# EL PAPEL DE LA HISTORIA DEL ÁLGEBRA EN UN CURSO DE DIDÁCTICA PARA LA FORMACIÓN INICIAL DE PROFESORES DE MATEMÁTICAS

JAIRO ALONSO TRIANA YAYA

JOHN FREDI MANRIQUE GARCÍA

UNIVERSIDAD PEDAGÓGICA NACIONAL

FACULTAD DE CIENCIA Y TECNOLOGÍA

DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS

MAESTRÍA EN DOCENCIA DE LA MATEMÁTICA

BOGOTÁ, D.C.

2013

# EL PAPEL DE LA HISTORIA DEL ÁLGEBRA EN UN CURSO DE DIDÁCTICA PARA LA FORMACIÓN INICIAL DE PROFESORES DE MATEMÁTICAS

JAIRO ALONSO TRIANA YAYA

JOHN FREDI MANRIQUE GARCÍA

Trabajo de grado presentado ante el Departamento de Matemáticas de la Universidad Pedagógica Nacional para optar por el título de Magister en Docencia de la Matemática.

Asesora:

LYDA CONSTANZA MORA MENDIETA

UNIVERSIDAD PEDAGÓGICA NACIONAL

FACULTAD DE CIENCIA Y TECNOLOGÍA

DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS

MAESTRÍA EN DOCENCIA DE LA MATEMÁTICA

BOGOTÁ, D.C.

2013

UNIVERSIDAD PEDAGOGICA NACIONAL
Educadora de educadores

**FACULTAD DE CIENCIA Y TECNOLOGÍA**
**DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS**

# ACTA DE EVALUACION DE TESIS DE GRADO

Escuchada la sustentación del Trabajo de Grado titulado ***"El papel de la historia del álgebra en un curso de didáctica para la formación inicial de profesores de matemáticas"*** presentado por los estudiantes:

***Jairo Alonso Triana Yaya - 2011185062***
***John Fredi Manrique García - 2011185047***

Como requisito parcial para optar al título de **Magíster en Docencia de la Matemática**, analizado el proceso seguido por los estudiantes en la elaboración del Trabajo y evaluada la calidad del escrito final, se le asigna la calificación de **Aprobado** con 45 puntos y recomendación de los evaluadores de considerarlo Trabajo de Grado Meritorio.

Observaciones:

---

En constancia se firma a los 25 días del mes de febrero de 2013.

**JURADOS**

Director(a) del Trabajo: Profesor(a) Lyda Constanza Mora Mendieta
*Lyda Constanza Mora Mendieta*

Jurados:

Profesor(a) Ligia Amparo Torres
*Ligia Amparo Torres Rengifo*

Profesor (a) Edgar A Guacaneme S
*Edgar Alberto Guacaneme Suárez*

Para todos los efectos, declaramos que el presente trabajo es original y de nuestra total autoría; en aquellos casos en los cuales hemos requerido del trabajo de otros autores o investigadores, se han dado los respectivos créditos.

## AGRADECIMIENTOS


*A mi mamá que siempre me ha apoyado en todos las facetas de mi vida, a mis hermanos, especialmente a mi hermana Marcela. A mi familia que ha sido y será una motivación para continuar creciendo como persona y como profesional,*

*A mi compañero John cuyas enseñanzas y consejos fueron alimento para el presente trabajo,*

*A mis compañeros de Línea quienes contribuyeron a edificar las bases del presente trabajo,*

*A Carolina que con su compañía y sus consejos motivo la culminación exitosa del trabajo,*

*A la Profesora Lyda quien en todo momento estuvo dispuesta a apoyarnos y quien con sus enseñanzas logró que creciera como profesional en la academia y sobre todo en mi práctica profesional,*

*A todos los profesores de la Maestría, en especial a la profesora Lyda, la profesora Leonor y al profesor Edgar quienes inspiran y son ejemplo con su compromiso y dedicación.*

*Jairo Alonso Triana Yaya*

# AGRADECIMIENTOS

*A Dios que me permite cada vez, más buenas oportunidades,*

*A mi familia que no sólo ha sido apoyo sino sobre todo inspiración, especialmente a mi madre, a mi esposa y a mi hija,*

*A mi compañero Jairo que admiro y de quien he aprendido tanto,*

*A mis compañeros de Línea quienes contribuyeron a edificar las bases del presente trabajo,*

*A la Profesora Lyda quien con disposición y sabiduría supo guiar, enseñar y sobre todo, ser ejemplo para culminar este proceso y pensar en el comienzo del siguiente,*

*A todos los profesores de la Maestría, en especial a la profesora Lyda, la profesora Leonor y al profesor Edgar quienes siempre han tenido una pronta, oportuna y cálida respuesta,*

*A todos aquellos que aunque no se mencionan saben que tienen parte de este pensamiento de gratitud.*

*John Fredi Manrique García.*

# RESUMEN ANALÍTICO EN EDUCACIÓN

| 1. Información General | |
|---|---|
| **Tipo de documento** | Trabajo de Grado |
| **Acceso al documento** | Universidad Pedagógica Nacional. Biblioteca Central |
| **Titulo del documento** | El papel de la Historia del Álgebra en un curso de Didáctica para la formación inicial de profesores |
| **Autor(es)** | MANRIQUE GARCÍA JOHN FREDI<br>TRIANA YAYA JAIRO ALONSO |
| **Director** | LYDA CONSTANZA MORA MENDIETA |
| **Publicación** | Bogotá. Universidad Pedagógica Nacional. Febrero 2013. 140 páginas |
| **Unidad Patrocinante** | Universidad Pedagógica Nacional |
| **Palabras Claves** | *Historia de las Matemáticas, Historia del Álgebra, Conocimiento Profesional del Profesor de Matemáticas, relación Historia de las Matemáticas-Conocimiento Profesional del Profesor de Matemáticas.* |

| 2. Descripción |
|---|
| Reportamos el trabajo de grado realizado en el marco de la Maestría en Docencia de la Matemática, cuyo centro de interés y objeto de estudio fue caracterizar el papel y el uso que se hace de la Historia del Álgebra en el espacio académico Enseñanza y aprendizaje de la Aritmética y el Álgebra (EAAA), para la formación inicial de profesores de Matemáticas (FIPM). El reporte contempla: el área problemática que enmarca la elaboración del trabajo, el marco de referencia en el que se apoya el análisis, la metodología usada para el tratamiento de los datos y los resultados que se interpretan a |

partir de los objetivos, el marco de referencia y el conocimiento adquirido.

## 3. Fuentes

A continuación se listan las principales fuentes usadas en el desarrollo del presente trabajo


Anacona, M. (2003). La Historia de las Matemáticas en la Educación Matemática. *Revista EMA, Investigación e innovación en educación matemática., 8(1)*, 30-46.

Charbonneau, L. (1996). From Euclid to Descartes: Algebra and its relation to geometry. En Bednarz, &Kieran, *Approaches to algebra* (pp. 12-37). Kluwer academic publishers.

Grossman, P. L. (1990). *The Making of a Teacher. Teacher Knowledge and Teacher Education.*New York: Columbia University.

Guacaneme, E. (2008). Una aproximación a la relación Historia de las Matemáticas-conocimiento del profesor de Matemáticas. Tercer encuentro de programas de formación de profesores de matemáticas. Bogotá.

Guacaneme, E. (2010). ¿Qué tipo de Historia de las Matemáticas debe ser apropiada por un profesor? Revista EDUCyT, 2.

Guacaneme, E. (2011). La Historia de las Matemáticas en la educación de un profesor: razones e intenciones. *XIII CIAEM-IACME*.

Kleiner, I. (2007). *A History of Abstract Álgebra.*Boston: Birkhäuser.

Ochoviet, C. (2007). De la resolución de ecuaciones polinómicas al álgebra abstracta: un paseo a través de la Historia. *Revista digital Matemática, Educación e Internet, 8*(1), 1-19.

Rico , L. (2004). Reflexiones sobre la formación inicial del profesor de Matemáticas de secundaria. *Profesorado, revista de curriculum y formación del profesorado, 8*(1).

Shulman, S. L. (2005). Conocimiento y Enseñanza: Fundamentos de la nueva reforma. *PROFESORADO. Revista de curriculum y formación de profesorado, 9*(002), 1 - 30.

Stacey , K. (2008). Mathematics for secondary teaching. En P. Sullivan, & T. Wood (Eds.), *The international handbook of mathematics teacher education* (Vol. 1, pp. 87-113). Sense Publishers.


## 4. Contenidos

El documento se ha ordenado en cuatro capítulos que se ajustan a las normas establecidas por la Universidad Pedagógica Nacional de la siguiente manera:

En el ***capítulo uno,*** denominado *Presentación del Campo problémico*, planteamos el problema que nos ocupa así como la pregunta que orientó el desarrollo del trabajo ¿Cuál es el papel asignado a la Historia de las Matemáticas en un espacio académico de formación de profesores, cuando construyen ideas en torno al álgebra? posteriormente presentamos un contexto de justificación que tiene que ver, por un lado, con las motivaciones personales y profesionales y por otra parte, con la importancia de la investigación dentro del campo de la Educación del Profesor de Matemáticas y la escasa investigación que se ha hecho en el mismo. Al final se delimita el estudio a partir del objetivo general y los objetivos específicos.

En el ***capítulo dos***, denominado *Marco de referencia*, se hace alusión a los referentes teóricos que fundamentan el presente estudio. Estos referentes se organizaron en dos grandes bloques, el primero de ellos hace un recorrido por el conocimiento profesional del profesor de Matemáticas y sus relaciones con el estudio de la Historia de la Matemática, para ello se propuso cuatro apartados en los que se responden, respectivamente las cuestiones ¿Por qué se plantea la apropiación del conocimiento histórico de las Matemáticas por parte de los profesores? ¿Para qué? ¿Cuáles son las intencionalidades con las que se usa la Historia de la Matemática en la formación de profesores? y ¿Qué tipo de Historia debe ser apropiada por un profesor?

El segundo bloque centra la atención en una caracterización de la Historia del Álgebra desde sus objetos de estudio (las ecuaciones como herramienta, las ecuaciones como objeto, relaciones generales entre números, la estructura de los conjuntos numéricos, las estructuras algebraicas) y lo que se denominó procesos trasversales (generalización y sistematización del lenguaje, generalización de los procesos de comprensión, solución y tratamiento).

En el ***capítulo tres***, denominado *Metodología y Análisis de Datos*, se caracteriza el tipo de estudio realizado, se describen los análisis realizados y se reportan los resultados alcanzados. Para lograr lo anterior este capítulo se dividió en los apartados: i) *Acerca del registro de la información* en el que se da cuenta de la recolección y organización de los registros de investigación disponibles, ii) *Acerca de la organización y administración de la información recopilada*, se describen los primeros pasos en la clasificación de los registros, iii) *Constitución del conjunto de datos* se delimita el conjunto de registros a aquellos episodios de clase en los que la Historia del Álgebra o la Historia de las Matemáticas hace parte del discurso de la profesora, de los Profesores en formación o del observador participante, así como algunos elementos preliminares para el análisis y iv) *Análisis de datos* se realiza el análisis de los datos y la triangulación entre las diversas fuentes con ayuda del software ATLAS ti, a la par se presentan resultados parciales para cada uno de los objetivos propuestos.

En el ***capítulo cuatro***, denominado *Síntesis de resultados y conclusiones*, se presentan las diferentes afirmaciones que se deducen luego de hacer el estudio y que fueron el resultado del proceso de construcción de este documento. De este modo, presentamos y proponemos el sistema de categorías para la caracterización de los objetos y procesos históricos del Álgebra y discutimos sobre el sistema de categorías para las intencionalidades de uso de la Historia de la Matemática en la formación de profesores. Por otra parte, se incluyen reflexiones acerca de lo que este estudio podría aportar a un profesor, a un futuro profesor y a un investigador.

**5. Metodología**

La metodología se enmarca en un estudio *cualitativo*, en el que a la luz de los referentes conceptuales del capítulo dos, se hace una descripción organizada analíticamente de un conjunto de episodios en los que se evidencia el uso de la Historia del Álgebra en un espacio académico de La Licenciatura en Matemáticas de la Universidad Pedagógica Nacional denominado *Enseñanza y Aprendizaje de la Aritmética y el Álgebra*.

**6. Conclusiones**

La organización histórica del Álgebra en *objetos de estudio y procesos*, configuró un marco de referencia y se convirtió en una herramienta analítica desde la cual fue posible identificar qué de la Historia del Álgebra fue abordado en el espacio académico EAAA. Esta organización se propone para la discusión pues se considera que es necesario puntualizar tanto los objetos como los procesos y así mismo, validar mediante otros estudios el potencial de dichas categorías.

En cuanto al para qué proponer la apropiación del conocimiento histórico por los profesores en formación, podemos afirmar que las intencionalidades con las que se introdujo la Historia del Álgebra estuvieron en correspondencia parcial con las propuestas teóricas. Se propone diferenciar la intencionalidad teórica denominada "*promover competencias profesionales*" de las intencionalidades (emergentes) que promueven *reflexiones de tipo didáctico.* Hallar asuntos de tipo didáctico que pretendían establecer vínculos entre el conocimiento histórico del Álgebra y el currículo o el aula de Matemáticas permitió identificar el potencial de la HM para el desarrollo del Conocimiento Profesional del Profesor de Matemáticas.

En relación con el tipo de Historia que se promovió en el espacio de formación hay que decir que las fuentes consultadas en el curso fueron de tipo didáctico. En lo que respecta a los objetos estudiados de las Matemáticas podemos decir que se estudian Matemáticas hegemónicas y en algunas ocasiones se hace un estudio de porciones de teorías Matemáticas. En relación con el nivel de profundidad con la que se estudia la HM podemos decir que las interpretaciones realizadas a los textos no permiten pasar de un nivel descriptivo de los hechos históricos (relato histórico) a un nivel analítico (análisis histórico) que permita tener posturas fundamentadas para participar en las discusiones que eran propuestas por la profesora.

Acerca de cómo se promovió el uso de la HM, es posible afirmar que existieron varios momentos de estudio de algunos aspectos históricos del álgebra con diferentes finalidades. El primero de ellos permitió *la identificación de los objetos de estudio del Álgebra.* En el segundo momento se realizó un *estudio comparativo entre los objetos de estudio del Álgebra y los objetos de estudio de la aritmética*. Y un tercer momento en el que los *objetos de estudio del Álgebra fueron puestos en comparación con los desarrollos curriculares del Álgebra* en la escuela. Los momentos no son lineales, se desarrollan de forma paralela y en ellos la reflexión de tipo didáctico es reiterativa por lo que consideramos que no se pretendió un estudio de la HM sino un estudio acerca de la HM en relación con la enseñanza y el aprendizaje de las Matemáticas.

A través del estudio se reconoce que la HM es un asunto de interés en la investigación sobre el Conocimiento Profesional del Profesor de Matemáticas, que la HM tiene el potencial para desarrollar Conocimiento Didáctico acerca del Álgebra y que el conocimiento del desarrollo histórico de un determinado concepto puede brindar valiosas

| |
|---|
| herramientas a un profesor para cuestionar el para qué enseñar, por qué enseñar y cómo enseñar. |

| | |
|---|---|
| **Elaborado por:** | Jairo Alonso Triana Yaya; John Fredi Manrique García. |
| **Revisado por:** | Lyda Constanza Mora Mendieta |

| | | | |
|---|---|---|---|
| **Fecha de elaboración del Resumen:** | 14 | 12 | 2012 |

# TABLA DE CONTENIDO

## TABLA DE ILUSTRACIONES



## TABLA DE REDES

# 1. PRESENTACIÓN DEL CAMPO PROBLÉMICO

## 1.1 ALGUNOS ANTECEDENTES

En el campo de la Didáctica de las Matemáticas, se ha venido configurando una preocupación especial por la formación que reciben los profesores de Matemáticas en sus procesos de formación inicial y educación continuada, debido en gran medida al reconocimiento de una mirada diferente sobre las problemáticas que atañen a los procesos de enseñanza y aprendizaje. Dicha mirada conlleva una profunda reflexión sobre los conocimientos que debe adquirir un profesor (Shulman, 2005) y sobre el uso que hace de los mismos en su quehacer profesional (Rico, 2004), lo cual ha llevado a generar consideraciones acerca de competencias y habilidades a desarrollar en los programas de formación de profesores de Matemáticas.

En medio de esta reflexión algunos autores comoAnacona (2003), Arcavi (1991), Fauvel & Van Maanen (2000), Furinghetti (2007), Guacaneme (2008), entre otros, han puesto la discusión en un tipo de conocimiento específico, el conocimiento de la Historia de las Matemáticas. En primer lugar, Guacaneme (2008) identifica una gran parte de la literatura que aborda la relación Historia de las Matemáticas (HM) – Conocimiento Profesional del Profesor de Matemáticas (CPPM). Esto, afirma el autor de manera modesta, es una aproximación del estado del arte de la temática mencionada. En ese trabajo, se menciona el hallazgo de al menos ocho monográficos de revistas especializadas, cerca de un centenar y medio de resúmenes de referencias relativas al campo, al menos tres tesis doctorales y una de maestría, y al menos nueve libros que se dedican al trabajo y la teorización de la relación mencionada HM - CPPM.

Lo importante de esto, es que se puede vislumbrar una comunidad interesada, reflexionando y produciendo investigaciones frente a la relación HM – CPPM. Además se pone de manifiesto que en verdad es un asunto que ocupa a diversos autores, de diversas culturas y desde diferentes enfoques de la Didáctica de las Matemáticas.

En este sentido, y para evidenciar con un ejemplo la preocupación de la comunidad académica al respecto, en el marco de la tercera escuela nacional de Historia y educación matemática (ENHEM), se reunieron representantes de algunas universidades en un panel que pretendía dar una panorámica de algunas Licenciaturas [1], sus organizaciones curriculares, sus prácticas pedagógicas y las transformaciones de los programas motivadas por los procesos de registro y acreditación de calidad. En el marco de este trabajo, se manifiesta y se analiza el papel de la HM en la Formación Inicial de Profesores de Matemáticas(FIPM) y la manera como cada una de las Universidades aborda esta relación y sus espacios de desarrollo en la formación de profesores[2].En las respuestas dadas por los participantes en el panel se evidencian diversos usos de la Historia de las Matemáticas, ubicación en diferentes semestres, diversos enfoques metodológicos y distintas intenciones (para mayor detalle ver Guacaneme y Torres (2010)).

Por lo tanto, se reconoce que existe una preocupación latente sobre el uso que se hace o puede hacerse de la HM en la FIPM.

Por otro lado, Guacaneme (2008), concluye que existen gran cantidad de estudios teóricos prescriptivos al respecto de la relación HM – FIPM. Sin embargo, y al igual que algunos autores que él mismo referencia, por ejemplo Jankvist (2009), ponen en evidencia el escaso número de proyectos de investigación que den cuenta de la correspondencia de la teoría construida con lo que acontece en el ámbito práctico. Se puede por ejemplo citar las siguientes afirmaciones:

---

[1]Licenciaturas de las Universidades de: Amazonia, Antioquia, Católica de Manizales, Popular del César, Cundinamarca, Nariño, Distrital Francisco José de Caldas, de los Llanos, Industrial de Santander, Surcolombiana, Pedagógica y Tecnológica de Colombia, del Valle, y la Pedagógica Nacional.

[2]En Guacaneme (2008) el Magister Edgar Guacaneme de la Universidad Pedagógica Nacional brindó diferentes referentes conceptuales para analizar el proceso de formación inicial de profesores de Matemáticas, especialmente referido a los temas Conocimiento del profesor de Matemáticas y el papel de la Historia de las Matemáticas en la Educación Matemática.

En primer lugar, Jankvist (2009), un reconocido y joven doctor en el campo, afirma que se ofrece una variedad de argumentos sobre el porqué y el cómo utilizar la HM. Sin embargo, sostiene que hacen falta investigaciones empíricas que den cuenta de la eficacia de su uso. Es decir, existen construcciones teóricas que abarcan el tema en mención, pero son pocas las evidencias sistemáticas que proporcionen validez práctica de ellas.

También por su parte, Anacona (2003), afirma que la complejidad de la relación HM – FIPM y las diversas variables que la caracterizan, determina la necesidad de continuar con la reflexión sobre ésta, "a través de propuestas y prácticas educativas, programas de formación, diversas estrategias de difusión, y naturalmente a través de proyectos de investigación…" (p. 44).

Y quizá una de las afirmaciones más fuertes que dan cuenta de las necesidades investigativas en el campo es hecha por Panagiotou (2010), quien afirma:

> "A lot of favorable testimony has been accumulated about the use of history in mathematics teaching. This opinion, which is common to the majority of the cases, usually comes from subjective impressions and not from regular and systemic studies of the outputs. (p. 33)
>
> "Se ha acumulado una gran cantidad de testimonios favorables sobre el uso de la Historia en la enseñanza de las Matemáticas. Esta opinión, que es común en la mayoría de los casos, por lo general proviene de impresiones subjetivas y no de estudios regulares y sistemáticos de los resultados" (Traducción libre)

De este modo, diversos autores tanto nacionales como extranjeros, hacen un llamado al desarrollo de estudios sistemáticos que permitan hacer una caracterización mucho más fina y ajustada a procesos prácticos en el ámbito de la formación de profesores, el uso de la Historia por parte de profesores en ejercicio, los beneficios del uso de la Historia, entre muchos otros factores. De este modo, es necesario cuestionarse por: ¿Cuáles son las propuestas metodológicas de investigación que se han desarrollado en la literatura? ¿Qué tipo de investigación es necesaria para identificar el uso de la Historia en la formación de profesores? Estas cuestiones ponen de manifiesto que no es un asunto local, sino que hay una preocupación generalizada en el ámbito de educadores matemáticos por el uso que de la Historia se puede hacer para complejizar el conocimiento del profesor de Matemáticas en formación.

Centrando la mirada en un ámbito mucho más local, un grupo de profesores del Departamento de Matemáticas de la Universidad Pedagógica Nacional, tiene como uno de sus intereses identificar los usos que se hacen de la Historia, no solo desde el currículo propuesto sino en el currículo que se desarrolla. Es por ello, que se aprovecha uno de los espacios académicos de la Licenciatura en Matemáticas denominado *Enseñanza y Aprendizaje de la Aritmética y el Álgebra (EAAA)*, para realizar algunas observaciones que incluyen precisamente, caracterizar el papel de la HM en los desarrollos que se proponen y se hacen al interior de tal espacio académico.

A propósito, en el curso EAAA se propone una primera parte en la que el interés gira sobre la caracterización de la naturaleza de la Aritmética y el Álgebra recurriendo a algunos documentos que tratan sobre la Historia y la Epistemología de las ideas de número, ecuación, Álgebra, entre otros. Es aquí donde indaga sobre los usos que se hacen de la HM en relación con la formación que los futuros profesores reciben y las acciones que se proponen por parte de la docente a cargo.

Frente a lo anterior, se puede identificar una preocupación institucional de entrever el uso y las características de la HM en la FIPM en espacios académicos particulares.

## 1.2 DESCRIPCIÓN DEL PROBLEMA Y FORMULACIÓN DE LA PREGUNTA DE INVESTIGACIÓN

La preocupación por las implicaciones y las posibles relaciones entre la Historia de las Matemáticas (HM) y el conocimiento profesional del profesor de Matemática (CPPM) ha permeado el ámbito de investigación en la FIPM y es posible asegurar, dada la cantidad de autores y comunidades de educadores matemáticos que trabajan sobre este tema, que se ha configurado un campo de investigación que pretende caracterizar formas de integrar la Historia de las Matemáticas en la FIPM, particularmente con respecto al *conocimiento didáctico de los profesores (The didactical background of teachers)* (Tzanakis, Arcavi, de Sá, Isoda, Niss, & al, 2000).

El anterior hecho pone de manifiesto un interés por los aspectos relacionados con la HM en la formación de profesores y en particular en lo que refiere al conocimiento didáctico que los profesores deben desarrollar. Dentro del campo de investigación de las relaciones HM-CPPM puede considerarse la formación de profesores como una línea de investigación en la que los estudios han girado en torno a la forma como la HM hace parte de la formación de los profesores (Fauvel & Van Maanen, 2000), las implicaciones que puede llegar a tener su uso en las concepciones de los profesores de Matemáticas(Tzanakis, Arcavi, de Sá, Isoda, Niss, & al, 2000), (Furinghetti & Pehkonen, 2002), argumentos que sustentan el uso de la HM en la formación en Matemáticas (Guacaneme, 2008; Jankvist, 2009, Radford y otros, 2000), estudios que pretenden responder qué tipo de HM deben aprender los profesores y propuestas sobre cómo usar la HM.

Si bien los documentos que se han venido mencionando ponen de manifiesto la utilidad de la HM en la FIPM, no es claro hasta el momento, el tipo de Historia que se debe proponer, pues de acuerdo con Guacaneme (2010) bajo diferentes propuestas de indagación este tipo de Historia que se propone es variable.

El hecho anterior, junto con el llamado que hace Jankvist (2009) frente a la necesidad de desarrollar estudios de tipo experimental que permitan corroborar los resultados teóricos que se han venido desarrollando, configura un espacio de indagación, en la formación inicial de profesores de Matemáticas que permita responder a preguntas del tipo: ¿Cómo participa el discurso de la HM en un discurso particular en la formación de profesores? ¿Qué tipo de HM se pone en juego? ¿Cómo se pone en juego? ¿Cuáles serían los referentes teóricos usados? ¿Qué se quiere promover? ¿Qué tipo de fuentes usar para el desarrollo del conocimiento histórico? Y de un modo más general: ¿Cómo se ve reflejado el conocimiento de la Historia de las Matemáticas en el conocimiento disciplinar, en el conocimiento pedagógico del contenido?

De ese modo, es necesario realizar investigaciones de carácter empírico que relacionen la teoría con la práctica. Así pues, este tipo de estudios podrían realizarse en diversos espacios de interacción del conocimiento del profesor. Uno de estos espacios que relaciona de manera especialmente interesante es el de formación de profesores de Matemáticas. No es lo mismo tratar de caracterizar el uso de la HM en un aula de bachillerato, pues la Historia puede tener el papel de proporcionar situaciones didácticas, que tratar de caracterizar el uso de la HM en un curso de formación de profesores, en tanto el papel de la Historia debe, por lo menos en teoría, tener un carácter y una utilidad más general.

Precisamente, sobre el papel que se le asigna a la HM en la formación inicial de profesores está el interés de este trabajo, pues como se ha mencionado, son diversos los usos que de la HM se puede hacer, pero los estudios desarrollados no constituyen suficiente evidencia empírica para documentar dichos usos. Es por ello que se indaga por el papel asignado a la HM en un curso de formación inicial de profesores, en este caso en el curso "*Enseñanza y aprendizaje de la aritmética y el álgebra*" (EAAA). En el curso en mención se utiliza frecuentemente a la HM en el desarrollo de las clases, sin ser este el objetivo en sí, en vez de esto, se pretende la construcción de conceptos relacionados con objetos didácticos de la Aritmética y el Álgebra.

En ese sentido y por las razones expuestas se pretende responder con este trabajo a la pregunta:

***¿Cuál es el papel asignado a la Historia de las Matemáticas en un espacio académico de formación de profesores, cuando construyen ideas en torno al álgebra*?**

## 1.3JUSTIFICACIÓN

Existen varios motivos que pueden dar cuenta de la importancia y pertinencia del presente proyecto. El primero de ellos está en relación con la trayectoria en la que los autores han venido trabajando, pues en la monografía realizada para obtener el título de Especialista en Educación Matemática, uno de los autores realizó las dos primeras fases de una ingeniería didáctica. Durante la realización de este trabajo se evidenció *la necesidad de un cierto conocimiento de la Historia de las Matemáticas*, pues no bastaba un conocimiento matemático para identificar los diferentes significados y sus relaciones con el ámbito sociocultural en el que se desarrollan. En un contexto más general podría pensarse que para la realización de una adecuada trasposición didáctica de un determinado concepto se hace necesario tener presente el desarrollo epistemológico e histórico del mismo.

De esa manera, en el transcurso de la formación posgradual de los autores se ha tenido la oportunidad de conocer algunos documentos que refieren la utilidad de la HM en la formación de profesores, en los que se ponen de manifiesto algunos beneficios en relación con la comprensión de los objetos matemáticos, con las herramientas que puede brindar al docente para proponer actividades en su clase, con la forma cómo concibe el aprendizaje de las Matemáticas y en general con su concepción de las Matemáticas; el listado de argumentos podría ampliarse, pero no es la intención en este lugar.

Como ya se ha mencionado, se piensa que hacen falta investigaciones empíricas que den cuenta de la eficacia del uso de la Historia en la frente a la FIPM. A propósito se sabe de innumerables construcciones teóricas que abarcan el tema en mención, pero son muy pocas las evidencias sistemáticas que proporcionen validez práctica de ellas.

Para "medir" el tipo de beneficio que brinda el conocimiento de la HM en la formación de profesores, se considera hacer estudios de tipo longitudinal, que puedan dar cuenta de cómo confluyen los aspectos formativos de la HM en el hacer profesional del profesor. El llamado a atender esta complejidad se ve reflejado en los esfuerzos que se hacen en el campo de la formación de profesores, los cuales se ven reflejados, en la cantidad de publicaciones y revistas especializadas en el tema, los congresos realizados y la continua discusión sobre el uso de la Historia en los programas de formación.

Es así, como este trabajo pretende aportar en el campo de la Formación de Profesores de Matemáticas, ya que es un primer paso para caracterizar el uso que se hace de la Historia en un curso de formación inicial de profesores de Matemáticas. Además, la caracterización puede dar cuenta, al menos en un caso particular, de qué tan útiles son o no las categorías que desde la teoría se han propuesto para modelar los usos que se hacen de la Historia en la enseñanza de las Matemáticas y en particular en la formación profesores y por tanto brindar validez empírica a dichas categorías, adaptarlas al contexto nacional o formular algunas nuevas.

Junto a lo anterior, en el país se reconoce la importancia de esta línea de investigación y así como sucede en el contexto internacional, los esfuerzos se ven reflejados en los proyectos de investigación realizados[3] y en curso. Uno de los proyectos relacionado con nuestro

[3] Una muestra importante de ello la constituyen los trabajos de investigación desarrollados por el grupo de Historia de las Matemáticas de la Universidad del Valle Colombia, coordinado por el profesor Luis Carlos Arboleda Aparicio.

interés, es titulado, *Caracterización de las estrategias curriculares de formación en Historia de las Matemáticas en programas de formación inicial de profesores de Matemáticas*[4]. Una de las preocupaciones a las que pretende dar cuenta este proyecto está dada por la caracterización de las estrategias curriculares en relación con la Historia y Epistemología de las Matemáticas en algunos programas de formación.

Así mismo, en la Licenciatura en Matemáticas de la UPN se desarrolló el proyecto: *Gestando un proceso de investigación alrededor del conocimiento didáctico sobre la Didáctica de las Matemáticas en el Proyecto Curricular de la Licenciatura en Matemáticas*[5], en el que la intención radicó en una recopilación de datos sobre el currículo propuesto y el desarrollado, que permitiera la constitución, en el corto plazo, de un proyecto de investigación en el que se caractericen algunos aspectos relacionados con la formación didáctica de los futuros profesores. De forma particular, nuestro proyecto pretende ser un primer paso de ese gran proyecto, pues la información analizada provino de algunas videograbaciones realizadas a una primera fase del espacio académico EAAA, en la que se recurre a la Historia de las Matemáticas para caracterizar el Álgebra y la Aritmética.

En resumen, el proyecto aquí presentado, no es ajeno a la actividad investigativa realizada en la comunidad de educadores matemáticos, y en particular se encuentra ligada de manera estrecha a proyectos de investigación preocupados por la relación HM-CPPM en el ámbito nacional, así como a la línea de investigación de la maestría en Docencia de la Matemática "Conocimiento profesional del profesor". Lo anterior pone de manifiesto la pertinencia del proyecto para la UPN, pues puede ser una fuente de información sobre el desarrollo del curso de la Licenciatura ya mencionado, así como de elementos para una toma de conciencia de la profesora a cargo del curso sobre el uso que hace de la Historia de las Matemáticas.

---

[4] Proyecto de investigación presentado a la Convocatoria Interna de la Universidad del Valle para la Conformación del Banco de Proyectos de Investigación – Año 2010. Investigador principal: Ligia Amparo Torres.

[5] Proyecto de facultad. Universidad Pedagógica Nacional. Docentes a Cargo Lyda Mora y Edgar Alberto Guacaneme.

Ahora bien, desde el ámbito personal, el desarrollo del presente trabajo se constituye como una fuente para enriquecer habilidades que como investigadores y como profesores desarrollamos, a saber:

*Las competencias investigativas*: debido a la misma complejidad en el campo de investigación, es de esperarse que las habilidades desarrolladas contribuyan en alguna medida al desarrollo que actualmente realiza uno de los autores como docente de futuros profesores de Matemáticas, pues los seminarios cursados involucran a los futuros profesores en el campo de la investigación.

*El conocimiento de la Historia para nuestro dominio conceptual:* es de esperarse que el conocimiento logrado sobre la Historia de las Matemáticas en relación con la Aritmética y el Álgebra haya ampliado nuestro dominio conceptual y posteriormente entre a hacer parte del conocimiento didáctico del contenido y por tanto repercuta en nuestras prácticas de aula.

## 1.4OBJETIVOS DEL ESTUDIO

### General:

Caracterizar el uso que se hace de la Historia del Álgebra en el espacio académico "Enseñanza y Aprendizaje de la Aritmética y el Álgebra", en relación con la formación inicial de profesores de Matemáticas (FIPM).

### Específicos:

- Identificar en la Historia algunos objetos y procesos propios del Álgebra a partir de una revisión de la literatura referida al tema.
- Identificar cuáles objetos y procesos históricos del Álgebra aparecen en el desarrollo del espacio académico EAAA y las relaciones entre ellos.
- Caracterizar las intenciones con las que se utiliza la Historia del Álgebra en el espacio académico EAAA.
- Identificar el tipo de Historia que se usó en el espacio académico.
- Proponer una aproximación a cómo se promueve el estudio de la HM en el espacio de formación EAAA.

# 2. MARCO DE REFERENCIA

La Educación de los Profesores de Matemáticas se ha venido consolidando como un tema de interés para algunos investigadores en Educación Matemática. Como evidencia y resultado de lo anterior, se han delimitado algunas cuestiones de estudio que se mencionan a continuación con la intención de configurar un marco de referencia para el presente trabajo. Para organizar tales cuestiones, se recurrió a fuentes bibliográficas en las que se reportan revisiones de la literatura especializada. Estas revisiones contemplan las producciones de las últimas décadas provenientes de revistas especializadas, un *handbook* y memorias de eventos internacionales. Las fuentes consultadas fueron: Cardeñoso, Florez y Azcarate (2001), Jaworski & Wood (2008), Llinares & Krainer (2006), Sánchez (2011), Rico (2004) y Sullivan (2008).

Dicho interés ha hecho que el CPPM se consolide como un campo de investigación, dentro del cual la investigación ha llevado a algunos investigadores al estudio y cuestionamiento sobre los conocimientos particulares que el profesor de Matemáticas (en formación inicial, principalmente) debe adquirir o construir en el trascurso de su formación, de manera tal que desarrolle ciertas habilidades que le permitan desempeñarse profesionalmente respondiendo a las necesidades sociales y a los propósitos de formación.

Si bien las fuentes mencionadas ayudaron a entender la complejidad del campo de estudio de la Educación del Profesor de Matemáticas (EPM), algunas centran la mirada en la práctica profesional del profesor (*in service*), por lo que no responden a las condiciones de la población objeto de indagación en el presente trabajo pues los Estudiantes Para Profesor de Matemáticas (EPPM) no hacen parte de un curso práctico en el que se desenvuelvan como profesores en ejercicio sino más bien es un curso teórico-práctico (*pre-service teachers*). Por lo anterior, retomamos a Sánchez (2011) como fuente principal, quien a partir de algunas clasificaciones propuestas por los demás autores logra centrar la mirada en asuntos que atañen a la formación inicial del Profesor de Matemáticas.

Otro hecho relevante en la propuesta de Sánchez (2011) radica en la organización de la literatura en “tendencias” las cuales se organizan de acuerdo con las cuestiones de investigación, los conceptos que se han elaborado para indagar sobre las cuestiones y además, presenta nuevas "tendencias" de investigación. Esta organización se muestra en la tabla 1.

| ***Asuntos*** | ***Conceptos teóricos*** | ***Nuevas tendencias*** |
|---|---|---|
| • Creencias de los profesores, visiones y concepciones.<br>• Prácticas de los profesores.<br>• Conocimiento y habilidades del profesor<br>• La relación entre teoría y práctica.<br>• Práctica reflexiva. | • Pedagogical Content Knowlegde (PCK) y otras formas de conocimiento.<br>• Reflexión-en-acción y reflexión-sobre-la acción.<br>• Comunidades de práctica. | • Formación de profesores en línea.<br>• El diseño y rol de las tareas en la formación de profesores de Matemáticas.<br>• La educación y desarrollo de los formadores de profesores de Matemáticas.<br>• Justicia social en la investigación de la formación de profesores de Matemáticas. |

TABLA 1. SÍNTESIS DE LOS PLANTEAMIENTOS DE SÁNCHEZ (2011) RESPECTO A LOS TEMAS ABORDADOS EN INVESTIGACIÓN REFERIDA A LA FORMACIÓN DE PROFESORES DE MATEMÁTICAS

Dado que el presente trabajo se ocupa de *asuntos* relacionados con el conocimiento profesional del profesor de Matemáticas, en particular con el conocimiento histórico de las Matemáticas y las habilidades que dicho conocimiento puede potenciar en los EPPM, así como de *conceptos teóricos* del Conocimiento Pedagógico del Contenido (PCK por sus siglas en ingles Pedagogical Content Knowlegde), es importante realizar, en primer lugar, una descripción del Conocimiento Profesional del Profesor y de los Profesores de Matemáticas.

Posterior a esta descripción se abordan aspectos relativos a la relación HM- CPPM. Estos aspectos pretenden aportar a resolver cuestionamientos como ¿Por qué considerar la HM como componente del CPPM? ¿Por qué es importante estudiar qué HM interviene o podría intervenir en la FIPM?¿Para qué usar la HM en la FIPM? ¿Qué tipo de Historia podría hacer parte de la FIPM?

Una segunda parte del presente capítulo pretende dar una mirada global a la Historia del Álgebra abordando algunos asuntos que tradicionalmente se han reconocido como parte del desarrollo histórico del Álgebra. Para esta mirada asumimos una postura que divide la Historia del Álgebra en dos grandes bloques, el primero que se ocupa de los objetos de estudio del Álgebra y el segundo que aborda dos procesos que consideramos trasversales al desarrollo de los objetos.

## 2.1 CONOCIMIENTO PROFESIONAL DEL PROFESOR DE MATEMÁTICAS.

Con el propósito de precisar algunas ideas acerca del CPPM se presenta un recuento de algunos constructos teóricos que se han elaborado. El recuento inicia con los planteamientos generales de Shulman (2001) hasta llegar a una visión más actual y particular de los conocimientos de los profesores de Matemáticas propuesta por Stacey (2008). Al tratar cada uno de los planteamientos se establecen relaciones con la HM, por ser de interés para este trabajo.

Lo anterior permitirá dar cuenta de la relación HM – FIPM en un primer nivel. Posteriormente se establecen relaciones entre estos conocimientos, las habilidades que debería desarrollar un profesor de Matemáticas, según Rico (2004), y de este modo, dar posibles respuestas a la pregunta ¿Para qué se involucra la HM en la formación de profesores de Matemáticas? Los anteriores puntos de vista se complementan con la propuesta de Guacaneme (2011) alrededor del tipo de Historia de las Matemáticas que puede aparecer en la formación de profesores y sus intencionalidades.

### 2.1.1 ALGUNOS PLANTEAMIENTOS SOBRE EL CONOCIMIENTO PROFESIONAL DEL PROFESOR DE MATEMÁTICASY SUS RELACIONES CON EL CONOCIMIENTO HISTÓRICO.

Desde la década de los setenta es posible identificar planteamientos sobre la naturaleza del conocimiento que debería tener un profesor de Matemáticas, Michael Otte (1979), haciendo referencia a este asunto presenta una postura que contempla a) el conocimiento del tema (para este caso las Matemáticas), b) la pedagogía y sicología del tema y c) el conocimiento acerca del conocimiento del tema, como grandes categorías que abarcan la naturaleza del conocimiento del profesor. Es de particular interés la tercera de las categorías, el conocimiento acerca del conocimiento, pues el autor reconoce de forma explícita a la HM como un área que puede potenciar dicho metaconocimiento. Además, es importante reconocer que desde esta época se reconoce a la HM como parte importante y constitutiva del conocimiento propio del profesor de Matemáticas. Hay que anotar que no se habla de un conocimiento de la Historia *per se*, es un conocimiento que aporta una mirada reflexiva sobre las Matemáticas y el quehacer matemático.

Por otra parte y atendiendo a la cronología, un trabajo de casi obligatoria referencia es el elaborado por Shulman (1986a, 1986b, 1987, 2001) quien, bajo la intención de modelar teóricamente los conocimientos que deben recibir los profesores y de proponer una reforma a los programas de formación de profesores[6], propone en distintos momentos algunos tipos de conocimientos para los profesores. Finalmente propone siete tipos de conocimiento que el profesor debe adquirir y conforman lo que él denomina la *base de conocimientos*:

a. Conocimiento del contenido;

b. Conocimiento didáctico general, teniendo en cuenta especialmente aquellos principios y estrategias generales de manejo y organización de la clase que trasciende el ámbito de la asignatura;

c. Conocimiento del currículo, con un especial dominio de los materiales y los programas que sirven como “herramientas para el oficio” del docente;

d. Conocimiento didáctico del contenido, esa especial amalgama entre materia y pedagogía que constituye una esfera exclusiva de los maestros, su propia forma especial de comprensión profesional;

e. Conocimiento de los alumnos y sus características;

f. Conocimiento de los contextos educativos, que abarcan desde el funcionamiento del grupo o de la clase, la gestión y financiación de los distritos escolares, hasta el carácter de las comunidades y las culturas; y

g. Conocimiento de los objetivos, las finalidades y los valores educativos, y de sus fundamentos filosóficos e históricos. (Shulman, 2001, p. 10)

Por ahora se puede decir que son de particular interés los literales a. y d., pues es en estos en los que la asignatura, en este caso las Matemáticas, juega un papel destacado y por tanto

[6] Si bien la propuesta del autor fue elaborada en el marco de la formación de profesores en general y no particularmente para el caso de los profesores de Matemáticas, su trabajo se ha convertido en un referente importante en el campo de la Educación del Profesor de Matemáticas.

atañen de una forma mucho más directa al campo de las Matemáticas y de Didáctica de las Matemáticas.

Esta base de conocimiento posee unas *fuentes* que según Shulman (2001) son "los ámbitos del saber académico y la experiencia desde las cuales los profesores pueden extraer su comprensión" (p. 7). Dentro de la propuesta se menciona como fuentes: a) La formación académica en la disciplina a enseñar, b) los materiales y el entorno del proceso educativo institucionalizado, c) la investigación sobre la escolarización y d) la sabiduría que otorga la práctica misma. La primera de las *fuentes* hace referencia a los contenidos de la materia a enseñar y se torna relevante para este trabajo en la medida en que el autor hace explícita la necesidad del conocimiento histórico para consolidarla cuando menciona:

> "…este conocimiento [del contenido] se apoya en dos bases: la bibliografía y los estudios acumulados en cada una de las disciplinas, y el saber académico histórico y filosófico sobre la naturaleza del conocimiento" (Shulman, 2001, p. 175).

De este modo, es posible afirmar inicialmente que el conocimiento de la HM corresponde en un primer momento a lo que se denomina conocimiento del contenido. Sin embargo, cabe preguntarse si éste no es trasversal para la *base de conocimientos* pues como ya se mencionó, las fuentes son los elementos que permiten comprensión sobre la base de conocimientos. Como veremos posteriormente, con algunas caracterizaciones de las contribuciones de la HM a la Educación Matemática, este conocimiento toca de manera importante, por lo menos, al conocimiento del currículo y al didáctico de contenido.

Una mirada un poco más general pero complementaria a los tipos de conocimiento fue propuesta por Pamela Grossman (1990), estudiante de Shulman, delimitando cuatro grandes campos del conocimiento profesional del profesor:(1) el conocimiento disciplinar (SMK), (2) el conocimiento pedagógico del contenido (PCK), que trataremos como sinónimo de conocimiento didáctico del contenido, (3) el conocimiento pedagógico general (PK) y (4) el conocimiento del contexto.

Ambos autores, dentro de cada uno de los tipos de conocimiento propuestos, delimitan de forma genérica algunos elementos de base que deben ser desarrollados para cada uno de ellos. Por ejemplo y si lo especificamos para el caso de las Matemáticas, dentro del conocimiento de la disciplina sugieren que se hace necesario reflexionar sobre a) las Matemáticas que deben conocer los estudiantes para profesor, sus vínculos y rupturas con las Matemáticas formales y b) los vínculos que se deben generar con otras disciplinas del conocimiento tales como la Historia, la Filosofía, la psicología.

Por su parte, el PCK es un campo mucho más amplio, pues éste se constituye como "esa especial amalgama entre materia y pedagogía que constituye una esfera exclusiva de los maestros, su propia forma especial de comprensión profesional" (Shulman, 2001, p. 174). Profundizando un poco más sobre esta idea y bajo los planteamientos de Grossman (1990), el profesor debería tener un conocimiento de base sobre:

a. Conocimiento y creencias sobre los propósitos de la enseñanza de una disciplina (o tema) en diferentes grados.

b. Conocimiento de la comprensión, concepciones, y aproximaciones erróneas a un tema particular de una disciplina.

c. Conocimiento sobre los materiales disponibles para la enseñanza de un tema, así como la ubicación curricular del tema.

d. Conocimiento de estrategias de instrucción y representación del tema.

La Historia de la Matemática constituye una fuente especial para los literales b. y c. pues como se verá más adelante, algunas de las posibles intencionalidades con las que se introduce la HM en la FIPM están estrechamente relacionadas con el suministro de materiales para la enseñanza y con la toma de conciencia sobre la actividad matemática como actividad humana y por tanto susceptible de diversas interpretaciones y vías de acceso, y en la que el error hace parte del proceso de construcción. Si se acepta lo anterior, es de esperar que la HM también sea una fuente para los literales a y d, pues una visión tal de las Matemáticas debería afectar las creencias y los conocimientos sobre lasMatemáticas y su enseñanza.

Una mirada que centra la atención en el PCK es la de Stacey (2008), quien propone cuatro componentes para el conocimiento del profesor de Matemáticas. Si bien la propuesta apunta a profesores de secundaria, es posible interpolar dichos componentes para los profesores de Matemáticas en general, dada la riqueza y complejidad que abarca. La propuesta contempla los siguientes componentes:

*Knowing mathematics in a way that has special qualities for teaching (Saber Matemáticas de una manera en que tenga características especiales para la enseñanza):* El cual se ocupa de responder a la pregunta ¿Qué tantas Matemáticas debe saber un profesor? Una posible respuesta radica en que no es suficiente saber Matemáticas sino más bien debe saber

> resolver problemas reales de la enseñanza cuando los profesores analizan una tarea para identificar fuentes de dificultad, seleccionar un ejemplo con ciertas propiedades, identificar los conocimientos previos importantes para diversos temas, hacer conexiones entre ellos y ocuparse de muchos otros aspectos del trabajo de enseñar (Stacey, 2008, p. 88[7]).

Las anteriores son consideradas habilidades que vinculan las Matemáticas y la enseñanza y que son propias de los profesores.

El segundo componente es la *experiencia matemática en acción* (Experiencing mathematics in action) en la que se menciona que los profesores deben tener una cierta experiencia en el hacer de los matemáticos, en saber resolver problemas. Otra de las componentes es *conocer cómo se aprenden las Matemáticas (Knowing how to learn mathematics).*

El cuarto componente y quizá el de mayor importancia para el presente trabajo, es el *conocimiento acerca de las Matemáticas (Knowing about mathematics).* La expresión *"acerca de"* es de especial relevancia pues si bien en la primera componente se reconoce un cierto conocimiento de las Matemáticas, la idea que subyace a esta componente es un metaconocimiento de las Matemáticas como se puede inferir de lo siguiente:

> *Detrás del conocimiento de las Matemáticas y la experiencia en hacer Matemáticas, los profesores necesitan saber acerca de las Matemáticas [need to know about mathematics]. Esta es un área en la que la preparación de los profesores es fácilmente vista algo diferente a la preparación para otras profesiones. Los profesores que saben sobre Matemáticas –su Historia tanto oriental como occidental, sus formas de trabajo, sus mayores hitos, entre otros– pueden avivar su enseñanza y apoyar a los estudiantes en la comprensión de cómo funcionan las Matemáticas, de dónde vienen y su rol en la sociedad. Algún conocimiento sobre las Matemáticas viene de forma incidental cuando aprendemos Matemáticas (asistidas por la enseñanza), pero algunos otros como la Historia, la Epistemología, o la Filosofía de las Matemáticas puede ser estudiada separadamente de las Matemáticas.* (Stacey, 2008, p.102).

Dos aspectos centrales en la afirmación anterior son importantes de señalar. El primero es que se reconoce la Historia y la Epistemología como fuentes para obtener ese

[7] Las citaciones provenientes de Stacey (2008) han sido una traducción libre del original en inglés.

metaconocimiento; además, que los profesores que tienen este conocimiento podrían lograr diferencias destacadas en la enseñanza y el aprendizaje de las Matemáticas. El segundo aspecto es la afirmación final acerca del estudio de la Historia, la Epistemología o la Filosofía, de forma independiente del estudio de las Matemáticas; al respecto cabe preguntarse si un estudio de la Historia permitirá a los profesores en formación inicial el desarrollo del PCK. Stacey no entra en esta discusión pero autores como Otte (1979) y Bkouche (2000) consideran que no es suficiente con aprender Historia o Epistemología para que los profesores hagan uso de esos conocimientos en pro de la enseñanza y el aprendizaje de las Matemáticas.

Así mismo, los planteamientos de Stacey, están en relación directa con los planteamientos ya mencionados de Otte (1979), pues ambos autores hacen un llamado al desarrollo de un conocimiento de las Matemáticas, pero mucho más importante es el conocimiento sobre las Matemáticas, es decir un metaconocimiento que encuentra en la HM una fuente importante. Si aceptamos los planteamientos de Otte y Stacey los ponemos en relación con el desarrollo del PCK, hay que decir que la HM constituye una fuente para el desarrollo de la base de conocimientos que debería desarrollar un profesor de Matemáticas.

De otro lado, Rico (2004) no solamente pone el énfasis en los conocimientos que debe tener el profesor sino en las competencias que debe desarrollar el profesor de Matemáticas, es decir en las capacidades de actuación del docente en relación con los conocimientos adquiridos.

De manera breve, Rico (2004) clasifica los conocimientos de un profesor de Matemáticas en cuatro tipos:

a. Disciplinares. Tienen que ver, entre otras cosas, con las Matemáticas, con las Matemáticas Escolares, con la Filosofía e Historia de las Matemáticas, con los problemas cotidianos y técnicos que aborda y, con los procesos y estrategias con los que se resuelven.
b. Psicopedagógicos. Son aquellos conocimientos que se centran en teorías de la enseñanza y del aprendizaje vinculadas con el currículo de Matemáticas.

c. El conocimiento didáctico. Se relaciona con los fundamentos y estructura del currículo de Matemáticas, sobre el análisis didáctico, diseño y desarrollo de unidades didácticas y de materiales curriculares.
d. Los conocimientos prácticos. Abarcan aquellos que va dando la experiencia de la práctica profesional.

Como se aprecia en el literal a., para Rico (2004) la Historia de las Matemáticas estaría incluida como una parte del conocimiento disciplinar; sin embargo, es importante anotar que el autor reconoce, de la misma manera que Stacey, que los conocimientos disciplinares deberían estar enfocados al desarrollo de estrategias para hacer de las Matemáticas una herramienta para resolver problemas.

Ahora bien, algunas de las competencias que debe desarrollar el profesor de Matemáticas, y que son producto de la investigación de Rico (2004), y la recolección de información de las producciones realizadas por grupos académicos que trabajan alrededor del tema, son:

1. Conectar los contenidos matemáticos con los fenómenos que los originan, reconociendo los factores formales implicados junto con su presencia en situaciones cotidianas y aquellas otras que procedan de ámbitos multidisciplinares (Física, Química, Biología, etc.).
2. Conocer diversas teorías de aprendizaje del conocimiento matemático.
3. Analizar críticamente y evaluar propuestas y organizaciones curriculares.
4. Reconocer los tipos de razonamiento de los estudiantes, proponer tareas que los orienten, diagnosticar sus errores, y proponer los correspondientes procesos de intervención.
5. Seleccionar y secuenciar actividades para el aprendizaje escolar; analizar los diversos problemas que surgen en situaciones de aprendizaje.
6. Diseñar, seleccionar y analizar unidades didácticas, textos y recursos.
7. Disponer de criterios, técnicas e instrumentos específicos para la evaluación del conocimiento matemático.
8. Conocer recursos y materiales y emplearlos adecuadamente en la enseñanza de las Matemáticas.
9. Utilizar técnicas de comunicación para dotar de significado los conceptos matemáticos.

10. Favorecer las potencialidades Matemáticas de los estudiantes y promover en la sociedad actitudes positivas hacia las Matemáticas.[8](Rico, 2004, p. 9)

A modo de hipótesis, es posible decir que algunas de las competencias anteriores pueden ser desarrolladas usando la HM como un medio para ello; por ejemplo la identificación de los fenómenos que originaron un determinado objeto matemático, identificar tipos de razonamiento y errores y, conocer recursos y materiales para la enseñanza y el aprendizaje. Aquí es necesario tener presente que la HM tiene, desde un punto de vista prescriptivo, el potencial para convertirse en herramienta que cumpla con las finalidades anteriores, sin embargo no es claro cómo la HM permite el desarrollo de las competencias, es decir cómo se traspone el conocimiento histórico a un conocimiento de tipo didáctico. Más adelante se retomarán estos asuntos desde algunos puntos de vista teóricos.

Si bien en diferentes periodos de tiempo y desde diferentes perspectivas, el conocimiento histórico no aparece de forma explícita como un componente del conocimiento del profesor de Matemáticas, sí se reconoce como una fuente para comprender el funcionamiento de las Matemáticas, para entender los errores y los caminos que llevan a la comprensión matemática. De hecho podría pensarse en que la HM es fuente para el desarrollo de los conocimientos del profesor y traspasa o debería traspasar la visión de una HM hasta una visión que apoye el conocimiento de las Matemáticas y el conocimiento acerca de la enseñanza de las Matemáticas; acercándose de ese modo a la visión de Stacey, para quien la HM es una herramienta para saber *acerca de las Matemáticas*.

A la luz de estas ideas y de las grandes tareas que se deben emprender en el campo de Educación del Profesor de Matemáticas para lograr responder a todos estos requerimientos, es necesario preguntarnos sobre ¿Qué herramientas tenemos a la mano para desarrollar estos conocimientos base?, ¿Qué cambios deberían sufrir los currículos de formación de profesores para responder a estos requerimientos?, ¿Qué tipo de metodologías permiten a

[8]Gutiérrez (2012) y Blanco (2012), desde un enfoque sociocultural y etnomatemático, desarrollan trabajos con los cuales exponen la necesidad y conveniencia de considerar algunos componentes del Conocimiento Profesional del Profesor de Matemáticas. Gutiérrez contempla 1) el conocimiento del contenido, 2) el conocimiento pedagógico, y, en menor medida, 3) el conocimiento de los estudiantes. Blanco destaca las actitudes de los maestros en formación inicial, en particular hacia el enfoque sociocultural y político de la educación matemática, pues dicha actitud desarrollará un papel importante en el diseño de actividades, en el reconocimiento y reflexión de las problemáticas sociales presentes en el aula y fuera de ella, y en general en todas sus actividades docentes de una manera más compleja que la que se tiene convencionalmente.

los profesores en formación desarrollar conocimiento didáctico de contenido?, ¿Qué enfoques de investigación pueden ser usados para rastrear el desarrollo, adquisición y puesta en práctica de estos conocimientos? La tarea para responder a estas preguntas y a muchas otras se ha venido desarrollando en la última década y media. Evidencia de ello es la preocupación constante por los programas de formación de profesores, la concepciones de los mismos y su incidencia en las propuestas de enseñanza, etc.; evidencia que se pone de manifiesto dentro de la comunidad de educadores matemáticos de acuerdo con:

> (i) La existencia de al menos cuatro revistas, algunas con un poco más de una década de circulación, cuyo título y contenido aborda de manera específica el asunto del conocimiento del profesor de Matemáticas.
>
> (ii) La publicación de números especiales sobre el conocimiento del profesor de Matemáticas en reconocidas revistas o libros seriados del campo de la Educación Matemática
>
> (iii) La existencia de estudios internacionales o de comunidades acerca del conocimiento del profesor de Matemáticas
>
> (iv) La publicación de al menos un *Handbook* sobre el conocimiento del profesor de Matemáticas
>
> (v) El lugar que el tema ocupa en eventos internacionales de la comunidad de Educación Matemática. (Guacaneme, 2008)

A modo de conclusión, se aprecia que el tema no es sólo asunto de grupos apartados de personas preocupadas por el tema, sino un asunto compartido y sobre el cual la investigación es una herramienta para dirimir, explicar, caracterizar y proponer soluciones. De acuerdo con esto, podría pensarse en un campo de investigación en el que la preocupación ya no radica en el sistema didáctico usual (docente, alumnos, saber) sino un sistema didáctico que de nuevo contempla la relación entre docente (formador de profesores), alumno (estudiante para profesor de Matemáticas) y un saber especializado, que como se dijo antes no es el saber matemático sino que es un saber propio del profesor que integra tanto conocimiento matemático como conocimiento didáctico, es decir, conocimiento didáctico de contenido o PCK. Algunos ejemplos del funcionamiento de un sistema tal y particularmente del tipo de saber que circula en el aula en relación con la Historia de las Matemáticas pueden ser apreciados en el análisis de los datos.

## 2.2 SOBRE LA RELACIÓN HISTORIA DE LA MATEMÁTICA – EDUCACIÓN MATEMÁTICA (HM - EM)

Ahora bien, teniendo presente la HM como parte del conocimiento del profesor, es importante analizar algunas construcciones teóricas que se han desarrollado sobre las relaciones entre HM y EM, y en particular sobre la relación HM y formación de profesores.

En primer lugar, Guacaneme (2008),realiza un trabajo de identificación de literatura que se refiere a la relación HM–EM y enfatiza en la relación de la Historia de la Matemática – Conocimiento del Profesor de Matemáticas, caracterizando los documentos revisados y documentando una aproximación al estado del arte de la temática referida. A continuación se resumen algunas características esenciales que el autor en mención, reconoce en la relación HM–EM, en algunos casos, se darán ejemplos particulares de algunos documentos que se consideran importantes en tanto dan categorías de clasificación del papel de la HM en la EM.

Existen al menos tres acepciones de la relación HM–EM: 1) La intervención de la HM en la enseñanza de las Matemáticas; 2) la intervención de la HM en la investigación en la Educación Matemática (EM); y 3) la intervención de la HM en la formación de profesores de Matemáticas. Para cada una de las tres acepciones, se describen del mismo modo varias modalidades de intervención.

En ese sentido, se hace referencia a algunos propósitos a los que apunta la relación HM-EM, entre los cuales se puede destacar a) mejorar los métodos de enseñar y aprender Matemáticas, b) proveer al profesor de herramientas que tienen que ver con problemas (actividades) y contextos para ser aplicados en la clase y c) aquellos que refieren a la posibilidad de contar con información sobre la evolución de los objetos matemáticos o sobre la actividad y prácticas Matemáticas.

Al respecto de la relación de la HM-CPPM, Guacaneme (2008), realiza una organización de la información alrededor de cuatro preguntas sobre dicha relación, a saber, “¿Por qué se plantea la apropiación del conocimiento histórico de las Matemáticas por parte de los profesores?, ¿Para qué se procura la apropiación del conocimiento histórico de las Matemáticas por parte de los profesores?, ¿Qué tipo de Historia de las Matemáticas debe ser apropiada por un profesor? y ¿Cómo se llevan a cabo los procesos de apropiación del conocimiento histórico de las Matemáticas por parte de los profesores?”

A continuación se abordan las tres primeras preguntas, desde los planteamientos del autor, complementándolas con las visiones de algunos otros autores, así como algunas posturas nuestras en relación con las posturas teóricas y la utilidad que éstas tienen para el desarrollo del presente trabajo. La cuarta pregunta no se aborda de forma directa, dado que desborda el alcance del trabajo; sin embargo consideramos que en el desarrollo del análisis de los datos, es posible dar cuenta de algunas evidencias del cómo se podría usar la HM en un curso de FIPM. Una corta reflexión al respecto se presenta en el capítulo correspondiente a las conclusiones.

### 2.2.1 ¿POR QUÉ SE PLANTEA LA APROPIACIÓN DEL CONOCIMIENTO HISTÓRICO DE LAS MATEMÁTICAS POR PARTE DE LOS PROFESORES?

Algunas respuestas encontradas frente a la pregunta ¿Por qué plantear la apropiación del conocimiento histórico de las Matemáticas de parte de los profesores? tienen que ver con: (i) la existencia de personas o equipos con alguna formación en Historia de las Matemáticas y su preocupación por la formación de los profesores de Matemáticas, (ii) la valoración social de la historicidad de las Matemáticas: por ejemplo, algunos grupos de personas entienden que no puede haber una real enseñanza de las Matemática si no se incluye la enseñanza o el uso de su Historia, (iii) las exigencias o políticas de Estado frente a la formación de profesores y (iv) la aceptación de que éstas proveen a los profesores de herramientas o instrumentos para la enseñanza.

Para empezar a particularizar, una de las inquietudes dentro de este campo de investigación ha sido (y cada vez toma más fuerza) el uso de la Historia de las Matemáticas como un recurso para desarrollar, no solo conocimiento matemático, sino a la vez PCK. Lo anterior se ve reflejado en los planteamientos de Schubring y otros (2000) quienes aseguran que tanto Historiadores de las Matemáticas como educadores matemáticos han reconocido la importancia de un componente histórico en la formación de profesores. Junto a lo anterior, los autores reconocen un incremento en el número de cursos de Historia de las Matemáticas en la Formación de Profesores de Matemáticas aunque señalan que éstos no han sido consolidados como oficiales sino que más bien provienen de iniciativas individuales. Hay que señalar que a pesar del reconocimiento del aumento de los cursos de HM no se profundiza en las características de los mismos.

La afirmación de Schubring y otros (2000) cobra gran importancia para este trabajo pues sustentan su afirmación mediante un barrido de diferentes programas de formación de profesores de Matemáticas a través de varios países y el uso de la HM en dichos programas.

Si bien es posible hallar argumentos aceptados que justifican la inclusión de la HM en la formación de los profesores, también se identifican autores que ahondan en esta utilidad y de forma hipotética discuten sobre la utilidad que puede llegar a tener la HM en el proceso de formación de los profesores de Matemáticas. Estos autores dejan entrever que la preocupación no radica en saber más Matemáticas (aunque quizá sea una consecuencia afortunada), sino en la forma como el conocimiento de la HM puede contribuir a enriquecer el conocimiento del profesor y por tanto desarrollar mejores prácticas docentes. Algunos ejemplos son:

> (1) La Historia de las Matemáticas podría ser un recurso útil para comprender el proceso de formación del pensamiento matemático, y para explorar la forma en la que estas comprensiones pueden ser usadas en el diseño de actividades de clase. (Radford, y otros, 2000, p.150)
>
> (2) … cualquier uso de la Historia en la enseñanza de las Matemáticas requiere de un acompañamiento de la reflexión didáctica. (Radford, y otros, 2000, p. 152)
>
> (3) El estudio de los procesos matemáticos de construcción, generalmente ocultos en una presentación exclusivamente formal o en la presentación escolar, aporta elementos conceptuales, metodológicos y epistemológicos, que el docente puede emplear en sus propuestas educativas. (Anacona, 2003, p. 37)

Las anteriores afirmaciones, además de resaltar la importancia que se le atribuye a la introducción del conocimiento histórico en la formación de los profesores, pueden ser evidencia de algunas intenciones de usar este conocimiento en la formación de profesores. esta introducción puede llegar a repercutir desde diversos ámbitos: la consideración de las Matemáticas como una actividad humana, identificar las Matemáticas como un objeto que es susceptible de procesos de construcción, el aporte de tipo conceptual, metodológico y epistemológico que puede llegar a tener, la necesaria reflexión de tipo didáctico que debe acompañar el estudio de la HM, entre otros.

### 2.2.2 ¿PARA QUÉ SE PROCURA LA APROPIACIÓN DEL CONOCIMIENTO HISTÓRICO DE LAS MATEMÁTICAS POR PARTE DE LOS PROFESORES?

En términos generales la HM se introduce en la formación de profesores ya que da instrumentos al profesor para su quehacer docente. Estas herramientas no son sólo prácticas, en términos que proveen de situaciones, problemas, alusiones a construcciones de conceptos matemáticos en la Historia o que den respuesta a preguntas de tipo epistemológico en los profesores, sino que van más allá, pasando incluso por aquellos que generan aptitudes y actitudes con relación a la enseñanza y el aprendizaje de las Matemáticas[9].

En relación a la pregunta que nos ocupa en este apartado, es importante mencionar los aportes que hace la HM a la EM, en particular a la formación de profesores, según Fauvel & Van Maanen (2000):

> (i) Captar más profundamente el significado de conceptos, teorías, métodos y pruebas en Matemáticas.
> *(i)* Identificar pasos cruciales, dificultades y obstáculos en la evolución de un tema.
> *(ii)* Organizar mejor la enseñanza y proveer motivación para el estudio de un tema.
> *(iii)* Construir una reserva de ejemplos, problemas y puntos de vista alternativos sobre un tema.
> *(iv)* Apreciar más las Matemáticas como un proceso creativo.
> *(v)* Ver las Matemáticas como un esfuerzo humano el cual está relacionado con otras actividades humanas.
> *(vi)* Mantener una actitud abierta hacia el estudio de las Matemáticas[10].(p.50)

[9]Un ejemplo de este tipo de habilidades profesionales es suministrado por Arcavi & Isoda (2007), quienes muestran que la lectura y comprensión de textos históricos puede ser una forma de ejercitar la adopción de la perspectiva del otro y de este modo promueve habilidades de escucha (*listening*). En este trabajo se hace evidente que la HM no sólo aporta en el desarrollo de aptitudes para comprender y aprender Matemáticas sino en actitudes como el *listening* que traza un camino desde la forma como aprende un profesor hasta la forma como ese conocimiento histórico le permite comprender lo que hacen sus estudiantes.

[10] Traducción libre del texto original que está en inglés.

De igual manera, cabe resaltar de manera puntual, que para responder a la pregunta ¿Para qué integrar la HM a la Educación Matemática?, Jankvist (2009) cita a Tzanakis y Arcavi (2000), mencionando tres diferentes enfoques principales para dicha integración:

> *(1) El aprendizaje de la Historia, por el suministro de información histórica directa,*
>
> *(2) temas de aprendizaje de las Matemáticas, siguiendo una enseñanza y el aprendizaje inspirado en la Historia, y*
>
> *(3) el desarrollo de la conciencia más profunda, tanto de las Matemáticas como de los contextos sociales y culturales en las que las Matemáticas se han construido.* (p. 208)

Consecuentemente, algunos de los resultados en Jankvist (2009) tienen que ver con la urgencia de observar en la Historia, la construcción epistemológica de algunos objetos matemáticos, ya que son útiles en la comprensión de las características de las Matemáticas como un constructo histórico, social y cultural. Del mismo modo aportará frente a la enseñanza de las Matemáticas.

Al cuestionarse sobre el para qué se procura la apropiación del conocimiento histórico de las Matemáticas por parte de los EPPM y de los profesores de Matemáticas en general, se encuentra que la relación entre estos dos actores se ha constituido en objeto de interés en la investigación referida a la formación de profesores de Matemáticas. Autores como Anacona (2003), Guacaneme (2011), Jankvist (2009) y Arcavi & Isoda (2007) ven en la HM una fuente de herramientas para el quehacer docente.

Anacona (2003) resalta que esta inclusión puede ser fuente para brindar elementos en la elaboración curricular, de comprensión para posibles dificultades en el estudio de un determinado concepto, para el diseño de actividades didácticas, para la reflexión sobre la naturaleza de las Matemáticas; y para revisar aspectos de la Historia de la Educación Matemática. Para esta misma autora, la HM constituye también una fuente para aportar al aprendizaje de las Matemáticas en tanto: es un puente entre las Matemáticas y la cultura; es herramienta de indagación histórico-filosófica como camino de aprendizaje; es herramienta de estudios histórico-epistemológicos como vehículos de conocimiento; es fuente de problemas y actividades lúdicas; en la relación entre las Matemáticas y las experiencias.

De modo general, puede decirse que la investigación sobre las relaciones entre HM y FIPM se puede agrupar de varias maneras: en torno a la forma como la HM hace parte de la formación de los profesores (Fauvel& Van Maanen, 2000), de acuerdo a las implicaciones que su uso puede llegar a tener en las concepciones de los profesores de Matemáticas (Tzanakis & Arcavi 2000; Furinghetti & Pehkonen, 2002), o según los argumentos que sustentan el uso de la HM en la FIPM (Guacaneme, 2008; Jankvist, 2009). Estas agrupaciones pretenden responder a qué tipo de Historia de las Matemáticas deben aprender los futuros profesores, a cómo usar la HM, cuáles son las razones por la que se usa y cuáles son las intencionalidades de su uso.

En esta dirección, a continuación se centra la atención en dos preguntas:

a. *¿Cuál es la intencionalidad de incluir la HM en la formación inicial de un profesor de Matemáticas? ¿Para qué usar la HM en la formación inicial de un profesor de Matemáticas?*
b. *¿Qué tipo de Historia debería hacer parte del conocimiento profesional del profesor de Matemáticas?*

#### 2.2.2.1Intencionalidades de la Historia de las Matemáticas en la Formación Inicial de Profesores de Matemáticas.

En el apartado anterior hablamos de qué tipo de Historia de las Matemáticas ha sido reportado como parte de la formación de profesores, ahora se pretende dar cuenta específicamente del para qué se introduce la HM en los cursos de formación de profesores. Estos *para qué*, dadas las condiciones particulares del curso analizado, se han puesto en términos de *intencionalidades* con las que este conocimiento puede ser introducido en el estudio de algún contenido matemático o de la Didáctica de la Matemática, bien sea de forma explícita por parte del formador de profesores o por los mismos EPPM, o de forma implícita en las actuaciones y afirmaciones de cualquiera de los dos actores mencionados.

Lo anterior se torna relevante en la medida que uno de los objetivos de indagación pretende identificar el para qué de la HM en la FIPM y dado que el papel de la HM en una clase particular atiende a asuntos de intencionalidad por parte del docente frente a los objetivos que se pretenden alcanzar en términos de acciones en el aula y aprendizajes esperados, se considera importante caracterizar dicho papel en un curso de Didáctica de la Aritmética y el Álgebra, evidenciando una aproximación al para qué se usa la HM en la FIPM

Al indagar sobre la utilidad que puede tener la HM en la FIPM, se encuentra que ésta constituye objeto de interés en la investigación en la medida que autores como Tzanakis & Arcavi (2000), Jankvist (2009), Fauvel & van Maanen (1997) y Furinghetti & Pehkonen (2002), ven en la HM una fuente de herramientas para el quehacer del docente de Matemáticas.

Respecto al para qué usar la HM en la FIPM, Guacaneme (2011) agrupa las intenciones de uso de la HM en relación con **instrumentos** que ésta puede brindar al profesor de Matemáticas generando una tipificación que pone en evidencia posibles aportes que la HM hace frente a i) las visiones de la actividad matemática; ii) las visiones de los objetos matemáticos; iii) las competencias profesionales; iv) la transformación en la manera de enseñar; y v) las fuentes de materiales o recursos para la enseñanza.

## LAS VISIONES DE LA ACTIVIDAD MATEMÁTICA

La intencionalidad en este caso apunta a transformar la visión de las Matemáticas desde el estudio de las teorías y las formas particulares de trabajar en la disciplina matemática, desarrollando una visión y unas creencias más amplias de lo que es la actividad matemática. Esto se logra en la medida que al estudiar las teorías y los procesos de construcción de las mismas se pone en evidencia que los “objetos matemáticos” no surgen de forma espontánea sino que fueron producto de una construcción demorada, dificultosa, que era determinada por los problemas y la época en la que se realice la mirada.

## LAS VISIONES DE LOS OBJETOS MATEMÁTICOS

El estudio de la HM puede generar una comprensión de la evolución de los objetos matemáticos y sus correspondientes cambios en la naturaleza y significados, los cambios de estatus, las dificultades relativas de un concepto matemático. Todo ello conllevaría, al menos en teoría, a ver los estudiantes de una manera diferente dado que el profesor tendría una visión compleja de la construcción de los objetos matemáticos y podría entender los obstáculos, los problemas por los que pasa un estudiante para comprender y construir nociones de los objetos matemáticos. Por lo anterior, es posible pensar en una modificación de los objetos matemáticos al ser puestos en la escuela.

## LAS COMPETENCIAS PROFESIONALES

La HM debería hacer parte de la FIPM ya que puede desarrollar actitudes y aptitudes hacia la docencia, como por ejemplo la habilidad de escuchar (Arcavi & Isoda, 2007), puede reorientar la perspectiva de lo que se mira y lo que se observa de las Matemáticas y podría favorecer la discusión sobre asuntos didácticos que promuevan el conocimiento metamatemático.

Consideramos que esta intencionalidad puede ser descrita con mayor detalle al precisar lo que se entiende como competencias profesionales del profesor. Una posibilidad para realizar tal precisión se puede hallar en Rico (2004) quien, como ya se mencionó, propone algunas competencias que deberían hacer parte de la formación de un profesor de Matemáticas.

Si se acepta la relación anterior es posible pensar en que la HM contribuye, por ejemplo, a conectar los contenidos matemáticos con los fenómenos que los originan, analizar críticamente y evaluar propuestas y organizaciones curriculares en relación con el desarrollo histórico de un concepto, reconocer los tipos de razonamiento de los estudiantes, identificar errores, seleccionar y secuenciar actividades para el aprendizaje escolar. Inicialmente se consideran las competencias anteriores en concordancia con los planteamientos de Rico (2004), sin embargo no se pretende decir que son las únicas y quizá el análisis de la información recolectada en el curso objeto de indagación aporte otras competencias emergentes.

Junto a estos tres instrumentos que podrían ser desarrollados con la HM en la FIPM, el autor propone tres **artefactos** que si bien apoyan a los diferentes instrumentos son considerados de forma independiente dada su importancia en la labor del profesor de Matemáticas.

## LA TRANSFORMACIÓN EN LA MANERA DE ENSEÑAR

En este caso la HM es un instrumento que permite modificaciones en las prácticas de los profesores, modificaciones que serían generadas principalmente por un cambio en la concepción epistemológica sobre los objetos matemáticos. Por ejemplo, se esperaría que la práctica de un profesor que considera las Matemáticas como un producto terminado no sea la misma que la de un profesor que la considera como producto de la construcción de los humanos en un amplio periodo de tiempo, como un conocimiento que puede ser susceptible de errores y de dificultades.

#### FUENTE DE MATERIALES O RECURSOS PARA LA ENSEÑANZA

La HM brinda al profesor de Matemáticas una fuente directa de materiales, recursos, problemas que pueden ser utilizados en la enseñanza de un contenido. Guacaneme (2011) resalta que en este carácter utilitario de la HM puede resultar en una visión parcializada de los materiales que se usan, pues puede llegar a no comprenderse el potencial que, en su momento, éstos tuvieron para favorecer la actividad matemática.

Es importante anotar que para Rico (2004), la habilidad de reconocer la HM como fuente de recursos para la enseñanza, es considerada como una competencia cuando afirma que el profesor de Matemáticas debería conocer recursos y materiales y emplearlos adecuadamente en la enseñanza de las Matemáticas. Para ambos autores la HM permite conocer, sin embargo Rico, al determinar competencias acentúa que el uso que se haga debe ser adecuado para la enseñanza de las Matemáticas.

Un último instrumento propuesto es aquel que permite **fortalecer la valoración y el papel de la profesión docente** en relación con la evolución de la profesión. No obstante, en la literatura es muy poco lo que se puede encontrar sobre este asunto

### 2.2.3 ¿QUÉ TIPO DE HISTORIA DE LAS MATEMÁTICAS DEBE SER APROPIADA POR UN PROFESOR?

A continuación se sintetizan algunos los tipos de Historia de acuerdo con la clasificación propuesta por Guacaneme (2010), a partir de una revisión de la literatura realizada en el marco de su trabajo doctoral. Si bien adoptamos algunos planteamientos del autor, también pretendemos establecer relaciones de inclusión-exclusión entre los diversos tipos de Historia, pues existe un carácter fuertemente relacional entre ellas y por tanto no es posible analizarlas como clases disyuntas sino más bien como un entretejido que posteriormente permitirá establecer el tipo, o los tipos, de Historia que se promueven en el curso de formación de profesores que se analiza en este documento.

La clasificación propuesta por Guacaneme (2010, 2011) alude a las fuentes, los objetos de estudio y la forma como éstos son abordados. De este modo, se reconoce diez tipologías de Historias obre las cuales se presenta una reseña a continuación, complementada por la revisión de algunas de las fuentes originales usadas por él. Posteriormente, se desarrolla un esquema relacional entre los diversos tipos de Historia. Es importante aclarar que aunque el autor no titula cada uno de los tipos de Historia, se propuso un título para cada una de ellas de modo que se dé cuenta de los objetos que se caracterizan dentro de cada tipo.

#### 2.2.3.1 Fuentes

***Acerca del tipo de fuente de estudio.*** El primer tipo de Historia hace referencia al tipo de documentos usados cuando se estudia un determinado conocimiento histórico. Estos se pueden clasificar en tres grandes categorías, *primarias* o *secundarias*, en tanto si las fuentes que se tienen en cuenta son originales o no. Y una tercera categoría de documentos, *las fuentes didácticas*, que si bien no son reconocidos por algunos Historiadores como documentos históricos de las Matemáticas, son de utilidad pues caracterizan aquellos textos que contienen reflexiones de tipo didáctico, en este caso sobre la Historia del álgebra.

Al respecto, asumimos en concordancia con Guacaneme (2010) y Tazanakis y otros (2000), que se deberían incorporar las *fuentes didácticas* como un tercer tipo de fuentes, es decir, se debería incluir "el cuerpo de la literatura extraído de los escritos primarios y secundarios con la intención de constituir una aproximación (exposición, tutoría, ejercicio, etc.) inspirada en la Historia" (Tazanakis y otros, 2000).

#### 2.2.3.2 Objetos que se estudian

***Acerca del objeto de referencia.*** Esta segunda tipología alude al tipo de referencia de la obra histórica: biografías de matemáticos o escuela de matemáticos, versiones originales de obras Matemáticas o sus traducciones, correspondencia entre matemáticos o sus análisis, el estudio de una noción o problema matemático, formas de pensamiento matemático, o teorías o porciones de ellas.

***Acerca del enfoque del objeto de análisis***. Esta tipología tiene que ver con las diversas tendencias de la interpretación histórica que están relacionadas con la intención y uso del estudio histórico, éstas pueden ser, entre otras:

a) *filosóficas*, acerca de la naturaleza de los objetos matemáticos implicados en la obra matemática,

b) *lógicas* en torno al tratamiento de tales objetos,

c) *axiológicas* de la obra misma,

d) *matemáticas* propiamente dichos,

e) *psicológicas* en torno al pensamiento matemático implicado en la constitución de la obra

f) *sociológicas.*

Guacaneme (2010) reconoce que estos ámbitos del análisis no son necesariamente disjuntos y por tanto se constituyen como "tendencias diversas de la interpretación histórica, relacionadas con la intencionalidad y perspectiva del estudio histórico mismo" (p. 3).

***Acerca de los elementos de análisis.*** Tiene que ver con el énfasis que se le da al análisis histórico: sobre la evolución de un concepto o sobre el desarrollo de estos conceptos relacionados con la resolución de problemas: *Historia conceptual e Historia de problemas*.

***Acerca del tipo de Matemáticas aludidas.*** Una última tipología trata sobre la tipificación de los objetos históricos de las Matemáticas a partir de si ellos son *hegemónicos* (corresponden a las Matemáticas occidentales) o si por el contrario corresponden a *grupos culturales o sociales específicos*.

#### 2.2.3.3 ¿Cómo son abordados los objetos?

***Acerca de la profundidad de estudio de los objetos.*** Esta cuarta tipología clasifica los objetos históricos a partir de la profundidad con que se utilicen. Se hace referencia a dos tendencias: *El relato histórico y el análisis histórico*. En la primera, se atiende a aspectos historiográficos, tales como cronología, biografías, anécdotas, etc. En la segunda, el énfasis está en el contenido matemático y los aspectos del relato no aparecen o son adyacentes al estudio de la cuestión matemática.

De acuerdo con Guacaneme (2010, p. 11).“Una manera alterna de entender esta tipología es identificando el relato histórico con la descripción del hecho histórico, y el análisis histórico con el análisis e interpretación del hecho histórico”.

***Acerca de las relaciones con el contexto sociocultural.*** Esta tipología clasifica los objetos históricos en *internalistas o externalistas*. La primera clase tiene que ver con la concepción de los desarrollos históricos de las Matemáticas sin tener en cuenta el contexto y la segunda tiene que ver con las consideraciones de que las explicaciones sobre ciertos acontecimientos científicos se pueden obtener primordialmente desde el ámbito social. En la *Historia internalista* “se trata de hacer una Historia de los conceptos, atendiendo básicamente su estructura lógica de producción” (Anacona, 2003, p. 32), mientras que en la *Historia externalista* se reconoce la influencia del ámbito social y cultural en los desarrollos matemáticos y por tanto en la consolidación de su estructura lógica de producción.

La adopción de una de las dos posturas, provoca una interpretación “incompleta” de las Matemáticas que se pretenden estudiar, pues como afirma Anacona (2003) “moverse en uno de los dos extremos deja de lado aspectos esenciales para comprender la obra matemática” (p. 32). Por lo anterior, la autora reconoce y adopta un punto intermedio que permite dar cuenta de aspectos internalistas y externalistas y por tanto una mirada mucho más rica y profunda de algún planteamiento matemático.

Lo anterior es de especial importancia dado que no se pretende hacer un estudio matemático o de la Historia de las Matemáticas aislado de los aspectos sociales y culturales, sino que se pretende tener una visión en la que se integra la Historia y la enseñanza de las Matemáticas en los que "se analizan aspectos, conceptos o métodos históricos que pueden incidir, directa o indirectamente, en las reflexiones sobre la enseñanza o el aprendizaje de las Matemáticas" (Anacona, 2003, p. 34)

***Acerca de los detalles históricos.*** Guacaneme (2011) referencia la séptima tipología de la literatura bajo la identificación de dos tendencias, denominadas *Historia* y *herencia*.

De acuerdo con Grattan-Guinness (2004) por *Historia* se hace referencia a los detalles del desarrollo de una noción: su pre Historia y los desarrollos coexistentes; la cronología de progreso, hasta dónde se puede determinar; y quizá también el impacto en los años y décadas inmediatamente siguientes. La Historia pretende dar cuenta de lo sucedido con sus éxitos y fracasos, así como lo que no sucedió y las razones por las que no sucedió. En cambio, la *herencia* hace referencia al impacto de la noción "en el trabajo posterior, tanto en el momento como después, especialmente las formas que puede tomar, o estar incorporado, en contextos posteriores".

***Acerca de la persona que hace la mirada.*** Se pueden clasificar también los objetos de la Historia en tanto si han sido contados por su autor (o historia cultural) o si han sido contados por científicos modernos.

#### 2.2.3.4 Posibles usos de la HM

Además de estas tipologías reportadas por Guacaneme (2010), se podrían encontrar en algunas investigaciones, afirmaciones que también podrían ser objeto de clasificación del uso de la Historia de las Matemáticas en la enseñanza y el aprendizaje de las Matemáticas. Por ejemplo, Jankvist (2009) da cuenta de dos usos generales que de la HM en la Educación Matemática. El primero de ellos es denominado como *La Historia como herramienta*, en la que se considera a la Historia como fuente de dispositivos de asistencia o de ayuda en el aprendizaje de las Matemáticas, esta herramienta se piensa, no sólo en aspectos de cognición, sino por ejemplo en aspectos de motivación. El segundo uso es considerado como la *Historia como fin*, en donde el objetivo último es el tratamiento y aprendizaje de la Historia de las Matemáticas.

### 2.2.3.5 Algunas posibles relaciones

Como se había mencionado, de los tipos de Historia listados, se considera que algunos de ellos no dan cuenta de un tipo de Historia sino que más bien caracterizan las fuentes, los objetos de estudio o el enfoque con el que se aborda algún contenido histórico. Algunas relaciones entre ellos se muestran a continuación:

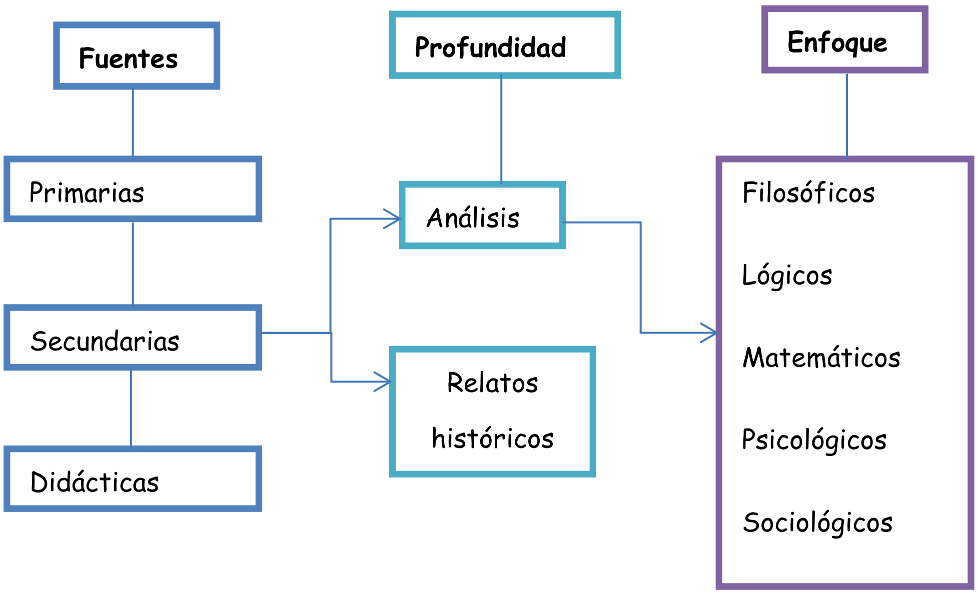



ILUSTRACIÓN 1. RELACIONES ENTRE TIPOS DE HISTORÍA. FUENTES-OBJETOS

Como se aprecia en el esquema, los tipos de Historia propuestos por Guacaneme (2011) pueden relacionarse entre ellos, pues sobre una fuente primaria no aparece algún análisis o relato pues ésta es contada directamente por su autor; en cambio las fuentes secundarias y seguramente las didácticas permiten diferentes niveles de profundidad en su estudio, niveles que van desde el relato de un hecho histórico hasta el análisis histórico que puede ser abordado desde diferentes enfoques.

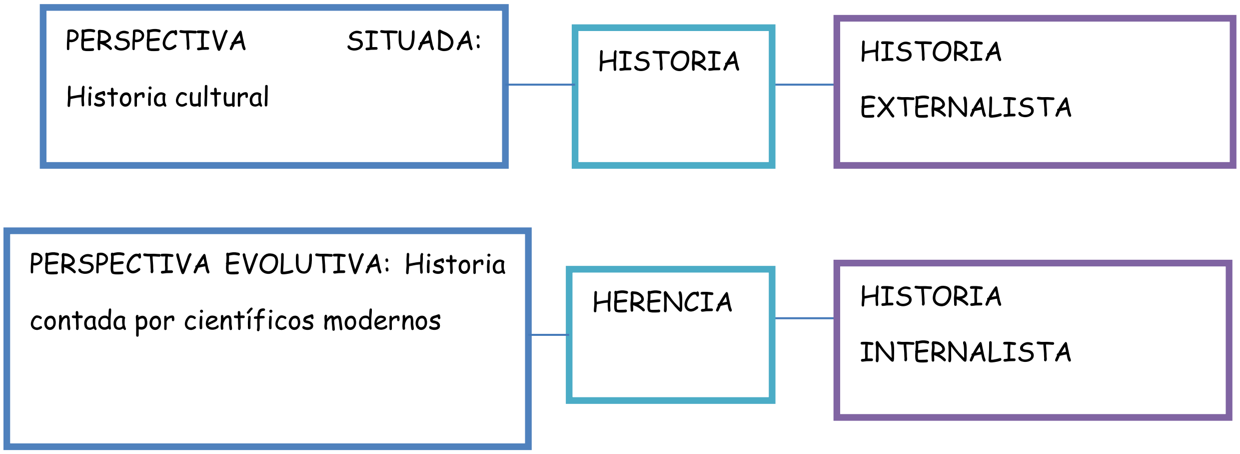



ILUSTRACIÓN 2. RELACIONES ENTRE TIPOS DE HISTORIA. CÓMO SE ABORDAN LOS OBJETOS HISTÓRICOS.

En otro grupo se pueden ubicar aquellos tipos de HM en los que se reconoce el potencial para dar cuenta no sólo de una característica particular sino del panorama con el que se aborda la HM en la FIPM. Estas relaciones se muestran en la ilustración 2.

De acuerdo con Grattan-Guinness (2004) se puede reconocer un estrecho vínculo entre *herencia e Historia internalista* dado que en ambas se privilegia el estudio del contenido matemático terminado; y el vínculo entre *Historia e Historia externalista* dado que los Historiadores también buscan motivaciones, causas, y comprensión en un sentido más general, van mucho más allá del contenido matemático desligado de lo sociocultural. De la misma manera, si se adopta una perspectiva evolutiva, la Historia se desliga de su contexto cultural dado que se cuenta con una visión de las Matemáticas modernas. Pero si se adopta una perspectiva situada es necesario reconocer los elementos culturales que intervienen en los procesos de construcción matemática en diversos periodos de tiempo.

De este modo, en el caso del cómo son abordados los objetos históricos, bastaría con asumir una de las tres tipologías que se muestran en la ilustración 2. Asumiremos la postura que diferencia la *Historia* de la *herencia*, pues la consideramos más general que las otras dos, sin embargo no desconocemos la utilidad que tiene cada una de ellas y por lo tanto se asumen los planteamientos como complementarios para el análisis.

Para resumir este primer apartado del marco de referencia a continuación se presentan los aspectos fundamentales del mismo que serán tenidos en cuenta de forma particular para el análisis de los registros y de los datos.

En cuanto al *para qué* se retomaran todas las intencionalidades de uso de la Historia de las Matemáticas. De los tipos de Historia se retomará la tipólogía expuesta por Guacaneme (2010) teniendo presente la organización propuesta (*fuentes, objetos y profundidad)*, así como las relaciones mencionadas. Los planteamientos generales que permitieron la construcción del marco de referencia se pondrán en juego al momento de establecer relaciones entre el para qué, el qué y el cómo pretendiendo de este modo un análisis riguroso y sistemático de los registros en el que sea evidente el uso de la teoría mencionada.

## 2.3UNA POSIBLE CARACTERIZACIÓN DEL ÁLGEBRA A PARTIR DE ELEMENTOS HISTÓRICOS

El presente apartado hace un barrido general a la evolución histórica del Álgebra, abarcando algunos momentos históricos que comúnmente se han reconocido como constitutivos de su desarrollo, así como otros que no son tan reconocidos, pero que se han seleccionado porque se considera que permiten una mirada a la evolución tanto de los objetos que históricamente han sido reconocidos como constitutivos del álgebra, así como los procesos que han acompañado el desarrollo de dichos objetos.

Para lograr lo anterior se ha organizado el presente apartado atendiendo a dos aspectos generales. El primero en relación con los **objetos de estudio del Álgebra:**

a. Las ecuaciones como herramientas para solucionar situaciones numéricas.
b. Las ecuaciones como objeto de estudio en sí mismo.
c. Las relaciones generales entre números (antes que los números en sí mismos).
d. Las estructuras de conjuntos numéricos.
e. Las estructuras algebraicas.

El segundo aspecto se denomina **procesos transversales,** entendidos como aquellos procedimientos que han sido reconocidos como algebraicos. Podría pensarse además, que son aquellos elementos que actualmente son constitutivos de los desarrollos propuestos para el álgebra escolar en el aula, pero que históricamente aparecen como producto de siglos de desarrollos para algunos de los objetos de estudio. Los dos procesos transversales que serán abordados son:

1) *Sistematización del lenguaje matemático*: proceso que a su vez se subdivide en dos procesos, el *desarrollo del simbolismo* que abarca desde lo puramente retórico, pasando por lo sincopado, hasta llegar a lo simbólico, y el *desarrollo de una operatoria* para los objetos representados por dichos símbolos. En este caso, se hace referencia de manera general, a la evolución del lenguaje matemático haciéndose cada vez más sistemático y con niveles de generalización mayores.
2) *Generalización de los procesos de comprensión, solución y tratamiento de situaciones* que pueden considerarse algebraicas: este proceso abarca lo que se denomina

*instanciación* (la generalidad atrapada en una variedad de ejemplos), pasando por acciones relacionadas con procesos de construcción y manipulación geométrica como añadir, cortar, pegar, completar y restaurar, en los babilonios y que también se encontraría siglos después en la obra de Al-Kowarizmi; pasando posteriormente por la solución de ecuaciones a partir de fórmulas generales, atendiendo, la mayoría de las veces, al principio de homogeneidad de las magnitudes, impregnado casi todo el tiempo por métodos deductivos de demostración; hasta llegar a la integración de métodos analíticos[11]-sintéticos[12] (Charbonneau, 1996), la "liberación" de los principios de homogenización para el tratamientos de los objetos algebraicos y con ello, la independencia del álgebra respecto a la geometría.

Se pretende mostrar que en la Historia, los problemas y las situaciones que se pueden asumir como algebraicas, se solucionaron de manera diferente dependiendo de la época, de las herramientas Matemáticas, de las concepciones sobre lo "válido" en Matemáticas, entre otros asuntos, y que progresivamente, esas maneras de solucionar, de abordar y de comprender tales situaciones, iban adquiriendo características cada vez más generales.

En la ilustración 3 resumimos los aspectos generales y procesos transversales contemplados en la evolución histórica del álgebra.

[11] Este método se caracteriza por reunir en una sola expresión, datos conocidos y desconocidos a partir de la relación que se conoce de ellos y realizar un tratamiento de dicha expresión para irla transformando, de tal manera, que se puede obtener así el valor de los datos desconocidos.

[12] De acuerdo con Charbonneau (1996) en el análisis, las relaciones entre los diferentes objetos involucrados en los problemas se consideran ciertas. Esta consideración constituye una hipótesis. Segundo, habiendo sido formulada esta hipótesis, uno busca objetos que puedan ser construidos o a los que se puedan llegar a partir de los objetos que son conocidos en el problema. Si uno de estos objetos puede ser construido, entonces, a partir de él, uno puede construir el objeto que se está buscando

| EVOLUCIÓN HISTÓRICA DEL ÁLGEBRA | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| **Objetos de estudio** | Ecuaciones como herramientas para solucionar situaciones numéricas | Ecuaciones como objeto de estudio en sí mismo | Relaciones generales entre números | Estructuras de conjuntos numéricos | Estructuras algebraicas generales |
| **Procesos transversales que se desarrollaron** | Generalización y sistematización del lenguaje (incluyendo Operatoria propia del simbolismo) | | | | |
| | Generalización de los procesos de comprensión, solución y tratamiento | | | | |

ILUSTRACIÓN 3. OBJETOS Y PROCESOS EN EL DESARROLLO HISTÓRICO DEL ÁLGEBRA

### 2.3.1 OBJETOS DE ESTUDIO EN LA HISTORIA DEL ÁLGEBRA

En este apartado se trata de responder, a grandes rasgos, a algunas inquietudes sobre cuáles asuntos podrían corresponder a la Historia del Álgebra. Si bien, el término “Álgebra” aparece por primera vez en la obra de Al-Kwoarizmi y sólo se usó a partir del siglo XIX con un sentido parecido al que hoy se le da (Kleiner, 2007), es posible, clasificar a algunos objetos como propios, característicos y constituyentes del desarrollo del Álgebra en la Historia.

Aunque esta sección se desarrolla haciendo una separación de lo que se han denominado objetos de estudio en la Historia del Álgebra, no se pretende de ninguna manera, asumir que tales objetos están de la misma forma separados uno del otro, al contrario, se reconoce las íntimas relaciones que hay entre ellos. Por ejemplo, es muy difícil distinguir cuándo las ecuaciones se abordaron como herramienta para tratar situaciones o cuándo se usaron como objeto de estudio en sí mismo. Se piensa, que incluso hubo momentos en que las ecuaciones se emplearon en la Historia, de las dos maneras simultáneamente.

En este apartado se propone una agrupación de los asuntos evocados y susceptibles de estudio que son repetitivos en la literatura consultada referida a la Historia del Álgebra. Algunos de los autores consultados fueron Socas, Camacho, Palarea, & Hernández (1989), Acevedo de Manrique & Falk de Lozada, (2000), Boyé (2003), Davila (2003), Sessa (2005), Kleiner (2007), Ochoviet (2007), Esquinas Sancho (2008) yTorres (2011).

### 2.4.1.1 Las Ecuaciones como herramientas para solucionar situaciones numéricas

Algunas de las necesidades de ciertas culturas estaban relacionadas con problemas derivados de situaciones en las que se quería encontrar una o algunas cantidades. Para ello, las antiguas civilizaciones implementaron estrategias, que progresivamente se iban haciendo cada vez más generales, y les permitían solucionar dichos problemas. Así, se puede hablar de un periodo inicial en el cual la generalización tenía que ver con la enunciación, paso por paso, de procedimientos, que se usaban en ejemplos numéricos concretos y que podían ser utilizados en la solución de problemas o situaciones similares.

Un ejemplo de lo anterior es este enunciado de un problema cuadrático resuelto por los babilonios en su sistema de numeración sexagesimal: "*He sumado la superficie y mi lado de cuadrado: 45.''*El cual lo solucionan así: *''Pondrás 1, la wasitum. Fraccionarás la mitad de 1 (:30). Multiplicarás 30 y 30 (:15). Agregarás 15 a 45: 1. 1 es (su) raíz cuadrada. Restarás el 30 que has multiplicado de 1 (:30). 30 es el lado del cuadrado.''*(Sessa, 2005, p. 21)

Una traducción del problema y su solución en un lenguaje actual es la siguiente: He sumado la superficie de un cuadrado y su lado resultando $\frac{3}{4}$. Solución: Pondrás 1, la unidad. Fraccionarás la mitad de 1 $\frac{1}{2}$ . Multiplicarás $\frac{1}{2}$ y $\frac{1}{2}$ $\frac{1}{4}$ . Agregarás $\frac{1}{4}$ a $\frac{3}{4}$, esto da 1. Sacas su raíz cuadrada: 1. Restarás el $\frac{1}{2}$ que has multiplicado de 1: $\frac{1}{2}$ . Entonces $\frac{1}{2}$ esel lado del cuadrado.

Como se aprecia, el procedimiento podría ser utilizado para solucionar situaciones o problemas similares. Este tipo de ejemplos concretos, vistos e interpretados con el lenguaje y los procedimientos actuales, se podrían relacionar inmediatamente con acciones que realizamos hoy, muchas de esas acciones, tienen que ver con la solución de ecuaciones cuadráticas, para este caso.

En la antigüedad, las necesidades de la humanidad frente a las Matemáticas estaban, en gran número, relacionadas con la solución de problemas de cálculo de cantidades partiendo de cierta información. En ese sentido, algunos de los primeros desarrollos alcanzados frente a la evolución del Álgebra tienen que ver con la invención de procedimientos cada vez más generales para solucionar tales problemas. Por esa razón, se considera que uno de los primeros objetos característicos del Álgebra y su desarrollo histórico son las ecuaciones como herramienta para solucionar situaciones numéricas que provenían de situaciones cotidianas y eran interpretadas y resueltas con la ayuda de la geometría; en algunos trabajos se pone de manifiesto, según los análisis que se ha hecho de estos, que detrás de la presentación de la solución a los problemas podría existir alguna intención didáctica.

Una de las civilizaciones que se caracterizó por solucionar situaciones con cantidades y conseguir procedimientos que se asemejan a los que hoy utilizamos para resolver ecuaciones de primer y segundo grado y sistemas de ecuaciones fue la babilónica (aproximadamente 1700 años A.C.). En Kleiner (2007), Ochoviet (2007), Sessa (2005), Socas, Camacho, Palarea & Hernández. (1989) se refieren a los desarrollos que alcanzó esta civilización en relación con la Historia del Álgebra.

En ese mismo sentido, frecuentemente se menciona que los babilonios resolvían con mucha eficiencia ecuaciones de segundo grado y sistemas de ecuaciones lineales. Ecuaciones que eran dadas de manera retórica y en forma de problemas. Así mismo, y de acuerdo con Sessa (2005), se afirma que la solución era prescriptiva y que no había justificación de sus procedimientos, sin embargo, la acumulación de ejemplos tras ejemplos del mismo tipo de problemas es un indicio de la existencia de alguna forma de justificación de los procedimientos de las Matemáticas babilónicas.

Las evidencias que se encuentran de los desarrollos matemáticos de los babilonios, dan cuenta de que resolvieron situaciones particulares para números específicos. Sin embargo, se encuentra una organización sistemática que permite no sólo comprender al algoritmo sino aplicarlo a situaciones similares, de aquí la frase "*generalidad es atrapada a través de una variedad de ejemplos*" (Sessa, 2005, p. 21). Además, es posible que en la solución de los babilonios la presentación retórica de la solución estuviera acompañada de diagramas que se afirma pudieron servir de apoyo en los cálculos que hacían, sin operar sobre los objetos representados.

Dentro de estos ejemplos, es posible identificar el proceso denominado "*completar*" y "*restaurar*" con el que se resolvían problemas (Sessa, 2005; Socas y otros, 1989). Esta manera de trabajar es mucho más explícita en las elaboraciones que hacen siglos después los árabes. Una interpretación actual de estos procesos desemboca en similitudes con algoritmos que hoy se conocen como soluciones generales de ecuaciones.

En el trabajo de los babilonios, como también de varias culturas posteriores, se encuentra que las operaciones que se hacían, conservaban de manera estricta el principio de homogeneidad de las magnitudes. Por ejemplo, no se operaba longitudes con áreas, aunque así pareciera en los algoritmos que relataban. Para ilustrar esta situación, se retoma el problema mencionado anteriormente, se considera la *superficie* del cuadrado adicionado con su *lado* dando como resultado $\frac{3}{4}$. Puede pensarse inadvertidamente que los babilonios están solucionando un problema en el que se suma una superficie de un cuadrado con el lado del cuadrado. Sin embargo, las ilustraciones en las que se apoyan los Historiadores (Ver Ilustración 4) muestran que lo que se suma es la superficie de un cuadrado y la superficie de un rectángulo.

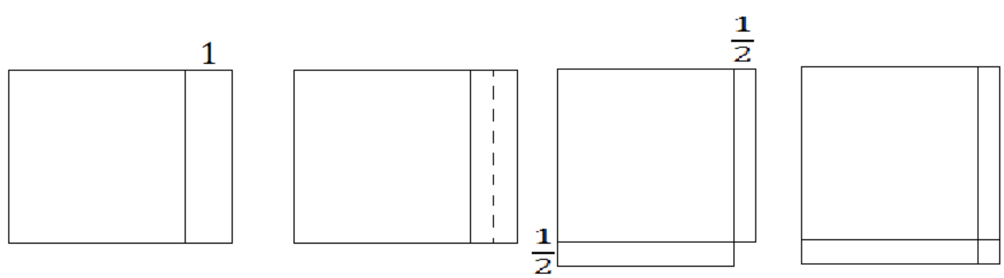



ILUSTRACIÓN 4. PROCESO DE COMPLETAR Y RESTAURAR.

Del procedimiento descrito por los babilonios, en palabras y signos actuales y guiándose por el anterior gráfico, es posible interpretar que al cuadrado original se le suma su "lado", que realmente corresponde a un rectángulo de ancho 1; ese rectángulo se divide en dos rectángulos iguales de ancho $\frac{1}{2}$; uno de esos rectángulos se traslada a uno de los lados del cuadrado para luego "completar" un nuevo cuadrado de lado $\frac{1}{2}$ unidades más grande que el original; seguidamente se hacen algunos cálculos que básicamente tienen que ver con la consideración de que éste nuevo cuadrado tiene una superficie igual a la suma del cuadrado original, el rectángulo de ancho 1 y un nuevo cuadrado de lado $\frac{1}{2}$; así las cosas, lo que se tiene es que el área del cuadrado más grande tiene un área de $\frac{3}{4}+\left(\frac{1}{2}\right)^2=1$, lo que indica que el lado del cuadrado grande es 1, por lo tanto y guiados por la figura, se puede determinar que el lado del cuadrado original es $1-\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$.

Ahora bien, si se fija la atención en el algoritmo que proponen los babilonios y se hace una traducción a la simbología matemática actual, se podrá encontrar una similitud bastante cercana al algoritmo de solución de ecuaciones de segundo grado del tipo $x^2+x=C$ usando la fórmula general.

De la misma manera, los chinos (aproximadamente 200 A. de C.) y los indios (aproximadamente 600 A. de C.) fueron, en algunos aspectos, más allá que los babilonios, pues aceptaban los coeficientes negativos (aunque no las raíces negativas) y admitían dos raíces para las ecuaciones cuadráticas. Estas culturas, también describían procedimientos para manipular ecuaciones, pero no tenían justificación sobre sus soluciones. Los chinos tenían métodos para aproximar raíces de ecuaciones polinómicas de cualquier grado y resolvían sistemas de ecuaciones usando matrices (Kleiner, 2007).

Otro episodio histórico que es muy repetitivo en el desarrollo del álgebra y en el que se encuentra a las ecuaciones como herramienta para solucionar situaciones con cantidades, es el trabajo de Diofanto: *La Arithmetica*, una obra de aritmética-logística, en la que se proponen y solucionan problemas. A pesar de que los enunciados de dichos problemas son generales y abstractos, las soluciones muestran cálculos con números específicos. Diofanto trabaja con números cuadrados, bicuadrados y cuadrados-cubos[13] y aparecen formulaciones y validaciones de identidades que hoy son algebraicas e introduce abreviaturas para indicar potencias y operaciones. También introduce un símbolo para designar una cantidad desconocida: “Diofanto elige números particulares para los datos, usa una letra para el valor

[13] Por esa razón, en esta obra existen asuntos que se puede clasificar también dentro de lo que se ha denominado, en este trabajo, como la relación general entre números, que posteriormente se expondrá un poco más detalladamente.

desconocido que quiere hallar y opera con ella como si fuera conocido. No está calculando el arithmo directamente a partir de los datos, sino que plantea una condición sobre él que le permite hallarlo” (Sessa, 2005, p. 52).

Este hecho, no sólo da evidencias del trabajo efectivo sobre las ecuaciones como herramienta para solucionar situaciones numéricas, sino que además, permite vislumbrar maneras distintas en las que la humanidad empieza a trabajar con la incógnita: ya no sólo se halla la cantidad desconocida a través de una secuencia de pasos en los que la incógnita no es operada, sino que se involucra en el proceso mismo de su búsqueda, generando algunas condiciones propias para el trabajo con las incógnitas. Esta manera de trabajar, constituirá varios siglos luego un avance, un logro y una potente herramienta para buscar cantidades desconocidas, construir fórmulas generales, plantear y solucionar ecuaciones.

Aunque la obra de Diofanto trata sobre algunos aspectos de la Teoría de números, contiene varias soluciones de ecuaciones con números racionales y enteros(Kleiner, 2007). Del mismo modo, el autor, destaca algunas reglas básicas para tratar expresiones algebraicas: 1. Transferir un término de un lado de la ecuación al otro; 2. La eliminación de los términos iguales a los dos lados de la ecuación; 3. Definir potencias negativas de una incógnita y enunciación de algunas leyes de los exponentes y 4. Establecer varias reglas para trabajar con coeficientes negativos.

Otro episodio histórico bastante repetitivo en las narraciones acerca de la evolución del Álgebra y acerca de la solución de ecuaciones es el del trabajo de Al-Kowarizmi. Se destacan algunos hechos como que el propio término *“Álgebra”* se debe a su obra y a los procedimientos *al-jabr*: restaurar, componer, complementar, agregar, completar y *al-muqabala*: poner en oposición, balancear; usados en el tratamiento de las ecuaciones. Así mismo, se resalta la clasificación de procedimientos para solucionar tipos de ecuaciones cuadráticas; aún, los problemas y procedimientos eran expresados retóricamente y se daban justificaciones geométricas para las soluciones.

Este episodio histórico se podría entender como uno de los momentos importantes de transición entre el uso y la formulación de ecuaciones para solucionar situaciones con cantidades numéricas y el estudio de las ecuaciones como objeto en sí mismo. Se evidencia, que la preocupación de Al- Kowarizmi va más allá de proponer métodos de solución de ecuaciones, y además de eso, clasifica a las ecuaciones en tipos que se pueden solucionar con procedimientos diferenciados para cada uno.

De modo general, en el estudio de las ecuaciones como herramientas, los procesos de solución son expresados en lenguaje retórico y van acompañados de algunos símbolos para las incógnitas, los coeficientes y las potencias. Al final de la presentación del proceso se encuentran figuras geométricas que tiene como fin justificar los procedimientos.

No obstante, aunque en muchas ocasiones la ecuación es usada para solucionar situaciones con cantidades, la preocupación va transformándose cada vez con más fuerza hacia las fórmulas y los métodos generales. En ese sentido, los interrogantes y trabajos empiezan a desarrollarse más sobre la ecuación en sí misma y ya no tanto sobre la herramienta.

Por otro lado, un asunto frecuente es la relación de la solución de ecuaciones con objetos y procesos propios de la geometría. Este hecho se debe a que la resolución de ecuaciones está ligada a la solución de problemas de carácter práctico, en particular aquellos que involucran áreas y distancias. Según Ochoviet (2007), "*quizás por ello son relacionados o interpretados desde la geometría y desde este contexto se les da solución y justificación. Este contexto geométrico invade la Historia del álgebra hasta el renacimiento inclusive*".

#### 2.4.1.2 Ecuaciones como objeto de estudio en sí mismo

Con el paso del tiempo y la aparición de nuevas necesidades para la humanidad, el uso y el estudio de las ecuaciones va transformándose. En un primer momento, lo que interesaba era tener estrategias cada vez más eficientes y generales para solucionar situaciones con cantidades, por esto se pasa de algoritmos que guían con un lenguaje retóricocómo solucionar algunas situaciones numéricas, hasta llegar a la enunciación y uso de fórmulas generales, con lenguaje sincopado o simbólico, para resolver tipos de ecuaciones que solucionan problemas frecuentes de las Matemáticas o de la cotidianidad. En un segundo momento, la atención empieza a ponerse en las ecuaciones mismas, en el tipo de ecuaciones, en la relación entre su grado y sus soluciones, en la relación de los coeficientes y las soluciones, en los tipos de soluciones, etc.

Si bien la preocupación fundamental era formular métodos generales de resolución de ecuaciones, el hecho de establecer una clasificación para las ecuaciones cuadráticas le da un perfil a dichas ecuaciones de ser susceptibles de tener diversas formas, características, variaciones, formas de solucionar, formas canónicas, etc. En ese sentido, se transforman progresivamente en objeto mismo de estudio. Es por lo anterior que la obra de Al-Kowarizmi se considera, en este trabajo, como la primera que se puede clasificar en la concepción de las ecuaciones como objeto de estudio en sí mismas ya que aporta una teoría de ecuaciones.

Al-Kowarizmi define las especies de algunos números como tesoros (los términos cuadrados en la ecuación), raíces (las raíces de los tesoros) y simples números. Los grupos de ecuaciones, notándolas con simbología actual son:

- Tesoros y raíces iguales a números $x^2 + bx = c$.
- Raíces y números iguales a tesoros $bx + c = x^2$.
- Tesoros y números iguales a raíces $x^2 + c = bx$.
- Raíces iguales a tesoros $x^2 = bx$.
- Tesoros iguales a números $x^2 = c$.
- Raíces iguales a números $bx = c$.

Nótese, que aunque estas ecuaciones se podrían resumir en una sola (la que hoy llamamos ecuación cuadrática general), se distingue una de otra porque para cada una se propone un método de solución que está regido por reglas dadas para cada caso y validadas geométricamente. Además, no se admiten números negativos y por eso también, la conveniencia de discriminar uno de otro tipo de ecuación.

Por su parte, otro árabe, Omar Khay-yam (siglo XI) resolvió ecuaciones cúbicas a partir de métodos geométricos que tenían que ver con la intersección de cónicas. Este personaje da un gran paso en lo respectivo a simbolización, pues considera a los coeficientes como cantidades en vez de como segmentos. Este hecho es de resaltar ya que se desprende un poco de la manera de hacer Matemáticas, hasta ese entonces, dejando de lado el rigor de la justificación matemática que tenía validez en los procedimientos geométricos, (Esquinas, 2008). Posteriormente, en el siglo XIII Fibonacci introduce a Europa sus métodos para solucionar ecuaciones cúbicas en función de los coeficientes. Esto, debido al contacto que había tenido con los árabes.

En este apartado se pueden mencionar también los trabajos de Cardano (1501 - 1576) que son formulados en álgebra retórica usando términos geométricos para las justificaciones. Estas elaboraciones giran en torno a la solución de ecuaciones de tercer grado y son expresadas por medio de radicales, por ejemplo la fórmula que en nuestros días es conocida como Cardano-Tartaglia generó en su tiempo, no sólo soluciones a ecuaciones de tercer grado, sino problemas ya que algunas soluciones eran “objetos” desconocidos (números complejos).

Posteriormente, algunos matemáticos contribuyeron a la solución de ecuaciones de tercer y cuarto grado, entre ellos, Viète, Harriot, Bezout y Descartes. Sin embargo, uno de los primeros en aceptar las soluciones no reales e introducir notación para ellas fue Thomas Harriot (1560-1621). Todos estos, son exponentes del inicio del tratamiento de las ecuaciones en sí mismas, entendido esto como el tratamiento que se hace sobre la expresión misma y en el sentido de consolidación de una teoría de ecuaciones que trabaja sobre familias de éstas.

Viète (1540 - 1603) trabajó dentro de métodos de análisis de los griegos y los contrastó con sus métodos de síntesis usados para demostrar teoremas. Otro hecho muy importante, fue el de introducir un lenguaje simbólico en el tratamiento de las ecuaciones. Usó consonantes para denotar parámetros o coeficientes y vocales para las variables. Por primera vez en casi tres milenios, se podía hablar de una ecuación cuadrática general (con coeficientes literales arbitrarios, en vez de coeficientes numéricos específicos). Aún, se requería homogeneidad en las expresiones algebraicas para poder ser operadas. Sin embargo, lo que le da la connotación a las ecuaciones como susceptibles de ser objeto de estudio en sí mismas está relacionado con el hecho de que también estudió la relación entre coeficientes de las ecuaciones con su solución pero no encontró resultados generales pues no consideraba las raíces negativas. Además de todo esto, relaciona la cantidad de las raíces con el grado de la ecuación.

A propósito, Kleiner (2007) dedica algunos párrafos a lo que denomina “The theory of equations and the Fundamental Theorem of Algebra”. En esta sección de su libro, se describe un periodo comprendido entre la última parte del siglo XVI y la primera del siglo XVII, en el cual se centra la atención en los estudios teóricos de ecuaciones con coeficientes literales, en vez de la solución de las ecuaciones mismas. En ese sentido, surgen algunas teorías de ecuaciones polinómicas. Las principales preocupaciones al respecto de los matemáticos, entre los que se contaban Viète y Descartes, eran la determinación de la existencia, la naturaleza y el número de raíces de las ecuaciones.

Entre otras cosas, por ejemplo, Viète determinó fórmulas que expresan ciertas sumas y productos de las raíces de un polinomio en términos de sus coeficientes. Igualmente, Descartes demostró el teorema en el que se garantiza que si α es una raíz del polinomio P($x$), entonces $x$–α es uno de sus divisores. Como consecuencia de ese teorema se deduce también que un polinomio de grado $n$ tiene exactamente $n$ raíces complejas. Descartes también prueba la llamada regla de los signos, que iba a permitir saber, con sólo observar la secuencia de signos de los coeficientes de la ecuación, el número máximo de raíces reales positivas (que él llama raíces verdaderas) y negativas (raíces falsas) de la misma. Igualmente se determina que todo polinomio de grado impar con coeficientes reales tiene una raíz real. Esto fue aceptado por razones intuitivas en los siglos XVII y XVIII y se estableció formalmente en el siglo XIX como una consecuencia del teorema del valor intermedio en el cálculo.Así mismo, Newton y Gauss (cada uno en su época) demostraron quelas raíces complejas de un polinomio, si existen, aparecen en pares conjugados.

En 1707 se publica el libro Arithmetica Universalis de Newton. En donde se enuncia un teorema sobre las sumas de potencias de las raíces de una ecuación polinomial de la forma $x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} + \cdots + a_{n-1}x + a_n$. Algunos ejemplos de esas sumas para las ecuaciones cúbicas con raíces $u, v$ y $w$son: $u + v + w = -a$; $u^2 + v^2 + w^2 = a^2 - 2b$; y $u^3 + v^3 + w^3 = -a^3 + 3ab - 3c$.Se concluye, entre otras cosas, que los coeficientes de cualquier polinomio simétrico se pueden expresar como suma de potencias de las soluciones, hecho que resulta fundamental en los trabajos posteriores sobre la teoría de ecuaciones.

Por otro lado, Galois también contribuye al desarrollo del álgebra al tratar de responder a la pregunta sobre cuáles son las ecuaciones resolubles por radicales y cómo, dada una ecuación, puede determinarse si es resoluble o no. Este tipo de trabajo permitió clasificar y caracterizar los conjuntos soluciones de las ecuaciones(Ochoviet, 2007).

También es importante mencionar, que el estudio de las ecuaciones alcanza un momento de gran relevancia con el planteamiento e intentos de demostración del Teorema Fundamental del Álgebra.

La relación entre coeficientes y soluciones y la búsqueda de métodos generales para la solución de ecuaciones cuadráticas y cúbicas caracterizan este periodo histórico en el que las ecuaciones se convierten de forma progresiva en objeto de estudio alejándose de los problemas de carácter práctico. A propósito, se puede ver que los matemáticos poco a poco, empiezan a caracterizar y a estudiar a las ecuaciones (con coeficientes generales) a partir de relaciones entre ellas y las relaciones existentes entre coeficientes y raíces, la existencia o no de las soluciones, y ya no al respecto de las situaciones que modelan y solucionan. En conclusión, las ecuaciones se comienzan a reconocer como objetos susceptibles de estudio en sí mismas debido a las características y propiedades que se les asignan.

#### 2.4.1.3 Relaciones generales entre números

En esta sección se presenta algunos episodios[14] históricos en los que se alude a algunas relaciones Matemáticas entre los números, especialmente entre los números naturales. Este tipo de relaciones generales[15] entre números, se consideran en este trabajo, como parte del desarrollo histórico del Álgebra, ya que, entre otras cosas, el actual sistema algebraico de representación permite expresar dichas relaciones como fórmulas que son relacionadas

[14] Un episodio sintetiza un conjunto de asuntos reconocidos históricamente que tienen que ver con un objeto particular de estudio de las Matemáticas.

[15] Relaciones generales se entiende en este trabajo, como propiedades que cumplen los números, en este caso, los enteros. Si bien este tipo de clasificación alude, si se quiere, a la forma de significación de la variable, particularmente, asumiéndola como número generalizado (y en el caso de las ecuaciones como incógnita), no se tendrá en cuenta en este trabajo pues no se adopta dentro de la caracterización realizada a los objetos históricos.

fácilmente con algunas propiedades algebraicas de conjuntos numéricos. Además, hay casos, en los que los profesores proponen situaciones similares para contribuir en el desarrollo del concepto de variable (Sessa, 2005).

Los pitagóricos, quizá los autores de los trabajos más representativos, estudiaron algunas relaciones entre los números, ellos clasificaban a los números como triangulares, cuadrados, rectangulares, pentagonales, piramidales y cúbicos. Todo esto, debido a la acomodación en configuraciones geométricas que les daban a las unidades (representadas por puntos).

Algunos de los ejemplos de lo que denominamos relaciones generales entre números, son:

i) La suma de los primeros "$n$" números impares es un número cuadrado "$n^2$";
ii) la suma de dos números triangulares consecutivos es un número cuadrado;
iii) la suma del número triangular "$n$" consigo mismo da como resultado el número rectangular de lados "$n$" y "$n$+1";
iv) si a un número cuadrado "$n^2$" se le suma el doble de su lado más 1, da como resultado el número cuadrado siguiente "$(n+1)^2$".

Los pitagóricos también clasificaron algunos números según algunas de sus características o relaciones entre ellos, de ese modo, se definen los números amigos, los números perfectos, los números abundantes, los números deficientes, entre otros.

Por otro lado, Euclides también presenta algunas relaciones entre los números en su obra *Elementos*. Por ejemplo, en el libro VII incluye definiciones del múltiplo, de los números pares e impares, de número compuesto, de número cuadrado, de número cúbico, de número plano y sólido (el que se puede expresar como producto de dos o de tres factores respectivamente) y de número perfecto (aquel que es igual a sus propias partes) entre otros. En su libro VIII se tiene en cuenta algunas propiedades de los cuadrados y los cubos.

Por otra parte, se puede de cierta manera, clasificar algunos desarrollos del trabajo de Fermat en este ítem. Se sabe que este matemático es el fundador de la teoría moderna de los números. Uno de sus alcances más famosos e importantes tiene que ver con el conocido Teorema de Fermat al afirmar que no existen números enteros $x$, $y$, $z$ que satisfagan la ecuación$x^n + y^n = z^n$ para $n \geq 3$. Fermat afirmaba tener una hermosa demostración, que no se conoce. La demostración de este teorema es reciente y fue realizada por Andrew Wilesen la última década del siglo XX.

### 2.4.1.4 Estructuras de conjuntos numéricos

Como ya se mencionó, existe una etapa de la Historia del Álgebra en la que la humanidad se interesó por la determinación de la existencia, la naturaleza y el número de soluciones o raíces de las ecuaciones. En ese sentido, una de las preocupaciones en ese período histórico es precisamente la naturaleza de las soluciones de las ecuaciones, lo que conlleva a afrontar inquietudes sobre algunos conjuntos numéricos que muchas veces eran desconocidos o no aceptados por los matemáticos del momento. Es así, como en este apartado se hace mención de algunos episodios históricos, que tienen que ver con algunas evidencias sobre el estudio general de ciertos conjuntos numéricos.

En primer lugar, el estudio de la solución de las ecuaciones polinómicas lleva al estudio de ciertos sistemas numéricos en los que se encuentran sus soluciones. Queriendo contextualizar el hecho de que este asunto corresponde al desarrollo histórico del Álgebra, es pertinente afirmar, de acuerdo con Kleiner (2007) que el estudio de los sistemas numéricos constituye un aspecto importante del álgebra clásica.

Algunos de los matemáticos destacados, en el proceso que, si se puede decir así, inician con el estudio de las estructuras de los conjuntos numéricos fueron Del Ferro, Tartaglia, Cardano, Ferrari y Bombelli, quienes al tratar de solucionar ecuaciones cúbicas y cuárticas usando radicales, manipularon números que hasta el momento no eran aceptados como objetos matemáticos. En este momento histórico, los que hoy consideramos números enteros y complejos, empiezan a dotarse de reglas con las que se operan, que posteriormente harían parte de reglas de composición interna de sistemas numéricos.

Por ejemplo, en el caso de los números complejos, el nacimiento de algunas formas operatorias para el conjunto de los números complejos, no implicó su legitimidad, de hecho, el mismo Bombelli no estaba muy convencido de su existencia y más bien, entendía que la manipulación de estos objetos era necesaria para encontrar las soluciones que sí tenían validez matemática(Kleiner, 2007). Una Historia similar ocurre en el caso de los números enteros que en medio del rechazo o su aceptación parcial fueron mostrando su utilidad para la interpretación y solución de situaciones Matemáticas.

Por lo tanto, empiezan a surgir interrogantes sobre los porqués y las justificaciones de la manera de operar los números complejos y negativos. En un primer momento, bastaba con que las operaciones que se usaban sobre esos objetos ayudaran a determinar las soluciones de las ecuaciones. Sin embargo, poco a poco se establecen reglas de manipulación entre ellos, conformando progresivamente, conjuntos numéricos con cierto tipo de comportamiento frente a algunas operaciones.

Finalmente en el caso de los números complejos, a Gauss se le da el crédito de proponer la manera de representar tales números como puntos en el plano cartesiano.Hamilton en el año de 1833, define la adición y multiplicación de parejas ordenadas de números reales, en ese sentido empieza a dotarse a los números complejos de una estructura algebraica. Comienza, por tanto, a entreverse otro tipo de conjuntos numéricos y estructuras algebraicas distintas a las que existían y se aceptaban. Es en este momento en el que se puede hablar del estudio de la estructura del conjunto de los números complejos y en general de cualquier conjunto.

Al respecto, Dávila(2003), afirma que Gauss es el primero en tratar los grupos abelianos finitos, aunque no con la terminología respectiva, encontrando varios resultados. Algunos de losobjetos con los que trata Gauss son, por ejemplo: el grupo aditivo de los números enteros módulo $n$ y el grupo multiplicativo de enteros que son primos relativos con $n$, módulo $n$. Como se aprecia, aunque aún se trabaja con conjuntos numéricos particulares, las producciones se enfocan hacia la generalización de las propiedades y las relaciones de dichos conjuntos. Este podría constituirse en el inicio del estudio de las estructuras algebraicas generales, objetos que se abordarán en el siguiente apartado.

Así mismo, a comienzos y mediados del siglo XIX, algunos matemáticos como Lagrange, Galois y Cauchy, estudian algunos conjuntos específicos, por ejemplo, los campos y los grupos de permutaciones de los coeficientes de las ecuaciones polinomiales.

Casi al mismo tiempo, entre 1830 y 1850 los algebristas ingleses, entre ellos Boole, Hamilton y Cayley, ampliaron el dominio del álgebra mediante el concepto de ley de composición, a nuevos objetos matemáticos como vectores, cuaterniones y matrices. Aquí, de manera particular, se encuentra que la multiplicación entre los cuaterniones y entre las matrices no es conmutativa, hechos que abrieron las puertas a nuevas álgebras. Este tipo de hallazgos junto al nacimiento de las geometrías no euclideas *"impulsó a los matemáticos del siglo XIX a liberarse de las costumbres y los hábitos mentales"*(Ochoviet, 2007, p. 15).

Otro de los episodios históricos más conocidos en las Matemáticas, tiene que ver con la axiomatización de los números naturales por Peano en 1889. No obstante, el mismo Peano, manifiesta que le fue muy útil para su trabajo los desarrollos de Dedekind en 1888 y de Frege en 1885. De hecho, en esta época, *"la axiomatización de la aritmética en sí era un problema que estaba en el ambiente y que dio lugar a numerosos y excelentes tratados de la literatura matemática"* (Oostra, 2003, p.6).

Dedekin por su parte, define los números reales mediante cortaduras. Además, axiomatiza la aritmética de los números naturales ofreciendo una caracterización de la estructura del conjunto de los números naturales.

Casi paralelamente, Loewy trabaja con la estructura de los números enteros señalando que no es un cuerpo. Se define la adición y la multiplicación de enteros positivos y establece luego la regla para el producto de dos enteros negativos. Los trabajos algebraicos se desarrollan en torno a las estructuras de los conjuntos numéricos. Progresivamente, los avances en la definición de dichas estructuras se vuelven independientes de los objetos de estudio iniciales, se desligan de lo concreto para dar paso a definiciones abstractas que no dependen de conjuntos de referencia.

En conclusión, se alude a este objeto de estudio del Álgebra, en los casos en los que en la Historia de la Matemáticas se hace referencia a conjuntos numéricos, la formulación de las reglas de operación, la legitimización matemática tanto de los conjuntos como de las reglas de composición y en términos generales, de la estructura algebraica de los sistemas numéricos no generales (números naturales, números racionales, números reales, números complejos, números enteros, etc.).

### 2.4.1.5 Estructuras algebraicas generales

En esta sección se incluyen algunos episodios históricos en los cuales se hace alusión a aquellos desarrollos matemáticos que se hacen sobre las estructuras algebraicas, sin referirse a conjuntos específicos propiamente.

> […] la característica principal del álgebra contemporánea: su objeto de estudio son los sistemas algebraicos, entendiendo por éstos un conjunto de objetos en el cual están definidas una o varias leyes de composición que operan entre esos objetos y que satisfacen ciertas reglas (los axiomas) dadas de antemano. Así, la abstracción viene del hecho de que no interesa para nada la naturaleza de los elementos con los que se opera; lo que realmente importa es que se satisfagan los axiomas que definen las operaciones entre dichos elementos. (Davila, 2003, p. 76).

Frente a la evolución de este tipo de abstracciones de las estructuras algebraicas, se puede mencionar a Peacock (1830) como uno de los gestores al tratar de diferenciar el álgebra aritmética y el álgebra simbólica. Según él, la primera tiene que ver con el estudio que se hace sobre las leyes de los sistemas numéricos –las estructuras de los conjuntos numéricos- y la segunda se refiere a cuándo estas leyes no tienen restricción a los objetos que alude y por tanto, se generan teorías sobre conjuntos generales, que no necesariamente tienen referencia(Kleiner, 2007). A esto se llamó Álgebra Moderna o Abstracta.

Peacock trató de justificar su determinación de las leyes del Álgebra simbólica, a partir de las de álgebra aritmética, mediante el principio de permanencia, que esencialmente afirma que las leyes del Álgebra simbólica serán las leyes del Álgebra aritmética. En Álgebra simbólica, las reglas que determinan el significado de las operaciones se podrían ver como premisas “arbitrarias”, que pueden ser adaptadas a cualquier sistema de objetos que lo permitan. Kleiner (2007), afirma que ésta fue una idea muy sofisticada para su época.

Uno de los matemáticos que contribuyó al desarrollo de teorías sobre estructuras algebraicas generales fue, sin duda, Galois (1811 - 1832). Este personaje, tenía claro el concepto de lo que hoy llamamos *campo* ya demás es el primero en utilizar el término en contexto matemático aplicándolo a una colección de permutaciones (de las raíces de las ecuaciones) cerradas.

Posteriormente, estas ideas se aplican a nuevos conjuntos numéricos y amplían los objetos de estudio del Álgebra incluyendo el Algebra de la lógica de Boole, los vectores, los cuaterniones, los sistemas generales hipercomplejos, las matrices y las leyes no asociativas. Por lo tanto, la aparición del Álgebra simbólica propició la evolución posterior del Álgebra. Los símbolos y sus leyes de funcionamiento, comenzaron a adquirir una vida propia, convirtiéndose en objeto de estudio por derecho propio.

Uno de las pretensiones de algunos matemáticos de finales del siglo XIX tenía que ver con encontrar una clasificación general de todos los grupos finitos. Al respecto, Klein y Lie en 1871 publican un artículo en el que se examina la idea de grupo continuo y establecen la conmutatividad de estos. Aquí se puede encontrar la generalidad del concepto de grupo, diferente a los grupos de números específicos o permutaciones. Posteriormente, Lie desarrolló su teoría de los grupos continuos y la aplicó al estudio de ecuaciones diferenciales; y Klein aplicó la noción de grupo de transformaciones al estudio de las geometrías y posteriormente inició una serie de investigaciones sobre grupos discretos de transformaciones fraccionales lineales.

Ochoviet (2007) al respecto destaca que a finales del siglo XIX, la imagen del álgebra como la disciplina que trata de las ecuaciones polinómicas y de las formas algebraicas, va cambiando para transformarse en la disciplina que trata de las estructuras algebraicas. El trabajo de Heinrich Weber por ejemplo, posibilitó la comprensión de la idea de una estructura. De la misma manera e inspirado por Weber, en 1910, Steinitz informa sobre sus desarrollos de una teoría abstracta de cuerpos, que significa uno de los pasos decisivos en la consolidación del enfoque estructural en álgebra.

Los trabajos algebraicos a partir de finales del siglo XX se desarrollan en torno a las estructuras de los conjuntos numéricos independizándose poco a poco de esos conjuntos de referencia. Por ejemplo, Hensel (1913) define a los anillos como dominios que satisfacen todas las propiedades de los axiomas de cuerpo, excepto aquel que garantiza la existencia de un elemento identidad para la multiplicación, la existencia de un inverso respecto de la multiplicación para todo elemento y la no existencia de divisores de cero. Fíjese que no se refiere a un sistema numérico específico, más bien los axiomas son generales y cualquier conjunto que cumpla con ellos tendrá un estatus algebraico particular.

Otro aporte importante es el de Fraenkel en 1914, quien inicia el estudio de los anillos abstractos, definiéndolos como dominios muy similares a los cuerpos, pero que poseen divisores de cero. Aquí se puede observar, que no solo se definen estructuras algebraicas para conjuntos numéricos generales, sino que además de eso, se amplía los casos de entidades que debían ser reconocidas como pertenecientes a algún tipo de estructura algebraica. Quizá, se podría decir también, que se amplían y se diversifican a las estructuras algebraicas conocidas.

De esa manera, en el siglo XX surgen nuevas estructuras y teorías algebraicas: la teoría de anillos, la teoría de campos, la teoría de módulos, la teoría de representaciones de grupos y de álgebras, entre muchas más.

Poco a poco, y como se puede ver en la actualidad, el estudio de las estructuras algebraicas se convierte en la principal tarea del álgebra. Los demás objetos que se referencian en este trabajo, hacen parte del desarrollo histórico del Álgebra, podrían incluso clasificarse en objetos propios del Álgebra clásica, sin embargo, no son muy frecuentes en las elaboraciones actuales sobre este campo de conocimiento.

## 2.3.2 PROCESOS TRANSVERSALES QUE SE DESARROLLARON CON, EN Y PARA EL ÁLGEBRA

Bajo la intención de hacer un recorrido, de manera general, de lo que ha sido la evolución del Álgebra en la Historia, no es suficiente hacer alusión a los objetos matemáticos que se entienden como característicos del álgebra. Es necesario, describir algunos procesos que han sido transversales y que se desarrollaron con, en y para el álgebra. De hecho, en la actualidad, cuando se alude al Álgebra, es inevitable referirse a algunos procesos, que tienen que ver en muchas ocasiones, con el lenguaje y las maneras de abordar las situaciones Matemáticas. A propósito Socas (1989), afirma que el Álgebra está presente en casi toda la matemática y se caracteriza por sus métodos, en los que los símbolos y las letras son de los rasgos más sobresalientes.

A continuación, se mencionará, *grosso modo*, algunos asuntos provenientes de la Historia, que ilustran el desarrollo de los procesos transversales que se desarrollaron con, en y para el álgebra.

### 2.4.2.1 Generalización y sistematización del lenguaje

Un hecho de gran importancia en el desarrollo del Álgebra en la Historia, es sin lugar a dudas, la manera de designar los objetos matemáticos. Este proceso de designación, se desarrolló haciendo que el lenguaje matemático fuera cada vez más sistemático y general. Sistemático en la medida que dicho lenguaje permitía de manera progresiva, realizar tratamientos sobre las representaciones de los objetos matemáticos cada vez, con menos cálculos y procedimientos, y desprendiéndose, en la operatoria, del lenguaje retórico o natural. En cuanto a la evolución de la generalidad del lenguaje matemático, se puede decir que este permitía hacer referencia a los objetos matemáticos con menos signos cada vez, además de que para un conjunto de situaciones Matemáticas, se desarrollaban simbologías que las expresaban de manera canónica y permitían resolverlas por leyes determinadas abarcando un conjunto amplio de casos particulares.

Para referirse al desarrollo del lenguaje (sistema matemático de signos) en la Historia de las Matemáticas y particularmente del Álgebra, es necesario remitirse a las primeras representaciones de cantidades. Al respecto Socas (1989), afirma que la primera etapa de la aparición de los símbolos y las fórmulas en general, es la aparición de los símbolos numéricos, por tanto, es un episodio que hace parte de la Historia del álgebra.

De manera lenta y progresiva, los símbolos para denotar objetos matemáticos van evolucionando a lo largo de la Historia. Básicamente, se reconocen tres periodos que resumen dicha evolución: Periodo retórico verbal, aproximadamente de 1700 a. de C a 250 d. de C; periodo sincopado o abreviado, aproximadamente hasta comienzos del siglo XVI; y periodo simbólico, hasta la fecha.

De la primera etapa, la retórica, se puede decir que las designaciones de los objetos matemáticos eran dadas con lenguaje retórico o natural y los cálculos se realizaban por medio de palabras que referían objetos (casi siempre magnitudes) y relaciones entre ellos. Se distingue entre otras, a las culturas babilónica, egipcia y china, como aquellas que se encuentran en este periodo. Sessa (2005), también afirma que Al-Kowarizmi usa lenguaje completamente retórico, sin la utilización de ningún símbolo en su obra, aunque define las especies de algunos números como tesoros (los términos cuadrados en la ecuación), raíces (las raíces de los tesoros) y simples números, que ya se podría entender como un intento por sistematizar y simplificar el lenguaje que se utilizaba en la solución de situaciones relacionadas con las Matemáticas.

El segundo periodo, el sincopado, se caracteriza por el uso de un lenguaje retórico con la utilización, al tiempo, de algunos símbolos que simplificaban algunas palabras que designaban objetos matemáticos. Dichos símbolos casi siempre provenían de abreviaturas simbólicas de tales palabras. Por ejemplo, Boyé (2003) manifiesta que a Diofanto se le debe lo que denomina como un comienzo del simbolismo, introduciendo, entre otras cosas, un símbolo parecido a la letra sigma, denominada “arithmo” con la que se designaba a la incógnita. Al mismo tiempo, este matemático introduce abreviaturas para indicar potencias y operaciones.

El tercer periodo, el *simbólico*, se distingue por la designación con símbolos de los objetos matemáticos, sus relaciones y sus operaciones. En este momento, los símbolos además de ser objetos de representación, asumen una función muy importante, que tiene que ver con la operatividad entre ellos. Se le atribuye a Viète y a Descartes la introducción e implementación de esta forma de escritura. Por ejemplo Viète utilizó letras para designar de manera general los datos de los problemas: propone nombrar a las incógnitas por vocales y los coeficientes indeterminados por consonantes, todas esas letras se escribían en mayúsculas.

Lo que nosotros escribimos como $2x^2 - 5x = 23$

Diofanto lo escribiría así: $\Delta^{\gamma} \uparrow \beta\zeta\varepsilon \;\; \varepsilon\sigma\tau\iota \;\; M\chi\gamma$

Stifel así: $duo\ quad. m\ quinque\ reb. aequalis\ 23$

Cardano así: $\overset{\overset{2}{\smile}}{2} m \overset{\overset{1}{\smile}}{5} a\ equale\ a\ 23$

Y Vieta así: $2Aq - 5A\ aeq\ 23$

Tomado de (Boyé, 2003, p. 268)

Finalmente, a Descartes se le debe la manera de usar los símbolos para denotar y operar los objetos matemáticos tal y como lo hacemos en la actualidad. En su obra, emplea la letra “x” como la incógnita, las primeras letras del alfabeto para constantes y parámetros, y las últimas letras del alfabeto para incógnitas y variables. De la misma manera, se cambia totalmente el lenguaje natural en la resolución de problemas matemáticos por métodos formales basados en lenguaje algebraico completamente simbólico (Esquinas, 2008).

#### 2.4.2.2 Generalización de los procesos de comprensión, solución y tratamiento de situaciones que pueden considerarse algebraicas

Es cierto, que cuando se alude a la Historia del Álgebra, casi siempre se inicia con la Historia de la Aritmética y del número mismo. Se podría pensar, en ciertos momentos, que hasta un cierto punto, las dos Historias se refieren a los mismos aspectos. No obstante, la Historia del Álgebra, va tomando su propio y distinguible camino, entre otras cosas, por los procesos que se van construyendo en y para el desarrollo histórico del Álgebra.

Fundamentalmente, se pretende mostrar en este apartado, algunos episodios históricos que muestran la evolución de los procedimientos utilizados en el tratamiento de las situaciones Matemáticas, hasta la consolidación de la integración de métodos analíticos y sintéticos; la “liberación” de los principios de homogenización para el tratamientos de los objetos algebraicos; y la consecución de la independencia del álgebra de la geometría para las justificaciones y demostraciones, transformando la concepción del rigor.

Para empezar, se debe decir que la humanidad desde el principio resolvió problemas particulares para números particulares. Por ejemplo, las evidencias que se encuentran de los desarrollos matemáticos de los babilonios, permiten observar que resolvían problemas para hallar cantidades de su cotidianidad. También se dice que los problemas a pesar de que tienen lenguaje geométrico, no son geométricos, ni tampoco cotidianos o prácticos, eran muy probablemente problemas con fines didácticos (Kleiner, 2007). Sin embargo, se encuentra una organización sistemática que permite, no solo comprender al algoritmo, sino poderlo aplicar a situaciones similares. Fíjese que ya se encuentran generalizaciones atrapadas en la sistematización que realizan. Éste, es uno de los procesos que se repite en la Historia del álgebra, el de tratar de elaborar generalizaciones que permita solucionar problemas similares. No obstante, la generalización, como otros procesos, no es exclusiva del Álgebra.

También en los babilonios, y aunque los procesos son retóricos, se acentúan aquellos denominados de "*completar*" y "*restaurar*" con los que se resolvían problemas. Este tipo de procedimientos están muy posiblemente inspirados y fundamentados en la geometría., como se mencionó anteriormente. Esta manera de trabajar es mucho más explícita en las elaboraciones que hacen siglos después los árabes. En ocasiones, pareciera que este tipo de procedimientos sirvieran más para justificar las soluciones que como herramienta para solucionar. Por demás, al tratar de interpretar estos procesos a partir de la simbología actual, se puede encontrar coincidencias con algoritmos que hoy conocemos como soluciones generales de ecuaciones, especialmente cuadráticas.

Así mismo, y como ya se ha mencionado, los Historiadores resaltan el hecho de que las operaciones que se hacían para tratar las situaciones, conservaban de manera estricta, como se hizo durante muchos siglos, el principio de homogeneidad de las magnitudes.

De los babilonios también se distinguen los procesos en los que se valían de herramientas geométricas para tratar las situaciones relacionadas con las Matemáticas, en las cuales, avanzaban suponiendo la existencia de una solución y consideraban la figura como una figura de análisis (Sessa, 2005). Esta manera de actuar, la analítica, es considerada por Historiadores entre los que encontramos a Charbonneau (1996), como una característica importante para la evolución del álgebra en la Historia y para la caracterización de un procedimiento como algebraico. Dentro de los autores que en la Historia del Álgebra realizaban tratamientos analíticos encontramos por ejemplo a Diofanto, quien usa números particulares para los datos y un símbolo para la incógnita, luego opera con la expresión como si conociera a todos los objetos relacionados. No deduce el valor de la incógnita desde los datos, sino que establece relaciones sobre éste, que le posibilitan hallarlo (Sessa, 2005) y a Al-Kowarizmi quien establece algunas reglas para operar sobre expresiones que contienen a la incógnita.

Hasta aquí y cuando se resuelven problemas algebraicos usando pensamiento numérico y herramientas geométricas, no existe un carácter autónomo y autosuficiente del álgebra. Según algunos Historiadores como por ejemplo Boyé (2003), y Kleiner (2007) y algunos didactas como Sessa (2005), Socas y otros (1989) son Viète y Descartes quienes dan los primeros pasos en la constitución del algebra en ese sentido.

Al respecto, Viète enfoca sus esfuerzos en separar el Álgebra de la aritmética y la geometría pero conservando la utilidad de la primera a las otras dos. Para cumplir este propósito Viète propone su arte analítico que va más allá del método analítico al proponer tres partes: la Zetética, la Purística y la Exegética. La primera brinda un conjunto de reglas que permite operar las letras y producir ecuaciones simbólicas en el sentido de una equivalencia entre proporciones. Aquí se incluye el método analítico. La segunda parte es la Purística que permite "devolverse" en el proceso y obtener una demostración sintética, es decir, cuando se tiene la posible solución, se relacionan los datos para conseguir tal solución con métodos deductivos. Y la tercera parte es la que permite traducir el problema algebraico y su solución a la aritmética o a la geometría.

Por su parte Descartes, además de trabajar con el método analítico, propone representar los objetos geométricos como objetos numéricos. Los puntos se representan como parejas de números y define las operaciones entre segmentos de tal manera, por ejemplo, que el producto de dos de estos ya no genera una magnitud de orden superior (cuadrada), sino que provoca un segmento también, hecho que es innovador y contribuye en que el principio de homogeneidad ya no sea la preocupación principal en la solución de las ecuaciones. De hecho, las magnitudes de diferentes tipos se escriben en términos de una misma magnitud: la longitud. A través de estas acciones se promueve no solo una nueva manera de hacer, sino toda una nueva manera de pensar.

Y es que además, Descartes encuentra un carácter operatorio con las nuevas designaciones de los objetos matemáticos, no es solo nombrar, las denotaciones van mucho más allá de eso permitiendo que esas representaciones puedan ser operables. Todo esto implica que los objetos algebraicos toman características de autorreferenciables, es decir, que no se debe ir a otro sistema de referencia, por ejemplo el geométrico, para poder designarlos, relacionarlos y operarlos. El trabajo algebraico toma ya connotaciones que hoy conocemos y usamos.

En palabras de la profesora Ligia Amparo Torres al momento de revisar por primera vez el presente trabajo:

> *"Considero que la culminación del tratamiento de las situaciones, como las llaman ustedes, para mí la resolución de problemas (que son situaciones lógicamente), está en el método cartesiano como forma de razonamiento en álgebra y como forma algorítmica de poner un problema en ecuaciones, y la determinación del carácter analítico del álgebra".*

Se puede decir, a manera de conclusión, que la generalización de los procesos de comprensión, solución y tratamiento de las situaciones que se pueden relacionar con el desarrollo histórico del álgebra, no solo tienen que ver con cuestiones de simbolismo y que además de eso, tiene que ver con la manera de establecer y operar relaciones, buscando una autonomía del álgebra, en la que el método analítico se vislumbra como constitutivo. Y es que debido a los nuevos métodos, las operaciones que se van realizando, aunque provienen de la aritmética y la geometría, se van alejando cada vez más de ellas, pues adquieren características propias al involucrar a la incógnita, hecho que genera unas nuevas manipulaciones, con reglas y particularidades inherentes al álgebra. Además, los nuevos métodos permiten trabajar de la misma manera con objetos diferentes: números y magnitudes, incluso de diversas dimensiones.

En el siglo XVIII matemáticos entre los que se encuentran a Peacock, Morgan, Boole y Galois convierten el estudio del álgebra en una teoría de estructuras, es en este momento que se puede referir el paso del Álgebra como método a Álgebra como objeto (Esquinas, 2008).

En ese sentido, se considera igualmente importante para el desarrollo del Álgebra en la Historia los procesos propios de las Matemáticas que se han construido junto con los objetos característicos del Álgebra en la Historia. Se piensa, que objetos y procesos se han ido desarrollando de la mano, uno dependiendo y generando desarrollos en el otro, de manera cíclica. Por ejemplo, la evolución del lenguaje matemático implicó que el tratamiento que se hacía sobre los objetos matemáticos fuera cada vez más sistemático y general, haciendo que se pensaran de maneras cada vez más diversas, logrando la evolución y el desarrollo de los mismos. En contrapartida, la evolución de los objetos también generaba la necesidad del uso de nuevos recursos en el lenguaje matemático. Del mismo modo sucede con los procesos de comprensión de los objetos matemáticos y solución de problemas asociados al Álgebra.

La siguiente ilustración, describe de manera general las relaciones mencionadas anteriormente. Sin embargo, debe entenderse como relaciones que evolucionan, en el sentido de que generan objetos y procesos cada vez más parecidos a los que usamos en la actualidad.


ILUSTRACIÓN 5. RELACIONES ENTRE OBJETOS Y PROCESOS HISTÓRICOS DEL ÁLGEBRA

# 3. METODOLOGÍA Y ANÁLISIS DE DATOS

A continuación se hace una descripción de las características generales de este estudio, centrando la atención en las tareas desarrolladas para configurar una mirada sistemática e interpretativa sobre los registros tomados en el espacio de formación EAAA. Esta mirada se fue configurando con los aportes desde dos perspectivas; la primera, al interior del *equipo de investigación global* (conformado por los dos autores de este trabajo, dos estudiantes de maestría que realizan un ejercicio de investigación similar a éste pero sobre Aritmética y los dos directores de las tesis) y la segunda al interior del *grupo de investigación local* (autores del trabajo y profesora directora).

Las tareas que permitieron configurar el análisis sobre los registros se organizaron en cuatro grandes bloques. El primero de ellos trata acerca de la recolección y organización de los registros de investigación disponibles y fue denominado "*Acerca del registro de la información*", el segundo bloque denominado "*Acerca de la organización y administración de la información recopilada*", relata los primeros pasos en la clasificación de los registros; en el tercer bloque, "*Constitución del conjunto de datos*", se delimita el conjunto de registros a aquellos episodios de clase en los que la Historia del Álgebra o la Historia de las Matemáticas hace parte del discurso de la profesora, de los Profesores en formación o del observador participante, así como algunos elementos preliminares para el análisis. Estos episodios se codifican y se analizan con ayuda del software ATLAS ti, este bloque se ha denominado "*Análisis de datos*".

## 3.1 ACERCA DEL REGISTRO DE LA INFORMACIÓN

El objeto principal de este trabajo está centrado en las intervenciones referidas a la Historia del Álgebra (o Historia de la Matemática en términos generales) que aparecen en el conjunto de sesiones de clase del espacio académico Enseñanza y Aprendizaje de la Aritmética y del Álgebra, desarrolladas durante el semestre 2011-I y el papel que éstas juegan en la comprensión del Álgebra desde un punto de vista didáctico. Por lo anterior las fuentes usadas para recopilar la información fueron:

a. Videograbación de todas las clases realizadas en el semestre (filmación hecha por el profesor Edgar Guacaneme en calidad de observador participante), lo cual se traduce en veintiséis (26) sesiones de clase de aproximadamente dos horas cada una. Los videos se etiquetaron por sesión, fecha y segmento de grabación (dado que una clase podía estar segmentada en 3 o 4 archivos de video).

b. Grabación en audio de las sesiones haciendo uso de una grabadora flotante que acompaña a la profesora en la mayoría de las sesiones cuando circula por los grupos de trabajo.

c. Programa del curso en el cual es posible identificar algunas cuestiones relacionadas con la intencionalidad curricular y posibles usos de la Historia de las Matemáticas en la formación inicial de profesores de Matemáticas en el espacio de formación.

d. Talleres propuestos en diversas sesiones como herramienta para triangular la información que permita el establecimiento de relaciones entre afirmaciones hechas por los estudiantes y las intenciones declaradas por la profesora en las tareas propuestas.

e. Documentos de referencia utilizados en el curso y sobre los cuales se discute en algunas sesiones de clases.

La codificación y el análisis estuvo centrado en los registros de video y audio, las demás fuentes de información constituyeron elementos para triangular y validar algunas de las ideas que se presentan más adelante.

## 3.2 ACERCA DE LA ORGANIZACIÓN Y ADMINISTRACIÓN DE LA INFORMACIÓN RECOPILADA

Como se aprecia en el apartado anterior la cantidad de información era bastante amplia, por lo que tanto en el equipo de investigación global como en el local se tomaron algunas decisiones que permitieron el conocimiento de los registros de forma general, el desarrollo de técnicas para su análisis e incluso la generación de códigos preliminares para delimitar los datos a analizar. A continuación se ilustran algunas de las decisiones tomadas:

***Consolidación de una mirada común***. Con el ánimo de consolidar criterios para una mirada común sobre la información, se realizó la revisión de audio y video de una de las sesiones de clase de la siguiente manera: cada uno de los estudiantes de maestría que integran el equipo de investigación revisó un video (que a juicio de los directores de tesis, contenía varios segmentos en los que interviene la HM). La tarea inicial consistió observar el video atendiendo a un criterio general: identificar segmentos de clase en los que se hacía referencia a la Historia de la Aritmética o del Álgebra y luego de identificados esos momentos, generar un instrumento para sistematizar la información y que permitiera analizar los demás videos. Como resultado preliminar del trabajo anterior se obtuvo una primera versión del instrumento (ver ilustración 6).

| NÚMERO DE REGISTRO: | | FECHA DE REGISTRO: | | TEMAS TRATADOS: | | | | | | . |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | | | | | H. COMO FIN | | | MENCIONES DE HECHOS HISTÓRICOS | |
| | | | | | | CONOCIMIENTO HISTÓRICO | | SOBRE HISTORI | DIDÁCTICO | ANECDÓTICO |
| INTERVALO DE TIEMPO | ÁREA | TEMÁTICA | DESCRIPCIÓN | A CARGO DE: | FUENTES | RESUMEN | PROPUESTA | | | |
| 00:00 - 00:23. | Historia de la aritmética y el álgebra | Contextualización de la clase. | Se menciona que ya se ha venido trabajando sobre la historia del algebra y que falta trabajar sobre la historia de la aritmética y su conexión con la del algebra | Profesora | | | | X | | |
| 3:09 - 6:29 | Historia del álgebra | Evolución histórica del álgebr | Se expone una breve descripción de la evolución histórica del álgebra desde la perspectiva de ¿Socas? | Una pareja de estudiantes | Documento de Socas | X | | | | |

ILUSTRACIÓN 6. INSTRUMENTO DE REGISTRO DE INFORMACIÓN PRELIMINAR

Si bien el instrumento permitió dar una primera mirada a cómo aparecía la HM en el video desde algunos elementos teóricos previos, los códigos iniciales asignados (a la derecha del instrumento) fueron fuente de amplias discusiones frente al marco de referencia, planteando cuestionamientos como ¿Qué diferencias pueden identificarse en el discurso expresado por los estudiantes?, ¿Cuándo se hace narración de hechos históricos?, ¿Cuándo proponen o toman postura los estudiantes sobre los hechos históricos? Y ¿Qué tipo de intervenciones pueden considerarse de tipo didáctico?

Otra de las discusiones frente al marco teórico, quizá mucho más amplia, radicó en cómo diferenciar los segmentos de clase en los que interviene la Historia del Álgebra con aquellos donde interviene la Historia de la Aritmética. Si bien, se realizaron lecturas, se dieron varias discusiones, se amplió el marco teórico y se participó en seminarios de maestría sobre Historia y Epistemología de las Matemáticas. La discusión no se zanjó con una respuesta definitiva pues cada vez aparecían vínculos más estrechos entre la Aritmética y el Álgebra. Todo lo anterior llevó a tomar una postura que contemplara tanto los objetos de estudio del Álgebra como las formas de pensamiento asociadas a dichos objetos como se describió en el apartado 2.3.

Todo lo anterior hizo que la atención se centrara en la *descripción* del segmento de clase, pues en ocasiones ésta dejaba de lado aspectos relevantes de la presencia de la Historia de la Aritmética o de la Historia del Álgebra que permitiría hacer algunas inferencias acerca del papel de la HM o no se realizaba una descripción que evocará lo sucedido en la clase.

Usando el instrumento, los cuatro estudiantes de maestría se dieron a la tarea de realizar las descripciones de todos los episodios de clase en los que intervenía la HM o la HA. Después de contar con todas las descripciones de los segmentos de clase, el instrumento descrito se mostró insuficiente para controlar tal cantidad de registros, por lo que se consideró pertinente la utilización del software ATLAS ti como herramienta para "organizar y sistematizar" la codificación y posterior análisis de las intervenciones.

***Codificación de las descripciones usando* ATLAS ti.** Después de una familiarización inicial y autónoma con las herramientas que ofrece el software, se procedió a cargar todas las descripciones de los episodios en los que se usó la HM en cuatro (4) documentos primarios (**P2,** descripción de las sesiones 21 a 26; **P3,** descripción de las sesiones 15 a 20; **P4,** descripción de las sesiones 1 a 7 y **P6,** descripción de las sesiones 8 a 14 en los que se contemplaban: a) *Aspectos generales de la clase*: N° de la sesión, medios disponibles, fecha de la sesión, objetivo general de la clase, temáticas abordadas, descripción general, observaciones y b) *Aspectos particulares de las intervenciones*: intervalos de tiempo, área (Aritmética-Álgebra), temática y descripción de la intervención.

Después de cargar los documentos se procedió a la elaboración de los códigos. La primera codificación se realizó para distinguir la fuente de las intervenciones generando cinco códigos: intervenciones de la profesora (Pro), intervenciones de los EPPM (Est), intervenciones del observador participante (Pro Guac), anotaciones realizadas en el tablero o proyectadas (Tab) y notas de los estudiantes de maestría (Inv). La segunda codificación distingue aquellas intervenciones de la Historia del Álgebra (HisAlg) de las intervenciones de la Historia de la Aritmética (HisArit) y de aquellas en las que intervenía la HM (His

Mat). A propósito, este documento construido en ATLAS ti. se denomina Unidad Hermenéutica.

Con el fin de refinar estas codificaciones iniciales se definieron, en diferentes momentos y luego de varias reuniones del equipo (global y local), los siguientes aspectos para la codificación:

1. Objetos del Álgebra abordados en la clase y rasgos característicos del pensamiento algebraico estudiados.

2. Intencionalidades con las que se introduce o se hace uso de la HM.

3. Tipo de Historia que aparece, de acuerdo a la adaptación presentada en el apartado 2.2.3 de la tipología de Guacaneme (2010).

En todos los casos, la codificación inicial se hizo de manera emergente atendiendo a los conocimientos que hasta ese momento habían sido logrados por los integrantes del equipo (global) y de acuerdo con los resultados de las reuniones periódicas. Sin embargo, en todo momento estuvo presente la discusión sobre la pertinencia de los códigos de acuerdo con la teoría, pues estaba latente la preocupación por no sesgar la mirada que sobre los registros, se hacía al ir sobre ellos con unas categorías preliminares, de modo que se perdieran detalles al tratar de ajustar los datos a las categorías teóricas.

Finalmente la decisión, en alto grado implícita, fue hacer la mirada inicial sobre los datos e ir consolidando algunos códigos emergentes que permitieran una mirada al conjunto general de los registros y luego de tener esa codificación y los descriptores de cada uno de los códigos, identificar en la teoría constructos que se correspondieran o no con los diversos códigos.

Consideramos que esta aproximación permitió identificar aspectos que en la teoría (por lo menos a la que se tuvo acceso) no se encontraban reportados y por tanto una aproximación tal posibilita una comprensión de los datos que quizá no sería posible con unas categorías prefijadas.

En resumen, la consolidación de los códigos con los que se analizaron los episodios de las clases en los que interviene la HM, fue fruto de un trabajo de construcción, que partió de algunas hipótesis y la experimentación[16] (proponiendo posibles herramientas y categorías de análisis a partir de las construcciones conceptuales que se estaban desarrollando), continuó con la puesta a prueba de los códigos y de manera paralela, realizando su evaluación a partir de la contrastación con los elementos teóricos descritos en el capítulo 2. No obstante lo anterior, no se desconoce que un punto de partida para proponer las hipótesis y la experimentación siempre fueron, naturalmente, los referentes teóricos. Todo esto, se resume en la ilustración 7:

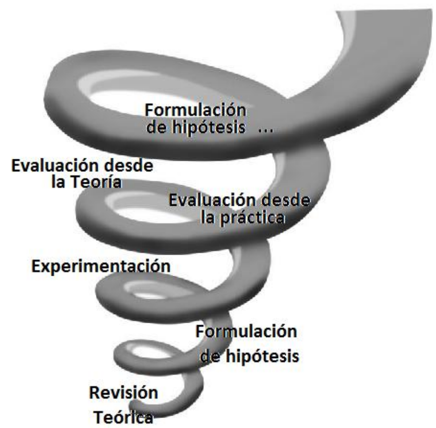



ILUSTRACIÓN 7. FASES METODOLÓGICAS

Esta ilustración refiere el proceso de construcción del modelo de análisis. Sin embargo, a la par de ésta, se fue desarrollando el marco de referencia del trabajo atendiendo a tres necesidades: 1) situar teóricamente el trabajo; 2) contrastar los resultados que se iban construyendo experimentalmente; y 3) construir una propuesta teórica sobre la caracterización de algunos objetos propios del estudio tales como HA, HM en relación al CPPM.

[16]Se denomina así cuando se propone una posible categoría a la que pudiera corresponder un conjunto de segmentos de los videos y luego tratar de hacerlos corresponder para observar cómo se comporta o qué tan adecuada es dicha clasificación.

## 3.3 CONSTITUCIÓN DEL CONJUNTO DE DATOS

La construcción progresiva del marco de referencia posibilitó la construcción e implementación de instrumentos analíticos partiendo de la formulación de hipótesis sobre cómo y con qué organizar y analizar la información; así como la construcción e implementación de categorías emergentes de análisis, su puesta a prueba y evaluación. Este proceso cíclico se muestra en la ilustración 8.

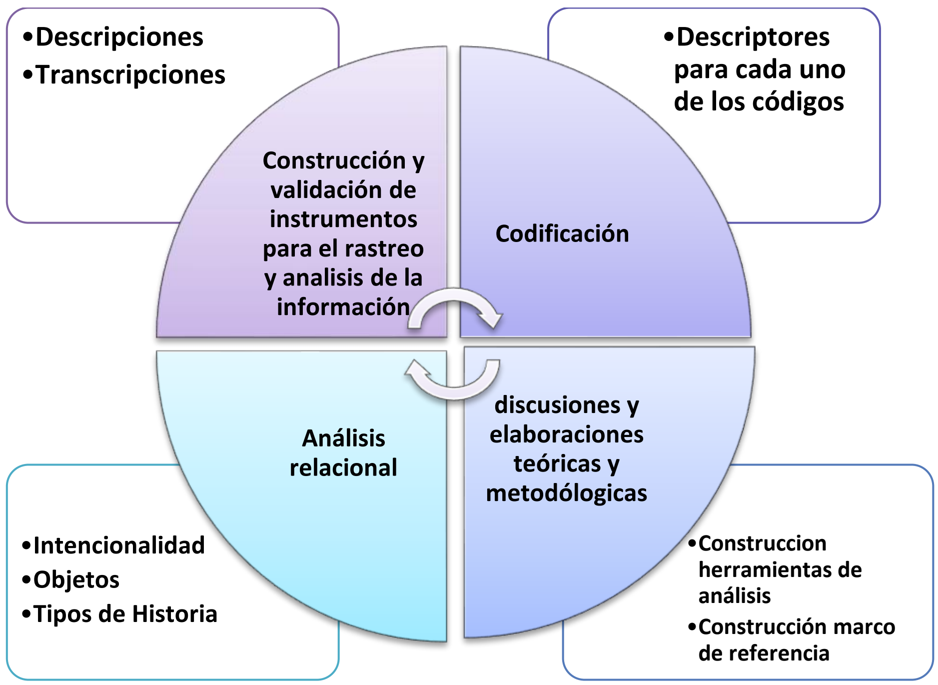



ILUSTRACIÓN 8. PROCESO DE ANÁLISIS DE LOS REGISTROS DE INFORMACIÓN

La codificación sobre el conjunto de episodios permitió delimitarlos en un conjunto de datos constituido por 83 episodios de clase en los que interviene la Historia del Álgebra (HA) y la HM. Cada uno de estos episodios fue seleccionado teniendo en cuenta que en él se hiciera referencia a alguno de los objetos históricos de estudio del Álgebra, a alguno de los procesos transversales o referencias generales HM presentados en el apartado 2.3.

Al hacer una revisión de los registros de video correspondientes a cada uno de los episodios se vio la necesidad de hacer las trascripciones de las discusiones o diálogos que en ellos se presentaban, pues a pesar del esfuerzo por lograr una descripción bastante fiel a lo ocurrido, algunos detalles se dejaban de lado y esto impedía hacer un análisis riguroso. Este hecho fue evidente en el intento por codificar los datos de acuerdo con los tres aspectos mencionados, dado que la descripción no suministraba evidencia suficiente para clasificar un episodio en un determinado código.

Al tener las trascripciones completas se cargaron como documento primario en la Unidad Hermenéutica "*Trascripciones trabajo de grado*" y sobre éstas se realizó la codificación como se muestra en el siguiente ejemplo tomado de la Unidad.

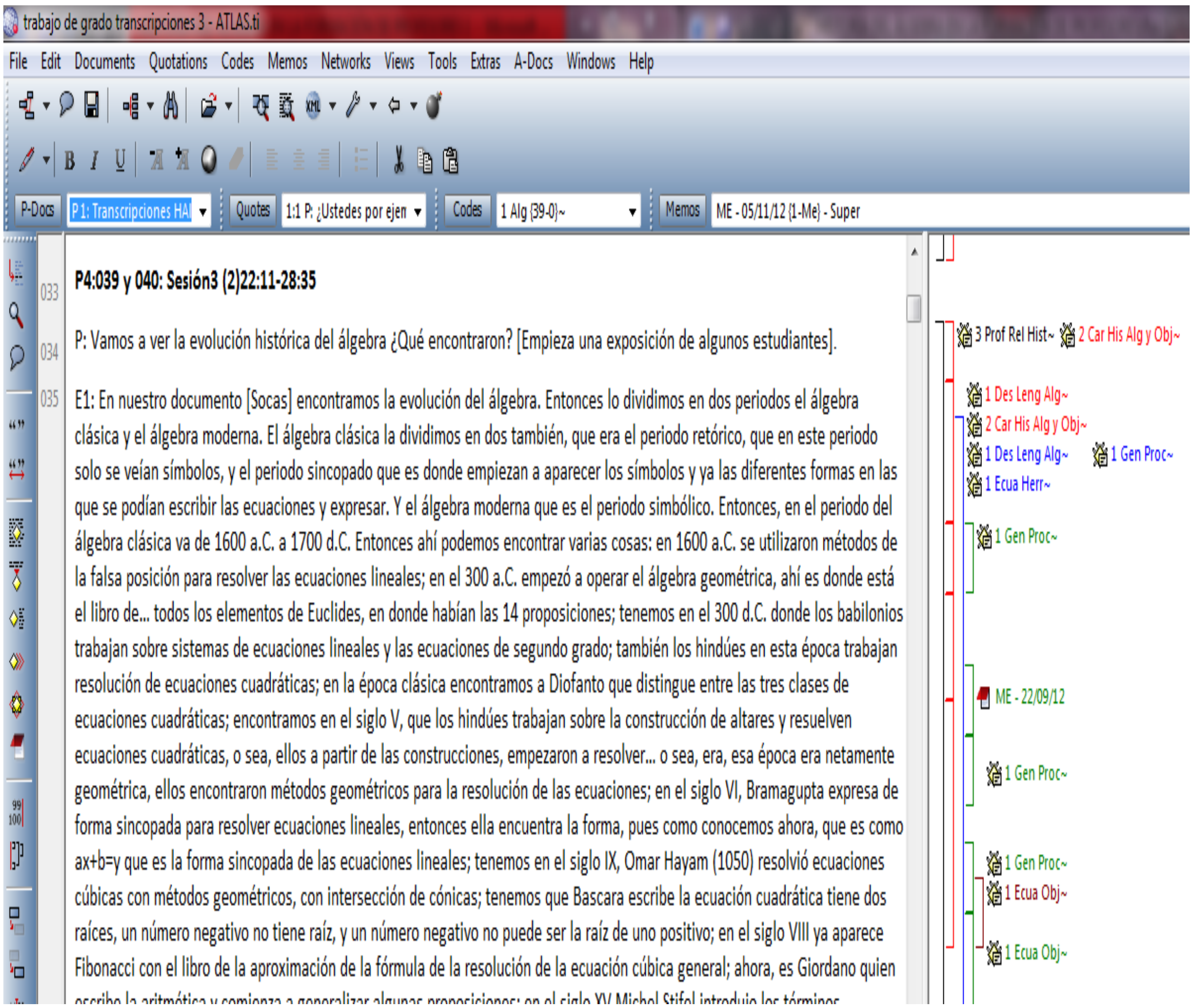
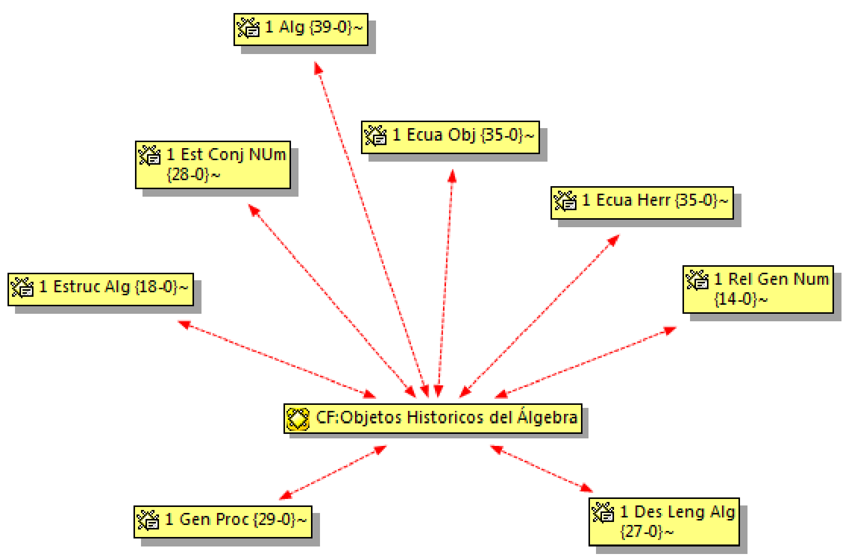



ILUSTRACIÓN 9. EJEMPLO DE TRASCRIPCIÓN Y CODIFICACIÓN USANDO EL ATLAS TI

### 3.3.1 ACERCA DE LOS OBJETOS DEL ÁLGEBRA Y LOS RASGOS CARACTERÍSTICOS DEL PENSAMIENTO:

Sobre los episodios en los que intervenía el Álgebra se realizó una codificación inicial atendiendo a la caracterización histórica del Álgebra expuesta en el apartado 2.2. De este modo se identificaron los siguientes objetos históricos del Álgebra que fueron tratados en el curso, así como los procesos históricos propios de la misma.




RED 1. OBJETOS Y PROCESOS HISTÓRICOS DEL ÁLGEBRA ABORDADOS EN EL CURSO

En la red 1 se aprecian los siguientes códigos, seis para los objetos históricos de estudio del Álgebra descritos en el apartado 2.2 y dos para los procesos trasversales del Álgebra:

| | |
|---|---|
| [*Alg*] | El Álgebra como objeto de estudio |
| [*Ecua Herr*] | Estudio de las ecuaciones como herramienta |
| [*Ecua Obj*] | Estudio de las ecuaciones como objeto |
| [*Rel Gen Num*] | Estudio de relaciones generales entre números |
| [*EstConjNum*] | Estudio de las estructuras de los conjuntos numéricos |
| [*EstrucAlg*] | Estudio de las estructuras algebraicas |
| [*Gen Proc*] | Generalización de procedimientos |
| [*Des LengAlg*] | Desarrollo del lenguaje algebraico |

La red 1 permite apreciar que durante las sesiones de clase analizados existía un interés por el Álgebra como objeto de estudio en sí mismo. Un estudio general del Álgebra que en la mayoría de las ocasiones estuvo mediado por el estudio de un objeto histórico del Álgebra particular. Estos objetos históricos en su mayoría tuvieron que ver con el estudio de las ecuaciones desde los puntos de vista propuestos en el marco de referencia, las ecuaciones como objeto y como herramienta. El estudio de las relaciones generales entre números no se trabajó en la misma medida que los demás, quizá debido al poco espacio que en los documentos de referencia del curso se dedica al este objeto como parte constitutiva del Álgebra.

Igualmente, se evidencia que debido al tipo de documentos que se les propuso a los estudiantes, que en su mayor parte, no abordaban el Álgebra moderna o abstracta, se encuentran menores alusiones, o menciones menos profundas a las estructuras algebraicas generales. Además, los estudiantes al hacer sus exposiciones sobre las concepciones del Álgebra desde la revisión que hacían en la Historia, daban mayor relevancia al Álgebra clásica (hasta los desarrollos alcanzados por Descartes).

Finalmente el estudio de los conjuntos numéricos ocupó un espacio relativamente amplio en los objetos de estudio en el curso dado que fueron tratados tanto al estudiar las concepciones históricas del Álgebra así como al hacer el estudio de los conjuntos numéricos para el caso de la aritmética. Como se verá posteriormente en el análisis de los datos, los objetos históricos tratados dieron lugar a algunas intencionalidades específicas por parte de la profesora, no solo en el nivel de estudio de los objetos y la caracterización del Álgebra sino también en reflexiones de tipo didáctico.

De otro lado y con el fin de elaborar una caracterización de los objetos que históricamente han sido estudiados dentro del Álgebra, en el curso se realizó una categorización de estos, agrupándolos en lo que se denominó "Concepciones Históricas del Álgebra (CHA) y de la Aritmética". Para el caso de las concepciones del Álgebra se determinaron las concepciones:

*CHA1: el Álgebra como generalización de la aritmética*

*CHA2: el Álgebra como estudio de estructuras*

*CHA3: el Álgebra como herramienta para la solución de ecuaciones*

*CHA4: el Álgebra como generalización de patrones*

*CHA5: el Álgebra como el estudio de las relaciones generales entre cantidades*

*CHA6: el Álgebra como la manipulación de expresiones algebraicas (cálculo simbólico)*

Esta agrupación se enmarcó en el estudio de diversos periodos históricos a partir de la lectura y exposición por parte de los estudiantes de fuentes de carácter didáctico como Socas, Palarea & Hernández (1989), Esquinas (2008), Molina (2006), Mason, Graham, Pimm, & Gowar (1988), Sessa (2005), entre otros.

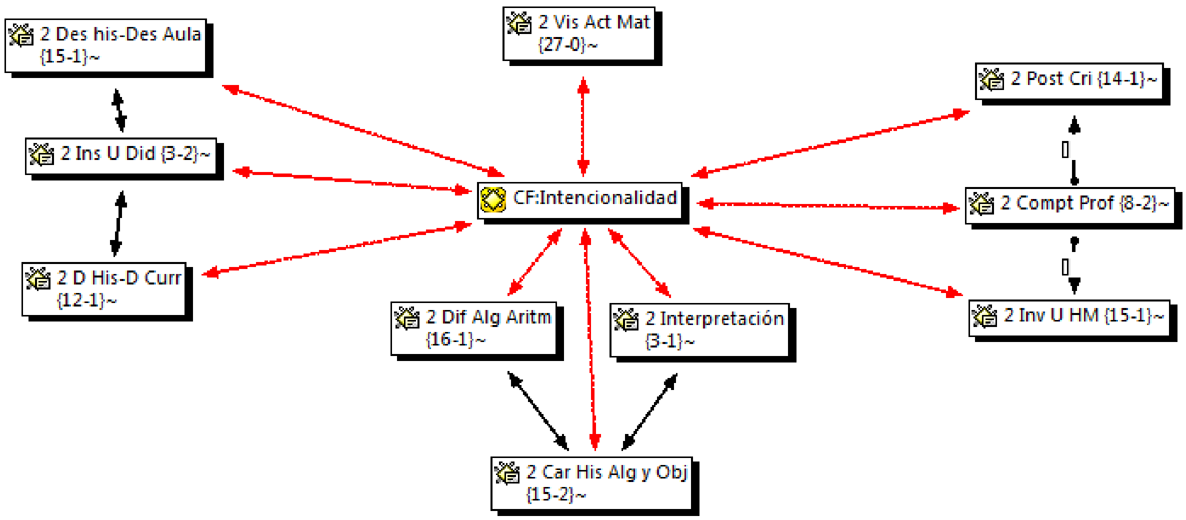
Sobre estas cinco concepciones giró gran parte de la discusión que se presentó en el curso, desde su construcción a partir de las lecturas, la consolidación de las mismas en las CHA mencionadas anteriormente y su contraste con algunas propuestas teóricas frente a aspectos curriculares del Álgebra que son abordados actualmente en el currículo. Posteriormente, en el análisis de los datos se recurrirá constantemente a estas ideas y se comparan con los objetos históricos de estudio del Álgebra descritos en el marco de referencia.

### 3.3.2 ACERCA DE LAS INTENCIONALIDADES.

Se realizó una codificación emergente sobre 83 episodios en los que interviene la Historia del Álgebra (HA) y la HM generando los códigos:

[*CarHisAlg y Obj*] Caracterizar históricamente el Álgebra, sus objetos de estudio y

| | |
|---|---|
| | procedimientos |
| [*DifAlgAritm*] | Establecer diferencias y semejanzas que permitan caracterizar objetos de estudio de la Aritmética y el Álgebra |
| [*Interpretación*] | Se realiza una interpretación matemática de un episodio histórico por parte de la profesora o de los estudiantes a solicitud de la profesora |
| [*D His-D Curr*] | Comparar o vincular los desarrollos históricos con las propuestas curriculares |
| [*D hisD Aula*] | Identificar dificultades o desarrollos frente a un objeto o proceso algebraico y ponerlos en comparación con dificultades o procesos del aula de modo que permita comprender los procedimientos, estrategias, formas de pensamiento de los estudiantes de acuerdo con algún momento del desarrollo histórico del Álgebra |
| [*Ins U Did*] | Reconocer que la Historia de las Matemáticas puede ser inspiración para la elaboración de unidades didácticas |
| [*Inv U HM*] | Invitaciones a usar la HM para comprender las Matemáticas |
| [*Post Cri*] | Tomar una postura crítica haciendo uso de la Historia |
| [*ComptProf*] | Promover competencias profesionales |
| [*Vis Act Mat*] | Modificar la visión sobre las Matemáticas y la actividad matemática |




RED 2. INTENCIONALIDADES IDENTIFICADAS EN EL CURSO[17]

Estas intencionalidades fueron codificadas de forma emergente en los registros de información, identificando en algunas afirmaciones de la profesora del curso, posibles intenciones explícitas que enunciaba al tratar un determinado tema. Este rastreo inicial permitió formular 10 códigos que se fueron refinando progresivamente hasta obtener las frecuencias que se muestran en la red 2. Si bien la codificación fue emergente, posteriormente se realizó un ejercicio de contraste con las categorías propuestas por Guacaneme (2011) que fueron descritas en el capítulo dos obteniendo tres (3) familias de códigos de la siguiente manera:

*Familia 1: Desarrollar competencias profesionales*. Esta familia incluyó los códigos [*Comp Pro*], [*Post Cri*], y [*Inv U HM*] ya que de acuerdo con los planteamientos de

[17] En las redes presentadas se usan las siguientes convenciones:

a. CF corresponde a una familia de códigos

b. El numeral que aparece al inicio de cada recuadro indica que dicho código pertenecía inicialmente a un objetivo específico particular

c. Los números que aparecen entre las llaves indican, en su orden, la cantidad de episodios que pertenecen al código y la cantidad de relaciones que tiene con otros códigos.

d. Las flechas rojas continuas o punteadas indican los elementos que pertenecen a una familia

e. Y las flechas negras indican relaciones entre códigos de una misma familia o de diferentes familias de códigos.

Guacaneme (2011) la promoción de las competencias profesionales está enfocada al desarrollo de actitudes y aptitudes que son de carácter general como la habilidad de leer o escribir y unas habilidades de carácter más particular como la participación en la discusión sobre asuntos de tipo didáctico. Los dos últimos códigos agrupan episodios de clase en los que se solicita o se toma una postura crítica sobre algún asunto relacionado con la docencia o con la visión sobre un determinado objeto matemático, por su parte el código que hace referencia a promover las competencias profesionales [*Comp Pro*] agrupa los episodios en los que se solicita hacer lectura comprensiva y analítica de los textos de referencia del curso, a realizar escritos y a participar de debates en clase poniendo en evidencia sus posturas sobre lo que han elaborado.

*Familia 2: Caracterizar el Álgebra desde la Historia*. Los códigos [*Car HisAlg y Obj*], [*DifAlgAritm*] e [*interpretación*] hacen parte de esta familia dado que en los tres se hace un estudio de algún objeto particular o general del Álgebra con el objetivo de identificar rasgos característicos del Álgebra, de sus objetos, o de sus formas asociadas de pensamiento. Es posible pensar en una correspondencia directa de esta familia de códigos con la intencionalidad teórica "*modificación de las visiones de los objetos matemáticos*" dado que el estudio de la HM en el curso pretende la "reflexión sobre la naturaleza de los objetos aritméticos y algebraicos" (Mora, 2011) según lo descrito en el programa del espacio académico y se considera que una reflexión tal posibilita una ampliación y profundización en la comprensión de los objetos y procesos asociados al Álgebra. Del mismo modo y de acuerdo con Guacaneme (2011) el estudio de la HM puede generar una comprensión de la evolución de los objetos matemáticos y sus correspondientes cambios en la naturaleza y significados, los cambios de estatus (las ecuaciones y su carácter de herramienta para resolver problemas y las ecuaciones como objeto de estudio del Álgebra) y las dificultades relativas de un concepto matemático.

*Familia 3: Generar Reflexiones Didácticas*. Esta familia de códigos es de especial importancia en el presente trabajo por dos razones: a) no se identificó una correspondencia directa con las categorías teóricas propuestas por Guacaneme (2011) b) constituye evidencia de un uso de la HM en programas de formación de profesores que sobrepasa el estudio de la Historia *per se* o el estudio de las Matemáticas, es un estudio que promueve el uso del conocimiento histórico para identificar dificultades que se presentaron históricamente en la constitución de un concepto y relacionarlas con dificultades en el aula [*Des His-Des Aula*]; para comparar el desarrollo histórico con el desarrollo curricular [*D His- D Curr*] o para la elaboración de unidades didácticas [*Ins U Did*].

## 3.4 ANÁLISIS DE DATOS

Si bien, lo descrito en el apartado anterior fue un paso inicial en el análisis, posteriormente fue necesario establecer relaciones entre familias de códigos, entre familias de códigos y códigos particulares y entre códigos, con el fin de lograr mayor detalle en la evidencia de algunos hallazgos que se consideraron relevantes.

### 3.4.1 OBJETOS DEL ÁLGEBRA ABORDADOS EN LA CLASE

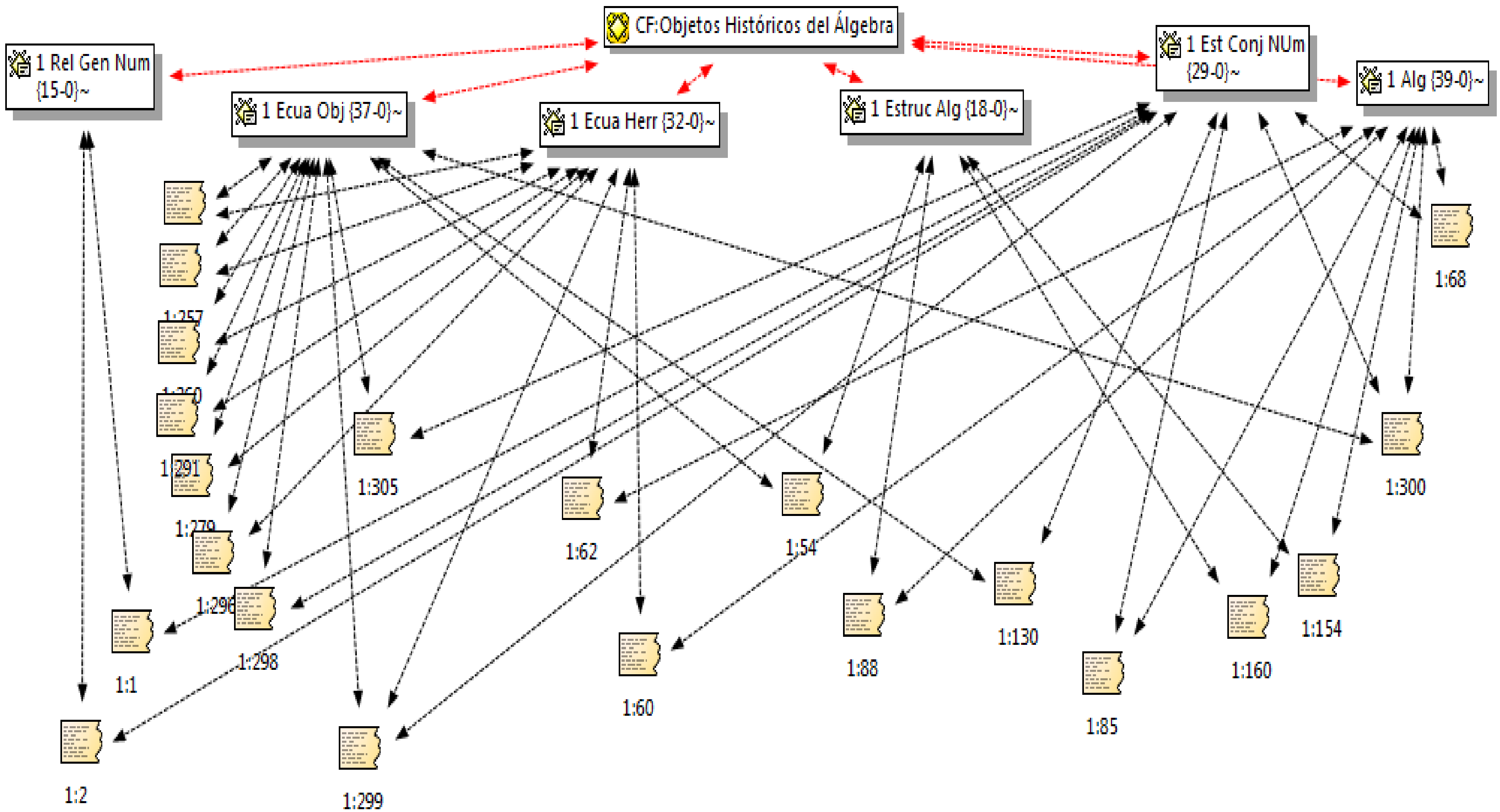
Las primeras relaciones que se abordaron tienen que ver con los objetos algebraicos que se trataron desde la Historia. Se considera de interés evidenciar algunas relaciones entre los objetos históricos estudiados, pues las referencias a los objetos venían frecuentemente relacionadas, en primer lugar, con otros objetos y en segundo, con los denominados procesos transversales. Estas relaciones permiten dilucidar y concluir sobre previsibles interacciones, no sólo en la teoría, sino también en la práctica, de los objetos y procesos que caracterizan a las Matemáticas y en este caso particular, al Álgebra.

***Objetos históricos del Álgebra estudiados en el curso***

A continuación se muestra una red que permite observar las relaciones entre objetos del Álgebra desde la Historia, con otros objetos de las mismas características, relaciones que se dieron en el marco de las discusiones en el curso[18]:

[18] En todas las redes que se presentan a continuación han sido eliminados los episodios (representados por los recortes) de clase que no tenían relación con algún otro código o familia de códigos, ya que debido a la cantidad de episodios se dificultaba la visión de las relaciones.

Cada uno de los episodios (recortes) tiene dos números asignados, el primero indica el documento del cuál provienen y el segundo el localizador de codificación dentro de la unidad hermenéutica del Atlas ti.




RED 3. RELACIONES ENTRE OBJETOS HISTÓRICOS DEL ÁLGEBRA

En primer lugar, se puede observar que todos los objetos algebraicos desde la Historia que fueron considerados y abordados en la sección 2.3., también fueron de alguna manera referenciados en la clase. Por tanto, uno de los asuntos que llama la atención, es que en el curso se hace un recorrido por la Historia del Álgebra abordando en mayor o menor profundidad cada uno de aquellos objetos que se han considerado en este trabajo como constitutivos del desarrollo histórico del Álgebra.

Como se aprecia, en esta red la relación más frecuente es la de [*Ecua Obj*] - [*Ecua Herr*]. Esto se debe posiblemente a los siguientes asuntos abordados en clase: a) se menciona un periodo histórico en el que las ecuaciones reciben un tratamiento simultáneo como herramienta y como objeto, o un periodo de transición entre los dos; b) se realiza alguna manifestación que tiene que ver con la evolución histórica de la ecuación misma; y c) en el intento por caracterizar concepciones históricas del Álgebra se mencionan estas dos formas de estudio de las ecuaciones. A continuación se ilustra una de estas relaciones, con un episodio proveniente de la sesión 12.

> *"P: [interpretando lo dicho por los estudiantes] el Álgebra como herramienta para resolver ecuaciones. ¿Qué más será el Álgebra?*
>
> *E5: …estudio de las ecuaciones y el cálculo simbólico*
>
> *P: también el Álgebra se refiere al estudio de ecuaciones. Aquí [refiriéndose a la idea del estudiante 5] sería de las ecuaciones en general. Aquí sería de las herramientas [el Álgebra como herramienta para resolver ecuaciones] y aquí como desde los métodos [como método para resolver ecuaciones]. Están todas relacionadas pero con alguna distinción pequeñita. ¿Otra?"(P1:465)*

Este episodio se da en una clase en la que se están consolidando las CHA y refleja no sólo el tratamiento simultáneo de las dos formas de estudio de las ecuaciones ([*Ecua Obj*] y [*Ecua Herr*]) sino un intento claro por establecer diferencias entre las dos.

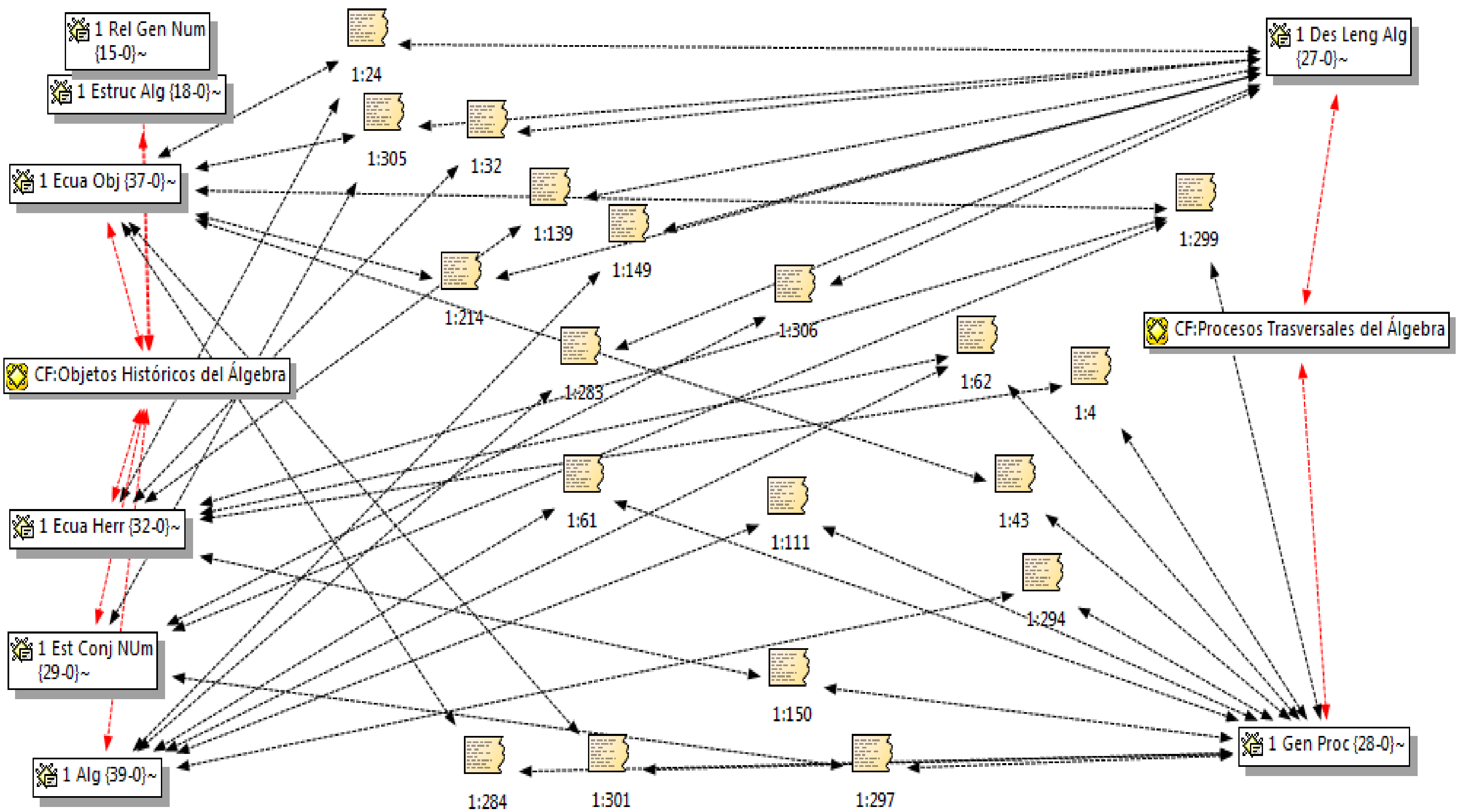
Por otro lado, aparece una relación que podría decirse es natural y es que el código [*Alg*] se relaciona con la mayoría de los otros códigos. Lo natural de la relación se debe a que dicho código concierne a los intentos por caracterizar el Álgebra desde la Historia, de manera general. En ese sentido, así como existieron episodios en los que se hacía referencia en términos generales de las características del Álgebra, los que se muestran en la red 3 hacen alusión a algún objeto algebraico desde la Historia o viceversa. En el siguiente ejemplo se puede evidenciar que se intenta dar cierta caracterización al Álgebra aludiendo particularmente al estudio de las estructuras algebraicas y de las ecuaciones como herramienta.

> *"P: Quiero que intentemos con base en lo que ellos expusieron ahí, que yo les decía, busquemos cuáles son los objetos matemáticos que se estudian, en lo que aparece como Álgebra clásica los objetos matemáticos que se estudian ahí.*
>
> *Estudiantes: Ecuaciones.*
>
> *P: Ecuaciones, resolución de ecuaciones, ¿cierto? ¿Y en Álgebra moderna? El álgebra moderna estudia… las estructuras algebraicas. (P1: 072)*

Finalmente, un hecho interesante es que de los 39 *episodios* que caracterizan el Álgebra solamente 8 de ellos están relacionados con un objeto de estudio particular, esto, tal vez, porque la mayoría de las declaraciones consideradas con el código [*Alg*] son generales respecto al desarrollo del Álgebra en la Historia y se refieren a: los periodos en los cuales se divide la Historia del álgebra (*v.g.* álgebra clásica – álgebra moderna), a los matemáticos que eventualmente contribuyeron en los avances, a las propuestas de la profesora para reconocer a qué se le llama álgebra y a qué aritmética, entre otras. Se hace evidente también que los objetos del Álgebra desde la Historia, así como se menciona en la sección 2.4., están relacionados inherentemente entre sí, de tal manera, que cuando se alude o se evoca alguno de ellos se referencian otros.

***Algunas relaciones entre objetos históricos y procesos trasversales***

Seguidamente, se presenta una red que permite observar algunas relaciones entre objetos históricos del Álgebra y procesos transversales del Álgebra que se dieron en el marco de las discusiones en el curso.




RED 4. RELACIONES ENTRE OBJETOS HISTÓRICOS DEL ÁLGEBRA Y PROCESOS TRASVERSALES

Se puede observar en la anterior red que los dos procesos transversales (desarrollo del lenguaje algebraico [*Des LengAlg*] y generalización de procedimientos [*Gen Proc*]) están relacionados con casi todos los objetos del Álgebra desde la Historia. Solamente, los objetos que corresponden a los códigos [*Rel Gen Num*] y [*EstrucAlg*] no presentan alusiones a dichos procesos[19].

El siguiente episodio fue clasificado como [*Rel Gen Num*], en éste, la profesora hace algunas preguntas para que los estudiantes reflexionen acerca de si la generalización de patrones[20] correspondía a alguna concepción histórica del Álgebra. Se decide que, de manera explícita, este episodio no tiene relación con alguno de los procesos transversales en mención.

> *"P: Pero uno se pregunta. Sería que no teníamos los ojos para mirar si eso pasaba en la Historia también [la generalización de patrones]. ¿Históricamente apareció el Álgebra como esta cuarta concepción que tenemos acá [generalización de patrones]? ¿Será que uno podría encontrarlo en algunos periodos históricos o a lo largo de la Historia del Álgebra? Es una pregunta que no sé responder pero creo que valdría la pena estudiarla". (P1: 510)*

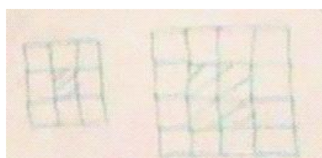


ILUSTRACIÓN 10. UN EJEMPLO USADO EN LA CLASE PARA ILUSTRAR LA GENERALIZACIÓN DE PATRONES

Por lo demás, se pude decir que las relaciones entre los objetos del Álgebra y los procesos transversales desde la Historia son frecuentes, evidenciando la tesis planteada en la sección 2.4, en la cual se afirma que objetos y procesos se desarrollan de la mano y que naturalmente, no se puede referir a uno sin el otro. Así mismo, se encuentran en la clase relaciones que son indisolubles y que se presentan necesarias para la caracterización del Álgebra desde la Historia.

[19]Aunque es posible que se tenga que afirmar más bien, que las alusiones no son explícitas, y no que no existan, pues se reconoce que cada aspecto al que se pueda referir corresponde a un periodo histórico al que se le podría asignar algunas características propias del desarrollo del lenguaje y de los procesos de generalización de comprensión, solución y tratamiento de las situaciones que pueden considerarse algebraicas.

[20]En el episodio, se denomina generalización de patrones a las acciones de generalizar particularidades numéricas provenientes de sucesiones implícitas en representaciones geométricas.

Por ejemplo, el siguiente episodio evidencia una de las relaciones que han sido clasificadas en la relación Ecuaciones como herramientas [*Ecua Herr*] y Desarrollo del lenguaje algebraico [*DesLengAlg*]. En éste, se ve cómo la profesora pretende mostrar la importancia del lenguaje algebraico en determinada época a favor de la enunciación de algunas ecuaciones.

> *"P: Imagínense la obra de Cardano, ustedes saben que él fue el que propuso la solución de la ecuación cúbica y la cuártica de manera general, imagínense la obra de Cardano con esta notación, ahí comenzamos a querer nuestro sistema simbólico. […] Y Viete si ustedes observan, respecto a esta evolución, pues obviamente éste es más cercano a éste [señala la simbología de Viete y la simbología actual], al que nosotros tenemos. Ya como que podemos entender un poquito más el por qué se le atribuye tanta importancia a éste [Viete]". (P1: 194)*

El siguiente, es un ejemplo de la relación generalización de procedimientos [*Gen Proc*] y [*Ecua Herr*]. Se nota que la referencia se hace a un episodio histórico en el que menciona un proceso de comprensión, tratamiento y solución de una situación algebraica en la Historia, que en este caso es una ecuación. Cabe anotar, que la mayoría de las alusiones que se clasifican como [*Ecua Herr*] se hacen para las culturas más antiguas como la babilónica y la egipcia, en las cuales se entiende que las ecuaciones son herramientas de resolución de situaciones. Luego de estas culturas, se considera en este trabajo, que empieza una preocupación más marcada en no sólo resolver la ecuación, sino estudiarla para obtener métodos generales de solución.

> *"E: en 1600 a.C. se utilizaron métodos de la falsa posición para resolver las ecuaciones lineales; en el 300 a.C. empezó a operar el Álgebra geométrica". (P1: 035)*

El siguiente ejemplo, no sólo muestra la relación entre un proceso y un objeto, muestra una relación entre los dos procesos y un objeto. En este episodio, se puede observar referencias hacia procesos de comprensión, tratamiento, solución, desarrollo del lenguaje algebraico y el objeto ecuación como herramienta.

> *"P: No sé si recuerdan ustedes por allá en aritmética cuando resolvían este tipo de ecuaciones, ¿cómo lo hacíamos? [E: completando el cuadrado] Completando el cuadrado. Cogíamos y dibujábamos $x^2$, pegábamos al lado un rectángulo de área 10x, luego partíamos ese 10x en 2 rectángulos de área 5x, completábamos el cuadrado y hacíamos una relación con áreas. Eso es lo que aparece en esencia en el libro de Al-Kowarizmi.*

| Notación de al-Khowârismî: | Notación algebraica moderna: |
|---|---|
| *"Considera la mitad del número de raíces, en este caso cinco, después multiplícalo por sí mismo, el resultado es cinco y veinte"* (por veinticinco). | $\frac{b}{2}$ $\left(\frac{b}{2}\right)^2$ |
| *"Suma este número a nueve y treinta* (por treinta y nueve), *que da sesenta y cuatro.* | $\left(\frac{b}{2}\right)^2 + c$ |
| *Calcula la raíz cuadrada, es decir, ocho; del resultado,* | $\sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2 + c}$ |
| *resta la mitad del número de raíces, es decir, cinco; quedan tres".* | $\sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2 + c} - \frac{b}{2}$ |
| *"Esta es la raíz".* | $x = \sqrt{\left(\frac{b}{2}\right)^2 + c} - \frac{b}{2}$ |

ILUSTRACIÓN 11. DESARROLLO EN NOTACIÓN ACTUAL DE UN PROBLEMA ALGEBRAICO

> *P: Acá entonces quiero destacar es que si ustedes observan… miren lo que aparece en Al-Kowarizmi [lee la primera parte de la diapositiva anterior]. Miren que aquí ya está intentando hacer una generalización y ya no solamente es el caso particular, sino que a partir de ese caso particular, intenta generalizar. ¿Qué tipo de lenguaje utiliza aquí Al- Kowarizmi? Retórico o verbal. Sin embargo, hace parte de un desarrollo posterior al Álgebra respecto al Álgebra antes de Diofanto porque él intenta hacer generalizaciones para resolver, como en este caso, ecuaciones. (Sesión4: P1: 210)*

En el anterior episodio, se puede ver cómo a partir de una revisión histórica, se reflexiona sobre un proceso histórico de tratamiento y solución de ecuaciones. La profesora, no solamente quiere mostrar una manera en la que se resolvían este tipo de situaciones sino que además, presenta una idea que tiene que ver con la generalización relacionada con las técnicas mismas de solución. Posteriormente, se hace una referencia sobre la evolución del lenguaje algebraico.

Al respecto, es importante añadir que la relación entre procesos transversales es evidenciada de manera muy frecuente en los desarrollos de la clase. Este hecho verifica que los Procesos de generalización y sistematización del lenguaje y de Generalización de los procesos de comprensión, solución y tratamiento de situaciones algebraicas no se abordan en el curso, como en la Historia, el uno sin el otro, y por el contrario, existe una interacción casi inseparable entre éstos.

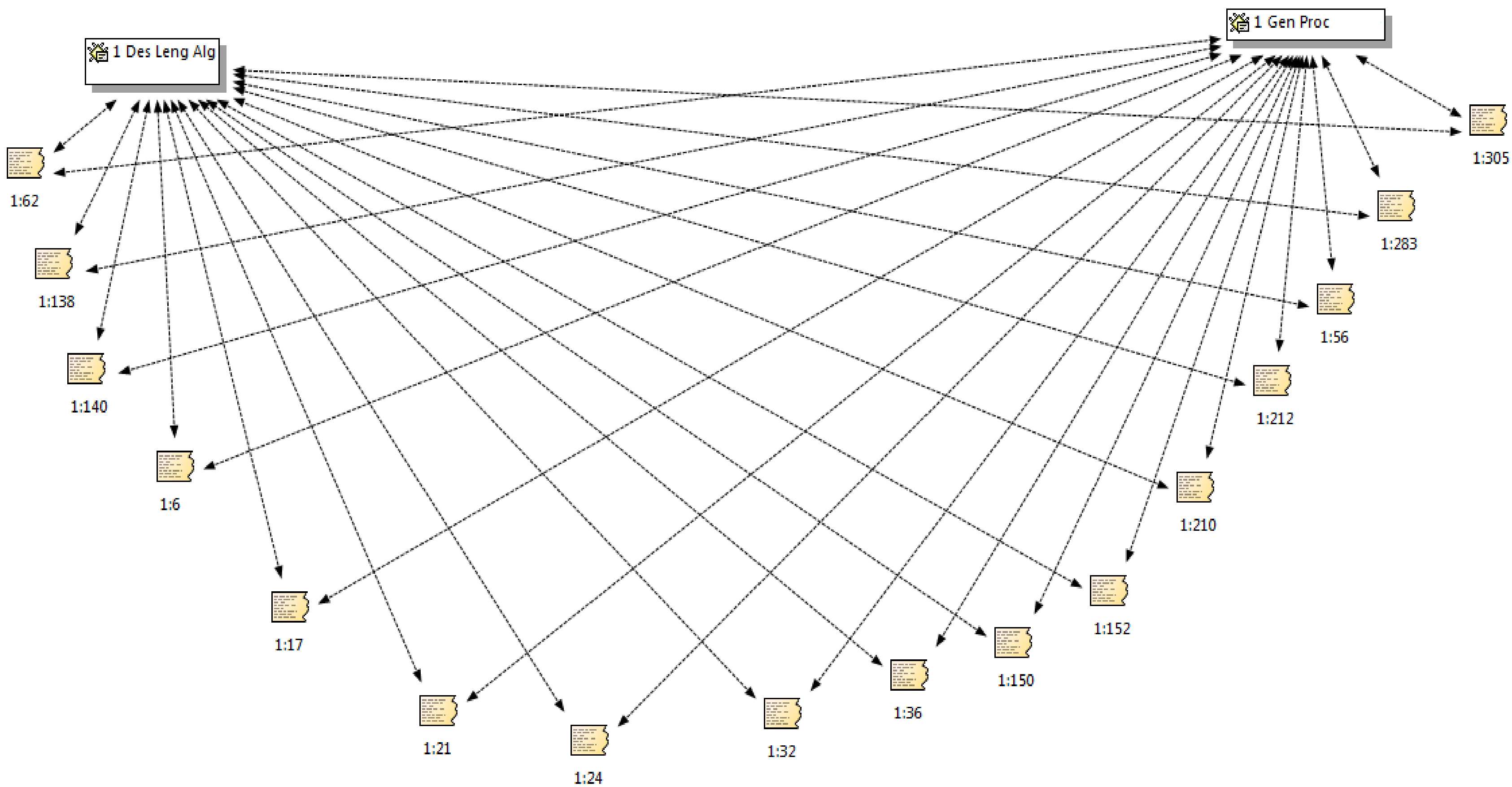
Sin embargo, es más repetitivo el hecho de que cuando se hiciera una referencia al desarrollo del lenguaje algebraico se hiciera referencia también a la generalización de los procesos de comprensión, solución y tratamiento, mientras que era menos frecuente lo recíproco[21]. Esto se debe a que cuando se hacían alusiones a los procesos [*Gen Proc*] no era

[21] Aunque en el ejemplo anterior pasa lo contrario.

necesario acudir al tipo de lenguaje que se desarrollaba en el momento histórico en mención.

***Algunas relaciones entre procesos trasversales***

La red 5 muestra algunas relaciones entre los dos procesos transversales. En ella es posible identificar algunos episodios de clase en los que las referencias históricas al desarrollo del Álgebra se apoyaban o permitían la reflexión sobre aspectos relacionados con los dos procesos de forma simultánea.




RED 5. RELACIONES ENTRE PROCESOS TRANSVERSALES

Otro ejemplo en el que se hace reflexión simultánea sobre el *Desarrollo del lenguaje* y la *Generalización de procedimientos*, se puede encontrar en los siguientes apartados extraídos de una conversación durante la tercera sesión, dan cuenta de estos dos procesos, así como la mención a algunos objetos algebraicos.

> *"P: ¿El padre del Álgebra? Es Diofanto ¿Por qué es el padre del Álgebra Diofanto? ¿Por qué fue tan importante? Por las ecuaciones diofánticas* [respondiendo a estudiantes] *pero no solamente ecuaciones… bueno, ¿Diofanto es ecuaciones diofánticas…?*
>
> *E: Empieza a utilizar algunas abreviaciones para simplificar la resolución de los problemas.*
>
> *P: Para simplificar ¿cierto? unos problemas, ya lo habías mencionado* [señala a un estudiante] *[la solución] a cierta clases de ecuaciones. Pero no hace generalizaciones, cosa que sí hace Al Kowarizmi. Entonces, Al Kowarizmi además de utilizar unos símbolos ya bien, digamos, bien determinados, entonces también resuelve ecuaciones, pero ya lo hace de manera más general* […] *no aparecen estos símbolos* [ver ilustración 5] *todavía no aparecen, de hecho aparecen frases más bien como, vamos a resolver ecuaciones de tres tipos,* […] *Aquí ya hay procesos de generalización, las de esta forma se hacen de esta manera. Pero igual en esta época no aparece esta simbología, aunque sí aparecen estas generalizaciones por conjuntos.*
>
> […]
>
> *OK, entonces en el periodo sincopado se empiezan a utilizar signos, además de lo retórico y a hacer generalizaciones. En este periodo, principalmente, lo que se hace, es resolverse ecuaciones, pero no por conjunto de ecuaciones, sino… para este problema, lo voy a resolver de esta manera y para este otro problema, lo voy a resolver de esta otra manera, pero son problemas específicos".(Sesión 3, P1: 140)*

Hay dos elementos que se encuentran relacionados aquí, por un lado encontramos la doble acepción para el estudio de las ecuaciones pues como se mencionó en el marco de referencia, los trabajos de Al Kowarizmi constituyen un paso importante en la generalización de procedimientos para la solución de problemas que involucran una relación cuadrática pero al mismo tiempo siguen siendo problemas ligados a contextos particulares; por tanto aparece la ecuación como herramienta para resolver estos problemas y como objeto de estudio pues se agrupan las ecuaciones de acuerdo a características particulares y métodos de solución que comienzan a ser generales.

Por otro lado se reconoce que a pesar de la introducción de algunas abreviaciones y símbolos para designar objetos en los trabajos de Diofanto no existe la generalidad que aparece en los trabajos de Al Kowarizmi.

Los dos elementos anteriores dan cuenta de la relación que existe entre el desarrollo del lenguaje y la generalización de procedimientos algebraicos. En uno de los matemáticos existe la generalización en el procedimiento con pocas abreviaciones, mientras que para el otro aparece la simbología como aspecto relevante mas no la generalización de los procedimientos para grupos de ecuaciones.

### 3.4.2 INTENCIONALIDADES CON LAS QUE SE INTRODUCE O SE HACE USO DE LA HISTORIA EN EL CURSO

Una intencionalidad se entiende como un acto explícito de la profesora del curso por hacer uso de la HM en un sentido específico. Las intencionalidades identificadas para el curso se caracterizan desde tres fuentes de información como se muestra en la ilustración 12:

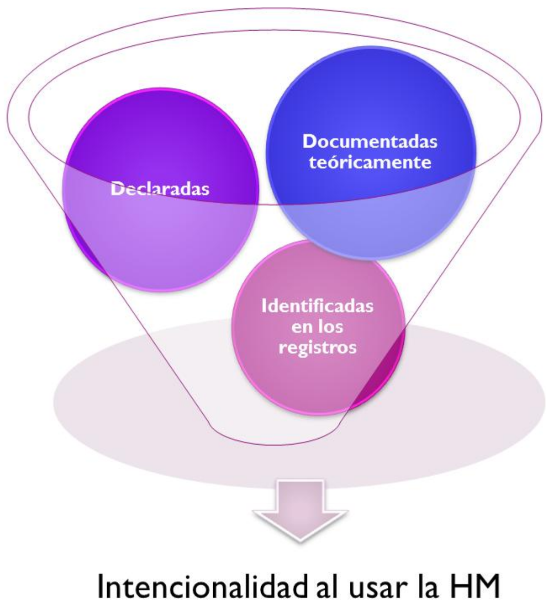



ILUSTRACIÓN 12 REGISTROS DE INFORMACIÓN SOBRE INTENCIONALIDADES DE USO DE LA HISTORIA DEL ÁLGEBRA

*Intencionalidades declaradas en el programa del curso*. En el programa del espacio de formación se identifican tres aspectos generales que marcan los propósitos del curso:

a. Reflexionar sobre la naturaleza de los objetos aritméticos y algebraicos.
b. Reflexionar sobre aspectos curriculares sobre Enseñanza y Aprendizaje de la Aritmética y el Álgebra.
c. Estudiar propuestas de enseñanza.

Junto a las tres intencionalidades anteriores se hace explícita la pretensión de aportar directamente a la práctica profesional de los futuros profesores de la siguiente manera:

> "El propósito es aportar al futuro profesor de Matemáticas elementos necesarios para hacer propuestas innovadoras, generar ambientes de enseñanza propicios para el aprendizaje de estas dos áreas propias de las Matemáticas [Álgebra y Aritmética] y reconocer las dificultades y potencialidades que surgen cuando se asume cierto modelo de enseñanza o se trata algún concepto, proceso o procedimiento aritmético o algebraico con ciertos énfasis didácticos (como representaciones o tipos de problemas)". (Mora, 2011, p. 1)

Es importante destacar que el aporte no está enfocado, solamente, al desarrollo de un conocimiento histórico del Álgebra sino que los aportes se enfocan al desarrollo del conocimiento didáctico que permita actividades tanto de diseño como de análisis de las formas de actuación de los estudiantes.

*Intencionalidades documentadas teóricamente:* Éstas fueron descritas en el capítulo 2 y retomadas de Guacaneme (2011), por lo que aquí solo se listan:

- *Trasformación en las visiones de la matemática y la actividad matemática*.
- *Transformación en las visiones de los objetos matemáticos*.
- *Promoción de competencias profesionales.*
- *Transformación en la manera de enseñar.*
- *Fuente de materiales o recursos para la enseñanza*.
- *Fortalecer la valoración y el papel de la profesión docente.*

*Intencionalidades identificadas en los registros de audio y video.* Finalmente se encuentran las evidencias provenientes de los registros de audio y video, en las que se puede encontrar algunas relaciones directas con las intencionalidades declaradas para el curso, así como algunos vínculos con las intencionalidades teóricas. Sin embargo, hay registros de clase que no tienen una relación directa con éstas últimas, lo cual se puede ser debido a las características propias del curso, pues como se apreciará hay una clara intencionalidad de tipo didáctico.

A continuación se hace una descripción general de las intencionalidades identificadas en el curso y posteriormente se establecen algunas relaciones entre las intencionalidades y los objetos y procesos trasversales del Álgebra. Del mismo modo se hace un breve análisis del tipo de Historia propuesto en el curso y las intencionalidades evidenciadas.

Como se mencionó anteriormente, las intencionalidades fueron agrupadas en tres (3) grandes familias de códigos con el fin de identificar algunas similitudes con los planteamientos teóricos. A continuación se ilustran algunas de estas familias con episodios provenientes de algunas sesiones de clase.

***Desarrollar competencias profesionales***

Durante la sesión cinco y en uno de los intentos por establecer las CHA, la profesora hace una invitación directa a los estudiantes a que no sólo asuman lo que se dice en las lecturas sino que tomen una postura de acuerdo a los planteamientos de los diferentes autores para ponerlo en discusión con los demás compañeros.

> *P: Ahí tenemos por lo menos tres concepciones* [refiriéndose a las CHA] *¿Habrá otra? La idea de la actividad que yo quisiera que hiciéramos… es que quiero que ustedes tomen partido y con base en las lecturas que les he propuesto…que ustedes por lo menos identifiquen cuáles son esas concepciones de Álgebra que se pueden dilucidar a través de lo histórico, cuáles son las concepciones de aritmética y que ustedes tomen partido y me digan… y argumenten porqué.*[…], *vamos a hacer una especie de debate con esas concepciones que aparecen ahí y con sus posiciones frente a esas concepciones sobre qué es el Álgebra desde lo histórico. (Sesión 5, P1:217)*

Dos ideas son importantes de resaltar de este episodio, la primera es la solicitud explicita a tomar una postura sobre las lecturas para ponerlas en discusión con el resto de compañeros y la segunda es que no hay una solicitud sobre un conocimiento específico de la Historia de las Matemáticas, sino que más bien se pretende caracterizar los objetos de estudio del Álgebra a través de las CHA lo que permite hablar de un conocimiento sobre la Historia, un metaconocimiento histórico que posiblemente contribuiría a la modificación de la visión sobre el Álgebra.

La primera de las ideas está relacionada con las actitudes de los futuros profesores en relación con la posición que asumen al hacer una lectura de una fuente de tipo didáctico ya que se solicita una lectura analítica que permita tener una postura y que esa postura pueda ser argumentada frente al resto del curso. La segunda tiene que ver con esa habilidad para reflexionar sobre los propios conocimientos, en este caso el conocimiento de algunos apartados de la Historia del Álgebra. Este último hecho se torna relevante en la medida que de acuerdo con Guacaneme (2011) el conocimiento metamatemático y en este caso particular un metaconocimiento sobre la Historia de las Matemáticas es importante para el desarrollo de las competencias profesionales y como se verá más adelante este tipo de conocimiento es el que permite a los profesores en formación inicial participar en discusiones de tipo didáctico sobre el currículo o sobre algún conocimiento escolar del Álgebra.

***Caracterizar el Álgebra desde la Historia***

Para el caso de la familia de códigos de caracterización histórica del Álgebra se presenta una serie de episodios que dan cuenta no sólo de la intencionalidad explícita de la profesora del curso sino de algunos apartes de clases en los que la intencionalidad se va concretando a partir de las lecturas, exposiciones y discusiones que se suscitaron.

Durante la sesión 3, en una exposición de un grupo de estudiantes aparece una referencia directa a la caracterización del Álgebra de forma general realizada por un estudiante con base en el documento de Socas:

> *E1: En nuestro documento encontramos la evolución del Álgebra. Entonces lo dividimos en dos periodos el Álgebra clásica y el Álgebra moderna. El Álgebra clásica la dividimos en dos también, que era el periodo retórico, que en este periodo sólo se veían símbolos, y el periodo sincopado que es donde empiezan a aparecer los símbolos y ya las diferentes formas en las que se podían escribir las ecuaciones. (Sesión 3, P1: 148)*

La afirmación anterior genera una serie de discusiones pues tanto la profesora como otros estudiantes, que tenían a su cargo la lectura de otros documentos no están conformes con la afirmación realizada por E1. Dentro de la discusión empiezan a parecer argumentos de distinta índole, sin embargo a continuación se presenta uno que se seleccionó en el que la postura del estudiante está respaldada por un referente teórico.

> *E2: Es que en el documento de Esquinas se divide al Álgebra en Álgebra clásica y en Álgebra moderna, así como está [refiriéndose a la exposición], pero el Álgebra clásica se dividía era en tres, en el periodo retórico, en el periodo sincopado y en el periodo simbólico, que fue el último con Viète, en el cual se crea una simbolización no tan… fuerte, ya luego de Viète empieza luego Descartes y Newton a darle una forma más estructurada al Álgebra y es cuando empieza el Álgebra moderna. (Sesión 3, P1:149)*

El episodio anterior fue clasificado bajo el código [*Car HisAlg y Obj*], pues en ambos casos hay una clara intención para caracterizar el Álgebra a partir de la diferenciación de lo que se entiende por Álgebra clásica y Álgebra moderna, con base a los análisis históricos presentados en los documentos de Socas y Esquinas. Es importante resaltar que la diferenciación no se hace de acuerdo a los objetos históricos que se estudian en cada uno de los periodos sino que la atención se centra en uno de los procesos trasversales, *generalización y sistematización del lenguaje*.

Si bien en este episodio, hasta el momento no se hace una declaración directa de la intencionalidad de la profesora, las intervenciones que realizó durante la discusión posterior, estaban enfocadas a lograr una caracterización mucho más precisa de los elementos que permiten caracterizar cada uno de los periodos del Álgebra.

> *P: El asunto está en que logremos identificar cuáles son esas fases de desarrollo del Álgebra, entonces, se plantea la discusión de […]¿Si en el Álgebra clásica se considera el periodo retórico y el periodo sincopado y en el Álgebra moderna el periodo simbólico? Entonces E2 está diciendo, para aclarar el asunto, que él considera que este periodo va acá[señala el periodo simbólico dentro del Álgebra moderna], pero ahora tú [E2] dices va acá, también.[señala el periodo simbólico dentro del Álgebra Clásica]. (Sesión 3, P1: 182)*

Posterior al trabajo particular de caracterización del Álgebra y de sus objetos en algunos periodos históricos, la profesora hace explícito el uso que se hará de la Historia del Álgebra y de la aritmética en el curso:

> *P: el objetivo de hoy es que miráramos concepciones de la aritmética y del Álgebra, concepciones, ¿Cuáles? históricas, con base en la Historia, lo que hemos estudiado de la Historia de la aritmética y del Álgebra, lo que hemos leído, de todos los [documentos] que hemos leído hasta ahora […]* (Sesión 6, P1: 234)

A continuación la profesora hace un recuento rápido de los documentos a los que hace referencia entre los cuales menciona Socas (1989), Molina (2006), Esquinas (2008), Sfard (1991), destacando lo que corresponde a las concepciones del Álgebra y de la aritmética en cada uno. Mientras va mencionando los documentos la profesora propone preguntas como *¿Esto es aritmético o es algebraico?* [Refiriéndose a la Historia del número]*¿Qué es el Álgebra?, ¿Qué estudia la aritmética? ¿Esa evolución está metida en dónde, en la evolución del número?, ¿Hace parte de la aritmética, hace parte del Álgebra o esa es más general que las dos anteriores?* La intervención de la profesora finaliza diciendo:

> *La idea es que puedan como encapsular todo eso que hemos leído alrededor de estas dos cosas, concepciones históricas de la aritmética y del Álgebra[lo escribe en el tablero], mejor dicho* ***¿Qué es, o qué era, o qué fue, o cómo con los ojos de hoy, después de haber leído los documentos que hemos leído, qué podríamos decir qué es el Álgebra y qué es la aritmética desde la Historia?****, con base a lo que hemos leído ¿Que podríamos decir qué es eso?*(Sesión 6, P1: 234)

Este episodio se torna relevante sobre las intencionalidades, ya que en la primera parte de la intervención la profesora se hace explícito el estudio que se ha hecho de la Historia tanto del Álgebra como de la aritmética y la intención de agrupar las ideas que se han trabajado en lo que denomina concepciones históricas. Además de lo anterior, las preguntas que hace posteriormente son claras en la diferenciación que se pretende lograr en torno a los objetos de estudio del Álgebra y de la aritmética, en particular la idea de número.

La segunda parte de la intervención es clave para ilustrar que además de la intención de caracterizar el Álgebra desde lo histórico, se pretende lograr una modificación de las ideas sobre los objetos matemáticos, pues se procura ampliar las ideas de Álgebra y aritmética usando como herramienta las concepciones curriculares, así como puntualizar los objetos de estudio de cada una de ellas. Hecho que se consolidó con la clasificación de los objetos del Álgebra en las seis concepciones históricas mencionadas anteriormente.

En lo que respecta a la diferenciación entre Álgebra y Aritmética, uno de los aspectos que generó polémica en el curso fue precisamente la idea de número. Los siguientes ejemplos ilustran dos ideas que se plantearon en el curso y provienen de las sesiones 6 y 3, en ese orden.

> *P: De la formalización, entonces la aritmética trata de la formalización, ¿De qué? De los sistemas numéricos y ahí es donde yo digo que se entrecruzan un poco con lo algebraico mucho más, digamos con esta parte, con el estudio de las estructuras algebraicas, propiedades aritméticas* […]*(P1: 167)*
>
> *P: Definitivamente en aritmética y en Álgebra estudiamos un objeto en común que son los números, pero dependiendo como los interpretemos, como los estudiamos pues van a ser parte de la aritmética o del Álgebra. (P1:248)*

En ambos casos se aprecia una tendencia a establecer similitudes entre los objetos de estudio del Álgebra y de la aritmética, la segunda es explícita en afirmar que el estudio de número es un objeto tanto de la aritmética como del Álgebra, con la salvedad que la interpretación que se haga del número es la que define de cuál de las dos es objeto de estudio. Los anteriores apartados son ejemplos del código [*DifAlgAritm*].

Ahora bien, aceptando la premisa de Guacaneme (2011) según la cual el estudio de HM puede generar una comprensión de la evolución de los objetos matemáticos, los tres episodios anteriores y gran cantidad de los que se presentaron en el curso son evidencia de la intencionalidad clara de modificar la visión del Álgebra que los estudiantes tenían y para ello fueron caracterizados en primer lugar lo que se ha denominado objetos y procesos del Álgebra y posteriormente puestos en contrapeso con los de la aritmética.

***Generar Reflexiones Didácticas***

Un ejemplo representativo de esta familia de códigos y que particularmente pertenece al código [*D His-D Curr*] tuvo lugar al iniciar la sesión 17.

> *P: Quiero que antes de dar el cierre [sobre las concepciones curriculares del Álgebra], quiero mirar si esas que aparecen aquí [concepciones curriculares] como les decía al principio están relacionadas con las concepciones históricas o no, o si hay alguna que aparece nueva. (Sesión 17, P1:95)*

Toda esta sesión de clase se dedicó a desarrollar la intención expresada por la profesora: establecer vínculos entre las concepciones históricas construidas en el curso y las concepciones curriculares propuestas por Usiskin (1988). Para ello se recordaron las CHA y una por una se fueron vinculando con las concepciones curriculares. Sobre esta la discusión que permitió estos vínculos se regresará posteriormente. Aquí es importante resaltar lo evidente de la intencionalidad de la profesora, ya que el conocimiento histórico sobre el Álgebra que fue condensado en las CHA es retomado para establecer una reflexión entre los objetos que históricamente se reconocen como algebraicos y aquellos que son trabajados en las aulas. Además de ser evidencia de la intencionalidad por vincular el conocimiento histórico para hacer análisis de un aspecto curricular, este hecho y lo sucedido durante la sesión de clase da cuenta de la potencia del conocimiento metahistórico para participar en discusiones de tipo didáctico.

***Modificación de la visión de las Matemáticas y de la actividad matemática*.**

Durante el estudio de algunos aspectos relacionados con las motivaciones que dieron lugar al tratamiento de las estructuras algebraicas en la Historia, en particular las ecuaciones de quinto grado, se presentó una intervención de la profesora en la que se cuestiona sobre la naturaleza de las Matemáticas. El apartado proviene de la tercera sesión

> *P:* […] *Galois entonces, trabajando con eso, descubre algo ¿qué es lo que descubre? O inventa, no sé si eso que lo que uno quiera pensar, ¿Las Matemáticas se crean o se descubren? No sé ustedes qué dicen. Si existen las Matemáticas así, como que preexisten en un mundo y yo accedo a ellas, entonces ahí es que uno dice descubre, o las inventa el humano, entonces no sé cuál sea la concepción que ustedes tengan sobre el asunto. Yo creo que se crean, pero a veces creo que están*

> *por ahí [volando], ¿Por qué cuando uno hace algo y a veces encuentra lo mismo que el otro? ¿Cómo así que los dos inventaron lo mismo?* (Sesión 3, P1:191)

Si bien no aparece una intencionalidad explícita, las preguntas de la profesora cuestionan de forma directa las concepciones de los estudiantes sobre las Matemáticas e incluso pone en juego una postura en la que las Matemáticas se alternan entre la construcción y el descubrimiento.

Si bien no se puede asegurar que los cuestionamientos de la profesora conllevan una implicación directa con las formas de pensamiento de los estudiantes, posteriormente, en la sesión 6, un estudiante realiza la siguiente afirmación:

> *E: pues es que uno considera que la concepción del Álgebra va evolucionando a medida que va evolucionando la Historia. (P1:224)*

Esta afirmación podría constituir un ejemplo de que en la medida que se estudian las teorías y los procesos de construcción de las mismas se pone en evidencia que los "objetos matemáticos" no surgen de forma espontánea sino que fueron producto de una construcción y sobre todo que se relaciona con la época en la que se realice la mirada.

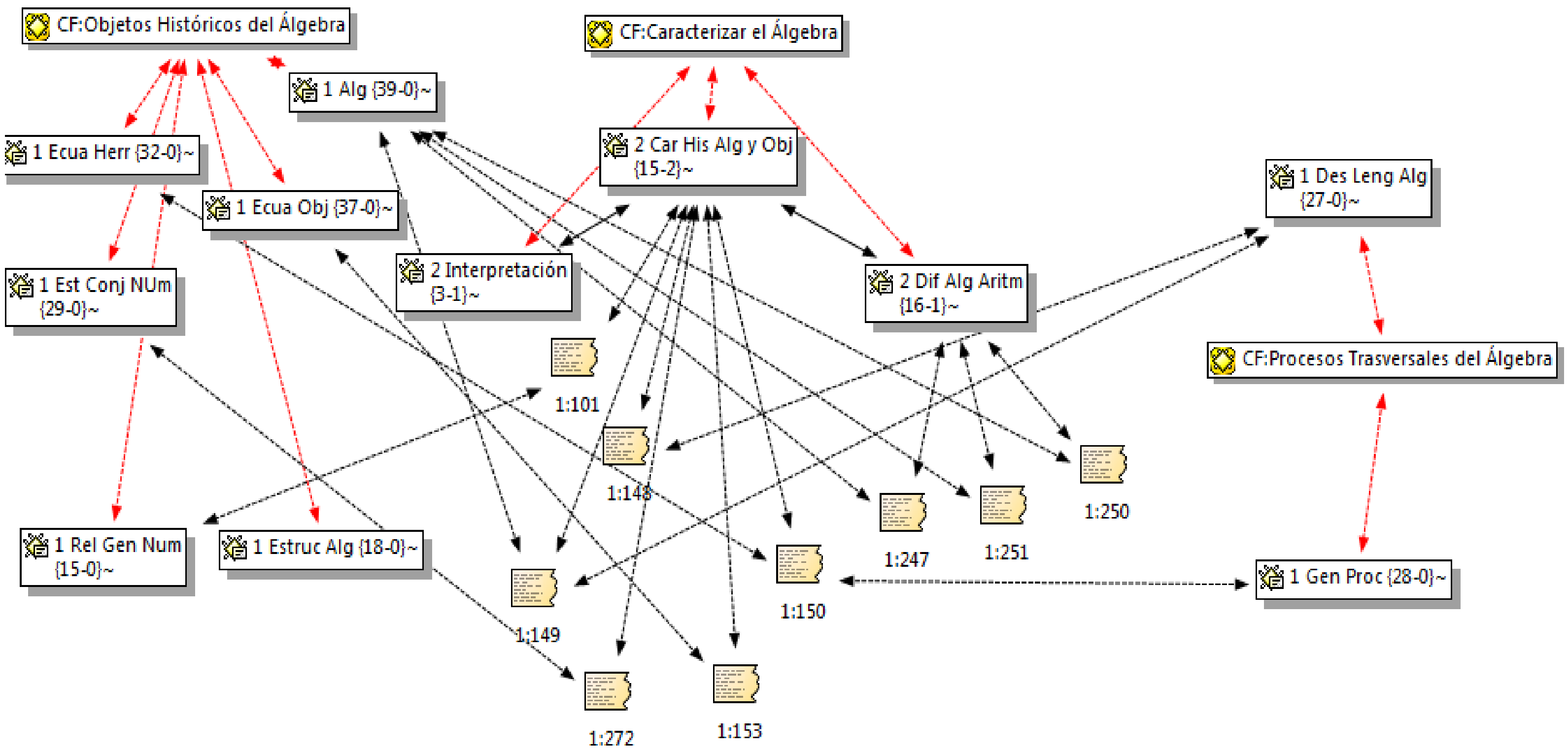
Otro de los aspectos que menciona Guacaneme (2011) es que la modificación de la visión de las Matemáticas y de la actividad matemática se da en la medida que se comprende que las Matemáticas están determinadas por los problemas que se abordan y podría agregarse que por la forma en la que se abordan estos problemas. El siguiente apartado es evidencia de este tipo de intencionalidad en las preguntas que realiza la profesora y en la intervención del estudiante pues se reconoce que los problemas son los que permiten el surgimiento de un lenguaje específico para abordar el tratamiento de las ecuaciones.

> *"P: Dentro del estudio de ecuaciones tenemos que, este estudio de ecuaciones se hace ¿a través de qué? De un lenguaje, pero ese lenguaje, digamos que surge porque ¿cuál era el interés? ¿Era resolver ecuaciones? ¿Los babilonios dijeron vamos a resolver ecuaciones y empezaron a resolverlas? No ¿cierto? No surge así, ¿cómo surgió?*
>
> *E: a través de problemas*
>
> *P: A través de problemas, que surgían en su entorno cultural. Entonces, ese estudio de ecuaciones no es que se dé, digamos per se, sino que es a través de resolución de problemas".*(Sesión 4, P1:193)

Las redes que a continuación se presentan, establecen algunas relaciones entre las cuatro familias de códigos anteriores y los objetos históricos del Álgebra, así como los procesos trasversales asociados.

### 3.4.3 INTENCIÓN DE CARACTERIZAR EL ÁLGEBRA EN RELACIÓN CON LOS OBJETOS Y PROCESOS TRANSVERSALES DESDE LA HISTORIA

La relación que se establece entre las acciones que se dirigen hacia caracterizar los objetos del Álgebra y al Álgebra misma, con los objetos y procesos que se han considerado propios de tales acciones, parece superficial en tanto para caracterizar al Álgebra desde la Historia, se deben abordar los objetos propios de ella. Sin embargo, según Guacaneme (2011), el estudio de la Historia de los objetos matemáticos permite una comprensión de ellos teniendo en cuenta aspectos que tienen que ver con su evolución a lo largo de la Historia, cambios en su naturaleza y significado, aspectos ocultos o no siempre expresados en las teorías Matemáticas, entre otros.




RED 5. RELACIONES INTENCIONALIDAD "CARACTERIZAR EL ÁLGEBRA CON OBJETOS HISTÓRICOS Y PROCESOS TRASVERSALES"

Por ejemplo, en el siguiente episodio que corresponde a la sesión 18 a partir de discutir y analizar las representaciones "*puntuales*" de los números tratados por los pitagóricos, la profesora va llevando a los estudiantes a reconocer, en primera instancia, algunas regularidades de los números naturales desde tal representación, pasando por la evocación de que trabajos como estos ya fueron desarrollados por los estudiantes mismos, hasta proponer la reflexión sobre si este tipo de objeto matemático y el tipo de representación podrían servir para la enseñanza en primaria. Esta acción es coincidente con la afirmación de Guacaneme (2011), en la que declara que conocer los conceptos matemáticos desde su Historia tiene la potencialidad proveer fuente de ideas para la enseñanza de éste.

> *P: […] Entonces, todo número cuadrado se puede escribir como suma de números impares consecutivos. ¿Cierto? ... mediante las representaciones podemos sacar relaciones entre los números naturales. ¿Alguien recuerda otra? ¿O podría construir otra?[…]*
>
> *P: Bueno, sí, ahí uno también puede hacer otro tipo de regularidades ¿cierto? Entonces saca uno propiedades a partir de representaciones puntuales. O sea ahí también hay bastante que hacer. ¿Esto se podrá hacer en la primaria? ¿En la secundaria? Sí, de hecho en sexto por ejemplo, si uno va a mirar los libros ahí también aparecen los números naturales. (Sesión 18, P1: 101)*

De la misma manera, en una de las intervenciones del profesor Observador participante se hacen ciertas preguntas que centran la atención en un asunto que no está simplemente referido a los objetos matemáticos, aunque la discusión central se desarrolla alrededor de los sistemas numéricos como posibles objetos que estudia el Álgebra desde la Historia.

> *EG: […] Y una pregunta que me asalta a partir de lo que ustedes dijeron, pero que es una pregunta que también ya había planteado un Historiador de las Matemáticas italiano que murió hace poco Giorgio Bagni, es: ¿Y para qué los matemáticos, si Peano ya hizo la cosa, ya tiene el sistema de los números para qué los otros se gastan tiempo haciendo "lo mismo"?, ¿Cuál es el sentido de construir un conjunto numérico o un sistema numérico desde el punto de vista formal, axiomático, etc. si ya se hizo? ¿Si ya lo hizo Peano, para qué todos los demás se pusieran a hacerlo? ¿Cuál es el sentido de eso?*
>
> *[…] No sé si algo parecido uno pueda pensar con respecto a las exposiciones de los diferentes sistemas de números naturales que responden a diferentes intenciones y quizá eso sería algo que habría que rescatar desde la perspectiva histórica ¿Cuál es la intención matemática que está detrás del surgimiento de ese conjunto que aparentemente es el mismo pero que tiene una diferencia fundamental, en la esencia, en cuanto a su intención?*
>
> *Eso porque es que en la escuela también repetimos de forma muy constante la "construcción" de los números naturales. Porque pareciera que nos pasamos todo el tiempo o por lo menos hasta grado octavo construyendo los números naturales. ¿Estamos construyendo el mismo conjunto o diferentes conjuntos o con diferentes intenciones los conjuntos etc.? Creo que nos ayudaría a mirar lo curricular. [P1: 578]*

Como se aprecia, aunque se está desarrollando algunas reflexiones sobre objetos algebraicos desde la Historia y la intención más clara, en principio, sea caracterizar al Álgebra y sus objetos, se puede también observar algunas intenciones que tienden hacía el desarrollo curricular. En ese sentido, caracterizar el Álgebra desde la Historia en el curso no es una acción meramente de construcción matemática y más bien es el foco, de una construcción más amplia que tiene características propias del Conocimiento del Profesor de Matemáticas.

### 3.4.4 INTENCIÓN DE MODIFICAR LA VISIÓN SOBRE LAS MATEMÁTICAS Y LA ACTIVIDAD MATEMÁTICA EN RELACIÓN CON LOS OBJETOS Y PROCESOS TRANSVERSALES DESDE LA HISTORIA

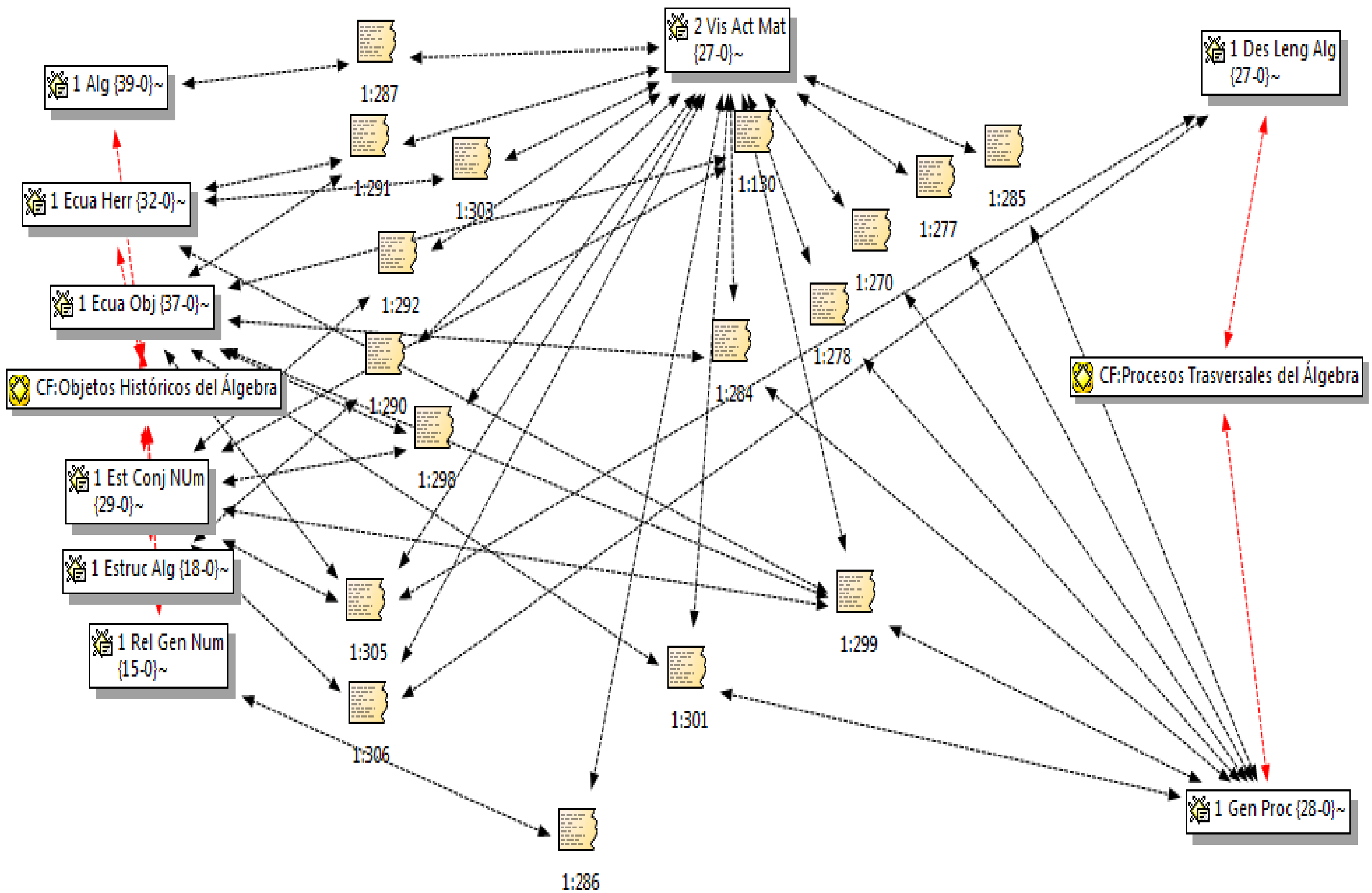
La red 6 establece vínculos entre la intencionalidad denominada “modificar las visiones de las Matemáticas y de la actividad matemática” y los objetos y procesos trasversales en la Historia del Álgebra.

El siguiente episodio se desarrolló en la sesión 25 enmarcado en la caracterización histórica de la aritmética, sin embargo lo retomamos por hacer uso de algunas ideas referidas al tratamiento de las ecuaciones.

> *“E: Morgan plantea que si una ecuación da como resultado una cantidad negativa, entonces lo que está mal es el planteamiento del problema, no la solución (aparecen como inconsistencia al igual que los complejos). Por tanto, reformulaba el problema. Él solo decía que las cantidades negativas eran cantidades positivas ubicadas mal. En esta etapa los “negativos” fueron parcialmente eliminados”.(Sesión 25: P1: 284)*

Este episodio fue sido clasificado como [*Vis Act Mat*] y [*Ecua Obj*] entre otros. La respectiva clase se desarrolla alrededor de una exposición hecha por los estudiantes frente a concepciones históricas del número entero. En las declaraciones que se hacen, se evidencia una matemática en proceso, en construcción, que no está terminada, producto de las respuestas a las cuestiones humanas, en donde lo que hoy podría ser un error o un déficit en la construcción de significados, solo es una concepción válida y comprensible de los objetos matemáticos que en ese momento se han desarrollado; se puede ver también cómo la validez es determinada por significados y decisiones humanas. Se ve que las lecturas con las que se ha preparado la exposición y que por supuesto, tienen contenido histórico, propenden por realizar algunas reflexiones que podrían modificar la visión sobre la matemática y sobre la actividad matemática misma.

Es natural que los episodios en los que puede haber potencialmente acciones o declaraciones que propicien modificaciones en las visiones de las Matemáticas y la actividad matemática, giren en torno a objetos o procedimientos transversales algebraicos desde la Historia. En ese sentido, se presenta la siguiente red que permite observar las relaciones que se configuran entres estos aspectos. En ésta se puede verificar que el código que corresponde a modificar la visión de las Matemáticas y la Actividad Matemática [*Vis Act Mat*] está relacionado con cada uno de los códigos de los objetos y procesos transversales del Álgebra en la Historia.



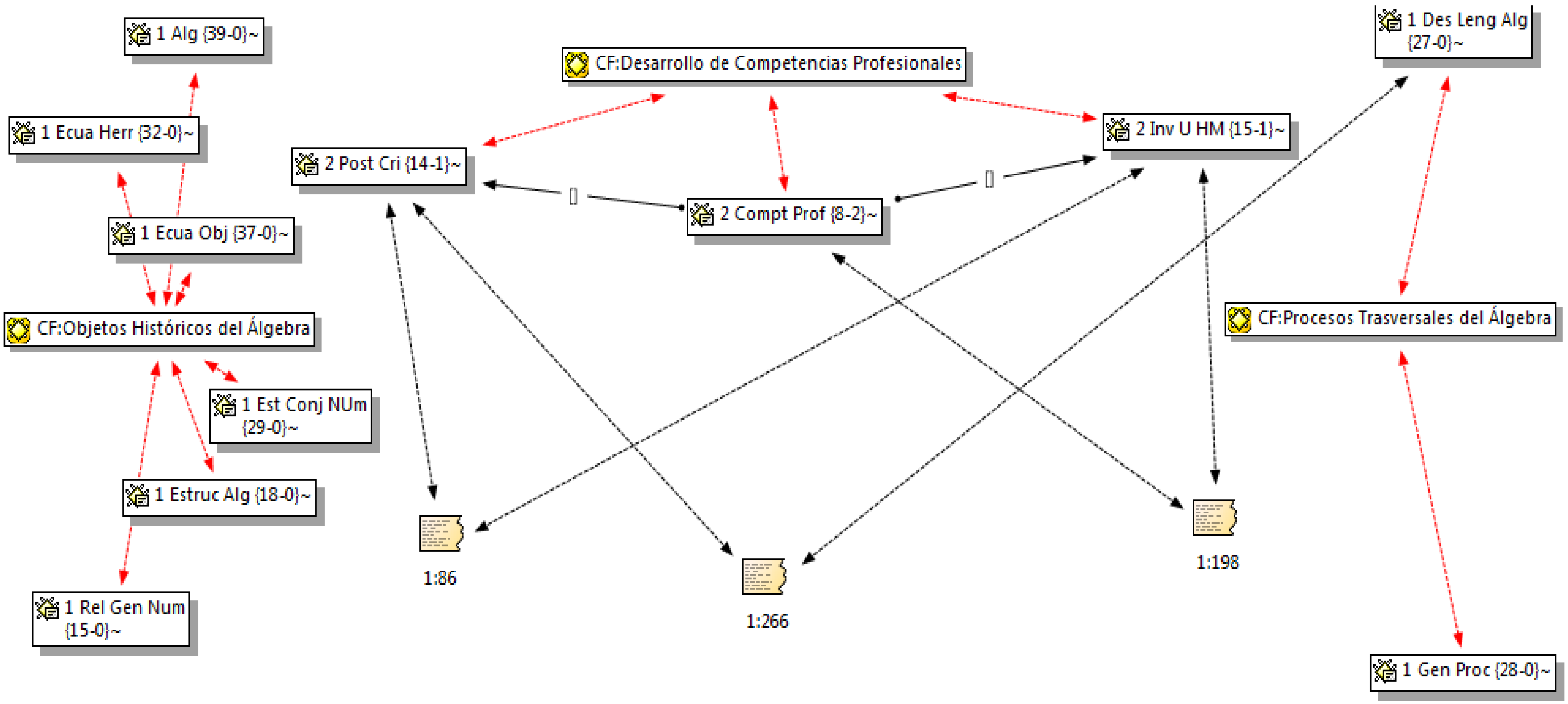

RED 6. RELACIONES INTENCIONALIDAD "MODIFICACIÓN DE LA VISIÓN DE LA MATEMÁTICA Y LA ACTIVIDAD MATEMÁTICA"

En el siguiente episodio, la clase se desarrolla alrededor de las concepciones históricas del sistema de los números complejos, en éste, se puede ver que existen ciertas declaraciones de un estudiante, cuando realiza una exposición, que podrían calificarse también, como potenciadoras de modificación en la visión sobre las Matemáticas y la actividad matemática. Se puede observar que los objetos matemáticos no tienen una aparición o un desarrollo espontáneo, que muchos de ellos han sido elaboraciones producto de aceptaciones lentas y difíciles y que su existencia depende de soluciones a problemas que la humanidad se ha planteado.

> *"E2: nosotros podemos decir que los números complejos aparecieron muy temprano en el paisaje de las Matemáticas pero fueron ignorados sistemáticamente por su carácter extraño, entonces uno lo relaciona, así como los negativos también tuvieron su proceso, como esa dificultad para ser aceptados por la comunidad de Matemáticas, los números complejos al estar rodeados por la raíz de un número negativo pues también fue como muy difícil que la comunidad matemática realmente los involucrara a su sistema axiomático. Pues ellos decían que aparecen soluciones de las ecuaciones cuadráticas que generan raíces cuadradas de números negativos; antes de todo pues acá decimos que la primera referencia fue de Herón de Alejandría quien conocía las raíces cuadradas de números negativos que provenían del trabajo de matemáticos griegos como resultado de una posible sección de una pirámide. Pero la, digamos como más se presenta el numero complejo es con la forma* $x^2 + 1 = 0$ *pero cuando uno va y digamos más o menos estudia a los matemáticos que trataron de darle como un tratamiento a eso, pues más que todo se dio por tratarle de dar solución a las ecuaciones cubicas".(Sesión 26 P1:299)*

De tal manera, se puede decir que éste es un ejemplo en el cual se reconoce en los objetos matemáticos evolución en el tiempo, cambios de significado y, variación en el estatus de las Matemáticas. Quizá pueda también, permitir entender porqué algunos objetos matemáticos generan dificultades en la escuela (Guacaneme E. , 2011).

### 3.4.5 INTENCIÓN DE PROMOVER COMPETENCIAS PROFESIONALES EN RELACIÓN CON LOS OBJETOS Y PROCESOS TRANSVERSALES DESDE LA HISTORIA




RED 7. RELACIONES INTENCIONALIDAD "DESARROLLAR COMPETENCIAS PROFESIONALES CON OBJETOS HISTÓRICOS Y PROCESOS TRASVERSALES"

A simple vista, se puede evidenciar un número pequeño de relaciones entre los códigos correspondientes al Desarrollo de Competencias profesionales ([*Post Cri*], [*ComptProf*] y [*Inv U HM*]) y los Objetos y Procesos transversales del Álgebra en la Historia, sobre este hecho se hará referencia más adelante. Véase también, que hay episodios del Desarrollo de Competencias Profesionales que se relacionan entre ellos. A continuación se mostrarán algunos ejemplos en los que se puede observar cómo son algunas de esas relaciones.

En el siguiente episodio la profesora hace ciertas recomendaciones que se clasificaron como [*ComptProf*] e [*Inv U HM*]. En éstas, se puede reconocer la invitación que hace la profesora a usar documentos, que en este caso son históricos, para la compresión de algunos conceptos relacionados con el desarrollo del lenguaje y el tratamiento de ecuaciones.

> *Bueno, acá en el fondo la invitación es a varias cosas: la primera, a que leamos un poco con mayor atención… a que no pasemos por encima de las palabras que aparecen ahí, que vayamos un poco más al fondo a revisar qué es lo que me están diciendo ahí. Ya comprendimos un poquito lo que significa el lenguaje retórico, miren todo lo que nos costó interpretar el primer paso [sobre el método de los egipcios]. (Sesión 3, P1:198)*

Según Guacaneme (2011), la Historia de las Matemáticas contribuye en el desarrollo de competencias profesionales en aspectos relacionados con favorecer actitudes para la docencia como por ejemplo, desarrollar habilidades para la lectura, el manejo de literatura incluyendo la reflexión continua de ésta. Al respecto, el episodio al que se está refiriendo hace parte de las conclusiones de un trabajo que la profesora propuso a los estudiantes al tratar de interpretar un problema del papiro de Rhind y su solución, todo en lenguaje retórico. Al final una de las declaraciones de la profesora tiene que ver con la complejidad que se tuvo al interpretar algunos pasos del procedimiento. Se puede ver que se está proponiendo hacer lecturas no superficiales para conseguir interpretación de textos como los abordados.

También se puede encontrar en los registros, episodios que invitan a los estudiantes tomar posturas y con éstas, hacer parte de debates frente a aspectos conceptuales. Guacaneme (2011), también incluye a las discusiones sobre asuntos históricos y didácticos como acciones que propician el desarrollo de competencias profesionales en el profesor de Matemáticas. A propósito, el siguiente es un ejemplo de una propuesta de la profesora a realizar ese tipo de actividades.

*P: ¿Por qué no se arriesgan?, es hasta chévere, yo aquí me estoy arriesgando con todo esto que estoy diciendo acá, yo no tengo un documento que dijera "concepciones históricas del algebra", ya se los habría entregado hace rato, estamos intentando con base en lo que leemos sacar esas ideas y nos estamos arriesgando, bueno lo que pasa es que yo siento el apoyo de ustedes, debe ser eso lo que me da fortaleza… (Sesión 6, P1: 86)*

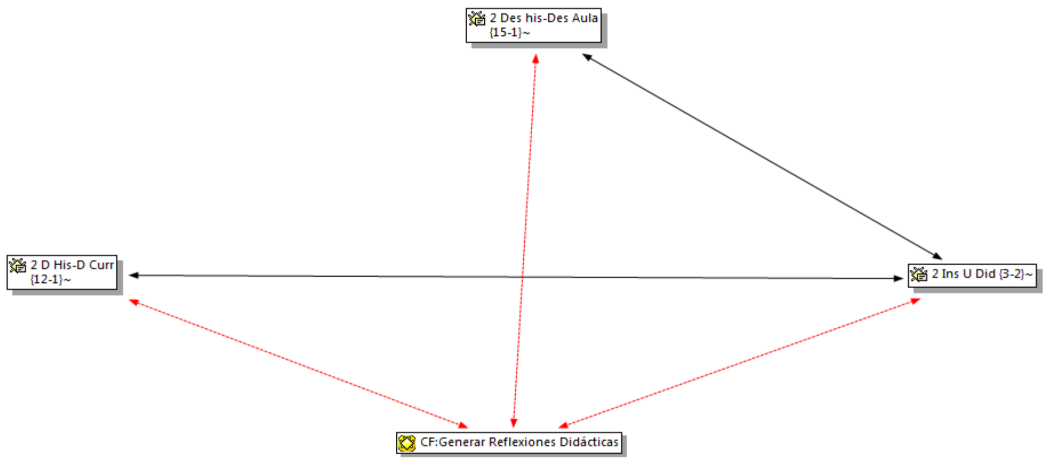
Otra competencia que el mismo autor manifiesta se promueve con el uso de la Historia es buscar fuentes. El siguiente, es uno de los ejemplos que está relacionado con la anterior afirmación, en el cual la profesora al dejar una tarea para la casa pide que se busquen documentos históricos diferentes a los que ella propuso.

*P: […] quiero decir es que usted va ahí a buscar distintos documentos, no se queda con ese solo autor, que va y busca quien habla a favor y quien habla en contra,[…] (Sesión 6, P1: 346)*

Por otro lado, al analizar con mayor detalle la red 7 se aprecia claramente que de los 37 episodios que hacen parte de esta familia de códigos sólo aparece una relación explícita con uno de los procesos trasversales y no hay ninguna con los objetos históricos del álgebra. Este hecho es interesante en la medida en que al no aparecer estas relaciones, la promoción de competencias profesionales puede decirse que atiende a aspectos generales de la docencia y por lo tanto no es necesaria su reflexión directa con un objeto o proceso matemático.

Lo anterior se contrasta en gran medida con la intencionalidad que se presenta a continuación y que fue denominada *"generar reflexiones didácticas"*, en ella se hace referencia a competencias que no son contempladas en Guacaneme (2011) y que atañen directamente al quehacer del profesor de Matemáticas. Consideramos que este tipo de competencias es más cercano a los planteamientos de Rico (2004) como se discutirá más adelante.

### 3.4.6 INTENCIÓN DE GENERAR REFLEXIONES DIDÁCTICAS EN RELACIÓN CON LOS OBJETOS Y PROCESOS HISTÓRICOS DEL ÁLGEBRA




RED 8. FAMILIA DE CÓDIGOS INTENCIONALIDAD "GENERAR REFLEXIONES DIDÁCTICAS"

La imagen anterior muestra el conjunto de códigos que hacen parte de la intencionalidad Generar Reflexiones Didácticas. Como se puede observar, el código que se refiere a la comparación de los desarrollos históricos frente a los desarrollos en el aula [*Des his-Des Aula*] son los más numerosos mientras que los que tienen que ver con inspirar unidades didácticas [*Ins U Did*] son los que menos se pueden encontrar. A continuación se dan algunos ejemplos en los que se muestra de manera más explícita las intencionalidades asociadas a los códigos.

Junto a las intencionalidades declaradas de forma explícita en el programa del curso, la profesora en algunas ocasiones hizo explicito el uso que ella pretendía de la HM para el espacio académico, uno de estos usos tiene que ver con la utilidad de la Historia para establecer comparaciones con el desarrollo del currículo actual de Álgebra, como se mencionó en la sección 3.3.2.

A continuación se ilustran otros usos que puede llegar a tener la HM no sólo para el espacio académico sino para la práctica profesional de los profesores en formación y que encuentran vínculos directos con el estudio de propuestas de enseñanza. La afirmación de la profesora se presenta en el marco de una discusión sobre el surgimiento de algunos números como los complejos y su relación con la resolución de ecuaciones en un periodo histórico.

> *P: Parece que para nosotros poder decidir sobre estas cosas, tenemos que ahondar un poco más hacia la Historia. Además revisando las tareas que me entregaron la vez pasada, pues también creo*

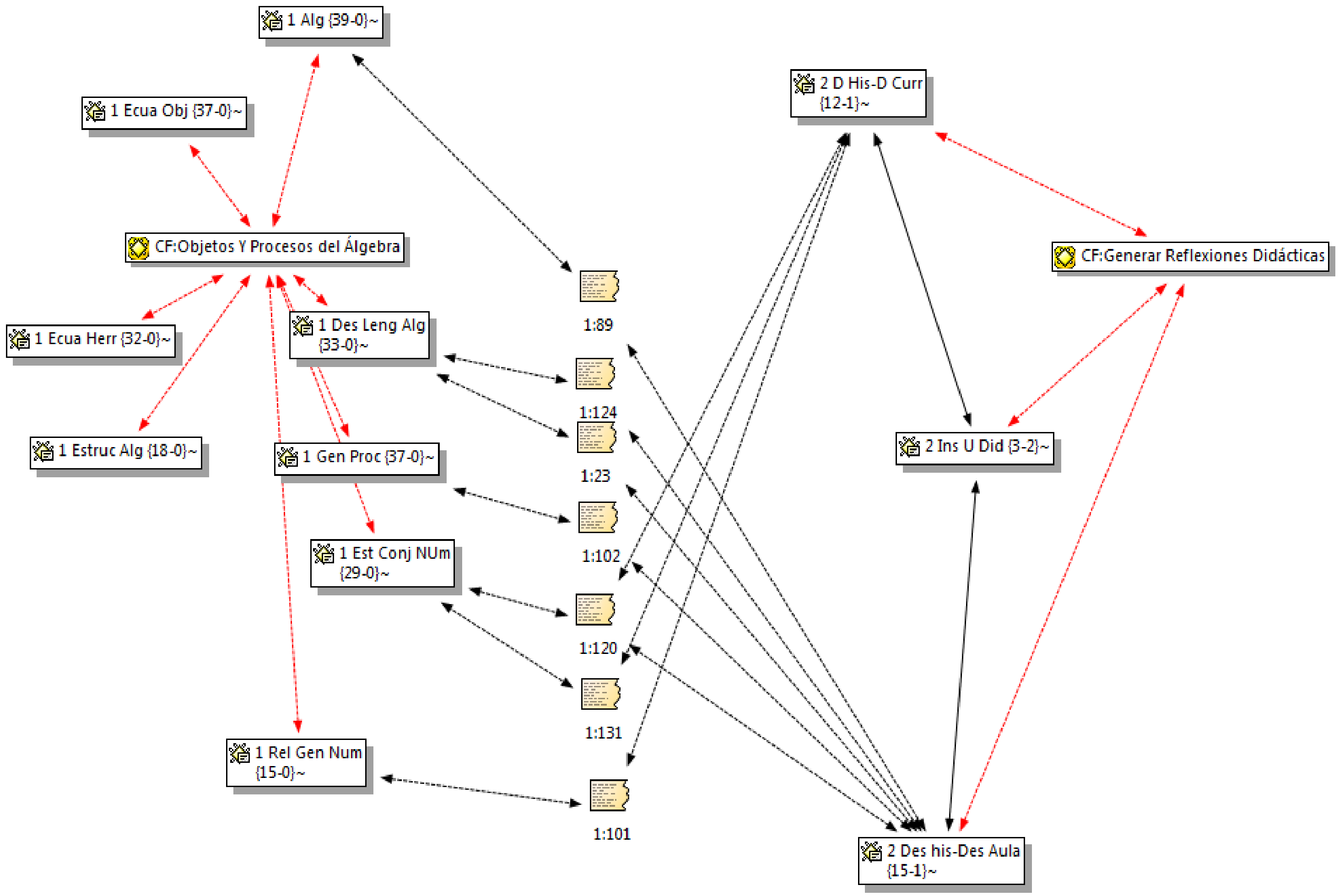
*que nos falta mirar un poquito más, para poder tener unos ojos más claros para hacer revisión por ejemplo, de los textos, para también comprender un poco algunas de las dificultades que surgen cuando los niños están aprendiendo ciertos números y también nos da ideas para proponer clases de pronto* (sesión 6, P1:77)

Es importante destacar que en la afirmación de la profesora la HM puede ayudar a tener "unos ojos más claros", una mirada más precisa sobre tres aspectos, aspectos son abordados tanto en las reflexiones de tipo didáctico como en el desarrollo de competencias profesionales.

- *Hacer revisión de textos*
- *Comprender algunas dificultades al estudiar conjuntos numéricos*
- *Puede ayudar a proponer clases*

Estos aspectos junto con el *análisis comparativo entre el desarrollo histórico y propuestas curriculares* constituyen un panorama general de la intencionalidad didáctica presente en el desarrollo del curso. Este hecho se pretende ilustrar a continuación con algunos episodios de clase en relación con los objetos históricos del Álgebra estudiados y sus procesos.

La red 9, muestra las relaciones entre los episodios de clase que pretendían generar una reflexión didáctica y los objetos y procesos históricos del Álgebra.




RED 9. RELACIONES INTENCIONALIDAD “GENERAR REFLEXIONES DIDÁCTICAS CON OBJETOS HISTÓRICOS Y PROCESOS TRASVERSALES”

A continuación presentamos dos ejemplos que ilustran la intencionalidad didáctica con la que fue usada la HM. El primero de ellos gira en torno a la relación entre el conocimiento histórico y el conocimiento curricular, el segundo por su parte, aborda las relaciones entre el conocimiento histórico y algunas situaciones de aula tanto actuales de los profesores en formación, como aquellas en las que se desempeñarán como profesionales en el futuro.

Como se ha mencionado anteriormente, la primera parte del espacio académico estuvo enfocada a la construcción de ideas alrededor de las CHA que posteriormente fueron puestas en comparación con las Concepciones Curriculares del Álgebra (CCA).

> *P: quiero que antes de dar el cierre [sobre las concepciones curriculares del Álgebra], quiero mirar si esas que aparecen aquí [concepciones curriculares] como les decía al principio están relacionadas con las concepciones históricas o no, o si hay alguna que aparece nueva. (Sesión 17, P1:95)*

Este tipo de comparaciones permitió reflexionar sobre aspectos de tipo didáctico como los que se ilustran a continuación:

Durante la sesión 6, después de haber consolidado algunas ideas frente a las CHA, se presentan dos reflexiones que involucran aspectos de la enseñanza de las Matemáticas en relación con el conocimiento histórico.

> *E1: Buenas tardes, el documento que les vamos a exponer es el de Esquinas [No obstante el estudiante está haciendo alusión al documento de Socas]. Digamos, lo que el texto desde el principio lo que se hace es reconocer la importancia de la Historia. Entonces habla sobre, que la Historia prepara un terreno para llegar a una mejor concepción de lo que son los términos matemáticos, así como ayuda para empezar a mandar [implementar] unidades didácticas, aunque reconoce la dificultad para generar unidades didácticas, debido a que a veces hay espacios en la Historia donde el nivel de algunos teoremas es demasiado difícil para llevarlo a la escuela. (P1:217)*

El estudiante, a partir de lo consultado en Socas *et.al* (1989), comenta la utilidad que puede tener el conocimiento de la Historia para comprender de mejor manera los objetos matemáticos y servir de inspiración para la elaboración de unidades didácticas. También se reconoce la utilidad, pero al mismo tiempo el potencial que puede tener para reconocer la dificultad relativa de algunos teoremas para ser llevados a la escuela.

Lo mencionado por el estudiante da cuenta de lo propuesto por Radford *et.al* (2000) cuando afirman que la HM permite comprender aspectos del pensamiento matemático y que una comprensión tal puede ser usada en el desarrollo de actividades.

En la misma sesión la profesora cuestiona a los estudiantes sobre la realidad en la enseñanza del Álgebra y la utilidad que puede tener el conocimiento histórico para tomar una postura clara sobre el qué enseñar del Álgebra y sobre lo que han aprendido en los cursos de su formación inicial pertenecientes a la línea de Álgebra[22].

> *P: […] a mí me parece que lo grave que nos pasa actualmente es que cuando uno le pregunta a un profesor de Álgebra, ¿Usted por qué enseña polinomios en octavo? ¿Para qué? No tiene ni idea para qué, porque no tiene posición, no es que yo lo enseño porque es que para mí el Álgebra es el estudio de los cálculos simbólicos, entonces los niños tienen que aprender a hacer cálculos con los símbolos a tratarlos como si fueran… bueno por lo menos tuviéramos esa idea, pero bueno por lo menos tiene una posición y está viéndolo desde esa concepción, o no es que yo solo me dedico a estudiar funciones y a hacer operaciones entre funciones, ¿Por qué? Porque es que para mí el Álgebra es el estudio de las funciones, o sea y esas posiciones que nosotros tenemos son las que nos marcan lo que vamos a hacer en el currículo, por lo menos lo que se espera. Porque yo sé que cuando ustedes se gradúen o aquellos que trabajan en algún colegio o han tenido esa posibilidad de trabajar en un colegio y llega nuevo le toca acomodarse a lo que haya y pues ahí quién sabe cuál será la concepción que haya, a veces usted pregunta. No sé de la experiencia que hayan tenido cuando han ido a mirar currículos y eso, como que ni idea, nadie sabe porque está eso así organizado, entonces la idea es que no sigamos en esa misma como sinergia ahí, como que ni idea. Sí, como que hacemos lo que el otro hizo porque sí es que en octavo hay que enseñar factorización, no, ¿Por qué?, ¿Para qué?, ¿Eso qué tiene que ver con Álgebra?, ¿Si es Álgebra o no es Álgebra?, ¿Aquí alguno de ustedes en la línea de Álgebra estudio factorización? […] pero entonces, digamos que haciendo una relación con lo que estamos haciendo y lo que vamos a hacer como futuros docentes es que tenemos que tomar posición respecto a nuestros propósitos, respecto a nuestras concepciones también y yo espero que sean fundamentadas (sesión 6, P1: 90)*

El anterior episodio se torna relevante en la medida en que la profesora hace una invitación clara, a partir de las afirmaciones y cuestionamientos, a tener una postura clara de lo que se enseña y por tanto de lo que puede o no hacer parte del Álgebra. Es importante lo anterior porque la postura que se pide se pone en relación directa con las concepciones históricas del Álgebra que se construyeron (calculo simbólico y estudio de funciones).

El episodio anterior apoya la idea de Anacona (2003) para quien el estudio de aspectos epistemológicos de un concepto, en este caso del Álgebra, puede aportar elementos conceptuales, metodológicos y epistemológicos, que pueden ser usados por los profesores en la elaboración de propuestas educativas; en este caso la profesora no sólo apunta a la elaboración de propuestas, sino al cuestionamiento de las actuales propuestas a partir del estudio y conocimiento de los desarrollos históricos del Álgebra.

[22] Poner los cursos de la línea de Álgebra de la UPN

Otro aspecto a destacar del episodio, que está relacionado con el anterior tiene que ver con la posibilidad que puede brindar a los futuros profesores tener una postura fundamentada para hacer estudios sobre los currículos que les permita ir más allá de adaptarlos, que les posibiliten tomar decisiones para modificarlos. Estos dos últimos párrafos apoyan claramente la postura de Rico (2004) quien afirma que una de las competencias de los profesores debería ser *Analizar críticamente y evaluar propuestas y organizaciones curriculares.*

Más adelante en el desarrollo del curso, una intervención del observador participante sobre algunos momentos históricos que son importantes para comprender la evolución de la idea de número contienen al mismo tiempo la reflexión sobre la utilidad que puede llegar a tener un conocimiento tal para comprender y reflexionar sobre aspectos de la enseñanza de Álgebra.

> *El siguiente momento creo que Lyda lo ha puesto ahí [en el tablero] que es Stevin, aunque seguramente hay otros ahí intermedios, pero Stevin me parece que es muy diciente del tratamiento de los números. Al igual, y lo digo porque Lyda lo escribió ahí, los árabes y el tratamiento aritmético que hacen los árabes, muy seguramente correspondiente con el segundo de los ítems que ustedes señalaron ahí que es el tratamiento de los números, sin que sea exclusivo de esa tradición. Creo que son momentos claves que permitirían entender un poco más, insisto: lo que uno hace en clase y quizá también lo que deja de hacer* [en el aula]. *(Sesión 18, P1:108)*

En la sesión de cierre (sesión 26), en la que se realizó una evaluación del curso se presentaron las dos intervenciones siguientes:

> *P: estas eran las cuestiones de tipo histórico y la idea era como para que ubicáramos históricamente cómo se fueron dando, cómo se fue dando la evolución histórica de los distintos conjuntos de números. Sin embargo, o involución no sé, esto es como más temática de Historia, digo yo, y luego verán una materia que se llama Historia de las Matemáticas que yo me imagino que allá podrán profundizar, el objetivo de esto era también que pudiéramos dar un tipo de comparación. Mirar por ejemplo qué tipo de representaciones se usaban en distintas épocas y cuáles de esas nos llevan a, digamos, encontrar algunas facilidades para la enseñanza de las Matemáticas o dificultades. Y esa reflexión pues naturalmente nos va a hacer falta pues ya por tiempo no tenemos posibilidad de hacerla. (Sesión 26, P1:124)*

> *E: […] creo que es importante, es importante lo de las concepciones históricas de la aritmética y el Álgebra, si, no lo niego, pero creo que le dedicamos mucho tiempo a eso y dejamos de lado tal vez los errores, enfatizar más en los errores que comete un profesor al dar un tema y cómo lo asimila un estudiante. Creo que eso es en lo que se basaba prácticamente el curso de enseñanza y aprendizaje de la aritmética y el Álgebra. Mirar qué errores se cometen para tratar de no cometerlos y corregirlos y cómo aprende un niño. Creo que a eso le debimos haber dedicado más tiempo. (Sesión 26, P1:307)*

Ambas intervenciones desde puntos de vista diferentes reclaman por más tiempo para realizar un análisis de tipo didáctico mucho más profundo. La profesora reconoce que el tiempo del curso, aunque permitió realizar un estudio de la evolución de los conjuntos numéricos no fue suficiente para identificar dificultades o facilidades para la enseñanza de las Matemáticas. Por su parte, el estudiante considera que el tiempo dedicado a la Historia tanto del Álgebra como de la Aritmética fue excesivo y no se dedicó el tiempo suficiente a reflexionar sobre la enseñanza y el aprendizaje, reflexionar sobre los posibles errores que pueden llegar a cometer los profesores y aun más importante la forma como puede aprender un niño.

Aunque no hay evidencia suficiente, podría pensarse que para el estudiante no fue evidente que el estudio de la HM y de la HA puede ser una herramienta que permite realizar ese tipo de reflexiones (Fauvel& Van Maanen, 2000).

Los episodios presentados dan cuenta de algunos vínculos con la propuesta de Rico (2004) en relación con lo que él denominó competencias profesionales de los profesores. Como se había mencionado anteriormente esta idea de competencia no es la misma que se propone en Guacaneme (2011), pero la retomamos al considerar que no es suficiente con unas competencias profesionales generales sino que éstas deben atender también al desarrollo de un conocimiento didáctico del contenido.

### 3.4.7 TIPOS DE HISTORIA

**Sobre el tipo de fuente**

Como se mencionó en la sección 3.3.1 los documentos que los estudiantes consultaron y la profesora propuso fueron fuentes de tipo didáctico. Tales documentos se utilizan, entre otras cosas, para contextualizar y caracterizar desde la Historia, los objetos algebraicos susceptibles de enseñanza y aprendizaje. Además reconocen, de alguna manera y entre otros asuntos, la utilidad de la Historia para el desarrollo del conocimiento de los objetos matemáticos y el análisis de las propuestas didácticas y curriculares. La lista de los textos abordados por los estudiantes es la siguiente:

1. Esquinas, A. (2008). *Dificultades de aprendizaje del lenguaje algebraico: del símbolo a la formalización algebraica. Aplicación a la práctica.* Memoria para optar al Título de Doctor, Departamento de

Didáctica y Organización Escolar, Facultad de Educación, Universidad Complutense de Madrid, Madrid, España. (versión electrónica).

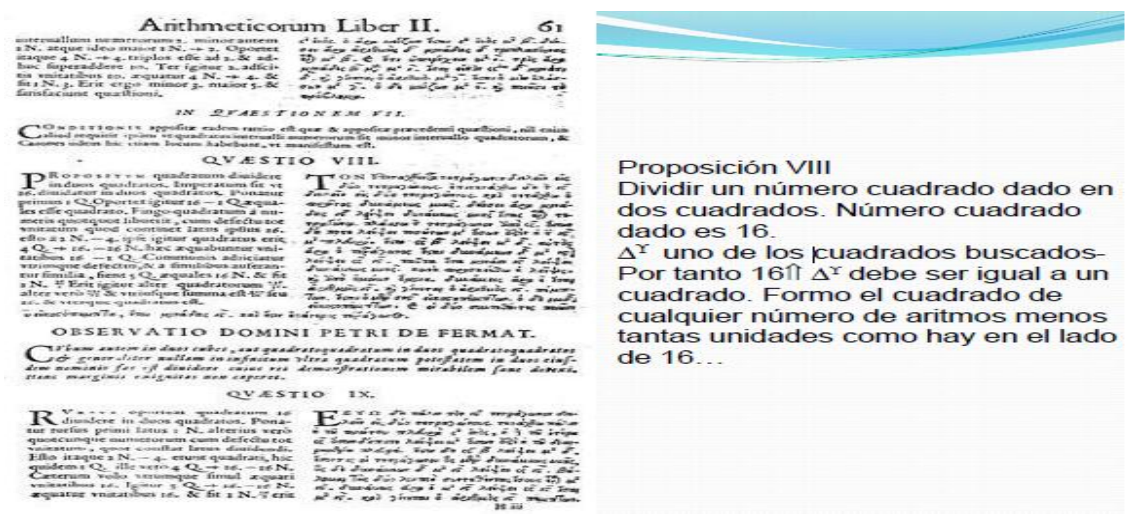
2. Mason, J., Graham, A., Pimm, D. y Gowar, N. (1988). *Rutas y raíces hacia el álgebra* (C. Agudelo, Ed. y Trad.). Tunja, Colombia: Universidad Pedagógica y Tecnológica de Colombia. (Trabajo original publicado en 1985) pp. 1-15.
3. Molina, M. (2006). *Desarrollo del pensamiento relacional y comprensión del signo igual por alumnos de tercero de educación primaria.* Tesis de Doctorado para la obtención del título de Doctor en Didáctica de la Matemática, Departamento de Didáctica de la Matemática, Facultad de Ciencias de la Educación, Universidad de Granada, Granada, España. (versión electrónica).
4. Panizza, M., Sadovsky, P. y Sessa, C. (s.f.). *Los primeros aprendizajes algebraicos. Cuando las letras entran en la clase de Matemática. Informe sobre una investigación en marcha.*
5. Sessa, C. (2005). *Iniciación al estudio didáctico del álgebra.* Buenos Aires: Libros del Zorzal.
6. Socas, M., Camacho, M., Palarea, M. y Hernández, J. (1989). *Iniciación al álgebra.* Madrid: Síntesis.
7. Televisión educativa, ILSE, Secretaría de Educación Pública (productores). (2008). Programa 30. De Diofanto al siglo XXI. México: Telesecundaria. En: http://www.youtube.com/watch?v=ZNRaSjHrPyo&feature=related.
8. Usiskin, Z. (1988). *Conceptions of Algebra and Uses of Variables.* En A.F. Coxford y A.P. Shulte (Eds.), *The ideas of algebra K-12* (pp. 8-19). Reston, VA:National Council of Teachers of Mathematics. (versionelectrónica).
9. Gonzalez, J., Iriarte, M., Ortiz, A., Vargas, I., Jimeno, M., Ortiz, A. y Sanz, E. (1990). *Números Enteros.* Madrid: Síntesis.

De todos modos, un hecho que se debe mencionar es que dentro de las fuentes didácticas que se trabajaron se encuentran algunos apartes que podrían clasificar como fuentes secundarias y hasta primarias. Por ejemplo, la profesora algunas veces propuso la interpretación, el análisis o la discusión de traducciones de problemas originales de los babilonios, los pitagóricos, los egipcios, Diofanto y Al-Kowarizmi. Una de esas traducciones es la siguiente:

> *"He sumado la superficie y mi lado de cuadrado: 45. Pondrás 1, la* wasitum. *Fraccionarás la mitad de 1 (:30). Multiplicarás 30 y 30 (:15). Agregarás 15 a 45: 1. 1 es (su) raíz cuadrada. Restarás el 30 que has multiplicado de 1 (:30). 30 es el lado del cuadrado."*
>
> (Tablilla Babilonia, 1600 a.C., tomado de Sessa, 2005, p. 21)

De igual manera, aunque sólo de manera historiográfica o para contextualizar la exposición de la profesora sobre el desarrollo del lenguaje algebraico en la Historia, se utiliza una imagen que proviene de una fuente primaria, aunque ésta, no se aborda ni se trabaja. Sin embargo, al final se hace una invitación sobre el uso de una fuente primaria:

> *P: Esta es una parte del libro 2 de la Aritmética de Diofanto. Y entonces aquí solamente creo que puse un pedacito de la proposición 8 que es este que aparece acá [muestra diapositiva] y corresponde a lo siguiente […] Y entonces ahí está y empieza la solución, no la traje completa porque no alcancé a evidenciarla ahí y la encontré como en un documento propio donde estuviese por lo menos la copia original. Sin embargo, pues yo tengo la Aritmética de Diofanto traducida al español si alguien quiere mirarla, si quiere hacer su trabajo de grado alrededor del asunto, porque no encontré mucho acerca de producciones escritas por Diofanto y la manera de resolverla y cómo usarlas en el lenguaje actual, puede ser que existan ¿no? Pero, no encontré. (Sesión 4, P1: 176).*




Así mismo, se puede decir que el **tipo de referencia** de la obra histórica que se aborda en la clase, tiene que ver con episodios históricos que se relacionan con la evolución del Álgebra.

No son obras Matemáticas puras en la Historia, ni biografías, ni correspondencia entre matemáticos. En ese sentido, más bien se puede clasificar como teorías o porciones de ellas, aunque, lo que se puede encontrar en tales documentos son descripciones de la evolución de porciones de teorías con fines didácticos o relacionados con el conocimiento del profesor.

En ese sentido, aunque la Historia presentada tiene que ver con la descripción de la evolución de los objetos, los procesos y las características del Álgebra, no se podría afirmar que **el enfoque que se le da a los objetos** es matemático propiamente dicho. Se puede encontrar que aunque se hacen alusiones Matemáticas, éstas, no son el fin mismo de los documentos. En vez de eso, se presenta una mirada a la evolución del Álgebra y sus objetos característicos para relacionarlos posteriormente o de manera paralela a planteamientos de carácter didáctico o curricular. Por ejemplo, Sessa (2005, p. 12) afirma: *"En el capítulo 1 la Historia de la Matemática será la protagonista. Esperamos que con su lectura se comprenda por qué incluimos esta dimensión más epistemológica en nuestro estudio didáctico".*

Otro ejemplo frente a lo anterior, es que Socas(1989) expone los conceptos básicos del Álgebra dentro de su marco histórico. Sin embargo, su objetivo es que el contexto que se involucra en esta exposición de la evolución de los conceptos algebraicos, puedan servir para asuntos análogos en la clase de Matemáticas.

Por otro lado, se puede reconocer que el tipo de Matemáticas que se abordan en los documentos trabajados son **hegemónicas**. Así se entienden en tanto los desarrollos descritos son los que comúnmente se conocen como los tradicionales occidentales, aun cuando se puedan distinguir grupos culturales específicos como los babilonios, egipcios, chinos y árabes. No obstante, se sabe que estos grupos culturales pertenecen en costumbre a quienes aportaron en la construcción de la matemática hegemónica.

También, se puede observar que en los textos trabajados en clase predomina lo que Guacaneme (2010) denomina como **relato histórico**, ya que se atiende a aspectos historiográficos, tales como cronología, biografía, descripciones sobre eventos históricos, entre otros. Y si bien se hacen alusiones al contenido matemático, la profundidad de la mirada sobre este contenido no es tan relevante como sí lo son los puntos que se consideran importantes sobre la evolución de los objetos algebraicos en este caso. Al respecto, el siguiente es uno de los ejemplos en el que se mencionan asuntos de los cuales podrían hacerse interpretaciones desde las Matemáticas, no obstante, la preocupación del estudiante que hace la exposición, es mostrar algunas características de la evolución de los números enteros en un periodo particular de la Historia:

> *"E2: A propósito de lo que hace Chuquet se debe recordar que para estas fechas aún se utilizaba "álgebra retórica".*
>
> *Michael Stifel (1487-1567) consideraba al número entero como un número absurdo pero lo admitía como coeficiente en sus ecuaciones. Se le debe a él la popularización del signo + y - en las expresiones algebraicas.*
>
> *Cardano (1501-1576) admite los enteros como coeficientes y admite las raíces negativas pero dice que son ficticias. Empezó a trabajar con la regla de signos. Trabajó con ecuaciones cúbicas y cuartas preguntándose por el número de sus soluciones. Esto era como los primeros pasos para el teorema fundamental del álgebra. Decía de los enteros que eran necesarios".(Sesión 25, P1: 116)*

Igualmente podemos concluir que los objetos históricos respectivos se pueden clasificar como **internalistas** debido a que priman los desarrollos históricos de las Matemáticas sin tener en cuenta el contexto. De hecho, el ámbito social y cultural en el que se desarrollan los acontecimientos históricos descritos es raramente mencionado en los documentos. No obstante, se encuentran al menos siete alusiones sobre la Historia en el que se hace referencia al contexto en el que se desarrollan los objetos matemáticos, a saber, cuatro de ellos son intervenciones de la profesora, 2 de ellos son de los estudiantes en exposición y 1 más es encontrado en un video que pasa la profesora. Uno de los siete ejemplos en los que se tiene en cuenta el contexto es el siguiente:

> *"P: [Refiriéndose a los pioneros del periodo simbólico] De todas maneras hay mucho problema con la notación también, ¿saben por qué? ¿Por qué no se extiende tanto? Hay un problema digamos que social en el momento, o cultural, no sé cómo llamarlo, tiene que ver con la imprenta, no existen máquinas para poder expresar de esta manera que ellos querían… pueden que ya las hubieran utilizado, pero no existían estos modos, ¿no sé si ustedes alcanzaron a utilizar la máquina de escribir? Y en la máquina de escribir pues no había $x^2$, ¿entonces uno qué hacía para eso? Bajaba un poquito el rodillo y le ponía el 2 ahí porque no se podía, o a mano, o cosas de ese estilo, imagínense y eso que ustedes son de esta era ¿no? Hoy en día solo es editor de ecuaciones, sencillo todo el asunto". (Sesión 3, P1: 28)*

Además, frente a si los documentos abordan los objetos históricos desde la tipología de Historia o herencia, se puede decir que se pueden clasificar en **herencia**, pues en ellos se hace referencia al impacto de las elaboraciones de cada periodo y cada matemático o grupo de matemáticos “en el trabajo posterior, tanto en el momento como después, especialmente las formas que puede tomar, o estar incorporado, en contextos posteriores”. No se describen explícitamente los fracasos, ni tampoco lo que no fue y por qué. Básicamente se desarrollan los relatos de los eventos que determinaron consecuencias en la construcción progresiva del Álgebra y sus objetos característicos.

La Historia presentada se puede clasificar como **evolutiva** pues como ya se ha dicho se trata de hacer una descripción y una comprensión sobre los procesos de evolución de los objetos matemáticos, más que sobre la comprensión de los razonamientos de los matemáticos en un momento específico. Por otro lado, debido a las características de los textos en tanto se han clasificado en este trabajo como didácticos, se puede inferir que los hechos históricos se han relatado por **científicos, en este caso, didactas actuales**.

Por todo lo que se ha dicho, es claro que la Historia en los documentos trabajados y en las interacciones entre los miembros de la clase podría ser clasificada como **Historia como herramienta** y no como Historia como fin. En casi todos los momentos que se usa la Historia se reconoce a la misma como fuente de dispositivos de asistencia o de ayuda en el aprendizaje de las Matemáticas.

# 4. SÍNTESIS DE RESULTADOS YCONCLUSIONES

Para iniciar, se considera importante resaltar que este trabajo fue elaborado teniendo como una de las bases y fundamentos, la organización y construcción teórica producida por el profesor Edgar Guacaneme alrededor del CPPM y sobre todo lo referido al papel de la HM en el CPPM. Se debe reconocer, que la construcción alcanzada por Guacaneme nos ha facilitado la consecución de los referentes que tuvimos en cuenta.

Ahora bien, la síntesis de los resultados, las conclusiones y algunas reflexiones se han organizado en el presente capítulo en cuatro apartados denominados *Acerca de la caracterización histórica del Álgebra*, *Acerca del papel de la HM en la FIPM*, *Acerca de la aproximación metodológica* y *Algunas reflexiones sobre el desarrollo de la actitud investigativa*. En cada uno de los apartados se presenta una síntesis de los resultados y algunas reflexiones sobre estos que se constituyen en las conclusiones del presente estudio. Al final de cada uno de los apartados se propone algunas cuestiones investigativas que no fueron suficientemente documentadas o que surgieron a partir del ejercicio investigativo realizado.

## ACERCA DE LA CARACTERIZACIÓN HISTÓRICA DEL ÁLGEBRA

La caracterización que se realizó del Álgebra desde una perspectiva histórica fue necesaria para el presente trabajo dado que las presentaciones históricas que se consultaron abordaban el panorama históricos desde el desarrollo del lenguaje, desde la separación entre Álgebra clásica y moderna, desde los periodos de simbolización (retórico, sincopado y simbólico), desde una secuencia cronológica de hechos que corresponden a la Historia del álgebra, o desde una cultura específica. Lo anterior, dado el recorrido que sobre la Historia del Álgebra se hizo en el curso, no era suficiente. Por esto, se decidió buscar una forma de presentación que abarcara tanto el Álgebra clásica como el Álgebra moderna atendiendo a los objetos de estudio en cada una de ellas y a los procesos de simbolización y generalización de procedimientos que desde el punto de vista de los autores de este trabajo brindan un panorama amplio del desarrollo histórico del Álgebra.

La organización de la Historia del Álgebra en Objetos y Procesos trasversales, además de brindar un panorama general del desarrollo del Álgebra en la Historia, se convirtió en una herramienta analítica que brindó un *sistema de categorías* para responder a la pregunta *¿Qué Historia del Álgebra se estudiaba en el curso?* Sistema de categorías, que en los análisis presentados pone en evidencia su potencialidad para identificar los asuntos que fueron tratados en el curso, así como aquellos que eran estudiados en mayor o menor medida. Ver ilustración 11.

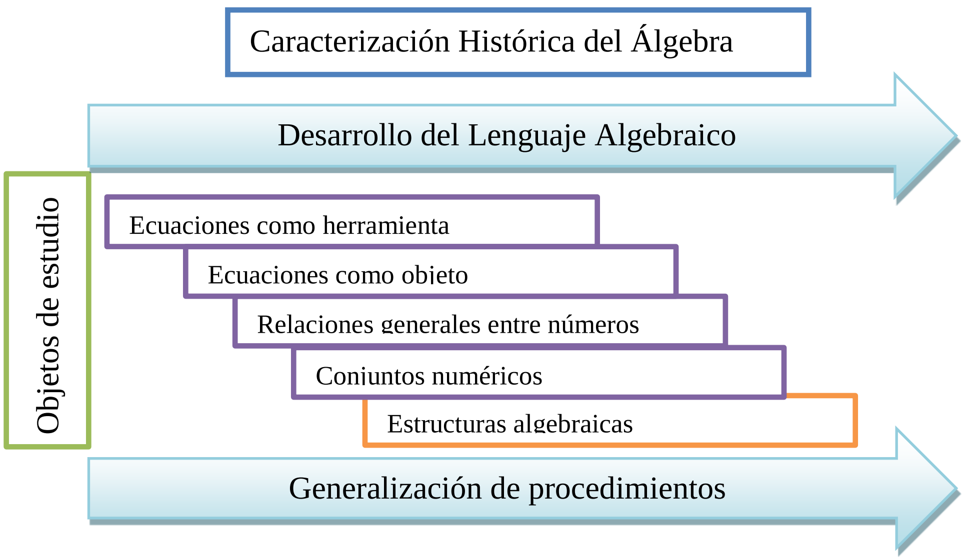



ILUSTRACIÓN 13. SISTEMA DE CATEGORÍAS PARA LA CARACTERIZACIÓN HISTÓRICA DEL ÁLGEBRA

A modo de conclusión, sobre lo estudiado de la Historia del Álgebra en el curso, es posible afirmar que todos los objetos algebraicos desde la Historia que fueron considerados y abordados en la sección 2.3, también fueron de alguna manera referenciados en la clase. No quiere decir esto que todos fueran estudiados con el mismo rigor, pues la intención del curso no radica en un estudio histórico del Álgebra, sino que la Historia es un medio para discutir sobre algunos asuntos didácticos. Por ejemplo, como se mencionó en el análisis de los datos, el estudio de las ecuaciones en su doble acepción es uno de los Objetos más estudiados a lo largo del curso, mientras que el estudio de las relaciones generales entre números o las estructuras algebraicas son referenciados en menor medida. Así mismo, el estudio de ecuaciones aparece en relación con los procesos trasversales, con asuntos que tienen que ver con reflexiones hacia lo curricular y en relación directa en la diferenciación de la aritmética y el Álgebra.

Además de lo anterior, como se aprecia en la sección 3.4, el análisis de las intencionalidades se elaboró relacionándose con los objetos y con los procesos, en un intento por determinar si alguno(s) de los objeto(s) o proceso(s) era usado en mayor medida para desarrollar competencias profesionales (por ejemplo). Este es un asunto del que no se podría afirmar con seguridad que el estudio de un objeto o de un proceso es más potente que otro para promover una intencionalidad, pues en el curso uno de los objetos que más se menciona son las ecuaciones, quizá por el hecho de que en el currículo de educación básica y media muchos al que se enfrentarán los profesores en formación en el futuro, muchos de los asuntos del álgebra que se abordan tienen que ver con estos objetos. Valdría la pena preguntarse si por ejemplo un estudio centrado en las estructuras algebraicas podría potenciar las reflexiones didácticas identificadas en este estudio o potenciaría otro tipo de reflexiones o competencias.

En relación con los dos procesos trasversales propuestos, aunque se reconoce que fueron útiles para interpretar los datos con los cuales se contó, se considera que si se hubiese hecho un estudio más detallado sobre cada uno, conclusiones más específicas se habría podido obtener; por ejemplo, para el primer proceso (Desarrollo de lenguaje), una puntualización en el tipo de lenguaje que prevalece en ciertos periodos (atendiendo a los tres periodos de desarrollo del lenguaje que son reconocidos y aceptados) y de este modo, posiblemente encontrar algunas relaciones con la intencionalidad de la HM. En el caso de la generalización de procedimientos una posible caracterización más fina podría provenir de una división en procesos de instanciación, generalización y abstracción.

En segundo lugar, fue evidente que tanto en las presentaciones de los estudiantes, las intervenciones de la profesora y los diálogos, es posible estudiar los objetos del álgebra de manera aislada, sin hacer referencia a los procesos, sin embargo los diálogos más ricos en contenido y en los que la intencionalidad traspasa el estudio de la Historia del Álgebra *per se*, contienen menciones tanto a objetos como a procesos.

Si bien, para los propósitos del presente estudio se consideró potente una organización de la Historia del Álgebra como la presentada, no es más que una propuesta sobre la cual se reconoce, es posible (i) integrar algunos momentos históricos de modo que aparezcan otros objetos de estudio del Álgebra u otros procesos, (ii) precisar con mayor detalle la relación entre el desarrollo de los objetos y la consolidación de los dos procesos, (iii) ampliar y quizá puntualizar los desarrollos relacionados con el Álgebra moderna, entre muchas otros aportes que se espera sean complemento de la propuesta, pero que escapan al alcance y necesidades del presente estudio.

Además de lo anterior y a modo de reflexión, hay que decir que la propuesta planteada mostró su potencial para una organización de la Historia del Álgebra, como herramienta analítica. Los autores del presente trabajo están convencidos de que al igual que se hizo en el curso, esta organización puede ser una herramienta que al estudiarse en relación con las propuestas curriculares aporta a aclarar qué del Álgebra se privilegia en las aulas de clase, por qué unos ciertos objetos o procesos ocupan un lugar sobresaliente dentro del álgebra escolar. Otro aspecto mucho más general que ponemos en consideración es si el estudio de dicha organización o una similar como la lograda en clase con las CHA, brinda a los profesores en formación las herramientas suficientes para tener una postura crítica y fundamentada que les permita participar en cuestiones de tipo didáctico que conlleven modificaciones en el currículo de Álgebra.

## 4.2 ACERCA DEL PAPEL DE LA HM EN LA FIPM

Este apartado se ha organizado en varias secciones dados los hallazgos realizados y las cuestiones que quedaron por resolver. El primer apartado da cuenta de *qué tipo de Historia se promovió en el curso,* el segundo y más amplio da cuenta de *para qué se usó la Historia del Álgebra en el curso* y en el tercer apartado, a partir de la relación entre los dos anteriores, se pretende dar una aproximación al *cómo se usó la HM en el curso.*

### 4.2.1 ¿QUÉ TIPO DE HISTORIA DEL ÁLGEBRA SE ESTUDIO?

En primer lugar se resalta que las diferentes posturas sobre el tipo de Historia a promover en la Formación de profesores propuestas por Guacaneme, (2008, 2011), fueron un aporte para lograr la caracterización presentada. Sin embargo, como ya se mencionó en el apartado 2.2.4, estas posturas se reorganizaron en tres grandes grupos. El primero de ellos no atiende precisamente al tipo de Historia sino al tipo de fuente, el segundo atiende a los objetos que se estudian y el tercero a la forma como son abordados dichos objetos.

De modo general, es posible afirmar que como consecuencia de que el curso no es de Historia sino de Didáctica del Álgebra y la Aritmética, la Historia es usada como una herramienta para hacer análisis comparativos entre los objetos de estudio de la Aritmética y del Álgebra, entre las CHA y las CCA y entre los desarrollos históricos y las propuestas de enseñanza y aprendizaje. De este modo no sería posible hablar de la Historia como un fin sino de la Historia como un medio ya que la finalidad no es el estudio de la Historia del Álgebra por sí misma.

Si bien en el curso y en las fuentes secundarias de referencia se hace alusión a Matemáticas hegemónicas, éstas, no son el fin mismo, en vez de eso, se trata de presentar una mirada de la evolución del Álgebra y sus objetos característicos para relacionarlos posteriormente o de manera paralela a planteamientos de carácter didáctico o curricular. En ese sentido, se encuentra que se hace referencia a la evolución de los objetos matemáticos y menos a su análisis puntual.

Dentro de las alusiones Matemáticas que se hacen a lo largo del curso, se mencionan porciones de teorías Matemáticas que en la mayoría de las ocasiones permanecen en el tipo denominado **relato histórico**, ya que se atiende a aspectos historiográficos, tales como cronología, biografía, descripciones sobre eventos históricos; mas no se hace **análisis histórico** de esas porciones de teorías Matemáticas. Este hecho, como se discutirá más adelante, pudo darse debido a la forma como se propuso el estudio de la HM y las restricciones de tiempo.

Para finalizar, es posible concluir que los objetos históricos se estudian desde una **perspectiva internalista** debido a que priman los desarrollos históricos de las Matemáticas sin tener en cuenta el contexto, atendiendo a los desarrollos históricos con una mirada desde las Matemáticas actuales, es decir la Historia se estudia como **herencia.**

La siguiente ilustración hace un resumen sobre el tipo de Historia que se estudió en el curso:

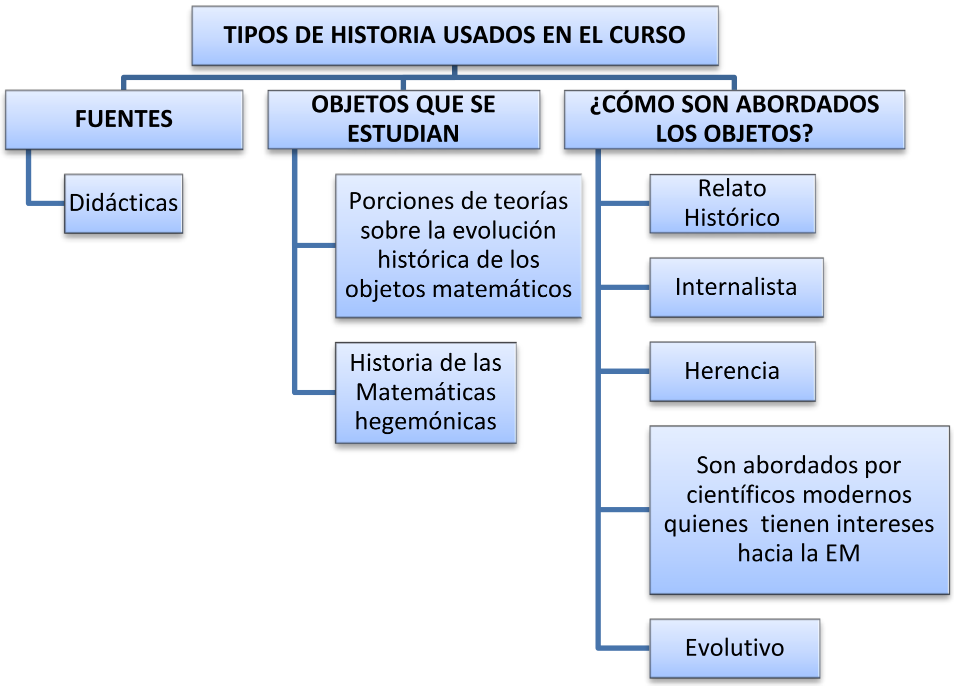



ILUSTRACIÓN 12. TIPO DE HISTORIA USADA EN EL CURSO

### 4.2.2 ¿PARA QUÉ SE ESTUDIÓ LA HISTORIA DEL ÁLGEBRA?

De acuerdo a la evidencia recolectada en los datos, consideramos que el apartado que se presenta a continuación contiene información relevante para dar cuenta de una propuesta particular en la FIPM en la que el para qué usar la HM aparece explícito y no solo en un nivel prescriptivo. Por otro lado, se convierte en una contribución a nivel teórico en la medida que el sistema de categorías emergente que se consolidó, permitió identificar asuntos que en la literatura no habían sido reportados en la práctica, así como otros que no han sido documentados y que consideramos podrían ser relevantes para la formación de un profesor de Matemáticas.

Como se apreció en el trascurso del trabajo, para dar cuenta del para qué, se recurrió a la idea denominada intencionalidad, es por ello que a continuación se sintetizan los hallazgos para cada una de las familias de intencionalidades encontradas centrando la atención en la familia de *reflexiones didácticas*. Posteriormente se establecen algunos vínculos entre las intencionalidades declaradas en el programa, aquellas reportadas teóricamente, las identificadas en los datos y la propuesta de Rico (2004) en relación con las competencias profesionales del profesor de Matemáticas.

***Acerca de la caracterización del álgebra y de sus objetos y procesos***

Los códigos [*Car HisAlg y Obj*], [*DifAlgAritm*] e [*interpretación*] constituyeron esta primera familia, en la que la intencionalidad está dada en la medida que los episodios correspondientes se hace un estudio de algún objeto particular o general del Álgebra con el objetivo de identificar rasgos característicos del Álgebra, de sus objetos, o de sus formas asociadas de pensamiento.

Es relevante, hacer un reconocimiento particular al segundo código [*DifAlgAritm*], pues la caracterización del Álgebra no fue propuesta, solamente, desde una mirada histórica a lo que se reconoce como algebraico sino que la mayoría del tiempo se contrastó con la Historia de la aritmética tratando de esclarecer de qué se ocupa cada una de estas dos ramas de la matemática. Los otros dos códigos permitieron agrupar todos aquellos episodios de clase en los que se estudiaba un objeto matemático, un proceso o una combinación de los dos; un estudio que podía ser genérico (un discurso sobre alguna consulta realizada sobre algún apartado histórico relacionado con el Álgebra) o un estudio matemático de esa obra (con las Matemáticas actuales) en el que se pedía interpretar una determinada forma de proceder.

Es posible pensar en una correspondencia directa de esta familia de códigos con la intencionalidad teórica "modificación de las visiones de los objetos matemáticos" dado que el estudio propuesto pretende la "reflexión sobre la naturaleza de los objetos aritméticos y algebraicos" (Mora, 2011) y se considera que una reflexión tal posibilita una ampliación y profundización en la comprensión de los objetos y procesos asociados al Álgebra. Del mismo modo y de acuerdo con Guacaneme (2011) el estudio de la HM puede generar una comprensión de la evolución de los objetos matemáticos y sus correspondientes cambios en la naturaleza y significados, (las ecuaciones y su carácter de herramienta para resolver problemas y las ecuaciones como objeto de estudio del Álgebra), las dificultades relativas de un concepto matemático. Todo lo anterior contribuye a profundizar en el significado de conceptos que proponen Fauvel & Van Maanen (2000).

De este modo, las evidencias relacionadas con la intencionalidad denominada *caracterizar el Álgebra desde la Historia*, podrían dar cuenta de un intento por lograr una modificación de las visiones sobre los objetos matemáticos, sin embargo no es posible asegurar que esas visiones se hayan modificado pues no se cuenta con un análisis de tipo longitudinal. Es por ello que dentro de todo el estudio no se hace referencia a la modificación sino a un estudio que permitía caracterizar el álgebra, sus objetos y sus procesos.

Si bien podríamos aceptar que un estudio del Álgebra desde la Historia como el realizado en el curso debería ampliar, por lo menos, el conocimiento erudito que sobre el Álgebra tenían los profesores en formación, consideramos atrevido establecer una relación directa entre este hecho y una modificación en la visión de los objetos y aún más una modificación que pueda llegar a tener alguna incidencia en sus futuras prácticas profesionales. Lo anterior puede ser objeto de estudio de un proyecto mucho más ambicioso, en el que se haga un estudio longitudinal que incluya el análisis del proceso de formación y la puesta en juego de los conocimientos en la práctica.

***Acerca de la modificación de la visión de las Matemáticas y la actividad matemática***

Al igual que en el apartado inmediatamente anterior, se comienza aclarando que no es posible hablar de la modificación en la visión de los que son las Matemáticas o la actividad matemática, se habla aquí de la intencionalidad de la profesora por generar la reflexión sobre la naturaleza de las Matemáticas y su actividad.

De este modo, es posible decir que en el curso las reflexiones usaban la HM para generar cuestionamientos sobre la matemática como una construcción humana, sobre los procesos de construcción y diferentes estatus de los objetos matemáticos y sobre las implicaciones que estos dos hechos podrían tener en el aula de Matemáticas. Lo anterior está en concordancia con los planteamientos de Fauvel y Van Maanen (2000) ya que la HM se usa con la intención de reconocer las Matemáticas como un proceso creativo, como un esfuerzo humano que parte de otras actividades humanas; al mismo tiempo y desde un punto de vista más general se usa la HM como fuente para la reflexión sobre la naturaleza de las Matemáticas (Anacona, 2003).

De nuevo se aclara que son bastantes las inquietudes que quedan abiertas pues no se posee evidencia que permita afirmar que frente a la intención se haya producido una modificación. Este es un hecho que puede hacer parte de estudios posteriores en los que sea posible identificar unas concepciones iniciales de lo que es la matemática y la actividad matemática para un grupo de profesores en formación, se haga una implementación para desarrollar PCK usando la HM y finalmente se identifiquen las concepciones después de la instrucción.

***Acerca de la promoción de competencias profesionales***

Como se mencionó en los análisis, se considera que esta intencionalidad da cuenta de habilidades generales de la docencia. Particularmente en el curso se identificó la intencionalidad por promover una lectura crítica de los documentos de referencia, y una toma de postura crítica y reflexiva a partir de lo leído.

A continuación se hará referencia a la intencionalidad "generar reflexiones didácticas" y posteriormente se discutirá posibles relaciones entre ésta y la promoción de competencias profesionales.

***Acerca de las reflexiones didácticas***

Así como lo afirman Radford y otros (2000)"cualquier uso de la Historia en la enseñanza de las Matemáticas requiere de un acompañamiento de la reflexión didáctica" (p. 152), en el curso analizado se identificaron importantes episodios de clase en los que el conocimiento histórico, que sobre el Álgebra se había logrado, era puesto en juego por parte de la profesora (en la mayoría de las ocasiones) o por parte de los profesores en formación para referirse a asuntos de tipo didáctico tales como el currículo [*D His-D Curr*], el aula de clase a la que se enfrentaran los profesores en formación o el aula en la que se han formado como profesores [*D hisD Aula*] o la posibilidad de usar la HM para la elaboración de unidades didácticas [*Ins U Did*].

Los dos primeros códigos y sus respectivos episodios dan cuenta de lo propuesto por Fauvel& Van Maanen (2000) y Anacona (2003) para quienes la HM puede ser una fuente para ayudar a identificar pasos cruciales, dificultades y obstáculos en la evolución de un tema; Anacona además de la identificación de dificultades asegura que puede ser fuente para la comprensión de las mismas.

Del mismo modo, Anacona (2003) resalta que la inclusión de la HM puede ser fuente para brindar elementos en la elaboración curricular, hecho que fue evidente en la intencionalidad de la profesora, ya que:

- Toda la construcción sobre las CHA fue puesta en relación con las CCA.
- En varios episodios de clase la profesora pide una toma de postura frente a lo qué se entiende por Álgebra desde lo histórico y hace llamados a usar esas ideas para tomar decisiones de tipo curricular.
- Reflexionar sobre el qué del Álgebra se enseña y el para qué se enseña

En lo que respecta al diseño de actividades didácticas o al diseño de unidades didácticas, no fue posible ubicar evidencia de estos dos hechos, pues más allá de la invitación para hacer uso del conocimiento histórico para estos fines, en el curso no se presenta la oportunidad de poner en práctica ese conocimiento. De este modo, quedan las preguntas ¿Será que las reflexiones sobre vínculos entre conocimiento histórico del Álgebra, el currículo y la planeación de actividades puede repercutir en la práctica de un profesor en formación o de un profesor?, ¿Cómo repercute?, ¿Cuáles son los beneficios en los procesos de enseñanza y aprendizaje?, entre otras.

Estas intenciones con las que se usa la HM, son relevantes en la medida que contribuyen al desarrollo del PCK, pues de acuerdo con Grossman (1990) este conocimiento se apoya en:

a. Conocimiento y creencias sobre los propósitos de la enseñanza de una disciplina (o tema) en diferentes grados: reflexiones que se ven reflejadas en los cuestionamientos que hace la profesora sobre el qué enseñar del Álgebra en determinados grados de escolaridad.

b. Conocimiento de la comprensión, concepciones, y aproximaciones erróneas a un tema particular de una disciplina: este conocimiento fue abordado en aquellas reflexiones que pretendían la comparación de los desarrollos históricos con los que se presentan en el aula. Así mismo, en el estudio de las CHA y las concepciones curriculares constituyen evidencia del estudio de temas relacionados con este conocimiento.

c. Conocimiento sobre los materiales disponibles para la enseñanza de un tema, así como la ubicación curricular del tema: las CHA y su contraste con las concepciones curriculares fueron un tema que ocupó un segmento importante del curso.

Estos 3 hechos dan cuenta de la intencionalidad clara, aunque quizá no explícita, para desarrollar esa especial amalgama entre el conocimiento disciplinar y el pedagógico (Shulman, 2001), es decir la intencionalidad por desarrollar el PCK.

No quiere decir lo anterior que solo la intencionalidad "generar reflexiones didácticas" estuviera enfocada en este tipo de conocimiento, más bien podría pensarse que las demás intencionalidades podrían constituirse y efectivamente se constituyeron en materia prima para poder participar en discusiones de tipo didáctico en las que se hizo reflexiones que trascendían el conocimiento disciplinar (caracterización histórica de objetos algebraicos) y el conocimiento profesional o pedagógico (promoción de competencias profesionales).

Ahora bien, se considera que la intencionalidad descrita en este apartado no hace parte de la intencionalidad *promoción de competencias profesionales* ya que la definición que hace Guacaneme (2011) no precisa cuáles pueden ser las aptitudes y actitudes hacia la docencia y en los ejemplos presentados por el autor se centra la atención en habilidades que no son propias de un profesor de Matemáticas sino que atienden a asuntos generales de la profesión como las habilidades de lectura y escritura. De acuerdo a lo anterior y planteando la discusión más que asumiendo una postura definitiva, podría optarse por dos caminos:

a. El primero de ellos que contempla la intencionalidad "generar reflexiones didácticas" como un complemento a la intencionalidad "promoción de competencias profesionales" y por tanto es necesario extender la idea de competencia propuesta por el autor. En este caso, consideramos que la propuesta de Rico (2004) podría enriquecer y sobre todo puntualizar cuáles serían esas habilidades (aptitudes y actitudes) de los profesores y particularmente de los profesores de Matemáticas. Evidencia de esta potencialidad de la propuesta de Rico ha sido señalada en los vínculos presentados en el análisis de los datos.

b. El segundo, un poco más radical y que se acerca más a lo presentado en el presente trabajo, contempla que la intencionalidad “promoción de competencias profesionales” se reserve para los asuntos de tipo pedagógico, es decir las habilidades profesionales que no requieren necesariamente de la existencia de un objeto matemático; por su parte la intencionalidad “generar reflexiones didácticas” estaría reservada para los asuntos que además de una habilidad profesional requieran la existencia y el estudio de un objeto matemático.

Para finalizar este apartado, se resume en la ilustración 12 el sistema de categorías propuesto y se pone en relación directa con la propuesta de Guacaneme (2011). La familia de códigos “generar reflexiones didácticas” aparece apartada de las demás por las razones expuestas anteriormente. Consideramos que los códigos identificados en el presente trabajo pueden ser un aporte para precisar, desde la práctica desarrollada en el curso, las intencionalidades propuestas teóricamente

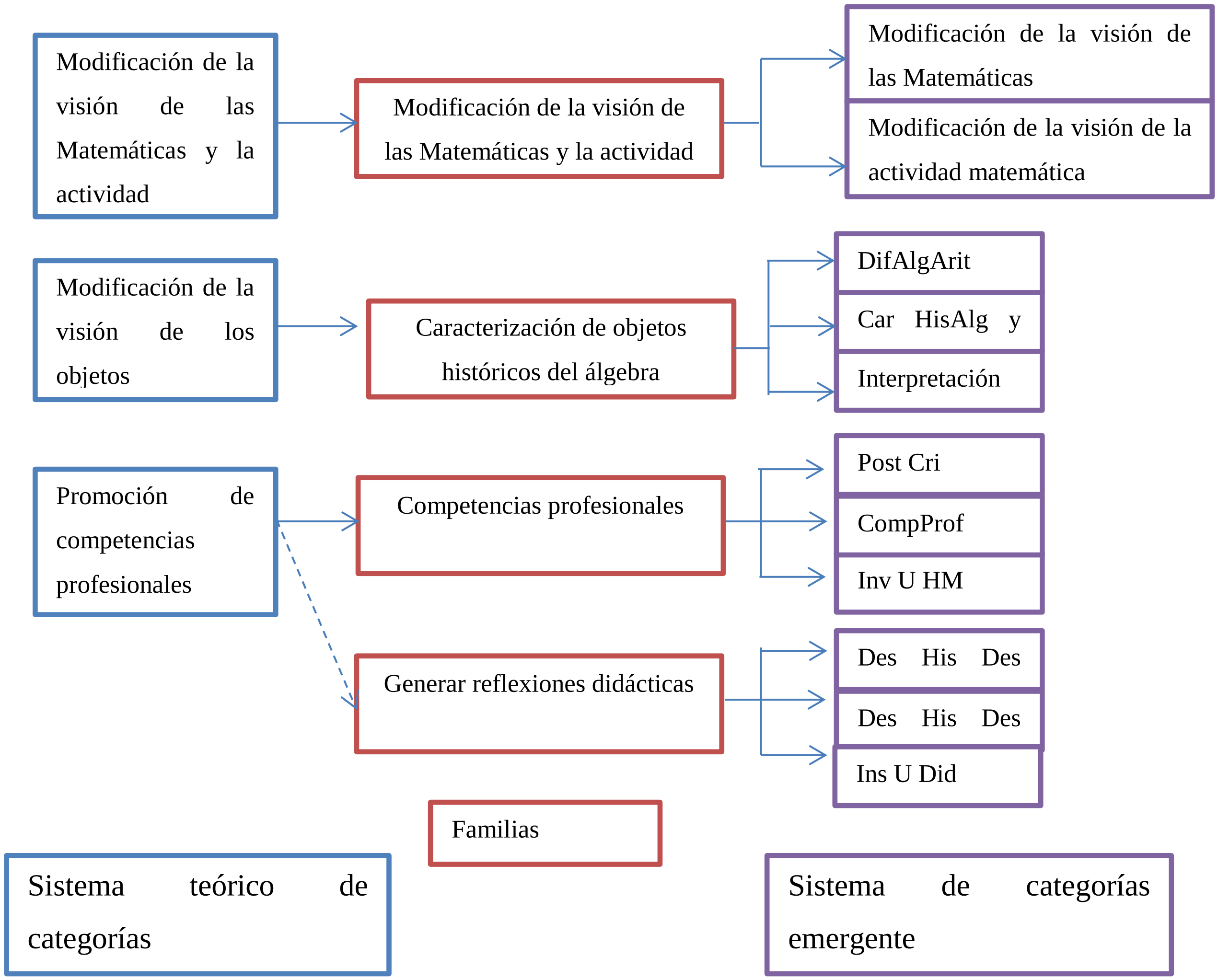



ILUSTRACIÓN 13. COMPARACIÓN Y APORTES ENTRE SISTEMAS DE CATEGORÍAS TEÓRICO Y EMERGENTE

### 4.2.3 ¿UNA APROXIMACIÓN A CÓMO PROMOVER EL ESTUDIO DE LA HM EN LA FIPM?

Si bien dar cuenta de cómo promover el estudio de la HM en la FIPM excede los límites del trabajo e inicialmente no se tenía como un objetivo de indagación, se considera que a partir del estudio de las intencionalidades puestas en juego al usar al HM, es posible identificar en el desarrollo del curso algunas generalidades sobre el proceso seguido en el estudio de la HM, los vínculos establecidos entre los diferentes momentos de estudio y los medios usados en el curso para dicho estudio.

De este modo, se puede decir que en el curso es posible identificar cuatro grandes momentos de estudio entrelazados de forma progresiva. Tres de ellos que se realizaron de forma efectiva a lo largo del curso y el cuarto de ellos propuesto más no desarrollado.

El primero de ellos se enfocó en la caracterización de los objetos y procesos del Álgebra a partir del estudio de fuentes de tipo didáctico. Este momento se caracterizó por la construcción progresiva de las Concepciones Históricas del Álgebra (CHA) identificando en algunos momentos históricos los objetos de estudio particulares del Álgebra. Este estudio se hizo a partir de la exposición, por parte de los profesores en formación, de algunos documentos de referencia (ver apartado 4.2.1), las preguntas y precisiones que hacia la profesora en el desarrollo de las exposiciones y finalmente con una tarea en la que se solicitaba a los estudiantes hacer una comparación de las diferentes posturas de los autores consultados frente a los objetos de estudio del Álgebra.

El segundo momento que se desarrolló a la par con el primero y continuó a lo largo de todo el curso, tuvo que ver con el estudio comparativo de los objetos y procesos que estudia el Álgebra con aquellos que estudia la aritmética. Al igual que en el momento 1, la estrategia metodológica de la clase estaba apoyada en exposiciones, discusiones y talleres; pero a diferencia del caso anterior no hubo un espacio de la clase exclusivo para desarrollar el estudio comparativo sino que a medida que la profesora identificaba espacios de la clase en los que la discusión era necesaria cuestionaba a los estudiantes sobre la naturaleza algebraica o aritmética de algún objeto o proceso. Este estudio culminó con una postura de la profesora, seguida de algunos estudiantes, en la que los objetos en especial el número, puede ser un objeto tanto algebraico como aritmético dependiendo del tipo de tratamiento que se haga del mismo.

Un tercer momento de estudio, contempla otro estudio comparativo pero ahora entre las CHA y las concepciones curriculares del Álgebra (CCA). En este caso la estrategia metodológica se enfocó en la lectura interpretativa del texto de Usiskin (1988) en el cual se proponen algunas CCA y en las clases a partir del trabajo grupal, establecer un paralelo con las CHA. Luego de dos sesiones de clase se consolida el comparativo a través de una socialización en la que la profesora actúa como mediadora y va cuestionando las afirmaciones de los estudiantes.

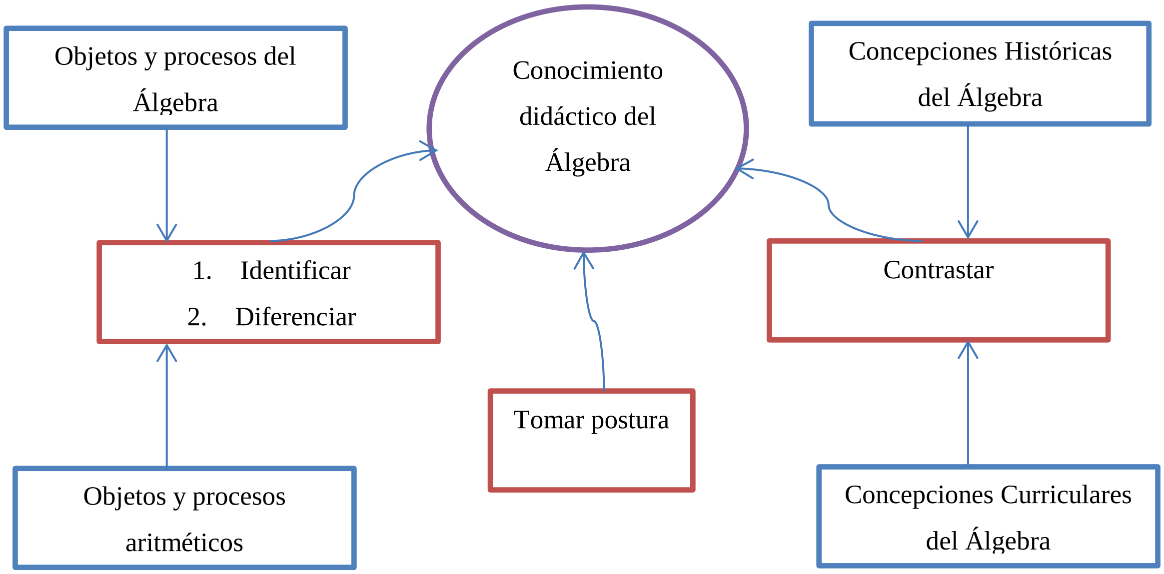



ILUSTRACIÓN 14. MOMENTOS DE ESTUDIO DE LA HM EN EL CURSO

Se considera que estos tres momentos (ilustración 14) dan cuenta de la forma como se propuso el estudio de la HM en el curso analizado y dadas las características e intencionalidades identificadas en todo el proceso, se puede decir que en el curso no solamente se pretende hacer un estudio de la Historia del Álgebra sino que además de esto, el estudio se enfoca en el desarrollo del conocimiento didáctico del Álgebra. Este hecho, como se puso de manifiesto en el apartado 4.2.2 permite que los profesores en formación participen en asuntos que no recaen directamente en las Matemáticas ni en la HM sino que participan en discusiones *acerca de las Matemáticas* y *acerca de la HM*. Podría hablarse de un metaconocimiento que se pretende desarrollar sobre estos dos aspectos.

Un cuarto momento que en el curso no fue abordado por cuestiones de tiempos curriculares, tenía que ver con el estudio de propuestas de enseñanza para los objetos algebraicos caracterizados. Poder desarrollar esta parte del curso en una próxima intervención sería deseable para observar las relaciones que pueden identificarse entre la HM y propuestas particulares de enseñanza.

Un hecho que no permite afirmar con seguridad que este metaconocimiento se desarrolló en los profesores en formación, es que en su mayoría los asuntos de tipo didáctico fueron introducidos por la profesora y aunque los estudiantes participaban en las discusiones no tomaban una postura frente a este tipo de asuntos (no quiere decir esto que no la tuvieran).

Quizá para próximas aplicaciones del curso sería deseable que desde el inicio del curso se propongan unas preguntas que orienten la discusión y que dichas preguntas tengan un carácter relacional que vincule la Historia del Álgebra, el Álgebra y la didáctica del Álgebra.

Para finalizar hay que decir que este curso es la segunda vez que se dicta, y como ya se mencionó, las declaraciones son en su mayoría por parte de la profesora, este es un hecho que puede deberse posiblemente a que las tareas no han sido diseñadas de modo que la participación de los estudiantes sea relevante y vaya más allá de relatos históricos y de lo declarativo. En ese sentido, se deja la propuesta abierta de que se pudieran hacer requerimientos a los estudiantes sobre poner en juego su conocimiento histórico de manera explícita frente a actividades de reflexión didáctica y curricular, organización didáctica y curricular, además, de realizar preguntas sobre el papel que juega la Historia en el conocimiento profesional del profesor de Matemáticas, entre otros asuntos, que permitan hacer explícito en los estudiantes, sus creencias y concepciones sobre estas relaciones. Quizá esto podría ser insumo para investigaciones afines posteriores.

Además de lo anterior, también hay que decir que la experiencia que los estudiantes han tenido en el estudio de la HM es escasa, pues es uno de los primeros cursos en su formación en el que se abordan las temáticas desde esa perspectiva, que más allá de estudiar las Matemáticas en la Historia aborda la HM desde los puntos de vista descritos anteriormente.

## 4.3 ACERCA DE LA APROXIMACIÓN METODOLÓGICA

A continuación se resalta en primer lugar algunas tareas desarrolladas que se consideran necesarias mencionar por su contribución al desarrollo del trabajo. Posteriormente se discuten aspectos relativos a la pertinencia de los instrumentos y técnicas usadas, la validez y confiabilidad de los análisis y finalmente sobre las posibilidades de reproductibilidad del estudio presentado.

En primer lugar, se considera que los espacios de trabajo individual, en equipo local y en equipo global de investigación posibilitaron lo que se denomina una mirada común al conjunto de registros, generar discusiones que permitieron la consolidación de los instrumentos de análisis de los registros, establecer discusiones sobre los objetos de estudio del Álgebra y de la Aritmética y en general, el aporte de los diversos puntos de vista hacia al desarrollo de la investigación permitió formular hipótesis de trabajo que se fueron consolidando y que se reflejan en los resultados que se han presentado. Del mismo modo, el apoyo que los equipos brindaron en la aclaración de dudas metódicas o del uso del software constituye un aporte que se considera necesario resaltar.

El segundo aspecto que se resalta es el uso del Software ATLAS ti. como instrumento de análisis en dos momentos:

a. En la codificación de las descripciones que se elaboraron de los episodios de clase, pues ésta permitió identificar dentro de todos los episodios de clase en los que intervenía la HM aquellos en los que intervenía de forma particular la Historia del Álgebra.
b. A partir del hecho anterior y después de observar la necesidad de realizar trascripciones literales de lo sucedido en clase, se consolidó el conjunto de datos y sobre ellos se realizó una nueva codificación. Además de esta nueva codificación el software nos permitió establecer relaciones entre códigos, consolidando familias de códigos o supracategorías y a partir de estas familias establecer las redes presentadas.

   Estas redes constituyeron un apoyo invaluable en el análisis pues permitían corroborar o refutar las ideas que nosotros como investigadores nos hacíamos desde los datos y desde los referentes teóricos y que involucraban una mirada conjunta a distintos sistemas de categorías.

Ahora bien, en cuanto a los instrumentos usados hay que decir que estos fueron emergentes del proceso de investigación realizado y como se mencionó al inicio del capítulo 3, se iban ajustando de acuerdo a las necesidades que exigían los registros y a las discusiones teóricas que se daban en los equipos de trabajo. Sin embargo, aclaramos que los asesores todo el tiempo, hacían el llamado a no viciar los registros y los datos al ir sobre ellos con una mirada netamente teórica sino que se estuviera abierto a hallar nuevos asuntos que posiblemente no se hubieran reportado en la literatura; este hecho posibilitó el hallazgo y propuesta de los sistemas de categorías reportados que si bien tienen coincidencias con la literatura, también postulan la existencia de otras formas de usar la HM en la FIPM y una forma de organizar la Historia del Álgebra.

De otro lado, se considera que el uso del video como técnica principal para la recolección de la información constituyó una fuente de registros que permitió una mirada general sobre el uso de la HM en el curso analizado. Sin embargo, se considera necesario acompañar este tipo de registro con registros de audio enfocado en los estudiantes, especialmente en las sesiones de trabajos grupales, pues en ocasiones el ruido o la intervención simultánea de los estudiantes no permitían escuchar con claridad.

El uso de los videos, las descripciones de la clase, las trascripciones, el programa del curso, las discusiones en equipos de investigación, los referentes teóricos usados, la asistencia a eventos como participantes y como ponentes, entre otras fuentes de información constituyeron la estrategia de triangulación, estrategia que aunque no aparece titulada en ningún apartado del trabajo, fue la que permitió establecer relaciones entre códigos, entre familias de códigos y entre sistemas de categorías pues a medida que se avanzaba en el análisis tanto de los registros como de los datos, era necesario recurrir a dichas fuentes para poder dar validez a los resultados que se hallaban parcialmente.

Aunque se reconoce que los resultados presentados constituyen un elemento importante para caracterizar el papel de la HM en la FIPM, se es consciente de que dichos resultados están enmarcados dentro de una propuesta particular de formación inicial de profesores, con un grupo particular de estudiantes y con una profesora con algunas ideas particulares sobre el conocimiento que deben desarrollar los estudiantes. Estas condiciones hacen que la validez de los resultados está atada a estas condiciones particulares. Sin embargo, se considera que la investigación sobre el uso de la HM en la FIPM, particularmente los usos que intenten promover el PCK, es necesaria para documentar el potencial que la HM puede tener tanto en la formación inicial, así como los impactos tanto positivos como a mejorar que se puedan dar en la práctica profesional del profesor de Matemáticas.

Para finalizar, el hecho de no haber encontrado un antecedente que diera cuenta del tratamiento de la información en un trabajo como éste, posibilitó que los métodos emergentes e inductivos usados dieran lugar a nuevos hallazgos como los presentados que se constituyen en un aporte a la naciente línea de investigación con resultados que han sido demandados por los estudios prescriptivos que fundamentan este trabajo.

## 4.4 ALGUNAS REFLEXIONES SOBRE EL DESARROLLO DE LA ACTITUD INVESTIGATIVA[23]

Si bien se considera que todo lo dicho hasta el momento da cuenta de los avances que fueron alcanzados con el ejercicio investigativo, en este apartado se pretende puntualizar cuáles fueron los aportes para la formación de los autores del trabajo como investigadores y como profesores de Matemáticas.

En primer lugar, la posibilidad de indagar en el campo de la formación profesional del profesor de Matemáticas ha permitido reconocer un conjunto de inquietudes latentes en el campo de la Educación del Profesor de Matemáticas referidas a lo que debería conocer un profesor. Particularmente se profundizó en inquietudes relacionadas con el potencial que tiene la HM para el desarrollo del conocimiento didáctico del contenido.

El desarrollo del trabajo, enmarcado en este campo de investigación, ha sido un buen pretexto para ser reflexivo frente a la profesión docente y por tanto, frente a la evaluación del desempeño propio. En ese sentido, a pesar que la labor de los autores se desarrolla en las aulas de secundaria, no se siente que la formación de profesores sea un campo de investigación ajeno, pues el pensar en el conocimiento profesional del profesor de Matemáticas enriquece, al menos, el panorama de formación propio y genera preguntas y expectativas sobre la formación continuada.

[23]*Un deseo realizado de actuar libre, autónoma y metódicamente frente a inquietudes respecto de fenómenos o situaciones que se considera afectan un cierto contexto o una cierta comunidad, con el ánimo de proponer alguna respuesta, pero además, que son reconocidas y legitimadas (las inquietudes, los métodos y las respuestas) en y por las comunidades académicas cuyos objetos de indagación corresponden a los fenómenos o situaciones y a las inquietudes que desencadenan el deseo de investigar. (Rodríguez y otros 2012)*

En segundo lugar, el aprendizaje alcanzado en cuanto a la Historia del Álgebra, el conocimiento profesional del profesor, y el uso de la primera para el desarrollo del segundo ha sido y será un componente importante de la formación del profesor de Matemáticas, pues más allá de la erudición sobre estos aspectos, estos fueron puestos en juego para el desarrollo metodológico del trabajo y seguramente seguirán siendo parte de las reflexiones que como docentes de la básica se puedan hacer sobre el quehacer docente. Cabe anotar, que la clasificación que se hizo del álgebra sirve de herramienta para plantear en el aula, organizaciones curriculares alrededor de esta temática. Del mismo modo, existe en la Historia del Álgebra, muchos episodios que podrían servir para configurar unidades didácticas y que permitirían trabajar desarrollos del pensamiento matemático en los estudiantes. Y en términos generales, se está convencido por parte de los autores de que el tratamiento del Álgebra desde la Historia posibilita una nueva mirada que incluye varios de los aspectos que prescribe la teoría sobre los beneficios de la HM en el CPPM.

Junto a lo anterior, se reconoce que las habilidades de lectura y escritura se han visto favorecidas por la formación recibida a lo largo de la maestría y particularmente con el ejercicio de escritura del presente trabajo, pues inicialmente fue complejo poder dar cuenta de los hallazgos que se realizaban. Una evidencia del desarrollo de dichas habilidades y la inserción de ideas dentro de la comunidad de investigación, fue la presentación de la ponencia titulada “Intenciones de uso de la Historia de las Matemáticas en un curso de formación inicial de profesores de Matemáticas. Algunos aportes teóricos y metodológicos” en el décimo tercer Encuentro Colombiano de Matemática Educativa (ECME).

Otro aspecto que contribuyó en gran medida a la formación de los autores en investigación fue la participación en la construcción colectiva de instrumentos para el análisis de los registros de información, así como en la construcción y refinamiento de los sistemas de categorías usados en el presente trabajo. Estos dos aspectos permitieron comprender la complejidad que abarca ser fiel a lo sucedido en la realidad estudiada, ser sistemático en el tratamiento de la información y sobre todo poder sustentar las afirmaciones a partir de la triangulación de los datos disponibles.

Finalmente, se fortaleció la conciencia en los autores sobre la utilidad de este tipo de estudios para evaluar propuestas de intervención en el aula de formación de profesores de

Matemáticas y sobre todo reflexionar de forma sistemática acerca de algunas acciones que se desarrollan al interior de la misma.

# 5. BIBLIOGRAFÍA


Acevedo de Manrique, M., & Falk de Lozada, M. (2000). Formación del Pensamiento Algebraico de los Docentes. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa, 3*(003), 245-264.

Anacona, M. (2003). La Historia de las Matemáticas en la Educación Matemática. *Revista EMA, Investigación e innovación en educación matemática., 8(1)*, 30-46.

Arcavi, A. (1991). The experience of history in mathematics education: Two benefits of using history. *For the Learning of Mathematics. An International Journal of Mathematics Education, 11*(2), 11.

Arcavi, A., & Bruckheimer, M. (2000). Mathematics and its History: An Educational Partnership. In V. Katz (Ed). In *Using History to Teach Mathematics: An International Perspective* (pp. 135-146). Washington: Mathematical Association of America.

Arcavi, A., & Isoda, M. (2007). Learnin to listen: from historical sourcesto classroom practice. *Springer Science*, 111-129.

Bkouche, R. (2000). sur la notion de perspective historique dans l´enseignement d´une science. *Represe* .

Blanco Álvarez, H. (2012). Estudio de las Actitudes Hacia una Postura Sociocultural y Política de la Educación Matemática en Maestros en Formación Inicial. *REDIMAT. Journal of Research in Mathematics Education, 1*(1), 57-78.

Boyé, A. (2003). ¿Francois Viète inventor del álgebra? *Actas Seminario Orotavade Historia de la Ciencia*, 259-376. (S. Toledo, Trad.) Fundación Canaria.

Cardeñoso , J., Flores , P., & Azcárate , P. (s.f.). El desarrollo profesional de los profesores de matemáticas como campo de investigación en educación matemática. En P.

Gómez, & L. Rico , *Iniciación a la investigación en didáctica de las matemáticas. Homenaje al profesor Mauricio Castro* (pág. 12). Granada, España: Universidad de Granada.

Charbonneau, L. (1996). From Euclid to Descartes: Algebra and its relation to Goemetry. En bednarz, & Kieran, *Approaches to algebra* (págs. 12-37). Kluwer academic publishers.

Chevallard, T. (1991). *La transposición didáctica. Del saber sabio al saber enseñado.* Buenos Aires: Ed. Aique, 1997. Nueva edición ampliada de la original de 1985.

Davila, G. (Mayo de 2003). El Desarrollo del Álgebra Moderna. Parte III: El Surgimiento del Álgebra Abastracta. *Apuntes de Historia de las Matemáticas, 2*(2).

Esquinas Sancho, A. M. (2008). *Dificultades de Aprendizaje del Lenguaje Algebraico: Del símbolo a la formalización algebraica: Aplicación a la práctica docente. Tésis Doctoral*. Madrid: Universidad Complutense de Madrid.

Fauvel, J., & van Maamen, J. (Eds.). (2002). *History in Mathematics Education. The ICMI Study*. New York/Boston/Dordrecht/London/Moscow: Kluver Academic Publishers.

Fauvel, J., & van Maanen, J. (1997). The role of the history of mathematics in the teaching and learning of mathematics: discussion document for an ICMI study (1997-2000). *Mathematics in School, 26*(3), 10-11.

Fauvel, J., & Van Maanen, J. (2000). Historical support for particular subjects. En *History in mathematics education: the ICMI Study* (págs. 241-243). Kluwer: Dordrecht.

Frege, G. (1972). *Fundamentos de la Aritmética.* Barcelona: Editorial Laia.

Furinghetti, F. (2007). Teacher education through the history of mathematics. *Educational Studies in Mathematics, 66*(2), 131-143.

Furinghetti, F., & Pehkonen, E. (2002). Rethinking characterizations of beliefs. En G. Leader, E. Pehkonen, & G. Torner (Edits.), *Beliefs: A hidden Variable in Mathematics Education* (págs. 39-57). suiza : Kluwer Academic Publishers.

Gallardo, A., & Torres, O. (2005). El Álgebra aritmética de George Peacock: un puente entre la Aritmética y el Álgebra Simbólica. *CINVESTAV*.

Grattan-Guinness, I. (2004a). History or Heritage? An Important Distinction in Mathematics and for Mathematics Education. *American Mathematical Monthly, 111*(1), 1-12.

Grattan-Guinness, I. (2004b). The mathematics of the past: Distinguishing its history from our heritage. *Historia Matemática, 31*(2), 163–185.

Grossman, P. L. (1990). *The Making of a Teacher*. *Teacher Knowledge and Teacher Education.*New York: Columbia University.

Guacaneme, E. (2008). Una aproximación a la relación Historia de las Matematicas-conocimiento del profesor de Matemáticas. *Tercer enceuntro de programas de formación de profesores de matemáticas.* Bogotá.

Guacaneme, E. (2010). ¿Qué tipo de Historia de las Matemáticas debe ser apropiada por un profesor? *Revista EDUCyT, 2*.

Guacaneme, E. (2011). La historia de las Matemáticas en la educación de un profesor: Razones e intenciones. *XIII Conferencia Interamericana de Educación Matemática – CIAEM.* Recife (Brasil), 26 al 30 de junio.

Gutiérrez, R. (2012). Embracing Nepantla: Rethinking "Knowledge" and its Use in Mathematics. *REDIMAT. Journal of Research in Mathematics Education, 1*(1), 29-56.

Jankvist, U. T. (2009). On empirical research in the field of using history in mathematics education. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa., 12(1)*, 67-101.

Jaworski, B., & Wood, T. (2008). The mathematics teacher educator as a developing professional. En *The international handbook of mathematics* (Vol. 4). Rotterdam, The Netherlands: Sense Publishers.

Jaworsky, B. (2008). Mathematics Teacher Educator Learning and Development. En B. Jaworsky, & T. Wood, *The Mathematics Teacher Educator as a Developing Professional* (págs. 1-13). Sense Publishers.

Kleiner, I. (2007). *A History of Abstract Álgebra.* Boston: Birkhäuser.

Llinares , S., & Krainer , K. (2006). Mathematics (student) teachers and taechers educator as learners. En A. Gutierrez, & P. Boero , *Handbook of research on the psychology of mathematics education: past, present and future* (págs. 429-459). Sense Publishers.

Mora, L. (2011). *Programa de Enseñanza y Aprendizaje de la Aritmética y el Álgebra.* Bogotá: Universidad Pedagógica Nacional.

Ochoviet, C. (2007). De la Resolución de Ecuaciones Polinómicas al Álgebra Abstracta: un Paseo Através de la Historia. *Revista digital Matemática, Educación e Internet, 8*(1), 1-19.

Oostra, A. (2003). Acerca del Artículo On the Logic of Number, de Charles S. Peirce. *Boletín de Matemáticas, X*(1), 13-20.

Otte , M. (1979). The education and professional life of mathematics teachers. *Unesco* (págs. 107-133). Paris : Unesco .

Panagiotou, E. N. (2010). Using History to Teach Mathematics: The Case of Logarithms. *Science & Education, 20*(1), 1-35.

Pérez, J. H. (2002). La Aritmética según Gottlob Frege. Un ejemplo de matemáticas elementales. En *Memorias del XIII Encuentro de geometría y sus aplicaciones y I Encuentro de aritmética.* Bogotá D.C.: Universidad Pedagógica Nacional.

Radford, L., M, B., Bekken, O., Boero, P., Dorier, J., Katz, V., y otros. (2000). Historical formation and student understandig of mathematics. En *History in mathematics education. The ICMI study* (págs. 143-170).

Rico , L. (2004). Reflexiones sobre la formación inicial del profesor de matemáticas de secundaria. *Profesorado, revista de curriculum y formación del profesorado, 8*(1).

Rico , L. (2004). Reflexiones sobre la formación inicial del profesor de matemáticas de secundaria. *Profesorado, revista de currículum y formación del profesorado,, 8*(1).

Sánchez, M. (2011). A review of research trends in mathematics teacher education . *PNA*, 129-145.

Schubring, G., Cousquer, É., Fung, C., El Idrissi, A., Gispert, H., Torkil, H., y otros. (2000). History of mathematics for trainee teachers. In J. Fauvel & J. van Maanen (Eds.). En *History in mathematics education.The ICMI Study* (págs. 91-142). Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.

Sessa, C. (2005). *Iniciación al estudio didáctico del Álgebra. Orígenes y perspectivas.* Buenos Aires, Argentina: Libros del Zorzal.

Shulman, L. S. (1986a). Paradigms and research programs in the study of teaching. En M. W. (Ed.), *Handbook of research on teaching.* New York: MacMillan.

Shulman, L. S. (1986b). Those who understand: knowledge growth in teaching. *Educational Researcher, 15*(2), 4-14.

Shulman, L. S. (1987). Knowledge and Teaching. Foundations of the New Reform. *Harvard Educational Review, 57*(1), 1-22.

Shulman, L. S. (2001). Conocimiento y enseñanza. *Estudios Públicos, 83*, 163-196.

Shulman, S. L. (2005). Conocimiento y Enseñanza: Fundamentos de la nueva reforma. *PROFESORADO. Revista de curriculum y formación de profesorado, 9*(002), 1 -30.

Socas, M. M., Camacho, M., Palarea, M., & Hernández., J. (1989). *Iniciación al Álgebra.* Madrid, España: Editorial Síntesis.

Stacey , K. (2008). Mathematics for secondary teaching. En P. Sullivan, & T. Wood (Edits.), *The international handbook of mathematics teacher education* (Vol. 1, págs. 87-113). Sense Publishers .

Sullivan , P. (2008). Knowledge for teaching mathematics. An introduction. En P. Sullivan , & T. Wood, *Knowledge and beliefs in mathematics Teaching and Teaching development* (págs. 1-9). Sense Publishers.

Torres, L. A. (2011). Fenomenología histórica del concepto de ecuación y potencialidades de su uso en la escuela. *CIAEM. XIII CONFERENCIA INTERAMERICANA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA.*

Tzanakis, C., Arcavi, A., de Sá, C., Isoda, M., Niss, M., & al, e. (2000). Integrating history of mathematics in the classroom: an analytic survey. In J. Fauvel, & J. van Maamen (Eds.), *History in mathematics education. The ICMI Study* (pp. 201-240). Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.

Winicki, G. (2000). The Analysis of Regula Falsi as an Instance for Professional Development of Elementary School Teachers. In V. Katz (Ed.), *Using History to Teach Mathematics: An International Perspective* (pp. 129-133). Washington: The Mathematical Association of America.