PRODUCCION DE SENTIDOS PARA LOS NUMEROS ENTEROS POR ALUMNOS DE PRIMARIA AL RESOLVER PROBLEMAS ELEMENTALES

José Luis Mejía Rodríguez y Aurora Gallardo Cabello
Centro de Investigación y de Estudios Avanzados del IPN (México)
jose.luc.am@hotmail.com, agallardo@cinvestav.mx

Palabras clave: números enteros, educación primaria, procesos cognitivos, orden, adición y sustracción

Key words: integers, elementary school, cognitive processes, order, addition and subtraction

RESUMEN: En este trabajo se describen y analizan los procesos cognitivos de los estudiantes de cuarto grado de primaria en la resolución de tareas con números enteros, previa instrucción. Es la primera parte de una investigación cuyo objetivo es plantear la posibilidad de la inclusión de algunos temas de números enteros ausentes en los programas de matemáticas de educación primaria, mediante el estudio de cómo los estudiantes comprenden situaciones relacionadas con los enteros negativos a través de la implementación de una ruta didáctica. Algunos resultados indican que los alumnos intentan dar sentido a los números enteros, basándose en su conocimiento de los números naturales.

ABSTRACT: This paper describes and analyzes the cognitive processes of students in fourth grade in solving tasks with integers, subject any instructions. This is the first part of a research aimed to raise the possibility of including some issues of missing integers in mathematics programs of primary education by studying how students include situations involving negative integers. Some results of this study indicate that students try to make sense of integers, based on their knowledge of natural numbers.

INTRODUCCION

Las diversas investigaciones realizadas para explicar las dificultades encontradas por estudiantes de secundaria en la conceptualización y operatividad de los números negativos indican que este problema sigue vigente. Algunos de estos trabajos, de corte epistemológico, indican la importancia de considerar lecciones de la historia en relación a la evolución de los números en tanto concepto matemático legítimo.

Los avances logrados en el razonamiento con números enteros por parte de niños pequeños de entre 6 y10 años de edad (Bishop, Lamb, Philipp, Whitacre, Schappelle & Lewis, 2014 y Bofferding, 2014), así como algunos resultados favorables alcanzados en los estudios del álgebra temprana (early algebra) en temas como el razonamiento proporcional y los procesos de generalización (Butto y Rojano, 2004) condujeron a plantearnos en esta investigación los siguientes objetivos:

1. Analizar los procesos cognitivos de los niños (de cuarto grado de primaria, 9-10 años) acerca de los números enteros antes de llevar a cabo un periodo de instrucción.
2. Conocer los obstáculos y las vías de acceso a la comprensión de los números enteros después de enseñanza.
3. Plantear las posibilidades de la inserción del tema de los números enteros en el programa de matemáticas de educación primaria.

En este trabajo damos cuenta del primer objetivo, describiendo y analizando los procesos cognitivos de los niños de cuarto grado de primaria, antes de alguna instrucción en el tema de los números negativos. El análisis de las producciones de los alumnos considera la cuestión histórica-epistemológica en la aceptación de los negativos.

ANTECEDENTES DE LA INVESTIGACION

Entre las investigaciones que ponen de manifiesto las dificultades enfrentadas por estudiantes de educación secundaria al resolver tareas con números negativos destacan las de Gallardo y Mejía (2015), Gallardo (2002) y Vlassis (2001). Gallardo (2002) realiza un estudio histórico-epistemológico para estudiar la extensión del dominio numérico de los naturales enteros por parte de los estudiantes de 12-13 años de edad. El estudio histórico pone de manifiesto cuatro niveles de aceptación de los números negativos antes de considerarlos legítimamente como enteros: sustraendo, número relativo, número aislado y número formal.

El estudio de Gallardo (2002) fue complementado por Gallardo y Mejía (2015) al enfocar el problema desde la noción de obstáculo epistemológico (Brousseau, 1983). En este estudio se encontró que las dificultades de los estudiantes al enfrentar problemas con números negativos son de origen epistemológico, dadas las características de estos conflictos tales como su persistencia y las semejanzas con los que presentaron los matemáticos históricos en la conceptualización de los negativos. Por su parte, Vlassis (2001) diseñó un experimento de enseñanza en la resolución de ecuaciones lineales. La autora señala que la presencia de los números negativos en las ecuaciones representa un corte con el conocimiento aritmético el cual no puede superarse por los alumnos, sino a través de un razonamiento formal en los aspectos semánticos y sintácticos. Los alumnos de este experimento pudieron superar los obstáculos surgidos por la presencia de las dos ocurrencias de la incógnita en las ecuaciones lineales, a través del modelo de la balanza, pero no lo hicieron cuando las ecuaciones contenían números negativos.

Estudios recientes como los de Bofferding (2014) y Bishop et al (2014) también exhiben los obstáculos encontrados por niños de educación primaria (edades entre 6-10 años). Sin embargo en estas investigaciones se pone de manifiesto el uso de pensamiento creativo de los alumnos para superar esas dificultades. Bofferding (2014) se propone estudiar si existe un cambio y en qué consiste, en los modelos mentales de valor y orden, y magnitudes dirigidas en los números enteros, por parte de los estudiantes de primaria después de una instrucción. En esta experiencia didáctica se formaron tres grupos, en el primero se hizo énfasis en la naturaleza unaria del “signo menos”, en el segundo, en su naturaleza “binaria” y, en el tercero se trata de una instrucción combinada. Los modelos mentales de la mayoría de los estudiantes en los diferentes grupos pasaron del inicial al sintético, e incluso, en algunos, al modelo formal, esto significa un avance en la comprensión de los negativos.

Por su parte, Bishop et al (2014) realizan un estudio de corte histórico-epistemológico en relación al rechazo de los números negativos y la forma en que estos fueron aceptados, por parte de los matemáticos del pasado. El estudio histórico conjuntamente con el análisis de las estrategias utilizadas por los niños de primaria, al resolver problemas numéricos con números enteros, puso de manifiesto semejanzas entre estos y los matemáticos de antaño, en la forma de conceptualizar dichos números. En particular, encontraron tres obstáculos: el número como magnitud (los números representaban cantidades de objetos), operaciones sin sentido (no se puede quitar más de lo que se tiene o no se puede quitar algo de la nada) y situaciones contra-intuitivas (la adición no puede disminuir la cantidad, la sustracción no puede aumentarla), y tres formas de pensamiento creativo funcionando como apoyo para superarlos: ideas basadas en el orden, pensamiento lógico/formal y la noción de magnitud. Según estos autores, la idea de magnitud funcionó a la vez como un obstáculo y como una idea creativa; al entenderse el número como cantidad de objetos, se dificultó comprender el negativo por parte algunos alumnos, sin embargo, a otros les ayudó a resolver algunas operaciones numéricas.

FUNDAMENTO TEORICO

Nos basamos en la perspectiva teórica de los Modelos Teóricos Locales (MTL) (Filloy, 1999). Según este autor los fenómenos de la matemática educativa deben observarse desde cuatro componentes interrelacionados: la competencia, los procesos cognitivos, la enseñanza y la comunicación. De acuerdo a Puig (2006) el carácter de modelo de los MTL, viene del hecho de que no pretende ser una teoría, sino un modelo teórico útil para describir, explicar y predecir esos fenómenos, pero no niega que estos puedan describirse, explicarse y predecirse de otra manera. Es local porque se elabora un modelo para estudiar los fenómenos que se producen en los procesos de enseñanza/aprendizaje de unos contenidos matemáticos determinados a alumnos específicos, y se pretende que sólo sea adecuado para estos.

Se explica la necesidad de interrelacionar los cuatro componentes mencionados anteriormente porque se pretende observar procesos de pensamiento (componente cognitivo) conjuntamente con el intercambio de mensajes (componente comunicativo) entre sujetos de diversos grados de competencia (componente formal) en el uso de Sistemas Matemáticos de Signos (SMS) empleados para crear los textos matemáticos (componente de enseñanza) pertinentes para el proceso didáctico (Filloy, 1999). En este estudio describiremos los procesos cognitivos de los alumnos al enfrentar situaciones con enteros, por lo cual debe precisarse el componente cognitivo. Definiremos los procesos cognitivos como “aquellas estructuras mentales del sujeto… que dan preferencia a distintos mecanismos de proceder, diferentes maneras de codificar y descodificar mensajes matemáticos…diferentes estrategias para resolver problemas” (Filloy, 1999, p. 5).

La noción de SMS para el estudio de los textos producidos por los alumnos no distingue entre los signos estrictamente matemáticos y otros tales como el lenguaje vernáculo. Lo crucial para los procesos de significación es considerar el sistema de signos tomados como un todo, lo que es de naturaleza matemática es el sistema y no los signos individualmente, porque es el sistema el responsable del significado de los textos. (Filloy, Puig, & Rojano, 2008). Los textos no deben identificarse con los textos escritos, “sino como el resultado de la lectura/transformación de un espacio textual cuya finalidad no es extraer un significado inherente al texto, sino producir sentido” (Talens y Company, 1984, p. 32).

El espacio textual, por su parte, puede considerarse como un sistema que impone una restricción semántica sobre la persona que lo lee. Las ideas de texto y espacio textual se relacionan con las de significado y sentido. Debe distinguirse entre el campo semántico del objeto matemático, esto es, el “significado”, donde cada palabra será la misma para todas las personas de un grupo social en una época histórica específica y el campo semántico personal del sujeto que produce “sentidos” que se convertirán en significados vía una interpretación afortunada del estudiante, respecto a la situación problemática planteada (Filloy et al, 2008).

EL METODO

Esta investigación es de tipo cualitativo. Se trata de una investigación preocupada por la precisión de los datos, sistemática, conducida por procedimientos rigurosos, aunque no estandarizados, para producir estudios válidos del mundo real (Taylor y Bogdan, 1990). La confianza en la investigación cualitativa se logra cuando métodos diferentes de recogida de datos producen en esencia los mismos resultados, utilizando métodos de contraste se reduce considerablemente las posibilidades de que los hallazgos sean un simple artífice del método (Cohen y Manion, 1990).

En esta investigación utilizamos dos métodos: el cuestionario y la entrevista en profundidad. Esta se considera flexible y dinámica, más que estructurada y estandarizada y se define como aquellos encuentros cara a cara entre el entrevistador y el sujeto dirigidos a la comprensión de la perspectiva que tiene éste respecto de la situación. En este tipo de entrevista el mismo entrevistador se convierte en el instrumento de la investigación y el protocolo de entrevista es sólo una guía flexible (Taylor y Bogdan, 1990).

Para analizar las producciones de los niños de 4º grado de primaria, consideramos los “sentidos de uso” del número negativo (Gallardo, 2002):

a) Número sustractivo: la noción de cantidad se subordina a la de magnitud, por ejemplo, en la sustracción a – b, donde a y b € N, y siempre a > b.

b) Número relativo; surge la idea de cantidades opuestas en el dominio discreto y de simetría en el dominio continuo.

c) Número aislado: se trata de la aceptación del negativo como el resultado de una ecuación o la solución de un problema.

d) Número formal: es la noción formal del número negativo, nuestros enteros de hoy.

EL ESTUDIO EMPIRICO

Los sujetos de estudio pertenecen a un grupo de cuarto grado de primaria de una escuela pública de México, D.F. compuesto por 16 niños de entre 8-9 años de edad. Se aplicó un cuestionario para conocer sus ideas acerca de los números negativos, previa instrucción. El cuestionario consta de 35 ítems pertenecientes a dos temas en general: valor y orden y operaciones con números enteros. Estos temas se desglosan en varios subtemas: límite del dominio numérico, secuencias numéricas, recta numérica, comparación de números, problemas de enunciado verbal y operaciones de adición y sustracción de enteros.

El análisis de las producciones de los alumnos en el cuestionario permitió seleccionar un alumno para la entrevista video-grabada, con duración aproximada de 50-60 minutos. El estudiante elegido es de un nivel bajo de desempeño académico. Esto se debe a que la ruta didáctica diseñada para llevar a cabo nuestro periodo de instrucción debía partir de los conocimientos que poseen los alumnos de menor rendimiento para asegurar así la inclusión de todos.

RESULTADOS DE LA PRIMERA FASE

A continuación presentamos en tablas algunos ítems representativos de cada uno de los temas con números enteros, así como las estrategias más utilizadas.

Valor y orden de números enteros

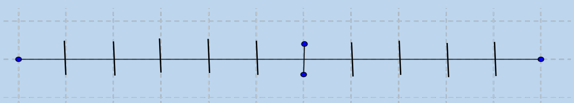
Nos interesa conocer el límite del dominio numérico de los alumnos y esperábamos encontrarnos el cero como límite. Como puede observarse en la tabla 1, hayamos con sorpresa que para varios alumnos el cero no es un número, por lo que su dominio numérico termina en el 1 como puede observarse en la tabla 1.

Tabla 1.

El límite del dominio numérico de los estudiantes	
Ítem	**Estrategias o respuestas más frecuentes**
1. Escribe el número más chico que conozcas: __________.	El 0 El 1
2. Empezando en 5, cuenta hacia atrás hasta donde sea posible.	Cinco, cuatro, tres, dos, uno, cero.
3. En cada inciso escribe los números que siguen. a) 12, 9, 6, 3, ___. b) 10, 8, 6, 4, ___, ___, ___. c) 5, 4, 3, 2, ___, ___, ___, ___.	Para el inciso a) escriben en el espacio faltante 0 ó 1. Para los otros incisos: -Llenar los espacios faltantes con ceros. -Dejar los espacios en blanco -Escribir una cantidad ascendente de ceros (Escriben uno, dos, tres… ceros).

Como se muestra en la tabla 2, respecto a los temas de orden y comparación nos encontramos que la mayoría de los alumnos ignoran el signo unario de los números, comparando los enteros como si fueran naturales. Asimismo, todos los estudiantes desconocen el orden de los enteros en la recta numérica, pero también es sorprendentes que ninguno de ellos coloca el cero en dicha recta. La respuestas correctas dadas al inciso d) puede deberse a que los números son iguales “en todo” y no al conocimiento del orden. Descubrimos respuestas correctas para todos los incisos de comparación, por parte de un alumno.

Tabla 2.

Orden y comparación en los enteros	
Ítem	**Estrategias y/o respuestas más frecuentes**
1. Para cada inciso subraya el número que sea más grande. Pon un signo = si las cantidades son iguales. a) 3 -7 b) -5 -15 c) 8 -8 d) -4 -4	Ignorar el signo unario: es mayor el que tiene mayor valor absoluto; son iguales si tienen el mismo valor absoluto. Responder correctamente al comparar dos números negativos iguales.
1. Escribe los números que faltan en la siguiente recta numérica.  1	Colocar correctamente los números a la derecha del 1. No colocar el cero a la izquierda del 1. Reflejar los naturales a la izquierda del 1. Dejar vacías las marcas. Repetir los números en forma decreciente.

Operaciones con números enteros

La primera operación de la tabla 3 resultó ser la más compleja para todos los estudiantes. Escribir una raya en el cuadrito vacío puede indicar que para ellos no existe el número pedido; escribir 1 o 0, se debe tal vez a la idea de que estos son los números -según su dominio numérico-, con los que menos se aumenta la cantidad. Estas respuestas, así como la de convertir la adición en sustracción muestran que para ellos esta operación es absurda. En cuanto a las otras adicciones, el hecho más destacado es la conversión de adición en sustracción de naturales, posiblemente debido a la presencia del "signo menos" (Número sustractivo). En cuanto a las sustracciones es notorio el obstáculo: "quitar más de lo que se tiene" o "quitar algo de nada".

Tabla 3.

Operaciones a través de expresiones numéricas	
Ítem	**Estrategias y/o respuestas más frecuentes**
Escribe en el cuadrito vacío el número que falta para que la operación sea correcta.	
$6 + \square = 4$	-Trazar una raya (-) sobre el cuadrito. -Dar como respuesta 0 o 1. -Trasformar la adición en sustracción.
$-11 + -6 = \square$ $-5 + 2 = \square$	-Ignorar los signos unarios y resolver como adición de naturales. -Restar los valores absolutos y escribir positivo o negativo el resultado.
$0 - 2 = \square$ $3 - 4 = \square$	-Resolución basada en una lectura de derecha a izquierda. -Resolución basada en la idea de "quitar todo lo que se puede". -Solución correcta para la primera sustracción.

Pretendíamos saber qué sucede cuando las operaciones se plantean a través de preguntas. Las estrategias mostradas en la tabla 4 confirman los procesos cognitivos exhibidos por los estudiantes al resolver operaciones numéricas. Sin embargo, en estos ítems hubo dos respuestas correctas (una por cada pregunta) motivadas tal vez por el lenguaje verbal, arribando así al negativo como número aislado.

Tabla 4.

Operaciones a través de preguntas abiertas	
Ítem	**Estrategias y/o respuestas más frecuentes**
¿Cuál es el número que sumado a 5 resulta 2?	-Convertir la adición en sustracción (5 – 3 = 2). -Restar ambos números. -Dar 0 como respuesta. -Sumar ambos números.
¿Cuánto es 0 menos 5?	-Lectura de derecha a izquierda. -Actuar según la idea "no se puede quitar más de lo que se tiene".

Planteamos problemas de enunciado verbal en contexto. Se muestran en la tabla 5 los correspondientes a los contextos “temperatura” y “nivel del mar”. Estos ítems fueron los que más dejaron sin resolver los estudiantes y también en los que ignoraron la instrucción, no planteando operación alguna para resolverlos. Sin embargo, un alumno usa negativos en su respuesta (número aislado).

Tabla 5.

Resolución de problemas de enunciado verbal	
Ítem	**Estrategias y/o respuestas más frecuentes**
Resuelve cada uno de los siguientes problemas. Escribe las operaciones que les dan solución.	
1-En una ciudad la temperatura se encontraba a 9 grados por la tarde, para la noche bajó 17 grados. ¿A qué temperatura se encontraba en la noche? 2-En una película de guerra, un submarino estaba a 30 metros bajo el nivel del mar y luego bajó 23 metros. ¿A qué profundidad estaba finalmente el submarino?	-Respuestas correctas utilizando números naturales. -Respuestas correctas e incorrectas el ámbito contextual. -No hay uso de negativos en las respuestas (excepto una).

COMENTARIOS FINALES

Los resultados del análisis de los procesos cognitivos de los niños de cuarto grado de primaria mostraron un desconocimiento total de este campo numérico, otorgando sentido a las tareas basándose en sus conocimientos de las propiedades de los naturales. Encontramos un estudiante competente en la resolución de diferentes situaciones usando números enteros. Los alumnos exhiben dos de los tres “sentidos de uso” del negativo, encontrados por Gallardo (2002) con alumnos de educación secundaria: el número sustractivo y el número aislado, aunque éste en muy pocas ocasiones. Es destacable el hecho de que haya surgido incluso el “número aislado”, pero en ninguna ocasión, el “número relativo”; el desconocimiento de este “sentido de uso” no les permitió resolver algunas tareas como la de recta numérica, de hecho la idea de opuestos, como se indica en la literatura fue uno de los pasos hacia la aceptación de los negativos.

Un hecho importante es que los problemas de enunciado verbal, comúnmente utilizados para introducir los números enteros, son completamente desconocidos para ellos, de tal forma que los contextos inmersos en dichos problemas no sólo no los conducen al uso de signos binarios, sino que pasan inadvertidos, resolviéndolos en el campo de los naturales. También debemos mencionar que en la parte operativa se mostraron los siguientes obstáculos históricos: ideas contra-intuitivas (la suma no puede disminuir la cantidad) y operaciones absurdas (no se puede quitar más de lo que se tiene o no se puede quitar algo de nada).

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Cohen, L. y Manion, L. (1990). *Métodos de investigación educativa*. Madrid: La Muralla.

Bishop, J., Lamb, L., Philipp, R., Whitacre, I., Schappelle, B. & Lewis, M. (2014). Obstacles and Affordances for Integer Reasoning: An Analysis of Children´s Thinking and the History of Mathematics. *Journal for Research in Mathematics Education 43(1),* 19-62.

Bofferding, L. (2014). Negative integer understanding: characterizing first graders' mental models. *Journal for Research in Mathematics Education 45(2)*, 194-245.

Brousseau, G. (1983). Les obstacles épistémologiques et les problémes en mathématiques. *Recherches en Didactique des Mahématiques 4(2),* 165-198.

Butto, C. y Rojano, T. (2004) Introducción temprana al pensamiento algebraico: abordaje basado en la Geometría. *Educación Matemática 6(1),* 113-148.

Filloy, E. (1999). *Aspectos Teóricos del Algebra Educativa.* México: Grupo Editorial Iberoamericana.

Filloy, E., Puig, L. & Rojano, T. (2008). *Educational Algebra. A Theorical and Empirical Approach*. New York: Springer.

Gallardo, A. (2002). The extension of the natural-number domain to the integers in the transition from arithmetic to algebra. *Educational Studies in Mathematics 49(2),* 171-192.

Gallardo, A. y Mejía, J.L. (2015). Los números negativos ¿constituyen un obstáculo epistemológico persistente? En R. Flores (Ed), *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa 28*, xx-xx. México: Comité Latinoamericano de Matemática Educativa.

Puig, L. (2006). Sentido y elaboración del componente de competencia de los Modelos Teóricos Locales en la investigación de la enseñanza y aprendizaje de contenidos matemáticos específicos. En P. Bolea, M. J. González y M. Moreno (Eds.), *X Simposio de la Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática* (pp. 107-126). Valencia: Universidad de Valencia.

Talens, J. & Company, J. M. (1984). The textual space. On the notion of text. *The Journal of The Midwest Modern Language Association 17(2),* 24-36.

Taylor, S. y Bogdan, R. (1990). *Introducción a los métodos cualitativos de investigación. La búsqueda de significados.* Barcelona: Paidos.

Vlassis, J. (2001). Solving Equations with negatives or crossing the formalizing gap. En M. Van Den Heuvel-Panhuizen (Ed.), *Proceeding of the Twenty-fifth*