



¿Enseñamos a los profesores de Matemáticas aquello
que nos enseña la investigación en Didáctica sobre la
derivada?

CAROLINA ROJAS CELIS

TRABAJO DE GRADO

UNIVERSIDAD PEDAGÓGICA NACIONAL
FACULTAD DE CIENCIA Y TECNOLOGÍA
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS
MAESTRÍA EN DOCENCIA DE LA MATEMÁTICA
BOGOTÁ. D.C., 2013



¿Enseñamos a los profesores de Matemáticas aquello que nos enseña la investigación en Didáctica sobre la derivada?

CAROLINA ROJAS CELIS

ASESOR

EDGAR ALBERTO GUACANEME SUÁREZ

Trabajo de grado presentado para optar al título de Magister en Docencia de la Matemática

Para todos los efectos, declaramos que el presente trabajo es original y de nuestra total autoría; en aquellos casos en los cuales hemos requerido del trabajo de otros autores o investigadores, hemos dado los respectivos créditos

UNIVERSIDAD PEDAGÓGICA NACIONAL
FACULTAD DE CIENCIA Y TECNOLOGÍA
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS
MAESTRÍA EN DOCENCIA DE LA MATEMÁTICA
BOGOTÁ. D.C., 2013

	FORMATO	
	RESUMEN ANALÍTICO EN EDUCACIÓN - RAE	
Código: FOR020GIB	Versión: 01	
Fecha de Aprobación: 10-10-2012	Página 1 de 3	
1. Información General		
Tipo de documento	Trabajo de Grado	
Acceso al documento	Universidad Pedagógica Nacional. Biblioteca Central	
Título del documento	¿Enseñamos a los profesores de Matemáticas aquello que nos enseña la investigación en Didáctica sobre la derivada?	
Autor(es)	Rojas Celis, Carolina	
Director	Edgar Alberto Guacaneme Suárez	
Publicación	Bogotá, Universidad Pedagógica Nacional, 2013, 97 páginas	
Unidad Patrocinante	Universidad Pedagógica Nacional	
Palabras Claves	Derivada, educación del profesor de matemáticas, enfoques de investigación, didáctica de la derivada.	
2. Descripción		
<p>Este trabajo de grado se inscribe en el campo de investigación Educación del Profesor de Matemáticas, cuya intención es describir los resultados de la investigación en Didáctica sobre la derivada y qué de estos se aborda en cursos sobre la enseñanza del Cálculo. Para dar respuesta, se plantearon primero dos preguntas iniciales: ¿Qué se ha investigado en Didáctica sobre la derivada?, ¿Qué se enseña en cursos de Didáctica del Cálculo?; le damos respuesta a ellas a través de tres objetivos específicos los cuales enunciados a continuación:</p> <ul style="list-style-type: none"> • Analizar documentos producto de investigaciones en didáctica de la derivada, tales como tesis doctorales e investigaciones de grupos de investigación en Educación Matemática y la Educación del profesor de Matemáticas. • Categorizar documentos de investigaciones en didáctica sobre la derivada, en los diferentes enfoques usados en el campo de la Educación matemática y las líneas propuestas para el campo de la Educación del profesor de matemáticas. 		

- Describir los programas de tres universidades formadoras de profesores de Matemáticas en Colombia en cursos sobre la enseñanza del Cálculo, en cuanto a la enseñanza de la derivada.

3. Fuentes

Para la realización del presente documento se consultaron cerca de medio centenar de fuentes bibliográficas, de las cuales a continuación se señalan cinco de las más importantes. El lector interesado puede dirigirse a la bibliografía para consultar las demás fuentes.

Font, V. (2002). Una organización de los programas de los programas de investigación en Didáctica de las Matemáticas. *EMA*, 7, 127-170.

Guacaneme, E. & Mora, L. (2011). La educación del profesor de matemáticas como campo de investigación. *Papeles*, 6, 18-25.

Pino-Fan, L. R., Godino, J. D. & Font, V. (2011). Faceta epistémica de conocimiento Didáctico-Matemático sobre la Derivada. *Educación Matemática*, 13, 141-178.

Gómez, P. (2007). *Desarrollo del Conocimiento Didáctico en un plan de formación inicial de profesores de matemáticas de secundaria*. Tesis Doctoral, Universidad de Granada, España.

Pinto, J. (2010). *Conocimiento didáctico del contenido sobre la representación de datos estadísticos: estudios de casos con profesores de estadística en carreras de psicología y educación*. Tesis Doctoral, Universidad de Salamanca, Salamanca.

4. Contenidos

El cuerpo del documento consta de seis capítulos. Los cuales brevemente se describen a continuación:

Capítulo I: Sobre el problema de investigación. Allí se describe profundamente cómo surge el interés por esta investigación y los referentes de apoyo.

Capítulo II: Sobre el marco de referencia. En este capítulo se posiciona la investigación desde tres apartados que refieren respectivamente: la ubicación en el campo; la descripción de los enfoques y líneas de investigación desde el campo de la Educación Matemática y de la Educación del profesor de Matemáticas, –en donde fueron clasificados los documentos–; y, el conocimiento

didáctico del contenido del profesor de Matemáticas.

Capítulo III: Sobre la descripción de los documentos. En este capítulo, se realiza una descripción breve de cada uno de los veinticinco documentos ubicados en cada uno de los enfoques, y al final se describen los aportes que se consideran estos trabajos podrían hacer a favor de la enseñanza de la derivada o del conocimiento del profesor sobre la derivada.

Capítulo IV: Sobre la descripción de los programas sobre la enseñanza del Cálculo. En este capítulo, se describen los programas sobre cursos de enseñanza del Cálculo que tres universidades colombianas formadoras de profesores de matemáticas nos permitieron conocer. Se describe la entrevista con los profesores orientadores de los cursos y además se reconoce qué tanto de la enseñanza sobre derivada se trabaja en dichos cursos.

Capítulo V: Análisis de resultados. En este capítulo se realiza una descripción de los resultados obtenidos al comparar los aportes que hacen las investigaciones sobre la enseñanza de la derivada en cada uno de los enfoques en los cuales se ubicaron trabajos, y las propuestas que los cursos sobre la enseñanza del Cálculo tienen para enseñar sobre la didáctica de la derivada.

Capítulo VI: Finalizamos el cuerpo de este documento con las reflexiones finales a este trabajo, que, desde nuestra perspectiva, consideramos valiosas para la comunidad de formadores de profesores de Matemáticas, en tanto ofrece herramientas para seguir investigando en esta línea. Dentro de las conclusiones que nos brinda este trabajo son identificar que los enfoques que más son trabajados en la enseñanza de la derivada el Cognitivo, el Semiótico y el Sistémico; igualmente se concluye que, dentro del campo de la Educación del Profesor de Matemáticas, se evidencian trabajos sobre las prácticas profesionales de los profesores de Matemáticas y en la línea de investigación del conocimiento profesional del profesor de Matemáticas.

5. Metodología

Este trabajo de investigación propone una metodología de indagación empírica¹.

En un primer momento, hicimos la búsqueda de documentos sobre propuestas para la enseñanza de la derivada. A partir de ello, realizamos una lectura de los resúmenes que los trabajos contienen para determinar si correspondían a propuestas sobre la enseñanza de la derivada, para

¹ Se refiere a una metodología en la que se usa el juicio humano para transformar los datos recolectados y los que son producto de la experiencia. Difiere de la racionalista. (Monroy, 1998)

seleccionar veinticinco documentos, que son los que finalmente clasificamos. Una vez, hemos leído parte de ellos, fueron clasificados tanto en el campo de la Educación Matemática como en el campo de la Educación del profesor de Matemáticas, en los enfoques descritos por Font (Font, 2002) y las líneas propuestas por Guacaneme y Mora (2011), respectivamente. Con lo descrito dimos cumplimiento a los dos primeros objetivos específicos planteados.

Para responder a la segunda pregunta antecesora de investigación, nos contactamos con algunos profesores directores de licenciaturas de algunas universidades y se realizaron entrevistas con los profesores que orientan el curso sobre la enseñanza del Cálculo para que describieran la forma como lo direccionan y las intenciones que se tienen.

Una vez dimos respuesta a las dos preguntas iniciales (i.e., ¿qué se ha investigado en Didáctica de las Matemáticas sobre la enseñanza de la derivada? y ¿qué proponen los cursos sobre la enseñanza del Cálculo de algunas universidades formadoras de profesores de Matemática sobre la derivada?), se dio paso a analizar la relación entre las propuestas en los diferentes enfoques y líneas sobre la enseñanza de la derivada y sobre las temáticas que las universidades formadoras en dichos cursos enseñan.

6. Conclusiones

- Se reconoce la existencia de una estrecha relación entre el campo de la Educación Matemática y el de la Educación del profesor de Matemáticas. Esta relación genera la necesidad de advertir que un formador de profesores debe tener conocimiento de lo que ambos campos están aportando a la didáctica.
- En Colombia existen aún programas de licenciatura que no contienen cursos sobre la enseñanza del Cálculo, y otros que están comenzando a ganar estos espacios; sin embargo, algunas universidades tienen propuestas innovadoras que ofrecen un panorama de referencia sobre los objetos de estudio y sobre las estrategias metodológicas para la educación del profesor.
- No se evidencia en los cursos de enseñanza del Cálculo propuestas que vinculen suficientemente la investigación en didáctica sobre la derivada, con la formación de profesores en dichos cursos; sin embargo, se reconocen otras formas y estrategias de concebir el curso, las cuales también buscan dotar de herramientas al futuro profesor de matemáticas.

Elaborado por:	Carolina Rojas Celis		
Revisado por:	Edgar Alberto Guacaneme Suárez		
Fecha de elaboración del Resumen:	25	02	2014



UNIVERSIDAD PEDAGOGICA
NACIONAL
Educadora de educadores

FACULTAD DE CIENCIA Y TECNOLOGÍA
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS

ACTA DE EVALUACION DE TESIS DE GRADO

Escuchada la sustentación del Trabajo de Grado titulado “¿Enseñamos a los profesores de Matemáticas aquello que nos enseña la investigación en Didáctica sobre la derivada?” Presentado por el estudiante:

Carolina Rojas Celis – 2012185022

Como requisito parcial para optar al título de **Magíster en Docencia de la Matemática**, analizado el proceso seguido por la estudiante en la elaboración del Trabajo y evaluada la calidad del escrito final, se le asigna la calificación de **Aprobado** con **43 Puntos**.

Observaciones:

En constancia se firma a los 24 días del mes de febrero de 2014.

JURADOS

Director(a) del Trabajo:	Profesor(a)	 EDGAR ALBERTO GUACANEME
Jurados:	Profesor(a)	 CONSUELO MONTERRUBIO
	Profesor (a)	 LYDA CONSTANZA MORA

CONTENIDO

CONTENIDO.....	9
INTRODUCCIÓN	11
CAPÍTULO 1: SOBRE EL PROBLEMA DE INVESTIGACIÓN.....	14
1.1 Introducción	14
1.2 El problema de investigación	14
1.3 Diseño metodológico	17
CAPÍTULO 2: MARCO DE REFERENCIA.....	20
2.1 Introducción	20
2.2 Ubicación en el campo	20
2.3 Enfoques y líneas en los campos de la Educación Matemática y de la Educación del profesor de Matemática.....	22
2.4 Conocimiento didáctico del contenido del profesor de Matemáticas.....	35
CAPÍTULO 3: UBICACIÓN DE LAS INVESTIGACIONES SOBRE DIDÁCTICA DE LA DERIVADA EN CAMPOS Y ENFOQUES	39
3.1 Introducción	39
3.2 Documentos ubicados en los enfoques de la Educación Matemática	41
3.3 Documentos ubicados en las líneas del campo de la Educación del profesor de Matemáticas.....	62
CAPÍTULO 4: SOBRE LOS CURSOS DE ENSEÑANZA DEL CÁLCULO.....	69
4.1 Introducción	69
4.2 Descripción de los cursos sobre la enseñanza del Cálculo	70
4.3 Análisis sobre el estudio de didáctica de la derivada en los cursos de enseñanza del Cálculo	76
CAPÍTULO 5: ANÁLISIS DE RESULTADOS.....	79
5.1 Introducción	79

5.2 ¿Se está enseñando aquello que nos dicen las investigaciones en didáctica sobre la derivada?	79
CAPÍTULO 6: REFLEXIONES FINALES	83
REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS.....	85
ANEXOS.....	88
PROGRAMA DE LA UNIVERSIDAD PEDAGÓGICA NACIONAL	88
.....	88
PROGRAMA DE LA UNIVERSIDAD INDUSTRIAL DE SANTANDER.....	92
PROGRAMA DE LA UNIVERSIDAD PEDAGÓGICA Y TECNOLÓGICA DE COLOMBIA.....	94

INTRODUCCIÓN

Este trabajo de investigación está ubicado en el campo de la Educación del profesor de Matemáticas. La pregunta de investigación está basada en indagar si en la formación inicial de los futuros profesores de Matemáticas, se está enseñando aquello que se investiga en didáctica sobre la derivada. Vale la pena reconocer que esta intención de investigación fue producto de varias reflexiones, que durante la realización del trabajo fue modificándose y re-estructurándose, de tal forma que aunque inicialmente, nuestro interés estaba en clasificar documentos sobre didáctica de la derivada en los enfoques que el campo de la Educación Matemática nos brinda, reconocimos la importancia que tiene poder describir qué de lo que se investiga en didáctica sobre la derivada se enseña en cursos sobre la enseñanza del Cálculo. No obstante, aunque se realiza la clasificación de los documentos, este objetivo es ahora una herramienta para responder a la pregunta re-estructurada de esta investigación.

Como antecedente reconocemos que, a partir de un trabajo realizado sobre el conocimiento que los profesores de matemáticas tienen sobre la derivada y sobre su enseñanza (Rojas, 2008), en un curso de Didáctica del Cálculo ofrecido por una especialización en Educación Matemática, se lograron identificar en profesores de matemáticas de bachillerato, algunas dificultades en la comprensión del concepto y de la falta de conocimiento en estrategias para la enseñanza de dicho concepto. Como hallazgo, dado el interés previo por estudiar las estrategias de enseñanza que se ofrecen desde las investigaciones ubicadas en los campos de la Educación Matemática y de la Educación del profesor de Matemáticas, identificado este último por Guacaneme y Mora (2011), se evidencia a manera de hipótesis una ruptura entre lo que las investigaciones nos brindan como herramientas para la enseñanza de la derivada y lo que en cursos de enseñanza del Cálculo se están brindando.

Para dar respuesta a la pregunta de investigación, se plantearon tres objetivos específicos: analizar documentos producto de investigaciones en didáctica de la derivada, como tesis doctorales e investigaciones de grupos de investigación en Educación Matemática, dirigidos a la formación inicial del profesor de Matemáticas; categorizar documentos de

investigaciones en didáctica de la derivada en los diferentes enfoques usados en Didáctica de las Matemáticas en el campo de la Educación Matemática, y las líneas o planos propuestos en el campo de la Educación del Profesor de Matemáticas; y, finalmente, describir los diferentes enfoques que emplean tres universidades formadoras de profesores de Matemáticas en Colombia, en cursos sobre la enseñanza del Cálculo.

El desarrollo de este trabajo se encuentra organizado en este documento de la siguiente manera:

Capítulo I: Sobre el problema de investigación. Allí se describe cómo surge el interés por esta investigación y los referentes de apoyo.

Capítulo II: Sobre el marco de referencia. En este capítulo se posiciona la investigación desde tres apartados que refieren respectivamente: la ubicación en el campo; la descripción de los enfoques y líneas de investigación desde el campo de la Educación Matemática y de la Educación del profesor de Matemáticas, –en donde fueron clasificados los documentos–; y, el conocimiento didáctico del contenido del profesor de Matemáticas.

Capítulo III: Sobre la descripción de los documentos. En este capítulo, se realiza una descripción breve de cada uno de los veinticinco documentos ubicados en cada uno de los enfoques, y al final se describen los aportes que se consideran estos trabajos podrían hacer a favor de la enseñanza de la derivada o del conocimiento del profesor sobre la derivada.

Capítulo IV: Sobre la descripción de los programas sobre la enseñanza del Cálculo. En este capítulo, se describen los programas sobre cursos de enseñanza del Cálculo que tres universidades formadoras de profesores de matemáticas nos permitieron conocer. Se describe la entrevista tenida con los profesores orientadores de los cursos y además se reconoce qué tanto de la enseñanza sobre derivada se trabaja en dichos cursos.

Capítulo V: Análisis de resultados. En este capítulo se realiza una descripción de los resultados obtenidos al comparar los aportes que hacen las investigaciones sobre la enseñanza de la derivada en cada uno de los enfoques en los cuales se ubicaron trabajos, y las propuestas que los cursos sobre la enseñanza del Cálculo tienen para enseñar sobre la didáctica de la derivada.

Capítulo VI: Finalizamos el cuerpo de este documento con las conclusiones a este trabajo, que, desde nuestra perspectiva, consideramos valiosas para la comunidad de formadores de profesores de Matemáticas, en tanto ofrece herramientas para seguir investigando en esta línea. Dentro de las conclusiones que nos brinda este trabajo está el identificar que los enfoques que más son trabajados en la enseñanza de la derivada son: el Cognitivo, el Semiótico y el Sistémico; igualmente se concluye que, dentro del campo de la Educación del profesor de Matemáticas, se evidencian trabajos sobre las prácticas profesionales de los profesores de Matemáticas y en la línea de investigación del conocimiento profesional del profesor de Matemáticas.

Consideramos importante, enunciar que los avances de este trabajo de investigación fueron compartidos en el 14° Encuentro de Matemática Educativa (Rojas & Guacaneme, 2013) y en el VIII Simposio de Matemática y Educación Matemática con el fin de dar a conocerlo y debatirlo con la comunidad de educadores matemáticos.

Para finalizar, queremos explicar que si bien este documento está escrito en primera persona del plural, reconociendo que este trabajo fue en conjunto con el director Edgar Guacaneme, algunos apartes estarán escritos en primera persona del singular; estos refieren a algunas reflexiones personales que de manera singular surgieron durante la realización de dicho trabajo. Esperamos que este trabajo sea considerado como un antecedente para re-pensar en los actuales currículos de los cursos sobre la enseñanza o didáctica del Cálculo, en este caso específico, sobre la enseñanza de la derivada.

CAPÍTULO 1: SOBRE EL PROBLEMA DE INVESTIGACIÓN

1.1 Introducción

En este capítulo relataremos las razones por las cuales se realizó este trabajo de investigación, mediante la justificación y los objetivos desarrollados, y sobre la metodología usada en él. Reconocemos que durante la realización de este capítulo, nos dimos cuenta del cambio que tuvo nuestro problema inicial y que tratamos de describir para que el lector conciba este trabajo de investigación como el resultado de reflexiones sobre lo que nos inquieta y lo que somos como docentes.

1.2 El problema de investigación

La formación del profesor de Matemáticas ha sido uno de los objetos en los que el campo de la Educación Matemática se ha ocupado durante las últimas décadas, debido a los cambios que se han realizado en la misma enseñanza de las Matemáticas. Como lo señala Moreno (2005), estos cambios en la forma de enseñar las matemáticas y aun de concebirlas, han mostrado la necesidad de formar a los futuros profesores de Matemáticas con herramientas que les permitan ser autores de cambios y propuestas para la enseñanza de temas específicos. La inclusión de las herramientas tecnológicas en la enseñanza de las Matemáticas, la propuesta de enseñar Matemáticas para contextos específicos o la intención de formar en valores desde las mismas Matemáticas, son una muestra de aspectos que conminan a que dicho profesor requiera de elementos que le permitan adaptarse a nuevas formas de enseñar y aportar nuevas propuestas de enseñanza que hagan más viable el aprendizaje de las Matemáticas. Es por ello, que autores como María del Mar Moreno, evidencian una necesidad de comenzar a brindarles herramientas desde su formación inicial a los futuros profesores de Matemáticas, que específicamente puedan adquirir desde cursos de didáctica o enseñanza de las Matemáticas, tal y como se describe en el siguiente párrafo:

Los intentos de reforma en la enseñanza del Cálculo han sido muchos y distintos en diferentes países. Estos cambios deben afectar al currículo, a la utilización de la tecnología y a la formación didáctica y científica de los futuros docentes. En España, cada vez son más numerosas y frecuentes las experiencias puestas en marcha por grupos de trabajo, profesores universitarios interesados y preocupados por la calidad y eficacia de su docencia. (Moreno, 2005, p. 81)

La intención de este trabajo de investigación, está centrada específicamente en las herramientas que pueden recibir los futuros profesores de Matemáticas sobre la enseñanza de la derivada, a partir de un curso de enseñanza o didáctica del Cálculo. Este interés surge a partir de un trabajo de investigación (Rojas, 2008) sobre el conocimiento que profesores de Matemáticas, quienes estaban cursando una especialización en Educación Matemática, tenían sobre la derivada y sobre su enseñanza. En ese trabajo, se logra evidenciar que las escasas herramientas de profesores, preparados durante los años ochentas, noventas y en la última década impedían enseñar la derivada como razón de cambio o como un modelo de variación; además, se logró advertir que los profesores tenían problemas para distinguir la diferencia entre la derivada en un punto y la derivada de la función, reconocían la derivada solo bajo un proceso algorítmico y tenían dificultades para representar la derivada de una función en representaciones no simbólicas (*i.e.*, gráfica, numérica o verbal). Ese estudio permitió también explicitar la necesidad de proponer cursos sobre la enseñanza del Cálculo, en donde se brinden herramientas para la comprensión del concepto y de propuestas para su enseñanza.

En esta dirección, comenzamos por cuestionarnos por aquello que desde la teoría (o desde los resultados de la investigación en Educación Matemática), se puede aportar a los cursos sobre la enseñanza del Cálculo, específicamente en la derivada. Sabíamos sí, que existe una diversidad de aportes, provenientes de investigaciones, los cuales proponen nuevas formas de enseñar la derivada y explicitan aspectos sobre el conocimiento que un profesor de Matemáticas debe tener para enseñar este concepto. Sin embargo, es necesario que esta cantidad de investigaciones tengan un orden dentro del campo, tal y como lo enuncia Font (2002): "la variedad de enfoques, teorías y métodos está reclamando la realización de investigaciones que pongan un cierto orden y estructura en el panorama del componente científico de la Didáctica de las Matemáticas" (p.128).

Es por ello que para determinar de manera sistemática qué herramientas nos brindan las investigaciones en didáctica de la derivada, es necesario realizar una categorización de tales investigaciones; en ello consiste parte de este trabajo de investigación. En otras palabras, intentamos contestar la pregunta: ¿qué se ha investigado en Didáctica de las Matemáticas sobre la derivada?

Por otra parte, nos interesa responder la pregunta: ¿qué proponen los cursos sobre la enseñanza del Cálculo de algunas universidades formadoras de profesores de Matemática sobre la derivada? Ello en tanto que, reconocemos hay cantidad de propuestas para el desarrollo de dichos cursos, no podemos evidenciar claramente sobre su interés en la enseñanza sobre la derivada.

Por todo lo anterior, podemos sintetizar el problema de investigación a través de la pregunta de investigación: ¿enseñamos a los profesores de Matemática aquello que nos enseña la investigación didáctica sobre la derivada?

Las dos preguntas parciales (i.e., ¿qué se ha investigado en Didáctica de las Matemáticas sobre la derivada? y ¿qué proponen los cursos sobre la enseñanza del Cálculo de algunas universidades formadoras de profesores de Matemática sobre la derivada?) son las que pretendimos responder en todo el documento. Ligadas a estas cuestiones, se propone un objetivo general y algunos objetivos específicos, que se enuncian a continuación:

1.2.1 Objetivo General

El objetivo general de investigación tiene un carácter meramente descriptivo; sin embargo, este trabajo consideramos se convierte en un insumo para proponer elementos curriculares de un curso sobre Didáctica del Cálculo, específicamente en lo que refiere a la Didáctica de la derivada. Hacemos esta salvedad, con el fin de poder puntualizar claramente inquietudes que con la propuesta del mismo se pueda generar.

- Describir la relación que hay entre lo que se investiga en didáctica sobre la derivada y lo que se enseña en cursos de enseñanza del Cálculo sobre la didáctica de la derivada.

1.2.2 Objetivos específicos

- Analizar documentos producto de investigaciones en didáctica de la derivada, tales como tesis doctorales e investigaciones de grupos de investigación en Educación Matemática y la Educación del profesor de Matemáticas.
- Categorizar documentos de investigaciones en didáctica sobre la derivada, en los diferentes enfoques usados en el campo de la Educación matemática y las líneas propuestas para el campo de la Educación del profesor de matemáticas.
- Describir los programas de algunas universidades formadoras de profesores de Matemáticas en Colombia en cursos sobre la enseñanza del Cálculo, en cuanto a la enseñanza de la derivada.

1.3 Diseño metodológico

Este trabajo de investigación propone una metodología de indagación empírica² por medio de una observación sistemática en el análisis del contenido de documentos y entrevistas, el establecimiento de categorías y el contraste entre lo que se ha investigado en didáctica sobre la derivada y lo que se enseña de ello, en los cursos sobre la enseñanza del Cálculo para la formación de los futuros profesores de Matemáticas.

Para dar cumplimiento a los dos primeros objetivos específicos, hicimos la búsqueda en revistas electrónicas, handbooks, tesis (doctorales, de maestría y otras de licenciatura) y en memorias de congresos en Educación Matemática, de documentos sobre propuestas para la enseñanza de la derivada, logrando encontrar cuarenta y cinco documentos. En este proceso de selección, solamente tuvimos en cuenta los títulos de cada uno de los documentos que encontrábamos en la búsqueda mencionada anteriormente, así como también de documentos que profesores investigadores en el campo nos compartieron. A partir de ello, realizamos una lectura de los resúmenes que los trabajos contienen para determinar si correspondían a propuestas sobre la enseñanza de la derivada, y de allí se logran seleccionar veinticinco documentos, que son los que finalmente clasificamos. Una vez, hemos leído parte de ellos, fueron clasificados tanto en el campo de la Educación Matemática como en el campo de la Educación del profesor de Matemáticas, en los

² Se refiere a una metodología en la que se usa el juicio humano para transformar los datos recolectados y los que son producto de la experiencia. Difiere de la racionalista. (Monroy, 1998)

enfoques descritos por Font (2002) y las líneas propuestos por Guacaneme y Mora (2011), respectivamente, teniendo en cuenta los referentes que los autores describen para cada una de las líneas y enfoques. Con lo descrito dimos cumplimiento a los dos primeros objetivos específicos planteados.

Para responder a la segunda pregunta sobre lo que proponen los cursos sobre la enseñanza del Cálculo en algunas universidades colombianas, tratamos de establecer contacto (por medio de correos electrónicos) con algunos profesores directores de licenciaturas de algunas universidades, pero finalmente se pudo establecer el contacto con los profesores que orientan los cursos sobre la enseñanza del Cálculo de la Universidad Pedagógica Nacional³, la Universidad industrial de Santander⁴ y la Universidad Pedagógica y Tecnológica de Colombia. Con ellos, realizamos una entrevista informal, ya que consideramos que esta modalidad nos permitiría conocer cuáles son las temáticas que se trabajan en el curso, si se aborda la enseñanza de la derivada, respondiendo a preguntas como: ¿Qué se enseña en el curso? ¿Cómo se abordan las temáticas que enuncia? ¿Qué elementos sobre la enseñanza de la derivada trabaja en dicho curso? ¿Qué referentes bibliográficos propone para el desarrollo de la temática que refiere a la enseñanza de la derivada? Este tipo de preguntas nos permitieron darnos cuenta de la relación que hay entre lo que proponen en los programas y lo que se está enseñando.

Queremos resaltar que este proceso de comunicación con los profesores de dichos cursos o directores de las licenciaturas fue algo complejo, lo que nos impidió realizar un estudio con otras universidades que nos hubiese interesado describir en este trabajo y de seguro, podríamos haber nutrido aún más las conclusiones obtenidas al cumplir con este tercer objetivo.

Una vez dimos respuesta a las dos preguntas iniciales (i.e., ¿qué se ha investigado en Didáctica de las Matemáticas sobre la derivada? y ¿qué proponen los cursos sobre la enseñanza del Cálculo de algunas universidades formadoras de profesores de Matemática sobre la derivada?), se dio paso a analizar la relación entre las propuestas en los diferentes enfoques y líneas sobre la enseñanza de la derivada y las temáticas que las universidades formadoras en dichos cursos enseñan.

³ UPN

⁴ UIS

Cabe señalar que este trabajo de investigación lo consideramos como un antecedente a un trabajo que pretenda, en otro momento, realizar una propuesta curricular para un curso sobre la enseñanza del Cálculo, en el cual se reconozca que hay que establecer un puente entre lo que nos enseña la teoría en cuanto a las investigaciones realizadas en los campos y lo que debe ser enseñado en dichos cursos.

CAPÍTULO 2: MARCO DE REFERENCIA

2.1 Introducción

Este capítulo describe el marco de referencia del trabajo realizado. Inicialmente incluye aspectos referentes a la ubicación de este trabajo de investigación en un ámbito o campo de investigación; seguidamente, se presenta la descripción de los diferentes enfoques propuestos para el campo de la Educación Matemática, descritos por Font (2002), y los planos o líneas que proponen Guacaneme y Mora (2011) en el campo de la Educación del profesor de Matemática, los cuales son parte fundamental de nuestro trabajo, ya que a través de ellos hemos realizado la clasificación de los documentos. Finalmente, haremos una descripción de cuál puede ser el conocimiento didáctico del contenido⁵ del profesor de Matemáticas, con el fin de abordar centralmente el tema de interés en esta investigación.

2.2 Ubicación en el campo

Este trabajo de investigación está ubicado en el campo de la Educación del profesor de Matemáticas, en la línea de la educación del profesor, propuesto por Guacaneme y Mora (2011). Queremos dedicar un espacio para describir por qué nos parece importante trabajar desde esta línea de investigación y mostrar cómo otros investigadores la reconocen como una línea importante por sus aportes al campo de la Educación Matemática.

Cualquier cambio educativo debería estar ligado a la mejora del profesor en ejercicio y del futuro profesor de Matemáticas, ya que de ellos depende que los avances que se logren tengan continuidad. Es por ello, que la investigación sobre la formación del profesor de Matemáticas debe ser considerada una herramienta que apoya la transformación educativa; en este sentido coincidimos con Márquez al afirmar que "no hay transformación educativa sin la transformación en la formación del profesorado" (Márquez, 2009, p. 27).

⁵ CDC

Es por esto, que desde el campo de la Educación Matemática se han propuesto y desarrollado varias teorías y enfoques que pretenden dar respuesta a situaciones particulares de enseñanza de la matemática; por ejemplo, se han propuesto distintas formas de ver al estudiante, de describir la naturaleza de las mismas Matemáticas y de comprender los procesos de enseñanza y aprendizaje. Estas teorías que intentan dar una explicación a los sucesos que se evidencian cuando se enseña Matemáticas, debe tener una estrecha relación con la formación del profesorado, tal y como lo describe Márquez (2009):

La formación del profesorado está estrechamente ligada a la investigación didáctica y a las teorías sobre la enseñanza, de tal manera que, según sea la concepción sobre la enseñanza y su práctica, así será la propuesta para la formación del profesorado. La teoría de la enseñanza y la teoría sobre la formación del profesorado están íntimamente ligadas porque la primera condiciona un modelo de escuela y de profesor y por tanto una concepción sobre cómo hay que formar a ese profesorado. La inquietud sobre la formación del profesorado está estrechamente ligada a los intentos de renovación y cambio en la educación de los años 80. Muchos han sido los especialistas que han investigado sobre esta disciplina a finales del siglo XX, tratando de dar a la formación del profesorado una estructura conceptual independiente de otras disciplinas de carácter didáctico. (p.36)

Es así como a finales del siglo XX, en España, así como en Colombia (Bautista, 2009), se ha comenzado a evidenciar un interés por darle a la formación del profesorado un estatus de profesionalización, llevando este interés a otros países, que se preocupan por declarar el conocimiento que un profesor de Matemáticas requiere, que no solo se restringe a la del área específica, sino que implica un conocimiento sobre la misma enseñanza y aprendizaje y de otros factores que más adelante intentaremos explicar de forma más detallada. Es por ello, que la formación del profesorado es una de las herramientas básicas en este proceso de la profesionalización del docente.

Desde la misma formación inicial del futuro profesor de Matemáticas y aun en la formación continuada o avanzada de los profesores de Matemáticas en ejercicio, se les deben brindar herramientas que puedan usar en determinado momento para la enseñanza de un tema específico, con el fin de generar un mejor aprendizaje en los estudiantes; naturalmente estas herramientas deben estar estrechamente relacionadas con los cambios que se proponen desde la educación. Así, hay que dotar al profesor de Matemáticas de elementos

teóricos que sean consecuentes con los que se aporta desde la misma Educación Matemática, es decir, debe haber una relación permanente entre lo que se propone para la enseñanza de las Matemáticas y las herramientas que se le brindan al futuro profesor desde su formación inicial. No debemos obviar, por ejemplo, que la inclusión de los medios tecnológicos al aula de clase, requiere que los futuros profesores, y aun los ya titulados, aprendan el funcionamiento y uso adecuado de estas herramientas como medio efectivo para la enseñanza y que dejen así de oponerse a ella.

2.3 Enfoques y líneas en los campos de la Educación Matemática y de la Educación del profesor de Matemática

En la búsqueda por darle un estatus al campo de la Educación Matemática como campo independiente, e intentar describir el complejo mundo de enseñar y aprender, algunos investigadores (como Chevallard, Brousseau y Cantoral), han propuesto nuevas teorías (como lo son la teoría antropológica de lo didáctico, la teoría de las situaciones didácticas o el enfoque socioepistemológico, respectivamente) que ubicadas dentro del campo de la Educación Matemática, le han dado un posicionamiento importante al mismo, ya que goza de fundamentos propios y no solamente basados en las teorías de otros campos (como el psicológico, antropológico, ecológico, etc.).

Es por ello que vale la pena conocer los enfoques que desde el campo de la Educación Matemática están siendo propuestos. Para ello, se retoma un documento de Font (2002), donde presenta un resumen detallado de siete enfoques propuestos en la investigación sobre didáctica de las matemáticas, a partir de seis aspectos principales que los caracterizan:

- Una ontología general.
- Una epistemología general.
- Una teoría sobre la naturaleza de las matemáticas.
- Una teoría sobre el aprendizaje y enseñanza en general y de las Matemáticas en particular.
- Una definición del objeto de investigación de la Didáctica de las Matemáticas.
- Una metodología de investigación.

Nos hemos basado en la descripción de los siete enfoques descritos por Font, a partir de los seis aspectos enunciados anteriormente, para categorizar los documentos que seleccionamos para el estudio y poder así describir los aportes que cada uno de ellos le ha dado al campo.

En lo que refiere al campo de la Educación del profesor de Matemáticas, en Colombia quizás desde la constitución de 1991 se advierten varios aspectos que pretenden tener cuidado de la calidad de la educación, lo que conlleva a pensar en las garantías que debe tener la educación de profesores en nuestro país. En ello, profesores investigadores han dispuesto de su trabajo por fortalecer dicho campo y darle un trato en cierto sentido independiente del campo de la Educación Matemática, de tal forma que han propuesto líneas propias, tal y como lo hicieron Guacaneme y Mora (2011), las cuales se presentan en lo que sigue.

2.3.1 Enfoques en el campo de la Educación Matemática

En el campo de la Educación Matemática se ha desarrollado una variedad de teorías y enfoques que aportan a la investigación en este campo. Por este motivo, se encuentran autores que defienden el uso de esta variedad de enfoques y métodos en la investigación en este campo, considerando que esta posición es beneficiosa. Sin embargo, Font (2002) plantea que esta diversidad de enfoques y teorías puede ocasionar incomunicación entre los diferentes exponentes de los enfoques y debe darse un orden y estructura en el panorama del componente científico.

Según Font (2002), estos diversos enfoques bien pueden ser descritos a través de seis aspectos, los cuales se describen a continuación:

1. *Sobre una ontología general*: Expone la teoría de la existencia relativa y el estatus del mundo y de lo que habita. Responde a preguntas como: ¿cuáles son las bases del conocimiento matemático?, ¿cuál es la naturaleza del conocimiento matemático, y cómo explicamos, la existencia de los objetos matemáticos? (Guacaneme, Astudillo, Castillo, Obando, & Torres, 1995)

2. *Una epistemología general:* Presenta una teoría sobre la naturaleza del conocimiento subjetivo, objetivo, y una teoría del significado y de la verdad sobre estos conocimientos.
3. *Una teoría sobre la naturaleza de las Matemáticas:* Presenta la idea de considerar las Matemáticas como convenciones sociales, o como resultado de la experiencia humana, dando respuesta a preguntas como: ¿cuál es la base del conocimiento matemático?, ¿qué caracteriza la verdad en matemática?
4. *Una teoría sobre el aprendizaje y enseñanza:* Se interesa por determinar cómo se forma el conocimiento personal y el conocimiento matemático personal, y sobre los medios para facilitar el aprendizaje de las Matemáticas.
5. *Una definición del objeto de investigación de la Didáctica de las Matemáticas:* Describe para cada enfoque si se pone el interés en las representaciones mentales, en las construcciones sociales, en la producción de la comunicación de los conocimientos matemáticos, etc.
6. *Una metodología de investigación:* Intenta describir si se utiliza una metodología de tipo cualitativo, cuantitativo, interpretativo, positivista, etc.

A través de estos aspectos, Font logra explicar y caracterizar siete enfoques, en los cuales se clasifican los documentos seleccionados en esta investigación, a saber: el Cognitivo, el Constructivismo radical, el Constructivismo social, el Sistémico, el antropológico, el Semiótico y el Crítico. Veamos algunas singularidades de cada uno de estos.

2.3.1.1 El enfoque Cognitivo

Investigadores y estudiosos del enfoque lo presentan como un paradigma local⁶; es decir, que sus investigaciones se centran en la definición del objeto de investigación y la metodología de investigación.

El principal foco de atención es el individuo. Para esta Didáctica clásica, lo problemático es el pensamiento matemático del alumno (o del profesor). Apoyado en la Psicología, este enfoque propone dos formas de organizar el conocimiento en la mente: i) por redes semánticas y ii) por la Teoría de los esquemas. Así, el objeto de investigación son las representaciones mentales. Este enfoque es altamente criticado por las teorías que le dan un alto grado de importancia a lo social en el proceso de enseñanza y aprendizaje.

⁶ Esta clasificación es propuesta por Ernest (1994).

Respecto de la naturaleza de las matemáticas, el enfoque considera que son una construcción resultado de la experiencia humana pero no la consideran como resultado solamente de convenciones o acuerdos sociales, sino también de construcciones mentales del individuo a través de su propia experiencia. En el aprendizaje, el enfoque se basa en el análisis de relación entre el conocimiento existente y el nuevo conocimiento que el individuo comienza a recibir; con ellos pretenden explicar el saber qué y el saber cómo. En cuanto a la enseñanza, se interesa por aquella que produzca un aprendizaje significativo.

Dentro de este enfoque hay varias líneas de investigación; dentro de las más destacadas se encuentran aquellas que han estudiado el pensamiento matemático avanzado, en la que sobresalen la Teoría APOS o APOE (acción, proceso, objeto y esquema) y la teoría de la definición del concepto y la imagen del concepto y, por otra parte, la Teoría de los campos conceptuales. La metodología de la investigación es de tipo interpretativo pretendiendo que la subjetividad del investigador no afecte el resultado.

2.3.1.2 El Constructivismo radical

Es considerado como un paradigma global⁷, ya que sus afirmaciones más fuertes se hacen en el campo de la ontología y la epistemología. En términos epistemológicos se ha centrado en dos principios básicos, expuestos por Von Glasersfeld (1995), que propone que: i) El conocimiento es construido activamente por el sujeto, ii) La función de la cognición es organizar nuestro mundo de experiencias y no descubrir una realidad trascendente; este enfoque, según críticos, puede caer fácilmente en el solipsismo. Su teoría sobre la naturaleza de las Matemáticas es radicalmente falibilista. Se considera que unas de las bases aportantes al enfoque son:

- a. *La epistemología genética de Piaget*, ya que de ella se obtiene que el conocimiento se obtiene es a través del tiempo; para comprender una idea se necesita examinar su construcción teniendo en cuenta la ontogénesis y la filogénesis.
- b. *Una epistemología radical*; esta lleva a: i) objetar una teoría representacionista del conocimiento, es decir, rechazar el progreso hacia una visión más exacta de la manera en que las cosas realmente son, ii) imponer el requisito de que saber algo es actuar sobre ello, iii) considerar siempre la presencia del observador en la

⁷ Esta clasificación es propuesta por Ernest (1994).

observación, reconocer su papel en la descripción y análisis del problema, cosa contraria a lo que se propone desde el enfoque Cognitivo.

- c. *La modelización y la construcción de otros.* Una manera sencilla de comprender este elemento, es a través de la analogía relativa a cuando una persona dice conocer a otra; en este caso esto se afirma porque una persona se ha hecho una imagen o modelo de la otra a través de sus actuaciones y formas de pensar. De la misma manera, este enfoque considera que tales modelos o representaciones son el único producto visible de las investigaciones sobre la construcción del conocimiento matemático de los sujetos. No se puede comprender cómo es realmente el conocimiento matemático de los sujetos, solo se puede aspirar a tener modelos viables de ese conocimiento.

En la enseñanza y aprendizaje, el enfoque ha contribuido al hacer entender la enseñanza de las Matemáticas de una manera diferente a la tradicional al poner en primer plano la necesidad de considerar la heterogeneidad de los alumnos en los procesos de enseñanza y aprendizaje. Ha superado el aprendizaje pasivo y ahora aporta con materiales, trabajo en grupo, etc. que enriquezca el aprendizaje del estudiante, esto sin perder de vista que la base del enfoque está en que el conocimiento es construido activamente por el sujeto.

2.3.1.3 El Constructivismo social

Es considerado como un paradigma global, por lo que sus estudios se basan en la ontología y la epistemología general. Desde una perspectiva antropológica, el enfoque plantea que las Matemáticas son portadoras y al mismo tiempo producto de unos valores determinados. Este punto de vista ha tomado interés en las investigaciones sobre los problemas que tienen las personas que aprenden Matemáticas en situaciones de conflicto cultural, es decir, donde su cultura propia difiere por la marcada en la escuela. El Constructivismo social (entendiendo lo social como la relación entre los sujetos y de los sujetos con su entorno) aunque sigue afirmando tener como fundamento que el conocimiento es un proceso mental (tal y como lo afirma el constructivismo radical), tiene en cuenta los factores sociales y culturales que impiden o favorecen que se genere ese conocimiento. Para este enfoque, el sujeto construye su conocimiento con base en su experiencia y luego estos conocimientos se ajustan para ser sometidos a nuevas experiencias con el mundo y la sociedad. Está enmarcado desde su perspectiva psicológica

por la propuesta de Vygotsky y naturalmente incorpora conceptos como el de "zona de desarrollo próximo".

En cuanto a la naturaleza de las Matemáticas, el enfoque destaca tanto el falibilismo como su relación con la construcción social; desde esta perspectiva epistemológica, Font (2002) describe el Constructivismo social desarrollado por Ernest, quien plantea, desde un punto de vista filosófico, a las matemáticas basadas en:

1. La negación y la aceptación. Esta postura apropia la propuesta de Lakatos (1978) sobre la prueba y la refutación.
2. La certeza y la necesidad de que las Matemáticas son producto de la aceptación de unas reglas de juego que se encuentran en una forma de vida socialmente preexistente. Recoge los trabajos de Wittgenstein (1983, 1987).
3. La interpretación de la objetividad como intersubjetividad. Entiende al conocimiento objetivo como un conocimiento social, cultural, público y colectivo.
4. La interpretación de las Matemáticas como algo conversacional. Es decir, las entiende como algo básicamente lingüístico, textual y semiótico.

La teoría del aprendizaje en este enfoque, pone énfasis en el lenguaje y la interacción social; en la enseñanza pone el énfasis en el papel que juega el contexto y la interacción social en la construcción social que se realiza en el aula. El objeto de investigación es la construcción social realizada en el aula y la metodología de investigación es de tipo interpretativo.

2.3.1.4 Enfoque Sistémico

Este enfoque se sitúa en los programas locales y semilocales⁸ ya que para la Didáctica de las Matemáticas amplía su reflexión teórica, problematizando sobre las Matemáticas que se deben enseñar, quitándole peso a las actividades exclusivamente mentales de los individuos, pues en su crítica a los anteriores enfoques, declara que pareciera que solo estuviesen tomando como copia a la psicología, hablando de corrientes como las de Piaget y Vygotsky.

El enfoque propone a la Didáctica de las Matemáticas como una disciplina autónoma. Brousseau en los años setenta plantea como problemática el saber matemático mismo

⁸ Esta clasificación es propuesta por Ernest (1994).

antes que el conocimiento matemático del alumno. Es decir, propone que antes de cualquier contenido matemático y de investigaciones que exhiban los errores de los estudiantes en la adquisición del conocimiento matemático, es necesario partir de un modelo epistemológico de la organización matemática del contenido que se pretende enseñar. En otras palabras, hay que problematizar el contenido matemático a enseñar.

En el enfoque Sistémico, el objeto base de estudio es el sistema didáctico. Brousseau lleva a considerar la situación escolar como un sistema y a los actores de este sistema como subsistemas, así, se empieza a analizar y modelizar el sistema enseñante y el sistema enseñado. Es en este enfoque que se propone y toma fuerza el triángulo didáctico o también conocido como el sistema didáctico. De este, Chevallard, descrito en Font (2002), propone en su perspectiva que el sistema didáctico es un análisis que se hace desde afuera, es decir, no describe lo que ocurre en el interior sino en el exterior; propone que la relación entre el sistema y su entorno pasa por la Transposición Didáctica, es decir que hay un proceso desde el saber sabio hasta el saber enseñado; el corpus matemático (llamado el saber sabio) para ser enseñado por el profesor, es necesario que el docente tenga los conocimientos necesarios para poderlo enseñar; a esto se le llama el saber que se quiere enseñar, y aquello que realmente es enseñado recibe el nombre de saber enseñado.

El enfoque utiliza la llamada Ingeniería Didáctica, propuesta por Artigue (1994, 1995), y se caracteriza porque su esquema experimental está basado en las realizaciones didácticas del aula, es decir, sobre la concepción, realización, observación y análisis de secuencia de actividades de enseñanza y aprendizaje.

2.3.1.5 Enfoque Antropológico

Se sitúa en el programa semilocal, es decir que centra su estudio en la naturaleza de las Matemáticas. El enfoque antropológico propuesto por Chevallard apoya que la actividad matemática debe ser una actividad más humana y no se ha de considerar únicamente como la construcción de un sistema de conceptos, como la utilización de un lenguaje, o como procesos cognitivos. Plantea que el problema de los objetos matemáticos no se puede resolver si no se tiene en cuenta la existencia de las personas y de las instituciones.

Chevallard considera a su enfoque antropológico como una propuesta diferente a la del enfoque Sistémico, pero es consciente que es una consecuencia natural del desarrollo de la Teoría de la transposición didáctica. En este enfoque las Matemáticas no son analizadas con un modelo Sistémico sino que se consideran como una actividad humana realizada en ámbitos institucionales.

Su teoría del aprendizaje es de tipo constructivista; enseñar y aprender las Matemáticas es una actividad de reconstrucción de organizaciones matemáticas, que bien pueden ser utilizadas en otras organizaciones y bajo distintas condiciones.

2.3.1.6 Enfoque Semiótico

Al igual que en el enfoque antropológico, este enfoque está centrado en un programa semilocal. Manifiesta que para el estudio de las actividades humanas no debe tenerse en cuenta solamente una disciplina, sino que es un proceso complejo que necesita de otros enfoques que aporten a este estudio tales como: el epistemológico, el psicológico, el lingüístico y el sociológico.

Uno de los trabajos más reconocidos en este campo es el de las Funciones Semióticas propuesto por Godino & Batanero (1994). El enfoque considera a las Matemáticas como una actividad de resolución de problemas, socialmente compartida, con un lenguaje simbólico y un sistema conceptual lógicamente organizados.

Su teoría del aprendizaje es de tipo constructivista. "Aprender matemáticas es construir significados personales y enseñar matemáticas consiste en procurar que los significados personales se aproximen a un significado *a priori* de un objeto matemático para un sujeto desde el punto de vista de la institución escolar" (Font, 2002, p.156).

2.3.1.7 Enfoque Crítico

Para la teoría crítica la institución escolar es el espacio básico para comprender el trabajo de los profesores de Matemáticas, de los estudiantes y de los administrativos; la relación entre estos tres agentes delimita las posibilidades de construcción de un proceso de enseñanza o aprendizaje que contemple el desarrollo de la competencia democrática de los alumnos.

Los aspectos que preocupan al enfoque Crítico son específicamente:

1. Preparar a los estudiantes para ser ciudadanos.
2. Introducir las Matemáticas como una herramienta para analizar de manera crítica los hechos relevantes socialmente.
3. Tener en cuenta los intereses de los estudiantes.
4. Considerar los conflictos culturales en los que se desarrolla el proceso de instrucción.
5. Contemplar los aspectos anteriores en los procesos de enseñanza-aprendizaje de las Matemáticas para que el conocimiento matemático se convierta en una herramienta crítica.
6. Dar importancia a la comunicación en el aula, entendida como el conjunto de relaciones interpersonales que se consideran como la base de la vida democrática.
7. Atender las relaciones entre las Matemáticas y la tecnología, la cual, a fin de solucionar problemas, puede generar otros nuevos.

Esto afirma que su teoría de aprendizaje es de tipo constructivista, en tanto que se amplía la exploración de la construcción de significados con una perspectiva sociopolítica, que es complemento a la construcción personal y social que se realiza en el aula.

Una manera de sintetizar las características de cada uno de los siete enfoques considerados por Font (2002), se encuentra en la Tabla 1.

Tabla 1 Resumen de los enfoques en el campo de la Educación Matemática

	COGNITIVO	CONSTRUCTIVISMO RADICAL	CONSTRUCTIVISMO SOCIAL	SISTÉMICO	ANTROPOLÓGICO	SEMIÓTICO	CRÍTICO
Sobre la ontología general	No problematizan sobre ella.	No hace ninguna suposición sobre la existencia de un mundo más allá del mundo subjetivo de experiencia.	Propone una ontología relativista moderada, en la que plantea la fenomenología social, ya que supone que el sujeto se forma en un mundo compartido y socialmente construido.	No cuestiona la existencia de un mundo objetivo predeterminado; sin embargo, introduce la suposición de la existencia de sistemas.	Este enfoque problematiza –de manera implícita– el punto de vista tradicional que considera la existencia previa de un mundo objetivo predeterminado, puesto que considera la existencia como una relación.	Problematiza el punto de vista tradicional sobre la existencia previa de un mundo objetivo predeterminado, ya que los referentes teóricos sobre los que se sostiene así lo hacen; por ejemplo el pragmatismo.	De manera implícita, problematiza la existencia previa de un mundo objetivo predeterminado, ya que sus referentes teóricos sí lo hacen.
Sobre la epistemología general	Intentan explicar las representaciones del conocimiento de los individuos.	Su epistemología es falibilista, escéptica, anti-objetivista.	Se basa en una epistemología falibilista que asume el conocimiento objetivo como aquel que es aceptado socialmente.	Se basa en el representacionismo.	Implícitamente, cuestiona el representacionismo y la teoría de la verdad como correspondencia.	Cuestiona el representacionismo y la teoría de la verdad como correspondencia.	Cuestiona el representacionismo y la teoría de la verdad como correspondencia.
Sobre la metodología de investigación	Suele ser de tipo interpretativo, procurando que la subjetividad del investigador no afecte la investigación.	Suele ser de tipo cualitativo e interpretativo. En este caso, la subjetividad del investigador está claramente contemplada.	La metodología de investigación suele ser de tipo interpretativo o investigación-acción.	Particularmente para este enfoque la metodología de investigación es la Ingeniería didáctica.	La metodología que proponen es de tipo positivista.	La metodología que proponen es de tipo interpretativo.	La metodología de investigación conlleva en muchos casos la implicación personal del investigador en la investigación-acción que realiza.

	COGNITIVO	CONSTRUCTIVISMO RADICAL	CONSTRUCTIVISMO SOCIAL	SISTÉMICO	ANTROPOLÓGICO	SEMIÓTICO	CRÍTICO
Sobre el aprendizaje y enseñanza en general	Aprendizaje constructivista. Teoriza sobre la enseñanza y se interesa por aquella que produce un aprendizaje significativo.	Considera la diversidad de los alumnos en los procesos de enseñanza y aprendizaje. Tiene en cuenta materiales de apoyo, grupos de trabajo, problemas contextualizados y diferentes representaciones. La enseñanza es muy respetuosa con la construcción de los alumnos, el profesor es solo un facilitador del aprendizaje.	La teoría del aprendizaje es constructivista y pone énfasis en el lenguaje y la interacción social. En la teoría de la enseñanza pone énfasis en el papel que juega el contexto y la interacción social en la construcción social que se realiza en el aula.	Su teoría del aprendizaje es de tipo constructivista. Su teoría de la enseñanza consiste en considerar que el trabajo del profesor es el de realizar la transposición didáctica de manera que facilite la apropiación de la situación por parte del alumno.	Su teoría de aprendizaje es de tipo constructivista. Afirma que enseñar y aprender Matemáticas corresponde a la actividad de reconstrucción de organizaciones matemáticas para poderlas usar en nuevas situaciones y bajo distintas condiciones.	Su teoría del aprendizaje está basada en el constructivismo; aprender matemáticas es construir significados personales y enseñarlas consiste en procurar que los significados personales se aproximen al significado <i>a priori</i> de un objeto matemático desde el punto de vista de la institución escolar.	Su teoría del aprendizaje es de tipo constructivista pero ampliando la exploración a la construcción de significados desde una perspectiva socio-política.
La definición del objeto de investigación	El objeto de investigación son las representaciones mentales.	El objeto de investigación son las construcciones de los sujetos.	El objeto de investigación es la construcción social realizada en el aula.	El objeto de investigación es el estudio ligado a la producción de la comunicación de los conocimientos matemáticos en los sistemas didácticos.	El objeto de investigación es el estudio de la actividad matemática.	El objeto de estudio es la actividad matemática de manera extensiva y descriptiva.	El objeto de investigación es la red institucional de prácticas de la educación matemática, entendida como el espacio de acción definido por las relaciones entre estudiantes, profesores, grupos de profesores.

Habiendo realizado una descripción de los enfoques propuestos desde el campo de la Educación Matemática y habiendo reconocido la variedad de estos, se cuenta con un marco de referencia que podría parecer suficiente para categorizar los documentos resultantes de la investigación en Educación Matemática, relacionados con la enseñanza de la derivada. Sin embargo, consideramos que no es así. Creemos que en tanto que estamos trabajando en relación con el conocimiento y saber del profesor de Matemáticas, debemos incorporar otras categorías, provenientes del campo de investigación sobre la Educación del profesor de Matemáticas. En esta dirección, Guacaneme y Mora (2011) realizan una propuesta de líneas de investigación del campo, que permiten organizarlo y que ofrecen la posibilidad de categorizar los trabajos de investigación sobre la enseñanza de la derivada como objeto de conocimiento de los profesores en formación o en ejercicio y, por supuesto, de los formadores de profesores. Por ello, a continuación, se describe el campo y las líneas o planos de investigación que proponen los autores citados.

2.3.2 Líneas⁹ en el campo de la Educación del profesor de Matemática

Este campo es analizado por Guacaneme y Mora (2011) como resultado de reflexiones dentro de la línea de investigación a la que pertenecen en la Universidad Pedagógica Nacional, y de la revisión detallada de las propuestas hechas por Cardeñoso (2001), Ball (2009), entre otros ponentes investigadores sobre la Educación del profesor de Matemáticas. En el documento (Guacaneme & Mora, 2011) se describen cuatro planos o líneas en las que afirman, se pueden organizar las investigaciones realizadas en este campo. A continuación, hacemos una descripción de las líneas propuestas por los autores, con el fin de reconocer en qué consisten los planos en los cuales se ubicaron algunos de los documentos seleccionados como parte de este trabajo.

2.3.2.1 La línea/plano prácticas profesionales de los profesores de Matemáticas

Se centra en el estudio de las acciones que el profesor de Matemáticas lleva a cabo en su desempeño docente, en general en las instituciones educativas; las interacciones en las que el profesor se vincula (casi siempre con colegas) para promover aprendizajes

⁹ La propuesta de los autores, las definen también como planos de investigación.

profesionales en comunidades de práctica (de tamaños muy variados); o, el aprendizaje que el profesor logra a partir del estudio personal/individual sobre asuntos que le conmina su práctica.

2.3.2.2 La línea/plano conocimiento profesional del profesor de Matemáticas

En esta línea se incluyen las investigaciones referidas a: las creencias, visiones y concepciones de los profesores de Matemáticas; los conocimientos, destrezas o competencias de los profesores; las diferentes expresiones de la relación entre teoría y práctica o, si se prefiere, entre la fundamentación conceptual y el conocimiento práctico, o entre el discurso y la acción; o el aprendizaje logrado a través de la práctica reflexiva y la reflexión como actividad que promueve el aprendizaje desde/para la práctica.

2.3.2.3 La línea/plano formación de los profesores de Matemáticas

Esta línea incluye investigaciones referidas a: las prácticas docentes que realizan los formadores y los procesos de aprendizaje en que se vinculan los futuros profesores o los profesores en ejercicio en el marco de programas de educación de profesores de Matemáticas (sean presenciales, a distancia, virtuales, etc.); las tareas que el formador diseña o propone en el marco de los programas de educación de profesores; o, la gestión del conocimiento de fundamentación conceptual y de las experiencias de formación a través de las prácticas iniciales en los programas de educación de profesores. Cabe mencionar que en esta línea por ejemplo, está ubicado nuestro trabajo, ya que tiene la intención de proponer tareas que el profesor de un curso de Didáctica del Cálculo, debería diseñar o proponer, una vez conozca los aportes los enfoques propuestos para el campo de la Educación Matemática, le brindan a la enseñanza sobre la derivada.

2.3.2.4 La línea/plano conocimiento profesional del formador de profesores de Matemáticas

Incluye el estudio de la línea del conocimiento profesional del profesor (formador de profesores) de Matemáticas, el estudio de: las creencias, visiones y concepciones de los formadores de profesores de Matemáticas; los conocimientos, destrezas o competencias de los formadores de profesores; las diferentes expresiones de la relación entre teoría y práctica o, si se prefiere, entre la fundamentación conceptual y el conocimiento práctico, o entre el discurso y la acción, de los formadores de profesores; o el aprendizaje logrado a

través de la práctica reflexiva y la reflexión como actividad que promueve el aprendizaje desde/para la práctica de formación de profesores de Matemáticas.

2.4 Conocimiento didáctico del contenido del profesor de Matemáticas

¿Cuáles son las principales cuestiones que, sobre el profesor de Matemáticas, se han elaborado desde que Shulman (1986, p. 9-10) introdujo la noción de conocimiento pedagógico de contenido y se puso de manifiesto que no bastaba con el conocimiento profundo de la disciplina (y algún conocimiento de pedagogía) para tener éxito como profesor? (Gómez, 2007, p. 2)

Históricamente, en las décadas de los ochenta y noventa, Estados Unidos y parte de Europa, se consideró que el conocimiento sobre el contenido a enseñar se había convertido en un elemento insuficiente y limitativo para la enseñanza. Dos de los factores que mostraron el surgimiento del conocimiento didáctico del contenido [CDC], fueron los hechos registrados en dos documentos escritos por Shulman en el año 1986 (Shulman, 1986a, 1986b). Algunos de ellos son enunciados por Pinto (2010) y son recapitulados a continuación:

- *La necesidad de profesionalizar la enseñanza.* A principios de los ochenta era irritante reconocer que aún habían profesores que se dedicaban a esta labor sin que tuviesen idea del significado de la profesión y de lo que implicaba enseñar.
- *Recuperar y asignarle un justo valor al conocimiento del contenido.* Shulman y sus colaboradores se interesaron por crear un programa llamado “Desarrollo del conocimiento para la enseñanza” que, sin intentar restarle importancia al contenido pedagógico y los métodos en la formación de habilidades docentes, los autores quisieron darle un lugar justo al conocimiento de la disciplina y, además, crear un modelo que integrara el conocimiento del contenido con el conocimiento pedagógico.

Es así como Shulman y sus colaboradores deciden proponer una corriente de investigación llamada “El conocimiento, base de la enseñanza”, cuya intención final era estudiar el conocimiento profesional del profesor. Para ello, propusieron tres categorías iniciales (Shulman, 1986a) con las cuales comienza el estudio sobre el conocimiento que se desarrolla en las mentes de los profesores: *el conocimiento del contenido del área específica, el conocimiento didáctico del contenido a enseñar y el conocimiento curricular.*

Años más tarde, reconoce otras categorías, en donde el CDC lo describe como el conocimiento pedagógico del contenido [PCK, por sus siglas en inglés (*Pedagogical Content Knowledge*)].

Es nuestra intención describir el CDC que propone Shulman (1986b), para reconocer qué tipo de conocimiento, se propone, puede ser asumido en cursos sobre Didáctica del Cálculo. A continuación, describimos lo que representa este conocimiento en el desarrollo profesional del profesor de Matemáticas, descrito por Sulman y enunciado por Pinto (2010).

1. Representa una mezcla entre el contenido a enseñar y la pedagogía, por la que se llega a la comprensión de cómo unos determinados temas y problemas se organizan, se representan y se adaptan a los diversos intereses de los alumnos y se presentan para su enseñanza.
2. Representa las distintas formas de formulación y representación del conocimiento que hacen este comprensible a otros (bien podríamos, definirlo como la transposición didáctica). Incluye el conocimiento sobre lo que hace que un tema sea fácil o difícil de aprender, como las concepciones y creencias que los estudiantes traen consigo para aprender un tema o los temas aprendidos con anterioridad. Es por ello que el profesor debe ser fiel por una parte al significado del objeto matemático a enseñar, pero a su vez a las comprensiones que los estudiantes son capaces de alcanzar. El profesor debe crear puentes entre los significados inherentes al contenido curricular y a las ideas y significados que los estudiantes crean de ello.
3. Además, el profesor requiere reconocer que hay dos transposiciones: la del conocimiento disciplinar al conocimiento a enseñar, y de este al conocimiento aprendido.

Es por ello que el CDC desde la formación inicial, se convierte en un componente altamente importante para la formación eficaz del profesor de Matemáticas y debería ser enseñado, tal y como lo enuncia Pinto (2010), referenciando a Shulman (1993), ya que:

1. El CDC es una forma de conocer lo que el profesor de Matemáticas posee (o debería poseer) que lo distingue en su forma de pensar y de razonar de las meras

características de un experto en la disciplina, estableciendo una diferencia entre el matemático y el educador matemático.

2. El CDC es un conocimiento base para la enseñanza; es un acopio de conocimientos y habilidades que hace que se profesionalice la enseñanza, que incluye técnicas racionales y capacidades de juicio, improvisación e intuición. En la práctica, permite que el profesor reflexione en la acción y sobre la acción, cuando se enfrenta a problemas de enseñanza, corrigiendo algunas dificultades y planeando nuevas propuestas, con lo cual los profesores desarrollan nuevos conocimientos e intuiciones.

La propuesta de Shulman, sin lugar a duda, ha sido causa del interés por investigar en la formación permanente del profesorado. Una de las causas que justifican esta proposición, es la participación de universidades como *University of California*, *University of Vermont*, *Central Connecticut State University*, *Escuela de Educación y estudios profesionales*, entre otras, que hacen investigación para la formación permanente del profesorado, e incluyen como parte de sus programas algunos cursos sobre el CDC de la disciplina específica a enseñar. El conocimiento de este trabajo, nos hace sentir que en Colombia, estamos avanzando en este mismo proceso por reconocer que se requieren espacios dentro de la formación de profesores de Matemáticas, donde se aprenda sobre el CDC de una disciplina específica, como son los cursos sobre enseñanza o didáctica del Cálculo, cuyo interés es evidente en este trabajo de investigación.

Una vez hemos reconocido dentro de la comunidad de Educación Matemática, los avances desarrollados en esta línea, nos convencemos más que la Educación del Profesor de Matemática debe ser vista como un campo que, tuvo sus inicios dentro del campo de la Educación Matemática, puede evidenciarse como un campo propio, con la creación de publicaciones propias que contienen trabajos sobre la formación continua del profesor de Matemáticas. Aunque en este punto, hay discusión por parte de los profesores investigadores, reconocemos que hay elementos del campo de la Educación del Profesor que no son atendidos por el campo de la Educación Matemática. Uno de ellos, y es el que nos interesa como profesores de futuros profesores de Matemáticas, es encontrar elementos que puedan brindarle a los cursos sobre el CDC de una disciplina específica, en nuestro caso sobre la enseñanza del Cálculo, sólidos currículos y propuestas de

enseñanza, que permitan consolidarlos como cursos de alto nivel didáctico en la disciplina y que le brinden a los profesores en formación herramientas eficaces para su enseñanza.

CAPÍTULO 3: UBICACIÓN DE LAS INVESTIGACIONES SOBRE DIDÁCTICA DE LA DERIVADA EN CAMPOS Y ENFOQUES

3.1 Introducción

En este capítulo se encuentran los documentos que fueron seleccionados finalmente, a partir de la búsqueda hecha en revistas electrónicas, memorias de congresos y tesis de maestría y doctorado, así como también los documentos que profesores investigadores en el campo nos compartieron. El proceso de selección de los documentos se basó en la búsqueda por títulos que nos permitieran evidenciar que eran investigaciones relacionadas con la Didáctica sobre la derivada, seleccionando de esta forma cuarenta y cinco documentos; una vez fueron seleccionados los documentos con esta primera estrategia, se revisaron sus resúmenes, lo que nos permitió hacer una mejor selección para escoger veinticinco, los cuales enunciamos a continuación:

1. Un indicador de la comprensión de la derivada. El uso de las relaciones lógicas (Sánchez-Matamoros, García, & Llinares, 2007)
2. Interpretaciones erróneas sobre los conceptos de máximos y mínimos en el Cálculo diferencial (S. Moreno & Cuevas, 2004)
3. Descripción de los niveles del comprensión del concepto de derivada (Salazar, Díaz, & Bautista, 2009)
4. Estrategias de intervención pedagógica en el proceso de aprendizaje-enseñanza de las Matemáticas para el concepto de derivada (Rendón & Esteban, 2007)
5. La derivada como objeto matemático y como objeto de enseñanza y aprendizaje en profesores de matemática en Colombia (Badillo, 2003)
6. El desarrollo del esquema de derivada (Sánchez-Matamoros, Blanco, & Llinares, 2006)
7. Interacciones en un escenario en línea (Montiel, 2005)
8. La derivada a la Caratheodory, una nueva concepción en el aprendizaje y la enseñanza del cálculo (Vargas, Torres, & Quintero, 2009)

9. Epistemología de la derivada como fundamento del Cálculo Diferencial (Mateus, 2011)
10. Sobre el estatus de la noción de derivada: de la epistemología de Joseph Louis Lagrange al diseño de una situación didáctica (Cantoral & Mirón, 2000)
11. Derivadas y funciones (Font, 2005a)
12. Procedimientos para obtener expresiones simbólicas a partir de las gráficas: Aplicaciones de las derivadas (Font, 1999)
13. Durabilidad y significado del conocimiento matemático. El caso del concepto de la derivada (Hähkiöniemi, 2008)
14. La función derivada a partir de la visualización de la linealidad local (Robles, castillo, & Font, 2010)
15. Formas de argumentación en el cálculo de la función derivada de la función $y = x^2$ sin usar la definición de derivadas por límites (Font, 2009)
16. Representaciones ostensivas que pueden ser activadas en el cálculo de $f'(x)$. El caso de la función seno (Font, 2000)
17. La derivada y el Cálculo. Una mirada sobre su enseñanza a través de los textos y programas (Dolores, 2007)
18. Una propuesta para la introducción del concepto de derivada desde la variación. Análisis de resultados (Vrancken, Engler, & Müller, 2008)
19. Pensamiento y lenguaje variacional: una aplicación al estudio de la derivada (Sánchez & Molina, 2006)
20. Teachers' mathematical knowledge and pedagogical practices in the teaching of derivative (Potari, Zachariades, Christou, Kyriazis, & Pitta-Pantazi, 2007)
21. El papel del profesor en la enseñanza de la derivada (Gavilán, 2006)
22. Faceta epistémica del conocimiento didáctico-matemático sobre la derivada (L. R. Pino-Fan, Godino, & Font, 2011)
23. Un estudio sobre el conocimiento didáctico del contenido (CDC) de profesores de matemáticas que enseñan Cálculo diferencial a estudiantes de carreras económicas (García, 2009)
24. La comprensión de la derivada como objeto de investigación en Didáctica de la Matemática (Sánchez-Matamoros, García, & Llinares, 2008)

25. Key epistemic features of mathematical knowledge for teaching the derivative (L. Pino-Fan, Godino, Castro, & Font, 2012).

A continuación, se encontrará una descripción de los anteriores documentos que han sido ubicados dentro del campo de la Educación Matemática y la Educación del Profesor de Matemáticas, en los enfoques y líneas propuestos en cada uno de ellos. Se da inicio con la descripción de los documentos que están ubicados en el campo de la Educación Matemática, dentro de alguno de los siete enfoques propuestos por Font (2002) y se culminará el capítulo con la descripción de los documentos ubicados en el campo de la Educación del profesor de Matemáticas, en alguna de las líneas propuestas por Guacaneme y Mora (2011). Cabe resaltar que la descripción de algunos de los documentos no responde a todas las preguntas que como resultado de las investigaciones queremos obtener, ya que algunos de ellos se basan en escritos bastante resumidos de la investigación, y no fue posible acceder al documento que describiera la investigación a detalle. Sin embargo, consideramos que los documentos leídos, nos brindaron elementos para poder ubicarlos en el plano o enfoque en el que los encontrará.

Al finalizar la descripción de las investigaciones ubicadas en los diferentes enfoques, escribimos unas conclusiones de lo que se ha investigado en cada enfoque y de algunos aportes que consideramos hace al campo de la Educación matemática.

3.2 Documentos ubicados en los enfoques de la Educación Matemática

Los documentos que se describirán a continuación están ubicados dentro de alguno de los enfoques propuestos por Font para este campo como lo son: Cognitivo, Constructivismo radical, Constructivismo social, Sistémico, antropológico, semiótico y Crítico, descrito cada uno de ellos en el capítulo anterior. No pretendemos describir cada una de las conclusiones de las investigaciones, pero sí resaltar aquellas intenciones y conclusiones que nos permitieron ubicarla en este campo. Es de destacar que dicha clasificación resultó desafiante y que sugerimos que esta no debe ser tomada como un resultado final, sino como un comienzo por tratar de darle un orden a las distintas investigaciones que dentro de los campos encontramos. No obstante, esta clasificación nos fue útil para determinar algunos aportes que realizan las investigaciones desde los enfoques.

3.2.1 Documentos ubicados en el Enfoque Cognitivo

En este enfoque se encuentran ubicados seis de los veinticinco documentos seleccionados, como resultado de investigaciones realizadas por profesores e investigadores en el campo como: Salvador Llinares, Gloria Sánchez-Matamoros, María Mercedes García, Salvador Moreno, Hernán Díaz, Claudia Salazar, entre otros. Una de las características comunes de los documentos aquí ubicados es su interés por describir por medio de niveles o esquemas¹⁰, la comprensión de los estudiantes en el aprendizaje de la derivada. A continuación, hacemos una breve descripción de los documentos, descritos cada uno de ellos de forma cronológica:

3.2.1.1 La derivada como objeto matemático y como objeto de enseñanza y aprendizaje en profesores de matemática de Colombia. "La derivada un objeto a caballo entre la Matemática y la Física" (Badillo, 2003)

Esta investigación es presentada como tesis doctoral en la Universitat Autònoma de Barcelona por la profesora Edelmira Badillo, dirigida por la Doctora Carmen Azcárate. El objetivo de esta investigación es identificar y describir la relación entre el conocimiento del contenido matemático y el CDC con relación al concepto de derivada en profesores de Matemáticas en ejercicio. El trabajo se centra en dos momentos: i) describir la naturaleza y estructura de las formas de conocer el concepto de derivada como objeto matemático y como objeto de enseñanza y aprendizaje en profesores colombianos que enseñan en secundaria¹¹, y ii) caracterizar las tareas que propone el profesor para introducir y evaluar dicho concepto.

En este trabajo participaron cinco profesores que enseñan Cálculo en el nivel de secundaria. Para el primer momento, en su propuesta Badillo adapta la Teoría APOE con el fin de llegar a la construcción de la descomposición genética de la derivada y a la comprensión del esquema del concepto en las dimensiones gráfica, numérica y algebraica. De esta primera parte de la investigación, Badillo evidencia que los profesores en general tienen conocimientos sobre la derivada, aunque nota dificultades para comprender el paso de la función a la derivada de la misma en el ambiente gráfico. Como caracterización de

¹⁰ Basados en la Teoría APOE o APOS

¹¹ El documento refiere secundaria tanto a profesores de la básica como de la media.

las tareas que proponen los profesores para introducir dicho concepto se encuentra el uso de la notación incremental debido a la importancia que se le puede otorgar a los libros de texto y a la tradición histórica de utilizar los incrementos por influencia de la Física. Como conclusiones finales en cuanto a la Didáctica, la autora evidencia un problema en la enseñanza-aprendizaje de la derivada y es la no diferenciación entre $f'(x)$ y $f'(a)$, en otras palabras, la diferencia entre la función derivada y la derivada en (o para) un punto específico.

Dada la importancia que pone la investigación por reconocer lo que comprenden los profesores sobre la derivada y sobre su forma de enseñarla, podríamos ubicar este trabajo en el campo de la Educación del Profesor de Matemáticas, dentro del plano del Conocimiento Profesional del profesor; sin embargo, la razón por la cual hemos decidido ubicarla dentro del Enfoque Cognitivo es por su evidente interés por conocer los niveles de comprensión propios de la teoría APOE sobre la derivada en los profesores.

Este trabajo de investigación es un claro ejemplo de las dificultades que se presentan en la clasificación de los documentos sobre Didáctica de las Matemáticas, pero también es un trabajo que nos permite reconocer los diferentes enfoques o perspectivas nos brinda la Didáctica de las Matemáticas para establecer puentes entre la Educación Matemática y la Educación del profesor de Matemáticas. Debemos sin embargo, aclarar que esta investigación ha sido ubicada en el enfoque Ontosemiótico por Font (2005b), lo que nos muestra que investigaciones como estas no nos permiten tener una posición clara frente a la ubicación dentro de los enfoques (esto se debe también a que usualmente no se centran en un solo enfoque para investigar).

3.2.1.2 Interpretaciones erróneas sobre los conceptos de máximos y mínimos en el Cálculo diferencial (S. Moreno & Cuevas, 2004)

Este trabajo de investigación es presentado por la revista Educación Matemática de la Editorial Santillana. El documento presenta una reflexión inicial sobre el déficit de entendimiento del concepto de la derivada y su poca comprensión en la solución de problemas de máximos y mínimos. Con base en esta reflexión, los autores proponen un estudio acerca de las interpretaciones erróneas sobre los conceptos de máximo y mínimo en estudiantes de ingeniería y maestría, grupos en el cual hay profesores que han enseñado, en varias ocasiones, un curso de Cálculo Diferencial. La investigación muestra

inicialmente los resultados de un estudio exploratorio con profesores del Departamento de Matemáticas, en el cual se reconoce que de ocho profesores participantes, seis respondieron mal a un problema de maximizar el volumen de una caja construida a partir de una hoja con dimensiones establecidas (largo y ancho), ya que no tienen en cuenta el dominio o restricción que plantea el mismo problema.

Las conclusiones o resultados obtenidos al realizar la prueba con estudiantes de maestría y de ingeniería, no dista mucho de la prueba exploratoria, ya que en sus respuestas se contempla la idea de que para hallar los puntos máximos o mínimos de una situación, se debe usar el criterio de la segunda derivada, y no tienen en cuenta la restricción misma que el problema puede plantearles. Esto, se puede conjeturar, es resultado de una enseñanza acelerada y repetitiva, que está dejando de lado la esencia del concepto de derivada para convertirla solo en un proceso mecánico. Para la mayoría de los estudiantes, el Cálculo no es un cuerpo de conocimientos, sino "un repertorio de conductas y comportamientos imitativos" (Moise, 1984 citado por Moreno & Cuevas 2004, p.103), razón por la cual los autores proponen como trabajo posterior al presentado, diseñar una situación didáctica para la enseñanza de los conceptos de máximo y mínimo que puedan evitar interpretaciones inadecuadas.

Este trabajo de investigación, es ubicado dentro de este enfoque, al evidenciar su intención por el estudio de las concepciones de los estudiantes acerca de la derivada al resolver un problema; esto es mostrado a través del documento y de su propuesta de diseñar actividades que dé como resultado un aprendizaje significativo, lo cual es la teoría de aprendizaje del enfoque Cognitivo.

3.2.1.3 El desarrollo del esquema de derivada (Sánchez-Matamoros, et al., 2006)

El artículo es presentado como síntesis de una investigación cuya intención es el estudio del desarrollo de la comprensión del concepto de derivada con estudiantes de último año de bachillerato y primer año de la universidad, con edades entre los 16 y 18 años. Para ello, trabajaron los esquemas a través de las fases intra, inter y trans objetual, propuestas por Piaget & García (1983), con el cual describieron los niveles en los cuales se podrían encontrar los estudiantes.

Como conclusiones del trabajo de investigación, los autores describen: i) la importancia de reconocer los niveles por los que pasan los estudiantes en la construcción del esquema de la derivada, ya que permite mostrar una progresión en la construcción del esquema, identificando lo que significa llegar a comprender un concepto matemático; ii) que el esquema de la derivada está relacionado con la capacidad de los estudiantes de conectar elementos constitutivos del concepto durante la resolución de problemas.

Advertimos en la descripción del trabajo de investigación, un interés por reconocer los diferentes niveles (intra, inter y trans) por los que pasa un estudiante para comprender un concepto matemático, es por esta razón que ubicamos el documento en este enfoque.

3.2.1.4 Un indicador de la comprensión de la derivada. El uso de las relaciones lógicas. (Sánchez-Matamoros, et al., 2007)

Esta investigación es publicada en las memorias del Congreso de Investigación sobre la Educación Matemática XI. En el documento los autores presentan los resultados de una investigación en la cual describen los niveles por los que un estudiante puede pasar para comprender el concepto de la derivada. Su propuesta está basada en la teoría piagetiana y en los esquemas de desarrollo a través de los niveles intra, inter y trans-objetual; el objetivo de investigación es caracterizar, por medio de las relaciones lógicas entre diferentes elementos matemáticos del concepto de derivada, los diferentes niveles por los cuales puede pasar un estudiante cuando aprende el tema.

La investigación fue realizada con ciento cincuenta estudiantes, de los cuales cincuenta eran de primer año de la Licenciatura en Matemáticas, quienes ya habían tomado un curso de "Elementos de Análisis Matemáticos", por lo que consideraban, se encontraban en un nivel avanzado sobre el conocimiento del concepto de la derivada. Como resultados, la investigación les permite primero, pensar que la relación de equivalencia lógica entre elementos matemáticos presenta dificultades en algunos niveles de desarrollo del esquema de derivada y, segundo, les proporcionó información por la forma en la que parecía que se desarrollaba la comprensión del esquema de derivada.

3.2.1.5 Estrategias de intervención pedagógica en el proceso de aprendizaje-enseñanza de las Matemáticas para el concepto de derivada. (Rendón & Esteban, 2007)

Este documento, presentando en el 8° Encuentro Colombiano de Matemática Educativa en la modalidad de comunicación breve, exhibe un trabajo de investigación cuya finalidad es diseñar una propuesta metodológica que responda a las dificultades que surgen cuando se aborda el proceso de enseñanza y aprendizaje de la derivada, desde el análisis de las razones de cambio y sus distintas manifestaciones, con el fin que sea comprendida ampliamente la definición formal de la derivada, dejando de lado el uso del algoritmo en el cual usualmente se basa la enseñanza de la misma, ya que manifiestan –los autores– es importante que el profesor proponga estrategias de enseñanza capaces de generar en el estudiante la capacidad crítica y de desarrollo de sus estructuras mentales acordes con el pensamiento matemático.

La propuesta está basada en una enseñanza para la comprensión, cuyo marco metodológico está fundamentado en la teoría de Piaget & García (1983), citada por (Sánchez-Matamoros, et al., 2006), sobre los esquemas de los niveles de comprensión, con el fin de determinar cuál o cuáles de ellos alcanza el estudiante en el aprendizaje de la derivada.

Aunque este documento no presenta la propuesta que realizaron, los autores hacen una descripción de su intención con ella, lo que nos motivó a ubicar este trabajo de investigación en este enfoque, debido a su clara intención por trabajar los niveles de comprensión (intra, inter y trans) sobre el concepto de la derivada.

3.2.1.6 Descripción de los niveles de comprensión¹² del concepto de derivada. (Salazar, et al., 2009)

Este trabajo, publicado en la revista TEA (Tecné, Epistemis y Didaxis), es presentado como resultado de investigación de un estudio de caso con seis estudiantes de Licenciatura en Matemáticas de la Universidad Pedagógica Nacional en un curso de Cálculo diferencial.

¹² Los niveles de comprensión a los que refiere este documento y otros, son los que están basados en la teoría APOE. Niveles intra, inter y trans.

La intención del trabajo de investigación fue deducir el nivel de comprensión del concepto de derivada alcanzado por los estudiantes, teniendo como referencia los niveles intra, inter y trans objetual, propuestos por Piaget & García (1983-1989), y citados por Sánchez, (Sánchez-Matamoros, et al., 2006), para determinar las dificultades que pueden presentarse en la comprensión del concepto. Como resultados de la investigación, se evidencia que los estudiantes mantienen una notable dependencia por la expresión algebraica de la función y se reconocen las dificultades al transitar de la gráfica de la función hacia la gráfica de la función derivada; es decir, que hay una clara evidencia de un arraigo por la derivada como un proceso algorítmico, lo cual es reflejado en la notable dependencia por la representación algebraica de la función, razón por la cual se asume la existencia de un obstáculo para la comprensión compleja de la derivada.

Ubicamos este trabajo de investigación en este enfoque, por su evidente interés en la descripción de los niveles o esquemas de comprensión del concepto de la derivada.

3.2.2 Aportes de las investigaciones ubicadas en el enfoque Cognitivo

Cada uno de los documentos anteriormente descritos tiene una intención muy clara y es poder describir o determinar cuál es el nivel o los niveles por los que puede pasar un estudiante para comprender el concepto de derivada. A partir de ello, reconocemos los aportes al campo de la Educación Matemática que nos brindan investigaciones enfocadas en lo cognitivo, que pretendemos describir a continuación:

- i) La propuesta que realizan las investigaciones por conocer los niveles de comprensión de la derivada de los estudiantes y profesores –como es el caso del trabajo realizado por Badillo (2003)– revelan la dificultad de comprender la diferencia entre $f'(x)$ y $f'(a)$; parece que no hubo una propuesta de enseñanza que intentara mostrar la diferencia clara entre la derivada de la función y la derivada de la función en un punto específico a . Este reconocimiento para nosotros, profesores de la formación de inicial de los futuros profesores de matemáticas, nos debería llevar a buscar diferentes estrategias referentes a la enseñanza de la derivada, que permitan registrar la diferencia entre la derivada de la función y la derivada de la función en un punto específico.

Este tipo de dificultades son reconocidas también, cuando a un estudiante se le pregunta por la derivada de un número n , y se recibe por respuesta que es cero, respuesta que parece notar que no reconoce que un número no puede tener derivada, sino que es la función constante la que tiene como derivada la función constante cero.

- ii) Otra propuesta (Sánchez-Matamoros, et al., 2007) revela la gran dificultad existente de pasar gráficamente de la derivada de una función a la función dada y viceversa. Este resultado representa para los profesores de Matemáticas, la necesidad de realizar un trabajo sobre la derivada desde su representación gráfica, que acompañe el proceso algorítmico-algebraico para encontrar la derivada de una función dada su ecuación.
- iii) Tal como lo describen Salazar, (Salazar, et al., 2009), enunciando a Sánchez & Matamoros (2006), un aspecto común en la teoría de la comprensión, “es concebir la construcción de la comprensión de una noción matemática (derivada) a través de una metáfora de la construcción de un objeto que se puede manipular en sí mismo a través de un proceso que generalmente es realizado paso a paso” (p. 65). Basados en lo descrito anteriormente y en la teoría de Kaput (1985), descrita por Salazar, (Salazar, et al., 2009), quien afirma que para la comprensión de un objeto se debe recurrir a representaciones múltiples del mismo, los trabajos realizados en este campo resaltan en sus conclusiones la importancia de enseñar la derivada desde las diferentes representaciones, lo cual puede evidenciar una fortaleza para la comprensión de la derivada.
- iv) Si bien las investigaciones han determinado dificultades para comprender la derivada, algunas de ellas, han intentado hacer una propuesta de enseñanza sobre la derivada, enfatizando más en un análisis gráfico y numérico, que en solo el algebraico.
- v) Las distintas herramientas y teorías para intentar describir los niveles por los que pasa un estudiante (o profesor) para la comprensión del concepto de derivada, hace que el enfoque Cognitivo le brinde un instrumento válido a los campos de Educación

Matemática y Educación del profesor de matemáticas, como medio para buscar estrategias de enseñanza para que aquellos niveles por los que debe pasar un estudiante al aprender del concepto de derivada, sea el deseado desde lo que plantean dichas teorías. Este hecho, se convierte en un elemento valioso que describe claramente lo que se ha investigado en didáctica sobre la derivada desde este enfoque.

3.2.3 Documentos ubicados en el Enfoque Sistémico

En este enfoque se encuentran ubicados cuatro de los veinticinco documentos seleccionados en el campo de la Educación Matemática con autores como: Gisela Montiel, Angélica Vargas, Enrique Mateus y Ricardo Cantoral. Una de las características que se evidencia con mayor ímpetu en estas investigaciones es el esfuerzo por reconocer a la Didáctica de las Matemáticas como una disciplina autónoma, dejando de fundamentarse en disciplinas ajenas –como la psicología–. Para ello, las investigaciones están basadas en las teorías sistémicas de Brousseau y Chevallard, quienes intentan ampliar su mirada sobre la problemática didáctica, reconociendo que el problema no solo está en el conocimiento matemático del alumno, sino que también hay un asunto problemático con el saber matemático en sí mismo.

A continuación hacemos una breve descripción de los documentos, resaltando en cada uno de ellos, las intenciones y conclusiones que nos permiten ubicarlos en este enfoque.

3.2.3.1 Sobre el estatus de la noción de derivada: de la epistemología de Joseph Louis Lagrange al diseño de una situación didáctica. (Cantoral & Mirón, 2000)

Este trabajo de investigación publicado en la revista *Relime*, muestra el análisis de los efectos que la incorporación de la tecnología avanzada produce en la enseñanza de las Matemáticas, específicamente en el campo del análisis matemático, en las funciones f y f' . Este trabajo muestra como resultados que dicha incorporación tiene grandes ventajas didácticas que bien pueden ser consideradas para el aprendizaje de la derivada, ya que permite visualizar gráficamente comportamientos de las funciones derivadas que no son evidentes en el proceso algebraico; en su marco de referencia, los autores enuncian que para el análisis de un objeto matemático, se requiere de la adquisición de un lenguaje

gráfico que posibilite esencialmente la transferencia de campos conceptuales virtualmente ajenos a causa de las enseñanzas tradicionales, “estableciendo un mejor isomorfismo entre el álgebra básica y el estudio de las curvas, que entre el lenguaje algebraico y el lenguaje gráfico” (Cantoral & Mirón, 2000, p. 269). Su enfoque es Sistémico y su teoría de trabajo está basada en las situaciones didácticas, razones que nos conducen a ubicarlo en este enfoque. Aunque hubiésemos querido hacer una descripción más detallada de la investigación, el documento encontrado no nos permitió dar respuesta a preguntas que de los resultados de investigación quisiéramos reconocer.

3.2.3.2 Interacciones en un escenario en línea. El papel de la socioepistemología en la re-significación del concepto de derivada (Montiel, 2005)

El documento es presentado en la revista Relime. Este trabajo de investigación está fundamentado en la teoría de las situaciones didácticas, cuya intención es describir las interacciones del sistema didáctico en un escenario virtual, particularmente alrededor del estudio de las nociones de la derivada. Los profesores participantes son estudiantes de la maestría en Ciencias en Matemática Educativa del CICATA del IPN¹³ de distintas nacionalidades que enseñan en el nivel medio superior. En su propuesta, basada en la teoría socioepistemológica, asume que la noción de derivada “solo será adquirida hasta que esta sea vista como una organización de las variaciones sucesivas” (Montiel, 2005). El documento presenta una clara descripción de las actividades que de manera *asincrónica* propone el profesor del curso a los estudiantes (profesores en ejercicio) y la ruptura del contrato didáctico que se presenta en algunas de las actividades propuestas, debido a que los estudiantes responden a las preguntas del profesor con argumentos analíticos, (procesos algebraicos) y el objetivo del profesor es que construyan argumentos desde la covariación. Durante el desarrollo de las actividades por medio de discusiones con los equipos de trabajo y el profesor, se evidencian las dificultades de la articulación compleja entre f , f' y f'' .

Dada la postura clara que plantea el documento sobre la propuesta de investigación desde el sistema didáctico es ubicado en este enfoque.

¹³ Centro de Investigación en Ciencia Aplicada y Tecnología Avanzada del Instituto Politécnico Nacional.

3.2.3.3 La derivada a la Caratheodory, una nueva concepción en el aprendizaje y la enseñanza del cálculo. (Vargas, et al., 2009)

Este trabajo de investigación fue publicado en las memorias del 10° Encuentro Colombiano de Matemática Educativa. En él, las autoras hacen una breve descripción sobre la noción de derivada enseñada actualmente en el nivel escolar o universitario, propuesta por Cauchy en 1823. Realizan una breve presentación de la propuesta hecha por Caratheodory en 1954 que simplifica los procesos demostrativos de algunos teoremas de Cálculo diferencial, y que no es muy conocida para su enseñanza. Como base de su investigación presentan los importantes resultados de un trabajo realizado en el año 2007 en la Universidad de Cundinamarca sobre un estudio de la derivada de Caratheodory y se plantean cuál de las dos nociones de derivada permiten una mejor comprensión y facilidad en los procesos de demostración y álgebra de derivadas de funciones polinómicas. Con esto, pretenden ver las dificultades de los estudiantes para comprender el concepto de derivada y hacer una propuesta que permita una mejor comprensión del concepto con material didáctico.

Esta investigación, aunque en el momento que es presentada en el 10° ECME y adjuntada en las memorias del mismo, aún no había sido culminada, deja entrever su intención por discutir asuntos propios sobre el problema con el saber matemático en sí mismo, buscando otras formas de concebir la derivada sin necesidad de trabajar los límites (a manera de ejemplo). Esta intención y la construcción un material didáctico (que sería interesante conocerlo) para la enseñanza de la derivada, es lo que nos lleva a que asumamos que hay un proceso de transposición didáctica entre el saber sabio y el esfuerzo por hacerlo un saber a enseñar, lo que nos hace a ubicarlo en este enfoque.

3.2.3.4 Epistemología de la derivada como fundamento del Cálculo Diferencial (Mateus, 2011)

Este documento es presentado en la revista de Voces y Silencios, una revista latinoamericana de educación. En este trabajo de investigación el profesor Enrique Mateus tiene como objetivo comparar qué concepción epistemológica del concepto de derivada incluye los trabajos de Leibniz y Newton, de tal forma que se puedan caracterizar los obstáculos epistemológicos que involucra el concepto como una forma de reconocer las falencias que pueden tener los estudiantes al aprender el concepto. Una de las propuestas de plantea Mateus es que el estudiante debe tener acceso al llamado "saber sabio" a

través de los textos de ámbito escolar, de los cuales ubica como ejemplos los libros de Tom Apostol (tomo I, segunda edición, 1978) y de Roland E. Larson (tercera edición, 1997).

Debemos hacer claridad en que la intención del trabajo no es hacer una propuesta didáctica a través de teorías del enfoque Sistémico para la enseñanza de la derivada, sino en determinar cuáles pueden ser los obstáculos epistemológicos para la comprensión del concepto, como un primer acercamiento para dar respuesta al problema que el conocimiento matemático tiene en sí mismo. Es por esta razón, que creemos este documento debe estar ubicado en este enfoque.

3.2.4 Aportes de las investigaciones ubicadas en el Enfoque Sistémico

A partir del análisis de los documentos que finalmente fueron ubicados en este enfoque, podemos reconocer el énfasis que ponen en problematizar el conocimiento matemático en sí mismo, y la importancia de generar situaciones didácticas que permitan reconocer que el conocimiento matemático que el estudiante tiene no es un proceso mental, sino que lo determinan otros factores. A continuación hacemos una descripción de ellos:

- i) En el documento de Montiel (2005) por medio de la teoría de las situaciones didácticas describe el sistema didáctico en escenarios virtuales, la ruptura del contrato didáctico en algunas de las tareas propuestas y la necesidad de discutir la validez de un enunciado o conclusión a la que llega un profesor en una tarea, entre otros elementos, que nos permite considerar la situación escolar como un *sistema* y a establecer relaciones entre el sistema enseñante y el sistema enseñado.
- ii) Documentos como el de Mateus (2011), que fundamentaron su estudio sobre el conocimiento sabio acerca de la derivada, nos permiten conocer la necesidad de estudiar primeramente un modelo epistemológico que contenga el objeto matemático que se pretende enseñar, que dicho en otras palabras quiere decir, que antes de enseñar, es necesario problematizar el contenido matemático a enseñar. Este trabajo de investigación reconoce como aspecto relevante que la enseñanza tradicional de la derivada tiene un alto contenido procedimental y algorítmico, y manifiesta que el

interés debe estar puesto es en la comprensión¹⁴ de los procesos matemáticos más que en la ejecución de rutinas.

- iii) El trabajo de Cantoral (2000) nos permite reconocer la importancia de la inclusión de las nuevas tecnologías al aula de clases, ya que considerando que para aprender sobre un objeto matemático, es necesario estudiarlo desde todas sus representaciones, entonces la adquisición de un lenguaje gráfico se convierte en una herramienta importante en la comprensión del concepto. Este lenguaje se puede mediar de manera particular con apoyo en la tecnología, lo cual genera condicionantes al aprendizaje.

3.2.5 Documentos ubicados en los Enfoques Semiótico y Ontosemiótico

En este enfoque se encuentran ubicados ocho de los veinticinco documentos seleccionados en el campo de la Educación Matemática con autores como: Vicenç Font, Markus Hähkiöniemi, A. Del Castillo, Juan Díaz Godino, Luis Pino Fan, entre los más destacados. Una de las características que se evidencia con mayor fuerza en estas investigaciones es el reconocimiento que la actividad humana no puede ser vista desde una sola perspectiva, sino que se hace necesario la inclusión de otras disciplinas como la antropológica, psicológica, lingüística, sociológica, entre otras, buscando así, tal como lo propone el enfoque, una unificación de las teorías antropológica, constructivista, sistémica y sociológica.

A continuación hacemos una breve descripción de los documentos, resaltando en cada uno de ellos las intenciones y conclusiones que nos permiten ubicarlos en este enfoque.

3.2.5.1 Procedimientos para obtener expresiones simbólicas a partir de las gráficas. Aplicaciones de las derivadas (Font, 1999)

Este trabajo de investigación es presentado como tesis doctoral por el profesor Vicenç Font en el año 1999, dirigida por el Doctor Joseph María Nuñez Espallargas para optar el título de Doctor en Filosofía y Ciencias de la Educación en la Universidad de Barcelona. Su

¹⁴ El concepto de comprensión refiere a la acción de comprender y a la facultad, capacidad o perspicacia para entender y penetrar las cosas. La comprensión es, a su vez, una actitud tolerante y el conjunto de cualidades que integran una idea" (Diccionario de la lengua española, 2001). Tomado de (Montiel, 2011, p.18)

trabajo está basado en la necesidad de generar una enseñanza más apropiada y menos descontextualizada, según su experiencia profesional inicial que bien relata en el capítulo introductorio. El objetivo de investigación fue determinar el significado que los alumnos dan a los conceptos matemáticos que aparecen en la "Unidad Didáctica" de un libro de texto sobre la *Introducción a la Derivada*, así como el proceso de construcción de los significados como una consecuencia de la enseñanza y de la complejidad y limitaciones que implica el aula.

En su trabajo resalta las tres clases de significados del contenido: el significado del contenido en la institución matemática, el significado del contenido en la institución escolar y el significado personal. Entre los aportes que da este trabajo al campo de la Educación Matemática, se encuentran:

- i) La recuperación de procedimiento de cálculo de las derivadas a partir de gráficas, desarrollados en el siglo XVII por medio de programas informáticos.
- ii) Un tratamiento a los ostensivos asociados a la función y a la función derivada, asociado en el cálculo de las funciones derivadas.
- iii) Elaboración de un modelo para el diseño, implementación y evaluación de unidades didácticas basado en la teoría del significado institucional y personal de los objetos matemáticos aplicable a otros contenidos específicos.

Por este último alcance y aporte que hace al campo de la Educación Matemática, este trabajo de investigación es ubicado en el enfoque Ontosemiótico. El documento es clasificado por el mismo profesor Font (2005b) en este enfoque.

3.2.5.2 Representaciones ostensivas que pueden ser activadas en el cálculo de $f'(x)$. El caso de la función seno (Font, 2000)

Este trabajo presentado por el Doctor Font, está escrito como capítulo de libro. En él describe actividades para que los estudiantes, por propia iniciativa u orientados por el profesor, puedan realizar traducciones entre las diferentes formas de representación ostensivas de la función $f'(x)$ y $f(x)$. Una vez son analizadas las actividades que permiten las traducciones entre las representaciones ostensivas de las funciones, analizan y comparan diferentes técnicas de cálculo de la derivada de la función seno específicamente, desde el punto de vista de las representaciones ostensivas implicadas; describen un cuadro de técnicas que se muestra a continuación en la Tabla 2 y del cual se

puede analizar que a medida que se incluyen más representaciones ostensivas (entendiendo por ostensivo que se puede mostrar a otro directamente (Font, 2000, p.16)), se puede evidenciar una disminución en el rigor. Esto, plantea el autor, lo lleva a considerar que el número de representaciones implicadas en una actividad ha de ser un elemento tanto o más importante, que el rigor o la generalidad del procedimiento.

Tabla 2. Cuatro técnicas para calcular la derivada de la función seno

Método tradicional (Técnica 1)	Expresión simbólica de $f(x)$ • •Expresión simbólica de $f'(x)$
Alternativa 4 (Técnica 4)	Gráfica de $f(x)$ /Expresión simbólica de $f(x)$ • • Expresión simbólica de $f'(x)$
Alternativa 2 (Técnica 3)	Expresión simbólica de $f(x)$ • •Gráfica de $f'(x)$ • • Expresión simbólica de $f'(x)$
Alternativas 1 y 3 (Técnica 2)	Gráfica de $f(x)$ • •Tabla de $f'(x)$ • •Gráfica de $f'(x)$ • • Expresión simbólica de $f'(x)$

Fuente: Vicenc Font 2000, *Representaciones ostensivas que pueden ser activadas en el cálculo de $f'(x)$. El caso de la función seno* Pág. 15

Dada la importancia que evidenciamos en la investigación por las representaciones del objeto matemático, ubicamos este trabajo en el presente enfoque.

3.2.5.3 Derivadas y funciones (Font, 2005a)

Este trabajo de investigación es presentado en el XXI Coloquio Distrital de Matemáticas y Estadística. En él, el profesor Font hace una descripción del importante aporte que desde la Didáctica de las Matemáticas se ha hecho a la enseñanza de la función; un ejemplo de ello, se puede evidenciar en la revisión de las unidades didácticas o propuestas que hacían los libros de texto hacen veinte años y las forma como las describen ahora. Estos cambios han permitido reconocer a la función desde sus representaciones¹⁵, y conocer cuándo una representación nos puede facilitar la enseñanza y cuándo puede ocasionar una mayor confusión en el estudiante.

En esta dirección, describe la manera como se pueden considerar de manera simultánea una función y la función derivada, entendiendo de ello que el cálculo de $f'(x)$ a partir de

¹⁵ La expresión analítica, gráfica, numérica y la expresión verbal.

$f(x)$ se puede interpretar como un proceso en el que se pueden considerar tres subprocesos: traducciones y conversiones entre las distintas formas de representar $f(x)$; el paso de una forma de representación $f(x)$ a una forma de representación ostensiva de $f'(x)$; traducciones y conversiones entre las distintas formas de representar $f'(x)$. Como conclusiones del documento, el profesor Font resalta la importancia de darle un buen uso a los sistemas de representación con la derivada, ya que el uso excesivo e inadecuado de ellos, puede ocasionar en el estudiante mayores dificultades en el aprendizaje de la derivada. Es por ello, que ubicamos este documento en el enfoque Semiótico, tal y como lo describe Font en la introducción de este documento.

3.2.5.4 La derivada y el Cálculo. Una mirada sobre su enseñanza a través de los textos y programas. (Dolores, 2007)

En este documento, el profesor Dolores presenta un análisis acerca de la enseñanza de la derivada desde los textos más usados para la enseñanza del Cálculo diferencial y de los programas de estudio. En él describe cuatro textos, donde analiza el concepto de derivada y muestra que este es mostrado a través de las aproximaciones numéricas de los incrementos, razonando la sucesión de cocientes $\Delta y/\Delta x$ cuando a Δx se le asignan valores muy cercanos a cero; una vez realizan esta descripción, relatan las reglas de derivación y de forma tardía se presenta la representación geométrica de la derivada.

Tabla 3. Objetivos que declaran los programas de Cálculo Diferencial relativos a la derivada

TABLA 4. OBJETIVOS QUE DECLARAN LOS PROGRAMAS DE CALCULO DIFERENCIAL RELATIVOS A LA DERIVADA		
DGETI	COBACH	PREPARATORIAS UAG
Interpretar la razón de cambio promedio como una rapidez de variación.	Por medio de los problemas de velocidad instantánea de un móvil o pendiente de la recta tangente a una curva que conceptualice y obtenga la definición de derivada.	El alumno interpretará gráficamente el concepto de derivada.
Interpretar la rapidez de variación instantánea como el límite de la rapidez de variación en un punto.	Utilice la definición derivada en la derivación de funciones polinomiales y obtenga algunas fórmulas y reglas de derivación.	
Analizar bajo qué condiciones una función es derivable.		

Fuente: Dolores, 2007. *La derivada y el Cálculo. Una mirada sobre su enseñanza a través de los textos y programas* p. 186

Por otra parte, al analizar la intención de los cursos de cálculo que abordan la derivada, se encuentra una ruptura con la intención del texto que toman como guía, ya que dentro de los objetivos –como se describen en la Tabla 3– la intención de los cursos de las escuela preparatorias como DGETI¹⁶, COBACH¹⁷ y UAG¹⁸, es interpretar la razón de cambio como una rapidez de variación, proponer problemas de variación e interpretación gráfica de la derivada.

Como conclusiones al trabajo de investigación, el autor reconoce la necesidad de realizar tareas que respondan a las intenciones que los documentos de los programas de Cálculo diferencial declaran; por ello, propone una serie de talleres en donde se trabajan las diferentes representaciones de la derivada a través de los fenómenos físicos, y que vaya más acorde con los objetivos que plantea el curso.

Ubicamos este trabajo de investigación en este enfoque, ya que pone su atención en la importancia del significado variacional del concepto de la derivada y el las representaciones.

3.2.5.5 Una propuesta para la introducción del concepto de derivada desde la variación. Análisis de resultados. (Vrancken, et al., 2008)

En este trabajo de investigación los autores presentan una propuesta de actividades para introducir el concepto de derivada en un curso de Matemáticas II de Ingeniería agrónoma (en una universidad Argentina), cuya finalidad es que los estudiantes lleguen al concepto a través de concepciones como velocidad promedio y velocidad instantánea, así como del análisis de las diferentes representaciones de la derivada. Inicialmente el grupo de investigadores realizó una indagación sobre los errores y dificultades en la enseñanza del concepto para realizar la propuesta. En la investigación, se evidencian los errores de los estudiantes en la resolución de los diferentes problemas y el tratamiento en los diferentes registros de representación, lo que les permitió reflexionar sobre los procesos de enseñanza, evidenciando primeramente, la dificultad en el tema de funciones, ya que no reconocen la variabilidad.

¹⁶ Dirección General de Educación Tecnológica Industrial

¹⁷ Planteles del Colegio de Bachilleres

¹⁸ Universidad Autónoma de Guadalajara

Dado que la propuesta de la actividad está basada en la importancia de los sistemas de representación, ubicamos el trabajo de investigación en este enfoque.

3.2.5.6 Durabilidad y significado del conocimiento matemático. El caso del concepto de la derivada. (Hähkiöniemi, 2008)

Este trabajo de investigación, realizado por el Doctor Markus Hähkiöniemi de la Universidad de Jyväskylä ubicada en Finlandia, estudia la pertinencia y la duración sobre el concepto de la derivada en cinco estudiantes de secundaria. A los estudiantes inicialmente se les había enseñado sobre la derivada enfatizando sobre las propiedades gráficas de los procesos de derivación. La investigación fue realizada en dos momentos: cuando estudiaron inicialmente el concepto de derivada, y un año después. En este último momento, se entrevistaron a los estudiantes y se encontró que todavía tenían un buen potencial para estudiar la derivada en un contexto gráfico, sin embargo, su conocimiento sobre la definición del concepto de derivada habían desaparecido casi por completo. Entre las conclusiones que arroja este trabajo, se encuentra que cuando es enseñado el concepto desde un contexto gráfico que parezca estar cerca del mundo experiencial de los alumnos, este parece tener más sentido y puede llegar a ser un aprendizaje significativo.

Dada la importancia que muestra el artículo sobre los sistemas de representación en la enseñanza del concepto de derivada, el estudio sobre los significados y el sentido de la derivada en los diferentes problemas propuestos, ubicamos este documento en el campo de la Educación Matemática, en el enfoque Semiótico.

3.2.5.7 Formas de argumentación en el cálculo de la función derivada de la función $y = x^2$ sin usar la definición de derivadas por límites. (Font, 2009)

Esta investigación es publicada en la Revista Iberoamericana de Educación Matemática UNIÓN, en el año 2009 por el Doctor Font. En su artículo presenta los resultados de su trabajo cuya intención fue analizar las formas de argumentación que se pueden utilizar en dos secuencias de actividades con el fin de calcular la derivada de la función $y = x^2$ en las cual no se usa la definición de la función derivada como el límite de las tasas medias de variación. Para Font este trabajo tiene una importancia en el aula de clases, ya que manifiesta que lo que se dice sobre las tareas matemáticas es algo más importante que las propias tareas; con esto pone en manifiesto su postura sobre la importancia del uso

del discurso y la argumentación en el aula de clases. Las actividades están planteadas en tres fases: inducción, abducción y deducción en el cálculo de la derivada de la función.

Dada la importancia que propone el autor en el artículo sobre el manejo de los sistemas de representación para discutir y argumentar sobre la derivada de la función, ubicamos este trabajo de investigación en el campo de la Educación Matemática, en el enfoque Semiótico.

3.2.5.8 La función derivada a partir de la visualización de la linealidad local. (Robles, et al., 2010)

Este trabajo de investigación es presentado desde el *enfoque Ontosemiótico* con el objetivo de realizar un diseño e implementación de una secuencia didáctica que permitiera un acercamiento menos complejo (relacionado con el que se trabaja en los libros de texto) al concepto de derivada con el apoyo del computador, con estudiantes de la Universidad de Sonora. En su artículo, los autores ponen de manifiesto que la comprensión de la derivada está relacionada con una compleja trama de funciones semióticas que permiten entender la derivada de la función en un punto y la derivada de la función.

La investigación propone una serie de actividades las cuales fueron diseñadas por ellos mismos, en las que resaltan la importancia del uso de los sistemas de representación como agente facilitador en la comprensión del concepto. En sus conclusiones, declaran las limitaciones de los significados personales de los estudiantes, debido al elevado nivel cognitivo que asumieron los cinco estudiantes participantes en el caso, lo que les generó elementos para una mejora futura en las implementaciones de las tareas. Es ubicado en este enfoque, ya que desde su marco teórico, los autores lo sitúan claramente.

3.2.6 Aportes de las investigaciones ubicadas en los Enfoques Semiótico y Ontosemiótico.

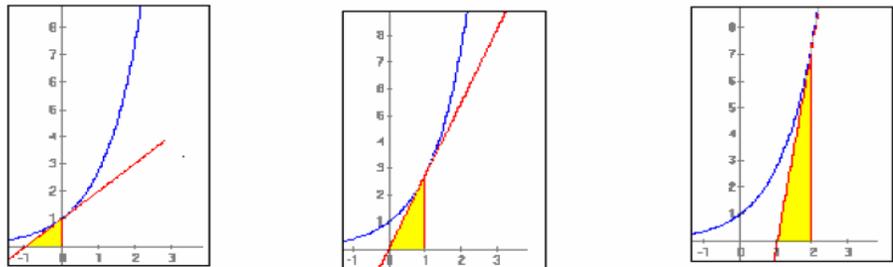
Analizados los ocho documentos anteriormente descritos, podemos reconocer aportes claros de este enfoque al campo de la Educación Matemática. Tal como lo menciona Font (2002), los enfoques Semiótico y Ontosemiótico han tenido una intención clara: reconocer que la educación en Matemáticas no puede ser estudiada solo desde lo sociológico, psicológico o antropológico; ha de ser visto como una integración de los enfoques, que unifiquen las teorías y que den respuesta a preguntas que no podían ser respondidas con

Ilustración 1. Cuestionario

Cuestionario

En el aula de informática has observado que la función $f(x) = e^x$ cumple que todas sus subtangentes tienen una longitud igual a 1. Utilizando esta propiedad:

a) Calcula $f'(0)$, $f'(1)$ y $f'(2)$



Fuente: Vicenc Font, 2005a *Derivadas y Funciones*. P. 116

un solo enfoque. Godino (2012) argumenta cómo el enfoque permite estudiar hechos y fenómenos de la enseñanza-aprendizaje de las Matemáticas a nivel microscópico; además manifiesta que solucionar preguntar como ¿por qué los alumnos tienen dificultades para resolver cierto tipo de tareas?, o, ¿es idóneo este discurso matemático, para estos estudiantes en unas circunstancias dadas?, requiere que se generen hipótesis referidas a los alumnos y las circunstancias, cuyo estudio solicita un nivel altamente detallado.

En cuanto a la derivada, Font (2005b) describe por medio de un ejemplo de su trabajo de investigación Font (2005a) –que se muestra en la ilustración 1– cómo hay que poner en funcionamiento una configuración epistémica-cognitiva por medio de una secuencia de acciones para llegar a demostrar por qué la función derivada de $f(x) = e^x$ tiene como derivada la función $f'(x) = e^x$. Este ejemplo, nos permite generar propuestas de enseñanza de la derivada en la cual los alumnos pueden calcular la derivada de determinadas funciones –como la exponencial y la logarítmica– sin necesidad de utilizar límites, siempre y cuando hayan trabajado previamente la interpretación geométrica de la derivada en un punto. Este tipo de propuesta permite que haya otra organización de la unidad didáctica de la derivada, pues es necesario prescindir del estudio previo de la indeterminación 1^∞ .

Otro de los aportes que las investigaciones encontradas y ubicadas en este enfoque nos han permitido llegar, es la clara relación entre los objetivos o intenciones de los cursos de Cálculo diferencial y los libros guías de texto. Este hecho, no permite que en el aula los

profesores planteen nuevas estrategias de enseñanza, para lo cual, se propone que los docentes realicen propuestas de talleres o capítulos de libros referentes a la enseñanza de la derivada que permitan enseñarla desde las diferentes representaciones a través de fenómenos físicos. La enseñanza de la derivada está reclamando de trabajos que den razón de nuevas propuestas que sean implementadas y reconocidas como estrategias claras para la enseñanza de ella, empleando más representaciones del problema.

3.3 Documentos ubicados en las líneas del campo de la Educación del profesor de Matemáticas

Los documentos que se describirán a continuación, los ubicamos dentro de este campo por la intención que la investigación tiene en cuanto al conocimiento profesional del profesor, a las prácticas profesionales y al conocimiento profesional del formador de profesores de Matemáticas. Como lo manifestamos antes, este campo de investigación ha sido estudiado por profesores de la Universidad Pedagógica Nacional y han propuesto un documento que describe las líneas de investigación del mismo (Guacaneme & Mora 2011).

Durante el proceso de ubicación de los documentos, pudimos darnos cuenta de la importancia que los enfoques del campo de la Educación Matemática le dan al presente campo, ya que reconocemos la estrecha relación entre los campos, pero también algunos elementos que los distancian de forma significativa. A continuación, hacemos la descripción de los documentos en cada uno de los planos, resaltando las intenciones que la investigación muestra para poder ubicarlos en este campo, así como el por qué también algunos de ellos podrían estar ubicados dentro de alguno de los enfoques que propone Font (2002).

3.3.1 Prácticas profesionales de los profesores de matemáticas

En este plano o línea, tal como lo definen Guacaneme y Mora (2011), están ubicados los documentos que son el resultado de investigaciones relacionados con: las acciones que el profesor de Matemáticas lleva a cabo en su desempeño docente; las interacciones en las que el profesor se vincula para promover aprendizajes profesionales en comunidades de práctica (de tamaños muy variados); o, los documentos cuya intención es el aprendizaje que el profesor logra a partir del estudio personal/individual sobre asuntos que le conmina su práctica.

3.3.1.1 El papel del profesor en la enseñanza de la derivada. (Gavilán, 2006)

Este trabajo de investigación es presentado como tesis doctoral del profesor José María Gavilán, realizado en la Universidad Autónoma del Estado de México, bajo la dirección del

Doctor Salvador Llinares en el año 2006. El problema de investigación está centrado en hacer una descripción y explicación de la práctica del profesor de Matemáticas desde la perspectiva de la construcción del conocimiento matemático (la derivada) en estudiantes de bachillerato entre las edades de 16 a 18 años. A partir de los resultados empíricos que obtienen, caracterizan dos perspectivas que subyacen de las prácticas de los profesores: la tradicional y la holística. La primera se caracteriza por concebir el aprendizaje sin necesidad explícita de establecer relaciones, y las matemáticas escolares son concebidas como un conjunto de procedimientos sin significados explícitos. En la segunda, las matemáticas escolares son concebidas como un conjunto de significados, conceptos y significados interrelacionados.

Como resultados finales de la investigación, se evidencia la dependencia de la práctica del profesor de sus concepciones sobre cómo se produce el aprendizaje de conceptos y cómo concibe las matemáticas escolares.

3.3.1.2 Teachers' mathematical knowledge and pedagogical practices in the teaching of derivative. (Potari, et al., 2007)

Este trabajo de investigación sobre el conocimiento matemático de los profesores y las prácticas pedagógicas en la enseñanza de la derivada, publicado en el quinto evento del CERME en el año 2007, indaga la naturaleza del conocimiento de los profesores de matemáticas para la enseñanza del concepto de derivada, así como las relaciones entre los docentes, las prácticas pedagógicas y el conocimiento de los profesores sobre la derivada. La metodología de investigación es el estudio en el aula de nueve profesores participantes con algunas entrevistas ocasionales. Dentro de las conclusiones, el trabajo muestra que la calidad del conocimiento matemático para la enseñanza se caracteriza por la comprensión conceptual del profesor, la fluidez procesal del profesor y la capacidad de reflexionar y ampliar la actividad matemática. Ubicamos este trabajo de investigación en este plano o línea, debido a la relación que establece entre los docentes, las prácticas pedagógicas y el conocimiento de los profesores; sin embargo, consideramos también, que por las conclusiones que establece dicha investigación, este trabajo también tiene importantes elementos del plano de la formación de profesores de matemáticas.

3.3.2 Conocimiento profesional del profesor de matemáticas

Los documentos ubicados en este plano o línea, se ocupan del estudio de: las creencias, visiones y concepciones de los profesores de Matemáticas; los conocimientos, destrezas o competencias de los profesores; las diferentes expresiones de la relación entre teoría y práctica o, entre el discurso y la acción; o, puede centrarse en el aprendizaje del docente logrado a través de la práctica reflexiva y la reflexión como actividad que promueve el aprendizaje desde/para la práctica. Guacaneme y Mora (2011).

3.3.2.1 Pensamiento y lenguaje variacional: una aplicación al estudio de la derivada. (Sánchez & Molina, 2006)

Este trabajo de investigación es presentado en el Acta Latinoamericana de Matemática Educativa por profesores del CICATA México. En este escrito hacen una descripción de un taller desarrollado en la ciudad de Montevideo (Uruguay) llamado de la misma forma como han titulado este documento, propuesto para los profesores asistentes a la Decimonovena Reunión Latinoamericana de Matemática Educativa. Uno de los objetivos del taller fue movilizar al profesor a no utilizar la representación gráfica para determinar, dada una tabla de valores, a qué función corresponde (lineal, cuadrática, cúbica) y llevarlo a utilizar la diferencia o incrementos en los valores dados para x y y , con el fin de construir de alguna manera la forma como en el siglo XVII se analizó la variación del movimiento y quizá de otros fenómenos.

La intención del taller trabajado con profesores asistentes a la reunión, tuvo como finalidad mostrar la importancia de proponer talleres que cambien la estructura usada generalmente para construir el concepto de derivada y trabajarlo desde el análisis de los incrementos en las variaciones de movimiento. Es por esto que se ubica este trabajo en el campo de la Educación del profesor de matemáticas, en la línea de las prácticas profesionales de los profesores de matemáticas, ya que este espacio descrito en este artículo tiene como finalidad promover el aprendizaje de los profesores en comunidades de práctica. En cuanto al campo de la Educación Matemática, se podría ubicar en el enfoque Semiótico.

3.3.2.2 Faceta epistémica del Conocimiento didáctico-matemático sobre la derivada. (L. R. Pino-Fan, et al., 2011)

Este trabajo de investigación presenta una síntesis de conocimientos sobre la derivada relativos al componente epistémico de conocimiento didáctico-matemático. Los autores describen que dicho trabajo surge del reconocimiento de profesores que al enseñar sobre un concepto matemático deben tener: una trama de conocimientos sobre el contenido a enseñar, un conocimiento sobre los significados de los estudiantes sobre el concepto y de los recursos institucionales específicos.

En la investigación, los autores hacen una reconstrucción del significado holístico para la noción de derivada desde el enfoque Ontosemiótico, ya que consideran que constituye un elemento importante del conocimiento didáctico-matemático del profesor de Matemáticas.

Desde este posicionamiento del trabajo de investigación, se puede inferir que la intencionalidad del mismo es precisamente el conocimiento profesional del profesor de Matemáticas, específicamente en la construcción del significado holístico de la derivada, por lo cual ubicamos esta investigación en el campo de la Educación del profesor de Matemáticas, en la línea del conocimiento profesional del profesor de Matemáticas; sin embargo, este trabajo también puede ser ubicado en el enfoque Ontosemiótico, en el campo de la Educación Matemática.

3.3.2.3 Un estudio sobre el conocimiento didáctico del contenido (CDC) de profesores de matemáticas que enseñan Cálculo diferencial a estudiantes de carreras de ciencias económicas (García, 2009)

Este trabajo de investigación presentado como tesis doctoral por el profesor Luis A. García Oropeza en el año 2009, dirigido por las doctoras Carmen Azcárate y María del Mar Moreno. A continuación se justifica su ubicación dentro de este plano.

La investigación está basada en un estudio sobre el conocimiento profesional de los profesores de Matemáticas que enseñan en universidad y de la enseñanza basada en la resolución de problemas [EBP] como estrategia metodológica alternativa de enseñanza. Las preguntas que dieron dirección al trabajo son: ¿Cuál es el conocimiento didáctico del contenido de los profesores de Matemáticas para las carreras de ciencias económicas?, ¿Qué contenido económico llevan al aula de clases y cómo lo presentan? ¿Conocen la enseñanza basada en problemas y en algún momento la han puesto en práctica? Los

profesores participantes hicieron parte de un seminario que discutía sobre la EBP como una estrategia metodológica para la enseñanza del Cálculo en carreras de ciencias económicas. La investigación en su propuesta metodológica, permite obtener aciertos como: Al proponerse como estrategia metodológica la recolección de datos, la investigación permitió a los investigadores llegar de manera indirecta a los participantes, y en segundo lugar, como la EBP es una estrategia metodológica sugerida por los programas oficiales que forman parte del CDC, entonces permitió reconocer el conocimiento que tenía el grupo de profesores sobre la metodología de enseñanza propuesta.

Al revisar esta tesis, encontramos resultados bastante interesantes que nos permiten reconocer estudios sobre el conocimiento profesional del profesor de Matemáticas. Parte de nuestro interés en este trabajo de investigación es reconocer qué elementos deben ser brindados a un profesor en formación en un curso sobre la Didáctica de las Matemáticas, y esta tesis doctoral, nos permite reconocer herramientas que validan nuestras hipótesis, las cuales enunciaremos más claramente en las conclusiones.

Así, podemos evidenciar que el trabajo realizado por García está claramente enmarcado en el CDC, y permite ubicarse en el campo de la Educación del profesor de Matemáticas, dentro del plano del Conocimiento profesional del profesor de Matemáticas.

3.3.2.4 La comprensión de la derivada como objeto de investigación en Didáctica de la Matemática (Sánchez-Matamoros, et al., 2008)

Este artículo es publicado en la revista Relime en el año 2008. En su documento, los autores reconocen la necesidad de hacer una revisión sobre las propuestas de enseñanza acerca de la derivada, ya que sugieren que hay dificultades considerables en el aprendizaje del concepto, en los estudiantes de último año de bachillerato y de recién ingreso a la universidad. Para esto, los investigadores realizan un trabajo de revisión y organización de las aportaciones hechas en Matemática Educativa en la enseñanza de la derivada, con el fin de identificar el conocimiento que se ha aportado, así como de las áreas donde aún es necesario contribuir con información, y por lo tanto deben convertirse en temas de interés para hacer investigación. En la revisión descrita anteriormente, los autores presentan resultados en tres asuntos:

- a) Lo que se conoce como la comprensión de la derivada en un punto.

- b) El papel que desempeñan los sistemas de representación.
- c) Las características del esquema del desarrollo de derivada.

Una vez han sido identificadas las líneas de investigación que han tenido más fuerza en el estudio sobre la enseñanza de la derivada, los autores muestran la necesidad que los profesores reconozcan cómo los estudiantes se dotan de significado y usan el concepto.

3.3.2.5 Key epistemic features of mathematical knowledge for teaching the derivate. (L. Pino-Fan, et al., 2012)

Este artículo publicado en las memorias de la *36th Conference of International Group for the Psychology of Mathematics Education* en el año 2012, presenta un estudio centrado en el diseño y aplicación de instrumentos que permiten explorar diferentes aspectos de la Didáctica en el conocimiento del profesor de Matemáticas sobre el tema de la derivada. En una primera parte, los autores presentan una descripción detallada del diseño del cuestionario, propuesto para cincuenta y tres estudiantes de sexto semestre de la carrera de Licenciatura en Matemáticas de la Universidad de Yucatán, quienes tuvieron el curso de Cálculo diferencial en primer semestre, además de otros cursos complementarios.

Uno de los resultados que arrojó el cuestionario es que los futuros profesores de Matemáticas tenían ciertas dificultades en la resolución de tareas relacionadas con el conocimiento común y formal de la derivada. Por ejemplo, aunque en una de las tareas propuestas sobre la recta tangente a la curva en un punto los resultados en general fueron acertados, se pudo evidenciar en otras tareas, los futuros profesores carecían de aspectos acerca conocimiento especializado, como el uso de las diferentes representaciones y el uso de los diferentes significados de la derivada, y también de cómo entienden las diferentes formas de resolver un problema con el uso de la derivada.

Dada la intención del trabajo de investigación sobre la descripción del conocimiento didáctico de los futuros profesores de matemáticas sobre la derivada, lo ubicamos en esta línea.

La clasificación de los veinticinco documentos, nos ha permitido evidenciar para el campo de la Educación Matemática, lo que se ha investigado en cada uno de los enfoques sobre la didáctica de la derivada, generando aportes sobre el conocimiento que un profesor de matemáticas debe tener, sobre las estrategias de enseñanza, sobre los obstáculos

epistemológicos y sobre las dificultades que pueden llegar a tener los estudiantes en el aprendizaje de la derivada.

En lo que refiere al campo de la Educación del Profesor de Matemáticas, las propuestas estudiadas dentro de la línea del conocimiento profesional del profesor de matemáticas, se evidencia un interés por trabajar la EBP, la enseñanza de la derivada a partir de otras representaciones (no solo la algorítmica), tales como la gráfica, numérica o a partir de incrementos, tal y como se trabajaba durante el siglo XVII. Estas propuestas se convierten en elementos valiosos para re-pensar los currículos de cursos sobre enseñanza o Didáctica del Cálculo, y se convierten en un valor agregado a esta investigación.

En el capítulo 5, retomaremos elementos que hemos reconocido de lo que se investiga en didáctica sobre la derivada a modo de conclusiones.

CAPÍTULO 4: SOBRE LOS CURSOS DE ENSEÑANZA DEL CÁLCULO

4.1 Introducción

En esta sesión se describirán tres programas de cursos sobre la enseñanza del Cálculo, que obtuvimos de universidades colombianas que contienen dicho curso dentro su currículo de Licenciatura en Matemáticas. Consideramos importante resaltar que para la obtención de los documentos hicimos contacto con los profesores directores de algunos programas de licenciatura en el país, pero finalmente solo respondieron a nuestra solicitud las personas encargadas de los programas de las universidades que encontrará en este capítulo.

Haremos una descripción de las propuestas y de las intenciones que tiene la misma, manifestada por los profesores que durante el segundo semestre de 2013 estuvieron a cargo del curso. Dentro de la misma descripción, encontrará algunos comentarios que los profesores directores de los cursos durante dicho tiempo nos hicieron en una charla no estructurada sobre el desarrollo del curso. Este tipo de entrevista se propuso, ya que consideramos que dentro de la conversación –no estructurada-, podríamos conocer elementos propios del curso que no se podrían evidenciar por medio de preguntas concretas. Cabe aclarar que dentro de dicha conversación, se dieron respuesta a preguntas generales como: ¿Qué se enseña en el curso? ¿Cómo se abordan las temáticas que enuncia? ¿Cuál es la intención o finalidad el curso? ¿Qué elementos sobre la enseñanza de la derivada trabaja en dicho curso? ¿Qué referentes bibliográficos propone para el desarrollo de la temática que refiere a la enseñanza de la derivada? Todas ellas están consignadas en la descripción que se hizo en los tres programas.

Después de ello, presentaremos algunas conclusiones sobre el panorama de la enseñanza del Cálculo y específicamente sobre la derivada.

4.2 Descripción de los cursos sobre la enseñanza del Cálculo

El primer curso que se describe es el de la Universidad Pedagógica Nacional, seguido el de la Universidad Industrial de Santander, y por último la Universidad Pedagógica y Tecnológica de Colombia, quien no registra estudios sobre la enseñanza de la derivada, pero consideramos importante incluirlo, para evidenciar que en nuestro país aún hay programas que intentan ganar espacios dentro de la malla curricular para cursos sobre la enseñanza de los objetos matemáticos. Cada una de las descripciones está acompañada de la entrevista dada por los profesores titulares de los cursos, –aclaramos que dicha entrevista no es estructurada, sino hecha de manera informal– quienes nos permitieron corroborar lo que se propone desde el documento descriptivo del curso, ya que consideramos importante “escuchar otra voz distinta a la del papel”. Al final, en los anexos se encuentra cada uno de los documentos descriptivos de los cursos, para tener mayor claridad sobre las reflexiones que hagamos del mismo.

4.2.1 Curso 1: Enseñanza y aprendizaje del Cálculo. (Universidad Pedagógica Nacional)

Este curso está propuesto para los estudiantes de sexto semestre, habiendo aprobado previamente los cursos de Cálculo diferencial y Cálculo integral. Se estudian cuatro horas presenciales y ocho horas de forma independiente. El curso está propuesto con la intención de estudiar el conocimiento didáctico sobre el Cálculo en la Educación Básica y Media en tres perspectivas: La fenomenológica-epistemológica, la perspectiva curricular y la perspectiva didáctica. A continuación describimos la intención manifiesta para cada una de ellas.

La perspectiva fenomenológica-epistemológica. Pretende dar respuesta a la pregunta ¿qué es el Cálculo y cuáles son sus objetos, problemas y asuntos de estudio? Para ello, se plantean algunos documentos referentes a la historia del Cálculo y específicamente, proponen estudiar la historia de la función. Según lo descrito, el concepto de derivada no se trabaja explícitamente.

La perspectiva curricular. Pretende dar respuesta a la pregunta ¿cómo se expresa el Cálculo en el currículo de Matemáticas de la Educación Básica y Media? Para ello, en primera medida se propone un estudio de la normatividad curricular colombiana sobre el pensamiento variacional y la modelación; en segunda medida se propone el estudio de las ventajas y desventajas del uso de las herramientas tecnológicas como lo son el software y las calculadoras.

La perspectiva didáctica. Pretende dar respuesta a la pregunta ¿cuáles son algunas de las variables fundamentales que median los procesos de aprendizaje del Cálculo? Para dar respuesta a ella, el programa propone tres direcciones; la primera está encaminada al estudio de los errores y dificultades asociados al aprendizaje del Cálculo; la segunda a la importancia del uso de las diferentes representaciones en la enseñanza del Cálculo; la tercera pretende que el estudiante reconozca a la Didáctica del Cálculo como un campo de investigación que debe ser trabajado y apropiado.

En el documento, los profesores describen la importancia de brindarle al futuro profesor de matemáticas un espacio para que se aproximen al conocimiento didáctico del Cálculo, debido a las grandes dificultades que tienen cuando abordan temas relacionados con el Cálculo y a la forma como es enseñada en las aulas de clase. Es por ello que los contenidos que proponen son:

- Objetos de estudio del Cálculo: Acumulación y Variación.
- Aspectos históricos en el surgimiento del Cálculo.
- Pensamiento variacional y modelación. El cambio.
- La incorporación de las nuevas tecnologías a la enseñanza y el aprendizaje del Cálculo.
- Dificultades y errores en los procesos de aprendizaje del Cálculo.
- El Cálculo en el currículo de la Educación Básica y Media.

En la descripción metodológica, se plantean discusiones a lo largo del curso sobre las temáticas que serán abordadas, presentadas ya sea por los estudiantes, o por el profesor a cargo. Dentro del curso describen un espacio para la práctica inicial, en donde los estudiantes realizan la observación y análisis de un curso de Cálculo o pre-cálculo desarrollado en una institución o en la misma Universidad, con el fin de hacer una

propuesta de tareas o actividades que posibiliten el aprendizaje de algunos objetos del Cálculo. Como referentes bibliográficos propuestos para el desarrollo del curso, de las veinte referencias propuestas encontramos cuatro documentos para el estudio de la derivada y de su enseñanza; estos documentos son:

- La comprensión de la derivada como objeto de investigación en didáctica de la matemática, de Salvador Llinares y Gloria Sánchez.
- Descripción de los niveles de comprensión del concepto de derivada, de Claudia Salazar, Mauricio Bautista y Hernán Díaz.
- Interpretaciones erróneas sobre los conceptos de máximos y mínimos en el Cálculo diferencial, de Moreno y Cuevas.
- Funciones y derivadas, de Vicenc Font.

En la conversación que de manera informal tuvimos con el profesor titular, –de quien destaco la amabilidad por brindarme este espacio– pudimos darnos cuenta de que los propósitos que evidenciamos en la descripción del programa que ofrece el documento, son consecuentes con lo que el curso actualmente le brinda a los estudiantes. Una de las principales intenciones que el profesor manifiesta tener al direccionar el curso es el de mostrarle a los estudiantes cuáles son los elementos fundantes del Cálculo; que reconozcan la variación y acumulación como elementos propios del Cálculo, reconociendo esto como un elemento más importante que los procesos algebraicos, en donde el profesor manifiesta que los estudiantes llegan en algunos casos, con esta idea sobre el Cálculo.

En cuanto a la práctica inicial, el profesor nos aclara que dicha práctica se consolida en la elaboración de algunas tareas o actividades en algún aspecto muy concreto del Cálculo, a partir de la observación que durante un corto tiempo realizan en alguna institución. En cuanto a la enseñanza sobre la derivada, no hay un espacio concreto en donde se estudie este aspecto; en este caso, evidenciamos que aunque el curso tiene unas intenciones muy claras, además que brinda herramientas precisas que sobre la enseñanza del Cálculo deben conocer los futuros profesores de matemáticas, no es un aspecto central o de importancia que se trabaja en dicho curso, excepto, si algún estudiante decide proponer sus actividades o tareas como resultado de la práctica inicial en la derivada.

Con la lectura, análisis y la conversación con el profesor director del curso, evidencio, de manera personal, que aunque no encuentro elementos propios que sobre la investigación en didáctica sobre la derivada se enseñen, reconozco que el curso ofrece unas herramientas valiosas de didáctica sobre el Cálculo, que en el análisis de los programas describiremos en detalle.

4.2.2 Curso 2: Didáctica del Cálculo (Universidad Industrial de Santander)

El curso está propuesto para estudiantes que hayan aprobado el curso de Ecuaciones diferenciales, (lo cual implica haber aprobados los cursos de Cálculo diferencial, integral y multivariado) con una intensidad horaria de cuatro horas presenciales y ocho horas de trabajo independiente. La intención del curso está puesta en ofrecer desde la teoría y la práctica fundamentos para el desarrollo de las metodologías adecuadas para el aprendizaje del Cálculo y se espera que los estudiantes al culminar el curso tengan la capacidad de:

- Reconocer las etapas históricas en la construcción teórica del Cálculo.
- Identificar las dificultades que los estudiantes tienen con los conceptos y procedimientos del Cálculo.
- Identificar las concepciones que los estudiantes tienen sobre los conceptos del Cálculo
- Diseñar actividades que permitan que sus estudiantes lleguen a aprendizajes significativos.

La propuesta de los contenidos del curso, está claramente descrita, y propone el estudio de la historia y desarrollo conceptual del Cálculo, dificultades y concepciones de los estudiantes acerca del concepto de función, límite, derivada e integral, y finalmente un análisis de propuestas para la enseñanza del Cálculo.

En los referentes bibliográficos, proponen siete documentos, dentro de los cuales enuncian un libro llamado "Elementos del Cálculo" (Salinas et al., 2002) que presenta una propuesta para la enseñanza de la integral y de la derivada a partir de situaciones problema. Dentro de las referencias bibliográficas, el documento deja claridad sobre la inclusión de trabajos de grado de especialización, maestría y/o doctorado para ser estudiados como propuestas

para la enseñanza del Cálculo; no los enuncia ya que pretende dejar que el estudio de estos documentos sea propuesto por los profesores a cargo del curso.

Dentro de las entrevistas que se tuvieron de manera informal con dos profesores encargados de este curso, pudimos comprender dos posiciones claras que tiene la Licenciatura con el curso:

1. Muestra la necesidad de incluir a los estudiantes del curso en el programa de tutorías que brinda la Universidad a aquellos estudiantes de recién ingreso que han tenido malos resultados en un curso de Cálculo diferencial. Cada estudiante que se matricula en el curso, debe ser tutor de la Universidad. Esta solicitud, tiene como objetivos: i) Brindarle a la Universidad un apoyo para menguar la dificultad académica que tienen los estudiantes de recién ingreso a ingenierías y, reducir deserción; ii) Brindarle la oportunidad al estudiante de la Licenciatura de conocer qué tanto sabe sobre el Cálculo y sobre la enseñanza del mismo en un tema específico, con el fin de crear en él la necesidad de buscar herramientas que le permitan enseñarlo de una forma más comprensible.

Esta última, le permite al curso hacer una revisión de investigaciones que intenten dar respuesta a las situaciones que desde la práctica se presentan, enriqueciendo el mismo curso.

2. Brindarle a los estudiantes herramientas que le permitan conocer qué tipo de conocimiento didáctico sobre el Cálculo debe aprender, y de la existencia de otros documentos, que en el momento de necesitarlo, sabrá cómo recurrir a ellos. Se deja la claridad que aunque se estudia la enseñanza sobre la derivada, la profundización que se hace de ella no puede ser mayor, ya que el curso debe incluir todas las temáticas referentes al Cálculo como: la función, límite, la derivada y la integral.

Aunque no hay una postura formal en la que se muestre que se incluyen elementos de la investigación sobre didáctica de la derivada en el curso, los profesores dejaron claro que hay una intención por discutir algunas investigaciones cuando sea necesario, pero este no es reconocido como un elemento clave dentro del curso.

4.2.3 Curso 3: Didáctica del Cálculo y la Estadística (Universidad Pedagógica y Tecnológica de Colombia)

El curso está propuesto para los estudiantes que cursen octavo semestre de la carrera de Licenciatura en Matemáticas y Estadística. La finalidad del curso está propuesta desde tres aspectos: i) Que el estudiante caracterice los dominios conceptuales del Cálculo y la Estadística, de modo que le permita profundizar en el estudio de errores y dificultades en el aprendizaje, y analizar, diseñar, desarrollar y evaluar secuencias didácticas que promuevan el desarrollo del pensamiento variacional y aleatorio; ii) A través de la transposición didáctica de las Matemáticas disciplinares, que el estudiante aplique los conocimientos pedagógicos y didácticos que junto con la reflexión sobre la práctica, se imbrican e interrelacionan para generar y hacer evolucionar el conocimiento profesional en la formación inicial del educador matemático; iii) Introducir al estudiante en su campo profesional para “aprender a enseñar” a la luz de las teorías pedagógicas y didácticas.¹⁹

Dentro de los contenidos temáticos, el curso está direccionado en el trabajo de:

- Pensamiento variacional y sistemas analíticos.
- El taller constructivo (TC): Estrategia para aprender a pensar mediante la construcción del pensamiento matemático.
- Pensamiento aleatorio y sistemas de datos.
- Teoría de situaciones didácticas de Brousseau.

Cada uno de los contenidos muestra que la intención del curso es brindarle al estudiante, futuro profesor de Matemáticas, herramientas teóricas y el estudio del desarrollo de los pensamientos a través de Cálculo y la Estadística. Sin embargo, dado nuestro interés por encontrar elementos que sobre la derivada se estudien en este curso, notamos que estos elementos no son trabajados en él y esto fue corroborado por la profesora que tiene a cargo el curso, quien manifestó que no se estudia la enseñanza sobre la derivada, en parte debido al poco tiempo que tienen para enseñar sobre la didáctica del Cálculo y de la Estadística.

¹⁹ En el Anexo 3 puede leer más detalladamente la justificación que hace el documento sobre este curso.

4.3 Análisis sobre el estudio de didáctica de la derivada en los cursos de enseñanza del Cálculo

Hecha la descripción de los cursos sobre la enseñanza del Cálculo, consideramos importante resaltar algunos elementos que se relacionan con qué se aborda sobre la enseñanza de la derivada en dichos cursos.

- La didáctica de la derivada no es un asunto central y de continua discusión en cursos sobre enseñanza del cálculo, como lo conjeturamos en el comienzo de esta investigación, y con ello queremos decir, que no hemos encontrado un curso que ilustre sobre la didáctica de la derivada desde los diferentes enfoques.
- Hemos reconocido otra propuesta –como la de la UPN- que centra su atención en otros aspectos también importantes de la didáctica como la variación y acumulación como elementos propios del Cálculo, que hacen parte del CDC que un profesor de matemáticas debe tener.
- La propuesta de la UIS, tiene un elemento de resaltar y es el de permitir al docente en formación reconocer a partir de la práctica, la necesidad de tener un conocimiento sobre la enseñanza de la derivada. A partir de este hecho, es el docente en formación el que busca las propuestas desde algunos enfoques para enseñar la derivada. Sin embargo, este suceso está en dependencia si desde su práctica enseña o no este tema.
- El curso ofrecido por la UPTC, aunque no centra su atención sobre la enseñanza de la derivada, creemos es importante darlo a conocer, con el fin de exhibir que en Colombia aún hay mucho trabajo por hacer en estos cursos. Este hecho, es debido a que el curso debe atender a la enseñanza del Cálculo y también de la Estadística, por lo tanto las tres horas que tienen semanalmente no son suficientes para abordar un curso que estudie temas de didáctica sobre el Cálculo o la Estadística específicamente, y por ello, debe darse una dirección distinta a la que cursos como los de la UIS y la UPN brindan.

Esta indagación en los programas de los cursos sobre la enseñanza del Cálculo, nos ha permitido reflexionar, por otra parte, sobre elementos que aunque en un comienzo no habíamos tenido en cuenta, han surgido a partir de las conversaciones no formales con los profesores, y que consideramos han enriquecido este trabajo, ya que pueden ser

consideradas como propuestas de trabajo en equipo. Dichas consideraciones las describimos a continuación:

- Dadas las diferencias y semejanzas que se evidencian en las universidades de cursos sobre la enseñanza de la derivada (como es el caso de la UIS y la UPN), consideramos que aún no es claro lo que deberían atender estos cursos, razón por la cual se hace necesario realizar trabajo en equipo, tal como hacer comunidades de educadores matemáticos en Colombia, con el fin de proponer currículos con acuerdos claros en relación con las intenciones que debe darse dichos cursos, conservando la diversidad de propuestas, pero con algunos elementos claves e importantes por parte de la comunidad de educadores matemáticos. Esta propuesta no es producto de nuestras reflexiones a partir del estudio de los programas, sino que han sido construidas en conjunto con las conversaciones con los profesores de las tres universidades con lo que pudimos realizar este estudio; por ello, consideramos esta propuesta como un valioso aporte que pudo surgir a partir de esta investigación.
- Es claro que tanto la UPN como la UIS tienen cursos sobre la enseñanza del Cálculo, que sin duda alguna les brindan a los futuros profesores de Matemáticas herramientas para la enseñanza de temas sobre el Cálculo, realizando un puente entre la teoría y la práctica, ya que en ambas propuestas se evidencia la importancia que le dan al trabajo que los estudiantes hacen en sus prácticas, a través de las propuestas de actividades y de la identificación de los errores y dificultades. Reconocemos que la propuesta que tienen en dichos cursos ha sido producto de continuas reflexiones por parte de los educadores matemáticos, los egresados, los mismos docentes en formación y de profesores investigadores en el campo, que les han permitido proponer cursos con una intención más clara y precisa sobre lo que concierne a la didáctica del Cálculo.
- Reconocemos el esfuerzo que las universidades formadoras de profesores de Matemáticas hacen para que cursos sobre Didáctica tengan un posicionamiento dentro del programa de la licenciatura, además que le ofrezca a los estudiantes, futuros profesores de Matemáticas, herramientas sobre la enseñanza de los objetos matemáticos que se estudien. Sin embargo, se reconoce también que en Colombia, aún hay universidades formadoras de profesores de matemáticas que

están en proceso de construcción de dichos cursos, ya que siguen luchando por ganar espacios en las licenciaturas con los cursos de contenido estrictamente matemático (como es el caso de la UPTC). Continuamente profesores investigadores reflexionan y cuestionan sobre qué Matemáticas debe aprender un licenciado en Matemáticas, y qué sobre la didáctica debe aprender.

CAPÍTULO 5: ANÁLISIS DE RESULTADOS

5.1 Introducción

Pretendiendo dar respuesta a nuestra pregunta de investigación, y la razón por la cual estuvimos interesados en realizar este trabajo, consideramos importante resaltar en este espacio las respuestas a las preguntas ¿qué se ha investigado en Didáctica de la Matemática sobre la derivada? y ¿qué proponen los cursos sobre la enseñanza del Cálculo en cuanto a la didáctica de la derivada tres universidades formadoras en Colombia?, que son antecesoras de nuestra pregunta central de investigación, y que ya se han enunciado en los capítulos 3 y 4. Dichas conclusiones nos permitirán responder si en la formación inicial de los futuros profesores de Matemáticas se está enseñando aquello que se ha investigado en didáctica sobre la derivada.

5.2 ¿Se está enseñando aquello que nos dicen las investigaciones en didáctica sobre la derivada?

No es posible responder a esta pregunta de forma monosilábica para culminar con este proceso de investigación. La respuesta que tenemos, va algo más allá de lo que podría verse como un “no”, y creemos importante resaltar que el hecho de que no se evidencien propuestas en dichos cursos que vinculen la investigación con la formación de profesores, nos permite reconocer otras formas de concebir el curso, que también buscan dotar de herramientas al futuro profesor de Matemáticas. Para comenzar enunciaremos las conclusiones a las preguntas antecesoras de investigación.

5.2.1 ¿Qué se ha investigado en didáctica de la matemática sobre la derivada?

La clasificación de los documentos realizada en el capítulo 3, nos ha permitido resaltar elementos que más se han investigado en los cuatro enfoques en los cuales ubicamos algunos documentos. Estos elementos los retomamos a continuación.

En el enfoque Cognitivo

En las investigaciones ubicadas en dicho enfoque, se ha evidenciado un interés por describir los niveles de comprensión que plantea la teoría APOE por los que debe pasar un estudiante (o profesor) para la comprensión del concepto de derivada. Estas investigaciones nos brindan un instrumento válido como medio para buscar estrategias de enseñanza para que aquellos niveles por los que debe pasar un estudiante al aprender del concepto de derivada, sea el deseado desde lo que plantean dichas teorías. Este hecho, se convierte en un elemento valioso que describe claramente lo que se ha investigado en didáctica sobre la derivada desde este enfoque.

En el enfoque Sistémico

Las investigaciones ubicadas en este enfoque, muestran la importancia de generar situaciones didácticas que permitan reconocer que el conocimiento matemático que el estudiante tiene no es un proceso mental, sino que lo determinan otros factores. Y como propuesta de enseñanza, las investigaciones ponen énfasis en la importancia de las representaciones como la gráfica, numérica, la expresión verbal y la expresión analítica.

En el enfoque Semiótico

Las investigaciones realizadas en este enfoque exponen respuestas a preguntas como ¿por qué los alumnos tienen dificultades para resolver cierto tipo de tareas?, o, ¿es idóneo este discurso matemático, para estos estudiantes en unas circunstancias dadas?, requiere que se generen hipótesis referidas a los alumnos y las circunstancias, cuyo estudio solicita un nivel altamente detallado. Estas respuestas están fundamentadas en obstáculos epistemológicos, en los errores dificultades que los estudiantes pueden tener para aprender sobre la derivada, entre otros aspectos que plantean la necesidad que el profesor de matemáticas tenga un conocimiento sobre el objeto matemático y sobre la didáctica de dicho objeto, lo que llamamos un CDC.

5.2.2 ¿Qué proponen los cursos sobre la enseñanza del Cálculo en cuanto a la didáctica de la derivada?

En los tres programas de los cursos que fueron estudiados, la didáctica de la derivada no es un asunto central y de continua discusión en cursos sobre enseñanza del cálculo, como lo conjeturamos en el comienzo de esta investigación, y con ello queremos decir, que no

hemos encontrado un curso que ilustre sobre la didáctica de la derivada desde los diferentes enfoques. Este hecho nos permite dar respuesta a la pregunta central de investigación. Sin embargo, dado el hecho que no evidenciamos halla una relación entre lo que se ha investigado en didáctica de la derivada y que esto se enseñe en los curso, el proceso de sistematización de la información, nos ha permitido encontrar aspectos relevantes y que consideramos deben hacer parte de las conclusiones de esta investigación.

- Uno de los aspectos que consideramos de gran importancia en la formación de profesores de Matemáticas, es la relación que debe haber entre “la teoría y el salón de clase”. Con ello, queremos decir, que nos es importante, enseñar aquello que se evidencia desde las investigaciones en didáctica, permitiéndole al docente en formación dotarse de resultados que desde los distintos enfoques aporta la investigación de manera significativa a la didáctica sobre la derivada, y esta postura fue la que nos motivó a plantearnos esta investigación.

Aunque estamos de acuerdo en afirmar que es difícil brindarle al futuro profesor de Matemáticas en su formación inicial de todas las herramientas que va a necesitar en el desarrollo de su profesión, reconocemos que debe haber un estudio cuidadoso por parte de una comunidad de educadores matemáticos en el cual se puedan reconocer aspectos relevantes que debe aprender durante su formación, además de brindarle otras herramientas o fuentes a donde puede acudir cuando lo requiera. Es por ello que aunque evidenciamos otras formas de proponer los cursos sobre didáctica del Cálculo que le permiten al estudiante comprender aspectos propios del Cálculo así como de aprender sobre su didáctica, reconocemos la importancia de nuestra propuesta para el futuro profesor de Matemáticas.

- El proceso de llevar al aula lo que la investigación permite evidenciar, no puede ser un proceso simple; es decir, no podemos pretender que de la misma forma como estudiamos aquellas investigaciones para evidenciar sus aportes a la didáctica sobre la derivada, sea la forma en la que deba mostrarse en el aula de clase. Debe haber un proceso que nos permita tomar elementos de la investigación para hacerla parte del curso, como por ejemplo: el estudio de alguna propuesta interesante o de varias de ellas, sin tener que llevar al estudiante a leer el documento completo, o, el estudio de

las intenciones que llevan las propuestas, dadas por el enfoque en el que se ha desarrollado. En otras palabras, debe haber una *transposición* o *acomodación* de un saber producto de investigaciones a un saber enseñable y práctico. Algo similar a lo que desde la enseñanza de la disciplina debe hacerse al enseñar Matemáticas.

- Consideramos que la diversidad de teorías propuestas en los cursos de didáctica del Cálculo, sin duda alguna aportan a la enseñanza sobre la derivada; sin embargo, es claro que el enfoque usado en un curso específico, está mediado por la subjetividad del profesor formador y en su conocimiento sobre la teoría o sobre los enfoques con los que direcciona el curso. Aunque este elemento no es desacertado, se requiere una postura institucional que demarque y dé una impronta a las licenciaturas; es decir, debe haber una relación entre lo que pretende el programa de licenciatura al formar profesores y el cómo se direccionan los cursos de didáctica sobre una disciplina específica. Con esta reflexión no queremos afirmar que los programas de las universidades estudiadas en este trabajo no lo tengan, ya que desconocemos los documentos que orientan cada uno de los programas de licenciatura.
- En la última década hemos avanzado en la propuesta de programas que le brindan al futuro profesor de Matemáticas herramientas didácticas y pedagógicas que le sirven para el actuar docente, sin desconocer que el conocimiento sobre la disciplina es un elemento de gran importancia; no se puede enseñar de aquello de lo cual no se tiene un conocimiento a profundidad. Sin embargo, existen desde los distintos programas ofrecidos por las universidades, diferentes visiones sobre lo que debe conocer un profesor de Matemáticas de Básica primaria y secundaria y Media; y es desde estas distintas posiciones sobre lo que debe conocer un profesor de Matemáticas, que consideramos debe haber un acuerdo que uno de esos conocimientos debe estar ligado a lo que se proponen desde las investigaciones sobre la enseñanza de un tema específico, en nuestro caso, sobre la derivada.

CAPÍTULO 6: REFLEXIONES FINALES

Como culminación a esta investigación, queremos dedicar un espacio para realizar algunas reflexiones posteriores que la misma investigación, sin preverlo, nos ha provisto.

En primera instancia, el estudio y clasificación que realizamos con los documentos resultados de investigación de didáctica sobre la derivada, nos dimos cuenta de la estrecha relación que hay entre los campos de la Educación Matemática y la Educación del profesor de Matemáticas, ya que en dicho proceso era difícil poder clasificarlos en algún enfoque o plano por los aportes que podían hacer en ambos campos. Este reconocimiento, nos hace ser conscientes que un profesor formador de profesores de Matemáticas debería tener un conocimiento de ambos campos, ya que el segundo está sujeto a las propuestas y teorías que se propongan desde el primero.

Otro de los elementos encontrados durante esta investigación, es la autonomía universitaria que maneja cada una de las universidades que forman docentes en Matemáticas o afines. Esto quiere decir, que cada programa ha tenido la libertad de pensar en qué profesor de Matemáticas desea formar, claro está, teniendo en cuenta lo que el Ministerio de Educación Nacional y la sociedad exige; sin embargo, en nuestro proceso como formadores de profesores –el mío que apenas comienza, y la experiencia de mi asesor–, creemos debe ser importante generar consensos como comunidad de educadores matemáticos; pensar que para nuestro país, necesitamos que los profesores de Matemáticas tengan herramientas propias para nuestra sociedad, para los niños a quienes vamos a enseñar Matemáticas.

Es por ello, que debemos procurar en una discusión en la comunidad nacional, reconocer qué se debería enseñar en un curso sobre la enseñanza del Cálculo; en este proceso de investigación, evidenciamos el trabajo que hace la UIS, y los que realiza la UPN, quienes buscan formas eficaces de abordar estos cursos, y que bien haría a la comunidad de educadores matemáticos y a los mismos programas de licenciatura, establecer comunidades de práctica. Este reconocimiento ha producido en nosotros una movilización hacia la formación de esas comunidades, establecer encuentros y compartir ideas e

investigaciones relacionadas con la didáctica sobre el Cálculo y sobre la formación de profesores. Es apenas un comienzo, pero además es un llamado a los formadores de profesores a reflexionar en conjunto sobre qué Matemática debe ser enseñada en dichos cursos, sobre qué didáctica debe abordarse, y sobre qué profesor de Matemáticas necesita nuestro país.

Lo que hemos logrado evidenciar en esta investigación, lo consideramos un aporte para aquellos trabajos de investigación que pretendan hacer aportes a la re-formulación de los cursos de didáctica. Estamos seguros que el comienzo que debe haber una estrecha relación entre lo que investiga la Didáctica de la derivada y lo que debe ser enseñado en cursos sobre enseñanza de la derivada.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- Artigue, M. (1994). Didactical engineering as a framework for the conception of teaching products. In R. Bieher, R. Scholz, R. Strässer & B. Winkerlman (Eds.), *Didactics of mathematics as a scientific discipline* (pp. 27-39). Dordrecht: Kluwer Academic Publisher.
- Artigue, M. (1995). Ingeniería didáctica. In P. Gómez (Ed.), *Ingeniería didáctica en educación matemática* (pp. 33-59). Bogotá: Una empresa docente.
- Badillo, E. R. (2003). *La derivada como objeto matemático y como objeto de enseñanza y aprendizaje en profesores de matemática en Colombia*. Doctoral, Universitat Autònoma de Barcelona, Barcelona-España.
- Ball, D. L., & Even, R. (2009). The professional Education and Development of Teachers of Mathematics. *The 15th ICMI Study Springer*.
- Batanero, C., & Godino, J. (1994). Significado institucional y personal de los objetos matemáticos. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 14(2), 325-355.
- Bautista, M. (2009). La profesionalización docente en Colombia. *Revista Colombiana de Sociología*, 32(2), 131.
- Cantor, R., & Mirón, H. (2000). sobre el estatus de la noción Derivada: de la epistemología de Joseph Luis Lagrange al diseño de una situación didáctica. *Revista Latinoamericana de Educación Matemática*, 3(3), 265-292.
- Cardeñoso, J. M., Flores, P., & C, A. (2001). el desarrollo profesional de los profesores de matemáticas como campo de investigación. In G. P & L. Rico (Eds.), *Iniciación a la investigación en didáctica de la matemática. Homenaje al profesor Mauricio Castro* (pp. 233-244). Granada: Universidad de Granada.
- Dolores, C. (2007). La derivada y el cálculo. Una mirada sobre su enseñanza a través de los textos y programas. In UAG (Ed.), *Centro de investigación en Matemática*. chilpancingo: Centro de investigación en Matemática Educativa.
- Ernest, P. (1994). Varieties of constructivism: Their metaphors, epistemologies and pedagogical implications. *Hiroshima Journal of Mathematics Education*, 2, 1-14.
- Font, V. (1999). *Procedimientos para obtener expresiones simbólicas a partir de las gráficas. Aplicaciones de las derivadas* Universitat de Barcelona, Barcelona.
- Font, V. (2000). Representaciones ostensivas que pueden ser activadas en el cálculo $f'(x)$. *Uno. Revista Didáctica de las matemáticas*, 25, 21-40.
- Font, V. (2002). Una organización de los programas de los programas de investigación en Didáctica de las Matemáticas. *EMA*, 7, 127-170.
- Font, V. (2005a). *Funciones y derivadas*. Paper presented at the XXI Coloquio distrital de matemáticas y estadística, Colombia.
- Font, V. (2005b). Una aproximación ontosemiótica a la didáctica de la derivada. In A. Maz, B. Gómez & M. Tollalbo (Eds.), *Noveno simposio de la sociedad española de Educación* (pp. 111-128). Córdoba: Sociedad Española de investigación en Educación Matemática SEIEM.
- Font, V. (2009). Formas de argumentación en el cálculo de la función derivada de la función $f(x)=x^2$ sin usar la definición por límites. *Unión, Revista Iberoamericana de Educación Matemática*, 18, 15-29.
- García, L. A. (2009). *Un estudio sobre el conocimiento didáctico del contenido (cdc) de profesores de matemáticas que enseñan cálculo diferencial a estudiantes de carreras de ciencias económicas*. Universitat Autònoma de Barcelona, Barcelona.
- Gavilán, J. M. (2006). El papel del profesor en la enseñanza de la Derivada. Análisis desde una perspectiva congitiva. *Educación Matemática*, 18, 167-170.
- Godino, J. (2009). Categorías de análisis de los conocimientos del profesor de matemáticas. *Unión, Revista Iberoamericana de Educación Matemática*, 20, 13-31.
- Godino, J. (2012). origen y aportaciones de la perspectiva ontosemiótica de investigación en Didáctica de la Matemática. In A. Estepa, A. Contreras, J. Deulofeu, M. C. Penalva, F. J.

- García & L. Ordóñez (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XVI* (pp. 49-68). Jaén: SEIEM.
- Gómez, P. (2007). *Desarrollo del Conocimiento Didáctica en un plan de formación inicial de profesores de matemáticas de secundaria*. Tesis Doctoral, Universidad de Granada, España.
- Guacaneme, E., Astudillo, Y., Castillo, H., Obando, G., & Torres, L. (1995). [La filosofía de la Educación Matemática. Paul Ernest].
- Guacaneme, E., & Mora, L. (2011). La educación del profesor de matemáticas como campo de investigación. *Papeles*, 3(6), 25.
- Hähkiöniemi, M. (2008). Durability and meaningfulness of mathematical knowledge: the case of the derivate concept. *PME-NA XXX*, 32(3), 120.
- Lakatos, I. (1978). *Pruebas y refutaciones. La lógica del descubrimiento matemático*. Madrid: Alianza Editorial.
- Márquez, A. (2009). *La formación inicial para el nuevo perfil del docente de secundaria. Relación entre la teoría y la práctica*. Universidad de Málaga, Málaga, España.
- Mateus, E. (2011). Epistemología de la Derivada como fundamento del Cálculo Diferencial. *Voces y Silencios*, 2(especial), 3-21.
- Montiel, G. (2005). Interacciones en un escenario en línea. el papel de la socioepistemología en la resignificación de la Derivada. *Relime*, 8(2), 219-235.
- Moreno, M. M. (2005). El papel de la didáctica en la enseñanza del cálculo: evolución, estado actual y retos futuros. In A. Maz, B. Gómez & M. Torralba (Eds.), *IX Simposio de la sociedad española de investigación en Educación Matemática* (pp. 81-96). Córdoba, España: Universidad de Córdoba.
- Moreno, S., & Cuevas, C. A. (2004). Interpretaciones erróneas en los conceptos de máximos y mínimos en el Cálculo diferencial. *Educación Matemática*, 16(1665-52826), 93-104.
- Pino-Fan, L., Godino, J., Castro, W., & Font, V. (2012). Key epistemic features of mathematical knowledge for teaching the derivate. In T. Y. Tso (Ed.), *Proceedings of the 36 Conference of the international Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 3, pp. 297-304). Taiwan: PME.
- Pino-Fan, L. R., Godino, J. D., & Font, V. (2011). Faceta epistémica de conocimiento Didáctico-Matemático sobre la Derivada. *Educación Matemática*, 13, 141-178.
- Pinto, J. (2010). *Conocimiento didáctico del contenido sobre la representación de datos estadísticos: estudios de casos con profesores de estadística en carreras de psicología y educación*. Doctoral, Universidad de Salamanca, Salamanca.
- Potari, D., Zachariades, T., Christou, C., Kyriazis, G., & Pitta-Pantazi, D. (2007). *Proceedings of the Fifth Congress of the European Society for Research in Mathematics Education*. Paper presented at the Teachers' mathematical knowledge and pedagogical practices in the teaching of derivative, Larnaca.
- Rendón, P., & Esteban, P. V. (2007). *Investigación e innovación matemática en Colombia: conocimiento profesional y competencias matemáticas*. Paper presented at the Estrategias de intervención pedagógica en el proceso de aprendizaje - enseñanza de las matemáticas para el concepto de derivada, Cali.
- Robles, M. G., castillo, A. G. D., & Font, V. (2010). *La función derivada a partir de la visualización de la linealidad local*. Paper presented at the Investigación en Educación Matemática
- Rojas, C. (2008). *Reconstrucción del concepto de derivada en docentes de matemáticas*. Especialización en Educación Matemática, Universidad industrial de Santander, Bucaramanga-Colombia.
- Rojas, C., & Guacaneme, E. (2013). ¿Qué nos dicen las investigaciones en Didáctica sobre la derivada? *Ciencia, ingeniería y educación científica, especial*, 798.
- Salazar, C., Díaz, H., & Bautista, M. (2009). Descripción de los niveles de comprensión del concepto de derivada. *Tecné, epistemis y Didaxis*, 26, 62-81.

- Salinas, P., Alanis, J., Pulido, R., Santos, F., Escobedo, J., & Garza, J. (2002). *Elementos del cálculo: Reconstrucción conceptual para el aprendizaje y enseñanza* (Vol. 2). México: Editorial Trillas.
- Sánchez-Matamoros, G., Blanco, M., & Llinares, S. (2006). el desarrollo del esquema de derivada. *Enseñanza de las ciencias*, 24, 85-98.
- Sánchez-Matamoros, G., García, M., & Llinares, S. (2007). Un indicador en la comprensión del esquema de derivada: uso de las relaciones lógicas. In M. F. Camacho, Pablo; Bolea, María Pilar (Ed.), *Investigación en Educación Matemática*. San Cristobal de la Laguna.
- Sánchez-Matamoros, G., García, M., & Llinares, S. (2008). La comprensión de la Derivada como objeto de investigación en Didáctica de la Matemática. *Revista Latinoamericana de Educación Matemática*, 11(2), 267-296.
- Sánchez, M., & Molina, J. G. (2006). Pensamiento y lenguaje variacional: una aplicación al estudio de la Derivada. *Acta Latinoamericana del matemática educativa*, 19, 739-744.
- Shulman, L. S. (1986a). Paradigms and research programs in the study of teaching In M. C. Wittrock (Ed.), *Handbook of research on teaching*. New York: MacMillan.
- Shulman, L. S. (1986b). Those who understand: Knowledge growth in teaching. *Educational Research*, 15(2), 4-14.
- Vargas, A. R., Torres, M. A., & Quintero, N. L. (2009). *La derivada a la Caratheodory, una nueva concepción en el aprendizaje y enseñanza del Cálculo*. Nariño, Colombia.
- von Glasersfeld, E. (1995). Radical constructivism. A way of knowing and learning. London: The Falmer Press.
- Vrancken, S., Engler, A., & Müller, D. (2008). Una propuesta para la introducción al concepto de derivada desde la variación. *Revista Premisa*, 10(38), 36-45.
- Wittgenstein, L. (1983). *Investigaciones filosóficas*. Barcelona: Laia.
- Wittgenstein, L. (1987). *Observaciones sobre los fundamentos de la matemática*. Madrid: Alianza Editorial.

ANEXOS

PROGRAMA DE LA UNIVERSIDAD PEDAGÓGICA NACIONAL



UNIVERSIDAD PEDAGÓGICA
NACIONAL

Educadora de educadores

FACULTAD DE CIENCIA Y TECNOLOGÍA
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS
Licenciatura en Matemáticas
Enseñanza y Aprendizaje del Cálculo
2013-I

I. IDENTIFICACIÓN DEL PROGRAMA

Código del Espacio Académico:	1444427-1
Semestre en el Pensum:	6°
Prerrequisito(s):	Cálculo Diferencial y Cálculo Integral
Número de créditos:	4
Intensidad ADD (por semana):	4 horas
Intensidad TI (por semana):	8 horas
Horario del Espacio Académico:	Martes y Jueves de 2:00pm a 4:00pm
Nombre del Profesor:	Rodolfo Vergel Causado
Correo electrónico del profesor:	rodolfovergel@gmail.com

II. PRESENTACIÓN DEL CURSO

El objetivo fundamental en este espacio académico es estudiar el *Conocimiento Didáctico* sobre el Cálculo de la Educación Básica y Media, entendido este conocimiento didáctico como componente del conocimiento profesional del profesor de matemáticas que se integra y complementa con el conocimiento matemático sobre el Cálculo, con el conocimiento curricular y el conocimiento pedagógico general, en tanto componentes de tal conocimiento profesional.

La aproximación al conocimiento de la *Didáctica del Cálculo* se hace necesaria debido en gran parte a las dificultades que presentan los estudiantes cuando abordan problemas asociados al Cálculo y a la manera tradicional como se enseñan en las aulas escolares. Por tales razones, dicha aproximación se realiza desde al menos tres perspectivas interactuantes y no excluyentes. Una perspectiva fenomenológica-epistemológica que aborda el estudio de la naturaleza del Cálculo y de sus objetos, así como su papel en el tratamiento (particularmente en la modelación) de la variación y el cambio. Una perspectiva curricular que estudia el pensamiento variacional –en tanto tipo de pensamiento matemático– y cómo a través de propuestas y actividades curriculares se busca su desarrollo. Y una perspectiva didáctica que pone el acento en las variables que median la comprensión de los objetos del Cálculo.

III. APRENDIZAJES ESPERADOS

Se espera que el trabajo a realizar en el espacio académico posibilite una serie de discusiones y comprensiones que les permita a los estudiantes:

- Reconocer los objetos de estudio del Cálculo y reflexionar sobre las posibilidades didácticas de enseñanza, aprendizaje y evaluación.
- Identificar en la literatura nacional e internacional elementos teóricos de la didáctica del Cálculo que han sido decantados a partir de la investigación y usarlos como herramientas analíticas en la observación de fenómenos asociados a la enseñanza y el aprendizaje del Cálculo en la educación básica y media.

- Construir y/o adaptar tareas o actividades, fundamentadas teóricamente, que posibiliten el aprendizaje de algunos objetos del Cálculo, reconociendo la importancia de la gestión del profesor en la clase.
- Identificar las potenciales dificultades de los estudiantes y los tipos de pensamiento asociados al aprendizaje del Cálculo (v.g., variacional, relacional, analógico), que están involucrados en las actividades de enseñanza y aprendizaje.

IV. CONTENIDOS

- Objetos de estudio del Cálculo: Acumulación y Variación
- Aspectos históricos en el surgimiento del Cálculo
- Pensamiento variacional y modelación. El cambio
- La incorporación de las nuevas tecnologías a la enseñanza y el aprendizaje del Cálculo
- Dificultades y errores en los procesos de aprendizaje del Cálculo
- El Cálculo en el currículo de la educación básica y media

V. METODOLOGÍA

El trabajo independiente se basa en la lectura y estudio de documentos que refieren información sobre los objetos de estudio del Cálculo y su didáctica. Los estudiantes prepararán exposiciones, elaborarán talleres o tareas que se propongan como trabajo extra-clase y realizarán informes escritos que el profesor proponga. Por su parte, el trabajo de acompañamiento directo del docente consistirá en esencia en la participación de las dos sesiones semanales y presenciales del Curso. En dichas sesiones se realizará la presentación de los objetos de estudio por parte de los estudiantes o del profesor y se promoverán discusiones acerca de las ideas centrales sobre éstos. Igualmente, en éstas se desarrollarán algunos trabajos en grupos, que exijan y promuevan el trabajo y aprendizaje colaborativo. Así mismo, se propondrán algunos ejercicios de redacción de textos cortos en relación con casos asociados a la enseñanza y el aprendizaje del Cálculo.

Práctica Inicial

La práctica inicial en este espacio académico corresponde a la observación, el registro audiovisual y análisis de las clases de un curso de Cálculo (o Precálculo), desarrolladas durante una semana en una institución de Educación Media o, eventualmente, en la Universidad Pedagógica Nacional. El análisis se llevará a cabo, en la medida de lo posible, en dos niveles: el nivel *macro* que consiste en el análisis del contexto curricular general del curso observado y el nivel *micro* que corresponde al análisis didáctico del tratamiento del tema específico abordado en las sesiones observadas. Este trabajo se desarrollará preferiblemente en grupos de dos estudiantes y se entregará un informe analítico del desarrollo de la clase y/o de las producciones de los estudiantes de la clase y/o de las programaciones del área. El análisis se hará a partir de una serie de *categorías* que se construirán y discutirán en el espacio académico.

VI. EVALUACIÓN

La evaluación del desempeño de los estudiantes se realizará a través de la valoración de las siguientes actuaciones, que fungen como instrumentos de evaluación:

- Exposiciones realizadas en las sesiones presenciales en grupos de dos o tres estudiantes (durante el semestre académico), las cuales, entre otras cuestiones, presentan las categorías de análisis para interpretar la clase de Cálculo y/o los documentos curriculares que tenga el colegio a donde irán a hacer la práctica institucional. Cada grupo de trabajo entregará un documento escrito que sintetice la exposición. El promedio de: la exposición referida como el documento entregado, la producción de informes de reflexión, talleres, quices y participación significativa en las discusiones de clase, corresponde al primer parcial.
- El informe de la Práctica inicial, con las especificaciones ya señaladas y que corresponde al segundo parcial.
- Elaboración de una propuesta de tareas o actividades, fundamentada teóricamente (construida durante el semestre académico), que posibilite el aprendizaje de algunos objetos del Cálculo. La elaboración de esta propuesta tiene como insumo el informe de la práctica inicial, en tanto los estudiantes deben tomar postura frente al análisis realizado en la institución que han visitado. Este trabajo, junto con una entrevista realizada por el profesor, corresponden al examen final. La entrevista persigue fundamentalmente indagar sobre el conocimiento que han capitalizado los estudiantes en relación con la didáctica del Cálculo y, quizás, las reflexiones que han logrado hacer sobre la práctica de enseñar Cálculo en la educación básica y media.

Prueba	Porcentaje
<i>I Parcial</i>	40% (20% conocimiento teórico y 20% conocimiento práctico)
<i>II Parcial</i>	30% (15% conocimiento teórico y 15% conocimiento práctico)
<i>Examen final y Entrevista</i>	30% (15% conocimiento teórico y 15% conocimiento práctico)

VII. BIBLIOGRAFÍA

- Artigue, M. (1998). Enseñanza y aprendizaje del análisis elemental: ¿qué se puede aprender de las investigaciones didácticas y los cambios curriculares? *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, 1(1), 40-55.
- Azcárate, C., & Deulofeu, J. (1996). *Funciones y gráficas* (Vol. 26). Madrid: Editorial Síntesis.
- Camargo, L., & Guzmán, A. A. (2005). *Elementos para una Didáctica del Pensamiento Variacional. Relaciones entre la pendiente y la razón*. Bogotá: Cooperativa Editorial Magisterio.

- Castiblanco, A. C., Urquina, H., Acosta, E., & Rodríguez, F. (2004b). La variación y el cambio a la luz de la Historia de las Matemáticas. In *Pesamiento Variacional y Tecnologías Computacionales* (pp. 1-10). Bogotá: Ministerio de Educación Nacional.
- Castiblanco, A. C., Urquina, H., Acosta, E., & Rodríguez, F. (2004c). La variación y el cambio en el Currículo de Matemáticas de Colombia. In *Pesamiento Variacional y Tecnologías Computacionales* (pp. 11-16). Bogotá: Ministerio de Educación Nacional.
- Castiblanco, A. C., Urquina, H., Acosta, E., & Rodríguez, F. (2004e). Uso de tecnologías computacionales. In *Pesamiento Variacional y Tecnologías Computacionales* (pp. 27-29). Bogotá: Ministerio de Educación Nacional.
- Colombia, M. E. N. (1998). *Matemáticas. Lineamientos curriculares*. Bogotá: Ministerio de Educación Nacional.
- Colombia, M. E. N. (2006). *Estándares básicos de competencias en Lenguaje, Matemáticas, Ciencias y Ciudadanas*. Bogotá: Ministerio de Educación Nacional.
- Cordero, F. (2001). La distinción entre construcciones de cálculo. Una epistemología a través de la actividad humana *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, 4(2), 103-128.
- Font, V. (2005). *Funciones y derivadas*. Paper presented at the XXI Xoloquio Distrital de Matemáticas y Estadística.
- Freudenthal, H. (1983). Functions. In *Didactical Phenomenology of Mathematical Structures* (pp. 491-578). Dordrecht/Boston/Lancaster: D. Reidel Publishing Company.
- Guacaneme, E. A. (2003). Estudio de la variación conjunta en la identificación de funciones. In *Matemática educativa: fundamentos de la matemática universitaria* (pp. 129-136). Bogotá: Editorial Escuela Colombiana de Ingeniería.
- Ímaz J., C. & Moreno A., Luis. Sobre el desarrollo del cálculo y su enseñanza. *El Cálculo y su Enseñanza* © 2009 Cinvestav del Instituto Politécnico Nacional, México D.F.
- Kronfeller, M. (1996). The history of the concept of function and some implications for classroom teaching. In R. Calinger (Ed.), *Vita mathematica: historical research and integration with teaching* (pp. 317-320). Washington: Mathematical Association of America.
- Moreno-Armella, L. E., & Waldegg, G. (2000). An Epistemological History of Number and Variation. In V. Katz (Ed.), *Using History to Teach Mathematics: An International Perspective* (pp. 183-190). Washington: Mathematical Association of America.
- Moreno, S., y Cuevas, C.A. (2004). Interpretaciones erróneas sobre los conceptos de máximos y mínimos en el cálculo diferencial *Educación Matemática*, 16(2), 93-104.
- Salazar, C., Díaz, H., & Bautista, M. (2009). Descripción de niveles de comprensión del concepto de derivada. *Tecné, Episteme y Didaxis*, 26, 62-82.
- Sánchez-Matamoros, G., García, M., & Llinares, S. (2008). La comprensión de la derivada como objeto de investigación en Didáctica de la Matemática. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, 11(2), 267-296.
- Sfard, A. (1991). On the dual nature of mathematical conceptions: Reflections on processes and objects as different sides of the same coin. *Educational Studies in Mathematics*, 22(1), 1-36.
- Vasco, C. E. (2002). *El pensamiento variacional, la modelación y las nuevas tecnologías*. Paper presented at the Tecnologías Computacionales en el Currículo de Matemáticas, Bogotá.

PROGRAMA DE LA UNIVERSIDAD INDUSTRIAL DE SANTANDER

UNIVERSIDAD INDUSTRIAL DE SANTANDER FACULTAD DE CIENCIAS ESCUELA DE MATEMÁTICAS Licenciatura en Matemáticas	
DIDÁCTICA DEL CÁLCULO	NÚMERO DE CRÉDITOS: 4
CODIGO: 24444	
REQUISITOS: Ecuaciones Diferenciales	
INTENSIDAD HORARIA SEMANAL: 12	TAD: 4 TI: 8
TALLERES:	LABORATORIO: TEÓRICA: 4
JUSTIFICACIÓN	
<p>Es universalmente aceptado llamar Pensamiento Matemático Avanzado a los temas del Cálculo. Conceptos como el infinito, el límite, continuidad, derivada e integral, que ocuparon tanto tiempo en la agenda de los mejores matemáticos durante un periodo cercano de 20 siglos para lograr su manejo adecuado, se constituyen en todo un reto para los estudiantes de los últimos años de la educación básica y de los primeros semestres de universidad. Cómo abordar estos temas en el salón de clase se constituye en una necesidad para el futuro docente ya que los resultados muestran que las dificultades que genera su aprendizaje son inevitables. Identificar dificultades, concepciones erradas y actuar en consecuencia, diseñando situaciones didácticas que permitan superarlas, es una exigencia para cualquier profesor de matemáticas.</p>	
PROPÓSITO Y COMPETENCIAS	
<p>Propósito de la asignatura Ofrecer -desde la teoría y la práctica- fundamentos para el diseño de metodologías adecuadas para el aprendizaje del cálculo.</p> <p>Competencias a desarrollar en la asignatura En concordancia con el propósito de la asignatura, se espera que los estudiantes posean las siguientes competencias al finalizar el curso:</p> <ul style="list-style-type: none"> • Integran didácticamente las diferentes etapas históricas vividas en la construcción teórica del cálculo. • Identifican las dificultades que los estudiantes presentan con los conceptos y procedimientos del cálculo. • Identifican las concepciones que los estudiantes poseen y/o adquieren acerca de los objetos del cálculo. • Diseñan actividades didácticas que permitan aprendizajes significativos en los estudiantes. 	
CONTENIDOS	
<ol style="list-style-type: none"> 1. Historia del desarrollo conceptual del cálculo. 2. Dificultades y concepciones de los estudiantes acerca del concepto de función. 3. Dificultades y concepciones de los estudiantes acerca del concepto de límite. 4. Dificultades y concepciones de los estudiantes acerca del concepto de derivada. 5. Dificultades y concepciones de los estudiantes acerca del concepto de integral. 6. Análisis de algunas propuestas para la enseñanza del cálculo. 	
ESTRATEGIAS DE ENSEÑANZA Y APRENDIZAJE QUE APOYARÁN EL TAD Y TI	
<p>La metodología a implementar se basa en la concepción del salón de clase como el espacio adecuado para realizar discusiones y debates alrededor de los diferentes temas del cálculo y su didáctica. Para garantizar la participación de los estudiantes, se adoptará una metodología de seminario mediante la cual los estudiantes constituidos en grupos, prepararán alguno de los temas del curso y luego lo presentarán ante sus colegas. El papel del profesor, además de dirigir la discusión, consiste en "desequilibrar" a los estudiantes a través de cuestionamientos permanentes a la presentación del grupo expositor como a los demás estudiantes a quienes debe involucrar en la reflexión y discusión de las situaciones que se vayan presentando.</p>	

La filosofía que subyace a este planteamiento se puede considerar científica en el sentido de la indagación permanente en búsqueda de una explicación que permita comprender los argumentos expuestos y generar nuevos interrogantes. Por el carácter de seminario que se adopta en el curso, la presencia activa de todos los participantes se hace fundamental. Los estudiantes realizarán tutoría a cinco estudiantes de bajo rendimiento de Cálculo I que ofrece la Escuela de Matemáticas como un primer contacto directo de la enseñanza de estos temas. Esta actividad les va a permitir identificar directamente las dificultades que los estudiantes tienen con los conceptos y procedimientos del Cálculo al mismo tiempo que les permite conocer los vacíos en su formación básica. El curso culmina con un trabajo de innovación didáctica en el cual los estudiantes propondrán una serie de actividades que, a su juicio, causen aprendizajes significativos en los estudiantes.

ESTRATEGIAS DE EVALUACIÓN

Indicadores de logros

La creatividad en el diseño de actividades que propendan por el desarrollo del pensamiento variacional en los estudiantes. La habilidad para identificar problemas de aprendizaje en los estudiantes respecto al cálculo así como de producir respuestas y actividades que les permitan superarlos. En general su actitud y disposición docente.

Estrategias de evaluación

Exposiciones, tutorías a estudiantes de Cálculo I con problemas de aprendizaje, presentación de propuestas didácticas.

Equivalencia cuantitativa

- Participación activa en el seminario: 10%.
- Dos exposiciones con su reporte escrito: 20%.
- Evaluaciones escritas: 20%
- Informe de las Tutorías: 30%.
- Propuesta Didáctica alrededor de un tema de cálculo para estudiantes de secundaria: 20%.

BIBLIOGRAFÍA

- Baron, M. E. (1969). *The Origin of the Infinitesimal Calculus*. Pergamon Press.
- Edwards, C.H. Jr. (1979). *The Historical Development of the Calculus*. Springer Verlag.
- Eves, H. (1976). *An Introduction to the History of Mathematics*. Fourth Edition, Holt, Rinehart, Winston.
- GrattanGuinnes. *Del Cálculo a la Teoría de Conjuntos*.
- Salinas, P., Alarús, J.A., Pulido, R., Santos, F., Escobedo, J.C., Garza, J.L. (2002). *Elementos del Cálculo*. Editorial Trillas.
- Struik, D. J. (1969). *A Source Book in Mathematics*. HarvardUniversity Press.
- Artículos resultados de investigación publicados en revistas tales como: *Educational Studies in Mathematics, Recherches en Didactique des Mathématiques, For the Learning of Mathematics, Journal for Research in Mathematics Education*.
- Trabajos de grado de Licenciatura en Matemáticas, y de Especialización en Matemática Educativa relacionadas con objetos del cálculo.
- Tesis de grado de magíster o doctorado en Matemática Educativa relacionadas con objetos del cálculo.

PROGRAMA DE LA UNIVERSIDAD PEDAGÓGICA Y TECNOLÓGICA DE COLOMBIA



PROGRAMA ACADEMICO: LICENCIATURA EN MATEMATICAS Y ESTADISTICA

SEMESTRE: VIII

ASIGNATURA: DIDACTICA DEL CALCULO Y LA ESTADISTICA

CODIGO: 8107682

NUMERO DE CREDITOS: 3

PRESENTACION

Trata del estudio de los dominios conceptuales del Cálculo y la Estadística desde la perspectiva de los lineamientos y estándares Curriculares del área de matemáticas en Educación Básica y Media propuestos por el MEN, y de la caracterización de los pensamientos variacional y aleatorio implicados.

Además, se presentan algunas herramientas para el análisis didáctico de los objetos matemáticos y se estudian las estrategias metodológicas de Taller constructivo y la Enseñanza problema, como conocimiento base para el diseño y gestión de secuencias didácticas que favorezcan el desarrollo del pensamiento matemático.

JUSTIFICACION

El estudiante requiere caracterizar los dominios conceptuales del Cálculo y la Estadística, de modo que le permita profundizar en el estudio de errores y dificultades en el aprendizaje, y analizar, diseñar, desarrollar y evaluar secuencias didácticas que promuevan el desarrollo del pensamiento variacional y aleatorio.

En esta asignatura se aborda la transposición didáctica de las matemáticas disciplinares a las matemáticas escolares correspondientes a los pensamientos variacional y aleatorio, se aplican conocimientos pedagógicos y didácticos que junto con la reflexión sobre la práctica, se imbrican e interrelacionan para generar y hacer evolucionar el conocimiento profesional en la formación inicial del educador matemático.

Su finalidad es introducir al estudiante para profesor en su campo profesional - el mundo de la educación matemática y su concreción en el nivel de educación secundaria - para "aprender a enseñar" a la luz de las teorías pedagógicas y didácticas.

COMPETENCIAS

- Dominar los contenidos de las matemáticas y las matemáticas escolares relativas al pensamiento variacional y aleatorio del currículo de educación secundaria, así como el cuerpo de conocimientos didácticos en torno a los procesos de enseñanza y aprendizaje respectivos.
- Conocer la normativa del sistema educativo referente a los lineamientos y estándares del área de Matemáticas para Educación Secundaria y aplicarla en las prácticas programadas en la asignatura.
- Diseñar, desarrollar y evaluar situaciones de aprendizaje y Secuencias Didácticas que faciliten la construcción, comprensión, uso y transferencia del conocimiento matemático.
- Utilizar técnicas de comunicación para dotar de significado los conceptos matemáticos.
- Conocer recursos y materiales (bibliográficos, computacionales, audiovisuales, manuales) y emplearlos en la enseñanza de las Matemáticas de secundaria.

METODOLOGIA

La asignatura tiene las dimensiones teórica e investigativa. El trabajo en el curso se fundamenta en la participación activa y constructiva en forma individual y colectiva. Las experiencias didácticas se realizarán con los compañeros de grupo para ser evaluadas colectivamente. Se utilizarán las siguientes estrategias:

- Exposiciones y talleres orientados por el profesor y estudiantes
- Seminarios Investigativos
- Estudio y análisis de casos, videos, tareas o situaciones de aprendizaje
- Experiencias didácticas.
- Elaboración de informes de lecturas, consultas o prácticas.

Además, para fortalecer el conocimiento profesional se programará como actividad complementaria una salida de observación al año, con el fin de confrontar y ampliar los referentes teóricos estudiados en la asignatura.

INVESTIGACION

Consulta y exploración bibliográfica sobre teorías de Didáctica del Cálculo y la Estadística, y de revistas de investigación e innovación en Educación Matemática y Estadística, con el fin de hacer aplicaciones en el diseño de secuencias didácticas para Educación Básica Secundaria y Media.

MEDIOS AUDIOVISUALES

Video Beam – Cámara fotográfica, Cámara filmadora - Computadores

EVALUACIÓN
<p>EVALUACIÓN COLECTIVA</p> <ul style="list-style-type: none"> - Aporte, compromiso y desempeño en el cumplimiento de los objetivos del trabajo colaborativo. - Calidad en la forma de presentación y contenido de los informes y trabajos colectivos.
<p>EVALUACIÓN INDIVIDUAL</p> <p>En general se tendrá en cuenta lo establecido en el reglamento estudiantil de la universidad.</p> <p>Formas de Evaluación: autoevaluación, <u>coevaluación</u> y <u>heteroevaluación</u>.</p> <p>Clases de Evaluación: diagnósticas, formativas y <u>sumativas</u>.</p> <p>Se evaluará sistemáticamente la construcción y desarrollo de :</p> <ul style="list-style-type: none"> - Contenidos conceptuales relativos a la asignatura - Las competencias profesionales mencionadas anteriormente. - Contenidos Actitudinales: Compromiso con su formación profesional, puntualidad, asistencia, interés, creatividad, cumplimiento con la entrega de informes y trabajos. <p>Para la evaluación <u>sumativa</u> cada docente fijará los criterios para los componentes y sus respectivos porcentajes.</p>



CONTENIDOS TEMATICOS
<p>1. PENSAMIENTO VARIACIONAL Y SISTEMAS ANALITICOS</p> <p>1.1 Caracterización del pensamiento variacional</p> <p>1.2 Estándares básicos y competencias para la comprensión de los conceptos del Cálculo</p> <p>1.3 Errores, dificultades y obstáculos en el aprendizaje de los conceptos básicos del Cálculo</p> <p>1.4 Uso de las tecnologías para la enseñanza y aprendizaje del Cálculo</p> <p>1.5 Estudio y análisis de propuestas didácticas para la enseñanza y aprendizaje del Cálculo en Educación Secundaria</p> <p>2. EL TALLER CONSTRUCTIVO (TC): ESTRATEGIA PARA APRENDER A PENSAR MEDIANTE LA CONSTRUCCIÓN DEL PENSAMIENTO MATEMÁTICO</p> <p>2.1 Qué es el taller constructivo - Fundamentación teórica</p> <p>2.2 Planeamiento del TC</p> <p>2.3 Dinámica interna del TC</p> <p>2.4 Diseño de secuencias didácticas, usando el Taller Constructivo</p> <p>3. PENSAMIENTO ALEATORIO Y SISTEMAS DE DATOS</p> <p>3.1 Caracterización del pensamiento aleatorio</p> <p>3.2 Estándares básicos y competencias estadísticas y probabilísticas</p> <p>3.3 Errores y dificultades en el aprendizaje de la estadística y la Probabilidad</p> <p>3.4 Uso de las tecnologías para la enseñanza y aprendizaje de la Estadística</p> <p>3.5 Estudio y análisis de propuestas didácticas para la enseñanza de la estadística y la probabilidad</p> <p>4. TEORÍA DE SITUACIONES DIDÁCTICAS DE BROUSSEAU</p> <p>4.1 Orígenes de la teoría de Situaciones</p>

LECTURAS MÍNIMAS

- [Azcárate, C.](#) y otros (1996). *Cálculo diferencial e integral*. España: Síntesis. (Los capítulos señalados)
- [Cantoral, R., Farfán, R., Cordero, F.](#) (2000). *Situaciones de cambio, pensamiento y lenguaje variacional*. En: [Cantoral, R., Farfán, R., Cordero, F.](#) (2000). *Desarrollo del pensamiento matemático*. Editorial Trillas. México.
- [Godino, J.](#) (1996). *Azar y probabilidad*. Madrid: Síntesis.
- [Medina M. Ana Cecilia](#) (1998) *El taller Constructivo. Estrategia metodológica para aprender a pensar mediante la construcción del conocimiento matemático*. UPTC. Duitama.
- [MEN.](#) (2006). *Estándares básicos de competencias en matemáticas. Pensamientos, azar y Variacional*.



BIBLIOGRAFÍA E INFOGRAFÍA

DIDÁCTICA DEL CÁLCULO

- [Artigue, M.](#) (1998) *La enseñanza de los principios del cálculo: problemas epistemológicos, cognitivos y didácticos*. En: *Ingeniería didáctica en educación matemática*. Bogotá: Una empresa docente. Universidad de los Andes. p. 97-140
- [Cantoral, R., Farfán, R., Cordero, F.](#) (2000) y otros. *Desarrollo del pensamiento matemático*. Editorial Trillas. México.
- [Castro, Robinson Y Castro, Ruby](#) (2012). *Didáctica de las Matemáticas*. Bogotá: Ecce Ediciones.
- [García, G., Serrano, C., Salamanca, J.](#) (2000). *El Estudio de la variación en la educación básica*. Memorias del XVII Coloquio Distrital de Matemáticas Y Estadística. Santafé de Bogotá, D.C.
- [García, G., Serrano, C., Díaz, H.](#) (2002). *La aproximación una noción básica en el Cálculo. Un estudio en la educación básica*. Bogotá: UPN y Conciencias.
- [Medina, A.](#) (1998). *Concepciones del concepto de límite en estudiantes universitarios*. Tesis de maestría. Bogotá: Universidad Pedagógica Nacional
- [Turegano, P.](#) (1998). *Del área a la integral. Un estudio en el contexto educativo*. En: *Enseñanza de las Ciencias*. Vol 16, No. 2; p.233-249.
- [Wenzelburger G, E.](#) (1993). *Cálculo diferencial e integral*. México: Grupo editorial iberoamérica.

DIDÁCTICA DE LA ESTADÍSTICA Y LA PROBABILIDAD

- [Batenero, Carmen](#) (2001). *Didáctica de la Estadística*. España: Universidad de Granada.
- [Nortes, A.](#) (1995). *Encuestas y precios*. Madrid: Síntesis.
- [Perry, P.](#) y otros (1996). *Matemáticas, azar, sociedad*. Conceptos básicos de estadística. Bogotá: Una empresa docente.

REVISTAS DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA EN HEMEROTECA DE LA UPTC

- *Suma / Revista sobre la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas. Federación Española de Sociedades de Profesores de Matemáticas. No. 66 (febrero, 2011); No.*

- Épsilon / Revista de Educación Matemática. Sociedad Andaluza de Educación Matemática, THALES. Vol. 28, (1) (2) (3), 2011. Cádiz, España: SAEM THALES. Cuatrimestral. ISSN: 1131-9321.
- Enseñanza de las Ciencias / Revista de Investigación y Experiencias Didácticas. Instituto de Ciencias de la Educación de la Universidad Autónoma de Barcelona. Vol.30 (1) (2),2012. Barcelona, España: Universidad de Barcelona. Semestral. ISSN: 02124521.

INFOGRAFÍA

www.asocolme.com

www.cinvestav.mx

www.colombiaaprende.edu.co

www.fisem.org : Federación Iberoamericana de sociedades de educación matemática.

www.mat.ucm.es

www.mineduacion.gov.co

www.recursosmatematicos.com

www.ugr.es

www.unex.es

www.uv.es

www.uv.es/relieve/

www.seiem.es Sociedad Española de investigación en Educación Matemática.

www.enseñanzadelasmaticas.com

www.aiem.es/index.php/aiem Revista N°1 de la SEIEM

<http://sinewton.org/numeros/> Revista de Didáctica de las Matemáticas