del *Full Blooded Platonism* (FBP), como una corriente del platonismo, la cual propone que todo objeto matemático lógicamente posible existe. Finalmente, esta corriente se contrasta con el ficcionalismo que afirma que todo objeto matemático lógicamente posible es falso.

Palabras Claves: Objeto matemático, realismo matemático, *full blooded platonism*, ficcionalismo.

TABLA DE CONTENIDO

INTRODUCCIÓN

Desde tiempos remotos la génesis de las matemáticas ha suscitado diversos debates, dejando como consecuencia diversos sistemas filosóficos que se han configurado alrededor de los problemas de carácter ontológico y epistemológico de las matemáticas[1]. A partir de diferentes indagaciones filosóficas, se han establecido una variedad de corrientes de pensamiento que permiten dar respuesta algunas cuestiones de este tipo, entre esas, el platonismo y el anti-platonismo. Así, entre dichas corrientes de pensamiento, el presente trabajo considera esencialmente desarrollar las ideas del platonismo radical (*Full Blooded Platonism*–de ahora en adelante abreviado como FBP) y el Ficcionalismo, desarrollados principalmente por Mark Balaguer.

Desde que la matemática se concibe como un entramado teórico, las cuestiones de carácter epistemológico (al considerar las matemáticas como un conjunto de objetos producto de la experiencia) no son resueltas adecuadamente. Entre estas cuestiones se encuentra el reto planteado por Benacerraf (2004) que consisten en cuestionar: a) cómo seres espacio temporales pueden obtener conocimiento de objetos matemáticos abstractos y b) que la referencia a los números naturales no es única. Para considerar estos problemas, el presente trabajo se platea como objetivo general analizar cómo podemos tener conocimiento de objetos matemáticos abstractos siendo los seres humanos seres espacio-temporales, dado que no se puede recibir ningún tipo de información de estos objetos debido a que no son espacio-temporales.

Para responder a este reto epistemológico, en primer lugar, se considera esbozar la discusión filosófica entorno a lo que se entiende por objeto abstracto en contraste con objeto concreto. De esta manera se considera la disertación de David Lewis (citado en Ponte, 2005), en la cual brinda distintas vías para acercarse a la noción de objeto abstracto. La vía que se considera en el presente trabajo es la *Vía de negación*, que consiste en mencionar lo que el objeto abstracto no tiene en comparación con el objeto concreto, es

[1] Ontológico en relación a la existencia y naturaleza de las entidades matemáticas, y epistemológico en relación al acceso o conocimiento de los objetos matemáticos.

decir, no tiene lugar ni temporalidad. Además, se consideran algunas corrientes filosóficas como el intuicionismo, el ficcionalismo, el formalismo y el platonismo. La revisión del trabajo doctoral de Ponte (2005) se hace específicamente en relación al establecimiento de algunas tesis cardinales que ella plantea como partida para el debate filosófico alrededor del realismo y lo abstracto, como consecuencia de un intento de definición de términos claves en el debate, como: objeto abstracto, platonismo y anti-platonismo (tesis que se esbozan en el primer capítulo), términos esenciales en el análisis que se hace en el capítulo dos, sobre la naturaleza de objeto abstracto que asume Balaguer (2000).

De esta manera, se pasa a considerar la postura desarrollada por Mark Balaguer, denominada FBP en respuesta al reto epistemológico de Benacerraf, Balaguer afirma que si el FBP es correcto, entonces todas las teorías matemáticas puras *consistentes* en realidad describen alguna colección de objetos matemáticos. Por consiguiente, adquirir conocimiento de objetos matemáticos se reduce a adquirir conocimiento de alguna teoría matemática pura *consistente*; en donde el conocimiento de la consistencia de una teoría matemática no requiere de ninguna clase de contacto o acceso a los objetos de esa teoría.

Por último, se busca esclarecer cómo desde el anti-platonismo es posible el conocimiento de los objetos matemáticos. Para ello se analiza el argumento desarrollado por la postura ficcionalista de Mark Balaguer, ya que desde esta corriente el argumento parte de considerarlas proposiciones matemáticas en la misma forma en que los platonistas lo hacen, es decir, se toman las proposiciones matemáticas referentes a objetos matemáticos abstractos de manera literal, pero difiere del platonismo al afirmar que los objetos matemáticos no existen, y por ello las proposiciones matemáticas son falsas.

Esta indagación filosófica sobre la naturaleza de los objetos matemáticos es necesaria para tener una visión más amplia y crítica de lo que se ha institucionalizado como *objeto matemático,* desde el *full-blooded platonism (platonismo radical)* y el ficcionalismo. La idea, desde estas dos posturas, es analizar si desde el platonismo se puede *comprobar* que hay una realidad abstracta objetiva, no dependiente de la mente de los sujetos sino externa a los sujetos y de la cual se puede decir algo como que los objetos matemáticos son parte de esa realidad abstracta, o desde el ficcionalismo que niega esa realidad abstracta independiente de los sujetos, y donde los objetos matemáticos abstractos no existen en sí, sino que son abstracciones humanas fruto de la cultura en que se desarrollan.

En este sentido, el presente trabajo se inscribe dentro de la línea de Investigación en Historia y Epistemología de la Matemática del Instituto de Educación y Pedagogía (IEP) la Universidad del Valle. Abarca los problemas y enfoques de carácter epistemológico y ontológico a partir del cual se ha ido configurando la filosofía de las matemáticas. Específicamente se centra en caracterizar una filosofía platonista, como es el FBP, y una filosofía anti-platonista, como es el ficcionalismo.

Para llevar a cabo nuestra indagación filosófica, se realizó un estudio monográfico. Metodológicamente se realizó una revisión bibliográfica de fuentes primarias como la de *Platonism and Anti-platonism in Mathematics* (Balaguer, 1998) dado que en este, Mark Balaguer desarrolla una epistemología nueva no considerada antes en el campo de la filosofía de la matemática, a saber, la epistemología de no contacto (en la cual no se requiere una transferencia de información entre el objeto abstracto y nosotros) que da respuesta al reto de Benacerraf desde una perspectiva platonista. Además, se consultaron fuentes secundarias como *Realistic Rationalism* (Katz, 2000), *Realismo y entidades abstractas. Los problemas del conocimiento en matemáticas* (Ponte, 2005), entre otras fuentes secundarias. Se analizaron y expusieron para tener una mirada crítica y así establecer si se da una respuesta satisfactoria a la problemática tratada.

En el capítulo 1 se desarrollaron algunas nociones básicas y se enmarcaron las tesis generales dentro de las cuales se consideró el reto epistemológico que se plantea en este trabajo, considerando la estructura que presenta Ponte (2005) en su tesis doctoral sobre realismo matemático. En este sentido, se desarrolla la distinción entre objeto abstracto y concreto establecido por David Lewis desde Ponte (2005), para concluir que, si bien dicha distinción no es clara, es relevante en tanto que los dilemas planteados surgen de la idea de considerar los objetos matemáticos como objetos no temporales y no espaciales, contrario a lo que serían los objetos concretos.

Por otro lado, se desarrolla la idea general que se tiene del platonismo, para ello se referencia a Bernays desde la interpretación de Ferreirós (1999) y Ponte (2005). De igual manera, se hace un resumen de las posturas anti-platonistas que se consideran en el presente trabajo y que se desarrollan en el capítulo 3, esto desde Balaguer (2011) principalmente.

En el capítulo 2, se expone el desarrollo epistemológico FBP de Balaguer (1998) que dice que todo objeto matemático lógicamente posible existe, visto desde la consistencia de las teorías matemáticas para superar el reto ontológico de que los objetos abstractos no existen. Además, en esta epistemología se expone la viabilidad de cómo poder hablar o decir algo objetivo de un dominio matemático abstracto del cual no tenemos acceso por ser seres espacio-temporales.

En el capítulo 3 se exponen algunas corrientes ficcionalistas, que infieren que las teorías matemáticas son falsas por referirse a objetos matemáticos inexistentes, debido a su carácter abstracto. Por ejemplo, está Daly (2007) que considera las matemáticas como una historia ficcional; Pincock (2012) que analiza la postura Leng donde se afirma que los matemáticos solo caracterizan conceptos matemáticos que no implican nada si estos conceptos son verdaderos de cualquier objeto; Balaguer (2012) que refuta desde el ficcionalismo el carácter verdadero de las matemáticas, al considerarse estás ciertas por su aplicabilidad con las ciencia empírica. También defiende la postura de que la ciencia puede ser nominalizada, es decir, no hacer referencias a números o cuantificaciones en la descripción de fenómenos físicos.

CAPITULO 1: PRELIMINARES

La polémica entre platonistas y antiplatonistas modernos, se encuentra alrededor del problema de la verdad y el problema de la existencia de los objetos matemáticos. Específicamente el presente trabajo se centra en el problema de la existencia de los objetos matemáticos. Para esto es necesario esbozar lo que se considera como objeto matemático, que generalmente se concibe como objeto abstracto. De esta manera, se inicia este primer capítulo con un recuento de lo que se puede entender como objeto abstracto, y se exponen algunas corrientes del platonismo y antiplatonismo.

1. SOBRE ENTIDADES ABSTRACTAS Y CONCRETAS.

Una de las nociones importantes, para hablar sobre los problemas epistemológicos a los que se enfrentan los platonistas al referenciar el conocimiento de los objetos matemáticos, es la noción de objeto o entidad abstracta. Concretamente se discute el dilema del conocimiento de estos objetos si se consideran abstractos. De manera generalizada se alude que las matemáticas tratan sobre entidades abstractas; de ahí su carácter objetivo y metodológico otorgado especialmente a esta ciencia (Ponte, 2005). Lo anterior es de hecho un factor que da una distinción clara entre la matemática y las ciencias empíricas, pues una trata de objetos abstractos y la otra de objetos concretos (tangibles o perceptibles por los sentidos)[2] con los que se puede interactuar de manera directa o indirecta. Sin embargo, hay que tener en cuenta, como lo manifiestan Katz (2000) y Ponte (2005) que la distinción entre abstracto/concreto no es clara, así como tampoco lo es lo que se entiende por los entes abstractos.

La distinción entre abstracto y concreto que se platea a continuación dista un tanto de la diferencia entre *formas* y *sensibles* de Platón, dado que para Platón las *formas* eran las causas por excelencia (Rosen, 2012). Esta idea de objeto (como causal) no coincide plenamente con la concepción de objeto abstracto que se considera en este trabajo, pues el objeto abstracto es no causal, es decir, que no pueden interactuar con los entes sensibles de

[2] Discusiones sobre el carácter abstracto de algunas entidades correspondientes a la física no se abordaran exhaustivamente en este trabajo.

manera tal que haya transferencia de información. Rosen (2012) explica que la relevancia de esta dicotomía llega en el siglo XX con la ruptura de la distinción entre lo material y lo mental; ahora lo abstracto es un dominio distinto al mundo exterior sensible y el de la conciencia interna (mental) en el sentido que ahora corresponde una distinción entre *objetos.*

Ahora bien, generalmente se entiende por objetos abstractos aquellas entidades situadas fuera del espacio-tiempo, que a diferencia de los concretos son acausales (es decir no hay transferencia de información entre objetos abstractos y el mundo físico), en el sentido que son no palpables por nuestros sentidos. Habitualmente, al hablar de objetos abstractos o concretos, se recurre a mencionar un ejemplo de estos objetos y se consideran: el número, los conjuntos, los universales, las definiciones…, versus las rocas, los perros, como ejemplos; sin embargo, sigue existiendo una falta de claridad entre la distinción abstracto/concreto. Para ver lo anterior es menester mostrar algunas de las distintas formas de clasificar los objetos que se encuentran en la filosofía, que David Lewis recuenta, para comprender un poco la división entre abstracto y concreto. Estas vías se pueden resumir como:

a) La vía del ejemplo- “Way of example”- consiste en generar una lista de objetos que sirven como ejemplo para hacer alusión a la distinción que hay entre objetos abstractos y concretos (como los ejemplos paradigmáticos), luego esta lista se considera como referencia de consulta para otros objetos. Sin embargo, Ponte (2005) señala que, esto presupone que la distinción vendría a ser primitiva, no posible de analizar con base a ninguna otra característica, o de lo contrario el sentido de la distinción tendría que emerger espontáneamente.

Si la única manera de explicar la distinción entre esos dos tipos de objetos no es analizable y es primario, se hace difícil considerar que solo la abstracción primaria haga la diferencia. Aunque el modo de ejemplo ayuda a esclarecer, es más fácil pensar en la no-espacialidad o ineficacia causal para hablar la fundamental distinción entre abstracto y concreto.

b) La otra vía de entender la distinción, es a través de *Way of Conflation* (Vía de la combinación), la cual, según Lewis, se identifica con la diferencia que se encuentra entre individuos y conjuntos, o entre particulares y universales, o tal vez incluso entre particulares y todo lo demás[3] (Ponte, 2005, p.8). Se parte de la idea de considerar estas distinciones como ya conocidas, es decir, se asocia o combina la diferencia entre abstracto y concreto con la idea familiarizada que se tiene de la diferencia entre particulares y universales, por ejemplo. Pero según Rosen (2012), el intercambio que se hace de la distinción entre abstracto y concreto por la distinción entre individuos y universales no es tan frecuentes en la filosofía reciente.

c) La tercera vía *Way of Negation* (Vía de la Negación), en la cual se señalan las características que los objetos abstractos no tienen. En palabras de Lewis, las entidades abstractas no tienen un lugar espacio temporal; ellas no entran en interacción causal[4] (Ponte, 2005, p.8).

Es esta tercera vía, *Way of Negation*, la que contiene elementos que han sido esenciales en las objeciones realizadas a la afirmación realista que dice que las matemáticas tratan sobre objetos abstractos. Particularmente la discusión más influyente (se basa en el aspecto que) se desprende de considerar los objetos matemáticos como causalmente inertes, es decir, que la objeción radica en que los números, conjuntos, clases, proposiciones, relaciones, al no regirse por las leyes de la naturaleza no tienen una ubicación espacial y temporal. Lo anterior indica que no se tendría acceso causal (es decir, los objetos abstractos no tienen ninguna influencia sobre el mundo físico), implicando inevitablemente, según los opositores al realismo, como Ayer (2004), que no se puede tener conocimiento de dichos objetos (bajo el supuesto que la base para el conocimiento es la relación causal entre el objeto que se conoce y el sujeto que conoce). Igualmente, la aseveración de que los objetos matemáticos son abstractos acarrearía, según Ponte (2005), características como la imposibilidad de su creación, pues se requeriría de un tiempo para su creación, y la

[3] Textual: individuals and sets, or between particulars and universals, or perhaps even between particulars and everything else

[4] Textual: Abstract entities have no spatiotemporal location; they do not enter into causal interaction…

inmutabilidad de los mismos.

Si bien es casi que instintiva la distinción que se realiza cuando se agrega a la definición de objeto concreto la característica de tener un lugar espacial o temporal, existen diferentes objetos que son de difícil ubicación. Ponte (2005), siguiendo la explicación registrada en el diccionario de *Stanford Encyiclopedia of Philosophy*, aclara que objetos como algunos postulados por la física cuántica, que no ocupan un lugar espacial determinado, podrían catalogarse como abstractos ya que estarían compartiendo la característica de no ser espaciales como los entes matemáticos. Siguiendo esta línea cabe preguntarse si para un objeto determinado, los interrogantes como *dónde estuvo o cuándo llegó a ser* tienen sentido.

En este sentido, se deben considerar tres partes de esta forma de caracterizar los objetos abstractos: 1ª La no temporalidad, 2ª la no- espacialidad y 3ª la no causalidad. Tómese el juego del ajedrez, identificado generalmente como abstracto, como ejemplo paradigmático de las dificultades en la clasificación de objetos abstractos y concretos, con relación a sus características no espaciales y temporales. Rosen (2001) explica que esta dificultad en su clasificación se debe a que si se considera el ajedrez como ente abstracto, se encontrará contradicción en la definición de abstracto como algo no espacio-temporal, pues del ajedrez se puede decir que a través del tiempo sufrió modificaciones y que fue creado por un(os) sujeto(s) en una época y lugar determinado, de lo cual se deriva que este objeto puede ubicarse temporalmente. Sin embargo, aunque este objeto no cumpliera con la característica de los objetos abstractos (inmutabilidad y no ser espaciotemporal), no tendría sentido preguntarse dónde o cuándo se encuentra o está situado el ajedrez (no como tablero concreto), es decir, el juego del ajedrez no cuenta con una ubicación espacial y temporal acotada, no ocupa un volumen o una región determinada de espacio.

Similarmente, Ponte (2005) sugiere que los conjuntos conformados por ejemplo por {pablo, pedro} podrán desde algunas miradas particulares (como la de Maddy) tener una ubicación espacial al hacer referencia de los objetos que lo constituyen, por ejemplo, que los conjuntos se ubican dónde están sus miembros.

De esta manera, una versión de esta vía podría resumirse como un objeto es abstracto si y sólo si es no-espacial y no hay un tipo de transferencia de información con el mundo físico o los seres humanos; en relación a no ser espacio temporal, Rosen (2012) indica que podría decirse que un objeto es abstracto si y sólo si no ocupa nada parecido a una región determinada del espacio –tiempo.

Por otro lado, en relación con la causalidad (relación entre estado de cosas, en la cual una es causante de otro evento), Rosen (2012) plantea la limitación conceptual según la cual la causalidad es una relación entre eventos y no estaría claro hasta qué punto los objetos abstractos participan, siguiendo su ejemplo: una roca es la causa del rompimiento de una ventana en tanto participa del evento del lanzamiento de la piedra hacia la ventana; de la misma manera, si Juan está pensando en el teorema de Pitágoras y alguien le pregunta en qué está pensando, entonces el teorema de Pitágoras participa en el evento que vendría siendo la respuesta de Juan en expresión de la oración "en el teorema de Pitágoras". Así, el teorema de Pitágoras se relaciona con el evento, como se relaciona la piedra con el rompimiento de la ventana. Pero, no se le atribuye una propiedad de causalidad al teorema de Pitágoras, como bien afirma Ponte (2005), el punto de equivalencia entre estas relaciones y la consideración de que ambas entidades arriba mencionadas sean causas de los eventos no es claro.

d) Por último, Lewis propone *Way of Abstraction* (Vía de la abstracción), en la cual plantea que los objetos abstractos son obtenidos por el proceso de abstracción sobre los objetos concretos. Estas abstracciones se forman manteniendo las características físicas que les son comunes a los objetos concretos que se estén considerando. En palabras de Lewis las entidades abstractas son abstracciones de entidades concretas. Son el resultado de alguna forma de restar especificidad, así que una descripción incompleta de la entidad original sería una descripción completa de la abstracción[5] (Ponte, 2005, p.11).

Según Ponte (2005) la vía de la abstracción parece estar en el enfoque psicologista, dado que la entidad abstracta se confunde con la idea generada al analizar varios objetos y al desechar lo que los distingue a través de un proceso mental y quedarse con la característica

[5] Textual: Abstract entities are abstractions from concrete entities. They result some how from substracting specificity, so that an incomplete description of the original entity would be a complete description of the abstraction

en común. Por ejemplo, se tiene la idea de lo rojo al ver lo que tiene en común la sangre, una bandera de china y el rubí.

De otra parte, Bob Hale y Crispin Wright (citados por Ponte, 2005) hacen uso de la noción de abstracción para definir objeto abstracto sin necesidad de recurrir a una definición que se base en decir lo que no tiene el objeto, distanciando además el componente psicológico. Estos dos autores se basan en la idea de Fregue, la cual consistía en analizar la forma de los enunciados que mencionan determinadas entidades para argumentar que estas entidades son objetos. Este, señalaba que los términos singulares que refieren a objetos abstractos están formados a través de expresiones funcionales, puesto que se habla es de "numero de pendientes", "la dirección de una línea" más no solo del "numero" o "la dirección", es decir las entidades abstractas son en el sentido que:

> Siendo f(a) un término singular formado por una expresión funcional (que refiere a un objeto abstracto): $\forall a \forall b\ (f(a) = f(b) \leftrightarrow aRb)$ (siendo *R* una relación de equivalencia entre las entidades denotadas por a y b)" (Ponte, 2005, p.105).

Así, entender por ejemplo el concepto de dirección (abstracto) es entender que la dirección de *a* es igual a la dirección de *b* (hacen referencia a la misma entidad) si y solo si *a* es paralelo a *b*. Parece, según Rosen (2012), que esta distinción radica más en términos semánticos propiamente y no en sentido metafísico en tanto que no se dice algo ontológico de ellos, lo cual no se detallará en este trabajo.

Lo anterior nos ilustra, a grandes rasgos, que la distinción y clasificación de los objetos no es tan clara como suele suponerse; aunque viable, es compleja. Por lo que es necesario poner en claro las distintas maneras en las que se pueden considerar. En últimas, si bien la distinción entre objetos abstractos y concretos resulta un poco confusa, es al mismo tiempo cierta y relevante.

En este trabajo se considera la aceptación dada por Katz (2000), el cual postula en su libro "*Realistic Rationalism*", la definición de objeto abstracto como no existente en el espacio-tiempo, y la considera la más compacta. Por lo que, adicionarle a la definición de objeto abstracto la característica de ser inertemente causal, independencia de la mente, o alguna otra propiedad que los objetos abstractos se asumen que tienen, sería redundante.

La idea de dar cuenta de la dicotomía que subyace a la distinción entre abstracto y concreto no es tarea fácil. Lo que se debe esperar es que dentro del marco en que se tome la definición de abstracto, los casos paradigmáticos encajen como generalmente se han concebido y tracen un camino claro en el que pueda ser utilizado productivamente en las reflexiones filosóficas.

1.2 SOBRE EL PLATONISMO

Al hablar de platonismo, casi inmediatamente nos llega al pensamiento una referencia hacia el filósofo griego Platón, sus tesis y alegorías, suponiendo que el pensamiento platónico que se tenga de las matemáticas modernas guarda las mismas características o planteamientos que Platón anunciaba. Aunque, de eso hace mucho que pasó y la filosofía de las matemáticas sufrió alteraciones dentro de las mismas corrientes planteadas a sus inicios, es cierto que la filosofía de Platón encaja con la forma de razonar particular de la matemática moderna, por tal motivo fue Paul Bernays quien denominó “Platonismo” a eso modo de proceder en la matemática, el cual consiste en que

> (…) los objetos de la teoría se conciben como elementos de una totalidad o conjunto, que se considera dada al margen de cualquier dependencia respecto al sujeto pensante, al matemático. Precisamente porque los elementos del conjunto se conciben como dados, una consecuencia de dicho modo de pensar es que para una propiedad cualquiera (expresable con los medios de la teoría) puede decirse que o bien la poseen todos los elementos del conjunto, o bien hay uno que no la posee. (Ferreirós, 1999, p.1)

La tesis general del platonismo que aquí se menciona consiste en: a) *pre*-“existencia” de objetos (matemáticos) y b) independencia de los objetos en relación a los sujetos. Sobre a) se implica necesariamente observar la relación (de oposición) entre una matemática considerada constructiva y aquel tratamiento que permite postular que los objetos sobre los que trabajan los matemáticos y se forman las distintas teorías matemáticas son *dados*. No obstante, como menciona Ferreirós (1999), considerar tratar las matemáticas bajo procesos de construcción es complemento al tratamiento clásico de las matemáticas (estudiar las relaciones entre objetos que se suponen existentes).

Más aún, de todos los matices y variaciones que tienen las diferentes posturas filosóficas sobre las matemáticas, en este caso del realismo matemático que comúnmente se entiende como platonismo, subyacen cuatro tesis cardinales que Ponte (2005) resume de la siguiente manera:

1. Existencia de los objetos a los que se refiere la matemática
2. Posibilidad de conocer los objetos matemáticos
3. Independencia de los objetos y las proposiciones de estos en relación a los sujetos.
4. Los objetos matemáticos son objetos abstractos y esto es: acausales

Las tres primeras tesis, según Ponte (2005), son características del realismo. Las cuatro tesis serían, entonces, características del realismo matemático, lo cual parece convertir a (4) en definitoria para hablar de platonismo. Sin embargo, teniendo en cuenta la idea generalmente aceptada sobre la característica abstracta de los objetos matemáticos (no espaciales ni temporales), la existencia y la independencia de los entes matemáticos parecen ser los ejes del platonismo. Sobre las primeras tesis que se mencionan vale realizar una aclaración, esta consiste en considerar que lo *dado* en matemáticas es o una suposición o una afirmación de la existencia real de los elementos dan (existencia análoga a la de los objetos físicos), lo cual ha derivado, en términos de Ferreirós (1999) dos géneros del platonismo: el *interno*, que considera característico de las matemáticas modernas la postulación de elementos dados, y el *externo* que afirma que los objetos dados tienen existencia real. Pero, cabe preguntarse en ¿qué sentido se considera lo *dado,* en términos de Ferreirós?

Toda teoría matemática, postula como *dado* tanto elementos como ciertas relaciones entre ellos. Por ejemplo, en geometría euclidiana los puntos, las rectas, los planos son elementos dados al igual que relaciones como “el todo es mayor que la parte” o “estar entre” son definidas, pero otras relaciones más complejas son construidas a partir de una base (Ferreirós, 1999). La proposición “construir un triángulo equilátero sobre una recta finita dada” es un ejemplo de construcción *dado* unas nociones comunes, postulados, definiciones (o en otros casos proposiciones se valen de proposiciones); la definición 20 del libro I de Euclides define el triángulo equilátero partiendo de la idea de triángulos y segmentos iguales, lo cual indica algunas propiedades esenciales del triángulo equilátero pero, como lo menciona García (2000), no muestra el objeto como tal hasta que se deduce a través de un proceso lógico, es decir, el objeto no es utilizado hasta que no se ha demostrado su construcción en la proposición I del libro I de Euclides, así pues, es en la proposición I en la que se muestra el objeto.

En este sentido, Ferreirós (1999) expone que la utilización de ∃x “existencial” se usa en algunos casos para indicar que se consideran dados los objetos del dominio del discurso que no se pueden construir; por ejemplo “dados tres números naturales consecutivos, existe al menos un numero *A* que está entre los dos números restantes”, se supone dado el conjunto de números naturales consecutivos o “dados dos puntos *A* y *C*, existe al menos un punto *B* que está sobre la recta *AC*, tal que *C* está entre *A* y *B*” (Ferreirós, 1999, p.3). Así el existencial considera el dominio de puntos.

Sin embargo, en la geometría euclidiana se estipulan más que todo medios de construcción de las figuras (Ferreirós, 1999); si bien en la geometría euclidiana encontramos definiciones que no se pueden obtener por consideraciones procesuales (como “un punto es lo que no tiene partes”), está claro que el triángulo equilátero no existe sino hasta que se ha demostrado la posibilidad de su construcción.

De manera que, para el constructivo se acepta como existente el objeto en tanto pueda deducirse a partir de un tratamiento procesual basado en ciertos códigos: sean axiomas, postulados o definiciones, como en el ejemplo del triángulo equilátero mencionado arriba. Para el matemático “abstracto” como lo llama Ferreirós (1999), se acepta como existente una propiedad “antes de”… es decir *a priori*, así el $\exists x$ especifica cierta propiedad del conjunto. Por ejemplo, si se considera el axioma de la geometría euclidiana “dos puntos distintos determinan una recta” se está diciendo que la recta existe a medida que se construye a partir de la unión de los dos puntos, pero si se considera el axioma planteado por Hilbert *"Dados dos puntos existe una recta que pasa por ellos"* entonces, se está aceptando como dado la totalidad de las rectas.

Si bien los objetos matemáticos desde el platonismo se consideran existentes, lo cual sigue la línea de la actividad del matemático en tanto que para ellos existe la "sensación" de estar descubriendo cuerpos, funciones, espacios, etc, se tiene que una interpretación del platonismo cae en el "platonismo externo", que consiste prácticamente en considerar los objetos matemáticos independientes de la mente del matemático y existentes realmente, de manera análoga a la existencia de los objetos físicos pero no igual.

Ahora bien, entendiendo desde este punto de vista el platonismo, en relación a las tesis cardinales que resume Ponte (2005), se manifiesta que la tercera tesis del platonismo: "independencia de los objetos y las proposiciones de estos en relación a los sujetos", está relacionada con la afirmación "se descubren las matemáticas" y que su existencia es independiente de si los humanos existiéramos o no. Hay que aclarar que Katz (2000) considera que los objetos matemáticos existen no en el sentido de un mundo aparte o fuera de la mente, sino que existen de manera objetiva e independiente a pesar de ser una creación de nuestro cerebro, los cuales solo se pueden conocer por la razón, y que por ser abstractos la experiencia no juega ningún papel a la hora de hablar de ellos o de la certeza matemática. En este sentido cabría la pregunta ¿acaso las relaciones establecidas en un teorema demostrado no existirían si el mundo dejara de existir?

Las tesis mencionadas por Ponte (2005) presuponen una distinción entre platonismo ontológico y semántico según los filósofos acepten o rechacen alguna de las afirmaciones realizadas; sin embargo, es suficiente para este escrito decir, como Ponte (2007) resume, que la combinación de la tesis general que recogen los platonistas tradicionales[6],a saber: aceptar que los objetos sobre los que versan las matemáticas existen, y además son abstractos (entendidos como "ubicados" fuera del espacio-tiempo, causalmente inertes), dan partida a la apología de Paul Benacerraf, que refiere al problema del acceso y

[6] El platonismo tradicional, según Ponte (2005), generalmente acepta las 4 premisas resumidas anteriormente.

conocimiento de las entidades abstractas si estas no obedecen a las leyes del espacio-tiempo.

Más aún, para Katz (2000) lo que hace a alguien realista es en esencia su aceptación de objetos abstractos; así, lo que hace alguien un realista de una clase particular es su aceptación de objetos abstractos de esa clase. Las clases aquí son clases de estructura que los objetos abstractos tienen, por ejemplo, estructura lingüística, lógica o matemática. Comúnmente, la aceptación de objetos abstractos de una cierta clase es el resultado de aceptar teorías acerca de objetos abstractos de esa clase.

También, se entenderá por racionalismo la concepción del universo en el cual las cosas existentes en la naturaleza que aparecen como contingentes son defecto de nuestra capacidad de conocer, y que concibe como único modo de conocer a la razón, pues desde aquí, el universo tiene una estructura racional (Gambra,1977). Son los datos empíricos la circunstancias en las cuales se evidencia algún principio o verdad, pero no son estos, la experiencia, las que lo confirman; por tal, el conocimiento de los objetos que no son contingentes, no puede ser empírico. Ya que la verdad no está en la observación ni en la experiencia sensorial.

Este tipo de planteamientos, platónicos y racionalistas, es al que se alude en el presente trabajo para responder a preguntas sobre al acceso al conocimiento de los objetos matemáticos. Una primera aproximación es la intuición matemática, aunque de ella no se entre hablar en detalle, pero se retomará esta noción al hablar en los capítulos siguientes.

1.2.1 Una primera aproximación: la intuición.

En lo referente a cómo tenemos acceso al conocimiento matemático, Katz (2000) alude a la intuición como fuente básica de conocimiento matemático. Esta percepción matemática generalmente se comprende como una capacidad lógica a través de la cual se llega a los objetos no espacio-temporales, concibiéndose habitualmente como similar a la captación realizada por medio de los sentidos. Algunas interpretaciones sugieren que la percepción matemática o intuición matemática es proveedora de un conocimiento sin intermediarios, que se alcanza inmediatamente, por lo cual esta capacidad especial (como medio para ver los objetos abstractos, específicamente matemáticos) es referenciada por sus opositores como “mind-eye” Ponte (2006).

Sin embargo, la idea de que una capacidad intelectual permita que la mente vea de alguna manera los objetos matemáticos, en cuanto estos se consideren abstractos (no espacio-temporales), de manera directa sin intermediarios- ni siquiera de otras características de la mente- parece un tanto extrema, ya que podría decirse que lo abstracto es el resultado de un proceso de abstracción, el cual permitiría hacer referencia a pasos intermedios para que el objeto abstracto resulte y se conozca.

Por otro lado, las críticas realizadas a esta noción por parecer un tanto mística, o como planteaba Wittgenstein: por no ser siempre confiable ya que puede dirigirnos o por el camino correcto o por el camino equivocado (Wittgenstein , citado en Katz, 2000), es susceptible de desechar, ya que así como son necesarios los sentidos (vista, tacto, oído) para conocer, también se puede argüir a la necesidad de una capacidad lógica “especial” para captar los objetos matemáticos (aunque no necesariamente de manera completa e inmediata). Sin embargo, Katz (2000) considera que la intuición no es infalible, pero que al ser semejante al sentido de la vista (y así como la vista no se descarta como fuente básica de conocimiento porque algunas veces nos engaña), tampoco se debe descartar la intuición como fuente básica del conocimiento solo porque algunas veces nos conduzcan por el camino equivocado.

Finalmente, aclaramos que el propósito principal del realismo (platonismo en la versión que tomamos) no es establecerse como una única posición válida que explique la naturaleza de los objetos matemáticos, sino, defenderse de aquellos que dicen que no se puede tener conocimiento de objetos abstractos, es decir, no se puede tener acceso a los objetos abstractos como tenemos acceso a los objetos físicos, ya que los objetos matemáticos al ser precisamente objetos con relaciones necesarias cuentan con la posibilidad de ser estudiados.

1.3 ALGUNAS VERSIONES DEL PLATONISMO

Más adelante se expondrá en más detalle la versión platónica *full-blooded platonism* (FBP) de la cual es creador Balaguer. Esta corriente afirma que todos los objetos matemáticos lógicamente posibles existen (luego se explicará que se entiende por "lógicamente posible"). Balaguer (1998) en la formalización de su definición de FBP presenta lo siguiente:

$(\forall x)[(x\ es\ un\ objeto\ matemático\ \&x\ es\ logicamente\ posible) \rightarrow x\ existe]$

Balaguer (1998, p.6).

Con esta definición, él reconoce dos problemas. Primero, que la existencia de un objeto es un predicado que se aplica en algunos casos y otros no. Segundo, por el uso de "posible" que se hace, podrían o no haber tales objetos. Puede verse esto con un ejemplo concreto: un elefante rosado que tiene diez cuernos es "naturalmente posible" por la evolución de las especies, luego existen estos elefantes. Aunque es posible que existan elefantes así en otros mundos, con oraciones como esas se podría creer (o crear en este caso) en la existencia de cualquier tipo de cosas abstractas o no, lo cual no parece muy conveniente. Pero darles a las matemáticas ese privilegio de aceptar la existencia de sus objetos mientras que en otros casos no, no es justo. Los objetos matemáticos considerados en FBP, son objetos reales, existentes, no son objetos que "no existen", sino que su existencia es tan real como la de cualquier objeto físico. Y en este sentido, cualquier objeto matemático que posiblemente podría existir, en realidad existe. Para el FBP estos objetos existen independientemente de nosotros.

1.3.1 Estructuralismo

Una de las respuestas (aunque con fallas) que Balaguer (1998) expone a las críticas antiplatonista, es la estrategia de los platonistas contemporáneos como Quine, Steiner, Parsons, Hale, Wright, Resnik, Shapiro, y Katz, de la cual se hablará en el capítulo 3. Por lo cual, se menciona entre las corrientes del estructuralismo aquella que se ubica dentro del platonismo, (desarrolladas por Resnik y Shapiro).

En términos generales, el estructuralismo es una de las líneas del realismo en el cual las teorías matemáticas no son descripciones de objetos particulares abstractos, sino que son descripciones de estructuras abstractas; donde la estructura es como un *patrón,* es decir, un sistema de *posiciones* que puede ser "llenado" por algún sistema de objetos que tengan la misma estructura. Lo que es importante en el estructuralismo no son las "propiedades internas" de los objetos matemáticos; sino las relaciones que se dan entre los objetos matemáticos (Balaguer, 1998)

Este punto de vista podría remontarse a las contribuciones realizadas por Dedekind y Peano a la axiomática de la aritmética, en el que los números naturales se pueden interpretar como un entramado de relaciones que generan una estructura. Véase el modo en que Dedekin enunciaba que la estructura de los números naturales es común a una o cualquier estructura que guardase la función sucesión como relación de orden.

> Si en la consideración de un sistema simplemente infinito N ordenado por una transformación φ descartamos enteramente el carácter especial de los elementos, reteniendo simplemente su distinguibilidad y teniendo en cuenta sólo las relaciones mutuas en que la transformación ordenadora φ los coloca, entonces esos elementos se llaman números naturales o números ordinales o simplemente números … Las relaciones o leyes que se derivan enteramente de las condiciones iniciales son, por lo tanto, siempre las mismas en todos los sistemas simplemente ordenados, cualesquiera nombres suceda que se les dé a los elementos individuales, ellos constituyen el objeto primero de la ciencia de los números o aritmética (Dedekind 1901, citado por Vélez, 2013, p. 4)

Es precisamente la relación lo que predomina como significativo en el estructuralismo; un número no sería un objeto abstracto, sino que "la esencia de cada número natural está en su relación con los otros" Shapiro (citado por Castro, 2009), pues los números tienen sus propiedades en virtud de la posición que ocupan en la estructura, existe un solo número en relación a los otros. Por ejemplo, la estructura de los número naturales dada por Von Newman

Ø ocupa el lugar del cero

$Ø \rightarrow Ø \cup \{Ø\}$ ocupa el lugar de la función sucesor

Con el desarrollo de las ideas del estructuralismo, se consideran entonces que los números no serían objetos abstractos, sino que son en tanto cumplen una función y tienen una posición en una estructura. Véase la expresión de los Bourbaki

> Ahora podemos hacer comprender lo que, de una manera general, debe entenderse por una estructura matemática. El rasgo común de las diversas nociones agrupadas bajo ese nombre genérico es que se aplican a conjuntos de elementos cuya naturaleza no está especificada; para definir una estructura, se dan una o varias relaciones en las que intervienen estos elementos …; se postula luego que la o las relaciones dadas satisfacen ciertas condiciones (que se enumeran) y que son los axiomas de la estructura considerada. Hacer la teoría axiomática de una estructura dada es deducir las consecuencias lógicas de los axiomas de la estructura, con exclusión de toda otra hipótesis acerca de los elementos considerados (en particular, toda hipótesis sobre su naturaleza propia) (Bourbaki , citado por Vélez, 2013, p. 11)

Estas estructuras serían independientes, la condición radica entonces en que las relaciones entre los lugares (sea lo que sea lo que la ocupe) permanezca, es decir, el patrón o las reglas de juego establecidas deben mantenerse. Más aún, como afirma Vélez (2013), cuando es claro en las afirmaciones de Shapiro y Resnik[7], que los objetos son estructuras abstractas en donde no pueden haber objetos que tengan estructura interna, es decir, los objetos son posiciones que no tendrían características por fuera de la estructura. Pero, para Balaguer el objeto abstracto y la estructura no difieren, en tanto que la estructura hace referencia a las relaciones que hay entre los objetos matemáticos y por ende esas relaciones son también entidades abstractas, es decir las estructuras son también un objeto matemático.

Si bien puede decirse que el estructuralismo hace referencia al problema de la indeterminación de las entidades de las proposiciones matemáticas, el trabajo que se presenta se desarrolla alrededor de entender los objetos matemáticos como objetos abstractos independientes y no como lugares dentro de una estructura.

1.4 ANTIPLATONISMO

Existe una amalgama de opciones anti-platonistas. Entre las que se pueden distinguir, tradicionalmente, según Ponte (2005): los formalistas (nominalistas) y los intuicionistas (como tipo de constructivistas, según Ponte). Partiendo de las dos tesis centrales del

[7] Filósofos contemporáneos que han contribuido al estructuralismo y sobre los cales no se entra hablar de ellos en detalle, a razón de las tesis principales consideradas en este trabajo.

platonismo, se tiene que los formalistas entran en polémica con la existencia de los objetos matemáticos y los intuicionistas niegan la independencia de dichos objetos. Más aún, se esbozará la posición ficcionalista sobre las matemáticas sobre la cual se hablará en el capítulo 3.

1.4.1 Sobre ideas formalistas

El formalismo consiste en considerar que los objetos matemáticos no existen, que los enunciados matemáticos no tienen contenido. Generalmente se asocia con la idea de es "un juego de símbolos". En esta postura la lógica juega un papel importante, pero difiere del logicismo además en que para el formalista las matemáticas no se reducen a la lógica. Obsérvese la idea de Hilbert que consiste en formalizar la matemática en un sistema en que demostración, objetos, teoremas tengan estructura lógica pero vacía de contenido; más aún, Hilbert, manifestó la relación entre existencia y consistencia:

> Si … se puede demostrar que los atributos conferidos a una noción no pueden, por aplicación de un número finito de deducciones lógicas, conducir nunca a una contradicción, diré que se ha demostrado la existencia matemática de la noción en cuestión, por ejemplo la existencia de un número o de una función que cumplen ciertas condiciones … [o] … la existencia matemática del conjunto de todos los números reales, es decir, del continuo. [Hilbert 1900,]. (Ferreiròs, 1999, p. 5)

En este sentido, el formalismo requiere de la demostración formal de consistencia para responder si se quiere, al problema de los fundamentos. Este aspecto es problemático desde este punto de vista, porque como lo anuncia Ferreiro (1999), en cierto sentido no se dispone de una fundamentación para toda la matemática, aunque se tenga convicción de que el análisis o algebra abstracta, no contenga contradicciones. Pero, esa convicción no estaría basada en los métodos formales, por lo que si se arguye a una clase de intuición para generar ideas de algunas estructuras se estaría entrando al terreno del platonismo interno.

Si bien el formalismo podría permitir al matemático la libertad de postular objetos sin restringirse a qué es aceptable o no en la matemática, también cabe decirse que el formalismo acarrea entre sus dificultades la de no especificar, por ejemplo el porqué de que en la práctica matemática e históricamente no se han tomado todos los modelos del sistema, como por ejemplo de la aritmética de Peano ya que desde este punto de vista estarían a un mismo nivel, o por qué son de interés los que se estudian (Ferreiros, 1999)

Por otro lado, algunas tradiciones filosóficas, en relación al juego de símbolos, exponen que "aquello que podemos decir significativamente que existe son aquellas entidades para las cuales tenemos nombres en un *framework* lingüístico, estos nombres regidos por reglas sintácticas" (Rufino, 2005, p.341), es decir, el contenido de las formas sintácticas son en tanto se les dé una interpretación. Pero, si se toma que las matemáticas tienen reglas o normas lingüísticas por convención para hablar de la existencia de los objetos, es pretender decir que se fija la propiedad que tiene el objeto, como si se dijera que llamar conductor a un material lo hace ser conductor de energía.

Así, por ejemplo, si un sujeto X con conocimientos nulos sobre ciencia entrara a un laboratorio de física, vería cilindros, esferas, tubos y letras en un tablero, pero otro sujeto Y versado en ciencias vería aceleradores de partículas o compresores de alta presión (Ruffino, 2005), así que los objetos que residen para X en el laboratorio no son los que Y está viendo. Más allá de esta diferencia, no puede decirse que existe una descripción más cercana del que tiene el vocabulario científico. Pero, cabe preguntarse si acaso el disponer de un lenguaje adecuado permite ver los objetos de un recinto (ideal).

Sin embargo, considerar la matemática como una sintaxis lógica del lenguaje implicaría que la mayor parte de las matemáticas no encajaría, ya que al ver las teorías matemáticas como símbolos regidos por reglas sintácticas significaría que pueden ser exhibidas (es decir, no pueden hacer referencia a un número infinito de expresiones de un cierto tipo, como infinitos nombres primitivos), pues estas reglas son fintarías. Pero, como lo afirma Ruffino (2005), la matemática es consistente, esencialmente en un vocabulario no-finitario. De esta manera, Rufino afirma que para probar la consistencia es necesario o bien contar con un método finitario que muestre la consistencia de una parte de las matemáticas que así lo requieren (como en el axioma de elección (AE)[8]) o reducir las matemáticas a una mínima parte. Lo primero Gödel mostró que era imposible, lo segundo sería reforzado e inútil pues se prescindiría de gran parte de la matemática clásica.

[8] AE: Cada conjunto tiene una función de elección: Sea A un conjunto; se puede describir P'(A) por P(A)-{Ø}. Por una función de elección para A significa r: P' (A) → A tal que $\forall B \in P'(A), r(B) \in B$.

1.4.2 Sobre ideas del intuicionismo

Por otro lado, como corriente anti-platónica se encuentra el intuicionismo, el cual recoge la idea constructivista que dice que no existe objeto matemática en tanto no haya procedimientos para su construcción. De esta manera, Ponte (2005) expresa que el intuicionismo viene siendo un tipo de constructivismo. Así se ve el intuicionismo como

> Una tercera respuesta, frente al problema de los fundamentos de las matemáticas, se presenta con el *Intuicionismo* de L.E.J Brouwer (1881-1986), quien, a partir del ataque al principio lógico del tercero excluido, y en la misma línea seguida por los miembros de la Escuela de París (H. Poincare, E. Borel, H. Lebesgue, L.Baire, es decir los llamados "semintuicionistas") cuestiona el infinito actual de la teoría cantoriana Tofiño (citado por García, 2010)

Es decir, el intuicionismo no acepta la existencia de objetos que no se generen de manera deductiva, por construcción paso a paso. De esta manera no aceptan el principio de tercio excluido que consiste en que una proposición *p* es falsa o verdadera, no habiendo lugar para una tercer interpretación. Así en lugar de probar que p es verdadera se demuestra que –p es falsa, formando una cadena de implicaciones que lleve el proceso a una proposición que contradiga algunas de las hipótesis, para aludir luego al principio de no contradicción y demostrar p por reducción al absurdo.

Ejemplo:

Sea p: $\sqrt{2}\ un\ número\ irracional$
Por lo que $-p$: $\sqrt{2}\ es\ un\ número\ racional$
P₁: Si $\sqrt{2}$ es racional, entonces existe enteros primos relativos tal que $\sqrt{2} = \frac{m}{n}$
P_2: Entonces, $2 = \frac{m^2}{n^2}$ y $m^2 = 2n^2$.
P_3: Por lo que m^2 es un número par y por lo tanto m también es par. Entonces existe un entero *K*, tal que $m=2k$.
P_4: Si elevamos al cuadrado tenemos $m^2=4k^2$ Y así, (por **P_2** y **P_3**) $2n^2=4k^2$ o $n^2=2k^2$,
P_5: lo que dice que n^2 es par y por tanto *n* es par.
P_6: Si *m* y *n* son pares, entonces tiene 2 como factor común, lo que contradice el hecho que *m* y *n* son primos relativos.
Luego, *-p* es falso.
Así que *p* es verdadera.

Este principio del tercio excluido permite establecer que algunos objetos matemáticos se admiten dados, pero el intuicionismo no acepta dicha afirmación a menos que se pueda construir el objeto. Sin embargo, desarrollos matemáticos muestran que construir los números reales no es posible de esta manera. Ahora bien, en el intuicionismo los objetos matemáticos existen dependientes de la mente. Para los intuicionistas, las entidades matemáticas son construcciones de la mente del matemático, la verdad de las proposiciones se reduce a la noción de prueba (Ponte, 2005)

Así, tanto intuicionistas como formalistas dan importancia al uso de la lógica, aunque no la misma que le dan los logicistas. Se diferencian en relación a la naturaleza de las proposiciones matemáticas y su verdad, pues para los formalistas los enunciados matemáticos no referencian objetos existentes, (son vacíos de contenido), y para los intuicionistas son construcciones de la mente.

1.4.3 Sobre ideas del ficcionalismo

Ahora bien, otra de las corrientes dentro del marco anti-platonista se encuentra el ficcionalismo, aunque sea de una manera espacial su participación. Esto es porque el argumento del ficcionalismo consiste principalmente en no rechazar la tesis semántica del platonismo, aunque su conclusión sea diferente.

Veamos, el argumento ficcionalista explicado en la *Stanford Encyclopedia of Philosophy*:

1. Enunciados matemáticos como “4 es par” debe leerse al pie de la letra; es decir, que deben ser leídas como de la forma 'Fa' y, por lo tanto, como si se realizara declaraciones directas sobre la naturaleza de ciertos objetos; por ejemplo, “4 es par" debe leerse como hacer una declaración directa acerca de la naturaleza del número 4. Sin embargo,
2. si un enunciado como “4 es par” debe leerse al pie de la letra, y si además son verdaderas, entonces deben existir realmente los objetos de las clases que ellos tratan; por ejemplo, si “4 es par” hace una declaración directa acerca de la naturaleza del número 4, y si esta frase es literalmente verdadero, entonces no deben existir realmente una cosa tal como el número 4. Por lo tanto, a partir de (1) y (2), se deduce que
3. si un enunciado como “4 es par” es verdad, hay tales cosas como objetos matemáticos. Pero,
4. Sí hay tales cosas como objetos matemáticos., ellos son objetos abstractos, es decir, objetos no espacio temporles; por ejemplo, hay tales cosas como el número 4, entonces es un objeto abstracto, no un objeto físico no un objeto mental. Pero

5. No existen los objetos abstractos. Por lo tanto, de (4) y (5) por *modus tollens*, se sigue que
6. No existen los objetos abstractos. Y así, de (3) y (6) por *modus tollens*, se sigue que
7. Enunciados matemáticos como “4 es par” no son verdaderos (de hecho, ellos no son verdaderos por la razon que da el ficcionalismo, y así se sigue que el ficcionalismo es verdadero). (Balaguer, 2011) [9]

Esquema explicativo del argumento lógico de los ficcionalistas:

Sea P_n los pasos lógicos del argumento, y p, q, r y t las proposiciones.

P_1) p: un enunciado matemático se debe leer literalmente. Así “X es F(x)” se entiende como enunciado que declara algo directamente sobre X, sobre su naturaleza.

P_2) q: los enunciados matemáticos como “x es F(x)” son verdaderos

$\rightarrow$ r: Deben existir objetos matemáticos.

De tal manera que **P_2** se establezca con la fórmula lógica: $(p \wedge q \rightarrow r)$

P_3) Si hay tales cosas como objetos matemáticos, entonces ellos son objetos abstractos, esto es:

$r \rightarrow t$; t: objetos abstractos

P_4) Pero, los ficcionalistas tienen como hipótesis, además, que los objetos abstractos no existen, tomemos esto como $\neg t$.

Luego,

P_5)

$$\begin{array}{l} r \rightarrow t \\ \underline{\neg t} \\ \neg r \end{array} \qquad \text{Por } \textit{Modus Tollens}$$

P_6) Como se tenía P_2) y con P_5), entonces,

$(p \wedge q \rightarrow r)$

---

[9]

1. Mathematical sentences like ‘4 is even’ should be read at face value; that is, they should be read as being of the form ‘*Fa*’ and, hence, as making straightforward claims about the nature of certain objects; e.g., ‘4 is even’ should be read as making a straightforward claim about the nature of the number 4. But
2. If sentences like ‘4 is even’ should be read at face value, and if moreover they are true, then there must actually exist objects of the kinds that they're about; for instance, if ‘4 is even’ makes a straightforward claim about the nature of the number 4, and if this sentence is literally true, then there must actually exist such a thing as the number 4. Therefore, from (1) and (2), it follows that
3. If sentences like ‘4 is even’ are true, then there are such things as mathematical objects. But
4. If there are such things as mathematical objects, then they are abstract objects, i.e., nonspatiotemporal objects; for instance, if there is such a thing as the number 4, then it is an abstract object, not a physical or mental object. But
5. There are no such things as abstract objects. Therefore, from (4) and (5) by modus tollens, it follows that
6. There are no such things as mathematical objects. And so, from (3) and (6) by modus tollens, it follows that
7. Sentences like ‘4 is even’ are not true (indeed, they're not true for the reason that fictionalists give, and so it follows that fictionalism is true). (Balaguer, 2011)

$\neg r$

$\neg (p \wedge q)$ Por *Modus Tollens*

P_7) Como: $\neg (p \wedge q) \leftrightarrow (\neg p \vee \neg q) \leftrightarrow (p \rightarrow \neg q)$ *Ley de Morgan*

Se tiene que:

P_8) con P_7 y P_1

$(p \rightarrow \neg q)$

P *Modus ponendo ponens*

$\neg q$

Por lo que los enunciados matemáticos no son verdaderos

Diferentes alternativas filosóficas se han alzado como reacciones al platonismo, a sus tesis principales: a) afirmar que las entidades matemáticas existen y b) que el valor de verdad de los enunciados matemáticos es independiente del sujeto. Como se mencionó en el apartado 1.2. Sobre el platonismo, para Ponte (2005) las cuatro tesis cardinales del platonismo han permitido que se diferencie dos tipos de platonismo: el platonismo ontológico se relaciona con aceptar la tesis a) y el platonismo semántico se relaciona con aceptar la tesis b). Generalmente, las reacciones al platonismo han surgido por no avalar la tesis que refiere a la posición ontológica, rechazan las consideraciones platónicas al no creen en la existencia de los objetos matemáticos y no avalar las condiciones de verdad de los enunciados de las teorías matemáticas.

Sin embargo, como Balaguer (2011) menciona, el ficcionalismo se diferencia de las corrientes anti platónicas en general, dado que como lo mencionamos en párrafos anteriores, tanto el constructivismo o intuicionistas como el formalismo cuestionan la esencia del platonismo ontológico y la independencia de los entes matemáticos. Lo cierto es que tanto la tesis ontológica como la semántica se ven rechazadas; pero el ficcionalismo "is the only anti-platonistic view that doesn't reject the semantic thesis" (Balaguer, 2011)[10].

Los argumentos planteados por los ficcionalistas, permiten debatir algunas posturas anti-platonistas, principalmente cuando estas posturas niegan algunas de las afirmaciones iníciales dadas en el argumento descrito anteriormente, a saber, las premisas (1), (2) y (4). Sin embargo, si se consideran que las posturas que niegan alguna de esas tres premisas son

[10] Traducciòn: Es la única vía antiplatonista que no rechaza la tesis semántica

superadas, queda entonces la pregunta de cómo se argumenta la premisa (5), es decir la premisa que dice que no existen los objetos abstractos. Esta última corresponde responder al ficcionalismo, descrito en el capítulo 3.

Aunque el argumento de la indispensabilidad en matemáticas, en el que se pregunta cómo los ficcionalistas podrían explicar la indispensabilidad o aplicabilidad necesaria de las matemáticas en las ciencias empíricas, es un argumento generalmente usado contra los ficcionalistas, igualmente se argüirá a la idea de que los ficcionalistas no pueden explicar la objetividad de la matemática. Esto se tratará en el capítulo 3.

La conclusión a la que llega el argumento general del ficcionalismo es que los enunciados matemáticos no son verdaderos, así enunciados tales como "dos es par" o "2 + 2 = 4) no necesariamente son verdaderos. Pero, generalmente se puede decir que si se tiene dos enunciados como "2 es par" y "2 es impar", el primero es el "correcto", Balaguer (2011), expone que la práctica matemática cuenta con un tipo de objetividad de manera que en la práctica matemática se dirá que el enunciado "2 es par" es verdadero y que el enunciado contrario es falso. Pero, como bien lo explica Balaguer (2011) en *Stanford Encyclopedia of Philosophy*, los ficcionalistas tendrían que decir que los dos enunciados son falsos. En este sentido es que el argumento de la objetividad reacciona contra el ficcionalismo, este se desarrollará en el capítulo 3 del presente trabajo, exponiendo que, como consecuencia a este argumento contra el ficcionalismo, surgen dos variantes del ficcionalismo, las cuales llama: *Ficcionalismo formalista* y *ficcionalismo basado en intenciones.*

De manera resumida las denominamos anti-realistas: convencionalismo, formalismo, intuicionismo, ficcionalismo, entre otras, sostienen, en sus diferentes vertientes, que, por ejemplo: a) las proposiciones matemáticas son analíticamente verdaderas, ejemplo de ello es postular que "2+1=3" es como decir "todos los solteros no están casados", esto es: que sea cierto en virtud de los significados de las palabras. b) Las matemáticas es un juego de manipulación de símbolos, por ejemplo "2+1=3" es un resultado del "juego" especificado por los axiomas de Peano (AP) o, por ejemplo que las matemáticas nos dan verdades acerca de lo que es cierto en varios sistemas formales; por ejemplo, la proposición "2+1=3" es un teorema del sistema formal AP. c) considerar las matemáticas como aquella que trabaja con objetos abstractos, es decir que puede hablarse de las propiedades de un tal objeto, y que si este estuviera sería abstracto, pero se niegan a considerar la existencia del objeto sobre el cual se habla porque el término al que se hace referencia es vacío, por ejemplo el 3 en la proposición “3 es par” por lo cual la proposición no es verdadera (Balaguer, 2009).

Pero, las afirmaciones mencionadas en el párrafo precedente, realizadas como respuestas o contraposiciones al realismo considerado en este trabajo, pueden dilucidar dificultades que se expondrán más adelante. Un ejemplo de estas dificultades es la que se le manifiesta al ficcionalismo cuando este hace referencia a que no habría diferencia entre proposiciones como 2+2=4 o 2+2=6, dado que dicha afirmación no es coherente con la idea de no contradicción en las matemáticas. Ya que, contrario a lo anterior, Katz (2000) afirma que un objeto matemático deja de existir si se encuentran contradicciones en la teoría, razón por la cual los matemáticos la reformulan para superar esas contradicciones con la cual el objeto matemático existiría de nuevo. Sin embargo, debe tenerse en cuenta el teorema de Gödel que dice que nunca sabremos si una teoría es autoconsistente, libre de contradicciones, o que nunca sabremos si una conjetura se puede demostrar dentro del cuerpo teórico de la disciplina matemática, por lo cual, cabría la posibilidad de afirmar que nunca sabremos si un “objeto” matemático es en realidad un objeto; pero tampoco se puede refutar.

Por otro lado, no se habló de las posturas que extienden el rango de lo perceptible para incluir los objetos matemáticos, pero se observa que estas posturas para evitar el problema sobre cómo acceder a objetos abstractos sitúan los objetos en el mundo natural. En este sentido, el conocimiento matemático está mediado por la experiencia. Según Maddy (citada por Katz, 2000) si hay tres huevos en un panal, entonces el conjunto de huevos se ve. Pero como los objetos naturales no son no-espaciales y atemporales, el conjunto de panal de huevos debe ser otro objeto concreto también, y surgen, por consiguiente, las siguientes preguntas: ¿cómo pueden naturalizarse números y conjuntos puros? ¿Cómo se le puede asignar una posición física a un número o conjunto? ¿Dónde está el conjunto vacío? (Katz, 2000) . En los siguientes capítulos se tratará las posturas especificas desde el análisis de

Balaguer, y se analiza las dificultades de la mismas.

CAPÍTULO 2: FULL-BLOODED PLATONISM

En este capítulo se analizarán algunos aspectos de las posturas de Balaguer (1998) y Katz (1998, respecto al reto epistemológico y ontológico de los objetos matemáticos propuesto por Benacerraf (2004) en su ensayo "Mathematical Truth". En términos generales, Benacerraf propone que si los objetos matemáticos son abstractos, entonces no podemos tener ningún acceso a ellos. Luego, no podemos tener conocimiento de los objetos matemáticos.

Debe tenerse en cuenta que el conocimiento matemático en realidad existe en las teorías; pero el problema está cuando se dice que las teorías matemáticas *describen* esos objetos a los cuales no podemos acceder por su naturaleza abstracta; no hay forma de saber cómo son ni directa ni indirectamente. No se niega lo *abstracto* sino que se niega que hayan objetos abstractos y que, por nuestra naturaleza física, espacio-temporal, no tiene sentido hablar de esos objetos abstractos como si se pudieran describir de alguna forma.

Por consiguiente, si se asume que la única forma de conocer objetos es la misma que se emplea para estudiar los objetos de las ciencias naturales[11], entonces los seres humanos no pueden tener conocimiento matemático. Lo que los anti-platonistas critican es que los platonistas no pueden desarrollar una epistemología que explique cómo los seres humanos pueden adquirir conocimiento de objetos matemáticos abstractos.

Como respuesta a las críticas antiplatonistas Balaguer (1998), expone tres estrategias que, desde su punto de vista, presentan fallas, salvo su epistemología FBP que hace parte de la tercera estrategia, la cual parece superar muchas de las críticas de los anti-platonistas. Se hablará de ella más adelante. La primera estrategia se debe a Gödel, en esta se afirma que

[11]Generalmente se comprende que el conocimiento de los objetos de las ciencias naturales se obtiene a partir de un estudio de los mismos que comprende un contacto entre el sujeto o instrumento y el objeto, contacto que supone una relación de causa y efecto.

los seres humanos no existen exclusivamente en el espacio-tiempo y que la mente humana puede, de alguna manera, entrar en contacto con los objetos matemáticos (no espacio-temporales), y de esa forma adquirir conocimiento matemático.

La segunda estrategia consiste en considerar, los objetos matemáticos como objetos que existen en el espacio-tiempo; se accede a ellos por medio de los sentidos. Esta es la estrategia de Maddy. Por último, la tercera estrategia es la de los platonistas contemporáneos como Quine, Steiner, Parsons, Hale, Wright, Resnik, Shapiro, y Katz. Esta estrategia consiste en aceptar que los seres humanos somos espacio-temporales en su totalidad, y que los objetos matemáticos abstractos están fuera del espacio-tiempo, y que para *conocer* ese dominio matemático se requiere de una epistemología de *no contacto.* En este caso, los sentidos no juegan ningún papel a la hora de hablar de objetos matemáticos. Lo interesante de esta postura es que se da una explicación sobre cómo hablar de algo que es inaccesible, y saber que ese algo, en este caso los objetos matemáticos, es descrito por las teorías matemáticas como la que desarrolló Euclides con su geometría.

Según las estrategias anteriores, en las dos primeras se aprecia una forma de contacto que permite que haya una vía de comunicación entre los objetos matemáticos y los seres humanos; mientras que en la tercera estrategia no hay ninguna forma de transferencia de información entre esos objetos y nosotros.

2.1 LA ESTRATEGIA DE GÖDEL

Veamos lo que propone Gödel sobre cómo podemos conocer o entrar en contacto con los objetos matemáticos:

> It should be noted that mathematical intuition need not be conceived of as a faculty giving *immediate* knowledge of the objects concerned. Rather it seems that…we *form* our ideas also of those objects on the basis of something else which is immediately given. Only this something else here is *not*, or not primarily, the sensation…it by no means follow, however, that the data of this second kind, because they cannot be associated with actions of certain things on our sense organs, are something purely subjective, as Kant asserted. Rather, they, too, may represent an aspect of objective reality, but, as opposed to sensations, their presence in us may be due to another kind of relationship between ourselves and reality.

Katz (2000, citando a Gödel, 1947)[12]

Se puede apreciar en Gödel un primer acercamiento de la forma en que se puede decir algo de los objetos matemáticos sin hacer alusión a los sentidos.

Desde esta perspectiva, la existencia de estos objetos está "garantizada" gracias a que *se entra en contacto* con estos objetos matemáticos por medio de la *intuición matemática*. Pero, Balaguer (1998, p.25) aclara que con esta intuición hay de alguna forma un intercambio de información entre los objetos matemáticos y nosotros, intercambio que se da por medio de nuestra mente (a la *intuición matemática* también se le conoce como *facultad racional)*; esa información pasa de objetos que no son espacio-temporales a seres espacio-temporales, lo cual no es una buena explicación. Si se asume que hay algo en nosotros que no es espacio-temporal, inmaterial, tampoco ayuda porque no puede haber transferencia de información de un objeto abstracto a otro inmaterial (nuestra mente) que también es abstracto. Además, si la intuición es una *facultad de no contacto* no queda claro cómo es posible que una facultad de no contacto entra en contacto con nosotros.

La justificación que da Katz (1998, p.45) para tener en cuenta la intuición, es que esta se ha de ver como relevante para la epistemología racionalista en el sentido que permite una aprehensión puramente racional de la estructura de un objeto abstracto, una aprehensión que no tiene conexión con nada concreto. Para ver esto, tómese el siguiente ejemplo: el número 4 es un número compuesto: 4=2x2, lo cual nos muestra la imposibilidad de que sea un número primo (un número divisible solo por1y él mismo). De esta forma, el papel que juega la intuición es similar al de la vista. Con la intuición se observa con los "ojos de la mente", aunque puede estar sujeta al error que se corrige con las formalidades y rigurosidad de las teorías matemáticas para hacer demostraciones, pero a pesar de ello, no se debe

[12] Textual: Debería notarse que la intuición matemática no necesita ser concebida como una facultad que da conocimiento *inmediato* de los objetos involucrados. Más bien parece que…*formamos* nuestras ideas también de esos objetos sobre la base de algo más que es inmediatamente dado. Que este algo no es aquí, la sensación, o no primariamente… de ninguna manera se sigue, sin embargo, que los datos de esta segunda clase, porque no pueden ser asociados con acciones de ciertas cosas sobre nuestros sentidos, o algo puramente subjetivo, como Kant afirmó. No obstante, ellos, también, pueden representar un aspecto de la realidad objetiva, pero en tanto opuesto a la sensación, su presencia en nosotros puede deberse a otra clase de relación entre nosotros mismos y la realidad.

desechar por ser un *instrumento* poco confiable en algunos casos. Lo mismo sucede con la vista, a veces nos engaña pero no por eso se desecha como herramienta para observar fenómenos naturales.

2.2 LA ESTRATEGIA DE MADDY

Con esta estrategia, se pretende eliminar el problema epistemológico de accesibilidad que presentan los objetos matemáticos cuando se consideran como objetos abstractos. Se accede a ellos por medio de los sentidos como la vista debido que estos objetos se consideran objetos concretos: “I intend to reject the traditional platonist’s characterization of mathematical objects…[and] bring them into the world we know and into contact with our familiar cognitive faculties” Balaguer (1998, p.28, citando a Maddy, 1990) Maddy (Citado por Balaguer, 1998, p. 28)[13].

Teniendo esto en cuenta, un conjunto de huevos está donde están localizados los huevos, y los huevos son perceptibles por la vista, se pueden sentir y oler de la manera habitual. Pero si los objetos matemáticos son objetos concretos, la crítica que hace Katz (1998, p.18) a Maddy es que no se podrían responder preguntas como: ¿qué posición espacial ocupan los números? ¿Dónde está el conjunto vacío?, además, como los objetos matemáticos son concretos, estarían sujetos a cambios como las hipótesis de las ciencias naturales, entonces, el número 4 podría algún día ser un número primo, o la raíz cuadrada de dos podría ser, en un futuro, racional.

2.3 EL HOLISMO Y LA CONFIRMACIÓN EMPÍRICA: QUINE, STEINER, Y RESNICK

Esta concepción sostiene, que no es necesario entrar en contacto con los objetos matemáticos para saber si las teorías que los describen son verdaderas. Esto es debido a que se confirman con la ciencia experimental. Entonces, hay objetos matemáticos abstractos y objetos físicos que se estudian en conjunto por medio de teorías. Aquí las

[13] Textual: tengo la intención de rechazar la caracterización tradicional platonista de objetos matemáticos…[y] traerlos al mundo que conocemos y en contacto con nuestras facultades cognitivas familiares.

teorías matemáticas y su indispensabilidad para las ciencias se deben analizar como un todo para encontrar una explicación al reto epistemológico de Benacerraf de cómo siendo seres espacio-temporales podemos adquirir conocimiento de objetos no espacio-temporales.

Luego, cuando una teoría que hace uso de las matemáticas es confirmada por la experiencia, entonces es suficiente para afirmar que las teorías que describen objetos matemáticos son ciertas, que en realidad existen esos objetos abstractos, y por ende, la confirmación es *holística*. La crítica que hace Balaguer (1998, p.40) es que en realidad la matemática no se confirma por la experimentación, y que la experimentación no es un soporte para la validez de las teorías matemáticas. Los matemáticos cuando crean teorías no esperan que pueda tener alguna aplicación práctica para que sea válida. De hecho, la matemática axiomática cuyo legado viene desde Euclides no hace ninguna referencia a la experimentación sino al marco teórico que la compone como axiomas, definiciones, postulados y teoremas. Más aún, se podrían usar matemáticas que no tengan un fundamento riguroso, pues lo que interesa en las ciencias experimentales es que las matemáticas usadas o los modelos matemáticos usados en las ciencias se ajusten a los datos observados y que se puedan hacer predicciones que se puedan confirmar o refutar sin comprometerse a la existencia de objetos matemáticos abstractos.

2.4 LA ESTRATEGIA DE KATZ: UNA EPISTEMOLOGÍA BASADA EN LA NECESIDAD

Para Katz (1998, p.23), los realistas requieren de una epistemología que trate a las ciencias formales como conocimiento puramente *a priori;* en el caso que nos interesa, la matemática. Katz no está de acuerdo con que la única forma de conocer sea interactuando con objetos naturales, y utilizar ese argumento como la única forma de justificación en *cualquier* forma de conocimiento. Se infiere, entonces, que su epistemología de *no contacto* puede dar una explicación alternativa de cómo seres espacio-temporales como nosotros, pueden conocer o describir objetos abstractos como los objetos matemáticos.

Para probar lo dicho en el párrafo anterior sobre que no todo conocimiento tiene en una u otra forma relación con el mundo físico, Katz (1998, p.32) afirma que en el mundo natural no se puede encontrar una explicación a las *relaciones necesarias* que se encuentran en las teorías matemáticas. Por relaciones necesarias se entiende propiedades de los objetos matemáticos invariantes en el tiempo. Por ejemplo, la propiedad (teorema) de que en "todo triángulo rectángulo la suma de los cuadrados de los catetos es igual a la suma del cuadrado de la hipotenusa", es cierta tanto en la época de Pitágoras, en la actual, y lo seguirá siendo en el futuro. Luego, hay otra forma de conocer que no alude a la experiencia sino que es puramente racional dentro del marco teórico de la geometría euclidiana.

Es interesante saber que una vez que se asume la existencia de estos objetos matemáticos abstractos, para saber cómo son, Katz (1998, p.37-43 recurre a sus propiedades intrínsecas o necesarias, es decir, no pueden ser de otra forma como se ve en el teorema de Pitágoras, o con la irracionalidad de la raíz cuadrada de dos, o cualquier otro teorema cuya demostración no deje espacio a la duda, es decir, cuando se excluye toda posibilidad de falsedad. Estos objetos no pueden ser diferentes ni en este mundo ni en ningún otro mundo por ser abstractos, y sus relaciones necesarias dicen que no son contingentes, que no pueden cambiar.

En este mundo los gorilas pueden gustar de los bananos; pero en otro mundo pueden no gustarles. Con los objetos matemáticos no sucede eso, no hay que observar ni experimentar para saber cómo son porque sus relaciones necesarias están completamente determinadas. Luego Katz hace referencia a la intuición como la primera aproximación al entendimiento de esos objetos matemáticos como saber que 4 es un número compuesto y que por eso no es primo. Pero eso no implica un compromiso de infalibilidad de la intuición, pues esta, como ya se mencionó, puede estar sujeta a errores que las teorías matemáticas intentan corregir. Lo mismo sucede con la vista, nos puede sugerir que la tierra es plana o que no se mueve, pero no por eso se desecha la vista como forma de conocer. Con la intuición sucede lo mismo. Así, la intuición es una fuente para adquirir conocimiento matemático elemental que no tiene conexión con nada concreto, es puramente racional.

Entonces, si la intuición es la primera forma de conocer las estructuras básicas de los objetos matemáticos sin entrar en contacto con ellos por ser objetos abstractos, una pregunta que surge es ¿cómo estar seguros que ese conocimiento que proviene de la intuición, o de las teorías matemáticas, efectivamente describe esos objetos? Balaguer (1998, p.38) argumenta que la teoría de no contacto de la intuición (NCTI por sus siglas en inglés), puede ser útil para explicar cómo se adquieren creencias sobre los objetos matemáticos, pero no cómo esas creencias en realidad se refieren a esos objetos matemáticos. Recuérdese que para los realistas los objetos matemáticos existen de manera independiente de del ser humano, son independientes de la mente, son reales aunque son abstractos. Por ello Balaguer (1998) menciona la necesidad de que esta NCTI necesita ser complementada pues no hay forma de confrontar las creencias matemáticas con los objetos matemáticos de alguna manera confiable.

Balaguer (1998, p.39) señala que si un platonista cree en la existencia de objetos matemáticos (por ejemplo el número 3) y que estos objetos tienen ciertas propiedades (como que el 3 es un número primo), también se puede considerar que no existen tales objetos matemáticos, y que por ende, no hay nada en el mundo que corresponda a las creencias del platonista; pero, esto último no significa que el ser humano no pueda tener ideas superficiales o concepciones de los objetos matemáticos. El problema que ve Balaguer aquí, es que no hay manera que las creencias estén "conectadas" con los objetos abstractos en cierta forma apropiada. Y el problema de ello es que las creencias matemáticas son creencias de *no contacto.* Por lo cual la elaboración de una facultad de intuición de no contacto no es de ayuda para responder al reto epistemológico de Benacerraf.

Como observación a lo dicho, es de notar que la existencia o no existencia de los objetos matemáticos no afecta la práctica o la investigación en matemáticas como sí sucede con los objetos del mundo natural. En física, por ejemplo, hablar de fenómenos u objetos que nunca podrán observarse directa o indirectamente no tiene sentido, y las teorías físicas tienen sentido si hay alguna forma de corroborar dichos objetos o fenómenos. En matemáticas no. En realidad da igual si esos objetos existen en una realidad abstracta o si simplemente no existen, a pesar de que la existencia se da por medio de axiomas. Por ejemplo: “el conjunto vacío existe”. No se puede probar su existencia, pero se declara por medio de un axioma que hace parte del marco teórico en que se desarrolla la teoría de conjuntos; de lo contrario, cualquier afirmación que se haga respecto a la existencia de algo, sería cierta. Pero eso no tiene mucho sentido. Esta es la razón por la cual es difícil darle el mismo estatus ontológico a los objetos abstractos como lo tienen los objetos físicos: en el primer caso no espacio-temporales y en el segundo caso espacio-temporales.

2.5 UNA NUEVA EPISTEMOLOGÍA: FULL-BLOODEDPLATONISM (FBP)

Esta epistemología desarrollada por Balaguer (1998), pretende dar una respuesta alterna a las anteriores mencionadas sobre cómo se puede adquirir conocimiento matemático, ~~o~~ si estos son abstractos y por tanto, inaccesibles. Nótese que en este reto epistemológico no se habla de demostrar la existencia de los objetos matemáticos abstractos, sino que dada o supuesta su existencia cómo saber si las teorías matemáticas en realidad describen esos objetos. Si FBP es correcto (si todos los objetos matemáticos posibles existen), entonces todas las teorías matemáticas *consistentes* describen alguna colección de objetos abstractos. Luego, adquirir conocimiento de objetos matemáticos se reduce a adquirir conocimiento de teorías matemáticas consistentes. De esta forma no se requiere ningún tipo de contacto o acceso a esos objetos que las teorías describen. Así se supera el reto epistemológico de Benacerraf.

Con un ejemplo concreto se puede ilustrar el FBP, supóngase que hay una villa en Nepal de la cual no se tiene ningún tipo de información, entonces:

> Ahora, admito que no podría tener conocimiento de una villa en Nepal sin ninguna forma de contacto o acceso a esta. Pero si todas las posibles villas nepalesas existieran, entonces *podría* tener conocimiento de estas villas, aún sin ningún acceso a ellas. Para lograr tal conocimiento, solamente tendría que imaginar una posible villa en Nepal. Porque al asumir que todas las posibles villas nepalesas existen, se sigue que la que he imaginado existe y que mis creencias acerca de esta villa corresponden a los hechos acerca de esta. Ahora, por supuesto, este no es el caso que todas las posibles villas nepalesas existan, y que no podemos tener conocimiento de ellas en esta forma. Pero según FBP, todos los posibles objetos matemáticos existen. Por consiguiente, si adoptamos FBP, también podemos adoptar esta clase de epistemología para los objetos matemáticos. Balaguer (1998, p.49)[14].

[14] Textual: Now, I admit that I could not have knowledge of a Nepalese village without any access to it. But if all possible Nepalese villages existed, then I *could* have knowledge of these villages, even without any

Teniendo en cuenta la cita anterior, cualquier teoría matemática imaginada describe ese objeto matemático abstracto al que se refiere, pero no es claro cómo es posible ello. Es decir, si los objetos matemáticos son abstractos y reales, ¿cómo es posible que imaginar, o soñar, o inventar una teoría, puede en realidad describir ese objeto al cual no se tiene acceso? o ¿cómo las creencias que se tienen sobre los objetos matemáticos en realidad puedan *referirse* a esos objetos? Desde la perspectiva de este autor, hay dos tipos de creencias: la primera creencia es la creencia *fuerte* (*thickly* belief) acerca de un objeto *x* donde debe haber una "conexión" con *x* en alguna forma apropiada, y la creencia *débil* (*thinly* belief) acerca de *x*, donde no se necesita una "conexión" con *x* en una forma no trivial. En el sentido débil de "acerca", no se necesita siquiera que haya algo como *x*; por ejemplo, si una niña tiene la creencia que Santa Claus es gordo (creencia débil) es acerca de Santa Claus, a pesar de que no hay tal Santa Claus.

Pero las preguntas respecto a cómo podemos imaginar historias acerca de esos objetos, es porque son preguntas basadas en el sentido fuerte de "acerca". Recuérdese que FBP es una epistemología de *no contacto* y por tanto no hay un canal de comunicación entre los objetos abstractos y los sujetos en el sentido de una creencia fuerte, es decir, al asumir que los objetos matemáticos son abstractos y que hacen parte de una realidad no espacio-temporal, no pueden exponerse de manera directa o incluso indirecta en el sentido fuerte. Por ejemplo, un astrónomo puede observar un cambio brusco en la órbita de un planeta. Esto puede deberse a un choque de un asteroide contra ese planeta, o al paso de un objeto masivo cerca al planeta. A pesar de no verse de manera directa la causa de ese cambio de órbita, hay una explicación que puede corroborarse más adelante con una observación más detallada del fenómeno. No sucede así con los objetos matemáticos porque de lo contrario se estaría hablando de una forma de antirrealismo.

El problema que se ve con la creencia débil es que de hecho pueden no existir esos objetos

access to them. To attain such knowledge, I would merely have to dream up a possible Nepalese village. For on the assumption that all Nepalese villages exist, it would follow that the village I have imagined exists and that my beliefs about this village correspond to the facts about it. Now, of course, it is not the case that all possible Nepalese villages exist, and so we cannot attain knowledge of them in this way. But according to FBP, all possible mathematical objects do exist. Therefore, if we adopt FBP, we can also adopt this sort of epistemology for mathematical objects matemáticos como en el ejemplo de Santa Claus, y el desarrollo de la epistemología FBP está basada en que se pueden formular creencias y teorías que son débiles acerca de los objetos matemáticos, porque, según FBP, *todas* las teorías matemáticas consistentes en realidad describen alguna colección de objetos matemáticos.

Para el desarrollo de esta epistemología, Balaguer (1998) sostiene que los platonistas deben explicar el siguiente hecho: Si los matemáticos aceptan *p,* entonces *p.* En este caso se busca si FBP puede dar cuenta de cómo el conocimiento matemático que el ser humano tiene podría ser conocimiento de un "reino" matemático inaccesible. Lo que se pretende es ver si el conocimiento matemático es conocimiento *confiable* sobre esos objetos matemáticos.

El argumento central del FBP y su justificación, pero antes de eso, se exhiben algunos términos que el autor utiliza. Primero, no hay una correlación directa entre nuestras creencias matemáticas y los hechos matemáticos, porque somos humanos y estamos sujetos al error. Lo que necesita explicarse es el hecho que las creencias matemáticas son *confiables,* es decir, el hecho que si los matemáticos aceptan una teoría matemática *p,* entonces *p* en realidad describe parte del domino matemático. Segundo, por teoría *matemática pura* se entiende un grupo de proposiciones (oraciones) que se refieren exclusivamente al dominio matemático que predican solamente propiedades y relaciones matemáticas de objetos matemáticos.

2.5.1 E1 argumento central del FBP

El argumento central es como sigue, teniendo en cuenta las siguientes premisas:

(i) FBP-istas pueden dar cuenta del hecho de que los seres humanos pueden –sin entrar en contacto con el dominio matemático –formular teorías matemáticas puras.

(ii) FBP-istas pueden dar cuenta del hecho de que los seres humanos pueden –sin entrar en contacto con el dominio matemático –saber que muchas teorías matemáticas puras son consistentes.

(iii) Si (ii) es cierto, entonces FBP-istas pueden dar cuenta del hecho que (como regla general) si los matemáticos aceptan una teoría matemática pura T, entonces T es consistente.

Luego,

(iv) Luego los FBP-istas pueden dar cuenta del hecho que (como regla general) si los matemáticos aceptan una teoría matemática pura T, entonces T es consistente.

(v) Si FBP es cierto, entonces toda teoría matemática pura ciertamente describe parte del dominio matemático, es decir, ciertamente describe una colección de objetos matemáticos.

Por consiguiente,

(vi) Los FBP-istas pueden dar cuenta del hecho que (como regla general) si los matemáticos aceptan una teoría matemática pura T, entonces T ciertamente describe parte del dominio matemático. Balaguer (1998, p.52)[15]

En cuanto a (i), es cierto que los matemáticos formulan teorías matemáticas que no requieren de la experiencia para su validación y su dominio son los objetos matemáticos que describen. (ii) dice que los FBP-istas puede dar cuenta del hecho que los matemáticos pueden distinguir teorías consistentes de teorías inconsistentes. (iii) es trivial pues en caso de encontrarse una contradicción en la teoría, esta se abandona o reformula para superar esa inconsistencia. Debe tenerse en cuenta que cuando se habla de teorías matemáticas consistentes, se debe hablar de teorías probablemente consistentes debido a que es difícil

---

[15] Textual: (i) FBP-ists can account for the fact that human beings –without coming into contact with the mathematical realm –formulate purely mathematical theories.

(ii) FBP-ists can account for the fact that human beings can –without coming into contact with the mathematical realm –know of many of these purely mathematical theories that they are consistent.

(iii) If (ii) is true, then FBP-ists can account for the fact that (as a general rule) if mathematicians accept a purely mathematical theory T, then T is consistent.

Therefore

(iv) FBP-ists can account for the fact that (as a general rule) if mathematicians accept a purely mathematical theory T, then T is consistent.

(v) If FBP is true, then every consistent purely mathematical theory truly describes part of the mathematical realm, that is, truly describes some collection of mathematical objects.

Therefore

(vi)FBP-ists can account for the fact that (as a general rule) if mathematicians accept a purely mathematical theory T, then T truly describes part of the mathematical realm saber cuál es el alcance de una teoría o cuáles son todos los teoremas que podrían derivarse de ellas. Las inconsistencias podrían encontrarse en un futuro o no encontrarse nunca. (iv) se deriva de (ii) y (iii). Para la premisa (v), como FBP es una teoría y esta está definida como "todo objeto matemáticamente posible existe", entonces toda teoría matemática pura consistente describe alguna colección de objetos matemáticos. Finalmente, (vi) se sigue de (iv) y (v).

Hasta ahora hemos visto que desde el FBP si una teoría matemática es consistente, o si los matemáticos creen que son consistentes, entonces estos objetos matemáticos existen. Los antirrealistas niegan que las teorías matemáticas sean acerca de objetos matemáticos por la razón que, según ellos, no tiene sentido hablar de objetos no espacio-temporales y que por ello nunca se sabrá cómo es ese dominio, o nunca se estará seguro si las teorías matemáticas describen esos objetos. Podríamos complementar el FBP diciendo que los objetos matemáticos o sus estructuras se ven cada vez que un matemático (o una persona que puede entender las matemáticas involucradas) investiga o estudia matemáticas y que esta es una prueba de su existencia.

Se puede inferir un poco más allá del FBP, que incluso se puede hablar de objeto matemático aún si las teorías fallan o no son consistentes a la hora de describirlo, debido a que nuestra inteligencia es limitada; y por esa inteligencia limitada no se podrían describir infinidad de objetos matemáticos pues no hay ninguna razón para pensar que las ciencias matemáticas tienen un fin. Entonces, para hablar de objetos matemáticos, se necesita de una mente capaz de estudiarlos. Más adelante se argumentará porqué se puede hablar de objetos matemáticos como objetos independientes de nosotros. Pero ¿por qué negar los objetos matemáticos como objetos abstractos?

Empiristas como Ayer (1936) reconocen la dificultad de tratar con las verdades matemáticas que parecen para todo el mundo necesarias y dan certeza; mientras que las proposiciones de las ciencias naturales no son más que hipotéticas pues, siempre están sujetas a verificación. Y desde el punto de vista empirista ninguna proposición fáctica (basada en hechos en oposición a lo imaginario) puede ser necesaria o tener absoluta certeza, como parece ser el caso de las proposiciones matemáticas demostradas. De esto se deduce que las teorías matemáticas no son fácticas; que los objetos que dice describir no son objetos y por ende tales objetos no existen.

Ayer (1936, p. 316) argumenta que solamente se puede atacar el problema de dos formas: la primera es asumir que no hay verdades necesarias, y en tal caso se debe dar cuenta del porqué se consideran universalmente que lo son; o decir que no tienen contenido fáctico en la cual se debe explicar cómo proposiciones vacías de contenido fáctico pueden ser ciertas, útiles y sorprendentes. Pero en caso de fracasar, se debe dar vía al racionalismo que sostiene que hay hechos acerca del mundo que pueden ser conocidos independientemente de la experiencia y que esto es incompatible con la aserción que una proposición no dice nada a menos que sea verificable empíricamente. Porque, uno de los principios fundamentales del racionalismo es que el pensamiento es una fuente independiente de conocimiento y que ese conocimiento es más confiable que el conocimiento que brinda la experiencia.

En el caso en que se asume que no hay verdades necesarias, Ayer (1936, p.317) toma como ejemplo a Mill. Él asevera que las proposiciones matemáticas no son más que generalizaciones inductivas basadas en la experiencia por un gran número de confirmaciones. Entonces decir que $1 + 2 = 3$ no es más que una generalización de una cosa más dos cosas son tres cosas. De esta forma las proposiciones matemáticas parecen imposibles que sean de otra forma; las proposiciones matemáticas pasan a ocupar el mismo estatus que las proposiciones empíricas, luego, podría darse el caso en que $2 + 1 \neq 3$ o que $1 \neq 1$ con algún contraejemplo que se pueda mostrar. Pero el problema es cuando se quiere, por ejemplo, contar 5 pares de zapatos y se resulta contando 9 zapatos, nadie dice que en ese caso particular se ha encontrado un contraejemplo, sino que más bien se vuelve a contar hasta darse cuenta que en realidad hay 10 zapatos. Al menos de esta forma parece imposible refutar por la experiencia las proposiciones más básicas de la aritmética. Lo mismo con otras ramas de las matemáticas. La argumentación de Mill es débil porque de hecho la matemática como ciencia no recurre a la experimentación para su validación.
Ahora, si las verdades necesarias de las matemáticas no pueden tener el mismo estatus que

las proposiciones de las ciencias naturales, entonces queda solamente analizar si estas proposiciones matemáticas no tienen contenido fáctico, de hechos, y por eso las matemáticas no tratan nada acerca del mundo, dando como resultado que no sea sorprendente que sus verdades sean consideradas necesarias y universales. Esta es la estrategia de Ayer por la cual arguye que las proposiciones matemáticas son en realidad proposiciones analíticas y por eso son necesariamente ciertas y universales. Aquí el predicado de las proposiciones analíticas está contenido en el sujeto de la proposición mientras que en las proposiciones sintéticas el predicado no está contenido en el sujeto de la proposición diciéndonos algo que no se sabía del sujeto.

Mientras que en las proposiciones analíticas el predicado no adiciona nada nuevo al sujeto. Como ejemplo de proposición analítica se tiene que <<algunas hormigas son parásitas o ninguna lo es>> porque no se necesita ninguna observación para saber si la proposición es cierta o falsa. Mientras que si se dice <<algunas hormigas han creado un sistema de esclavitud>> no es proposición analítica sino una proposición sintética porque su veracidad o falsedad no se puede encontrar en la definición de hormiga sino que hay que recurrir a la observación.

Entonces en el caso de las proposiciones analíticas, no se pueden refutar por la experiencia porque estas proposiciones no tienen contenido fáctico, lo que no quiere decir que sean proposiciones sin sentido, aunque no brindan nueva información del sujeto *iluminan* sobre cómo se usan ciertos símbolos o sobre cómo las palabras o sujetos se descomponen en otras palabras. Si por ejemplo se dice que los bretones son franceses y los franceses europeos entonces los bretones son europeos, esto muestra que se descubren ciertas propiedades con el uso del lenguaje en caso de pasar inadvertidos de las consecuencias o deducciones que se hacen de los sujetos de las proposiciones.

En el caso de la geometría, como conjunto de proposiciones analíticas, están los axiomas, las definiciones y los teoremas que se derivan de las definiciones y teoremas, y que por ende, no dicen nada acerca del mundo, aunque sí son útiles para describirlo en términos del lenguaje usado cuando a la geometría se le da una interpretación física de aquellos objetos que satisfacen esos axiomas. Como se aprecia en Ayer, los objetos abstractos no existen; existen las proposiciones creadas por matemáticos y de los sujetos de estas proposiciones se deducen teoremas. De hecho el modelo deductivo euclídeano es el que ha predominado hasta nuestros días.

¿Pero significa esto que en realidad no existen los objetos de la geometría? Puede decirse que un objeto matemático es un objeto si no depende su existencia ni sus propiedades del ser humano en ninguna forma. Esta estructura intrínseca existiría aún si las facultades cognitivas no existieran. Por ejemplo, la propiedad de que en todo triángulo rectángulo el cuadrado de la hipotenusa es igual a la suma de los cuadrados de los catetos existe y es cierta a pesar de que los ratones no saben de la existencia de esta propiedad. La negación de la existencia de estas propiedades como independientes de nuestras facultades cognitivas es una postura antirrealista.

Entonces, tomando la perspectiva de Ayer, a lo que se le llaman objetos matemáticos estos están completamente estructurados por conceptos y nada de su estructura existiría si no existiéramos, por la cual se puede concluir que el teorema de Pitágoras (como lo conocemos) sería falso si la deducción de las palabras (conceptos, axiomas) llevara a ello. Por ejemplo, podría ser que la suma de los cuadrados de los catetos fuera mayor que el cuadrado de la hipotenusa, o el cuadrado de la hipotenusa mayor que la suma de los cuadrados de los catetos y sería suficiente con aceptar estas deducciones de los conceptos.

Es decir, las propiedades de los objetos matemáticos estarían sujetas a conceptos. Esto haría las propiedades matemáticas completamente inestables, cambiantes y todas serían ciertas por ser dependientes de la cognición. Pero esto en realidad no sucede así. El teorema de Pitágoras para triángulos rectángulos no puede ser de otra forma que la que conocemos, al igual que muchas otras propiedades de triángulos en el plano; como por ejemplo que si se prolonga uno de los lados, el ángulo externo es igual a la suma de los dos ángulos internos opuestos.

La realidad matemática, entonces, no depende de la voluntad humana arbitraria, personal, sino que es objetiva y externa al sujeto; la matemática es sobre hechos y los seres humanos que pueden estudiarla la ven no sujeta a su capricho, sino que hay un esfuerzo intelectual por entender estos objetos abstractos a través de las teorías matemáticas que sí dependen del ser humano en su totalidad, pero no el objeto que se quiere estudiar. Mientras no haya inconsistencias se puede confiar que es una buena descripción del objeto matemático. Puede haber diferentes perspectivas a la hora de abordar su estudio, pero el objeto permanece allí. Algo similar ocurre con los objetos de las ciencias naturales; mientras que para unos el sol es un dios, para otros es una estrella. Pero el objeto como tal permanece inalterado sin importar cuantas descripciones tengamos de él.

Dado lo anterior, acerca de una realidad matemática, si se habla de objeto abstracto no espacio-temporal, entonces estos serán eternos aun cuando no existan seres capaces de hacer matemáticas. Aún si el universo no existiera, los objetos abstractos sí lo harían. En realidad se asume que estos objetos existen y decimos que las teorías matemáticas los describen sin necesidad de entrar en contacto con ellos. Esta visión no es viable o convincente pero tampoco es convincente que las propiedades intrínsecas de estos objetos existan solamente si hay una conciencia que pueda pensar en ellas o descubrirlas. Sería como decir que el universo existe solo si hay seres conscientes que digan que existe. Se sabe bien, que el universo, según las teorías científicas, existía antes de que hubiera seres racionales capaces de preguntarse acerca de su naturaleza.

Entonces, el teorema de Pitágoras existe o esa relación es cierta aun si nadie se ha percatado de ella. Muy posiblemente esta sea la razón por la cual se piense que los objetos matemáticos existen independientes del sujeto y que el hombre los estudia. La existencia de la realidad abstracta es tan misteriosa como la existencia de la realidad física que parece surgió de la *nada* o lo que sea que eso signifique.

2.5.2 Lo que se ha de entender por consistencia

Para la justificación de (ii) que dice que FBP-istas pueden dar cuenta del hecho que los seres humanos pueden, sin entrar en contacto con el dominio matemático, saber de ciertas teorías matemáticas puras que ellas son consistentes, Balaguer (1998, p.70) argumenta que la noción de consistencia debe ser una noción antiplatonista. La razón es que hay dos nociones de consistencia: una teoría T es *semánticamente consistente* si y solo si esta tiene un modelo[16], y es *sintácticamente consistente* si y solo si no hay una derivación de contradicción de T en cualquier buen sistema de derivación lógica. Pero como los modelos y las derivaciones son objetos abstractos, ambos son nociones platonistas. Luego, el conocimiento de consistencia es conocimiento de los objetos abstractos modelos y derivaciones.

Luego, los platonistas radicales no logran *nada* al reducir la pregunta de cómo se podría tener conocimiento de que las teorías matemáticas son ciertas a la pregunta cómo podríamos tener conocimiento de que ellas son consistentes. De esto surge en Balaguer la necesidad de adoptar la noción anti-platonista de consistencia de Kreisel-Field:

> La idea es que 'consistente' es un término *primitivo*. Esta consiste en que además de las nociones de consistencia semántica y sintáctica hay una noción primitiva o intuitiva de consistencia no definida en términos platonistas. Ahora, la visión estándar es que la noción semántica de consistencia puede ser pensada como una definición (o tal vez como análisis reductivo) de nuestra noción intuitiva de consistencia, pero según la perspectiva de Kreisel-Field, esto es erróneo. En este aspecto, la noción intuitiva está relacionada con las dos nociones formales de manera análoga: ninguna de las nociones formales nos proveen con una *definición* de la noción primitiva, pero ambas nos proveen con información acerca de la *extención* de la noción primitiva. Más específicamente, se sigue de las definiciones de las dos nociones formales, y de nuestro entendimiento intuitivo de la noción primitiva, que (a) si una teoría T es semánticamente consistente, entonces es intuitivamente consistente; y (b) si T es sintácticamente inconsistente, entonces es intuitivamente inconsistente. (Balaguer, 1998, p.70)[17]

Entonces, Balaguer explica por qué la noción de consistencia expuesta es una noción anti-platonista. Como la noción es una noción *primitiva*, no está definida en términos abstractos, porque no tiene ninguna definición. Y si se considera que no se debiera tomar la noción

[16] Los modelos tratan con las relaciones entre descripciones de lenguajes de primer orden (o lógica de primer orden) y las estructuras que satisfacen estas descripciones.

[17] Textual: The main idea here is that 'consistent' is simply a *primitive* term. More precisely, the claim is that in addition to the syntactic and semantic notions of consistency, there is also a primitive or intuitive notion of consistency that is not defined in any platonistic way. Now, the standard view here is that the semantic notion of consistency can be thought of as a definition (or perhaps a reductive analysis) of our intuitive notion of consistency but according to the Kreisel-Field view, this is wrong. On this view, the intuitive notion is related to the two formal notions in analogous ways: neither of the formal notions provides us with a *definition* of the primitive notion, but they both provide us with information about the *extension* of the primitive notion. More specifically, it follows from the definitions of the two formal notions, and from our intuitive understanding of the primitive notion, that (a) if a theory T is semantically consistent, then it is intuitively consistent; and (b) if T is syntactically inconsistent, then it is intuitively inconsistent.

intuitiva de consistencia sino la noción semántica que provea una definición de la noción intuitiva, Field argumenta que la noción semántica no captura la "esencia" de la noción intuitiva donde pone el ejemplo que hay ciertas teorías para lo cual es *obvio* que son intuitivamente consistentes pero *no* obvio que son semánticamente consistentes.

Así, si la teoría S que consiste de todas las verdades acerca de los conjuntos son estables en el lenguaje de la teoría de conjuntos es obviamente consistente en el sentido intuitivo pero no es obvio que S es semánticamente consistente, es decir, que tenga un modelo. Intuitivamente, parece que un modelo S tendría el conjunto de todos los conjuntos en su universo, pero no hay tal cosa.

2.6 FBP Y EL PROBLEMA DE LA NO-UNICIDAD

El problema de la no-unicidad consiste, en que el platonismo sugiere que las teorías matemáticas describen colecciones *únicas* de objetos. Por ejemplo si se hablan de números naturales, se asume que hay una única secuencia que describe estos números naturales, de esta forma, se pueden referenciar estos números de una manera determinada. Balaguer (1998, p.77) expone las secuencias de Zermelo y de von Newman, de la misma forma en que lo hace Benacerraf en su ensayo de 1965 "What Numbers Could Not Be", como ejemplo de secuencias que describen, o fundamentan lo que se ha de entender por números naturales. Las progresiones son las siguientes:

$\varnothing, \{\varnothing\}, \{\{\varnothing\}\}, \{\{\{\varnothing\}\}\},\ldots.$ Y $\varnothing, \{\varnothing\}, \{\varnothing,\{\varnothing\}\}, \{\varnothing,\{\varnothing\},\{\varnothing,\{\varnothing\}\}\},\ldots\ldots\ldots$

En este caso no hay ningún motivo para escoger una secuencia u otra como *la secuencia de números naturales.* Podrían haber incluso infinitas secuencias y todas ellas ser candidatas para ser los números naturales. Por lo acabado de decir, lo importante no sería las secuencias sino más bien su estructura lo que debería tenerse en cuenta. Pero veamos el argumento de Balaguer (1998, p.77) de la *no-unicidad* de una manera más formal tomando como modelo la aritmética:

(1) Si hay algunas secuencias de objetos abstractos que satisfacen los axiomas de la Aritmética de Peano (AP)[18], entonces hay infinitas secuencias.

(2) No hay nada “metafísicamente especial” acerca de alguna de estas secuencias que la haga sobresalir sobre las demás como *la* secuencia de números naturales.

Por consiguiente,
(3) No hay una secuencia única de objetos abstractos que sea los números naturales.

Pero
(4) El platonismo sostiene que *hay* una única secuencia de objetos abstractos que es los números naturales.

Luego,
(5) El platonismo es falso. (Balaguer, 1998, p. 76).[19]

Tengamos en cuenta que cuando se habla de números naturales hablamos de aquellos números que se enseñan en la escuela como 1, 2, 3,…pues ha habido muchas culturas con sistemas de numeración diferentes. Entonces, lo que conocemos como *números naturales* es algo cultural y que se emplea a diario sin pensar en que puede haber una fundamentación o construcción matemáticamente rigurosa de estos números. Balaguer (1998) considera que si bien es cierto hay infinitas secuencias que satisfacen AP, y estás secuencias podrían ser funciones, conjuntos o sillas, los números naturales tal como los conocemos de manera intuitiva no es ninguna de las anteriores. A esto se le llama *concepción plena de los números naturales* (FCNN por sus siglas en inglés) donde los números naturales no son otra cosa que lo que de manera intuitiva y cultural sabemos de ellos y que los platonistas en busca de unicidad pueden apelar a FCNN.

[18]1.El 0 pertenece al conjunto de números naturales
2. Si n pertenece a N entonces n+ pertenece a N (n+ es el sucesor de n)
3. Cero no es sucesor de ningún número natural
4. Números distintos producen sucesores distintos.
5. Principio de inducción matemática: se denota P(n) como: n cumple la propiedad P donde n es un natural. Suponga que P(0) es verdadero, suponga además que si P(n) es verdadero, entonces P(n+) es verdadero. Entonces P se cumple para todo natural n

[19]Textual: (1) If there are any sequences of abstract objects that satisfy the axioms of Peano Aritmetic (PA) then there are infinitely many such sequences.
(2) There is nothing “metaphysically special” about any of these sequences that makes it stand out from the others as *the* sequence of natural numbers.
Therefore, (3) There is no unique sequence of abstract objects that is the natural numbers. But (4) Platonism entails that there *is* a unique sequence of abstract objects that is the natural numbers. Therefore, (5) Platonism is false.
.

En este caso, FCNN no es una teoría, no contiene axiomas o definiciones sino que simplemente es lo que, nosotros como comunidad, hemos aceptado de estos números o esta secuencia para que sea los números naturales. Pero como no se puede negar el avance de la ciencia matemática, se debe aceptar que efectivamente sí hay numerosas secuencias (incluso infinitas) que satisfacen AP, y que desde este punto de vista, en realidad no hay una secuencia *especial* que sea la de los números naturales salvo que como fruto cultural nos acogemos a FCNN para hablar de *la* secuencia de números naturales y no de *una* secuencia (de muchas) de números naturales.

Luego, desde la perspectiva de Balaguer, la mejor estrategia para no llegar a la conclusión de que el platonismo es falso es negar la unicidad. Esto debido a que si no se niega la unicidad, se fallaría en poder referenciar a los números naturales como objetos únicos porque los números son objeto de estudio como cualquier otro objeto matemático, y acudir a FCNN sería excluir los números naturales de un estudio formal.

Ya vimos como ejemplo las secuencias de Zermelo y de Newman que no hay ningún criterio para escoger una secuencia o la otra pues ambas cumplen con AP. Al negarse la unicidad de los números naturales el platonismo deja de ser falso porque reconoce que hay otras estructuras u objetos isomorfos a los números naturales de FCNN y que ninguna secuencia sobresale sobre la otra como la mejor descripción de estos números.

El no poder hablar de una única secuencia de números naturales, no debilita el platonismo porque aún se cree en lo abstracto y que las teorías matemáticas describen ese dominio matemático abstracto. Lo mismo puede extenderse a otras ramas de las matemáticas como la geometría. En la geometría plana de Euclides, por un punto exterior a una recta pasa una única recta paralela; mientras que en la geometría hiperbólica hay más de una recta paralela que pasa por un punto exterior a una recta con la diferencia que en la geometría hiperbólica se habla de plano hiperbólico que tiene curvatura. Luego, no tiene sentido hablar de cuál geometría es la verdadera sino que ambas describen, desde sus axiomas, postulados y definiciones, diferentes objetos como lo propone el FBP que toda objeto matemáticamente posible (consistente) existe. Por consiguiente, se puede decir que las teorías matemáticas en realidad describen colecciones de objetos matemáticos abstractos y no colecciones únicas de objetos.

Por lo dicho en el párrafo anterior sobre la negación de la unicidad, puede causar confusión con lo dicho en el apartado 2.5.1 sobre las relaciones necesarias que se ven en la geometría como por ejemplo que en la geometría euclidiana, el teorema de Pitágoras no podría ser de otra forma que como lo conocemos, pero ahora decimos que en la geometría plana y en la geometría hiperbólica, si hay una diferencia sobre el axioma de las paralelas. Mientras que en una por un punto exterior a una recta pasa una única recta paralela, en la otra pasa más de una y son diferentes.

Esto parece contradecir lo dicho en ese apartado pero tengamos en cuenta que mientras en el plano euclideano no hay curvatura, en la geometría hiperbólica si la hay de lo contrario se llegaría a contradicciones. Cada una de estas geometrías ha probado, con el pasar de los años o los siglos, ser consistente en sí misma con sus propios axiomas, postulados y definiciones. Luego, sigue siendo válido hablar de relaciones necesarias (o estructuras necesarias) de los objetos matemáticos.

CAPÍTULO 3: FICCIONALISMO

La perspectiva ficcionalista toma las proposiciones matemáticas en la misma forma en que los platonistas lo hacen. Están de acuerdo, por ejemplo, en que los números tienen propiedades como que el 5 es primo y que si existiera sería un objeto abstracto; pero como no existen tales objetos, entonces las proposiciones matemáticas no son ciertas, son ficción, son un invento cultural y que ha predominado el modelo axiomático de la antigua tradición matemática griega hasta nuestros días.

Así que, las proposiciones matemáticas son semejantes a <<Santa Claus vive en el Polo Norte>>, en el sentido en que son proposiciones sin contenido factual, no reales. Por ejemplo, el sol en sí, el objeto físico sol, no es fruto de una tradición cultural, o una historia que se cuenta, pero las diversas concepciones que algunas culturas tienen del sol sí son herencias culturales como que el sol es un dios o una diosa. El objeto sol, no es modificado por la diversidad de concepciones que se tengan de él. Pero los objetos matemáticos por ser abstractos no gozan del mismo estatus que los objetos físicos.

La conclusión a la que llega el argumento general del ficcionalismo es que los enunciados matemáticos no son verdaderos, así enunciados tales como “dos es par” o “2 + 2 = 4” no necesariamente son verdaderos. Pero, generalmente se puede decir que si se tiene dos enunciados como “2 es par” y “2 es impar”, el primero es el “correcto”, Balaguer (2011), expone que la práctica matemática cuenta con un tipo de objetividad de tal manera que en la práctica matemática se dirá que el enunciado “2 es par” es verdadero y que el enunciado contrario es falso. Pero, como bien lo explica la Balaguer (2011), los ficcionalistas tendrían que decir que los dos enunciados son falsos. En este sentido es que el argumento de la objetividad reacciona contra el ficcionalismo.

En respuesta a este argumento contra el ficcionalismo, surgen dos variantes del ficcionalismo, las cuales Balaguer (2011) las llama: Ficcionalismo formalista y ficcionalismo basado en intenciones.

El ficcionalismo formalista, desarrollado por Field, consiste en ubicar el enunciado X en una historia conocida, la cual debe de determinar el valor de verdad de X, aunque por fuera de la historia X sea falso. Así, en consideración con la idea ficcionalista que los enunciados son falsos, entonces, tanto “2 es par” como “2 es impar” son falsos, pero en la historia de las teorías matemáticas el enunciado “2 es par” es verdadero. Balaguer (2011) explica que para Field la historia de la matemática viene determinada por sistemas formales, donde un enunciado es correcto, en el sentido ficcionalista, si y solo si el enunciado es consecuencia de axiomas matemáticos aceptados.

Por esta razón, no habrá valores de verdad objetivos de los enunciados matemáticos que no sean deducibles a partir de axiomas o mejor dicho demostrables, es decir indecibles. Sin embargo, Balaguer (2011) menciona que desde esta visión la Hipótesis del Continuo (HC) y su negación no harían parte de la historia de las matemáticas así consideradas. Esto se debe a que al no poderse ni probar ni refutar la HC por los axiomas de Zermelo- Frankel (ZF) no puede haber una respuesta objetivamente correcta acerca de la pregunta sobre HC; no se puede probar porque la negación de HC es consistente con los axiomas ZF y no se puede refutar porque HC es consistente con ZF.

Sin embargo, “dada la formulación de esta hipótesis (HC), tenemos la fuerte impresión de que debe ser o verdadera o falsa” (Ruffino, 2005, p.146) Siguiendo con el ejemplo mencionado anteriormente, Balaguer (2011) explica que si se parte del supuesto de que hay un axioma AX desarrollado y considerado por la comunidad matemática como afirmación intuitiva sobre teoría de conjuntos, que además permita una unión de ZF y AX tal que los axiomas de ZF junto con AX impliquen HC, entonces se ha probado HC. Que se probara HC implica que desde la visión de Field AX se avala, esto es: HC es verdadero dentro de la historia de las matemáticas. De esta manera, si AX es obviamente intuitivo, se podría decir que HC fue descubierto, es decir que si existiera un conjunto con cardinalidad N_0 y 2^{N0}, entonces siempre lo hubo y lo habrá, o dicho desde la postura ficcionalista formalista HC siempre fue verdadero.

Teniendo en cuenta este ejemplo paradigmático, es conveniente pasar a la respuesta que Balaguer da como alternativa a lo que él considera una respuesta formalista inaceptable a la objetividad. Argumentando que es necesario redefinir lo que se entiende por "historia de las matemáticas" para mantener la idea de que un enunciado matemático es verdadera o correcto dentro de una historia conocida.

De esta manera la historia de las matemáticas a las que alude Balaguer consiste en abarcar las concepciones que la comunidad tenga en relación a los objetos matemáticos. Esto es, un enunciado matemático hace parte de la historia de las matemáticas tan solo si se sigue de la *concepción completa* que se tenga de los objetos sobre los que aluden los enunciados. Así, por ejemplo, un enunciado aritmético es parte de la historia si es inherente a la *concepción completa* que se tenga de los números naturales.

En el caso de la teoría de conjuntos, un enunciado hace parte de la historia de la teoría de conjuntos si nuestra concepción de la noción de conjunto estima inherente el enunciado, Esto es, si se supone que C fue probado a partir de agregar AX a los axiomas de Zermelo-Frankel, y que AX es intuitivamente correcto, entonces AX era inherente a la concepción que se tiene de la noción de conjunto, entonces HC se sigue de la noción de conjunto que la comunidad tiene. Esto implica que HC siempre fue parte de la historia de la matemática, aunque no se hubiera descubierto. Esta postura se denomina ficcionalismo basado en intenciones, desde la cual podría responderse a enunciados indecibles.

Más aún, Balaguer (2011), arguye a que no hay una respuesta "correcta" definitiva sobre HC desde esta última postura, ya que tanto HC como su negación pueden ser consistente con la concepción que se tenga de la noción de conjunto, y dicha noción puede que no sea precisa. Así ni HC ni su negación harían parte de la historia de las matemáticas. A esta visión ficcionalista podría criticársele la posibilidad de ambivalencia que le concede a enunciados matemáticos, o que pareciese hubiere un compromiso con las proposiciones (posiblemente objetos abstractos), pero Balaguer responde que tanto lo primero es deseable como lo segundo es posible.

Uno de los problemas que enfrenta el ficcionalismo es darle a los objetos matemáticos el mismo estatus de ficción que tiene, por ejemplo, los objetos de la literatura o el cine. En la literatura o el cine si se encuentran contradicciones o hechos en los que un personaje está en un lugar, por así decir, y luego está en otro en donde es imposible que lo estuviera dentro del tiempo de la película, no generaría disgusto por la película ni tampoco estaría sujeta a grandes críticas por ello. Lo mismo con un libro de literatura, un autor puede cambiar el carácter psicológico de los personajes a su antojo y no por ello se *elimina* del libro el placer de disfrutarlo.

Pero si las matemáticas son ficción, una contradicción lógica elimina la acertada descripción del objeto y daría como resultado su abandono o reformulación que no sucede con otros tipos de ficción. El matemático no puede cambiar a su antojo el resultado del teorema de Pitágoras y decir simplemente que la mitad del cuadrado de la hipotenusa es igual a la suma de los cuadrados de los catetos como sí podría hacerlo a su antojo el escritor de un libro. Esto es debido a que las matemáticas, a la menos esa es la impresión que dan, tratan sobre hechos y no sobre ficciones.

3.1. ACTITUDES FICCIONALISTAS

Daly (2007) piensa el ficcionalismo matemático, como una actitud que se toma respecto a las proposiciones matemáticas en cuanto que no deberían creerse salvo solamente como una historia ficcional. Por ejemplo, si Pegaso fue un caballo alado no deberíamos creer en esa oración sino en que según la leyenda griega, Pegaso era un caballo alado. Lo mismo respecto a las proposiciones matemáticas que a pesar de ser falsas (no creíbles) son útiles. Así, cuando un ficcionalista hace uso de una proposición matemática no está afirmando esa proposición sino que quiere comunicar que *explota* esa proposición, es decir, cuasi afirma la proposición en el contexto ficcional de la teoría matemática; son verdades en ficción como que $7 + 5 = 12$ y no $7 +5 = 11$. Luego, las proposiciones matemáticas se toman literalmente supuesta la existencia de lo que se describe.

Por consiguiente, los ficcionalistas no se comprometen con la existencia de esos objetos al no creer en las teorías por no tener contenido factual y el que sean de utilidad no significa que sean ciertas, o el hecho que se *exploten* no significa que se crea en ellas.

La física, por ejemplo, explota casos hipotéticos que no se dan en la naturaleza y los usa en la descripción de un fenómeno físico sin creer en ellos. Como ejemplo, se tienen los planos o superficies sin fricción. Esos planos no existen sin embargo se usan como una forma de idealizar un fenómeno con el fin luego de ajustarlo más a la realidad según los datos experimentales.

3.2. MATEMÁTICAS Y REALIDAD.

Para Pincock (2012), los ficcionalistas, piensan que en las matemáticas puras el trabajo de los axiomas es presentar conceptos matemáticos arbitrariamente estipulados por el matemático, y que las matemáticas consisten en descubrir las consecuencias de estos axiomas. En lo que respecta a Leng, ni el platonismo ni el realismo acerca del valor de verdad está garantizado por la práctica de la matemática pura:

> La imagen de la práctica matemática pura que estoy sugiriendo ve a los matemáticos comprometidos en (a) caracterizar conceptos matemáticos, y (b) indagar en las consecuencias al asumir que estos conceptos son satisfechos… razones ofrecidas en favor de adoptar una colección dada de axiomas que pueden ser vistas como justificaciones a su valor como caracterizaciones de conceptos matemáticos interesantes, implicando nada acerca de si estos conceptos son ciertos de cualquier objeto. (Pincock, 2012, p.270).[20]

La concepción de Leng presenta la idea, de que en realidad no hay objetos matemáticos sino conceptos desde una perspectiva moderna donde se ha querido fundamentar la matemática desde la teoría de conjuntos, desde donde se construyen los números naturales, luego los racionales y los reales. Es decir, lo que algunos llaman objeto matemático se convierte en concepto matemático. El objeto pasa a ser el concepto. Entonces, ¿existen o no existen? Eso depende de la perspectiva en que se mire. Por ejemplo, se puede tomar la palabra 'triángulo' como algo diferente a la figura 'triángulo'. Es decir, a la figura 'triángulo' se le ha llamado triángulo. Si el triángulo es un objeto matemático abstracto,

[20]Textual: The picture of pure mathematical practice I am suggesting views mathematicians as engaged in (a) characterizing mathematical objects, and (b) enquiring into the consequences of the assumption that these concepts are satisfied…..reasons offered in favor of adopting a given collection of axioms can be viewed as justifying their value as characterizations of interesting mathematical concepts, implying nothing about whether these concepts are true of any objects.

entonces es independiente de nosotros como lo es un objeto como un árbol de nosotros. ¿Qué características debería tener para que sea completamente diferente de nosotros? La característica principal será que las propiedades o relaciones que se dan en la figura no dependan de nosotros como las propiedades o características o composición de un árbol no depende de nosotros por ser algo externo a nosotros.

Decir que el objeto matemático triángulo depende de nosotros es afirmar que sus propiedades también; pero esto no parece posible o al menos convincente porque el afirmar que las bisectrices de un triángulo se interceptan en un punto, o que las alturas respectivas que parten de cada vértice también lo hacen, o que al extender uno de sus lados el ángulo externo es igual a la suma de sus ángulos internos no adjuntos, entre otras muchas propiedades, no parece que dependiera de nosotros en ningún sentido. Sino que más bien parece que se habla de descubrimiento de esas relaciones. Pero si dependieran de nosotros, entonces esas relaciones acabadas de mencionar podrían ser diferentes si hablamos de un triángulo en el plano euclidiano. Pero no es así o no parece haber una forma posible de hacerlo. Luego, en realidad estamos hablando de manera objetiva de un triángulo abstracto que no depende de nosotros.

Pero alguien puede decir que los triángulos son fruto de nuestra mente porque no se encuentran en la naturaleza y que por eso son una invención ficticia. Sí, es cierto que los objetos matemáticos no se encuentran en la naturaleza pero se accede a ellos por medio de la intuición y de la mente. No es que sean objetos mentales, sino que como bien apunta Katz, se accede a ellos con la mente y la intuición nos da una idea básica de su veracidad o falsedad sobre las proposiciones más simples de la matemática que los describen como que el 4 es un número compuesto y no primo.

Otro ejemplo, si el número $\sqrt{3}$ dependiera de nosotros, este número podría ser racional o irracional. Pero se ha probado que es irracional suponiendo que es racional y esto lleva a una contradicción. Luego, no hay forma de que esa propiedad dependa de nosotros en alguna forma, es algo externo a nosotros que es objeto de estudio y donde se descubrió que el número $\sqrt{3}$ es irracional.

Los ejemplos anteriores muestran en qué sentido se puede hablar de objeto matemático abstracto sin tener acceso directo a esa realidad matemática no espacio-temporal. Esta es la perspectiva de Katz (1998) en términos de propiedades intrínsecas de un objeto matemático. Entonces como $\sqrt{3}$ es irracional, el objeto matemático abstracto $\sqrt{3}$ también lo es porque no puede ser de otra forma, es decir, no puede ser que sea racional y esta propiedad no depende de los seres humanos sino del objeto matemático en sí.

Shottenkirk (2009, p.13) explica la teoría de referencia de Quine donde se evalúa el caso en que, por ejemplo, a la figura triángulo se le da un nombre como si *triángulo* fuera algo externo al sujeto.

> El rechazo de entidades abstractas es un caso más pequeño del problema mayor "el enigma del no ser": hablar de cosas que, de hecho, no existen y luego, erróneamente, garantizar legitimación existencial de términos referenciales. En el ejemplo de Quine en "en lo que existe", la entidad para la cual la palabra "Pegaso" se refiere es nombrada confusamente, por aquellos que creen en los universales, "el Pegaso mental". Para Quine, los predicados no son cosas que nombran entidades pero son ciertas expresiones lingüísticas que son parte de oraciones. En otras palabras, ellas refieren pero no nombran. Quine está argumentando que el realista metafísico está cometiendo el error de confundir la expresión referencial lingüística con necesariamente tener que nombrar un objeto y, entonces, comprometerse con el sentido esencialista de la palabra. (Shottenkirk, 2009, p.13).[21]

Según esta concepción, no habría que creer en que Pegaso es rojo o negro, o que tiene cuatro alas en cada lado. Si alguien hace afirmaciones semejantes estaría sujeto a muchas críticas en vista de que está hablando de algo que no existe y no se puede hablar de manera objetiva. Pero si alguien habla de un círculo y dice que el ángulo correspondiente al centro es el triple del correspondiente a la circunferencia, y tengan como base la misma circunferencia, sería tan válido decir que el ángulo correspondiente al centro es el doble del correspondiente a la circunferencia, y que tenga como base la misma circunferencia. Esta última es la proposición 20 del tercer libro de Euclides. Pero en este caso sí se puede

[21]Textual: The avoidance of abstract entities is a smaller instance of the larger problem of "the riddle of nonbeing": speaking of things that, in fact, do not exist and then, mistakenly, granting the referential terms existential legitimacy. In Quine's example in "On What There Is", the entity to which the word "Pegasus" refers is confusedly named, by those who believe in universals, "the mental-Pegasus". Para Quine, predicates are not things that name entities but are certain linguistic expressions that are part of sentences. In other words, they refer but they do not name. Quine is arguing that the metaphysical realist is making the mistake of confusing the linguistically referring expressions with both necessarily having to name an object and, then, to being committed to the essentialist meaning of the word.

hablar de manera objetiva del círculo (que no existe en la naturaleza) y cuya demostración existe. Pareciera que el intento de tratar los objetos matemáticos como conceptos escapa a esa conceptualización debido a que es difícil darle el mismo estatus ficcional a Pegaso y al círculo.

3.3 EL ARGUMENTO DE INDISPENSABILIDAD

Barker (2012, p.275) expone tres corrientes de ficcionalismo, respecto al argumento de indispensabilidad del cual han escrito Quine y Putnam en los años 1950 y 1960, que afirma que es razonable creer en la existencia de objetos matemáticos porque juegan un papel indispensable en las mejores teorías científicas. La ‘primera corriente’ ficcionalista es expuesta por Hartry Field en su libro de 1980 *Science Without Numbers* (Ciencia sin números), que niega indispensabilidad de las matemáticas en las ciencias empíricas y por ende requiere reconstruir toda la ciencia sin hacer a estas. La ‘segunda corriente’ expuesta por Joseph Melia, concede que las matemáticas son indispensables para la ciencia, pero no significa que tengan existencia propia.

En particular, las matemáticas juegan un papel descriptivo en la teoría, y si las matemáticas juegan un papel explicativo en la teoría, entonces sería racional creer en la teoría completa no solo en lo que respecta a los hechos del fenómeno). La ‘tercera corriente’ debida a Leng se diferencia de la segunda corriente en que ella concede a las matemáticas un papel explicativo indispensable en la ciencia. Su estrategia es que esta clase de papel explicativo no requiere de un compromiso ontológico, y que por lo tanto el ficcionalismo acerca de los objetos matemáticos es viable.

3.4 IDEALIZACIONES Y EXPLICACIONES

Barker (2012) expone el argumento de Leng como sigue:

1. Idealizaciones y entidades matemáticas ambas juegan un papel indispensable

en las explicaciones científicas.

2. Pero aún los realistas científicos no creen en la existencia de idealizaciones, por consiguiente hay más comprometimiento ontológico que solo un papel explicativo. (Barker, 2012, p. 276).[22]

Barker (2012) analiza la estrategia de Leng tendiente, a defender la indispensabilidad de ciertas idealizaciones en la ciencia en el sentido que contribuyen al éxito teórico. Por éxito teórico se entiende éxito en las predicciones y poder explicativo, pero los realistas científicos deberían evitar comprometimiento ontológico de idealizaciones como puntos de masas y superficies sin fricción. Para entender lo que se entiende aquí por "poder explicativo", Leng recurre al ejemplo de dinámica de fluidos donde el considerar los fluidos continuos no predice el comportamiento real de los fluidos por su estructura molecular; sin embargo, Leng argumenta que dado que la mejor explicación del comportamiento de los fluidos es que actúan como si fueran continuos, buscar una teoría alternativa de fluidos que deja de lado la comparación con fluidos continuos ideales, sufrirá una pérdida en poder explicativo porque se pierde generalidad al considerar la estructura molecular.

La crítica de Barker (2012, p.277) a Leng va dirigida en cuanto a que considerar los fluidos como continuos en realidad no hace un trabajo de poder explicativo genuino. En su lugar se debería hablar de que los constituyentes de los fluidos son tan pequeños respecto al volumen total del fluido que actúan como si fueran continuos. El modelo matemático de fluidos continuos tiene éxito en predecir el comportamiento de los fluidos, pero en realidad es el tamaño de los constituyentes de los fluidos el que en realidad explica el fenómeno.

El propósito del argumento anterior va encaminado a evidenciar cómo pueden surgir compromisos ontológicos con objetos abstractos debido a entidades idealizadas que juegan un papel explicativo en la ciencia. Para Leng, según Barker (2012), no necesariamente debe ser así. Porque si se dice que un fluido continuo existe, se puede asumir que existe aunque

[22]Textual: 1. Idealizations and mathematical entities bot play an indispensable role in scientific explanations. 2. But even scientific realists do not believe in the existence of idealizations, hence tere is more to ontological commitment that just explanatory role.

aún un realista puede afirmar que es falso. O se puede entender la afirmación como que es acerca de la existencia de una entidad *abstracta*. Un fluido continuo se concibe como parte de un modelo matemático que juega un papel esencial en la explicación científica por lo cual es plausible que un realista acepte que existen fluidos continuos. Porque el fluido continuo es esencialmente una entidad matemática, y así es como un realista de la segunda corriente cree que esas entidades existen. Pero el argumento de Leng consiste en que en realidad no existen esas entidades abstractas a pesar del papel que juegan en la teoría, porque no es necesario creer en ellas.

3.5 UNA EXPLICACIÓN FICCIONALISTA DE LA APLICABILIDAD DE LAS MATEMÁTICAS

Balaguer (1998) considera que no hay en realidad una razón de mucho peso para escoger el FBP o el ficcionalismo como la mejor forma de explicar la naturaleza de los objetos matemáticos por ser ambas *buenas* explicaciones cada una desde su perspectiva. Hay sin embargo un argumento platonista que Balaguer desde el ficcionalismo se propone a rebatir y es el siguiente: "la única manera de dar cuenta del hecho que nuestras teorías matemáticas son aplicables o indispensables a la ciencia empírica es admitir que estas teorías son ciertas". (Balaguer, 1998, p. 95)[23]. El argumento de Balaguer consiste en admitir que las matemáticas son aplicables a la ciencia empírica pero desde un punto de vista ficcionalista, es decir, las teorías matemáticas son falsas a pesar de ser aplicables a la ciencia empírica; pero lo que se pide explicar a los ficcionalistas es que si fueran falsas serían tan útiles a la ciencia empírica como lo sería la novela de *Oliver Twist.*

Recordemos que como los objetos matemáticos son objetos abstractos que no tienen ninguna conexión con el mundo físico. Luego se debe explicar el hecho que las matemáticas cada vez se encuentran más relacionadas con la ciencia empírica. La idea es que debería poder mostrarse que la ciencia empírica en realidad no necesita de las

[23]Textual: The only way to account for the fact that our mathematical theories are applicable and/or indispensable to empirical science is to admit that theories are true.

matemáticas en su descripción, luego debe ser reformulada, es decir, que evite referencias matemáticas y cuantificación de objetos o fenómenos físicos (a esto se le llama *nominalismo*).

Balaguer (1998) endorsa la postura que llama *realismo científico nominalista* (nominalistic scientific realism) que hace referencia a lo que la ciencia empírica afirma del mundo físico como cierto, o mayormente cierto a pesar de algunos errores mientras que el contenido que hace alusión al dominio matemático abstracto es ficcional. Esto para alejarse de la versión estándar del realismo científico que sostiene que las teorías empíricas son ciertas, y por lo tanto aceptan la existencia de objetos matemáticos; pero en caso de no aceptar tales objetos, surge la inquietud de que lo que la ciencia empírica dice acerca del mundo resultará falso también porque usa objetos matemáticos para su descripción, o será una descripción incompleta del mundo físico. Otra inquietud que surge es que lo que la ciencia empírica dice acerca del mundo implica que las matemáticas que usa también son ciertas.

Para responder a esto la argumentación consiste en separar el contenido nominalista de la ciencia empírica de su contenido platónico (matemático): (NC) La ciencia empírica tiene un contenido puramente nominalista que captura su "imagen completa" del mundo físico. Y (COH) es coherente y sensible mantener que el contenido nominalista de la ciencia empírica es cierto y el contenido platonista de la ciencia empírica es ficcional. (Balaguer, 1998, p.131)[24]

El motivo de esta argumentación está basada en el PCI (principle of causal isolation) que afirma que los objetos matemáticos por su naturaleza abstracta son irrelevantes para el mundo físico, luego debe haber una forma de describir el mundo físico sin hacer referencia a esos objetos. Luego, si se asume que (NC) es cierto, entonces PCI sugiere que (COH) es cierto porque el valor de verdad del contenido platonista es irrelevante al valor de verdad del contenido nominalista. Lo que significa que si se acepta o no la existencia de los objetos matemáticos, el contenido nominalista de la ciencia empírica seguiría siendo verdadero.

---

[24] Textual: (NC) Empirical science has a purely nominalistic content that captures its "complete picture" of the physical world and (COH) It is coherent and sensible to maintain that the nominalistic content of empirical science is true and the platonistic content of empirical science is fictional.

Veamos el ejemplo que propone Balaguer (1998, p. 133) a una posible refutación de (NC) ante la afirmación: (A) El sistema físico S está a cuarenta grados Celsius. A lo que un crítico de (NC) puede aludir al hecho de que a pesar de que la ciencia empírica no asigna ninguna relación causal de los objetos matemáticos, esta no le asigna ningún papel en absoluto. Pero esto es erróneo porque cuando la ciencia empírica da su imagen del mundo esta dice que ciertos sistemas físicos están relacionados de cierta forma no causal con los objetos matemáticos como es el caso del número 40 con el sistema físico S. El número 40 no influye en nada ni está relacionado con el sistema S, pero está involucrado con el sistema de una manera no causal. Luego en la descripción del mundo físico hay hechos mixtos necesarios para describir el mundo por lo cual se contradice a (NC).

Balaguer responde a esto que si bien hay una relación entre el sistema S y la relación Celsius con el número 40, esa relación no es necesaria porque si bien es cierto que hay una independencia (aunque hay una relación en la afirmación de (A)) entre S y 40, S es cierto en virtud de los hechos físicos (contenido nominalista) y no depende del contenido platonista. Además, este hecho se aplica a todas las ciencias empíricas. Por consiguiente, si la ciencia empírica es cierta, entonces su verdad habla de dos conjuntos de hechos independientes que son: un conjunto de hechos puramente físicos (o hechos nominalistas) y un conjunto de hechos puramente platonistas. Pero como estos conjuntos de hechos son independientes entre sí, podría ser entonces que (a) los hechos físicos es lo requerido para la verdad de la ciencia empírica, pero (b) no hay tal cosa como objetos abstractos y no son necesarios para la verdad de la ciencia empírica.

Por lo anterior, los hechos de los fenómenos físicos descritos por la ciencia empírica captan el mundo físico sin que su validez o importancia dependa de las matemáticas involucradas. La pregunta que surge obviamente es si la ciencia empírica puede ser nominalizada, es decir, si se puede hablar de ciencia empírica sin matemáticas como, por ejemplo, una teoría empírica que no haga uso de ecuaciones para deducir la ley de la gravitación universal y que pueda hacer predicciones verificables sobre la fuerza de atracción de dos cuerpos masivos sin usar matemáticas. En este caso, seguramente la teoría no sería tan atractiva como la conocemos hoy y muy probablemente hacer predicciones confiables sobre la interacción de dos cuerpos sería casi imposible porque no hay forma de medir ni calcular sin usar matemáticas. La ley de la gravitación universal pasaría a ser más bien un hecho meramente descriptivo.

Pero lo que Balaguer quiere hacer notar es que aún si una teoría empírica no puede ser nominalizada, o que las matemáticas sean indispensables para la descripción del fenómeno, lo importante es que en la teoría se tendrían dos conjuntos mutuamente independientes como el conjunto de hechos puramente físico (o nominalista) y el conjunto puramente platónico de *hechos* (matemáticas) y que el valor de verdad de la ciencia empírica se encuentra siempre en los hechos y no en las matemáticas involucradas. Y que es indiferente que existan o no objetos matemáticos porque no tienen ningún efecto en los fenómenos de la naturaleza. Luego sigue siendo válido considerar los objetos matemáticos como ficción a pesar de su papel en la ciencia y de esta manera los ficcionalistas pueden aceptar las teorías empíricas como la ley de la gravitación universal sin estar comprometidos con la existencia de los objetos matemáticos involucrados. Solamente estarían aceptando la parte nominalista de la ciencia.

3.6 VIABILIDAD DEL REALISMO CIENTÍFICO NOMINALISTA

En la práctica científica, como en la ciencia física, se usan modelos matemáticos para describir y hacer predicciones de un fenómeno pero el modelo matemático no es el fenómeno, y este modelo se abandona o se ajusta para que coincida con los datos experimentales u observables del fenómeno. Nunca se toma al modelo matemático como *lo cierto* en la ciencia empírica sino que en la medida en que el modelo describa mejor el fenómeno, este modelo gana confiabilidad a la hora de entender o hacer predicciones del fenómeno físico. Como bien señala Balaguer: “(TA) Las teorías empíricas hacen uso de objetos matemáticos solamente para construir *aparatos teóricos* (o *marcos descriptivos*) para hacer aseveraciones acerca del mundo físico” (Balaguer, 1998, p.137)[25].

Luego, en la ciencia empírica, desde la perspectiva de Balaguer, no se hacen afirmaciones

[25]Textual: (TA) Empirical theories use mathematical-object talk only in order to construct *theoretical apparatuses* (or *descriptive frameworks*) in which to make assertions about the physical world.

como que el fenómeno físico (o biológico, o psicológico, o lo que sea) x ocurre *porque* el dominio matemático tiene naturaleza y. Sino que más bien se dice que el estado o comportamiento del fenómeno natural S puede ser *entendido* en términos de la estructura matemática M. Es decir que las matemáticas involucradas en una teoría científica son una ayuda descriptiva y que permite hacer inferencias del fenómeno más no afecta al fenómeno ni hace parte de él por lo cual no es necesario ningún compromiso en lo que respecta a la existencia de esos objetos matemáticos.

Por consiguiente, la razón por la cual se usan objetos matemáticos en la ciencia empírica es porque es lo que mejor tenemos en el momento y porque ha dado grandes avances y resultados a la hora de modelar eso que llamamos realidad. Por ejemplo, en el caso de la temperatura de un sistema S que tiene 40 grados Celsius, se usan números porque es la mejor forma de representar el aumento o disminución de temperatura en lugar de usar un nombre como "Bill" o "Ted"; aunque se podrían usar estos nombres para diferentes temperaturas, es más práctico usar números. Así, se puede inferir que a partir de la tesis (TA), hay compatibilidad con la tesis ficcionalista que los objetos matemáticos no existen y que las teorías matemáticas son falsas porque son ayudas descriptivas que usa la ciencia empírica y no necesitan ser ciertas para ser exitosas porque siempre se buscan matemáticas que se ajusten a los datos observacionales, pero estas no modifican o influyen en el fenómeno.

Balaguer (1998) menciona que las matemáticas describen o son el marco de la ciencia empírica, son el soporte en el cual se apoyan los datos generados de las observaciones realizadas a los hechos físicos (contenido nominalista), de tal manera que no se necesite tener como condición necesaria que la matemáticas sea ciertas y sus objetos existentes para que el fenómeno físico se dé. El hecho de que algo sea ficción o ficticio no quiere decir que no sea útil para describir algo de la realidad. Por ejemplo, una novela de Jane Austin, ficticia en tanto que es una invención de un sujeto, se puede considerar como marco para dar luces sobre las costumbres de la época de la sociedad inglesa.

Ahora bien, es aceptable que la descripción de los fenómenos físicos no dependen de la veracidad o no de la matemática que los describe, pues los objetos abstractos, tanto abstractos (no espacio-temporales) no tienen injerencia sobre los objetos o fenómenos físicos, es decir, la matemática seria el soporte sobre el cual se pinta los fenómenos físicos, cuyo soporte no afecta el fenómeno. Sin embargo, cabe la pregunta del por qué las teorías matemáticas, sin importar que sean ciertas o falsas, pueden ser utilizadas en la descripción de la ciencia empírica.

Para Balaguer (1998) la eficiente aplicabilidad de las matemáticas al mundo empírico podría ser un problema para los platonistas en tanto que estos consideran los objetos matemáticos acausales, es decir, no tienen ningún efecto o injerencia en el mundo físico, y su aplicabilidad parece implicar una inexplicable correlación entre las teorías matemáticas y la ciencia empírica. Sin embargo, una posible solución es adoptar el FBP. Esto es posible ya que el FBP afirma que todo objeto matemático lógicamente posible existe, por lo cual, dentro del dominio matemático existen infinitos objetos matemáticos. Ahora, no importa como el mundo físico funcione, pues habrá una teoría matemática que en realidad describa parte del dominio matemático y que puede ser usada para ayudar a hacer ciencia empírica.

De manera análoga, los ficcionalistas argumentan que todo objeto lógicamente posible es falso (por no tener contenido factual), y como puede haber infinitos de tales objetos, *siempre* se podría encontrar algunos que sirvan a la ciencia empírica en su descripción de la naturaleza. Pero la pregunta todavía persiste porque aún no hay claridad de por qué las matemáticas siguen siendo soporte o ayuda a la ciencia empírica, (Balaguer, 1998), por ejemplo, considera que si hay otro universo con leyes de las naturaleza muy diferentes a las nuestras *seguramente* podría correlacionarse con otras matemáticas que sirvan de ayuda a la ciencia empírica para describir ese universo a pesar de las diferencias sustanciales.

Pero para Balaguer (1998) una forma de resolver muchos casos de aplicabilidad es que los objetos físicos están ordenados respecto a “más largo que” como los números reales respecto a “mayor que” y porque es lo mejor que se tiene en el momento como soporte de la ciencia empírica. Es como si tuviéramos que cavar un hoyo de ocho metros cúbicos y solo tuviéramos a la mano un hacha, una cuchara, una olla y una pala. ¿Qué herramienta usar? Se podría usar cualquiera de ellas pero se usaría la pala por su eficiencia y por ser más práctico que usar una olla o una cuchara. Por la misma razón, se usan matemáticas en la ciencia empírica para comprender mejor los fenómenos físicos porque es lo mejor que se tiene a la mano. Habría que esperar si en el futuro las matemáticas puedan ser reemplazadas por un aparato teórico mejor.

La perspectiva ficcionalista de las matemáticas no concibe la necesidad de creer en los objetos matemáticos como entes que hacen parte de la realidad del mundo, sino como algo cultural que es comprobado por la historia de las matemáticas. Luego como se ha visto, es irrelevante si son falsas o ciertas en el uso que las ciencias experimentales hacen de ellas. Incluso pueden hacer uso de ellas si aún no tienen un fundamento formal o si no aún no hay una demostración del objeto matemático involucrado.

Es claro entonces que al menos desde esta perspectiva de aplicabilidad de las matemáticas a las ciencias experimentales, no se da en realidad una respuesta sobre la existencia o no existencia de los objetos abstractos sino que más bien se evalúa su utilidad en la teoría científica. Por ello el razonamiento ficcionalista de aplicabilidad les quita a las matemáticas su dependencia en cuanto a su falsedad o veracidad en función de los fenómenos físicos. Por lo tanto es válido concluir que la existencia o no existencia de los objetos matemáticos no es viable desde sus usos prácticos.

4. CONCLUSIONES

Poder culminar este trabajo introductorio (de manera parcial obviamente por la vastedad y profundidad del tema) nos ha permitido ver la relación ineludible que existe entre la Educación Matemática y la Filosofía de la Matemática. Un gran aporte para nosotros fue evidenciar que palabras que se usan de manera frecuente en la Licenciatura en Educación Matemática, como es *objeto matemático,* tuviera tantos desarrollos especializados y perspectivas diferentes en su consideración. Pero en este sentido hemos visto que precisamente eso enriquece el saber filosófico y evita el dogmatismo, de manera que hay muchas respuestas a una misma problemática, aunque sí hay posibles respuestas más viables que otras o mejor fundamentadas.

Además, este trabajo de grado nos ha permitido entender un poco más lo que se considera por *objeto matemático,* debido a que desde la misma disciplina matemática no es posible responder sobre la naturaleza de esos objetos, como por ejemplo si existen de manera dependiente de la mente, cómo existen, o si existen, y cómo saber que en realidad existen de manera independiente en todo sentido del ser humano. Lo que hemos podido apreciar es que la problemática aún persiste, aunque sí hemos podido entender la postura ficcionalista y la postura FBP en sus respuestas respecto a la naturaleza de los objetos matemáticos. Este trabajo podría servir en el futuro a estudiantes que quieran seguir esta línea de investigación en sus trabajos de grados, por tratar elementos que hacen parte del discurso diario como profesionales en Educación Matemática.

De esta manera, comprender que ggeneralmente, y como se ha mencionado, la actividad matemática pareciese considerar los objetos matemáticos como dados. Y, considerar que una filosofía de la matemática basada en el FBP o en el Ficcionalismo, corrientes filosóficas opuestas, dan respuesta de manera “satisfactoria” a los obstáculos epistemológicos que se le platean a cada una de ellas, nos permitió tener una perspectiva más amplia respecto a la naturaleza de los objetos matemáticos

Por otro lado, la consideración de la relación entre abstracto y concreto, entre la ciencia empírica y la matemática podría permitir una introducción de este tema en clases de ciencias naturales y matemáticas. Dado que en la actualidad las matemáticas escolares están alrededor del eje de las matemáticas contextualizadas, preguntas sobre la aparente relación ineludible que hay entre la matemática y la matemática aplicada a las ciencias empíricas podrían sugerirse por parte de los estudiantes o de los docentes, donde se pueda generar un debate en torno a los objetos de conocimiento, de tal manera que estas reflexiones posiblemente permeen la visión de mundo que tengan los educandos.

En relación a los temas centrales del trabajo, podemos decir que:

- Queda un arduo trabajo en diferentes aspectos. Entre estos clarificar de manera significativa la distinción entre abstracto y concreto, es decir dar cuenta de la dicotomía que subyace a dicha distinción e ir más allá de la referencia a casos paradigmáticos como elementos primitivos para la clasificación de los objetos. Si bien se reconoce que los esfuerzos por aclarar que es un objeto abstracto no es tarea fácil, para efectos de este trabajo el marco dentro del cual se desarrolló lo que se entiende por objeto abstracto, es decir como no espacial y no temporal, permitió que las matemáticas y otros objetos que generalmente se conciben como abstractos encajaran dentro del marco; además esta definición se utilizó de manera productiva, en tanto que permitió enfrentar el problema que se planteó en este trabajo.

  De esta manera, las diferentes formas de definir o distinguir un objeto abstracto nos permitieron encarar la naturaleza de los objetos matemáticos dentro de las distintas corrientes filosóficas a partir de una idea general para todas, a saber: la consideración de los entes matemáticos como objetos fuera de la mente, compactos, y no como ideas. Así, más allá de entender que significa el termino abstracto, se resalta la búsqueda de una propuesta que permita que la distinción o definición sea productiva para utilizar en el futuro; en este sentido, las diferentes vías para exponer que es un objeto abstracto o concreto son complementarias. Sin embargo, queda por explorar la consideración de definir objeto abstracto a través de una teoría desarrolladas por Wright (1983) y Bob Hale (1987), y mirar las posibilidades que emergen en las distintas posiciones filosóficas.

- El FBP argumenta que todo objeto matemático lógicamente posible existe. El problema de aceptar esta postura es que al aceptar que los objetos matemáticos son abstractos, es decir, no espacio-temporales, existirían de toda la eternidad aún si nunca hubiera habido un universo ni una inteligencia consciente de esos objetos. Pero el mismo problema sucedería si el universo existiese y no hubiera una inteligencia capaz de ser consciente de ello. Entonces, surge la pregunta ¿el universo existiría si no hubiera evolucionado ninguna forma de vida biológica?

  Respondemos que sí, pues no vemos una razón sólida de por qué el universo deba existir si solo hay vida biológica. De hecho, el universo ya existía millones de años antes de que pudiera desarrollarse alguna forma de vida biológica, y no por eso vamos a decir que el universo no existía hasta que empezó la evolución de las especies. Asimismo, desde la perspectiva del FBP, hay infinitos objetos o estructuras matemáticas por descubrir (describir), de lo que inferimos que si hubiese seres mucho más inteligentes que nosotros, describirían objetos matemáticos impensables para nosotros, inaccesibles para nosotros por nuestra inteligencia limitada. Más aún, al ser nuestra inteligencia limitada, no limita la infinidad de posibles objetos matemáticos.

  Además, el FBP desarrolla una epistemología de no contacto con la cual se puede hablar de conocimiento matemático sin entrar en contacto con los objetos matemáticos. Si bien es cierto que es viable en cuanto que considera su existencia en tanto que las teorías matemáticas deben ser consistentes, esta epistemología da pie también a pensar que no es necesaria la existencia de estos objetos en términos de la consistencia de las teorías pues se puede decir que el ser humano, o la especie humana, pudo desarrollar teorías matemáticas consistentes o al menos intuitivamente consistentes que hacen referencia a objetos o estructuras creadas por el mismo. Pero que, al mismo tiempo, estas estructuras u objetos toman un carácter independiente o ajeno al sujeto, pues no están sujetos a su voluntad, sino que estos objetos o estructuras terminan siendo una fuente de donde se puede extraer conocimiento matemático nuevo, y tal vez está es la razón principal por la cual se cree que hay una realidad abstracta cuya existencia no depende de los sujetos.

- El ficcionalismo afirma que todas las teorías matemáticas son falsas, porque no tienen contenido factual; son vacías porque hablan de cosas que no existen; abstractas, en el sentido que son fruto de la mente del ser humano; de la historia en que se enmarcan. Entonces las proposiciones de la geometría euclideana son ciertas en cuanto que son parte de la historia de la matemática que hemos aceptado, pero falsas en cuanto a que no existen tales cosas como puntos, triángulos, rectas, círculos, etcétera. Negando de esta manera una objetividad *cierta* propia de las matemáticas fuera de esa historia. Luego, las matemáticas son ficcionales.

  El inconveniente que vemos con esta postura es que la objetividad de las ciencias naturales también debería enmarcarse dentro de una historia ficcional, porque todos los pueblos han tenido su ciencia y su interpretación del universo, y las proposiciones de las ciencias empíricas son fruto cultural, hay una historia de la ciencia también, así como lo hay de las matemáticas. Pero si se le niega objetividad a las matemáticas por ser fruto de la historia que nos han contado, entonces también debería negarse la objetividad de las ciencias naturales pues también las ciencias naturales son fruto de la historia que nos han contado.

  En este sentido, fuera de esa historia, las proposiciones de las ciencias naturales son falsas porque lo que se dice de la naturaleza también está sujeto a la subjetividad del ser humano, con la única diferencia que si tenemos una forma de acceso directo y tangible al mundo físico que nos rodea.

BIBLIOGRAFÍA

Ayer, A. (2004). The a priori. En P. Benacerraf y H. Putnam (Eds.). *Philosophy of mathematics.Selected readings*. (pp.315-328). United Kingdom: Cambridge University Press.

Balaguer, M. (1998). *Platonism and Anti- Platonism in Mathematics*. New York, USA : Oxford University Press.

Balaguer, M. (2011). Fictionalism in the Philosophy of Mathematics. *Stanford Encyclopedia of Philosophy*(versión electrónica). United States : Stanford. Center for the Study of Language and information, http://plato.stanford.edu/entries/fictionalism-mathematics/

Benacerraf, P. (2004a). *What numbers could not be*. En P. Benacerraf y H. Putnam. Philosophy of mathematics.Selected readings(p. 272-294). United Kingdom: Cambridge University Press.

_________. (2004b). *Mathematical Truth*.En P. Benacerraf y H. Putnam. Philosophy of mathematics.Selected readings.(p. 403-420). UnitedKingdom: Cambridge University Press.

Castro, M. (2009). El argumento de la indispensabilidad y el ficcionalismo de Balaguer. *Praxis* (63), 100–123. Recuperado de http://www.revistas.una.ac.cr/index.php/praxis/article/view/4099/3972

Daly, C.J. (2008). Fictionalism and the attitudes. *Philosophical Studies, Volume 139, Issue 3*. pp 423-440. DOI: 10.1007/s11098-007-9132-x

Ferreirós, J. (1999). Matemáticas y Platonismo(s). *La Gaceta de la Real Sociedad Española de Matemáticas 2*(3),446–473. Recuperado de http://philpapers.org/archive/FERMYP.pdf

García, A. (2010) *Platón, Platonismo y Educación Matemática* (Tesis de pregrado). Universidad del Valle. Santiago de Cali, Colombia.

Gambra, R. (1977). *Historia sencilla de la filosofía*. España: Ediciones Rialp S.A.

Katz, J. (2000). *Realistic Rationalism.* United States of America: The MIT Press.

Shottenkirk, D. (2009). *Nominalism and its aftermath the philosophy of nelson Goodman*. U.S.A:Springer Science+Business Media B.V. Recuperado de http://www.springer.com/us/book/9781402099304

Pincock, C., Baker, A., Paseau, A. & Leng, M. (2012). Science and mathematics: the scope and limits of mathematical fictionalism. *Metascience, Volume 21*, *Issue 2,* pp 269-294. DOI: 10.1007/s11016-011-9640-3

Ponte, M. (2005). *Realismo y entidades abstractas los problemas del conocimiento en matemáticas*(tesis de doctorado).Universidad de la Laguna. España.

Real Academia Española. (2016). *Objeto*. Recuperado de http://dle.rae.es/?id=QmweHtN

Recalde L. & Arbelaez G. (2011) *Los números reales como objeto matemático*. *Un perspectiva histórico-epistemológica*. Santiago de Cali, Colombia: Editorial Universidad del Valle

Ruffino, M. A. (2005). Realismo y racionalismo en la matemática. En L. Hoyos. (Ed.), *Relativismo y racionalidad*. (pp.337-350). Bogotá, Colombia: Unibiblos.

Rosen, G. (2012). Abstract Objects. *Stanford Encyclopedia of Philosophy* (versión electrónica). United States: Stanford. Center for the Study of Language and information, http://plato.stanford.edu/entries/abstract-objects/

Vélez, C. (2013). La matemática como teoría de estructuras. *Revista Colombiana de Filosofía de la Ciencia. 13* (26), 7-30. Recuperado de http://www.uelbosque.edu.co/publicaciones/revista_colombiana_filosofia_ciencia/volumen13_numero26