LA GENERALIZACIÓN DE PATRONES DE SECUENCIAS FIGURALES Y NUMÉRICAS: UN ESTUDIO DE LOS MEDIOS SEMIÓTICOS DE OBJETIVACIÓN Y PROCESOS DE OBJETIVACIÓN EN ESTUDIANTES DE GRADO DÉCIMO

JOHN EDILBERTO GÓMEZ TRIANA

UNIVERSIDAD PEDAGÓGICA NACIONAL

FACULTAD DE CIENCIA Y TECNOLOGÍA

DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS

MAESTRÍA EN DOCENCIA DE LA MATEMÁTICA

Bogotá D.C, ENERO 2013

LA GENERALIZACIÓN DE PATRONES EN SECUENCIAS FIGURALES Y NUMÉRICAS DESDE UNA PERSPECTIVA SEMIÓTICA CULTURAL. UN ESTUDIO DE LOS MEDIOS SEMIÓTICOS DE OBJETIVACIÓN Y PROCESOS DE OBJETIVACIÓN EN ESTUDIANTES DE GRADO DÉCIMO

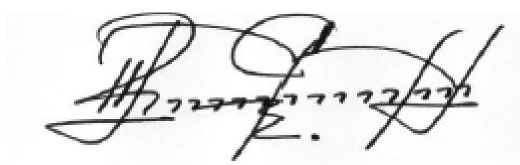
JOHN EDILBERTO GÓMEZ TRIANA

2011185041

Trabajo de investigación presentado como requisito parcial para optar el título de Magíster en Docencia de la Matemática

Director

RODOLFO VERGEL CAUSADO
Magíster en Docencia de la Matemática



UNIVERSIDAD PEDAGÓGICA NACIONAL

FACULTAD DE CIENCIA Y TECNOLOGÍA

DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS

MAESTRÍA EN DOCENCIA DE LA MATEMÁTICA

Bogotá D.C, ENERO 2013

UNIVERSIDAD PEDAGOGICA NACIONAL

Educadora de educadores

FACULTAD DE CIENCIA Y TECNOLOGÍA
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS

ACTA DE EVALUACION DE TESIS DE GRADO

Escuchada la sustentación del Trabajo de Grado titulado ***"La generalización de patrones de secuencias figurales y numéricas: un estudio de los medios semióticos de objetivación y procesos de objetivación en estudiantes de grado décimo"*** presentado por el estudiante:

John Edilberto Gómez Triana - 2011185041

Como requisito parcial para optar al título de **Magíster en Docencia de la Matemática**, analizado el proceso seguido por el estudiante en la elaboración del Trabajo y evaluada la calidad del escrito final, se le asigna la calificación de **Aprobado** con 45 puntos.

Observaciones:

En constancia se firma a los 25 días del mes de febrero de 2013.

JURADOS

Director(a) del Trabajo: Profesor(a) *Rodolfo Vergel Causado*

Jurados:

Profesor(a) *Néstor Fernando Guerrero Recalde*

Profesor (a) *Leonor Camargo Uribe*

Dedicado a la persona que me apoyó y motivó constantemente

durante la realización este trabajo.

A la persona que con su amor y confianza

contribuyóen la capitalización

deeste gran esfuerzo académico

Dedicado a Carolina Ulloa Suárez la mujer que amo,

porregalarme su amor, confianza y motivación.

AGRADECIMIENTOS

Quiero agradecer a todas las personas que con su apoyo hicieron posible la culminación de este logro académico. A mi familia, en especial a mi padre Edilberto Gómez que con su apoyo incondicional permitió que mi formación académica postgradual fuera posible.A mis estudiantes participantes de la investigación en especial a Michael, Cristian, Andrés, José, Sebastián, Arnold, Benjamín y Wistor, que con su compromiso permitieron el desarrollo y culminación del presente trabajo. A los profesores que orientaron mi proceso durante la Maestría. A mis compañeros de Maestría que contribuyeron en mi formación académica. A mi novia Carolina Ulloa quienme apoyó constantemente durante el desarrollo de la investigación.

Finalmente, agradezco al profesor Rodolfo Vergel Causado, por su compromiso, paciencia, y orientación durante mi formación como Magister en Docencia de la Matemática. Por compartir conmigo su experiencia y amplio conocimiento, y por mostrarme el interesante campo de investigación de la perspectiva semiótica cultural.

A todos ellos muchas gracias.

Para todos los efectos legales, declaro que el presente trabajo es original y de mi total autoría; en aquellos casos en los cuales he requerido del trabajo de otros autores, he dado los respectivos créditos

1.Información General	
Tipo de documento	Tesis de grado
Acceso al documento	Universidad Pedagógica Nacional. Biblioteca Central
Titulo del documento	La generalización de patrones en secuencias figurales y numéricas desde una perspectiva semiótica cultural. Un estudio de los medios semióticos de objetivación y procesos de objetivación en estudiantes de grado décimo
Autor(es)	GOMEZ TRIANA, John Edilberto
Director	Rodolfo Vergel Causado
Publicación	Bogotá D.C, 2013 106 p.
Unidad Patrocinante	Universidad Pedagógica Nacional
Palabras Claves	Medios semióticos de objetivación, Pensamiento Algebraico, Mediación semiótica, Procesos de objetivación, Generalización de patrones.

2.Descripción
Este trabajo se sitúa en la perspectiva semiótica cultural de la educación matemática, sugiere revisar las maneras como los estudiantes manifiestan su pensamiento algebraico buscando poner en evidencia la necesidad de reconocer las formas de pensamiento que emergen y se manifiestan a través del cuerpo, el movimiento, la actividad perceptual, y elementos que son movilizados por los estudiantes que al parecer son desestimados en el aula de clase de matemáticas y que desde la teoría cultural de la objetivación constituyen herramientas semióticas de gran importancia durante la generalización de patrones en secuencias figurales y numéricas. Tal reconocimiento constituye una posible ruta para entender la naturaleza y desarrollo del pensamiento algebraico. Para ello se analizan multimodalmente las producciones matemáticas y actitudes de un grupo de 3 estudiantes de grado decimo de la educación cuando se enfrentan a tareas sobre secuencias figurales y numéricas.

3.Fuentes
Para la realización de la investigación se usaron treinta y un referencias bibliográficas. Algunas de las más relevantes son: Radford, L (2006a). Elementos de una teoría cultural de la objetivación. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, número especial sobre semiótica, cultura y pensamiento matemático (editores invitados: L. Radford y B. D'Amore), pp. 267-299. Radford, L (2006b). Algebraic Thinking and the Generalization of Patterns: A semiotic perspective., *PME-NA*, Vol 1, pp. 2_21. Radford, L (2006c). Semiótica y educación matemática. *Revista Latinoamericana de Investigación*

en Matemática Educativa, Special Issue on Semiotics, Culture and Mathematical Thinking, pp. 7-21.

Radford, L (2008). Iconicity and contraction: a semiotic investigation of forms of algebraic generalizations of patterns in different contexts. *ZDM Mathematics Education,* 40, 83-96. Recuperado de: http://hsms.laurentian.ca/NR/rdonlyres/899F7DBD-D736-4887-B2B8-BF42D2085394/0/zdm_radford.pdf.

Radford, L (2010a). Algebraic thinking from a cultural semiotic perspective. Research in Mathematics Education, 12(1), 1-19. Recuperado de: http://www.luisradford.ca/pub/22_RME2010Álgebraicthinkingfromaculturalsemioticperspective.pdf

Vergel, R. (2011). *El signo en Vygotski* y su vínculo con el desarrollo de los procesos psicológicos superiores. Ensayo no publicado presentado en el marco del seminario doctoral "Sujeto y Alteridad en el Discurso Pedagógico. Doctorado interistitucional en investigación, Universidad Pedagógica Nacional.

Vygotski, L. S. (2000). *Obras escogidas* (Vol. III) (L. Kuper, Trad.). Madrid: Visor. (Original publicado en 1931).

Wertsch, J. (1988). *Vygotsky y la formación social de la mente*. Barcelona: Paidós.

4.Contenidos

El documento de la investigación se presenta en cinco capítulos. En el Capítulo 1 se presenta la descripción del problema de investigación, su justificación, los antecedentes y objetivos de la investigación; en el Capítulo 2 se presentan los referentes teóricos desde la perspectiva de la semiótica cultural, y la teoría cultural de objetivación, sobre los cuales se realiza el análisis multimodal de las producciones matemáticas de los estudiantes. El Capítulo 3 describe el contexto de estudio, la población, el grupo focal, y el diseño metodológico empleado en la investigación. En el Capítulo 4, se presenta el análisis multimodal de las producciones matemáticas de los estudiantes, y en el Capítulo 5 se desarrollan las conclusiones y recomendaciones de la investigación.

5. Metodología
El presente trabajo se enmarca en un enfoque de investigación cualitativa de tipo descriptivo e interpretativo, cuyo diseño metodológico, toma como referencia algunos aspectos del diseño metodológico empleado por Radford (2010b), y cuyas fases de la investigación se constituyeron en las siguientes: Fase 1: Diseño de Tareas 1, 2, 3 y 4. Fase 2: Implementación de las Tareas 1, 2, 3 y 4. Fase 3: Recolección de información correspondiente a las Tareas 1, 2, 3 y 4. Fase 4: Diseño de las Tareas 5, 6 y 7. Fase 5: Implementación de las Tareas 5, 6 y 7. Fase 6: Recolección de información correspondiente a las Tareas 5, 6 y 7. Fase 7: Análisis de los datos. El grupo focal con el cual se llevó a cabo la investigación consistió en 3 estudiantes del curso 1002 de la institución educativa distrital Instituto Técnico Industrial Piloto ubicado en la localidad de Tunjuelito en Bogotá-Colombia. Como unidad de análisis del estudio se tomaron: los medios semióticos de objetivación, y como categorías de análisis: el gesto, los señalamientos, las inscripciones, la actividad perceptual, el lenguaje, la contracción semiótica y la Iconicidad.

6. Conclusiones
Frente a los objetivos planteados de este estudio y con la finalidad de dar respuesta a la pregunta de investigación: *¿Cuáles son los medios semióticos de objetivación que movilizan los estudiantes de grado décimo de educación media y qué procesos de objetivación desarrollan cuando se enfrentan a tareas de generalización de patrones de secuencias figurales y numéricas?* se concluye que en el análisis multimodal de las producciones de los estudiantes pertenecientes al grupo focal fue posible evidenciar los siguiente medios semióticos de objetivación: señalamientos, inscripciones, recursos semióticos asociados a tapar y destapar elementos de las figuras, recursos semióticos asociados con movimientos corporales; recursos semióticos lingüísticos tales como *"el avance", "la figura 0"*, *"la figura que se necesite"* utilizados por los estudiantes en el procesos de generalización de cada una de las secuencias. Por otro lado fue posible evidenciar procesos de objetivación en los estudiantes tales como la Contracción Semiótica y la Iconicidad. Estos procesos se presentaron en las formas de pensamiento algebraico caracterizadas por la Teoría Cultural de la Objetivación. Así mismo los resultados obtenidos durante este estudio ponen en evidencia la importancia de seguir generando investigaciones en educación matemática no solo en lo que tiene que ver con el desarrollo del pensamiento algebraico se refiere, sino a otros tipos de pensamientos como el aleatorio, el geométrico, el estadístico, entre otros. Finalmente, se recomienda profundizar en el análisis de los medios semióticos de objetivación y de los procesos de objetivación desarrollados en las formas de pensamiento algebraico planteadas en la TCO, específicamente en el pensamiento algebraico simbólico.

Elaborado por:	GOMEZ TRIANA, John Edilberto
Revisado por:	Rodolfo Vergel Causado

Fecha de elaboración del Resumen:	27	02	2013

TABLA DE CONTENIDO

LISTADO DE FIGURAS

INTRODUCCIÓN

Uno de los intereses actuales en las investigaciones en educación matemática tiene que ver con el estudio de la influencia del contexto sociocultural, de los estudiantes, en el aprendizaje de las matemáticas. Un ejemplo de esto lo constituyen los trabajos investigativos adelantados por el profesor Luis Radford.Sus trabajosse enmarcan en la perspectiva semiótica cultural de la educación matemática y tienen como propósito estudiar los recursos semióticos que movilizan los estudiantes para expresar su pensamiento matemático. Estos recursos, caracterizados como medios semióticos de objetivación, tienen un carácter Vygotskiano, en tanto se reconoce que los signos lingüísticos y no lingüísticos son usados por los estudiantes con el propósitode hacer visible y comunicar su pensamiento, en otras palabras, son usados para objetivar el conocimiento.

La investigación aquí reportada estáenmarcada en la perspectiva semiótica cultural de la educación matemática y sugiere revisar las maneras como los estudiantes manifiestan su pensamiento matemático, en este caso, su pensamiento algebraico. Esta perspectiva pone de manifiesto la necesidad de reconocer que las formas de pensamiento se pueden visualizar a través del cuerpo, el movimiento, la actividad perceptual y de identificar procesos en la actividad matemática de los estudiantes que permiten caracterizar las formas de pensamiento algebraico. Estos dos aspectos, los elementos que son movilizados por los estudiantes y los procesos desarrollados por ellos, al parecer son desestimados en el aula de clase de matemáticas. El desarrollo de la presente investigación pretende llamar la atención sobreel hecho de que desestimar los aspectos ya mencionados podría ser un obstáculoen la compresión del aprendizaje de las matemáticas, más específicamente en la comprensión de elementos didácticos vinculados con el pensamiento algebraico.

El objetivo del presente estudio es identificar, describir y analizar los medios semióticos de objetivación que movilizan estudiantes de grado décimo de educación media y los procesos de objetivación que desarrollan cuando se enfrentan a tareas de generalización de patrones de secuencias figurales y numéricas.Para el cumplimiento de este objetivo se desarrolló la investigación reportada en este trabajo que se estructura de la siguiente manera:

En el Capítulo 1 se describe el problema de investigación, su justificación, los antecedentes se plantea la pregunta de investigación y los objetivos de esta investigación. En el Capítulo 2 se presentan los referentes teóricos de la perspectiva de la semiótica cultural y la teoría cultural de objetivación que sustentan el análisis multimodal de las producciones matemáticas de los estudiantes. Por su parte el Capítulo 3 presenta la metodología; en este capítulo se describe el contexto de estudio, la población, el grupo focal, y el diseño metodológico elaborado para el desarrollo de la investigación. En el *Capítulo 4*, se presenta el análisis multimodal de las producciones matemáticas de los estudiantes, y en el *Capítulo 5* se presentan las conclusiones evidenciadas en los resultados encontrados durante el análisis multimodal de la actividad matemática de los estudiantes.

Finalmente y para complementar la información presentada en los capítulos 3 y 4, al final de este trabajo y posterior a las referencias bibliográficas, se presenta una sección de anexos conformada por las transcripciones de la producción matemática de uno de los grupos que participó en la recolección de información; dicho grupo es distinto al grupo focal tomado para el análisis multimodal que se reporta en el presente trabajo. Los anexos son presentados con el fin de presentar la producción matemática de otro grupo de estudiantes y de esta manera el lector pueda recurrir a dicha producción para contrastar y/o comparar los análisis y resultados presentados en los capítulos 4 y 5.

CAPÍTULO 1

PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA

1.1 JUSTIFICACIÓN

La justificación del desarrollo de la investigación que se presenta aquí giraentornoadosaspectosfundamentales. Elprimeroestá relacionado con elaportequerealizóamiformacióncomoMagisterenDocenciadelaMatemática y específicamente a mi formación como investigador en el campo de la educación matemática, campo en el cual un ejercicio de investigación, como el que se desarrolla en este trabajo, constituye una oportunidad de aprendizaje de elementos metodológicos y teóricos para un excelente desempeño en mi futuro rol de investigador.Elsegundoaspecto se enfoca enelaportequeserealizaalcampodelaeducaciónmatemáticayespecíficamentealestudiodela naturaleza delpensamientoalgebraicodesdeuna aproximaciónsemióticacultural en estudiantes de educación escolar colombiana.Tal aporte pretende establecer algunos elementos didácticos para ganar comprensión sobre el aprendizaje del álgebra escolar.

En este contexto, el desarrollo de la presente investigaciónespertinentedebidoalcrecienteinterésqueactualmentesevienepresentando,eneducació nmatemática,enlasteoríassocioculturalesdelaprendizajedelasmatemáticas.Elobjetivodeestasteorías esmostrarqueelaprendizajedelasmatemáticasestáíntimamenterelacionadoconelcontextoculturalen quetienenlugar.Unejemplodeestoeselestudiodelpensamientoalgebraicodesdeunaperspectivasemió tica culturalenlaqueseinscribeestetrabajo.Enlasinvestigacionesrealizadassobreelpensamientoalgebraic odesdeestaperspectivasehahechoexplícitoqueaúnesmuypocoloquesepuededecirsobreunconjuntopr ecisodecaracterísticasdelpensamientoalgebraico,esporestoquesehacenecesariodesarrollarnuevostr abajosquepuedancontribuiralavancedeestacaracterización.Partiendodeloanteriorseponedemanifies tolaimportanciaderealizaruntrabajoencaminadoacontribuirenla comprensióndelpensamientoalgebraicodesdeunenfoquesociocultural.Laimportanciaradica,enquea ctualmenteenlaeducaciónmatemáticacolombianaelnúmerodeinvestigacionesenestecamponoessign ificativoyporendelacomprensióndelosaspectosdeterminantesdelpensamientoalgebraicoesmuyredu cida.

Porúltimo,el desarrollo esta investigaciónesconvenienteyaquecontribuiráalavanceenelentendimientodelosprocesosdeenseñanz aaprendizajedelosobjetosalgebraicosyenestecasoparticularalamaneraenlaqueungrupodeestudiante srealizanprocesosdegeneralizaciónenuncontextoqueinvolucrasecuencias figurales y secuencia numéricas de números naturales y números racionales. Porotrolado,esconvenienteparalaeducaciónmatemáticacontarcontrabajosqueapuntenalmejoramien todelaenseñanzadelálgebrayqueproporcionenuninsumoparalacomprensióndelosaspectossignificat ivosdelpensamientoalgebraico.

1.2 ANTECEDENTES

Para el planteamiento de la investigación aquí reportada se revisaron principalmente los trabajos de investigación adelantados por el profesor Luis Radford de LaurentianUniversity en Ontario-Canadá.Lasinvestigaciones de Radford son desarrolladas conestudiantes de educación primaria y se enfocan en el estudio del desarrollo del pensamiento algebraico en estudiantes jóvenes, es decir, estudiantes que aún no han tenido contacto con el lenguaje alfanumérico propio del álgebra. En estos trabajos se estudian, específicamente,situacionesenelcontextogeneralizacióndepatrones.Sesugiereunatipologíadeformasdelpensamientoalgebraico;*PensamientoAlgebraicoFactual,PensamientoAlgebraicoContextualy PensamientoAlgebraicoSimbólico.*

''Latipologíaesunintentodecomprenderlosprocesosquelosestudiantesexperimentanensucontactoconlasformasdeacción,lareflexiónyelrazonamientotransmitidasporlapraxishistóricamenteconstituidadelálgebraescolar" (Radford,2010a).

Por otro lado, se hace referenciaaquelatendenciageneralenladécadadelos80'Syprincipiosdelos90'Sfueasociarelálgebraescolaryelpensamientoalgebraicoconelusodelasletrasyestatendenciaestodavíamuyfuerteenlasinvestigacionesenlaenseñanzayaprendizajedelálgebra.ConrespectoestoRadfordpostula:elálgebrasetratadehacerfrentealaindeterminacióndeunamaneraanalítica.Peroenlugardeconcederalsimbolismoalfanuméricoelderechoexclusivodedesignaryexpresarlaindeterminación,elsimbolismoalfanuméricodebeversecomounadelasvariasformassemióticasequipadasparalograrlo.

Esta postura es importante para la educación matemática porque hay espacio para una gran zona conceptual donde los estudiantes pueden empezar a pensar en forma algebraica, aunque aún no estén recurriendo (o al menos en gran medida) a los signos alfanuméricos. Esta zona, que podemos denominar*zona de la emergencia del pensamiento algebraico*,se ha mantenido en gran medida ignorada como resultado de nuestra obsesión con el reconocimiento de la suma algebraica de lo simbólico solamente (Radford, 2010).

En síntesis, en lostrabajosdeLuisRadford sepresentareportesdeinvestigacionesenmarcadasenelestudiodelpensamientoalgebraicodesdeunaperspectivasemiótica cultural,dichosestudiosbuscancaracterizareldesarrollodelpensamientoalgebraicoenestudiantesque aúnnoconocenyporendenomanipulanellenguajealfanuméricopropiodelálgebra.Elobjetivoprincipal esmostrarque "lamanipulacióndelossímbolosessólounapequeñapartedeloqueelálgebraesenrealidad" (Mason,1990)citadoen(Radford,2010a),esdecir,elpensamientoalgebraicovamuchomásalládelusodelasletrascomomedioderepresentacióndelosobjetosalgebraicos.Esteplanteamientosurgecomorespuestaalatendenciamostradaenlosaños80'syprincipiosdelos90'sdeasociarelálgebraescolaryelpensamientoalgebraicoconelusodelasletras.Estatendencia,diceRadford,estodavíamuyfuerteenlasinvestigacionesenlaenseñanzayaprendizajedelálgebra.

Con respecto a los trabajos investigativos colombianos, en el campo de la perspectiva semiótica cultural, se destaca, en primer lugar, la tesis de maestría de Villanueva (2012)en la que se estudian los medios semióticos de objetivación utilizados por niños de primero de primaria (6-7 años) cuando se enfrentan a tareas sobre secuencias figurales. En segundo lugar, actualmente Vergel (2012) está desarrollando su tesis doctoral enfocándose en el estudio de las formas de pensamiento algebraico temprano en niños de 9 años, en este estudio se pretende analizar las formas de pensar y razonar de los niños cuando se enfrentan a tareas en las que intervienen secuencias figurales.

Los dos trabajos mencionados en el párrafo anterior y la presente investigación tienen como objetivo común contribuir al inicio y consolidación, en Colombia, de una línea de investigación en la que se tomen los elementos teóricos de la perspectiva semiótica cultural para el análisis y comprensión de los fenómenos propios del aprendizaje de las matemáticas.

1.3 DESCRIPCIÓN DEL PROBLEMA

Lasinvestigacioneseneducaciónmatemáticaenelcampodelálgebrahanbuscadoencontrarunconjuntomínimodecaracterísticasdelpensamientoalgebraico,estabúsquedaaúnnohaterminadoyhastaelmomentohasidoimposibledecirconcertezaqueesenrealidadelpensamientoalgebraico.Sinembargo,comosemencionaenRadford (2010),síhayconsensoendosaspectos:

- Elálgebraseocupadelosobjetosdecarácterindeterminadocomoincógnitas,variablesyparámetros.
- Enelálgebralosobjetossontratadosdeunamaneraanalítica.

Desdeunenfoquesemiótico culturalelálgebratratadehacerfrentealaindeterminacióndeunamaneraanalítica.Peroenlugardeconcederalsimbolismoalfanuméricoelderechoexclusivodedesignaryexpresarlaindeterminación,sedebeconsiderarcomosólounadelasvariasformassemióticasequipadasparalograrloyaquelossignospuedentambiénseralgomuydiferente.Palabraogestos,porejemplosonsignos,semióticamentehablando,algebraicostanauténticoscomolasletras.Porsupuesto,estonosignificaquesonequivalentesoquesepuedensimplementesustituirlosunosporlosotros.Loquehacequelossistemassemióticosseanúnicoseinsustituiblesessumododesignificar.“Haycosasquepodemossignificaratravésdedeterminadossignosyhayotrasqueno”

Radford(2010).Apesardenoposeerunadefiniciónconcretadepensamientoalgebraico,elenfoquesemi ótico culturalcuentaunplanteamientoteóricosobreloqueespensamiento.

Todoaprendizajesuponelaactividaddelpensamiento.Elpensamientoaparececomoelsustratodelap rendizaje,aquelloatravésdelcualseestablecelarelaciónentreelseryelmundo.Curiosamente,apesardes uimportanciaelpensamientocomoconceptoensínoformapartedelasteoríasdidácticasactuales. “Sindudaunadelasrazonestienequeverconlaideapopulardequeelpensamientoesinobservable” (Radford,2006a).Loanteriorsedebe,comolomenciona(Radford,2010a),aqueideasoccidentalesyepis temologíasracionalistashantrasmitidolaideadequeelpensamientoesinmaterialyalgopuramentement al,sincuerpo.

Radfordsostienequeel*pensamiento*esunprocesodelcerebroentornoaentenderalgunacosaparticula ryquedesdeunaperspectivasemiótica cultural,elpensamientoesconsideradocomounaactividadreflexivaysensible,mediadaycontenidaenl acorporalidaddeacciones,gestosyartefactos(Radford,2010b).Eladjetivosensibleserefiereaunaconce pcióndelpensamientoqueestáíntimamenterelacionadoconelpapelquelossentidoshumanosjueganen él.Yaque “elpensamientoesunaacciónsensibleversátilysofisticada,dondelossentidoscolaboranenelcursodeun aexperienciamulti-sensorialdelmundo” (Radford,2010a).Estoporqueelsistemasensorio-motornosóloproporcionalaestructuraaloscontenidosconceptuales,sinoquetambiéncaracterizaelcon tenidosemánticodelosconceptosencuantoalaformaenquefuncionamosconnuestroscuerpos (Gallese&Lakoff,2005, citadosenRadford,2010a).

Teniendoencuentaloanterioresconveniente señalar queelpensamientoengeneral,yelpensamientoalgebraicoenparticular,sepuedeconsiderarcomounapr axiscognitivahistóricamenteconstituidaymediadaporelcuerpo,lossignosylosartefactos.Estoconstituyeunaideanomentalistayportantomaterialdelpensamientoalgebraico.Estamiradamaterialdelpensamientoabrenuevasposibilidadesparalacomprensióndelossignosalgebraicosylasfórmulasdeunamaneranoconvencional.Estoes,noreducirelálgebrayelrazonamientoalgebraicoalusodelasletrasyaque,comoloafirmaRadford,lasletrasnuncahansidocondiciónnecesarianisuficienteparaelpensamientoalgebraico.

Entonces, se tiene que porunladoelrazonamientoalgebraiconopuedereducirsesoloalusodelasletrasyporelotroquelossignossonconsideradoscomoparteconstitutivadelpensamiento.De esta manera, la presente investigación se desarrolla con el propósito de estudiar cuálessonlosregistrossemióticos(signos)quemovilizanlosestudiantescuandoseenfrentanasituacionesenmarcadasenelpensamientoalgebraicoy así caracterizar los procesos de objetivación que presentan los estudiantes al solucionar Tareas de generalización de patrones de secuencias figurales y numéricas.De esta manera, resulta interesante e importante reportar un estudio en el que se presente una caracterización de los medios semióticos de objetivación que movilizan un grupo de estudiantes de educación secundaria donde ya tienen experiencia con la manipulación del lenguaje alfanumérico del álgebra. El objetivo es caracterizar los recursos semióticos movilizados por estos estudiantes y la manera en la que presentan procesos de objetivación de la generalización de patrones en secuencia figurales y numéricas.

Adicional a lo anteriormente expuesto, durante mi práctica docente he podido evidenciar qué los estudiantes, en el proceso de aprendizaje, cuando se enfrentan a situaciones inmersas en un contexto algebraico movilizan una serie de recursos semióticos diferentes al lenguaje alfanumérico estándar del álgebra, tales recursos no son tenidos en cuenta al analizar y/o evaluar el desarrollo del pensamiento algebraico de los mismos (los estudiantes) debido a que tradicionalmente la mirada a estado enfocada exclusivamente a la manipulación y tratamiento que los estudiantes realizan de los símbolos algebraicos.

1.3.1 Delimitación del Problema

Atendiendo alo expuesto en el apartado anterior, se evidencia la necesidad de desarrollar un estudio que indague sobre cuáles son los recursos semióticos que movilizan los estudiantes de educación secundaria (grado décimo) cuando se enfrentan a tareas de generalización de problemas en secuencias figurales y numéricas. Con tal estudio se hace posible identificar cómo intervienen los recursos semióticos movilizados en los procesos de objetivación que los estudiantes desarrollan a lo largo de la solución de cada una de las tareas propuestas.

Es así, como en el marco de la semiótica cultural, la investigación presentada se plantea y se desarrolla con el propósito de dar respuesta a la siguiente pregunta de investigación:

> *¿Cuáles son los medios semióticos de objetivación que movilizanlosestudiantes de grado décimo de educación media y qué procesos de objetivación desarrollancuandoseenfrentanatareasdegeneralizacióndepatronesde secuencias figurales y numéricas?*

1.4 OBJETIVOS

1.4.1. Objetivo General

Identificar, describir y analizar los mediossemióticos de objetivación que movilizanlosestudiantes de grado décimo de educación media y los procesos de objetivación que desarrollancuandoseenfrentanatareasdegeneralizacióndepatronesde secuencias figurales y numéricas.

1.4.2. Objetivos Específicos

- Diseñar e implementar una serie de tareas,vinculada con la teoría cultural de la objetivación, sobre secuencias de generalización de patrones en contextos figurales y numéricos.
- Construir las categorías de análisis que permitan identificar e interpretar:
  - Los medios semióticos de objetivación que movilizan los estudiantes de grado décimo de educación media cuando se enfrentan a tareas sobre secuencias de generalización de patrones en contextos figurales y numéricos.
  - Los procesos de objetivación que desarrollan los estudiantes de grado décimo de educación media estudiantes cuando se enfrentan a tareas sobre secuencias de generalización de patrones en contextos figurales y numéricos.

CAPÍTULO 2

MARCO TEÓRICO

En este capítulo se presentan los elementos teóricos que sustentan el desarrollo de la investigación reportada en el presente trabajo. Dichos elementos son presentados con el fin de soportar los análisis realizados a los datos y así tener un marco conceptual en el que los resultados encontrados sean herramienta para dar respuesta a la pregunta de investigación y se pueda visualizar el cumplimiento de los objetivos propuestos. Por lo tanto, a continuación se hace un desarrollo sucinto de la perspectiva semiótica cultural y los constructos de la teoría cultural de la objetivación.

2.1. LA PERSPECTIVA SEMIÓTICA CULTURAL

La investigación desarrollada en este trabajo está inscrita en la perspectiva semiótica cultural del conocimiento esbozada en Radford (2004).Tal perspectiva plantea el problema de la cognición humana desde un punto de vista antropológico. Según los planteamientos de Radford, los signos nos permiten reflexionar sobre el mundo, el cual es reflejado y refractado en los signos, y en la forma en que éstos son usados. Por lo tanto los signos no pueden reducirse a su función representacional, en otras palabras, la semiótica adquiere un matiz mediacional y no sólo representacional, en otras palabras, los signos no solo representan sino que influyen, median y alteran el pensamiento.

La aproximación semiótica cultural tiene como propósito general responder a la pregunta sobre la relación que existe entre cognición y cultura; esta respuesta la plantea Radford en dos etapas. En la primera etapa se trabaja sobre la naturaleza de la cognición y el concepto de individuo en la perspectiva semiótica cultural; en la segunda se expone el problema de la cognición como reflexión de la práctica social de los individuos.

Con relación a la naturaleza de la cognición, Radford (2004) plantea una discusión sobre la naturaleza de la cognición que parte principalmente de analizar la influencia que tiene lo social en el aprendizaje de las matemáticas. Esta discusión se plantea por la tensión existente entre los enfoques cognitivos y sociales del aprendizaje sobre la concepción de individuo que se tiene en cada uno de ellos. En los enfoques puramente cognitivos se defiende que el individuo se determina a sí mismo en ausencia de cualquier influencia social, esto es, se ve al individuo como ente que participa en un plano social pero que no es determinado por éste (el plano social). En los enfoques socioculturales del aprendizaje, por el contrario, se reconoce la importancia e influencia que tiene el plano social en el desarrollo cognitivo de los individuos; éste reconocimiento tiene su sustento en los planteamientos teóricos de Vygotski que dicen:

> Las cualidades del desarrollo mental derivan y son generadas por las propiedades particulares de la organización sociocultural de las actividades en las que los individuos participan (Cobb*et al*. 1997, Citado en Radford 2004)

En este sentido, el presente trabajo se reconoce que el contexto sociocultural de los individuos incide directamente en el desarrollo cognitivo de los mismos. Con esto no se quiere decir simplemente que el individuo está determinado por el medio social. Lo que se plantea aquí es que, en concordancia con Vygotski, la relación entre el individuo y su núcleo social no puede ser reducida a una relación de simple determinación del uno por el otro. La relación es mucho más compleja. El medio socio-cultural del individuo ofrece a éste direcciones de desarrollo y formas de apropiación del saber y de la experiencia humana.

Partiendo de las ideas anteriormente desarrolladas, y para efectos del presente trabajo, se hace necesario exponer la concepción de individuo que se propone en la perspectiva semiótica cultural del conocimiento.Para tal fin,se toman como referencia los elementos teóricos expuestos en Radford (2004) en los cuales se considera al individuo como un individuo que vive, piensa y actúa en el marco de su cultura y de la premisa de que la base de la cognición se encuentra en la práctica social mediatizada, de interiorización reflexiva de prácticas sociales históricamente constituidas.Desde la perspectiva semiótica cultural se propone un concepto de individuo que busca explicar cómo el contexto sociocultural influye en el desarrollo cognitivo del mismo, en este sentido. Como se menciona en Radford (2004), Vygotski plantea que la relación entre el individuo y lo social no puede ser reducida a unarelación de simple determinación del uno por el otro. La relación es mucho máscompleja. El medio socio-cultural del individuo ofrece a éste *direcciones de desarrollo* y*formas de apropiación del saber* y de la experiencia humana. Adicional a esto, dice Radford, es a través de los recursos materiales y conceptuales del medio socio-cultural, que el niño puede efectuar las generalizaciones y las síntesis sobre las cuales reposa la formación de conceptos.

Partiendo de lo anterior, queda claro que el problema del desarrollo conceptual no se limita a la relación que liga alindividuo con su medio socio-cultural a través del conjunto de recursos materiales y conceptuales que el medio pone a disposición del individuo. El problema es más amplio:los recursos materiales y conceptuales tienen una historia. De allí que, como notabaWartofsky, las actividades que realiza un individuo no son simplemente de él, puesdichas actividades han sido configuradas en el curso de un proceso filogenético(Wartofsky, 1979, p. 114, citado en Radford (2004)). Es en este orden de ideas que se define que SER es un concepto mucho más amplio y complejo quesubsume el concepto de individualidad. “SER”significa***ser-en-la-cultura.***Cabe aclarar aquí que la idea de *ser-en-la-cultura* no se opone a la idea de individualidad. La idea de *ser-en-la-cultura*, como afirma Radford, plantea de una forma diferente la individualidad al romper con la dicotomíaindividuo/sociedad. En su lugar, ésta propone una concepción en la que “SER” quiere decir***ser-con-otros***.

En concordancia con lo anteriormente expuesto, se formula aquí una visión de la cognición desde la perspectiva semiótica cultural. Para tal fin se tendrá en cuenta que los siguientes elementos que sustentan tal perspectiva:

- Una reconceptualización del saber.
- Una definición cultural del pensamiento.

Estos dos aspectos son planteados en Radford (2004) teniendo en cuenta la teoría de la actividad de Leontiev (1978/1993), citado en Radford (2004). Por esta razón es importante mencionar los algunos elementos importantes de esta teoría.

*El concepto de actividad.*Leontiev desarrolla en su teoría una conceptualización de la actividad con el propósito de explicar la relación que existe entre saber, pensamiento y cultura. De esta manera, Leontiev propone que el funcionamiento intelectual humano es un funcionamiento que es mediatizado. Es así como la actividad humana se caracteriza por dos aspectos principales: **(1)** el objeto que se persigue y **(2)** los medios paraalcanzar dicho objeto. En relación con el primer aspecto, según Leontiev (1977), como es expuesto en Radford (2004), en vez de ser simplemente estímulo, el objeto orienta la actividad. Es por ello que Leontiev insistía en que “no puede haber actividad sin un motivo”. Pero el objeto no es algo que se presenta al individuo directamente. Un objeto (por ejemplo, el del aprendizaje del álgebra o de los números negativos) se presenta, de entrada, cargado con una significación cultural. El objeto lleva encapsulado en sí mismo un valor, científico, estético, etc. ofreciendo así una vía de desarrollo posible.

Por otro lado, los medios para alcanzar el objeto son aquellos que mediatizan en un plano material la actividad misma: *objetos, instrumentos, signos, el lenguaje,* etc. Dichos objetos se convierten en herramientas sicológicas, como sugería Vygotski. Signos y artefactos no son simplemente elementos periféricos de la actividad. Su valor no reside en la posibilidad de volver la actividad más fácil sino en convertirse en parte consubstancial de la misma.

En este contexto, de acuerdo con Radford (2004), se puede afirmar que el concepto de actividad no hace referencia simplemente a un espacio donde los individuos se congregan para pensar juntos. Una actividad, en el sentido de Leontiev, es un proceso social cuyo propósito es alcanzar un objetivo impregnado de entrada con significados culturales y conceptuales, objetivo que se alcanza a través de acciones mediatizadas por sistemas semióticos depositarios de la historia cognitiva escrita en estos últimos por generaciones pasadas.

> Una actividad es una secuencia dialécticamente interconectada de acciones mediatizadas a través de las cuales los individuos se relacionan no solamente con el

> mundo de los objetos sino que también con otros individuos, adquiriendo, en el curso de ese proceso, la experiencia humana (Leontiev, 1978/1993, citado en Radford, 2004).

En esta perspectiva semiótica cultural, la idea de saber queda estrechamente relacionada con la idea de actividad caracterizada anteriormente. La reconceptualización del saber de la que trata la perspectiva semiótica cultural se propone con base en el papel que desempeñan las actividades humanas que determinan el tipo de problemas que se plantea una cultura así como la manera en la que dichos problemas son resueltos. Así mismo, la organización de las actividades están determinadas por el contexto histórico-económico.De esta manera, en la aproximación semiótica cultural, el saber no es considerado como el descubrimiento de algo que ya estaba allí, como algoanterior a toda actividad semiótica cognitiva. El saber, como lo afirma Radford (2004), no es algo acerca de cosas preexistenteso acerca de objetos eternos que no cambian. El saber se genera en el curso dela actividad humana y la forma que toma ese saber depende de la dimensión histórico-económica y de una superestructura simbólica que está determinada por la cultura en la que tiene lugar la actividad humana.

En este sentido, es importante anotar que lo que hace distintivo y diferente la perspectiva semiótica cultural de otras corrientes antropológicas utilizadas en educación, como el constructivismo, es el concepto de pensamiento que propone, un concepto que ancla de manera precisa y definitiva el pensamiento en la cultura. En la perspectiva semiótica cultural el conocimiento resulta anclado en la cultura en el sentido que pensar es considerado como *reflexióncognitiva del mundo de acuerdo con las formas culturales de significación que enmarcanla actividad humana* Radford (2004).

Partiendo de la anterior conceptualización del pensamiento, se hace necesario aclarar lo que se entiende por *concepto* dentro de la aproximación semiótica cultural. Es así como en Radford (2004), se plantea que los conceptos son concebidos como reflexiones que reflejan el mundo de acuerdo con cristalizaciones conceptuales (científicas, éticas, estéticas, etc.) que son disponibles a los individuos en cierta época y cultura.

De esta manera se llega a un planteamiento teórico del saber. El saber es concebido como el producto de una praxis cognitiva reflexiva, mediatizada. El saber cómo praxis cognitiva (praxis cogitans) quiere decir que lo que conocemos y la manera en que llegamos a conocerlo está circunscrito por posiciones ontológicas y procesos de producción de significados que dan forma a cierta clase de racionalidad que permite plantear ciertos problemas(Radford, 2004). La naturaleza reflexiva del saber debe entenderse en el sentido de Ilyenkov, esto es, como la componente distintiva que hace a la cognición una reflexión intelectual del mundo externo según las formas de la actividad de los individuos (Ilyenkov 1977b, p. 252. Citado en Radford, 2004). De armonía con lo mencionado anteriormente, el carácter mediatizado del saber se refiere al papel que desempeñan los objetos, instrumentos y signos en la realización de la praxis cognitiva.

2.2. LA TEORÍA CULTURAL DE LA OBJETIVACIÓN (TCO)

En esta sección se presentarán los elementos más importantes de la teoría cultural de la objetivación (TCO), teoría desarrollada por Luis Radford y enmarcada en la perspectiva semiótica cultural. En esta teoría se considera aprender como un proceso de objetivación del conocimiento. Con objetivar se hace referencia a la acción de convergencia del signo y del pensamiento que lleva a hacer aparente lo que en el mundo conceptual se perfila como meramente potencial. Objetivar es toparse con el objeto (con eso que objeta a la conciencia) en el encuentro entre lo subjetivo y lo cultural. Esta idea viene influenciada por los planteamientos de Vygotski en los cuales se afirma que transmitir un modo de pensar al estudiante es imposible, pues todo concepto implica un desarrollo en el tiempo. Por ende, es imposible que el estudiante sea simplemente "acarreado" por el medio. Es así como el aprendizaje consiste de un conocimiento reflexivo con una praxis cognitiva histórica y sus concomitantes formas de acción y razonamiento (Radford, 2008). En otras palabras,

> ``el*aprendizaje*noconsisteenconstruiroreconstruirunconocimiento.Setratadedotardesentidoalosobjetosconceptualesqueencuentraelalumnoensucultura.Laadquisicióndelsaberesunprocesodeelaboraciónactivadesignificados″.(Radford, 2006a, p. 272)

Puede apreciarse cómo en estemarcoteóricolasemiótica,laculturaylahistoriapueden considerarse como principiosoperativos. Tales principios se encarnanen el diseño de Tareas que buscan ofreceralosestudianteslaoportunidaddereflexionaralgebraicamenteyfamiliarizarseconalgunasideas básicasdelálgebraendiferentescontextos (por ejemplo, ecuaciones,generalizacióndepatrones,interpretacióngráfica, entre otros)

En la TCOse consideran dos elementos principales que la separan de las demás teorías del aprendizaje. Por un lado, se parte de una concepción no mentalista de pensamiento y por otro, una idea de aprendizaje tematizado como adquisición comunitaria de formas de reflexión del mundo guiadas por modos epistémico-culturales históricamente formados (Radford, 2006a).Desde este punto de vista el *pensamiento* es considerado, sostiene Radford, como una reflexión, es decir, un movimiento dialéctico entre una realidad constituida histórica y culturalmente y un individuo que la refracta (y la modifica) según las interpretaciones y sentidos subjetivos propios.

La TCOprofundiza la idea de signo desde la perspectiva de Vygotski. En este sentido, los trabajos de Vygotski sugieren considerar que "elsignodesempeñaunafunciónmediadoraentreelindividuoysucontexto,ypermite,además,esepasaje entrelointerpsicológicoylointrapsicológicoqueaseguralareconstruccióninternadelaacción,estoes,de suinternalización" (Radford,2006b),esdecir,los*signos*sonconsideradoscomoalgoqueabarcatérminoslingüísticosorales yescritos,símbolosmatemáticos,gestos,etc. (Vergel, 2011). Los*signos*nosonconsideradoscomomerosindicadoresdeactividadmental,porelcontrario,sonparteconstitutivadelpensamiento. En palabras del propio Vygotski (citado en Gutiérrez, Ball y Márquez, 2008):

> "Más allá de influenciar la conducta de los demás, el signo adquiere la peculiaridad de ser un instrumento que transforma al sujeto mismo". (p. 690).

Loexpuesto en la cita anterior sugiere pensar en la interiorización del signo, es decir, el proceso a través del cual algunos aspectos de la cultura compartidos en el plano externo que son mediatizados semióticamente, son incorporados en el plano interno. La interiorización vygotskiana no es un traspaso en el sentido de una copia o reproducción de un proceso o contenido externo ahora replicado en un plano interior. Baquero (2009) señala que la interiorización de una operación psicológica consiste en una larga serie de procesos evolutivos lo cual sugiere que se trata de un proceso de desarrollo. Según este autor, la internalización de las formas culturales de conducta implica la reconstrucción de la actividad psicológica con base en las operaciones con signos.

De nuevo la idea de pensamiento adquiere un matiz especial, pues éste es mediatizado a través de los signos más, generalmente a través de los artefactos culturales. Este constructodesempeñaunpapelimportanteenlarealizacióndelaprácticasocial. En la teoría de la objetivación, “losartefactosnosonmerasayudasalpensamiento(comoloplantealapsicologíacognitiva)nisimplesamplificadores,sinopartesconstitutivasyconsustancialesdeéste” (Radford,2006a).

La noción de signo –derivada del trabajo de Vygotski- en Radford incluye gestos, artefactos, ritmo, actividad kinestésica, por lo que esta noción se amplía en la teoría de la objetivación. Para Vygotski (2000), el signo, al principio, es siempre un medio de relación social, un medio de influencia sobre los demás y tan solo después se transforma en medio de influencia sobre sí mismo.

Desde la TCOse sostiene que los recursos semióticos son instrumentos constitutivos del pensamiento. La idea de *Medios Semióticos de Objetivación* (artefactos, gestos, símbolos, palabras) es considerada como recursos semióticos. Para Radford (2003, 2008, 2010b, 2010c)

> los medios de objetivación no son únicamente herramientas por medio de las cuales manipulamos el mundo, sino *Mediadores* de nuestros actos intencionales, portadores de una conciencia histórica construida a partir de la actividad cognitiva de las generaciones precedentes.

De acuerdo con Radford (2008, 2010a, 2010b),los medios semióticos de objetivación estratifican el objeto matemático en niveles de generalidad de acuerdo con la actividad reflexiva que ellos median. En particular, el gesto, en términos de Vergel (2012), es un movimiento corporal que pretende dar sentido a algo, que pretende poner de presente algo, que quiere comunicar algo. Porsu parte, paraVygotski (1997):

> A gesture is specifically the initial sign in which the feature writing of the child id contained as the feature oak is contained in the seed. The gesture is writing in the air and the written sign is very frequently simply a fixed gesture. (p. 133)

Los gestos son elementos indispensables en el proceso de objetivación del conocimiento de los estudiantes, pues éstos ayudan a los estudiantes a hacer visibles sus intenciones, a notar las relaciones matemáticas y a tomar conciencia de los aspectos conceptuales de los objetos matemáticos.

En las investigaciones adelantadas por Radford en el contexto de la generalización de patrones, se ha puesto en evidencia la movilización, por parte de los estudiantes, de variados recursos semióticos (gestos, lenguaje oral, lenguaje escrito, movimiento, artefactos).La movilización de recursos semióticos podría darse en momentos distintos o en un mismo momento. La idea de *nodo semiótico* (Radford, Demers, Guzmán y Cerulli, 2003) es un intento de teorizar la interacción de sistemas semióticos en la objetivación del conocimiento. Según estos autores, un nodo semiótico es una pieza de la actividad semiótica de los estudiantes donde la acción y diversos signos (por ejemplo, gesto, palabra, fórmula) trabajan juntos, sincrónicamente, para lograr la objetivación del conocimiento.

En el marco de la TCO se precisan los procesos sociales por medio de los cuales los sujetos aprenden a pensar de acuerdo a modos culturales ya establecidas. En otras palabras, interesa estudiar el desarrollo conceptual (desarrollo de pensamiento algebraico) a través del diseño e implementación de Tareas[1], que intentarán producir un *desarrollo* en los estudiantes (Miranda, Radford y Guzmán, 2007), visto como un proceso social de aproximación de significados subjetivos o personales a los significados histórico-culturales plasmados en la semiótica algebraica.

De acuerdo con Radford (2006a, 2006b, 2008, 2010), D´Amore (2006),Wertsch (1988) y Vergel (2011), los signos juegan un rol importante en tanto son los elementos que no sólo ayudan a realizar la actividad reflexiva, sino que hacen parte constitutiva de la actividad y de los procesos sociales; al decir de Vergel (2011), la actividad se hace con signos y se piensa con los signos. Entendemos, de acuerdo con Radford (2006b, 2008), los *procesosdeobjetivación* como

> losprocesossocialesatravésdeloscualeslosestudiantescomprendenlalógicaculturalconla quelosobjetosdelconocimientosehandotado,ysefamiliarizanconsuconstituciónhistórica delasformasdeacciónypensamiento.

En Radford (2008) se distinguen dos de estos procesos que el autor llama *Iconicidad* y *Contracción Semiótica.*

[1] Una de las tesis fundamentales en la propuesta teórica de Vygotski es que la instrucción precede al desarrollo, lo cual sugiere que el pensamiento se puede desarrollar.

La iconicidad es una manera de darse cuenta de rasgos similares en un estudio previo a favor del procedimiento que se está realizando. La iconicidad no es sólo el contraste entre dos formas conceptuales; es el proceso mediante el cual los estudiantes se basan en experiencias anteriores para orientarse en una nueva situación. En otras palabras, la iconicidad se basa en la proyección de una experiencia anterior en una nueva, una proyección que trabaja en la identificación progresiva del contexto en aspectos similares y diferentes y que hace posible a través de un movimiento de un lado a otro, la aparición de la segunda forma conceptual; "las cosas similares son similares en algunos aspectos y por tanto diferentes en otros" (Radford, 2008).

La Contracción Semióticaes otro proceso genético[2] de la objetivación del conocimiento, lleva al individuo a hacer una elección entre lo que se considera relevante e irrelevante. La contracción semiótica es el segundo proceso principal de la objetivación, durante éste se limpian los restos de la experiencia de la evolución matemática con el fin de poner de relieve los elementos centrales que la constituyen.

El constructo Contracción Semiótica es también tematizado por D´Amore (2006), en términos de la economía de los recursos semióticos usados, o, en palabras de este autor, como una *sobriedad del pensamiento*[3].

> "El lenguaje algebraico impone una sobriedad a quien piensa y se expresa, una sobriedad en las formas de significación que fue impensable antes del Renacimiento". (p. 5)

[2] El término genético (en ruso geneticheskii) se utiliza con relación a los procesos de desarrollo y no refiriéndose a los genes, código genético o similares (Wertsch, 1988)

[3] El resaltado es mío

La contracción semiótica, por ejemplo producida durante la síntesis de un procedimiento, conduce a una declaración corta, sucinta, económica, que tiene palabras mejor articuladas acompañadas de menos gestos o de gestos mejor articulados.

La concepción de aprendizaje, desde esta teoría, se sustenta en los *procesosdeobjetivación* desarrollados por los estudiantes. En la TCO la cognición es considerada un proceso de objetivación en la cual los signos median la actividad reflexiva, postura que se distancia de otras aproximaciones teóricas, como por ejemplo la de Duval[4]. Más aún, en la perspectiva de Duval, las representaciones semióticas son usadas diacrónicamente a través de las transformaciones de tratamiento y conversión (Duval, 1999, 2001), mientras que en la perspectiva de Radford, un gran número de medios semióticos de objetivación son usados sincrónicamente organizados alrededor de un mediador particular que cambia como lo hace el nivel de generalidad.

En la TCO la actividad matemática es una forma de reflexión que envuelve lo individual como un todo, su conciencia, sentimientos, percepción, actividad sensoriomotora, inmersa en un sistema de significación cultural que orienta sus actos intencionales.

El Pensamiento algebraico desde una perspectiva semiótica cultural

Para efectos del presente estudio, es fundamental tener en cuenta también los trabajos de Radford que están dirigidos a caracterizar el desarrollo del pensamiento algebraico desde el enfoque semiótico cultural, lo que implica que la concepción de pensamiento está en concordancia con la planteada en la teoría cultural de la objetivación y se basa en los presupuestos teóricos de la perspectiva semiótica cultural. En Radford (2010) se menciona que la

[4] De acuerdo con Duval (1999), la semiótica juega un rol representacional y es la substancia de la cognición pues es identificada con la coordinación de sistemas semióticos.

tendencia general en la década de 1980 y principios de 1990 era asociar el álgebra de la escuela y el pensamiento algebraico con el uso de las letras; esta tendencia sigue siendo muy fuerte en las investigaciones actuales sobre la enseñanza y el aprendizaje del álgebra.

En la TCO se busca llamar la atención sobre el hecho de que el lenguaje simbólico del álgebra no es la única herramienta semiótica que da cuenta del pensamiento algebraico.Como señala Mason, citado en Radford (2010), “la manipulación de los símbolos es sólo una pequeña parte de lo que el álgebra es en realidad’’. Las letras, de hecho, nunca han sido niuna condición necesaria ni una condición suficiente para el pensamiento algebraico. Por ejemplo, en su libro LosElementos, Euclides utilizó letras sin pensar algebraicamente. Por el contrario, los matemáticos chinos y babilonios pensaban algebraicamente sin utilizar letras (Radford, 2006) citado en Radford, (2010).

Lo que se propone entonces es que álgebra trata de hacer frente aindeterminación de formas analíticas, pero en lugar de conceder al simbolismo alfanuméricoel derecho exclusivo para designar y expresar la indeterminación, se afirma que se trata desólo una de las varias formas semióticas equipadas para lograrlo.

Ahora, si se postula que el lenguaje alfanumérico del álgebra sólo es una parte de los recursos semióticos que pueden dar cuenta del pensamiento algebraico, es importante reiterarque los signos son considerados en un sentido amplio, como algo que abarca tanto términos lingüísticos escritos como orales, símbolos matemáticos, gestos, etc (Arzarello 2006, Ernest 2008; Radford 2002, citados en Radford 2010).

Partiendo de los elementos teóricos expuestos en los párrafos anteriores, la discusión que se plantea en este momento tiene que ver con la naturaleza del pensamiento algebraico. Radford (2012) postula que en álgebra, para operar con lo desconocido o con cantidades indeterminadas (por ejemplo, variables, parámetros), es necesario pensar de forma analítica. Es decir, se tiene que considerar las cantidades indeterminadas como si se tratara de algo conocido, como si fueran números específicos. Otra característica tiene que ver con el hecho de que en el álgebra las fórmulas se elaboran.

Radford (2012) postula que si el pensamiento es una unidad sistémica de componentes ideacionales y materiales, sería un error estudiar su desarrollo centrado en una de sus componentes solamente, por lo tanto, el desarrollo del pensamiento algebraico no puede reducirse al desarrollo de su componente simbólico. El desarrollo del pensamiento algebraico tiene que ver con la aparición de nuevas estructuras de relaciones sistémicas entre los componentes materiales-ideacionales de pensar (por ejemplo, el gesto, el habla interna y externa) y la manera en que estas relaciones se organizan y se reorganizan.

El pensamiento algebraico no puede reducirse entonces a una actividad mediada por notaciones. Aunque el simbolismo alfanumérico moderno constituye un sistema semiótico muy potente, de ninguna manera puede caracterizar el pensamiento algebraico Radford (2012).

En este contexto, la presente investigación toma como excusa para analizar la naturaleza del pensamiento algebraico la generalización de patrones en secuencias figurales y numéricas. Por esta razón se hace necesario plantear los elementos teóricos que en la perspectiva semiótica cultural se proponen con relación a este tema.

En primer lugar, Radford (2008) dice que la generalización algebraica de un patrón se basa en la capacidad de captar lo común en algunos detalles de una secuencia (por ejemplo $p_1, p_2, p_3, \dots, p_k$), en la ampliación o generalización de esto común con todos los términos posteriores ($p_{k+1}, p_{k+2}, p_{k+3}, \dots$) y en ser capaz de utilizar lo común para proporcionar una expresión para cualquier término de la secuencia. En Radford (2010b) se presenta la siguiente definición de generalización de un patrón:

> Generalizar un patrón algebraicamente descansa en la capacidad de notar una comunalidadsobre algunos elementos de una secuencia **S**, siendo conscientes de que estacomunalidad se aplica a todos los términos de **S** y ser capaz de usarla para proporcionar una expresión directa de cualquier término de la secuencia **S**. (Ver Figura 1)

La idea de comunalidad corresponde a la idea de género en términos aristotélicos, es decir aquello en virtud de lo cual ciertos elementos se mantienen juntos por alguna relación (Vergel, 2012). La generalización algebraica de un patrón se basa en notar lo común en lo local, que puede generalizarse a todos los términos de la secuencia y que sirve como una orden para construir expresiones de elementos de la secuencia que quedan fuera del campo de percepción. El acto perceptivo de darse cuenta de lo común se desarrolla en un proceso mediado por una multiactividad semiótica (palabras habladas, gestos, dibujos, fórmulas) en el curso de que el objeto a ser visto emerge progresivamente. Este proceso de darse cuenta es lo que se denomina un *proceso de objetivación.* A continuación se presenta un esquema que ilustra el proceso de generalización algebraica de un patrón

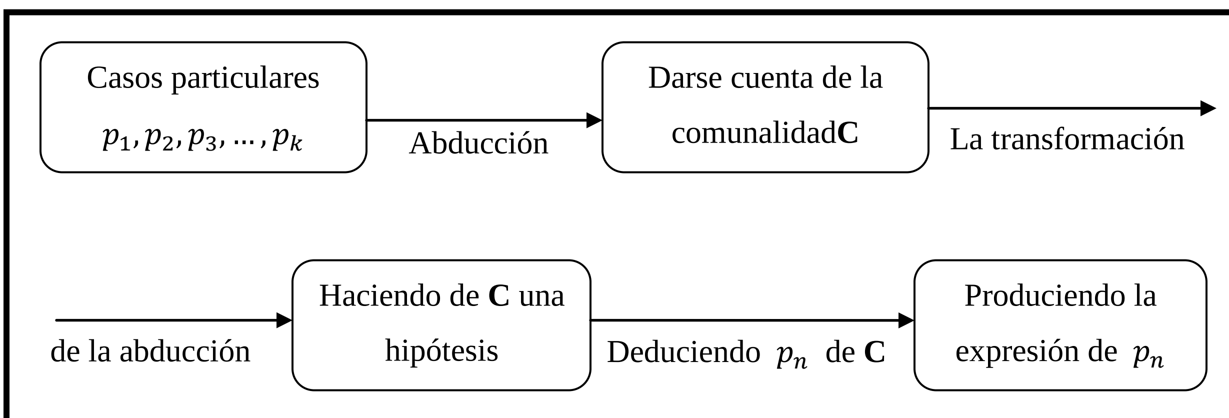


Figura 1. Arquitectura de una generalización de patrones algebraica

Ahora, teniendo en cuenta que la generalización de patrones se encuentra enmarcada por el pensamiento algebraico y es una vía para su desarrollo, Radford (2010b) sugiere una tipología de formas del pensamiento algebraico

- PensamientoAlgebraicoFactual
- PensamientoAlgebraicoContextual
- PensamientoAlgebraicoEstándar

Cabeaclararqueestatipologíanodebeentenderseentérminosdedesarrollosdeetapasenunsentidonaturalista.Latipologíaplanteadaesunintentoporcomprenderlosprocesosquelosestudiantesexperimentancuandoentranencontactoconlasformasdeacción,reflexiónyrazonamientotransmitidasporlapraxis históricamenteconstituidadelálgebraescolar. A continuación se desarrollan las características de cada uno de los tipos de pensamiento.

Enel*PensamientoAlgebraicoFactual*laindeterminaciónquedaimplícitaenpalabrasygestosyelritmoconstituyelasustanciadelasemióticaenlosestudiantesenunprocesollamadoacción-fórmulas.Enel*PensamientoAlgebraicoContextual*laindeterminaciónseconvierteenunobjetoexplicitodeldiscurso.Losgestosyritmossonreemplazadospordeícticoslingüísticos,adverbios,etc.En el *Pensamiento Algebraico Simbólico* las fórmulas en lugar de ser un dispositivo de resumen de cálculos aparecen como narraciones vividas; son iconos que ofrecen una especie de descripción espacial de la figura y acciones que se llevarán a cabo.

Teniendo en cuenta que la investigación presentada en este trabajo se desarrolla con Tareas en las que intervienen lo que aquí se ha llamado secuencias figurales y numéricas a partir de las cuales se plantean una serie de preguntas relacionadas con la identificación del patrón, el cálculo del número de elementos para una cierta figura o posición, entre otras.Es necesario precisar lo que se entiende por cada uno de los dos conceptos. Inicialmente se presenta la definición matemática de sucesión (secuencia):

Se puede definir formal una sucesión de números reales como una aplicación h de los números naturales $\mathbb{N}$en el conjunto $\mathbb{R}$de los números reales:

$$\boldsymbol{h}\colon \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$\boldsymbol{n} \longrightarrow \boldsymbol{h}(\boldsymbol{n}) = \boldsymbol{x}_{\boldsymbol{n}}$$

Laimagen de n recible en nombre de término *n-ésimo* o término general de la sucesión. Se puede también definir una sucesión de números reales como aquella función f cuyo dominio es el conjuntoinfinito de todos los enteros positivos $1, 2, 3, 4, 5, \dots$. El valor $f(n)$ de la función se denomina eltérmino *n-ésimo* de la sucesión.

La idea de sucesión o secuencia en este trabajo está en concordancia con la definición matemática formal y para efectos de la investigación se distingue entre secuencia figural y secuencia numérica.

Una ***secuencia figural*** es una sucesión de este tipo:

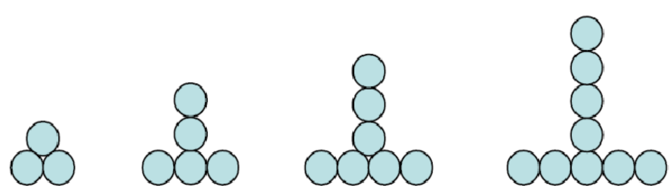


Fig. 1 Fig. 2 Fig. 3 Fig. 4

Y una ***secuencia numérica*** es de este tipo:

3 **7** **11** **15**

Término 1 Término 2 Término 3Término 4

En síntesis, lo expuestos en este marco teórico (la perspectiva semiótica cultural, la teoría de la objetivación, el pensamiento algebraico desde una perspectiva semiótica cultural, entre otros constructos) pretende servir de lentes conceptuales para interpretar la actividad matemática de los estudiantes y su producción cuando se enfrentan a tareas de generalización de patrones se secuencias figurales y numéricas. Dichas tareas se presentan en el siguiente capítulo.

CAPÍTULO 3

METODOLOGÍA

3.1 ASPECTOS GENERALES

La investigación se desarrollóen el Instituto Técnico Industrial Piloto, un colegio de carácter público de la localidad de Tunjuelito de la ciudad de Bogotá-Colombia. Este colegio tiene dos jordanas, mañana y tarde;el estudio presentado aquí se llevó a cabo en la jornada de la tarde con un grupo mixto de 35 estudiantes del grado décimo de la educación mediadivididos en 11 grupos de 3 estudiantes y un grupo de 2 estudiantes.

Las sesiones fueron dirigidas por el autor del presente trabajo quien al mismo tiempo era el profesor titular de la materia de trigonometría que los estudiantes tenían como parte de su plan de estudios del grado décimo.Como investigador tenía la responsabilidad de diseñar e implementar las Tareas, así como recolectar la información relacionada con las producciones matemáticas de los estudiantes para su posterior análisis. La recolección de información se realizó en seis sesiones de 2 horas cada una. Las sesiones se llevaban a cabo en contra jornada, es decir, en la jornada de la mañana; por ende los estudiantes no tomaban las sesiones como una hora de clase cotidiana sino que eran consientes que cada sesión estaba encaminada al desarrollo de la investigación. Las sesiones se realizaban una vez por semana durante seis semanas seguidas.

3.2 DISEÑO METODOLÓGICO

En el presente trabajo se desarrolla una investigación de tipo cualitativo, descriptivo e interpretativo, pues interesa describir las actuaciones matemáticas de los estudiantes y analizar, desde los constructos teóricos de la TCO, sus producciones matemáticas, cuando se enfrentan a Tareas sobre generalización de patrones figurales y numéricas.

El modelo metodológico desarrollado consta de siete fases (Ver Figura 2) y fue desarrollado teniendo en cuenta el diseño metodológico presentado en Radford (2010).

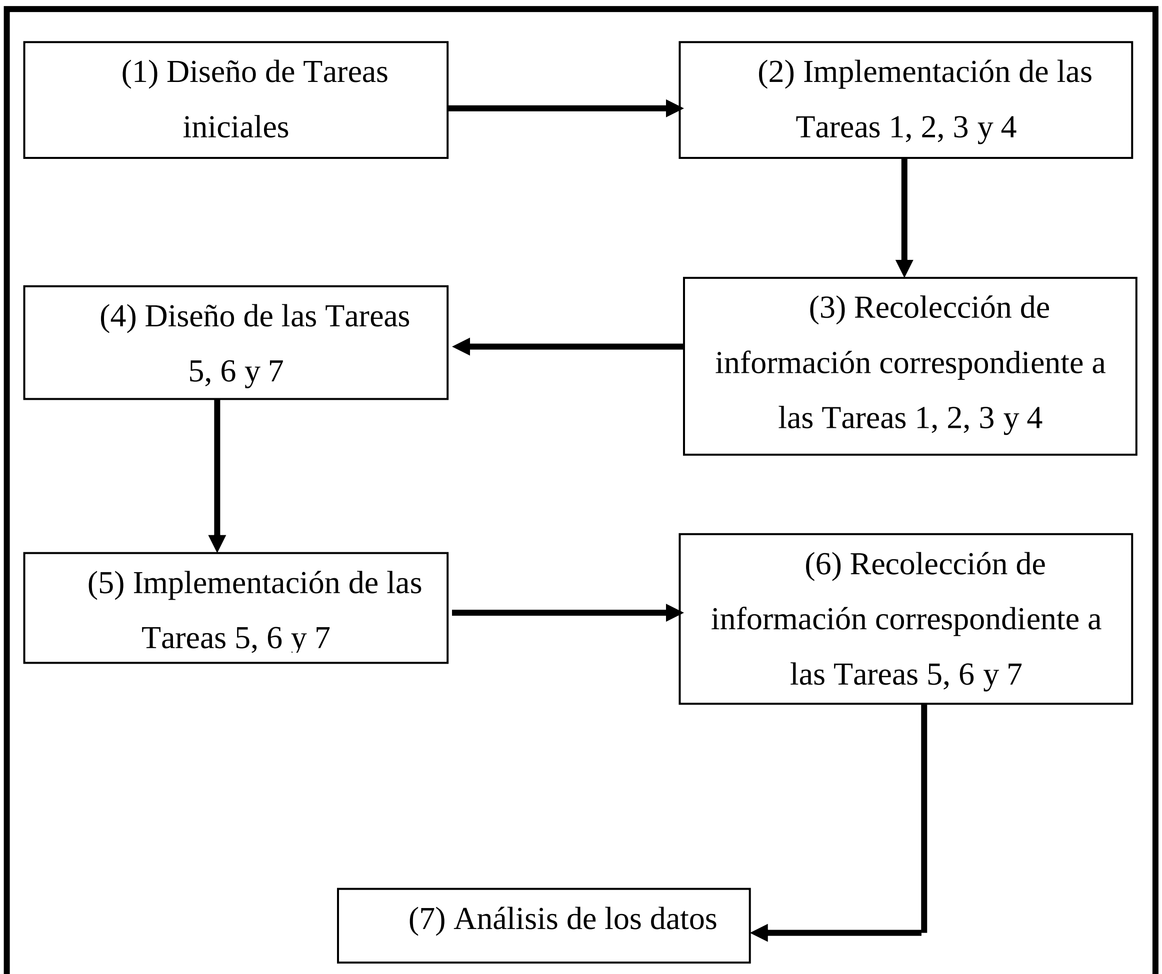


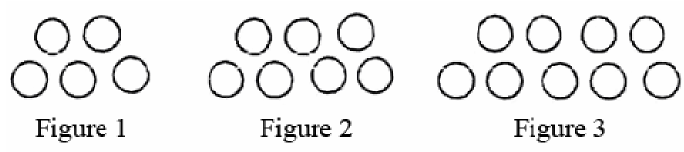
Figura 2. Diseño metodológico

3.2.1 Fase 1: Diseño de Tareas Iniciales

La investigación tuvo dos fases de diseño de Tareas. La fase inicial consta de cuatroTareas y la primera fue utilizada como prueba piloto, mientras que las otras tres se diseñaron partiendo de los resultados observados en la aplicación de la prueba piloto. Las Tareas fueron planteadas tomando las secuencias figurales propuestas por Radford (2006b) (Ver Figura 2) ySanti (2012) (Ver Figura 3, 4 y 5).A continuación se presentan las Tareas diseñadas en esta primera fase de la investigación.

Tarea 1 (Prueba Piloto)

La Tarea 1(Ver Figura 3) es idéntica a la utilizada en Radford (2006b) y se tomó como prueba piloto para la presente investigación. La utilización de esta Tarea tenía como objetivo observar si las preguntas propuestas en los trabajos de Radford, realizados con estudiantes de educación primaria, eran convenientes para el cumplimiento de los objetivos del presente trabajo realizado con estudiantes de grado décimo donde ya han tenido experiencia con el estudio de conceptos propios del álgebra. Más exactamente, el pilotaje buscó determinar si las Tareas que se plantean en los trabajos ya mencionados permiten, en estudiantes de grado décimo, una movilización amplia de medios semióticos de objetivación y así identificar los aspectos relacionados con los procesos de objetivación que se plantean en el marco teórico.

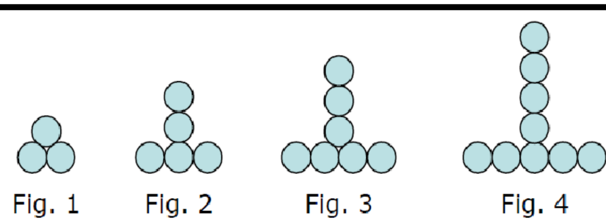


1. Dibujar la Figura 4 y la Figura 5
2. ¿Cuántos círculos habrá en la figura 10?, Y ¿cuántos en la Figura 100?
3. Escribir un mensaje a un estudiante de otra clase en el que se indique la manera de averiguar el número de círculos de cualquier figura.
4. Escribir una fórmula algebraica para el número de círculos en la figura ***n***

Figura 3. Tarea 1 (Prueba Piloto).$[\boldsymbol{a_n = 2n + 3}]$

Tarea 2

Partiendo de los resultados encontrados en la prueba piloto, se diseña la Tarea2 (Ver Figura 4) en la que se utiliza una secuencia figural presentada en Santi (2012) se utilizan las mismas peguntas planteadas en la Tarea 1.



1. Dibujar la Figura 5 y la Figura 6
2. ¿Cuántos círculos habrá en la figura 10?, Y ¿cuántos en la Figura 100?
3. Escribir un mensaje a un estudiante de otra clase en el que se indique la manera de averiguar el número de círculos de cualquier figura.
4. Escribir una fórmula algebraica para el número de círculos en la figura ***n***

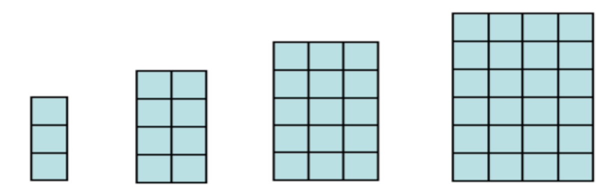
Figura 4. Tarea 2. $[\boldsymbol{a_n = 2n + 1}]$

Tarea 3

Como se puede evidenciar, en las Tareas 1 y 2 se utilizaron secuencias figurales cuyo término general es representado mediante una expresión algebraica lineal. Estas Tareas fueron usadas en los trabajos de Radford los cuales se desarrollan con estudiantes de educación primaria, es decir, estudiantes sin experiencia en el estudio de álgebra por ende con desconocimiento del lenguaje alfanumérico propio de esta disciplina (el álgebra).

En concordancia con lo anterior, para la Tarea 3 (Ver Figura 5) se decidió utilizar una secuencia figural cuyo término general sea representado por una expresión algebraica cuadrática. Esta decisión fue motivada teniendo en cuenta que la investigación se desarrolló con estudiantes de grado décimo lo que implica que ya tenían experiencia en el estudio con conceptos propios del álgebra y se quería observar cómo los estudiantes solucionaban las mismas preguntas de las actividades anteriores pero con una secuencia figural de mayor dificultad.

Para la Tarea 3 se decidió también incluir la pregunta número 5 (Ver Figura 5) que tenía como objetivo indagar cómo los estudiantes encontraban el número de la figura que poseía un número de cuadros dado, en este caso 440 cuadros, y en ausencia de la representación figural.

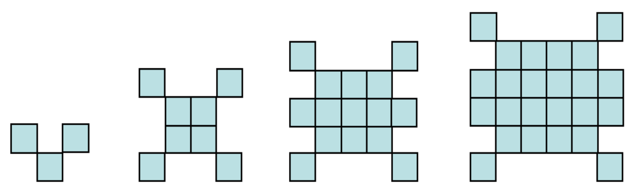


1. Dibujar la Figura 5 y la Figura 6
2. ¿Cuántos cuadros habrá en la figura 10?, Y ¿cuántos en la Figura 100?
3. Escribir un mensaje a un estudiante de otra clase, con todos los detalles, en el que se indique la manera de averiguar el número de cuadros de cualquier figura.
4. Escribir una fórmula algebraica para el número de cuadros en la figura **n**
5. ¿Cuál es la figura que tiene 440 cuadros?

Figura 5. Tarea 3. $[a_n = n^2 + 2n]$

Tarea 4

Para el diseño de la Tarea 4 (Ver Figura 6) se decidió utilizar una secuencia cuyo término general se representara por la misma expresión algebraica de la Tarea 3, la diferencia está centrada en la disposición geométrica de los términos figurales. El objetivo de esta Tareatiene que ver con observar la manera en la que los estudiantes realizan el proceso de generalización de una secuencia figural diferente pero que posee, para su término general, la misma expresión algebraica que una secuencia trabajada anteriormente. Esto con el propósito de observar que tipos de medios semióticos aparecen en las dos Tareas, comparar si son los mismos o aparecen unos nuevos y caracterizar los procesos de objetivación desarrollados por los estudiantes en la solución de las dos Tareas.



1. Dibujar la Figura 5 y la Figura 6
2. ¿Cuántos cuadros habrá en la figura 10?, Y ¿cuántos en la Figura 100?
3. Escribir un mensaje a un estudiante de otra clase, con todos los detalles, en el que se indique la manera de averiguar el número de cuadros de cualquier figura.
4. Escribir una fórmula algebraica para el número de cuadros en la figura **n**
5. ¿Cuál es la figura que tiene 560 cuadros?

Figura 6. Tarea 4. $[a_n = n^2 + 2n]$

3.2.2 Fase 2: Implementación de las Tareas

Para la implementación de estas cuatro Tareas iniciales se utilizaron cuatro sesiones, una sesión por actividad, de 2 horas cada una. Es importante señalar que todas las acciones realizadas por el profesor,encaminadas a dirigir cada sesión, estaban permeadas por los objetivos de la investigación y por tanto eran modificadas, partiendo de lo observado, de una sesión a otra.

3.2.3 Fase 3: Recolección de Información correspondiente a las Tareas 1, 2, 3 y 4

La recolección de información se realizó en grabaciones de video y en los instrumentos (Tareas) entregados a los estudiantes para el desarrollo de cada actividad.En las grabaciones se capturo episodios del proceso realizado por los 11 grupos utilizando una cámara que se desplazaba por cada uno de ellos. En ocasiones sesolicito a los integrantes de algunos grupos que explicarán el procedimiento de solución de la Tarea en cuestión. La Tarea 1 fue entregada a cada estudiante y las grabaciones se realizaron mientras cada grupo daba solución a cada una de las preguntas. En la Tarea 2 se proporcionó un instrumento por grupo y las grabaciones de video se realizaron al final de la actividad y a modo de entrevista grupal en la que cada grupo explicó el proceso realizado para la solución de cada uno de los puntos.

El proceso de recolección de información de la Tareas 3 fue similar al de la Tarea 2, se proporcionó un instrumento por grupo y se realizó una grabación para cada grupo.

Para la Tarea 4 también se entregó un instrumento por grupo pero para realizar las grabaciones se optó por pedirle a cada grupo de estudiantes que socializara a todo el salón el proceso realizado durante la solución de la actividad. Las grabaciones de video se centraron en cada socialización y en las discusiones presentadas en las mismas.

3.2.4 Fase 4: Diseño de las Tareas5, 6 y 7

Las Tareas diseñadas en esta fase son exclusivas para la presente investigación y para su diseño se tuvo en cuenta lo observado en las cuatro Tareas anteriores y el cumplimiento de los objetivos del este trabajo, es por esto que en el diseño metodológico se decidió distinguir dos momentos de diseño de Tareas. En este parte se diseñaron tres Tareas y son presentadas a continuación.

Tarea5

Partiendo de lo observado en las cuatro Tareas anteriores, para el diseño de la Tarea 5 (Ver Figura 7) se decidió eliminar la representación figural de las secuencias y se optó por presentar una secuencia numérica ya que, manera de hipótesis, las secuencias figurales ofrecen índices geométrico espaciales que permiten en los estudiantes movilizar una serie de recursos semióticos que no son movilizados, o al menos no con la misma intensidad cuando se enfrentan a secuencias numéricas. Las preguntas realizadas en esta Tarea son muy similares a las abordadas en las anteriores ya que el propósito era identificar los recursos semióticos movilizados por los estudiantes cuando se enfrentaban a una secuencia numérica ya que, teniendo en cuenta los resultados de las anteriores Tareas, una secuencia de esta clase presentaría más dificultad.

3	**7**	**11**	**15**
Término 1	*Término 2*	*Término 3*	*Término 4*

1. ¿Cuál es el término 5 y el término 6?
2. ¿Y el término 10? ¿Puede determinar el término 100?
3. Escribir un mensaje a un estudiante de otra clase, con todos los detalles, en el que se indique la manera de encontrar el número correspondiente a los términos 5, 6, 10 y 100
4. Escribir una fórmula algebraica para el número que se encuentra en el término***n***
5. ¿En qué término se encuentra el número 287?

Figura 7. Tarea 5. $[a_n = 4n - 1]$

Tarea 6

Para la Tarea6 (Ver Figura 8), al igual que en la Tarea 5, se planteó una secuencia numérica. La diferencia radica en que el término general de la secuencia se representa por medio de unaexpresión algebraica cuadrática mientras que en la Tarea5 el término general de la secuencia se representa con una expresión algebraica lineal. El propósito de la Tarea 6 es observar lo mismo que en la Tareas 5 pero con una secuencia de mayor dificultad para en el proceso de generalización.

0	**3**	**8**	**15**
Término 1	*Término 2*	*Término 3*	*Término 4*

1. ¿Cuál es el término 5 y el término 6?
2. ¿Y el término 10? ¿Puede determinar el término 100?
3. Escribir un mensaje a un estudiante de otra clase, con todos los detalles, en el que se indique la manera de encontrar el número correspondiente a los términos 5, 6, 10 y 100
4. Escribir una fórmula algebraica para el número que se encuentra en el término***n***
5. ¿En quetérmino se encuentra el número 400?

Figura 8. Tarea 6. $[a_n = n^2 - 1]$

Tarea 7

La Tarea 7 (Ver Figura 9) corresponde a la última Tarea de la secuencia de Tareas diseñadas para la investigación objeto del presente trabajo. Consta de dos puntos; en el primero, se presenta la expresión correspondiente al término general de una secuencia cuadrática y se le pide a los estudiantes que construyan una secuencia figural y una secuencia numérica que corresponda a dicha expresión. Además se les solicita la redacción de una explicación de la forma de proceder en los dos casos. En el segundo punto, se les presenta la expresión algebraica correspondiente a dos secuencias numéricas y se les pide encontrar los 5 primeros términos de las dos secuencias, al igual que en el primer punto, se les solicitó que redactaran una explicación que especificara la forma de proceder que les permitió encontrar los términos pedidos en las dos secuencias. Una característica importante de las dos secuencias presentadas en este punto tiene que ver con la aparición de términos no enteros, característica que no poseen ninguna de las secuencias presentadas anteriormente. El propósito de esta Tareas es identificar los recursos semióticos así como los procesos de objetivación desarrollados por los estudiantes al construir una secuencia (figural y/o numérica) partiendo de la expresión algebraica del término general.

1. La siguiente expresión corresponde al término general de una secuencia:

$$\boldsymbol{a_n = n^2 + n}$$

- Construya dos secuencia, una figural o geométrica y otra numérica, cada una con los 5 primeros términos
- Redacte una explicación de la manera como encontró los términos de las dos secuencias

2. La siguientes expresiones corresponden a la fórmula general de dos **secuencias numéricas**

$$\boldsymbol{a_n = \frac{n^2 + 1}{2}}$$

$$\boldsymbol{a_n = \frac{n^2}{2} + 1}$$

- Escribir los 5 primeros términos de cada una de las secuencias.
- Redacte una explicación de la manera como encontró los términos de las dos secuencias

Figura 9. Tarea 7

3.2.5 Fase 5: Implementación de las Tareas 5, 6 y 7

Estas tres últimas Tareas se implementaron en 2 sesiones de 2 horas cada una, en la primera se desarrollaron las actividades 5 y 6; en la segunda se implementó la Tarea 7. La ubicación espacio-temporal[5] en este caso fue la misma que en las Tareas iniciales.

3.2.6 Fase 6: Recolección de Información correspondiente a las Tareas 5, 6 y 7

Para la recolección de la información correspondiente a las Tareas 5 y 6 se decidió que los estudiantes las abordaran individualmente, luego se reunieron en grupos para construir una solución grupal partiendo del proceso desarrollado individualmente. La solución grupal fue recogida en un nuevo instrumento al mismo tiempo que se realizaba una grabación de la construcción de dicha solución al interior de cada grupo. Por último se le solicitó a los grupos que socializaran el proceso realizado, dicha socialización fue capturada en una grabación de video. La Tarea 7 fue entregada a cada uno de los integrantes del grupo y éstos la enfrentaron conjuntamente pero se les exigió que la solución a la misma fuera construida de manera individual. En este punto de la investigación las grabaciones no se enfocaron en los 11 grupos participantes de las sesiones, esto es, se decidió darle prioridad, en las grabaciones, a los grupos que asistieron y participaron en cada una de las 7 Tareas planteadas.

3.2.7 Fase 7: Análisis de los Datos

El trabajo realizado con estos estudiantes demandó por parte de la investigación concentrar las actividades matemáticas en los estudiantes que asistían regularmente a todas las sesiones

[5] La ubicación espacio-temporal refiere a que las Tareas fueron implementadas los días jueves, en el mismo salón, y durante el mismo tiempo (2 horas)

programadas. De esta manera se conformaron tres grupos, uno de dos estudiantes y los otros dos de tres estudiantes. Para el análisis de los datos se realizó la transcripción de todos los videosen los que los grupos aparecían explicando las producciones matemáticas a las siete Tareas planteadas. En consonancia con el objetivo de investigación formulado en este trabajo y con el marco teórico adoptado, se procedió a seleccionar los episodios más importantes en los cuales los estudiantes movilizaban distintos medios semióticos de objetivación al enfrentar las Tareas. Los episodios seleccionados van acompañados de imágenes escaneadas de las Tareas desarrolladas por los estudiantes y de capturas en imágenes (fotos) de los instantes en que ellos están movilizando los diferentes recursos semióticos y presentando evidencias de los procesos de objetivación desarrollados, lo cual permite realizar una triangulación en la interpretación teórica de los datos seleccionados.

Si bien se cuenta con evidencias de las producciones matemáticas de los tres grupos, en este trabajo sólo se presenta el análisis de la producción del Grupo 1 (Michael, Cristian y Andrés), considerado como Grupo Focal.El criterio teórico para analizar este grupo obedece a la diversidad en las formas de proceder en cada Tarea, lo cual evidencia una multimodalidad del pensamiento al enfrentarlas. Aspectos relevantes del análisis de la producción matemática del Grupo 2 se han dejado como parte de los anexos del presente estudio.

Como ya se ha mencionado, el propósito de la investigación aquí reportada se enfoca a identificar y analizar los recursos semióticos que son movilizados por los estudiantes cuando se enfrentan a la solución de Tareas de generalización de patrones en secuencias figurales ynuméricas y a analizar los procesos de objetivación desarrollados por los estudiantes durante la solución de las sieteTareas propuestas. En este contexto, a través de la revisión y estudio de la TCO, se identifican algunos constructos teóricos que permiten explicar las actuaciones matemáticas de los estudiantes. En este estudio se propone, inicialmente, los siguientes medios semióticos de objetivación: gestos como señalamientos e inscripciones, y actividad perceptual. En relación con los procesos de objetivación, inicialmente consideramos dos categorías: Iconicidad y Contracción semiótica.

CAPÍTULO 4

ANÁLISIS MULTIMODAL

En este capítulo se presentará el análisis de los datos seleccionadospartiendo de la naturaleza de la investigación y los objetivos presentados en el Capítulo 1. De esta manera, y teniendo en cuenta que la investigación aquí presentada se encuentra enmarcada en la perspectiva Semiótica cultural y es sustentada por la Teoría Cultural de la Objetivación propuesta por Radford (2006a), se realizó un análisis basado en una *concepción multimodal del pensamiento humano*(Radford, Demers, Guzmán y Cerulli, (2003); Arzarello, 2006). Para estos autores, es importante la inclusión del cuerpo en el acto de conocer, por lo que es clave en este análisis la consideración de los recursos cognitivos, físicos y perceptuales que las personas utilizan cuando trabajan con ideas matemáticas.En términos de Arzarello (2006) y Vergel (2012), dicho análisis debe tener en cuenta la relación de los diferentes recursos semióticos movilizados durante la actividad (lenguaje escrito, lenguaje hablado, gestos, acciones, etc.). Ni lo escrito, ni lo hablado, ni lo gesteado por los estudiantes será analizado de manera aislada, por lo que este análisis multimodal, a partir de los videos, pretende rastrear los procesos de objetivación de los estudiantes. Estos recursos o modalidades incluyen también comunicaciones simbólicas y orales así como dibujos, la manipulación de artefactos y movimiento corporal (Arzarello, 2006; Radford, Edwards y Arzarello, 2009)

Husserl (1931); Gelhen (1988); Merleau-Ponty (1945), citados en Radford, Edwards y Arzarello (2009), coinciden en un punto:

> Knowledge is much more than the result of formal abstract deductive mechanisms. Crucial to the production of knowledge is the individual´s experience in the act of knowing and the fact that this experience is mediated by one´s own body.

Lo que en términos de Nemirovsky and Borba (2003) y Vygotski (2000) es planteado como:

> […] Understanding and thinking are perceptuo-motor activities; furthermore, these activities are bodily distributed across different areas of perception and motor action based on how we have learned and used the subject itself. [As a consequence]the understanding of a mathematical concept, rather than having a definitional essence, spans diverse perceptuo-motor activities, which become more or less active depending on the context.

En síntesis, la naturaleza multimodal de la cognición significa que en nuestros actos de conocimiento, diferentes modalidades sensoriales, tales como lo táctil, perceptual, kinestésico, etc, *llegan a ser partes integrales de nuestros procesos cognitivos*[6].

El análisis multimodal que se realizó al Grupo Focal rastreó la actividad matemática realizada por sus integrantes a través de las siete Tareas propuestas, punto por punto (es decir, pregunta

[6] La insistencia aquí coincide con la idea de signo expuesta en los trabajo de Vygotski y Radford, para quienes el signo es un elemento constitutivo del pensamiento, la actividad se hace con y a través de los signos.

por pregunta) y se realizó al final de la Tarea una mirada longitudinal de los recursos semióticos movilizados y de los procesos de objetivación desarrollados por los estudiantes. En los diálogos que se presentan, tomados de la trascripción de los videos, los comentarios del investigador se escriben entre paréntesis cuadrados y el diálogo se escribe con letra cursiva.

4.1 ANÁLISIS MULTIMODAL DEL GRUPO FOCAL

Tarea 1 (Prueba Piloto)

La Tarea1 es tomada de Radford (2006b) y en la presente investigación fue planteada como prueba piloto para evaluar la pertinencia de las preguntas propuestas por Radford para esta Tarea en estudiantes de grado décimo. La evaluación de dicha pertinencia se realizó atendiendo al hecho que en las investigaciones realizadas por Radford esta Tarea es aplicada a estudiantes de educación primaria que aún no han tenido experiencia con el estudio del álgebra. Además, este pilotaje posibilitó afinar las Tareas y corroborar algunas hipótesis asociadas con los recursos semióticos que movilizan los estudiantes y los procesos de objetivación que desarrollan.A continuación se reporta dicho proceso discriminando las soluciones dadas por los estudiantes a cada uno de los puntos.

Punto 1: Dibujar la Figura 4 y la Figura 5

Los estudiantes cuentan el número de círculos de las figuras y rápidamente se fijan en el número de círculos que se aumentan de una figura a otra (2 círculos), de esta manera concluyen que en la figura 4 hay 11 círculos y en la figura 5 hay 13 círculos.

L1. Michael: De *la figura 1 a la figura 2 se aumentan 2. Este es 5 acá pasa a ser 7* [señalando la figura 1 y la figura 2 respectivamente] *de la figura dos a la figura 3 también 2. Aquí hay 5, 7 y 9* [señalando la figura 1, la figura 2 y la figura 3 respectivamente]. (**Ver Imagen 1)**

L2. Cristian: Aquí *serían 11 y 13* [refiriéndose a la figura 4 y a la figura 5 respectivamente]

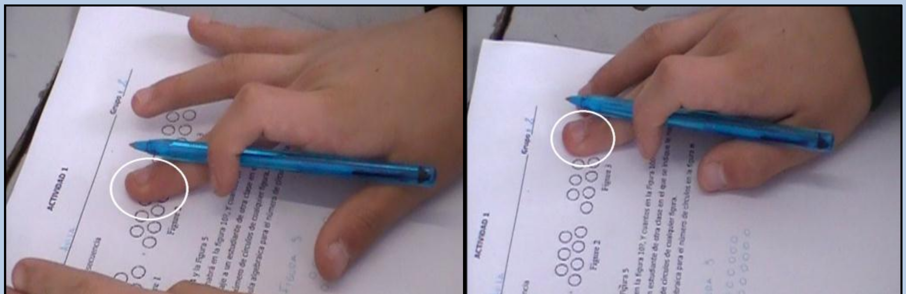


Foto 1	Foto 2

Imagen 1. *Michael explicando el número de círculos que se aumenta de una figura a otra*

En la Imagen 1 se observa dos gestos realizados por Michael. En la Foto 1 el estudiante tapa con su dedo dos círculos de la figura 2 para realizar una comparación con la figura 1 y observar que la figura 2 es la misma figura 1 más dos círculos. En la Foto 2 se observa a Michael tapando dos círculos de la figura 3 y de esta manera puede afirmar que la figura 3 es la misma figura 2 más dos círculos. Estos dos gestos sugieren que los estudiantes lograron identificar el patrón de regularidad fijándose en el aspecto espacial de la secuencia, que es lo que Duval (1999) llama aprehensión operatoria, es decir, la aprehensión de la figura en sus diferentes modificaciones posibles. En términos de León (2005), los tratamientos asociados a este tipo de aprehensión son: 1) las modificaciones mereológicas, que consisten en partir una figura para reconfigurarla en otra figura; 2) las modificaciones ópticas de ampliación o de reducción o de deformación de la figura; y 3) las modificaciones posicionales de desplazamiento o de giro. Según León (2005) estas modificaciones son efectuadas al interior del registro figural siguiendo sólo las leyes y parámetros de organización de los elementos de la figura y por lo tanto no requieren del conocimiento matemático, requiere del uso de algún instrumento de construcción.

El gesto realizado en este caso (*tapar y destapar)*constituye un medio semiótico de objetivación, ya que es utilizado por Michael (Ver Imagen 1) para realizar una comparación de una figura con la figura inmediatamente anterior. De esta manera Michael puede hacer visible y comunicar el reconocimiento de lo común (la comunalidad) entre las figuras presentadas en la secuencia. La importancia de fijarse en estos gestos radica en el hecho que nosestá mostrando la manera en la que los estudiantes reconocen el patrón de regularidad, un elemento esencial en el proceso de generalización. Esto también es evidente cuando Cristian (Ver L2) afirma que en la figura 4 hay 11 círculos y en la figura 5 hay 13 círculos.

Punto 2: ¿Cuántos círculos habrá en la figura 10?, Y ¿cuántos en la Figura 100?

L3. Cristian: *Para saber en la figura* 10, *primero* $5 * 2$[alza la voz], 10 *sí, y* $10 * 5$, 50. *[…] si se suben por* 2 *y tenemos que subirlo* 10 *veces, tenemos el* 5*¿cierto?, y multiplicamos por* 2 *es* 10, *serían* 20[refiriéndose al número de círculos de la figura 10]

L4. Michael: *Serian* 25, *si, mire y ¡vera! En la figura* 5 *hay* 13, *en la figura* 6 *habría*15, *en la figura* 7 *habría*17, *en la figura* 8 *habría*19, *en la figura...... habría* 23[refiriéndose al número de círculos de la figura 10]

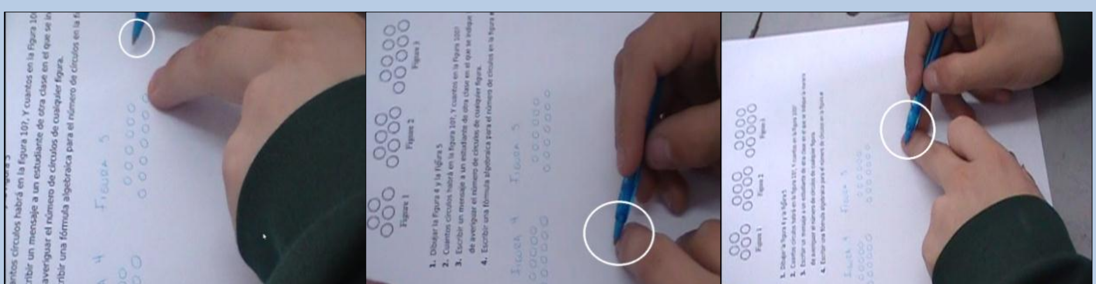


Foto 3	Foto 4	Foto 5

Imagen 2. *Gestos realizados por Michael para la figura 6, 7 y 8*

En este punto los estudiantes recurren a la multiplicación para encontrar el número de círculos que hay en la figura 10 (Ver L3). Inicialmente parten del número de círculos que se aumentan(dos círculos), Cristian sugiere multiplicar el número de círculos de la figura 1 (5 círculos) por 2 (número de círculos que se aumentan). Luego proponen multiplicar 10 por dos, esto partiendo del hecho de que de una figura a otra se aumenta 2 círculos y como están buscando el número de círculos de la figura 10 entonces $10 * 2$ daría como resultado el número de círculos que hay en la figura 10.

La intervención estuvo acompañada de una serie de gestos sobre la hoja de trabajo (Ver Imagen 2). Michaelrecitaba el número de círculos que debería haber en las figuras 6, 7 y 8, al mismo tiempo señalaba la hoja para indicar las posiciones de cada una de las figuras sin dibujarlas. En la Foto 3se observa el gesto, realizado por Michael, correspondiente a la figura 6 diciendo que en esa figura habría 15 círculos. En la Foto 4 el gesto ahora es para indicar a la figura 7 en la que debería haber 17 círculos. En la Foto 5Michael realiza el gesto para la figura 8 afirmando que debería haber 19 círculos. Esto le sirvió para armar la secuencia, imaginariamente, hasta la figura 10, lo que le permitió al grupo concluir que en la figura 10 deberían haber 23 círculos. Teniendo este hecho Michael se cuestiona del por qué en la figura 10 hay 23 círculos.

L5. Michael: *Habrían 23 pero ¿por qué?......ahh, a nosotros nos dicen dibujar la figura 4 y 5. En la figura 5 ya hay 13, o sea que faltan 5 mas figuras. En cada figura se le aumentan 2 entonces 5 por 2 daría 10, 13 más 10 da 23.*

L6. Cristian:*¡Eso!*

Los estudiantes encuentran el número de círculos de la figura 10 y buscan una manera de calcular ese número de círculos sin necesidad de considerar todas las figuras. En este momento el grupo siente la necesidad de encontrar un método que les permita calcular el número de círculos de figuras más remotas, como la figura 100. Esta necesidad es un paso importante para la posterior generalización de la secuencia presentada. Es así como el grupo inicia un procedimiento para encontrar el número de círculos de la figura 100, encontrando el número de círculos de las figuras 20, 30, 40,... De acuerdo con Radford (2010), el pensamiento algebraico contextual esta caracterizado por la movilización de recursos semióticos como frases claves, por ejemplo "*En cada figura se le aumentan 2 entonces 5 por 2 daría 10, 13 más 10 da 23*", es decir, una frase como clave como la anterior sustituye recursos semióticos como el gesto y las inscripciones, lo cual significa que el estudiante se está moviendo en otro contexto cuando enfrenta la Tarea, de ahí el nombre de contextual.

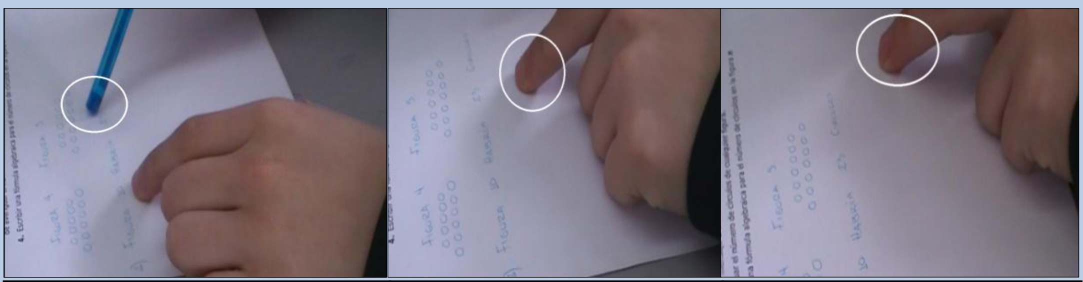


Foto 6	Foto 7	Foto 8

Imagen 3. *Gestos de Michael para las figuras 20, 30 y 40*

En la Imagen 3 se observan los gestos de señalamiento realizados por Michael para la figura 20 (Foto 6), para la figura 30 (Foto 7) y para la figura 40 (Foto 8). En este caso vuelven aparecer los gestos que indican una secuencia imaginaria pero esta vez Michael va formando la secuencia de 10 en 10. Para aclarar la explicación dada por los estudiantes el profesor interviene para que el grupo explique el procedimiento que están siguiendo.

L8. Profesor: *Me podrían explicar ¿cómo saben eso?*

L9. Cristian:*Miramos que de la figura 10 a la figura 20 haciendo los cálculos sumando de dos en dos, el número de círculos que se pasa son 20. Entonces empezamos a sumarle 20 a cada 10 figuras.*

L10. Michael:*Cada 10 figuras se suma 20 círculos*

L11. Andrés:*Deberíamos escribir para no perdernos*

El grupo acepta la propuesta deAndrés y decide construir una tabla con el número de la figura y el número de círculos de cada una (Ver Imagen4). Con la ayuda de la tabla los estudiantes concluyen que cada 10 figuras se suman 20 círculos.

L12. Michael:*Cada 10 figuras se suman 20 círculos*

L13. Cristian:*Entonces al 23 le tendríamos que sumar 10 veces 20...entonces* 203 [refiriéndose al número de círculos que hay en la figura 100]

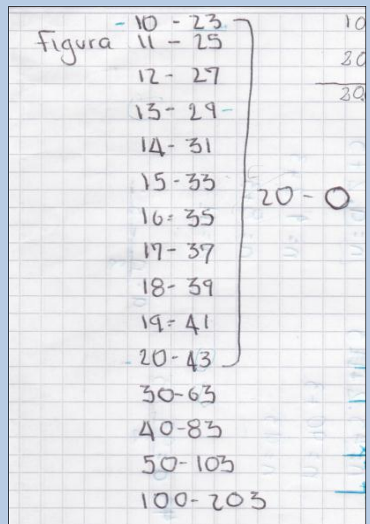


Imagen 4

El uso de una tabla para armar la secuencia de las figuras junto con el númerode círculos que se encuentran en cada una es lo que Radford(2006, 2010) llama el uso de artefactos para mediatizar el pensamiento. En este caso pormedio de la construcción de la tabla, el grupo pudo identificar que cada 10 figuras el número de círculos va aumentando en razón de 20círculos (Ver L12). Es así como logran llegar al número de círculos que habría en la figura 100, Esto lo hacen completando la tabla de 10 en 10 hasta la figura 50 y luego aumentan 50 figuras hasta la figura 100 (Ver Imagen 4). La construcción de la tabla (artefacto cultural) anterior sugiere pensar que la generalidad se basa en acciones realizadas en los números, las actuaciones aquí han constado de palabras, gestos y actividad perceptual, por lo que, al parecer, los estudiantes están evidenciando un pensamiento algebraico factual.

Punto 3: Escribir un mensaje a un estudiante de otra clase en el que se indique la manera de averiguar el número de círculos de cualquier figura.

En proceso de construcción del mensaje, los estudiantes continuaron fijándose en el número de círculos que se aumentan cada 10 figuras. Sin embargo el grupo introdujo en la secuencia una nueva figura que ellos llamaron "figura cero" (Ver L14).

L14. Cristian: *De la figura cero a la figura 10 hay 20 círculos*

Esta nueva figura apareció de la necesidad de explicar cómo cada 10 figuras se van aumentando 20 círculos. De esta manera podemos afirmar que la "figura cero" es un medio semiótico de objetivación, en tanto es un recurso potente que emerge para justificar que de la figura 0 a la figura 10 hay 20 círculos.

El proceso a seguir fue encontrar un método de cálculo para el número de círculos que hay en cualquier figura, para este fin los estudiantes utilizan casos particulares para probar sus conjeturas, lo que les es útil para construir el siguiente mensaje.

Mensaje:

1. *Hallar la figura 0*
2. *Multiplicar la figura que se necesita por el número o cantidad de círculos que se avanzan de una figura a otra*
3. *Sumarle al resultado la cantidad de círculos de la figura 0*

La llamada figura 0 cobra una gran importancia en el proceso de generalización, ya que el número de círculos de esta figura (3 círculos) corresponde al número de círculos constantes que se le debe sumar a la expresión algebraica$(2n + 3)$ que representa la secuencia presentada en esta Tarea. En términos de Radford (2006d), el pensamiento algebraico, como forma particular de reflexionar matemáticamente, de manera funcional, es caracterizado mediante tres elementos interrelacionados: a) el sentido de indeterminación (objetos básicos como: incógnitas, variables y parámetros); b) la analiticidad (como forma de trabajar los objetos indeterminados) y c) la designación simbólica de sus objetos. La producción matemática de este grupo "*Multiplicar la figura que se necesita por el número o cantidad de círculos que se avanzan de una figura a otra",* evidencia, por un lado un sentido de la indeterminancia (la figura que se necesita), y por otro, la analiticidad ("*Multiplicar la figura que se necesita por el número o cantidad de círculos que se avanzan de una figura a otra"*). Más aún, este grupo designa simbólicamente con el nombre de (*la figura*) y en este estado actual no recurre a los signos alfanuméricos del álgebra. Esta situación confirma una vez más que los sujetos piensan y realizan actividad reflexiva a partir de los signos (vygotskianos) que tienen a su disposición, es decir, los signosutilizados por los estudiantes y la forma como éstos son usados (Radford, 2004, 2006a, 2006b, 2006c, 2010) les permiten reflexionar sobre el mundo.

Punto 4: Escribir una fórmula algebraica para el número de círculos en la figura n

En este último punto de la Tarea los estudiantes se cuestionan por el significado de la letra n, significado que es importante para posibilitar expresar una fórmula algebraica que generalice la secuencia.

L15. Cristian: *La figura n sería a la figura que tenemos que llegar*

L16. Michael: *¿Será?*

L17. Andrés: *¡Sí!*

Aceptando la afirmación de Cristian (Ver L15) Michael propone la siguiente expresión: $n = a * 2 + 3$ (Ver Imagen 5), y con el fin de probar la veracidad de esta expresión el grupo recurre a casos particulares (Ver Imagen 6).

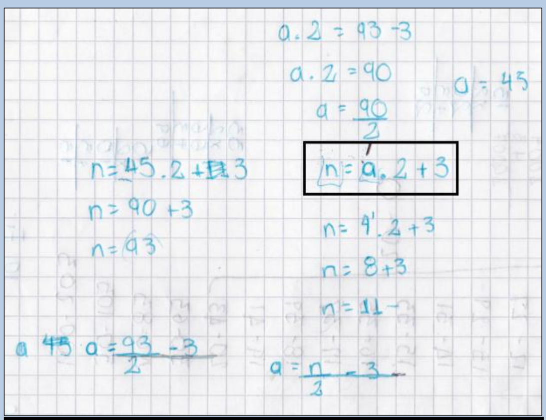


Imagen 5

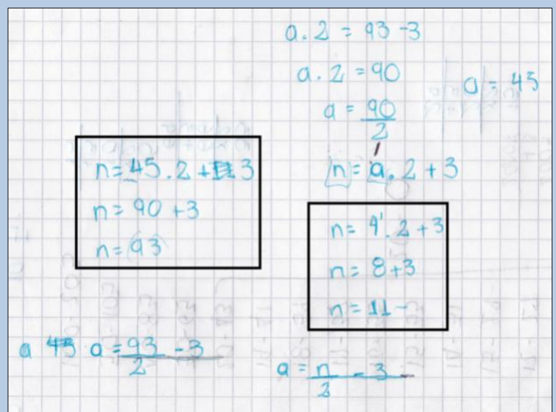


Imagen 6

Michael se pregunta sobre el significado de la letra n en la expresión anterior y Cristian responde que se trata del número de círculos que hay en cada figura (Ver L18). A partir de esta discusión, Cristian declara que la letra a corresponde al número de la figura.

2

L18. Cristian: *Si necesitamos sacar el número de la figura, sería* a *por* 2 *dividido* n *menos* 3. *¿Cierto?*

L19. Michael: a *sería igual a* n *dividido* 2 *menos* 3. (Ver Imagen 7)

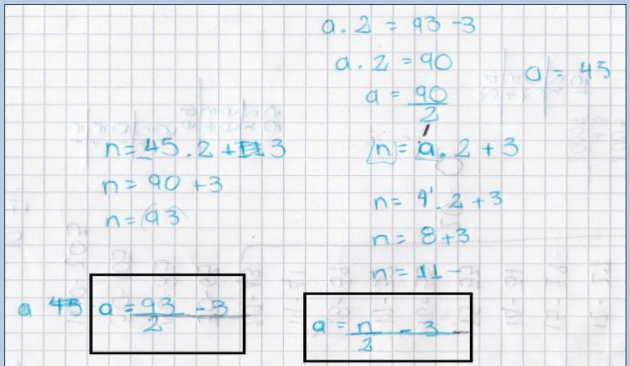


Imagen 7

En este momento los estudiantes vuelven a recurrir a un caso particular para comprobar si su conjetura es correcta. Utilizan el número de círculos de la figura 45(Ver Imagen 7) ya que este número de círculos lo hallaron por medio de la tabla anteriormente construida. Así concluyen que la fórmula debería ser: $\boldsymbol{n = a * 2 + 3}$ para calcular el número de círculos de una figura cualquiera y $\boldsymbol{a = \frac{n-3}{2}}$ para calcular el número de la figura. Con $n = Número\ de\ círculos$ y $a = Figura$. (Ver Imagen 8)

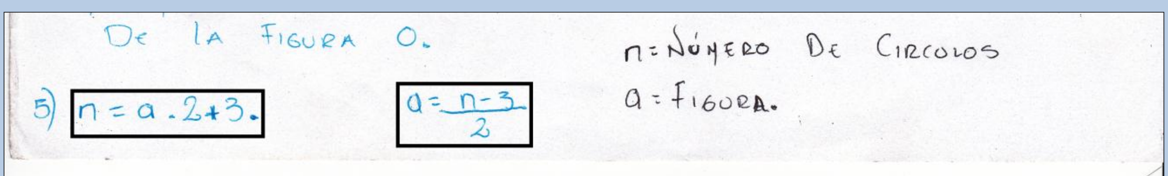


Imagen 8

De esta manera se pone en evidencia que los estudiantes no llegan a la fórmula esperada $\boldsymbol{a_n = 2n + 3}$, sin embargo proponen una expresión que les permite calcular el número de círculos para una figura cualquiera dependiendo del valor que ellos mismos le dan a las letras de la expresión. Si bien, al parecer, no se evidencia un reconocimiento de la relación funcional que existe entre el número de la figura y el número de círculos de la misma, debido a las variables que introducen, lo que sí es cierto, para ellos, es que los signos que introducen y la manera como los introducen les posibilita dar respuesta a la Tarea; particularmente se evidencia que el grupo ha identificado el patrón de generalización.

La producción matemática desarrollada por este grupo evidencia un proceso de objetivación de contracción semiótica (Radford, 2008), pues a lo largo de las respuestas a las preguntas formuladas hay una reducción de recursos semióticos, desde las inscripciones y señalamientos hasta expresiones algebraicas como las propuestas en el punto 4. En particular, la producción matemática de los estudiantes frente al punto 3, "*Escribir un mensaje a un estudiante de otra clase en el que se indique la manera de averiguar el número de círculos de cualquier figura*", sugiere un desarrollo del pensamiento, lo que en términos de Vygotski se ha llamado proceso genético; además el diseño de la Tarea confirma una de las tesis fundamentales en el enfoque teórico de propuesto por Vygotski según la cual la instrucción precede al desarrollo.

Síntesis sobre la actividad asociada con la Tarea 1

Como ya se mencionó anteriormente, la Tarea 1 fue tomada como prueba piloto para la investigación con el propósito de observar la pertinencia de las preguntas utilizadas por Radford (2006b) en el presente estudio. Como se pudo establecer, el análisis de la actividad muestra características del pensamiento algebraico y los medios semióticos de objetivación correspondientes, lo que permite concluir que Tareas como la propuesta en este pilotaje con su análisis de la actividad posterior posibilita acercarnos a responder la pregunta de investigación formulada. De esta manera, las Tareas siguientes tienen las mismas preguntas y variarán únicamente en la secuencia presentada. Para el análisis de los datos se prestará especial atención al proceso llevado por los estudiantes hasta plantear la fórmulaalgebraica que generaliza la secuencia.

Tarea 2

Punto 1: Dibujar la Figura 4 y la Figura 5

Para la solución de este punto, los estudiantes utilizanla experiencia ganada con la Tareaanterior (centrar la mirada en el número de círculos que se aumenta de una figura a otra) y la utilizan para encontrar, en esta Tarea, el número de círculos que se aumenta de una figura a otra (Ver L1). Según Radford (2008), los estudiantes capturan la lógica cultural con que la secuencia ha sido presentada y empieza a familiarizarse con las formas de acción previas capitalizadas en la prueba piloto. En otras palabras se evidencia un proceso de objetivación de iconicidad.

L1. Michael:*Para hallar la figura 5 y 6 nos dimos cuenta que de una figura a otra avanzaba de a dos círculos* [esta explicación va acompañada de una serie de gestos (**Ver Imagen 9**)], *entonces si en la figura 4 habían*(sic)*9 círculos...* (**Ver Foto 11**).

L2. Andrés: *En la figura 5 habrían*(sic) *11*

L3. Cristian, Michael [hablan al mismo tiempo]: *¡Y en la figura 6 habrían*(sic)*13!* [Los estudiantes hacen esta afirmación subiendo el tono de la voz]

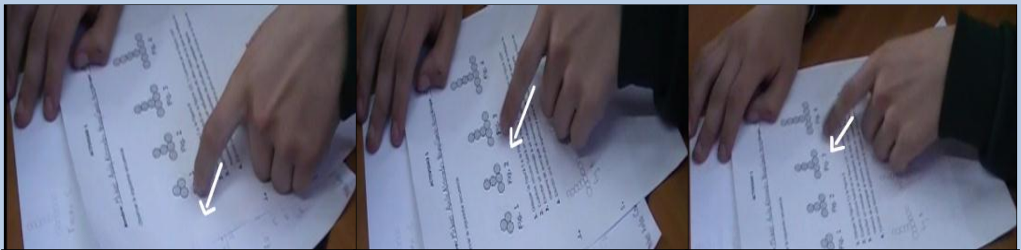


Foto 9	Foto 10	Foto 11

Imagen 9. *Gestos realizados por Michael al explicar que de una figura a otra se avanza de a doscírculos.*

En L2se evidencia cómo los estudiantes, después de identificar el número de círculos que aumenta de una figura a otra, pueden determinar el número de círculos que tendrá la figura 5 y en L3 declaran que en la figura 6 debe haber 13 círculos.Cuando hacen dicha afirmación Cristian y Michael hablan al tiempo subiendo el tono de la voz, lo cual es un indicador de que los estudiantes han reconocido el patrón de formación de la secuencia. Wolff y Radford (2011) yRadford (2006b, 2010a, 2010b) sostienen que el tono de la voz utilizado por los estudiantes durante la explicación de algún proceso debe ser considerado como un medio semiótico de objetivación que da cuenta de los descubrimientos hechos durante una actividad matemática, en este caso nos muestra que el grupo ha aceptado conjuntamente que en la secuencia presentada el número de círculos que se aumenta (los estudiantes lo llaman avanzar) de una figura a otra es igual a dos círculos.

Los señalamientos mostrados en la Imagen 9 ponen en evidencia que los estudiantes no se fijan en la configuración espacial de las figuras de la secuencia, ya que ellos van señalando de una figura a otra explicando el número de círculos que se aumenta, o, en palabras de los estudiantes, el número de círculos que se avanza.

Punto 2: ¿Cuántos círculos habrá en la figura 10?, Y ¿cuántos en la Figura 100?

Para encontrar el número de círculos de la figura 10, inicialmente, Michael realizaacciones sobre números, movilizan actividad perceptual, palabras y señalamientos.

L4. Michael:*En el punto 2 para hallar la figura 10*[Continúa mirando la secuencia y mueve sus manos sobre ella]*, lo que hicimos fue sumar de dos en dos y llegamos a la figura 10, que es 21.*

L5. Michael: *Para hallar la figura 100, nos dimos cuenta que de 10 en 10 figuras avanzan 20 círculos, entonces comenzamos a sumar y en la figura 100…*

L6. Cristian: *201*

L7. Michael: *nos dio 201.* [Esto lo hicieron mediante la construcción de una tabla]

Esta movilización de medios semióticos de objetivación caracteriza, al menos de manera contingente, un tipo de pensamiento algebraico factual en Michael (Radford, 2006b, 2010b).Más aún, la movilización, por parte de Michael, de estos recursos semióticos se da en un mismo momento (L4), por lo que se evidencia un segmento de la actividad matemática en la cual estos recurso semióticos trabajan juntos parar objetivar o tomar conciencia del patrón de generalización, objetivación que es acompañada por la movilización, por parte de Cristian, de un recurso semiótico como el lenguaje oral (L6). Un segmento de actividad de este tipo, en el cual distintos medios semióticos de objetivación, de distintos estudiantes, se movilizan para identificar o reconocer el patrón es lo que muy recientemente se ha llamando *Nodo Semiótico Social* (Comunicaciónde Luis Radford y Rodolfo Vergel, 19 de Octubre de 2012).

En esta forma de proceder, los estudiantes no están realizando una generalización de los términos de la secuencia, ya que para hallar el número de círculos que tiene cada figura lo que hacen es sumar el número de círculos que se aumenta de una figura a otra, es decir, hallan el número de círculos de las figuras pedidas utilizando procedimientos aritméticos y no algebraicos. Sin embargo, los estudiantes han reconocido un patrón que pueden utilizar para hallar el número de círculos de cualquier figura que se les solicite, esto es un punto de partida para la generalización de la secuencia. Este hecho indica que los estudiantes han captado lo común en algunos detalles de la secuencia y lo utilizan para hallar términos posteriores, pero aún no utilizan este elemento común (comunalidad descrita por Radford (2010b)) para construir una expresión correspondiente a cualquier término de la secuencia. Se evidencian, entonces, dos características de la generalización algebraica de un patrón (Radford, 2010b), es decir, por un lado la identificación de la comunalidad y por otro, la aplicación de esta comunalidad a los términos de la secuencia, sin embargo no aparece la formación de una expresión o norma que permite determinar cualquier término de la secuencia.

Punto 3: Escribir un mensaje a un estudiante de otra clase en el que se indique la manera de averiguar el número de círculos de cualquier figura.

En este punto se les solicita a los estudiantes escribir un mensaje que especifique la forma de proceder para hallar el número de círculos de una figura cualquiera. Ésta es una de las preguntas más representativas en los trabajos de Radford y en Vergel (2012), cuyo propósito es conminar a los estudiantes a trabajar con lo indeterminado, es decir, que los estudiantes, de alguna manera, nominen, nombren lo desconocido.El mensaje construido por el grupo es el siguiente:

Mensaje: *Multiplicar la figura que se necesite por el número de círculos que se avanza de una figura a otra y al resultado sumarle el número de donde parte el avance*

Al igual que en la Tarea 1, los estudiantes tienen conciencia de lo indeterminado, "*la figura que se necesita*" y evidencian características de la analiticidad sin introducir símbolos alfanuméricos propios del álgebra (*Multiplicar la figura que se necesite por el número de círculos que se avanza de una figura a otra y al resultado sumarle el número de donde parte el avance*)**.** Esto es un ejemplo de lo que en Radford es teorizado como *PensamientoAlgebraicoContextual*ya quelaindeterminación está presente en eldiscurso y los señalamientos sonreemplazadospordeícticoslingüísticos (“*la figura que se necesite”*, “*sumarle el número de donde parte el avance”*).

En el mensaje se evidencia como el grupo utiliza el número de círculos que se avanza (2 círculos) para hallar el número de círculos de cualquier figura. Desde la TCO, podría afirmarse que en este contexto los estudiantes usan la multiplicación como herramienta que les sirve para calcular el número de círculos de una figura desconocida, además de introducir un nuevo término “*el número de donde parte el avance*”, número que al parecer es constante para cualquier figura. La frase “*el número de donde parte el avance*” constituye un medio semiótico de objetivación en tanto es un recurso lingüístico potente que les ayuda a tomar conciencia de la generalidad.

Para indagar sobre el significado de este *número*en el mensaje redactado se presenta la siguiente explicación de los estudiantes.

L8. Michael: *¡Donde parte el avance es 1!*

L9. Cristian:*1 es una constante o el punto de partidade donde se empieza a avanzar*(Ver Foto 12). *Si aquí hay tres*(Ver Foto 13) *entonces como se avanza de a dos de donde inició es 1* (Ver Foto 14),*entonces ese número siempre va a dar.*

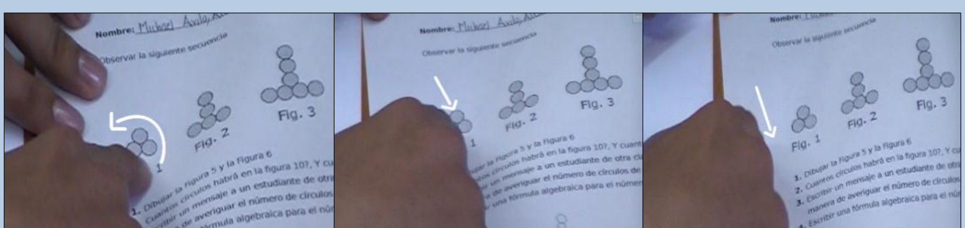


Foto 12	Foto 13	Foto 14

Imagen 10. *Gestos de Cristian mientras explica que la secuencia inicia en 1círculos.*

En las líneas L8 y L9, Michael y Cristian respectivamente, exponen razones por las cuales el avance debe ser 2. En el discurso de Cristian (Ver L9) se observa que el grupo nuevamente introduce una nueva figura que precede a la figura 1 de la secuencia presentada. Teniendo en cuenta que de una figura a otra se aumenta 2 círculos, los estudiantes declaran que en la secuencia debe existir un punto de partida de un círculo. En la Imagen 10 se muestran los gestos (señalamientos y movimientos) realizados por Cristian durante la explicación. El movimiento mostrado en la Foto 12 evidencia que efectivamente el grupo acepta que anterior a la figura 1 existe otra figura. En la Foto 13 Cristian señala dos círculos indicando que esees el número de círculos que se aumenta de una figura a otra. Y en la Foto 14 Cristian señala la posición de la figura anterior a la figura 1 y que debería tener un círculo. Los gestos son utilizados por Cristian para comunicar la consideración de una figura anterior a la figura 1 y para dar sentido a la frase "*sumarle el número de donde parte el avance*" (Ver Mensaje), por esta razón es posible considerar dichos gestos como un recurso semiótico que movilizan los estudiantes durante su actividad matemática.

Teniendo en cuenta el mensaje y la explicación hecha por el grupo, se puede evidenciar que en la forma de proceder de los estudiantes, se encuentra implícita la fórmula del término general de la secuencia presentada ($a_n = 2n + 1$):

2n → ***Multiplicar la figura que se necesite por el número de círculos que se avanza***

+ 1 → ***sumarle el número de donde parte el avance***

Esto es lo que en Radford (2010c) se caracteriza como una *Fórmula en Acción*en la que la generalización de los estudiantes se basa en una regla o fórmula, aunque no está explícitamente formulada se representa como un predicado incorporado a través del cual los estudiantes pueden expresar el número de círculos de cualquier figura particular. Es decir,implícitamente en el proceso de los estudiantes existe ya la fórmula algebraica que generaliza la secuencia y en ningún momento han utilizado notación simbólica algebraica.

Punto 4: Escribir una fórmula algebraica para el número de círculos en la figura n

Para escribir la fórmula algebraica el grupo utiliza lo construido en el punto del mensaje e introducen letras para expresar el procedimiento descrito en éste (el mensaje).

L10. Michael*: La fórmula para hallar el número de círculos es:* n*, que significa el número de círculos a hallar,* a *que significa la figura […] la fórmula es:* n *es igual a* a *por 2 más 1* (Ver Imagen 11). *Acá hay un ejemplo,* n *la figura 5 […] entonces 5 por 2 más 1, entonces nos da 11, que se puede confirmar que si es verdad porque ya la teníamos hecha...*(Ver Imagen 12)

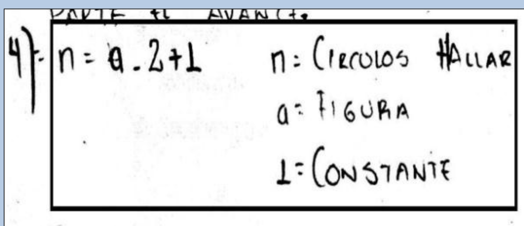


Imagen 11. *Fórmula propuesta por los estudiantes para hallar el número de círculos*

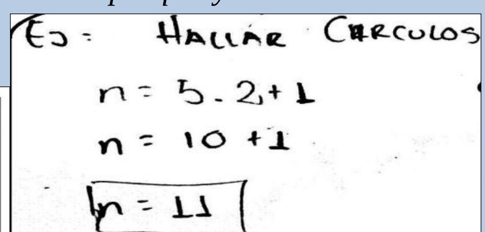


Imagen 12. *Ejemplo utilizado por los estudiantes para probar lafórmula*

En L10Michael afirma que la letra n corresponde al número de círculos que se deben hallar y utiliza la letra a para indicar el número de la figura y de esta manera construye la fórmulaalgebraica presentada en la Imagen 11**.** Al considerar que la letra n representa el número de círculos de cualquier figura, el grupo tiene la necesidad de introducir una nueva letra que represente el número de la figura, la letra a. Podría afirmarse que los estudiantes entienden que en una fórmula algebraica debe estar presente una igualdad, concepción que hace que el grupo se enfrente a una economía de letras en la pregunta planteada en laTarea y por ende se hace necesario introducir una nueva letra que les permita escribir la igualdad que ellos consideran como una fórmula algebraica. El proceso de objetivación llamado Contracción semiótica (Radford, 2008) desarrollado por este grupo ha concentrado en un menor número los recursos semióticos utilizados; esto es, los medios semióticos de objetivación como los señalamientos, las inscripciones, el movimiento son substituidos, primero por una frase clave como "*Multiplicar la figura que se necesite por el número de círculos que se avanza de una figura a otra y al resultado sumarle el número de donde parte el avance",* y luego esta frase clave es reemplazada por la expresión $n = a * 2 + 1$, que si bien no corresponde en términos matemáticos a lo solicitado (pues una expresión aceptad podría ser: $a_n = 2n + 1$), sí les permite resolver satisfactoriamente la pregunta. En términos de Radford (2010b), este grupo hace visible un pensamiento algebraico simbólico, lo cual sugiere pensar en que la tipología de pensamientos algebraicos propuesta por este autor (Factual, Contextual y Simbólica) estaría permeada por contracciones semióticas.

En Radford (2008) se menciona que la generalización algebraica de un patrón se basa en captar los aspectos comunes en los términos de una secuencia y utilizar dichos aspectos para proporcionar una expresión para cualquier término. En la expresión presentada por los estudiantes se han utilizado ciertos aspectos comunes encontrados por medio del análisis de términos particulares de la secuencia; además, la expresión construida por el grupo les permite hallar el número de círculos de una figura cualquiera.

En la Imagen 12se muestra un ejemplo de cómo los estudiantes prueban que la expresión construida les funciona para hallar el número de círculos de una figura particular. Este hecho es una muestra de cómo la indeterminación que ha estado presente en deícticos lingüísticos (*Pensamiento algebraico contextual*) empieza a ser representada utilizando el lenguaje alfanumérico del álgebra con el fin de resumir los cálculos que ya han sido identificados previamente (*Pensamiento algebraico simbólico*), es decir, los estudiantes realizan una contracción semiótica ya que, en términos de D´Amore (2006) se presenta una economía de los recursos semióticos utilizados.

La expresión algebraica construida por los estudiantes es evidencia de que, en términos de Wertsch (1998), Vygotski (2000), Radford (2010a, 2010b, 2006c) y Vergel (2011), los estudiantes piensan y actúan desde y a través de los signos que tienen a su disposición. Podría conjeturarse a esta altura del análisis que la introducción de la letra a para designar a la figura estáinfluenciada por la historia académica de los estudiantes en años anteriores, en los cuales las expresiones y fórmulas algebraicas estudiadas tienen en común la utilización de las letras $a, b, c, x, y,$ letras que en la educación escolar son privilegiadas para denotar expresiones algebraicas. En otras palabras, la historia académica de los estudiantes juega un papel importante en las interaccione sociales, pues ellos recurren a los signos que han abordado en años anteriores para pensar y realizar actividad reflexiva.

Ahora, después de proponer una expresión para calcular el número de círculos de una figura cualquiera, el grupo propone también una expresión para hallar el número de la figura si se conoce el número de círculos de la misma.

L11. Michael: *...Si nos da el número de círculos entonces la fórmula es: a es igual a n menos 1 sobre 2.* (Ver Imagen 13) *con la misma figura nos dieron el número de círculos que son 11. 11 menos 1 nos dio 10, divido 2 nos dio 5 y esa es la figura 5.* (Ver Imagen 14)

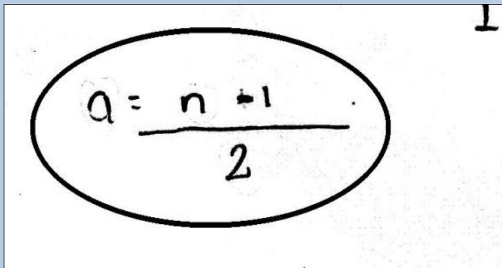


Imagen 13. *Fórmula propuesta por los estudiantes para hallar el número de lafigura*

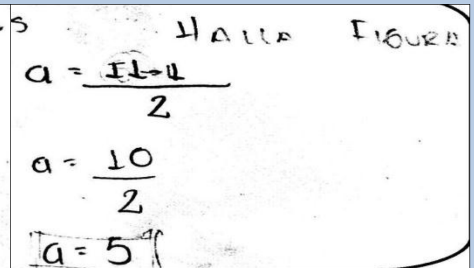


Imagen 14. *Ejemplo utilizado por los estudiantes para probar la fórmula*

En la Imagen 13 se observa la expresión que los estudiantes proponen para hallar el número de la figura partiendo de conocer el número de círculos, esta fórmula es producto del tratamiento de la fórmula mostrada en la Imagen 11 y evidencia que los estudiantes han tenido durante su formación académica alguna experiencia con el tratamiento de ecuaciones y esto los lleva a plantear una nueva expresión que en alguna medida les sirve para corroborar que la fórmula para hallar el número de círculos de cualquier figura es correcta, ya que si hacen un tratamiento de la fórmula obtienen una que también da un resultado satisfactorio (Ver Imagen 14).

Síntesis sobre la actividad asociada con la Tarea 2

En la Tarea 2 se pudo observar que los estudiantes identifican rápidamente el número de círculos que aumenta de una figura a otra, es decir, identifican el patrón de generalización. Con tal patrón identificado pueden hallar el número de círculos de figuras desconocidas, tales como la figura 5 o la figura 6 y figuras más lejanas o remotas como la 10 y la 100. Con la ayuda del patrón identificado construyen una tabla que les permite formar grupos de figuras e identificar por ejemplo que cada 10 figuras se aumenta de a 20 círculos y de esta manera determinan el número de círculos de figuras remotas. La tabla utilizada por el grupo constituye lo que en Radford (2004, 2006a) se considera como un artefacto, ya que la tabla interviene como mediador del pensamiento y muestra cómo los estudiantes utilizan procedimientos aritméticos para hallar el número de círculos de las figuras pedidas. Cabe resaltar que la identificación del patrón no estuvo basada en la configuración espacial de las figuras de la secuencia sino que los estudiantes centraron la mirada únicamente en el número de círculos que se aumenta de una figura a otra.

En los dos primeros puntos de la Tarea los estudiantes movilizan sincrónicamente medios semióticos de objetivación como señalamientos, inscripciones, movimientos de sus manos; en otras palabras, los estudiantes utilizan los gestos para hacer visibles sus intenciones, para notar relaciones matemáticas y para tomar conciencia de los aspectos conceptuales de la secuencia figural presentada en la Tarea.

Otro aspecto importante de la actividad asociada a la Tarea 2 tiene que ver con la introducción de una figura imaginaria previa a la figura 1. Esta nueva figura fue utilizada por los estudiantes para la construcción del mensaje (punto 3) en cuya redacción se pueden identificar características de la generalización algebraica de un patrón, tales como la del sentido de la indeterminancia presente en palabras como (*la figura que se necesite*) y la analiticidad en la forma de trabajar con las variables tácitas utilizadas por los estudiantes, variables que en este punto no corresponden a letras sino a palabras. En otras palabras, de acuerdo con Radford (2010c), la generalización se presenta como una *fórmula corpórea*, es decir, fórmulas que se expresan a través de acciones y se desarrollan en el espacio y el tiempo.

Finalmente, se observócómo los estudiantes introducen una nueva letra para la escritura de la fórmula pedida, esto surgió de la necesidad de plantear la fórmula en forma de igualdad. Si bien la expresión propuesta por el grupo no fue la esperada, sí les permite hallar el número de círculos de cualquier figura, y con un tratamiento de esta expresión, los estudiantes también pueden hallar el número de la figura en función del número de círculos. En las dos expresiones construidas por los estudiantes se sintetiza el proceso realizado durante la Tarea;los gestos y las palabras se han reducido y están mejor articulados. En este momento, para los estudiantes, los medios semióticos de objetivación más relevantes son los símbolos alfanuméricos. En otras palabras, estamos al frente de un proceso de objetivación desarrollado por los estudiantes llamado Contracción semiótica.

Tarea 3

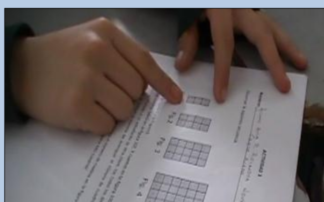
En la Tarea3 se decidió plantear una secuencia cuyo término general se expresa con una fórmulaalgebraica cuadrática; tal decisión estuvo motivada por el nivel académico de los estudiantes participantes de la investigación ya que, por pertenecer al grado décimo, ya han tenido al menos dos años de experiencia con el tratamiento del lenguaje simbólico del álgebra y además han estudiado relaciones funcionales (lineales y cuadráticas). La configuración geométrica de la figura pasa de estar formada con círculos a estar formada con cuadrados (cuadrados que forman rectángulos).

La Tarea 3 conserva las preguntas formuladas en las dos Tareas anteriores y,adicionalmente se introdujo una quinta pregunta que solicita a los estudiantes averiguar el número de una figura conociendo el número de cuadros de la misma.

Punto 1: Dibujar la Figura 5 y la Figura 6

Para poder determinar la figura 5 y 6 los estudiantes por primera vez recurren a la configuración espacial de las figuras, inicialmente se fijan en la base de los rectángulos que representan cada figura y así determinan la relación del número de cuadros y la posición de la figura.

L1. Michael:*Para hallar la figura 5 y 6 nos dimos cuenta que en la figura 1 solo habían* (sic) *un cuadro acá* (Ver Foto 15)*, en la figura 2 habían* (sic) *dos cuadros acá* (Ver Foto 16)*, en la figura 3 habían* (sic) *tres* (Ver Foto 17)*, en la figura 4 habían*(sic)*cuatro* (Ver Foto 18)*...*



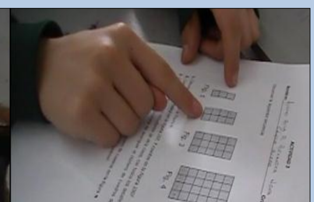
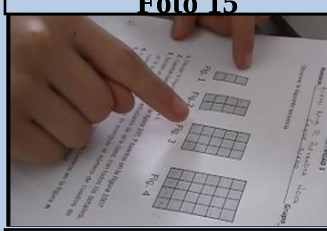


Foto 15 | **Foto 16**



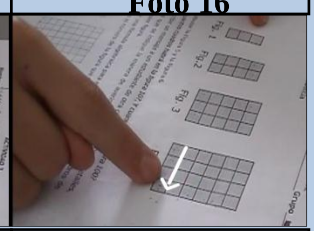


Foto 17 | **Foto 18**

Imagen 15. *Gestos realizados por el Michael cuando explica el número de cuadros que hay en la base de las 4 primeras figuras*

Los señalamientos de Michael mostrados en la Imagen 15 (Foto 15, 16 y 17) y el movimiento mostrado en la Foto 18 son recursos semióticos movilizados por él que indican cómo se fija en la configuración espacial de las figuras en pro de dibujar las figuras 5 y 6 de la secuencia. En las

Tareas anteriores el grupo no utilizó la configuración espacial de las figuras en el proceso de generalización, este hecho puede deberse a que en la Tarea 3 las figuras tienen una disposición geométrica conocida por los estudiantes (rectángulos), disposición que los hace fijarse en la base y en la altura de los rectángulos para poder dibujar las figuras siguientes.

L2. Michael:*Pues en la figura 5 pusimos cinco cuadros* (Ver Foto 19) *y hacia arriba nos dimos cuenta que aumentaba un nivel, entonces le aumentamos un nivel. Y en la figura 6 hicimos lo mismo, pusimos seis cuadros hacia acá* (Ver Foto 20) *y hacia arriba pusimos...*

L3. Cristian:*Un nivel más*

L4. Michael:*Sí, un nivel mas al cinco* (Ver Foto 21)

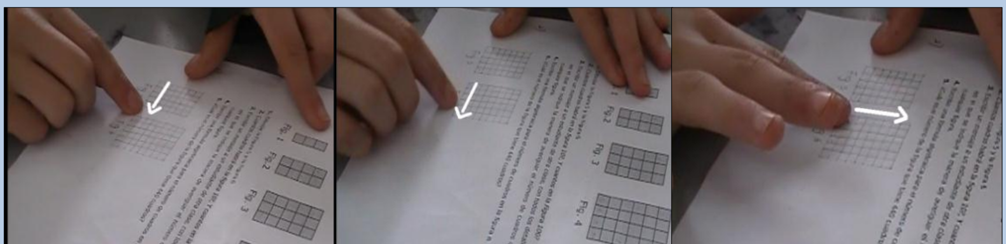


Foto 19	Foto 20	Foto 21

Imagen 16. *Gestos realizados por el Michael cuando explica el número de cuadros que hay en las figuras 5 y 6 de la secuencia*

En L2 Michael explica cómo determina la forma de la figura 5 y de la figura 6; aparecen dos gestos (movimientos) que nos indican cómo el grupo identificó el patrón de formación de las figuras de la secuencia y lo están aplicando para dibujar las figuras 5 y 6. En la Foto 20 Michael hace un movimiento horizontal para indicar el número de círculos de la base del rectángulo de la figura 6, 6 cuadrados. En la Foto 21 Michael hace un movimiento vertical que indica el número de cuadrados que deben ir en la altura del rectángulo de la figura 6, en la línea L3 Cristian dice que en la altura debe ir un nivel más y en la línea L31 Michael dice que debe ir un nivel más al cinco. En estas dos líneas se evidencia cómo se articulan los gestos y las palabras de Michael y las palabras de Cristian, sincrónicamente evidenciándose el fenómeno de nodo semiótico social(Comunicación de Luis Radford y Rodolfo Vergel, 19 de Octubre de 2012), ya que se presenta un segmento de la actividad en la que los recursos semióticos movilizados por Michael y Cristian permiten construir la figura 6 partiendo del patrón de formación ya identificado. El hecho de centrar la atención en la configuración espacial de las figuras e identificar el patrón de formación de éstas es un paso importante para la posterior generalización, ya que, de acuerdo con Radford (2012), para ampliar una secuencia de figuras es necesario identificar una regularidad que implique la unión de dos estructuras diferentes, una espacial y una numérica, "la vinculación de estructuras espaciales y numéricas constituyen una aspecto importante en el desarrollo del pensamiento algebraico" Radford (2012).

Ahora, las líneas L2 a L4 los estudiantes utilizan la expresión "*un nivel más*" expresión que constituye un aspecto importante para la construcción de las figuras 5 y 6, por tal razón el profesor interviene para tener claridad de la expresión ya mencionada.

L5. Profesor:*¿Como así un nivel más al cinco?*

L6. Michael:*Sí, porque aquí hay dos, cuatro, seis, siete. Siete cuadros hacia arriba*[Refiriéndose a la figura 5] *y en la figura seis hay dos, cuatro, seis, ocho cuadros hacia arriba. Acá nos podemos dar cuenta que en la figura 1 hay tres cuadros hacia arriba y en la figura 2 hay cuatro cuadros hacia arriba, en la figura 3 hay ya hay cinco, hay uno más que en el 2.*

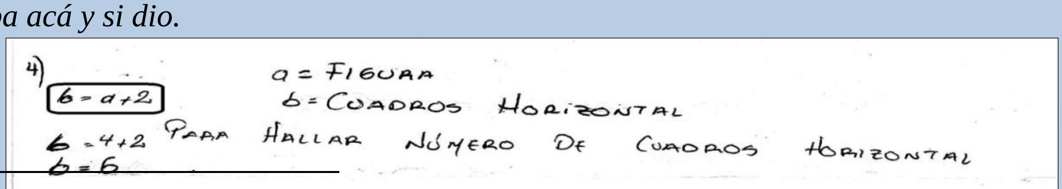
En la línea L6 Michael explica que en la figura 6 deben haber 8 cuadros hacia arriba ya que en la figura 5 hay 7 cuadros hacia arriba. La explicación del estudiante va acompañada de una serie de señalamientos figura por figura pero el énfasis está hecho principalmente en las frase "*hacia arriba*" énfasis que indica cómo se ha identificado la forma en la que el número de cuadros va aumentando de una figura a otra, es decir, los estudiantes han identificado el patrón de generalización. Cabe mencionar aquí que los estudiantes han analizado las figuras de forma independiente; es decir, se fijan primero en el aumento de cuadros de la base del rectángulo de una figura a otra y posteriormente en el aumento de cuadros de la alturatomando, comoreferencia siempre la figura anterior en los dos casos.[7]Este hecho lleva a pensar que los estudiantes no han establecido una relación entre el número de cuadros de la base y el número de cuadros de la altura en el rectángulo de la una misma figura, ya que la forma de proceder es recurrente tomando como referencia la figura anterior. La afirmación anterior tiene sustento si se considera que los recursos semióticos son instrumentos, medios, constitutivos del pensamiento Radford (2003, 2008, 2010b, 2010c) y en la actividad matemática de los estudiantes se movilizan una serie de recursos semióticos que evidencian la ausencia de una relación funcional entre el número de cuadrados de una figura y el número de la figura.

Punto 2: Cuantos círculos habrá en la figura 10?, Y cuantos en la Figura 100?

L7. Michael:*Para hallar la figura 10 […] contamos hasta la figura 10. Y después nos dimos cuenta lo del primer punto y ahí fue donde resolvimos este* [refiriéndose al punto de escribir el mensaje] *que multiplicamos el número de la figura que necesitábamos y loo...*

L8. Cristian:*más el número de la figura otra vez más dos que sería la horizontal, hacia arriba* [para el estudiante 2, la orientación horizontal y la acción hacia arriba son lo mismo] *la de abajo sería la figura, entonces ahí si multiplicábamos eso, ósea, si...*

L9. Michael:*Ahí fue donde creamos la fórmula y dijimos que* $b = a + 2$(Ver Imagen 17), *para hallar el número de cuadritos que hay hacia arriba, y lo hice con una figura que ya estaba acá y si dio.*



[7] Esta clase de operación sobre las figuras es lo que Duval (1999), citado por León (2005), llama aprehensión operatoria.

Imagen 17. *Fórmula propuesta por los estudiantes para hallar el número de cuadros verticales de cada figura. (Para los estudiantes son los cuadros horizontales)*

En l y optan, para ahorrarse cálculos, construir una fórmula algebraica que les permita encontrar el número de cuadros de cualquier figura. Esto quiere decir que las Tareas precedentes a ésta han causado influencia en el proceso realizado por los estudiantes y empiezan a modificar sus formas de proceder hacia formas más eficaces y sofisticadas. Este hecho confirma una de las tesis fundamentales de Vygotski sobre el desarrollo genético, según la cual la instrucción precede al desarrollo.

En la Imagen 17 se observa una fórmula para calcular el número de cuadros de la altura del rectángulo, a este número los estudiantes lo representan con la letra b, número que está en función del número de la figura que los estudiantes llama a. Es así como los estudiantes reconocen que el número de cuadros de la altura del rectángulo es 2 cuadros más que el número de cuadros de la base y con este cálculo ya pueden hallar el número de cuadros de toda la figura.

L10. Michael: *Entonces cogimos y $b = 4$, la figura 4 más 2 y nos da 6 hacia arriba, y ya teniendo este número nos dimos cuenta que $4\,X\,6$ da 24 que es el total* (Ver Imagen 18). *Esto sería el número de la figura más el número de cuadritos que hay hacia arriba.*

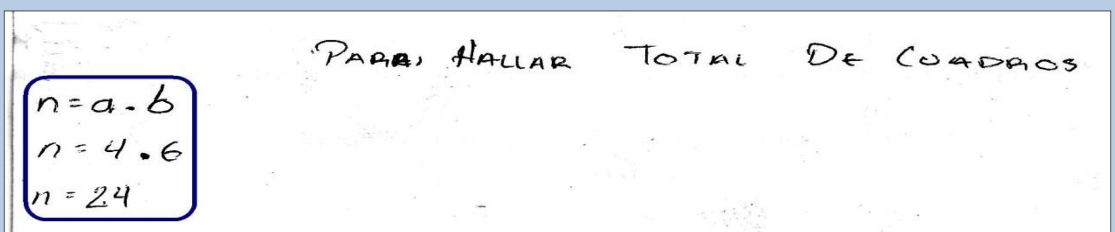


Imagen 18. *Fórmula planteada por los estudiantes para hallar el número de cuadritos de una figura n*

Como se puede apreciar en la Imagen 18, la fórmula planteada por los estudiantes para hallar el número de cuadros de la figura $n$es: $n = a * b$siendo $b = a + 2$(Ver Imagen 18). Para los estudiantes a es el número de la figura y b es el número de cuadros que hay verticalmente [los estudiantes a esto le llaman cuadros horizontales]. Un aspecto importante en la fórmulatiene que ver con la igualdad $b = a + 2$para calcular el número de cuadros de la altura del rectángulo(Ver Imagen 17). Este aspecto confirma las hipótesis planteadas en el punto 1, pues los estudiantes efectivamente analizan las figuras de forma separada, esto es, calculan primero el número de cuadros de la altura del rectángulo y luego lo multiplican por el número de cuadros de la base que coincide con el número de la figura. La fórmula de la Imagen 18 sugiere que los estudiantes recurren a la forma de calcular el área de un rectángulo (Base por Altura) calculando la altura con una expresión que está en función del número de cuadros de la base, es decir, el grupo no ve las figuras de la secuencia como un todo en el que el número de cuadros de las mismas está en función del número de la figura.

Punto 3: Escribir un mensaje a un estudiante de otra clase en el que se indique la manera de averiguar el número de círculos de cualquier figura.

Mensaje: *Multiplicar la figura que se necesite por el número de cuadros que hay horizontalmente* [los estudiantes confunden horizontal con vertical] *y da el número de cuadros*

En este mensaje los estudiantes explican la manera de calcular el número de cuadros por medio de la multiplicación de los cuadros horizontales y verticales, pero no incluyen la manera de calcular los cuadros verticales como sí lo hicieron en la fórmula planteada por ellos. Por esta razón, para aclarar el significado del mensaje construido por los estudiantes, el profesor interviene pidiéndole a Michael que le explique a Cristian la forma de hallar el número de cuadros de cualquier figura. Esto con el propósito de identificar en el discurso de los estudiantes aspectos que indiquen alguna relación funcional entre el número de la figura y el número de cuadros.

L11. Profesor:*Michael le va explicar a Cristian cómo hallar el número de cuadritos de cualquier figura*

L12. Michael:*Primero coger la figura que necesita y sumarle 2 y ese resultado multiplicarlo por la figura que está, entonces acá yo lo hice. Cuatro le sume dos y me dio seis, que son los números de cuadros que hay hacia arriba* (Ver Foto 22) *y ese seis lo multiplique por cuatro que es el mismo número de la figura y me dio el total de los cuadritos, porque hay uno, dos, tres, cuatro, cinco, seis* [el estudiante sube el tono de la voz cuando dice *"seis"*] *hacia arriba por cuatro* (Ver Foto 23) *da veinticuatro en total* (Ver Foto 24). *Toca al número de la figura sumarle dos y el total multiplicarlo por el número de la figura y hay da el total de los cubitos.*

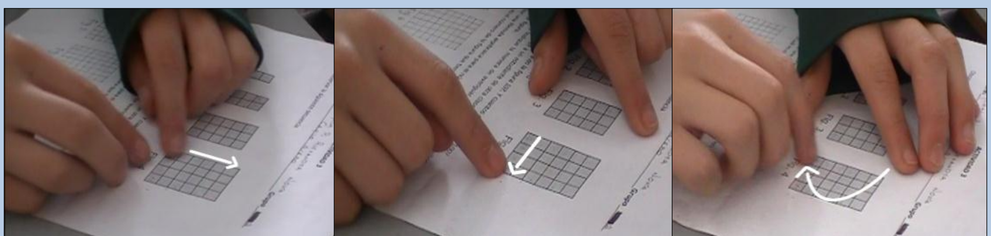


Foto 22	Foto 23	Foto 24

Imagen 19. *Gestos realizados por el estudiante 1 cuando explica como hallar el número de cuadros de la Figura 4*

En L11 Michael explica paso a paso la forma de hallar el número de cuadrados de cualquier figura tomando como ejemplo la figura 4. En el discurso de Michael queda claro la concepción del grupo de realizar dos cálculos independientes: "*Primero coger la figura que necesita y sumarle 2 y ese resultado multiplicarlo por la figura que está".* En la Foto 22 se observa un movimiento realizado por Michael indicando que inicialmente se debe calcular el número de cuadros verticales, en la Foto 23 el movimiento es para indicar que el número de cuadros horizontales coincide con el número de la figura y en la Foto 24 Michael realiza un movimiento sobre toda la figura explicando que al multiplicar los dos números obtenidos se tendrá como resultado el número total de cuadros de la figura. En este episodio de la actividad matemática de los estudiantes la indeterminación vuelve a estar presente en frases como “*la figura que necesita*” y “*la figura que está*”. Estas dos frases se derivan de la fórmula algebraica construida en el punto 2.

$\boldsymbol{b = a + 2}$ ***La figura que se necesita más 2***

$\boldsymbol{n = a * b}$ ***El resultado multiplicado por la figura que esté***

En las dos igualdades se encuentra presente el número de la figura como indeterminación y se evidencia que los estudiantes conciben este número como variable independiente. La razón por la que los estudiantes realizan los cálculos por separado puede deberse al carácter cuadrático de la secuencia presentada.

Punto 5: ¿Cuál es el número de la figura que tiene 440 cuadros?

Los estudiantes no tuvieron mayores problemas para saber que en la figura 20 hay 440 cuadros. El cálculo lo hicieron partiendo del análisis ya realizado sobre la formade calcular el número de cuadros de cualquier figura. Cabe anotar que el cálculo no lo realizaron utilizando la fórmula planteada sino probando con las diferentes figuras mayores a 10 hasta que en la figura 20 la multiplicación que ellos estaban utilizando les dio igual a 440. Esto es, los estudiantes ya habían identificado que en la figura 20 debería haber 20 cuadros en la base (horizontales) del rectángulo y 21 cuadros en la altura (verticales) del rectángulo y con la multiplicación $20 * 21 = 440$ concluyeron que la figura que tiene 440 cuadros es la figura 20.

En la Tarea 2 los estudiantes plantearon una fórmula algebraica para hallar el número de la figura partiendo del número de círculos de ésta (la figura) pero en la Tarea 3 recurrieron al ensayo y error para dar respuesta al punto 4, esto podría estar influenciado porque para la Tarea 3 los estudiantes construyen la fórmula algebraica en dos etapas lo que constituye un obstáculo para realizar algún tratamiento en las dos fórmulas para obtener una que permita obtener el número de la figura conociendo el número de cuadros.

Síntesis sobre la actividad asociada con la Tarea 3

En la Tarea 3 el grupo se fijó en la configuración espacial de las figuras, hecho que no había sucedido en las Tareas anteriores. De esta manera, determinaron la relación existente entre el número de cuadros de la altura del rectángulo (cuadros verticales) y el número de cuadros de la base del rectángulo (cuadros horizontales). Identificaron que el número de cuadros verticales es igual al número de cuadros horizontales más uno y que el número de cuadros horizontales coincide con el número de la posición de la figura. Radford (2012)señala que la vinculación entre las estructuras espaciales y numéricas es un aspecto importante en el proceso de generalización. Tal importancia radica en la transformación cultural que se produce en la manera de ver la secuencia, una transformación que puede llamarse *domesticación del ojo* (Radford, 2010a)

El grupo utiliza la estructura espacial de las figuras para plantear dos expresiones algebraicas, una para calcular el número de cuadros verticales y la otra para calcular el número de cuadros de toda la figura. Los estudiantes explican cómo hallar el número de círculos de una figura cualquiera, en el punto 2 construyen la fórmula algebraica $\boldsymbol{n = a * b}$siendo $\boldsymbol{b = a + 2}$, a representa la figura y la letra n se sigue utilizando para representar el número de cuadros de cualquier figura. El significado que tienen, para los estudiantes, estos símbolos algebraicos puede ser una evidencia de *Pensamiento Algebraico Simbólico* ya que su utilización sugiere que aparecen como narraciones vividas y son íconos que ofrecen una especie de descripción espacial de la figura y acciones que se llevarán a cabo (Radford, 2010b). En el punto 3 *"escribir un mensaje a un estudiante de otra clase en el que se indique la manera de averiguar el número de círculos de cualquier figura*", la actividad matemática de los estudiantes evidenció *PensamientoAlgebraicoContextual* ya que laindeterminaciónseconvirtióenobjetoexplicitodeldiscurso en las frases "*la figura que necesita*" y "*la figura que está*".

En el último punto de la Tarea "*¿Cuál es el número de la figura que tiene 440 cuadros?*", los estudiantes no utilizaron la fórmula algebraica construida sino que recurrieron a procedimientos aritméticos para encontrar la respuesta a la pregunta, tal procedimiento estuvo permeado por el proceso realizado en los puntos 2 y 3 de la Tareas y por esta razón se pudo evidenciar características del *PensamientoAlgebraicoFactual* en el que laindeterminaciónquedaimplícitaenpalabras, señalamiento y movimientos kinestésicos evidenciando un "proceso" que Radford (2010b) llama fórmulas en acción.

Tarea 4

La Tarea 4 tiene la misma expresión algebraica que la Tarea 3, la diferencia está en la configuración espacial de las figuras. El propósito es analizar la manera en que los estudiantes llegan a proponer la expresión algebraica para hallar el número de cuadros de la figura n.

A diferencia de las Tareas anteriores, la explicación de la solución a la Tarea 4 se realizó por medio de una socialización ante todos los estudiantes.Por esta razón,el análisis de la actividad matemática de los estudiantes en esta Tareaestará centrado en tal socialización.

Punto 1: Dibujar la Figura 5 y la Figura 6

L1. Cristian:*En el primer punto nos dimos de cuenta que estos cuatro eran siempre iguales, estos siempre eran de la misma cantidad* **(Ver Foto 25)**. *Entonces multiplicábamos estos que son uno, dos, tres, cuatro,* **(Ver Foto 26)** *por cuatro nos daba 16 y después el número de la figura aquí afuera estaba dos veces* **(Ver Foto 26)**. *Entonces sería 4 elevado a la 2 más 2 veces cuatro, entonces sería 16 más 8, 24. Y eso pasaba en todas. Para la figura 10, multiplicamos 10 elevado a la 2, mas 2 y después el número de la figura y nos daba 120. En la figura 100 hicimos lo mismo, 100 elevado a la 2 más 2 veces 100 nos daba 10200.*

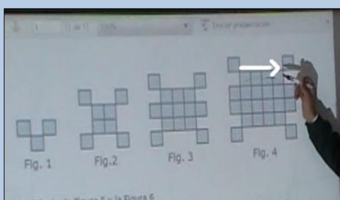


Foto 25

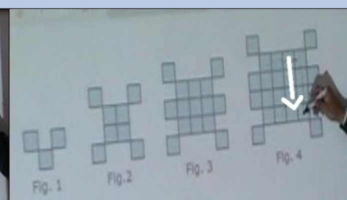


Foto 26

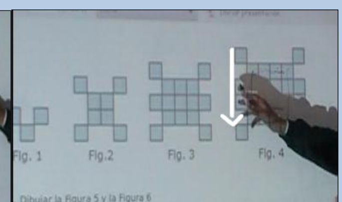


Foto 26

Imagen 20. *Socialización de Cristian explicando la figura 4 de la secuencia*

En L1 se presenta la socialización de Cristian sobre el análisis de la secuencia. En la explicación el estudiante tomó como ejemplo la figura 4; en esta explicación se puede observarcómo los estudiantes se fijaron en la configuración espacial de las figuras de la secuencia.En las Fotos 25 y 26 Cristian muestra que en la figura existe un cuadrado, es decir, hay el mismo número de cuadrados horizontales que verticales. En la Foto 26 Cristian explica que afuera del cuadrado se encuentra dos hileras de cuadros que tienen el mismo número de cuadros que el número de la figura "*el número de la figura aquí afuera estaba dos veces*" (Ver L1). Utilizando este análisis el grupo plantea una forma de calcular el número de cuadros de la figura 10 y 100 (Ver L1).

Aquí Cristian realiza movimientos sobre la figura 4 que muestran cómo el grupo logra vincular la estructura espacial de la figura con la estructura numérica de la misma; es importante aclarar que la vinculación entre lo espacial y lo numérico en esta Tarea es diferente a la evidenciada en la secuencia de la Tarea 3, esto se pone de manifiesto en lo recursos semióticos movilizados e incide directamente en la manera de calcular el número de cuadrados de figuras desconocidas como la 5, 6, 10 y 100 "*para la figura 10, multiplicamos 10 elevado a la 2, mas 2 y después el número de la figura y nos daba 120*" (Ver L1).

Como el grupo no mostró mayor dificultad para encontrar el número de cuadros de figuras dadas,el profesor decidió intervenir solicitando centrar la explicación en la forma de construcción de la fórmulaalgebraicapara hallar el número de cuadros de la figura n

L2. Profesor:*[…] Quiero que se salten esas preguntas […] ¿cómo hallaron la fórmula?*

L3. Andrés:*Tenemos* n*, que es la figura, igual a* a *elevado a la 2 más* $2a$

L4. Profesor:*¿Quien es* a*?*

L5. Andrés:a *es...*

L6. Cristian:*El número de la figura*

En la línea L3 Andrés dice que para hallar el número de cuadros de cualquier figura se debe elevar el número de la figura al cuadrado y sumarle 2 veces el número de la figura, este procedimiento es consecuencia del análisis de la configuración espacial de las figuras presentadas en la secuencia. De esta manera los estudiantes plantean la siguiente fórmula: $n = a^2 + 2a$. Como ha sido habitual en el grupo Andrés presenta un ejemplo que permite comprobar que la fórmula es correcta (Ver Imagen 21 y línea L7).

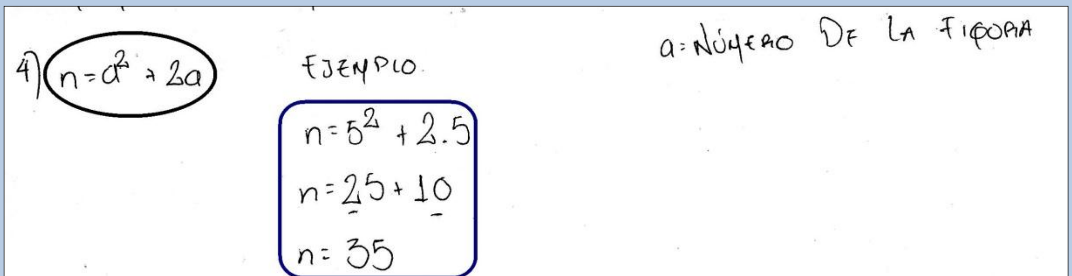


Imagen 21. *Fórmula planteada por los estudiantes para la figura n*

L7. Andrés: *Esta es la figura 5 elevada a la 2, que es 25, que son 25 cuadros aquí en el centro* [refiriéndose al interior de la figura]. *Mas 10, que en cada lado hay 5, da 35. Hay 35 cuadros en la figura 5.* (Ver Imagen 21)

En esta actividad el grupo presenta una fórmula que está en función del número de la figura que el grupo representa con la letra a; la letra n sigue siendo utilizada para representar el número de cuadros que hay en cualquier figura. Como pasó en las Tareas anteriores la fórmula presentada permite hallar el número de cuadros de una figura cualquiera.

En esta Tarea los estudiantes llegan a la formula algebraica recurriendo, al igual que en la Tarea 3, a la disposición espacial de las figuras, pero, debido a que dicha disposición es diferente, el procedimiento de construcción de la fórmula también lo es, lo cual influye directamente en la escritura simbólica de la expresión algebraica. De acuerdo con Radford

(2010d) la generalización de una secuencia numérico-geométrica requiere que los estudiantes perciban los términos de la secuencia de cierta manera, una especie de domesticación del ojo, es decir, convertir el ojo en un órgano cultural-teórico de la percepción.

Punto 3: Escribir un mensaje a un estudiante de otra clase en el que se indique la manera de averiguar el número de círculos de cualquier figura.

Mensaje: *Multiplicar el número de la figura por sí mismo y sumarle 2 veces el número de la figura*

En este mensaje queda claro como los estudiantes expresan un procedimiento de cálculo acudiendo a la estructura espacial de la figura. Aquí la las palabras utilizadas están, con respecto a las Tareas anteriores, mejor articuladas. La indeterminación se encuentra en la frase "*el número de la figura*" y en la frase "*2 veces el número de la figura*". Se evidencia que el grupo tiene claro que la variable independiente corresponde al número de la figura. En otras palabras, el mensaje mostrado aquí constituye lo que Radford (2006b, 2010a) caracteriza como una fórmula en acción ya que el mensaje se convierte en una fórmula que se representa como un predicado incorporado a través del cual los estudiantes pueden expresar el número de cuadros de cualquier figura particular. Es así como se confirma una vez más que las variables se pueden expresar a través de signos distintos a los alfanuméricos convencionales (Radford, 2010b). El mensaje mismo evidencia un elemento que ha sugerido Radford, la analiticidad, como característico del pensamiento algebraico.

Punto 5: ¿Cuál es la figura que tiene 560 cuadros?

En este punto se presentó una discusión entre los grupos sobre la existencia de la figura que poseía 560 cuadros. Uno de los gruposdecía que sí existía y que era la figura 22.7 ya que los cuadros de cada figura se podían dividir y así determinar los 560 cuadros. El grupo 1 argumentó que la figura no podía existir.

L8. Michael:*No existe, porque ellos dicen que es la figura 22.7 y nosotros multiplicamos. Nos dicen que son 560 y más cuando uno multiplica da 560.68 y hay nos están dando un número entero, no nos están dando con ningún decimal*

Para interpretar el motivo de esta discusión se debe tener en cuenta que los grupos de estudiantes aquí presentados pertenecen al grado décimo, grado en el que han tenido experiencia en el estudio de la matemática escolar, lo que presupone una experiencia un trabajo con conceptos matemáticos como los números reales, tratamiento de expresiones algebraicas, funciones lineales, funciones cuadráticas, entre otros. Es así como, en este punto, algunos estudiantes recurren a los conocimientos que poseen sobre números decimales y manifiestan que al no encontrar un número de figura en los números enteros, es posible dividir las figuras y de esta manera garantizar la existencia de cualquier figura, hecho que está indicando la necesidad de dar una respuesta con los elementos que tienen de la secuencia, esto es, frente a la pregunta formulada en la Tarea hay una obligación contractual de responder, en otras palabras, se evidencia la fuerza del contrato didáctico propuesto por Brousseau. En el caso del grupo 1, en la línea L8Michael argumenta que la figura no puede existir ya que al reemplazar 22.7 en la expresión el resultado es 560.68 y no 560, que es el número de cuadros que se está pidiendo, por ende la figura no se puede dibujar y esto indica su inexistencia.

Síntesis sobre la actividad asociada con la Tarea 4

En la Tarea 4 los estudiantes utilizan la configuración espacial de las figuras para plantear una expresión algebraicaque les permita hallar el número de cuadros de cualquier figura, los gestos realizados durante la explicación de la Tarea indican la manera en la que el grupo planteó los cálculos aritméticos que debían realizar para hallar el número de cuadros de una figura particular. Partiendo de dichos cálculos el grupo utiliza lenguaje simbólico (letras) para expresar de manera algebraica dichos cálculos.

En esta actividad se puede evidenciar una disminución de los recursos semióticos utilizados por los estudiantes para encontrar la fórmula algebraica. Tal disminución se debe a la experiencia que han tenido en las actividades anteriores, lo que les permite identificar rápidamente los aspectos más importantes en pro de plantear la fórmula pedida, es decir, se produce el proceso de objetivación denominado, en Radford (2008), como una *Contracción Semiótica.* Este proceso de objetivación pone en evidencia el hecho según el cual los estudiantes hacen una elección entre lo que se considera relevante e irrelevante, es decir, se hace una limpieza de los restos de la experiencia de la evolución matemática con el fin de poner de relieve los elementos centrales de la misma.

Tarea 5

La Tarea 5 es la primera Tarea del segundo momento de la investigación yfue diseñada teniendo en cuenta los resultados encontrados en las Tareas 1, 2, 3 y 4. Aquí se les presenta a los estudiantes una secuencia numérica; es decir, se decidió suprimir las figuras para observar cómo influía la ausencia de los referentes espaciales de la secuenciaen los estudiantes, esto con el fin de analizar si los recursos semióticos movilizados cambiaban y cómo se desarrollaban los procesos de objetivación durante la actividad matemática del grupo.

Para el desarrollo de esta Tarea se decidió que los estudiantes inicialmente se enfrentaran a ésta de manera individual y posteriormente cada estudiante socializó a los integrantes del grupo el proceso realizado en cada uno de los puntos que en esencia son los mismos de las Tareas anteriores, pero enfocadas al componente numérico de la sucesión.

¿Cuál es el término 5 y el término 6?

L1. Michael:*Para el primer punto, cual es término 5 y 6, lo que hicimos fue darnos cuenta que de un término a otro el avance era de 4 y lo que hicimos fue sumar, en el término 5 habrían 19 y en el término…*

L2. Cristian:*6, 23*

L3. Michael:*…6 habían*(sic) *23, entonces solo sumamos el avance de un lado a otro.*

En L1 Michael explica que para hallar los términos 5 y 6 se fijaron en el avance que hay de un término a otro, es decir, se fijaron que de un término a otro se aumentaba 4. De esta manera y utilizando la suma, hallaron el número que debería estar en el término 5 y en el término 6 (Ver L3). En la explicación realizada por los estudiantes los gestos realizados fueron principalmente señalamientos de un término a otro para indicar el aumento que se presentaba. Esto quiere decir que la ausencia de figuras en la secuencia causa una disminución en los recursos movilizados por los estudiantes ya que para determinar términos desconocidos y cercanos, basta con hacer una suma progresiva del número que se aumenta de un término a otro hasta llegar al término deseado, o como lo llaman los estudiantes, basta con sumar el "*avance*" a cada término para poder encontrar el siguiente. Al parecer los índices geométrico espaciales de las secuencias provocan una movilización de recursos semióticos en los estudiantes, movilización que aparece con menor intensidad, es decir, menos recursos semióticos, en secuencias numéricas.

Punto *2: ¿Y el término 10? ¿Puede determinar el término 100?*

L4. Michael:*Para hallar el término 10 y para hallar el término 100, yo hice una tabla y yo comencé a sumar hasta llegar al término 10 que me daba 39, y para hallar el término 100 me di cuenta que cada 10 términos se sumaba 40 al número de acá* [refiriéndose al término 10]*, entonces comencé a sumarlo hasta que llegue al 100 y me dio 399.*

L5. Cristian:*Me di cuenta que si multiplicaba por el avance el número de veces que necesitaba y le quitaba 1 me daba el resultado, o con el resultado que necesitaba lo multiplicaba por 4, en el término 1 lo multiplicaba y le restaba 1.*

L6. Profesor:*¿Cuál es el avance?*

L7. Cristian:*4*

L8. Profesor:*¿a eso le llama usted avance?*

L9. Cristian:*Sí, de lo que pasa de acá a acá* [Señalando dos términos consecutivos] *entonces eran 4 y yo le restaba 1*

En la línea L1Michael comenta que para hallar el término 100 recurrió a la construcción de una tabla, es decir, sigue recurriendo a procedimiento aritméticos para encontrar el número que ocupa términos más remotos o lejanos. La construcción de una tabla es, desde la TCO, caracterizado como un artefacto y no es sólo ayuda al pensamiento sino que es (Radford, 2006a;Vygotski, 2000;Wertsch, 1988; Vergel, 2011, 2012) parte constitutiva de éste.

Por el contrario, en la línea L5Cristian explica que para hallar el término 100 se fijó en una forma de calcularlo teniendo en cuenta las características de los términos: "*Me di cuenta que si multiplicaba por el avance el número de veces que necesitaba y le quitaba 1 me daba el resultado";* en esta frase se puede identificar una fórmula en acción que es utilizada para calcular términos más lejanos. En las líneas L7 a L9 se ratifica que para los estudiantes el avance es el número que se aumenta de un término a otro y determina una constante en la secuencia lo que le permite a Cristian usarlo para calcular un término dado.

Punto 3: Escribir un mensaje a un estudiante de otra clase, con todos los detalles, en el que se indique la manera de encontrar el número correspondiente a los términos 5, 6, 10 y 100

L10. Michael:*Para el tercer punto, el mensaje para hallar el término 5, 6, 10 y 100, primero yo hice la fórmula y me encontré que era multiplicar el número de la figura por el avance que era 4 y restarle 1, y pues el* ***mensaje era: Multiplicar el número de la figura y a ese resultado restarle uno****. Y la fórmula que hice era esta: n es igual a F, que f es la figura, y el 4 y el 1 son los constantes, por 4 menos 1.* $[n = F * 4 - 1]$ **(Ver Imagen 22)**. *Y lo hice un ejemplo con la figura 2 que ya está acá, y cogí hice que: 2 por 4, 8, menos 1 me da 7 y si es verdad porque acá ya está* [Refiriéndose al término 2].

Imagen 22. *Fórmula propuesta por Michael*

Aquí nuevamente los estudiantes optan por plantear la fórmula algebraica antes de redactar el mensaje pedido. En la línea L10 se puede observar la fórmula y el mensaje planteado por Michael, en dicha fórmula Michael utiliza la letra F para representar el número del término que él llama "figura" y la letra n la sigue utilizando para indicar el número que se encuentra en cualquier término (Ver Imagen 22).

L11. Cristian:*Yo en la fórmula puse que n era el número que se necesitaba,* $\boldsymbol{y}$ *era el término y* $\boldsymbol{x}$ *por el avance, ósea el número que avanzaba de un término a otro. Entonces puse* $\boldsymbol{n}$ *igual a* $\boldsymbol{y}$ *por* $\boldsymbol{x}$ *menos 1* [$\boldsymbol{n = (y * x) - 1}$] **(Ver Imagen 23)***y entonces así me daba, por ejemplo acá era 5 por 4, 20, menos 1, 19. Entonces esa era el término 5 por el avance que era 4 y el resultado menos 1.*

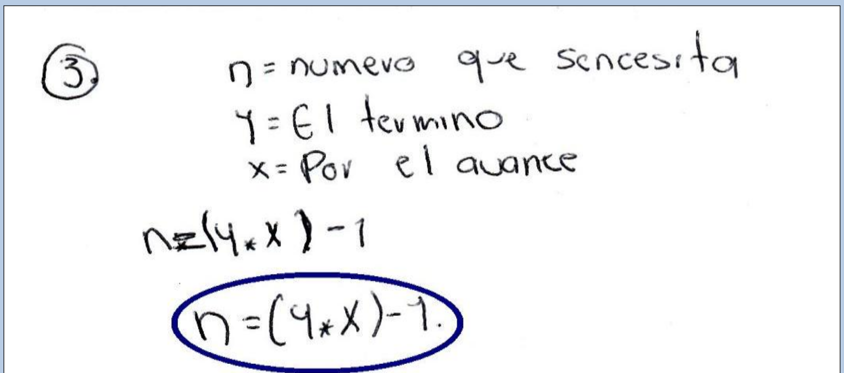


Imagen 23. *Fórmula propuesta por Cristian*

En la línea L11 Cristian presenta la fórmula creada por él. Este estudiante decide utilizar la letra y para representar el número del término e introduce la letra x para representar el avance, es decir, para representar el número que se aumenta de un término a otro (Ver Imagen 23). Cristian decide asignarle una letra un número constante en la secuencia con el objetivo, tal vez, de plantear una fórmula algebraica más general. Sea este el caso o no, lo cierto en este procedimiento llevado a cabo por Cristian es que se refleja una condensación de signos empleando en esta parte signos alfanuméricos. Recuérdese que inicialmente se utilizaron frases para responder a las preguntas anteriores. Una vez más el proceso de objetivación Contracción semiótica se hace presente, a la vez que la movilización de estos últimos recursos semióticos (signos alfanuméricos)*estratifican*[8] una forma de pensamiento algebraico como la simbólica.

Por otro lado, a continuación en la línea L12, se evidencia la fórmula propuesta por Andrés, quien sigue siendo fiel a la notación utilizada por el grupo en las actividades anteriores, es decir, sigue utilizando la letra n para representar el número que se encuentra en el término y utiliza la letra a para expresar el número del término.

L12. Andrés:*Mi fórmula es, n es el término, a es el número, el 4 es una constante que al multiplicarla da un número y al restarle 1 da el número que está en el término.*

[$\boldsymbol{n = a * 4(-1)}$] **(Ver Imagen 24)**.

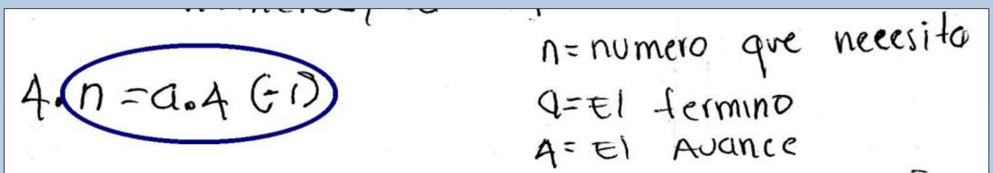


Imagen 24. *Fórmula propuesta por Andrés*

De esta manera cada uno de los estudiantes, después de haber planteado una fórmula algebraica, redactó el mensaje que obviamente se basó en la fórmula que cada uno propuso.

L13. MensajeMichael:*Multiplicar el # de la figura por 4 y al resultado réstele 1*

L14. MensajeCristian:

1. *Mirar y analizar cuanto se avanza en cada figura*

2. *Luego multiplicar el término por 4 que es el avance*

3. *Luego al resultado restarle 1*

4. *Y ese será el valor final*

L15. MensajeAndrés:*Para encontrar el número correspondiente, como los términos 5, 6, 10 y 100, se multiplica el término por 4 y le da el número, la cifra.*

[8] Los estratos de generalidad, de alguna manera abordados en este trabajo, constituyen un constructo teórico introducido por el profesor Luis Radford en sus investigaciones. La idea central radica en que los estratos de generalidad son determinados por los medios semióticos de objetivación que ayudan a realizar la actividad reflexiva.

En esencia los mensajes redactados proponen la misma operación aritmética, que para hallar el número correspondiente a cualquier término se debe multiplicar el número del término y restarle 1. Esto evidencia que los estudiantes han identificado el patrón de generalización y son capaces de plantear una expresión que permita hallar el número correspondiente a un término en particular. Puede observarse aquí dos de los elementos sugeridos por Radford como característicos del pensamiento algebraico: el sentido de la indeterminancia y la analiticidad.

Síntesis sobre la actividad asociada con la Tarea 5

Como ya se mencionó, en la Tarea 5 se presentó una secuencia numérica para observar los recursos semióticos que movilizan los estudiantes frente a una secuencia que carece del componente geométrico.

En el proceso de los estudiantes se evidenció que se minimizaron los recursos semióticos utilizados en las anteriores actividades y se aumento el uso del lenguaje simbólico. Los gestos aquí son utilizados básicamente para hacer señalamiento de un término a otro refiriéndose al número que se aumenta entre los mismos.Los estudiantes siguen utilizando métodos aritméticos para hallar los términos no mayores al término 10 y cuando necesitan encontrar un término más lejano optan por analizar algún patrón de generalización que les permita minimizar los cálculos aritméticos que deben hacer para encontrar el término en cuestión. En esta actividad se encontró que los tres integrantes del grupo utilizaron letras distintas en el planteamiento de la fórmula algebraica pero en esencia las tres fórmulas resumían el cálculo que se debe hacer para hallar el número correspondiente a cualquier término. Una vez más hay evidencia de las formas de pensamiento algebraico propuestas por Radford (2010) y del proceso de objetivación denominado Contracción Semiótica. Este análisis confirma la idea derivada de los trabajos de Radford, según la cual las sucesivas contracciones semióticas están íntimamente relacionadas con las formas de pensamiento algebraico identificadas.

Tarea 6

La Tarea 6 es muy similar a la Tarea 5. La diferencia radica en el tipo de secuencia que se presenta. En la Tarea5 se trata de una secuencia lineal y en la Tarea 6 se trata de una secuencia cuadrática y se plantea para observar el proceso llevado por los estudiantes ante una secuencia numérica de este tipo. En esta Tarea los estudiantes no presentaron mayor problema para hallar los términos 5, 6, 10 y 100 y la forma de hallarlos fue similar a la de la Tarea 5, utilizando métodos aritméticos. Por esta razón aquí solo presentará el mensaje construido por cada uno de los integrantes del grupo junto con la fórmula algebraica propuesta ya que en el proceso de los estudiantes estos dos puntos están íntimamente relacionados.

L1. MensajeMichael:*Multiplique la figura al cuadrado y reste 1*

L2. FórmulaMichael:$\boldsymbol{n = F^2 - 1}$*con* $\boldsymbol{F = Figura}$. El estudiante recurre a un ejemplo para verificar que la fórmula propuesta realmente funciona **(Ver Imagen 25)**

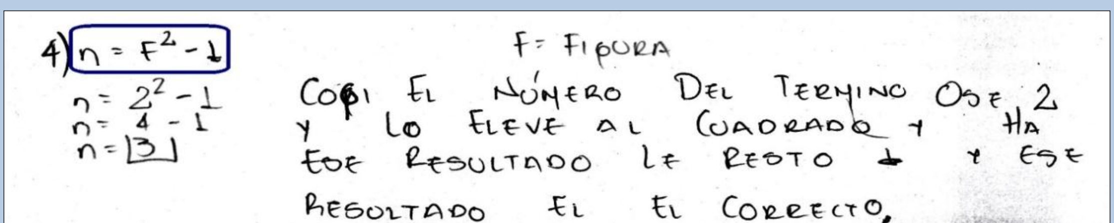


Imagen 25. *Fórmula propuesta por Michael*

En L1 se presenta el mensaje redactado por Michael en el cual que se evidencia que ha identificado el cálculo aritmético que se debe realizar para encontrar el número correspondiente de cualquier término, o como él lo llama, cualquier figura. Se observa que ha identificado que el número del término se debe elevar al cuadrado y esto lo utiliza para plantear la fórmula que se observa en la línea L2 y que posteriormente comprueba con un ejemplo particular (Ver Imagen 25). El término “*figura”* corresponde a lo desconocido, a lo indeterminado, aunque siente la necesidad de particularizar con un ejemplo. Este procedimiento es importante en esta investigación puesto que, al parecer el sentido de la indeterminancia no queda estático, sino que es un sentido que se apoya necesariamente en ejemplos (para este estudiante).

Cristian, por su parte, en su mensaje opta por recurrir al cálculo de los términos 5, 6, 10 y 100 para identificar que en cualquier término se debe elevar el número del término al cuadrado y restarle 1 (Ver Imagen 26); es decir, también identifica el componente cuadrático de la secuencia y de esta manera propone la fórmula algebraica para encontrar el número que se encuentra en cualquier término de la secuencia (Ver L4 e Imagen 27). Contrario a la producción de Michael, Cristian recurre primero a ejemplos y luego propone una expresión algebraica. El sentido de la indeterminancia, en este caso, es distinto, pues de unos casos particulares propone la expresión $n = (T)^2 - 1$**.** Este análisis de los dos sentidos de la indeterminancia puede ser motivo de futuras investigaciones.

L3. MensajeCristian: *Para hallar el término 5, 6, 10 y 100 lo único que se hace es multiplicar el término a la dos y restarle 1* (Ver Imagen 26)

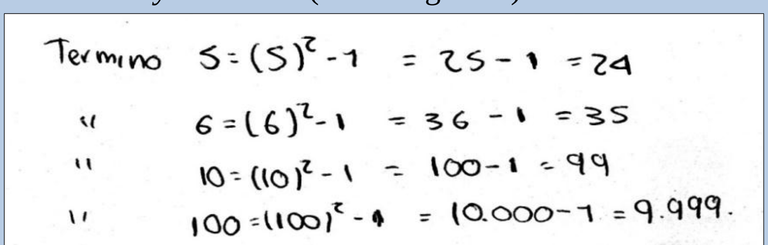
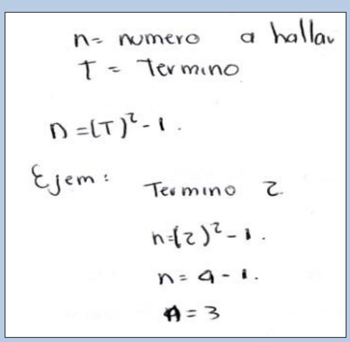

Termino $5 = (5)^2 - 1 = 25 - 1 = 24$
" $6 = (6)^2 - 1 = 36 - 1 = 35$
" $10 = (10)^2 - 1 = 100 - 1 = 99$
" $100 = (100)^2 - 1 = 10.000 - 1 = 9.999.$

Imagen 26. *Calculo de los términos 5, 6, 10 y 100*

L4. FórmulaCristian: (Ver Imagen 27)


n = numero a hallar
T = Termino
$n = (T)^2 - 1.$
Ejem: Termino 2.
$n = (2)^2 - 1.$
$n = 4 - 1.$
$n = 3$

$\boldsymbol{n = (T)^2 - 1}$

$\boldsymbol{n = \text{número a hallar}}$

Imagen 27. *Fórmula propuesta por Cristian*

Andrés también reconoce el patrón de gener … órmula algebraica para encontrar el número de cualquier término de la secuencia.

L5. Mensaje Andrés: *La manera de encontrar el número correspondiente es multiplicar la figura al cuadrado y restar 1*

L6. Fórmula Andrés: $\boldsymbol{n = a^2 - 1}$ (Ver Figura 27)

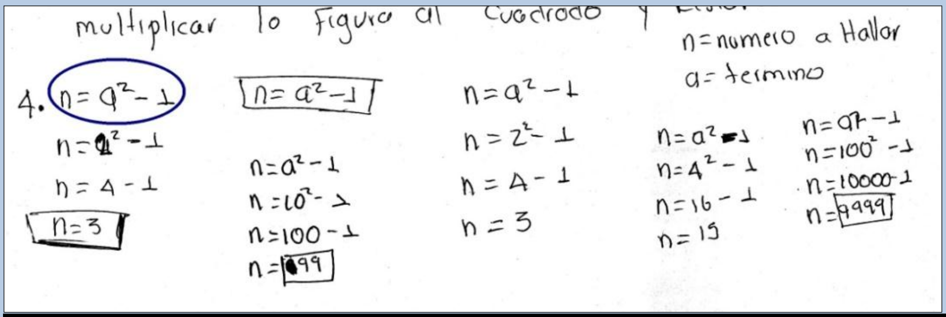


Imagen 27. *Fórmula propuesta por Andrés*

La producción de Andrés refleja un sentido de la indeterminancia similar al sentido expuesto por Michael. En los tres casos hay movilización de medios semióticos de objetivación (signos alfanuméricos), que evidencian una estratificación del pensamiento, en este caso de pensamiento algebraico simbólico (Radford, 2010).

Síntesis sobre la actividad asociada con la Tarea 6

En este punto de la investigación los estudiantes pueden hallar los términos particulares de la secuencia sin mayor dificultad. Los recursos semióticos movilizados son mínimos ya que el centro de atención está en el planteamiento de una expresión algebraica que les sintetice los cálculos aritméticos que ya han identificado. Las fórmulas propuestas por los estudiantes utilizan diferentes letras para expresar las variables, pero las tres les permite hallar el número correspondiente a un término dado y desde este punto de vista las fórmulas son iguales. Podría afirmarse, a esta altura del trabajo con las tareas, que estos tres estudiantes se especializan en la movilización de un medio semiótico de objetivación como lo es los signos alfanuméricos del álgebra. No obstante, los tres estudiantes aun no se desprenden de los casos particulares para evaluar si la expresión planteada es correcta. Un hecho para resaltar es que los tres estudiantes consideran la letra *n* como el resultado al que se tiene que llegar.

Tarea 7

El propósito de esta Tarea era observar cómo los estudiantes construían la secuencia figural y/o numérica partiendo de la fórmula algebraica del término general, y así identificar la movilización de los recursos semióticos y de qué manera se evidencian los procesos de objetivación después de seisTareas dirigidas a la generalización de patrones de diferentes secuencias figurales y numéricas. Se optó por presentar la fórmula algebraica teniendo en cuenta el nivel de los estudiantes (grado décimo), nivel que permitía explorar el significado que cada estudiante le daba a las letras presentes en la expresión y cómo las utilizaban para construir la secuencia.

Punto 1: Construya dos secuencias, una figural o geométrica y otra numérica con los 5 primeros términos ($\boldsymbol{a_n = n^2 + n}$)

En este punto se pedía que construyeran una secuencia figural y otra numérica de la sucesión cuadrática presentada. A continuación se presentan las secuencias que cada uno de los integrantes del grupo construyó.

L1. Michael:

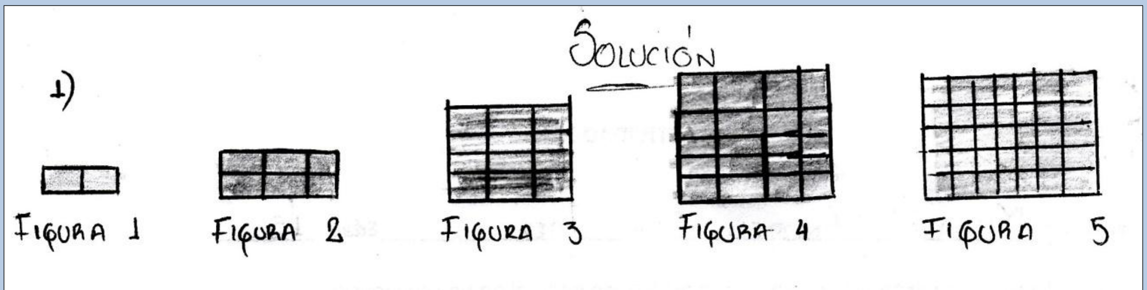


Imagen 28. *Secuencia figural construida por Michael*

L2. Cristian:

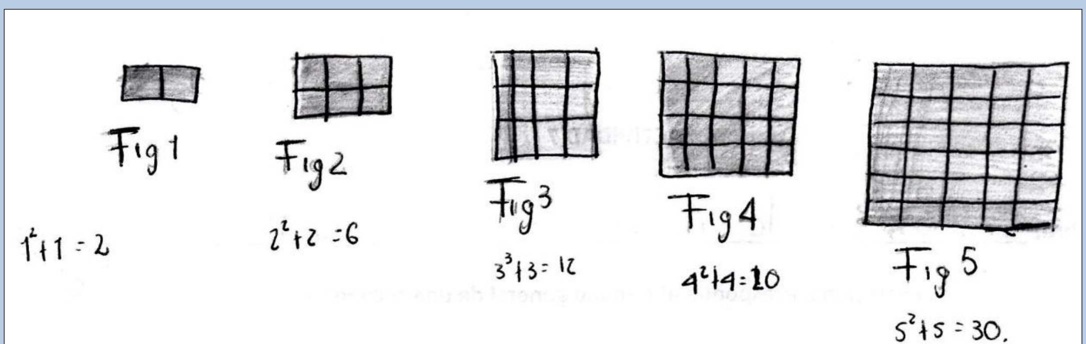


Imagen 29. *Secuencia figural construida por Cristian*

L3. Andrés:

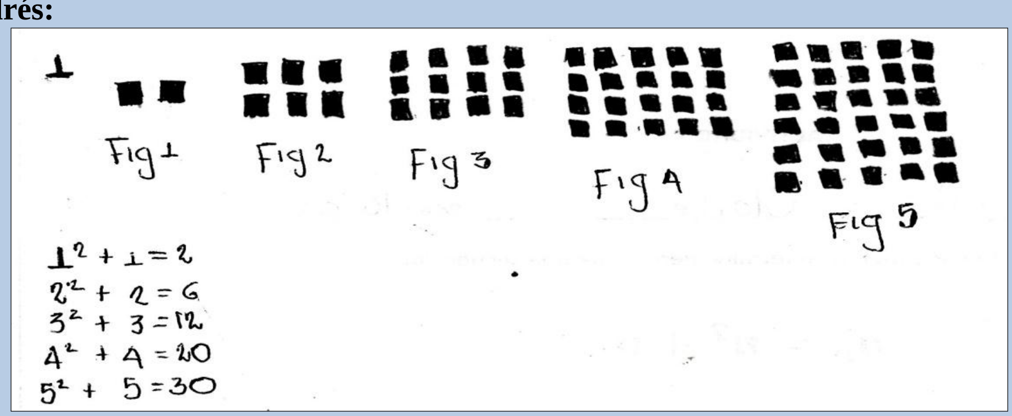


Imagen 30. *Secuencia figural construida por Andrés*

Las tres secuencias presentadas por los estudiantes son muy similares a la secuencia figural trabajada en la Tarea 3, en la que se planteó una secuencia cuyo término general se modelaba por una expresión algebraica cuadrática. Esta similaridad se basa en la proyección de la experiencia anterior acumulada en el trabajo con la Tarea 3, a partir del cual losestudiantes lograron percibir aspectos similares y diferentes. Radford (2008) plantea que el hecho de notar similaridades y diferencia en un proceso de generalización paga tributo a las actividades sociales (interacción social), las cuales están subsumidas en tradiciones culturales que a su vez establecen características para lo mismo y lo diferente. Este proceso de objetivaciónque aprovecha la experiencia previa para abordar una Tarea posterior, como la Tarea 7, es lo que Radford (2008) llama Iconicidad.Este proceso no sólo subraya el contraste entre dos formas conceptuales, es el proceso mediante el cual los estudiantes se basan en experiencias semióticas anteriores para orientarse en una nueva situación, lo cual da cuenta de una actividad semiótica diferente pero que capitaliza aspectos semióticos anteriores.

Punto 2: Redacte una explicación de la manera como encontró los términos de las dos secuencias

Aquí se pretende indagar sobre la forma en la que los estudiantes encontraron los términos de la secuencia figural y de la numérica. A continuación se presenta las explicaciones redactadas por los tres estudiantes del grupo

L4. Explicación de Michael:*Reemplazamos la ecuación dada. Reemplazando n por cualquier número*

L5. Explicación de Cristian:*Reemplazando la ecuación* $a_n = n^2 + n$*siendo n el número de la figura*

En las explicaciones redactadas por los tres estudiantes se puede evidenciar que en esta secuencia sí consideran a la letra $\boldsymbol{n}$ como el número del término y tienen claro que para hallar los términos de la secuencia deben sustituir la letra $\boldsymbol{n}$ por números naturales.

Para reforzar lo anterior, a continuación se presenta la transcripción de la explicación verbal que el grupo proporciona sobre este hecho.

L7. Michael:*Entonces nos dan una ecuación, una secuencia, es igual a*$\boldsymbol{n}$ *a la dos más* $\boldsymbol{n}$*.* $\boldsymbol{n}$*hay que reemplazarlo por cualquier número para encontrar la figura. Y aquí hay un ejemplo que 1 elevado a las dos más 1.* $\boldsymbol{n}$*se pone el mismo número y pues da 2. En la figura....*

L8. Cristian:*2 sería 2 elevado a la 2 más 1, daría umm.*

L9. Andrés: *más 2…*

L10. Cristian:*más 2 que es el número de la figura*

L11. Michael:*más dos da 6. En la tercera figura, 3 a la 2 más 3 daba 12 y así secuencialmente, lo hicimos hasta la figura 5, que 5 elevado a la 2 más 5 daba 30.*

En L7 se pone de presente cómo el discurso de Michael, es decir, su dimensión lingüística se incorpora en la fórmula algebraica **(**$a_n = n^2 + n$**).** En L8, L9 y L10 se evidencia una actividad matemática por parte de Cristian y Andrés en la cual es protagonista el recurso semiótico lenguaje oral. Puede observarse cómo en L9 hay una complementación de Andrés al discurso de

Cristian, lo que es capitalizado por él en L10 ("*más 2 que es el número de la figura*"); en términos Radford y Vergel (2012, comunicación personal), emerge un segmento de la actividad matemática donde dos sujetos (Cristian y Andrés) movilizan recursos semióticos, estos es, hay evidencia de un nodo semiótico social. El indexical espacial (*"y así secuencialmente"*) denota cómo el lenguaje natural le sirve de apoyo a Michael para poder referirse a la fórmula algebraica. El anterior análisis pone de manifiesto los recursos semióticos que utilizan los estudiantes para proceder a construir la secuencia.

Punto 1: Escribir los 5 primeros términos de cada una de las secuencias.

$\boldsymbol{a_n = \frac{n^2+1}{2} a_n = \frac{n^2}{2} + 1}$

En la segunda parte de la Tarea se presentó el término general de dos secuencias numéricas cuyos términos poseían números decimales. A continuación se presentanparte de las explicaciones dadas por Michael y Cristian al determinar los 5 primeros términos de cada secuencia.

L12. Michael:*En la 3 daba 5, en la 4 daba 8,5 y la 5 daba 13. Y se veía que en cada una avanzaba de a 1,5.*

L13. Michael:*Del 1 al 2 avanzaba 1,5, del 2 al 3 avanzaba 2,5, del 3 al 4 avanzaba 3,5 y del 4 al 5 avanzaba 4,5*

En las líneas L12 y L13 se evidencia que los estudiantes encuentran rápidamente los 5 primeros términos reemplazando los 5 primeros términos en la fórmula algebraica. Además notan la existencia de números decimales y analizan la cantidad en la que se va aumentando de un término a otro e identifican que esta cantidad no es una constante (Ver L13). La frase "*Y se* *veía que en cada una avanzaba de a 1,5"*, una vez más, indica cómo el lenguaje natural se incorpora a la fórmula algebraica, aspecto que es de suma importancia visibilizarlo en esta investigación. Los trabajos adelantados por Radford (véase, en particular, Radford (2000)) discuten este hecho, en tanto es materia de investigación analizar cómo adverbios espaciales quedan implícitos en una fórmula algebraica o cómo el lenguaje simbólico incorpora la dimensión lingüística cuando los estudiantes son enfrentados a tareas sobre generalización de patrones.

En el caso de la segunda secuencia, Michael procede, frente a la pregunta del profesor, de la siguiente manera:

L14. Profesor: *¿Los cinco primeros términos donde están? ¿Cómo los encontraron?*

L15. Michael: *Pues tocaba reemplazar **n** por el número de la figura y a todos se les sumaba 1*

En la declaración de Michael se pone de presente, por un lado, un reconocimiento de la variable independiente en la expresión algebraica, y por otro, de manera tácita esta variable la eleva al cuadrado y la divide entre dos, y reconoce ("*y a todos se les sumaba 1"*) una constante que debe ser sumada. El reconocimiento en dicha expresión algebraica de estos aspectos asociados con lo común, de acuerdo con Radford (2008), es un elemento clave en la compresión de la generalización y en consecuencia, en el caso de Michael, para construir la secuencia.

Síntesis sobre la actividad asociada a la Tarea 7

En la Tarea 7 los estudiantes se enfrentaron a la fórmula algebraica de tres sucesiones. Debían encontrar los 5 primeros términos en los tres casos. En la primera sucesión, era posible construir una secuencia figural y los estudiantes utilizaron la experiencia ganada en las secuencias figurales de las Tareas anteriores y de esta manera construyeron una secuencia similar a una ya trabajada en la Tarea 3.

Se observó en el proceso del grupo que en las fórmulas de la Tarea 7 los estudiantes identificaban a la letra n como el número de la posición del término. Este hecho no sucedió en las actividades anteriores en las que ellos tenían que plantear la fórmula algebraica de la secuencia, en esos casos el grupo denominaba la letra $n$como *el resultado al que tenían que llegar*después de plantear la fórmula. Sin importar las letras que utilicen, los estudiantes son capaces de construir la secuencia y de identificar la relación entre el número del término y el término de la sucesión. Más aún, de manera reiterada hay evidencias según las cuales el lenguaje natural ("*se les sumaba 1", "se veía que en cada una avanzaba de a 1,5",* "*más 2 que es el número de la figura"*) se incorpora al lenguaje simbólico ($a_n = n^2 + n$, $\mathbf{a_n = \frac{n^2+1}{2}}$,$\mathbf{a_n = \frac{n^2}{2} + 1}$**).**

CAPÍTULO 5

CONCLUSIONES

En este capítulo se presentan las conclusiones evidenciadas en los resultados encontrados durante el análisis multimodal de la actividad matemática de los estudiantes. Éstas se organizan en tres partes. En la primera parte, se hace referencia al cumplimiento de los objetivos formulados en la investigación; posteriormente se señalan algunos aspectos importantes asociados a la TCO como perspectiva teórica y más específicamente al desarrollo del pensamiento algebraico. Finalmente, en la tercera parte, se plantean algunas recomendaciones de orden investigativo que se consideran pertinentes para emprender próximos estudios que tomen como referencia la perspectiva semiótica cultural y utilicen las herramientas teóricas de la TCO.

Sobre los objetivos de investigación:

El desarrollo del presente trabajo fue orientado por la siguiente pregunta de investigación:*¿Cuáles son los medios semióticos de objetivación que movilizanlosestudiantes de grado décimo de educación media y qué procesos de objetivación desarrollancuandoseenfrentanatareasdegeneralizacióndepatronesde secuencias figurales y numéricas?*Con el fin de dar respuesta a esta pregunta se planteó un objetivo general y dos objetivos específicos enfocados al cumplimiento del objetivo general: *Identificar, describir y* *analizar losmedios semióticos de objetivación que movilizanlosestudiantes de grado décimo de educación media y los procesos de objetivación que desarrollan cuandoseenfrentanatareasdegeneralizacióndepatronesde secuencias figurales.* A continuación se exponen las acciones realizadas durante la investigación que permitieron cumplir con los dos objetivos específicos:

- Objetivo específico N° 1: *Diseñar e implementar una serie de tareas, vinculada con la teoría cultural de la objetivación, sobre secuencias de generalización de patrones en contextos figurales y numéricos.*Para el cumplimiento de este objetivo se realizó un estudio de algunos trabajos de investigación desarrollados por Luis Radford, de la tesis doctoral de Santi (2010) y los trabajos de algunos autores que han contribuido a la construcción de la propuesta teórica elaborada por Radford. Dicho estudio estuvo encaminado a la comprensión de los constructos teóricos expuestos en la TCO, lo cual brindó las herramientas para seleccionar cuatro tareas que fueron adaptadas a los propósitos del presente trabajo. Adicional a las cuatro tareas ya mencionadas, se diseñaron tres tareas tomando como referencia la actividad matemática de los estudiantes vinculada con las preguntas realizadas en las tareas previas. Estas tres tareas son exclusivas de la investigación aquí reportada. De esta manera se diseñaron e implementaron siete tareas sobres secuencias de generalización de patrones en contextos figurales y numéricos.

- Objetivo específico N° 2:

  Construir las categorías de análisis que permitan identificar e interpretar:

- *Los medios semióticos de objetivación que movilizan los estudiantes de grado décimo de educación media cuando se enfrentan a Tareas sobre secuencias de generalización de patrones en contextos figurales.*
- *Los procesos de objetivación que desarrollan los estudiantes de grado décimo de educación media estudiantes cuando se enfrentan a Tareas sobre secuencias de generalización de patrones en contextos figurales y numéricos.*

Las categorías de análisis establecidas a partir del acercamiento a la TCO fueron: gestos como señalamientos e inscripciones, y procesos de objetivación como Contracción Semiótica e Iconicidad. En relación con los medios semióticos de objetivación movilizados por los estudiantes, y teniendo en cuenta el análisis de los datos, se clasificaron en dos clases, signos kinestésicos y signos lingüísticos (orales y escritos):

Signos kinestésicos

- *Medio semiótico de objetivación señalamiento:* consistente en el señalamiento en su mayoría con el dedo índice. Fue uno de los medios semióticos empleado con mayor frecuencia por los estudiantes, empleado específicamente para comunicar y hacer visible la identificación del patrón de generalización tanto en las secuencias figurales como numéricas, es decir, para poner de manifiesto los aspectos comunes entre las figuras o términos de las secuencias.

- *Medio semiótico de objetivación inscripción:*este medio semiótico consiste en el señalamiento con el lápiz en el aire o en la hoja de trabajo. El objetivo es hacer una inscripción de algún elemento de las secuencias trabajadas. Los estudiantes lo utilizaron para la construcción de una secuencia imaginaria; esto es, cuando los estudiantes debían encontrar figuras o términos de las secuencias que no estaban presentes en las plantadas en las tareas, recurrían a construir una secuencia imaginaria utilizando el patrón de generalización identificado. Las inscripciones las utilizaban para hacer visible ycomunicar las posiciones que deberían ocupar las figuras o términos pedidos.

- *Medio semiótico de objetivación Tapar y destapar:*Este medio semiótico se presentó únicamente en las secuencias figurales ya que fue utilizado para ocultar y luego dejar a la vista algunos elementos una figura en particular con el fin de realizar una comparación con la figura inmediatamente anterior. La movilización de este medio semiótico de objetivación les permitió a los estudiantes identificar, hacer visible y comunicar una comunalidad en la disposición geométrico-espacial de las figuras, comunalidad que fue utilizada para dibujar figuras de las secuencias posteriores a las presentadas en las Tareas.

- *Medio semiótico de objetivación movimiento:* gesto utilizado por los estudiantes para establecer relaciones geométrico-espaciales en una figura, relaciones que les permitió identificar el patrón de construcción de algunas secuencias figurales. Este medio semiótico de objetivación fue utilizado principalmente en las secuencia figurales cuadráticas.

Signos lingüísticos (orales y escritos)

- *Medio semiótico de objetivación "el avance":* Este signo fue utilizado por los estudiantes para hacer visible y comunicar el patrón de generalización, esto es, el patrón de generalización fue llamado por los estudiantes con la frase *"el avance"* y jugó un papel fundamental en la construcción del mensaje pedido en cada tarea y se convirtió en un elemento operatorio en las fórmulas construidas para generalizar las secuencias presentadas. Este medio semiótico de objetivación es un hallazgo de la presente investigación.

- *Medio semiótico de objetivación "la figura 0":*Los estudiantes utilizaron este signo lingüístico para introducir una nueva figura en las secuencias figurales, figura que precedía a la figura 1. La figura 0 era tomada como una constante en cada secuencia y en la expresión algebraica construida correspondía al término constate de la fórmula, es decir, la figura 0 tomaba un significado de número constante en la expresión algebraica planteada por los estudiantes. Este medio semiótico de objetivación también constituye un hallazgo de la presente investigación.

- *Medio semiótico de objetivación "la figura que se necesite":*Este recurso semiótico fue utilizado por los estudiantes en la mayoría de las tareas para designar la variable independiente de la secuencia, es decir, les permitía expresar la figura n sin utilizar símbolos alfanuméricos algebraicos. Este medio semiótico de objetivación *"la figura que se necesite"*se enmarca entre los hallazgo de la investigación aquí reportada.

Es importante anotar aquí que los medios semióticos de objetivación presentados anteriormente, tanto kinestésicos como lingüísticos, fueron, en varias oportunidades, movilizados sincrónicamente por un estudiante o por dos estudiantes al mismo tiempo. Cuando dichos medios de objetivación fueron movilizados por un solo estudiante se produjo un *Nodo Semiótico* que se caracteriza por ser un segmento de la actividad en el que varios medios semióticos de objetivación son usados sincrónicamente organizados de un mediador particular que cambia como lo hace el nivel de generalidad. En otras palabras, es un segmento de la actividad semiótica de los estudiantes en el que el conocimiento se objetiva.

Cuando varios medios semióticos de objetivación descritos se movilizaron sincrónicamente por distintos estudiantes se presentó un segmento de la actividad matemática de los estudiantes que puede ser llamado como un *Nodo Semiótico Social*. El nodo semiótico social constituye uno de los hallazgos del presente trabajo.

En relación con los procesos de objetivación desarrollados por los estudiantes de grado décimo de educación media, el análisis de datos realizado indica que existen dos de estos procesos: Contracción Semiótica e Iconicidad, procesos que han sido identificados por el profesor Radford en sus investigaciones con estudiantes de educación primaria. En consecuencia, el objetivo general planteado se logra en esta investigación. Es importante subrayar en este estudio que las formas de pensamiento algebraico planteados por Radford (Factual, Contextual y Simbólico) están determinadas por los procesos de contracción semiótica. El análisis de las producciones matemáticas de los estudiantes muestra que ellos pueden estar en un tipo de pensamiento algebraico simbólico y más tarde evidenciar un tipo de pensamiento algebraico Contextual, lo cual sugiere que estos procesos de objetivación no son homogéneos ni lineales.

Aspectos Importantes

La investigación aquí reportada pone de manifiesto aspectos importantes sobre el uso de la TCO como herramienta de análisis de la actividad matemática de los estudiantes asociada al desarrollo del pensamiento algebraico. Por un lado, investigaciones de este tipo permiten tomar conciencia de cómo los recursos semióticos movilizados (kinestésicos y lingüísticos) pueden ser elementos importantes el aprendizaje de las matemáticas, más específicamente en elementos didácticos vinculados con el pensamiento algebraico. Por otro lado, se discute la idea de que no sólo las notaciones estándares (con signos alfanuméricos del álgebra) son una manifestación del pensamiento algebraico. Esta investigación abre nuevas vías para profundizar en la comprensión de nuevas formas de pensamiento algebraico desarrolladas por los estudiantes en ausencia de signos alfanuméricos del álgebra. Por último, y en concordancia con lo anterior, el estudio del pensamiento algebraico desde la perspectiva semiótica cultural proporciona elementos para repensar la manera en la que, en el álgebra, las cantidades indeterminadas pueden ser significadas.

Recomendaciones

Partiendo del análisis realizado y las conclusiones generadas de la actividad matemática de los estudiantes participantes en esta investigación, se evidencia cómo el estudio de los medios semióticos de objetivación y de los procesos de objetivación desarrollados por los estudiantes, posibilita una mejor comprensión del desarrollo del pensamiento algebraico. Por esta razón se recomienda adelantar nuevas investigaciones de este tipo que se enmarquen en la perspectiva semiótica cultural, investigaciones que no sólo estén enfocadas al desarrollo del pensamiento algebraico sino a otros tipos de pensamientos como el aleatorio, el geométrico, el estadístico, entre otros.

Por otro lado, se recomienda profundizar en el estudio y análisis de los medios semióticos y procesos de objetivación presentes de las formas de pensamiento algebraico esbozadas en la TCO, específicamente en el pensamiento algebraico simbólico. La manera como son movilizados los medios semióticos de objetivación y cómo se desarrollan los procesos de objetivación en esta forma de pensamiento merece una investigación más profunda que permita caracterizar la naturaleza de las formas de representar y significar por parte de los estudiantes. Más aún, sería interesante indagar sistemáticamente los sentidos de la indeterminancia dados por los estudiantes e investigar la evolución de las fórmulas algebraicas, puramente alfanuméricas, hacia fórmulas más sofisticadas.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Arzarello, F. (2006). Semiosis as a multimodal process. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, SpecialIssueonSemiotics, Culture, and MathematicalThinking, 267-299.

Baquero, R. (2009). *Vigotsky y el aprendizaje escolar*. Buenos Aires: Aique.

D´Amore, B. (2006). Objetos, significados, representaciones semióticas y sentido. En: Radford, L., D´Amore, B. (eds.) (2006). Semiotics, Culture and Mathematical Thinking.Númerospecialdellarivista Relime (Cinvestav, México D.F., México). 177-196

Duval, R. (1999). *Semiosis y Pensamiento Humano. Registros semióticos y aprendizajes intelectuales*. Traducción: Myriam Vega Restrepo. Universidad del Valle. Instituto de Educación y Pedagogía

Duval, R. (2001).The cognitive analysis of problems of comprehension in the learning of mathematics. Paper presented at the Semiotics Discussion Group of the 25th *PME* International Conference, Freudenthal Institute, The Netherlands, July 2001.

Gutiérrez, M., Ball, M. y Márquez, E. (2008). Signo, significado e intersubjetividad: una mirada cultural. En *Edugere*, Pp. 689-695

Miranda, I., Radford, L. y Guzmán, J. (2007). Interpretación de gráficas cartesianas sobre el movimiento desde el punto de vista de la teoría de la objetivación. *EducaciónMatemática*, vol. 19, núm. 3, pp. 5-30.

Nemirovsky, R. &Borba, M. (2003).Perceptuo-motor activity and imagination in mathematics learning. In N. Pateman, B. Dougherty, & J. Zlliox (Eds.), *Proceedings of the 27th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education, Vol. 1* (pp. 103-135). Manoa: University of Hawaii.

Radford, L. (2000). Signs and meanings in students' emergent algebraic thinking: a semiotic analysis. *Educational Studies in Mathematics.*42, 237-268.

__________(2003).Gestures, speech, and the sprouting of signs.*Mathematical Thinking and Learning*. 5(1), 37-70. Recuperado de: http://residence.laurentian.ca/NR/rdonlyres/B952E136-CF07-4DC2-938B-96A23F50B3C0/0/gestures.pdf

__________ (2004). Semiótica cultural y cognición. Conferencia plenaria dada en la Décima octava Reunión Latinoamericana de Matemática Educativa. Universidad Autónoma de Chiapas. Recuperado de: http://www.activitephysique.laurentienne.ca/NR/rdonlyres/808730CD-2FF4-45A3-AB1B-06BAFF87B51B/0/Tuxtla3.pdf

__________ (2006a). Elementos de una teoría cultural de la objetivación. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, número especial sobre semiótica, cultura y pensamiento matemático (editores invitados: L. Radford y B. D'Amore), pp. 267-299.

___________ (2006b).Algebraic Thinking and the Generalization of Patterns: A semiotic perspective., *PME-NA*, Vol 1, pp. 2_21.

___________(2006c).Semióticayeducaciónmatemática.*RevistaLatinoamericanadeInvestigaciónenMatemáticaEducativa,SpecialIssueonSemiotics,CultureandMathematicalThinking*,pp.7-21.

___________(2006d).*Algebraic Thinking and the Generalization of Patterns: A semiotic perspective.*, *PME-NA*, Vol 1, pp. 2_21.

___________ (2008). Iconicity and contraction: a semiotic investigation of forms of algebraic generalizations of patterns in different contexts. *ZDM Mathematics Education,* 40, 83-96. Recuperado de: http://hsms.laurentian.ca/NR/rdonlyres/899F7DBD-D736-4887-B2B8-BF42D2085394/0/zdm_radford.pdf.

____

(2010a).Algebraicthinkingfromaculturalsemioticperspective.ResearchinMathematicsEducation,12(1),1-19. Recuperado de: http://www.luisradford.ca/pub/22_RME2010Álgebraicthinkingfromaculturalsemioticperspective.pdf

___________ (2010b).Layers of generality and types of generalization in pattern activities.*PNA, 4(2), 37-62.* Recuperado de http://cumbia.ath.cx:591/pna/Archivos/RadfordL10-2925.PDF

___________ (2012).Early álgebraic thinking epistemological, semiotic, and developmental ISSUE.*12° International Congress on Mathematical Education*, Seoul, Korea.

___________(2010c).Elementary Forms of Álgebraic Thinking in Young Students.In M. F. Pinto.& T. F. Kawasaki (Eds.).*Proceedings of the 34th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, Vol. 4, pp. 73-80. Belo Horizonte, Brazil: PMERecuperado de: http://www.luisradford.ca/pub/20_PME342010_3.pdf

__________The eye as a theoretician: Seeing structures in generalizing activities, For the Learning of Mathematics, 30(2), 2-7.Recuperado de: http://www.luisradford.ca/pub/21_RadfordTheEyeasaTheoretician.pdf

Radford, L., S. Demers, J. Guzmán y M. Cerulli. (2003), "Calculators, Graphs and the Production of Meaning", en N. Pateman, B. Dougherty y J. Zilliox (eds.), Proceedings of the 27 Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education (pme27 –pmena25),University of Hawaii, vol. 4, pp. 55-62.

Radford, L., Edwards, L. y Arzarello, F. (2009). Introduction: beyond words. En: *Educational Studies in Mathematics*, 70: 91-95.

Santi, G. (2010). *Changes in meaning of mathematical objects due to semiotic transformations: a comparison between semiotic perspectives*. Tesis doctoral no publicada. Universidad de Bologna.

León, O. L. (2005). "*Experiencia figural y procesos semánticos para la argumentación en geometría".* Tesis doctoral no publicada. . Doctorado interinstitucional en educación. Universidad del Valle, Cali, Colombia

Roth, W. & Radford, L. (2011).*A Cultural-Historical Perspective on Mathematics Teaching and Learning*.Rotterdam: SensePublishers

Vergel, R. (2011). *El signo en Vygotski* y su vínculo con el desarrollo de los procesos psicológicos superiores. Ensayo no publicado presentado en el marco del seminario doctoral "Sujeto y Alteridad en el Discurso Pedagógico. Doctorado interistitucional en investigación, Universidad Pedagógica Nacional.

Vergel, R. (2012). Formas de pensamiento algebraico temprano en alumnos de cuarto y quinto grados de Educación Básica Primaria (9-10 años).Proyecto doctoral. Doctorado interinstitucional en educación, énfasis en Educación Matemática. Universidad Distrital Francisco José de Caldas. Bogotá Colombia.

Villanueva, J. (2012). Medios semióticos de objetivación emergentes en estudiantes de primer grado escolar cuando se enfrentan a tareas sobre secuencias figúrales. Tesis de Maestría no publicada. Universidad Pedagógica Nacional. Bogotá. Colombia.

Vygotski, L. S. (2000). *Obras escogidas* (Vol. III) (L. Kuper, Trad.). Madrid: Visor. (Original publicado en 1931).

Vygotsky, L. S. (1997). *Educationalpsychology*. Boca Raton, Florida: St. LuciePress.

Wertsch, J. (1988). *Vygotsky y la formación social de la mente*. Barcelona: Paidós.

ANEXOS

TRANSCRIPCIONES ACTIVIDAD MATEMÁTICA GRUPO 2.

En este apartado se presenta algunas transcripciones de la producción matemática del Grupo 2 que participó en la recolección de información. Estas transcripciones son anexadas como apoyo del análisis y de las conclusiones presentadas en el presente trabajo ya que en ellas se puede evidenciar la movilización de varios medios semióticos de objetivación.

Tarea 2

Punto 1: Dibujar la Figura 5 y la Figura 6

L1. José:*En la figura 1 habían* [sic] *3, habían* [sic] *dos por debajo y uno por encima* (Ver Foto 27). *En la Figura 2 habían* [sic] *3 por debajo y dos por encima* (Ver Foto 28 y 29). *Entonces en esto nos fijamos, abajo iba ascendiendo; abajo iba un número más del que debía ir y arriba iba el número que era* [refiriéndose al número de la Figura]. Entonces en la figura 2 tres abajo y dos, nosotros nos guiamos acá, entonces acá abajo hicimos seis abajo y cinco hacia arriba (Ver Foto 30) *y en la figura 6, siete debajo y seis hacia arriba.* (Ver Foto 31)

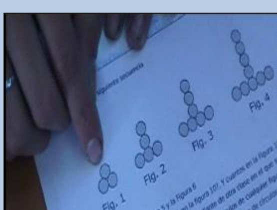


Foto 27

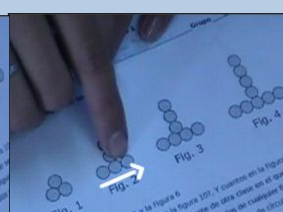


Foto 28

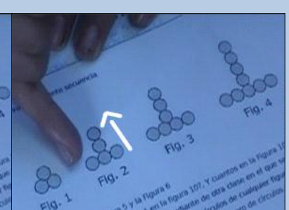


Foto 29

Imagen 31. *Gestos de José explicando los primeros términos de la secuencia*

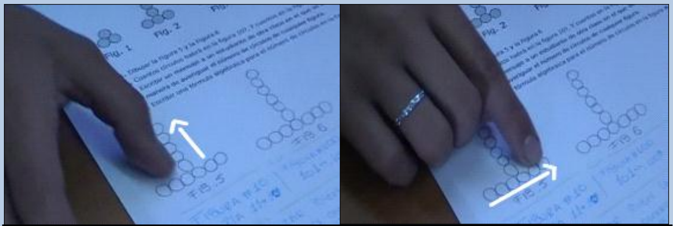


Foto 30	Foto 31

Imagen 32. *Gestos de José explicando la figura 5*

En la explicación de José (Ver L1) se evidencia que el grupo se fijo en la configuración espacial de las figuras, en dicha explicación aparecen las palabras "*por debajo*" y "*por encima*" que son usadas para indicar el numero de círculos de la figura separado en dos partes teniendo en cuenta la disposición geométrica de la misma. Además estas palabras van acompañadas de una serie de gestos que indican la forma en la que los estudiantes analizan las figuras y como determinan el patrón de generalización (Ver Imagen 31 y 32). Estos recursos semióticos movilizados contribuyen a que los estudiantes puedan dibujar las figuras 5 y 6 partiendo del patrón ya identificados (Ver Foto 30 y 31)

Punto 2: Cuantos círculos habrá en la figura 10?, Y cuantos en la Figura 100?

L2. Sebastián:*Acá también nos guiamos por estas figura, entonces acá 11* (Ver Foto 32) *y 10* (Ver Foto 33).

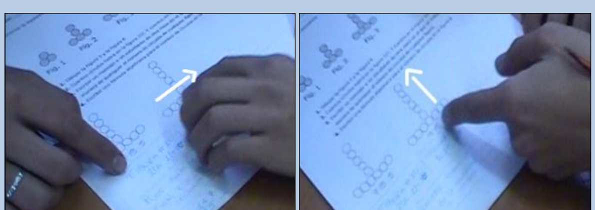


Foto 32	Foto 33

Imagen 33. *Gestos de Sebastián explicando la figura 10*

L3. José: *Y en la figura 100 deberían haber 101 y hacia arriba 100*

El patrón de generalización identificado por los estudiantes les permite saber cuántos círculos habrá en figuras más lejanas la figura 10 (Ver L2) y la figura 100 (Ver L3). Los gestos de se Sebastián (Imagen 33) son un indicador de que los estudiantes han identificado la configuración que tendrá cualquier figura de la secuencia.

Punto 3: Escribir un mensaje a un estudiante de otra clase en el que se indique la manera de averiguar el número de círculos de cualquier figura.

L4. Arnold: *Si en la figura 1 hay un circulo arriba y el doble abajo, en la figura 2 hay dos arriba y 3 abajo, en la 3 son tres círculos arriba y cuatro abajo. Depende el número de arriba se le suma uno a los círculos de abajo. Entonces si, por ejemplo, en la figura 4 hay cuatro hacia arriba ascendería uno abajo, entonces seria cinco.*

L5. José: *Si queremos que hallara el número del 50* [de la figura 50] *entonces serian 51 uno abajo y 50 hacia arriba. Ya con esa explicación.*

L6. Sebastián: *Ósea todo se tiene que solucionar dependiendo el número de la figura que está ahí*

El mensaje de redactado por el grupo se basa principalmente en la configuración espacial de las figuras, en la línea L4 Arnold explica la manera de formar las figuras de la secuencia y se puede evidenciar que los estudiantes identificaron que los círculos que van “hacia arriba” corresponden al número de la figura y que el números de círculos que van “por debajo” es uno más que el número de círculos que van “hacia arriba”. Además en la línea L6 el discurso de Sebastián deja ver que han identificado que el número de círculos de las figuras de la secuencia se encuentra en función del número de la posición de la misma.

Punto 4: Escribir una fórmula algebraica para el número de círculos en la figura n

L7. José:*Nosotros nos basamos que el número de la figura* $\boldsymbol{n}$ *es el número 14 en el abecedario, si me entiende, la* $\boldsymbol{n}$ *ocupa el número 14 en el abecedario. Pues entonces nosotros dijimos serían 14 hacia arriba y 15 hacia abajo*

L8. Arnold: *Porque haciendo un circulo mas*

L9. Profesor:*Explíqueme otra vez lo ultimo*

L10. José:*Acá dice escribir en una fórmula algebraica para cada número de círculos de la figura* $\boldsymbol{n}$*. Pues nosotros acá hicimos, ubicamos el abecedario en los número reales, y pues entonces la letra* $\boldsymbol{n}$ *ocupo el número 14. Entonces la letra* $\boldsymbol{n}$ *es el número 14. Serian 15 por debajo y 14 hacia arriba.* [El estudiante acompaña la explicación con dos gestos que indican "por debajo" y "hacia arriba"] *pues eso sería lo que ocuparía.* (Ver Imagen 34)

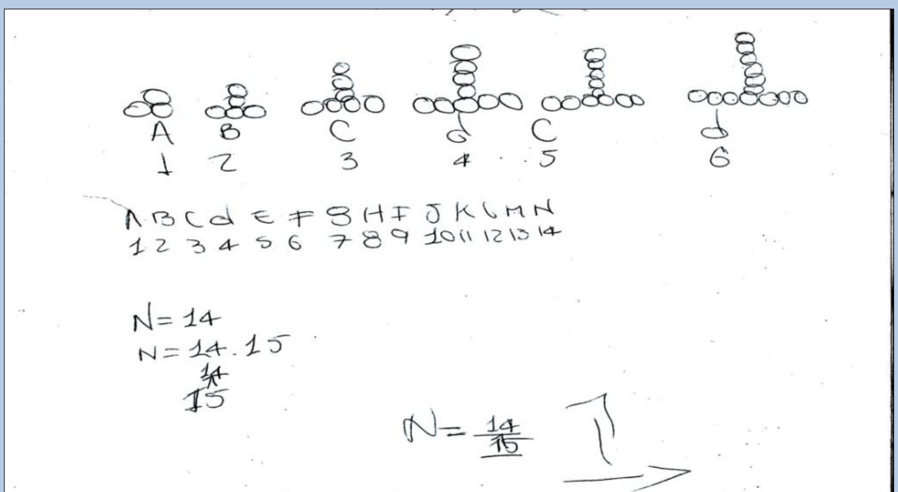


Imagen 34. *Correspondencia entre el abecedario y los números realizada por el grupo*

En las líneas L7 a L10 se puede observar el proceso seguido por el grupo para construir la fórmula algebraica pedida, en L7 José comenta que decidieron ubicar las letras del abecedario en correspondencia con los numero naturales (Ver Imagen 34) al hacer esto a la letra n le corresponde el número 14 y por esta razón los estudiantes determinan que el valor de la letra n debe ser 14. Teniendo en cuenta esto el profesor pregunta por el número de círculos que deberá tener la figura n

L11. Profesor: *¿Cuántos hay entonces?*

L12. José: *Serían 15 por debajo y 14 hacia arriba*

L13. Profesor: *¿Cuántos?*

L14. Arnold: *15 vertical y 14 horizontal*

L15. Profesor: *Y ¿en total?*

L16. José: *Serian 15 más 14, 39*

Tarea 3

Punto 1: Dibujar la Figura 4 y la Figura 5

L1. José: *Nosotros la dibujamos siguiendo una secuencia, las secuencia que se llevaba acá era que si en el primer cuadro había uno y hacia arriba 2, en el segundo dos de lado y cuatro hacia arriba.*

L2. Sebastián: *Acá en la figura hay 1* (**Ver Foto 34**) *y dos sube* (**Ver Foto 35**)*, dos de mas, acá en la figura 2 hay dos cuadros* (**Ver Foto 36**) *y dos de más que sube* (**Ver Foto 37**)*, en la 3 igual...*

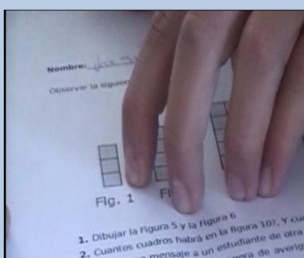


Foto 34

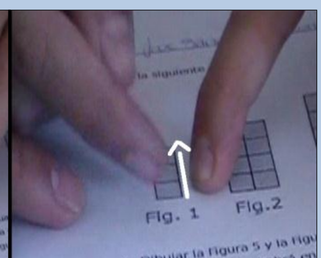


Foto 35

Foto 36

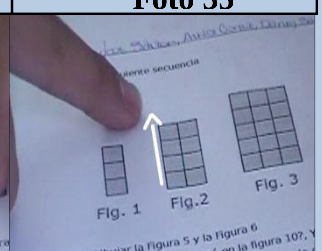


Foto 37

Imagen 35. *Sebastián explicando el número de cuadros que hay de una figura a otra*

Los estudiantes analizan la secuencia partiendo de la configuración espacial de las figuras, en la línea L2 Sebastián explica cómo se va formando la secuencia, inicialmente se fija en el numero de cuadros de la base del rectángulo e identifican que en la altura hay 2 cuadrados más que el numero de cuadros de la base. La explicación va acompañada de gestos que indican el proceso de formación de las figuras de la secuencia (Ver Imagen 35), en la Foto 34 y 36 Sebastián hace un movimiento horizontal que para indicar el numero de cuadros de la base del rectángulo y la Foto 35 y 37 el gesto es utilizado para señalar que el número de cuadros de la altura del rectángulo se determina toman el número de cuadros de la base y sumarle dos cuadros más. Es así como puede dibujar la figura 5 y 6.

L3. José: *Entonces nosotros dijimos acá en la figura 5 serian 5 de lado* (Ver Foto 38), *5 hacia arriba y se le suman dos* (Ver Foto 39). *En la figura 6 seis de lado* (Ver Foto 40), *seis hacia arriba y se le suman dos* (Ver Foto 41).

L4. Sebastián: *Ósea dos columnas*

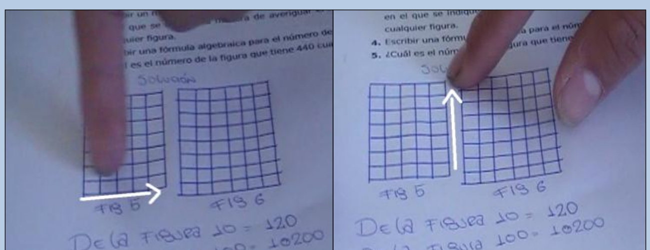


Foto 38	Foto 39

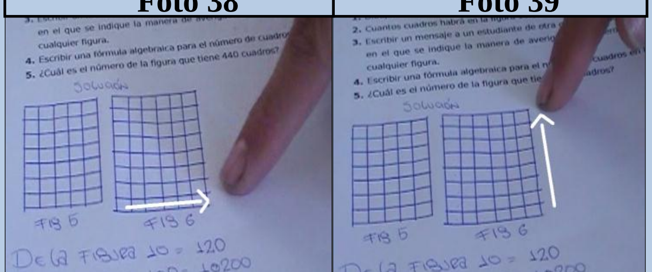


Foto 40	Foto 41

Imagen 36. *José explicando el número de cuadros de la figura 5 y 6*

En la Imagen 36 se observan los señalamientos de José cuando explica la forma de construir la figura 5 y la figura 6, José sigue el patrón identificado en el análisis de las primeras 4 figuras en las que lograron identificar que el numero de cuadros de la base del rectángulo es el número de la figura en cuestión y en el número de cuadros de la altura del rectángulo está determinado por el numero de cuadros de la base aumentado en 2 cuadros. Siguiendo este procedimiento los estudiantes logran dibujar la figura 5 y la figura 6 (Ver L3).

*Punto 2: Cuantos círculos habrá en la figura 10?, Y cuantos en la Figura 100***?**

L5. José:*Si acá en la figura 10 serian 10 de lado* (**Ver Foto 42**)*, serian 10 hacia arriba y se le suman dos serian 12* (**Ver Foto 43**)*, serian 10 por 12. 10 por 12, 120.*

L6. Sebastián:*Ósea, habrían 120 cuadros en esta figura*

L7. José:*y en la figura 100 serian, 100 de lado por 102 hacia arriba. 10200*

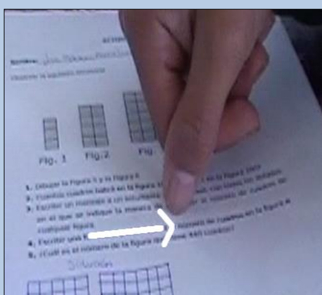


Foto 42

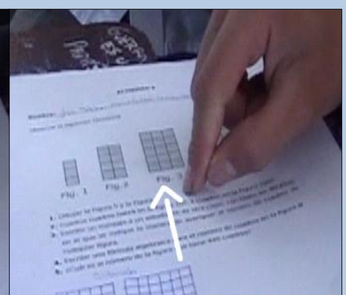


Foto 43

Imagen 37. *José explicando el número de cuadros de la figura 10 y 100*

En la Imagen 37 se observa los gestos que hace José mientras relata el numero de cuadros de que debe haber en la figura 10, estos gestos son un recurso semiótico que utiliza el estudiante para crear la figura imaginariamente partiendo del patrón que ya ha sido identificado. En la línea L5 José explica que en la figura 10 debería haber 10 cuadros de lado (en la base del rectángulo) y doce hacia arriba (en la altura del rectángulo) y por ende el numero de cuadros de la figura 10 es

$10 * 12 = 120$. Aquí aparece la multiplicación por primera vez en el proceso llevado por los estudiantes.

Punto 3: Escribir un mensaje a un estudiante de otra clase, con todos los detalles, en el que se indique la manera de averiguar el número de cuadros de cualquier figura.

Mensaje: *Se observa la secuencia en el # 1 hay 3 hacia arriba y 1 de lado, en la figura # 2 hay dos de lado y se le suma dos hacia arriba entonces serian 4, en la fig # 3 hay 3 de lado y 5 hacia arriba.*
Se puede observar la secuencia, se observa que debajo es el mismo número de la figura y hacia arriba es el número de la figura más dos hacia arriba. Al final se rellena el resto.

Para la construcción del mensaje los estudiantes recurren a explicar la configuración espacial de casos particulares de la secuencia, de esta manera logran identificar que el número de cuadros de la base del rectángulo coincide con el número de la figura y el número de cuadros de la altura se determina sumándole 2 al número de la figura "*Se puede observar la secuencia, se observa que debajo es el mismo número de la figura y hacia arriba es el número de la figura más dos hacia arriba. Al final se rellena el resto*".

Punto 4: Escribir una fórmula algebraica para el número de cuadros en la figura n

L8. Sebastián: *Lo que hicimos fue ubicar* $\boldsymbol{n}$ *en los números, ósea* $\boldsymbol{n}$ *que sería la letra número 14*

L9. Profesor: *¿Ustedes por qué creen que tienen que hacer eso cuando les pregunta por la letra* $\boldsymbol{n}$*?*

L10. José: *Nosotros no sabemos explicar qué valor tendría* $\boldsymbol{n}$

L11. Sebastián: $\boldsymbol{n}$ *tiene cualquier valor, pero nosotros nos guiamos por ese, ósea* $\boldsymbol{n}$ *es cualquier valor ¿no?*

Tarea 4

La explicación de la solución de tarea se realizó por medio de la socialización del trabajo realizado por el grupo. Aquí se presentará la presentación y posterior discusión de la solución desarrollada por el grupo.

Punto 1: Dibujar la Figura 4 y la Figura 5

L1. José: *Primero observamos las figuras, nos fuimos por la multiplicación y lo que vimos fue lo siguiente: Si por ejemplo en la figura número 3 los cuadros de adentro, si multiplicamos 3 por 3 los cuadros de adentro hay 9. En la figura 4, 4 por 4 en los cuadros de adentro van haber 16, es el resultado. Y aquí 4 por 2, 8 serán los cuadros de afuera.*

L2. Sebastián:*Lo que hicimos en la figura 5 y 6 fue multiplicar acá, 5 por 5, serian 25, y seria 5 por 2 10. Entonces nosotros acá dibujamos 25 cuadros adentro y acá afuera serian 10. Y en la figura 6 fue lo mismo, 6 por 6 y 6 por 2...*

Punto 2: Cuantos cuadros habrá en la figura 10?, Y cuantos en la Figura 100?

Sebastián:*Seguimos el mismo procedimiento, entonces en la figura 100 entonces daría 100 y 10 por 2.*

José: *En la figura 10 seria 10 por 10, seria 100. Y los cuadros de afuera serian 10 por 2, serian 20. Todo esto se suma, daría 120 que sería el total de cuadros. En la figura 100 fue lo mismo, seria 100 por 100 seria 10000, y 100 por 2 serian 200, entonces serian 10200.*

Punto 3: Escribir un mensaje a un estudiante de otra clase, con todos los detalles, en el que se indique la manera de averiguar el número de cuadros de cualquier figura.

Mensaje*: En el centro es el número de la figura multiplicado por sí mismo. se ve en el ejemplo la figura # 2 en el centro sería 2 X 2 serian 4 y por fuera se inicia con 2 cuadros en la fig 2 se multiplica 2 X 2 serian 4. En la figura # 3 serian 3 X 2 serian 6 por fuera y por dentro en el centro 3 X 3=9*

Tarea 5

José:*Yo aquí en la actividad número 5, yo llegue a esta conclusión, de que solo eran números impares. Yo llegue a buscar una semejanza entre todo esto. La única semejanza que encontré era que era una suma, porque era 3 más 4, 7, 7 más 4, 11, 11 mas 4, 15. Pues esa es la suma, así fue como yo encontré la secuencia.*

Punto 1: ¿Cuál es el término 5 y el término 6?

José:*Pues yo hice una suma del termino 4 más 4, seria 19. Y el termino 5 más 4 seria 23.*

Punto 2: ¿Y el termino 10? ¿Puede determinar el termino 100?

José:*Acá yo hice una multiplicación. Multiplique 10 por 4 menos 1. Entonces eso me dio 39. En la figura 100 seria, 100 por 4 menos 1 y eso me dio 399.*

Punto 1: ¿Cuál es el término 5 y el término 6?

Sebastián:*Yo halle una semejanza y que también estaban números impares. Que la diferencia de 3 a 7 y de 7 a 11 y de 11 a 15 pues era de 4 todos, entonces yo saque la conclusión de que en todos los términos pues van de 4 en 4 y pues que tan solo son números impares. Así halle el termino 5 pues que a 15 le sume 4 entonces me daría 19*

Punto 2: ¿Y el termino 10? ¿Puede determinar el termino 100?

Sebastián:*Multipliqué 100 por 4 me daba 400 y le resto 1 quedaría igual a 399. Entonces ahí se están cumpliendo todas las reglas que yo saque, mire 399 es un número impar y pues va de 4 en 4 también.*

Punto 4: Escribir una fórmula algebraica para el número que se encuentra en el término n

Sebastián:*Yo seguí con mi misma teoría, con n 14, pues entonces lo que yo hice fue pues que la letra en que en la recta numérica es el 14, entonces puse n igual 14 por 4 que es de 4 en 4 menos 1 que es el que se le resta, entonces halle la figura número 14 que seria 55. Entonces esa es la fórmula, con base en la formula saque el resultado del termino 14 que me daría 55*

José: *yo otra vez volví asumir como n en la recta, como 14, seguir en nuestra base seria por 4 menos 1 igual a 55, así seria.*

Tarea 6

En esta tarea los estudiantes no presentaron mayor problema para hallar los términos 5, 6, 10 y 100. Es por esto que aquí solo presentará el mensaje construido por cada uno de los integrantes del grupo junto con la fórmula algebraica propuesta por ellos.

MensajeJosé: *Es sencillo se observa el número de la figura por la figura siguiente más el término anterior*

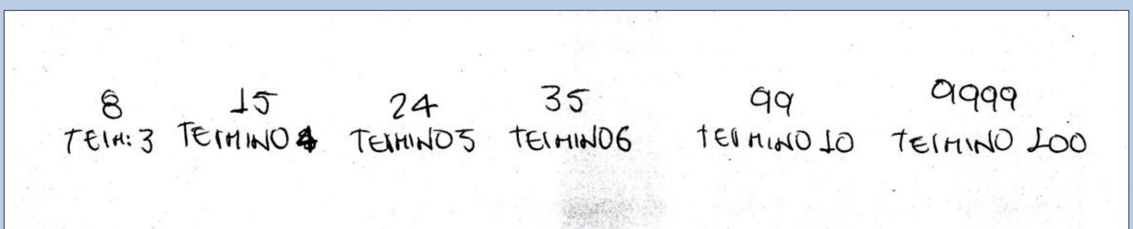


Imagen 39.

MensajeSebastián:*Analicé el número de los términos y me di cuenta que multiplicando dos términos entre si y sumando el menor de ellos le da el resultado de cualquier término.*
Para la figura 100 hice esto: Cogí el término 99 y lo multiplique por el término 100 y el resultado le sume el término menor o sea le sume 99 y me da 9.999

MensajeArnold: *Que sume el número de cada término por el número impar que se sigue Procedimiento: Según la secuencia de números impares (3 5 9) sumárselo a el número de cada término empezando desde 0 y hay según la suma da el número del termino 2*

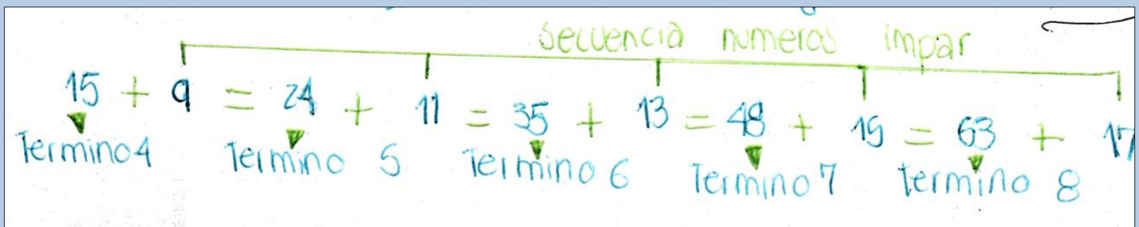


Imagen 44.

FórmulaArnold:

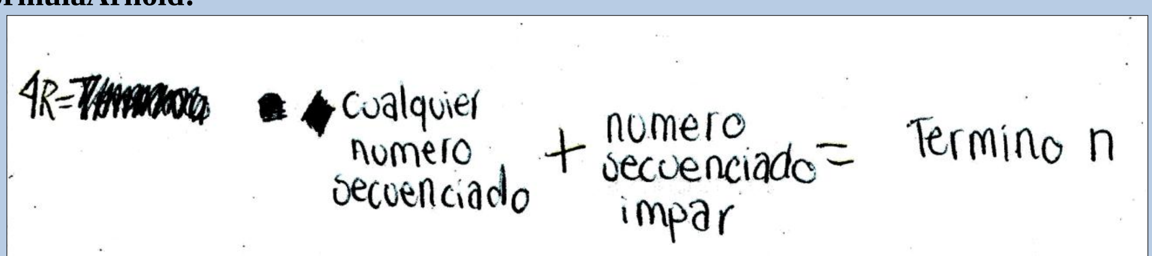


Imagen 45.

Tarea 7

Punto 1: Construya dos secuencia, una figural o geométrica y otra numérica con los 5 primeros términos

José:

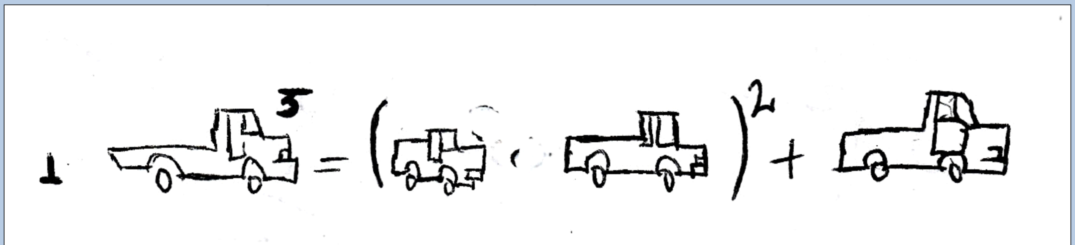


Imagen 46.

Sebastián:

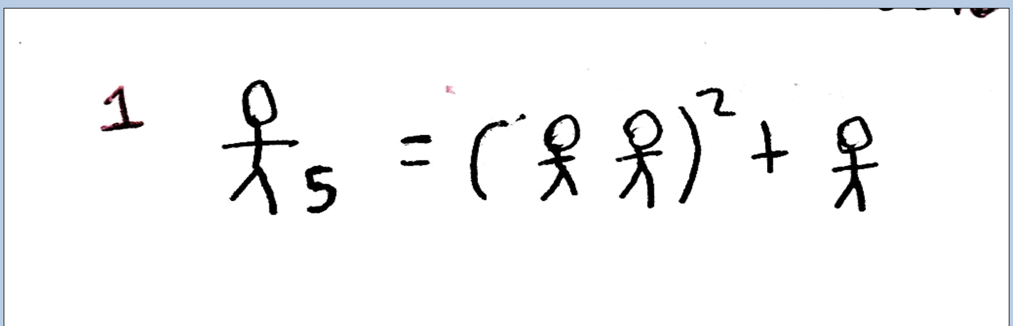


Imagen 47.

Arnold:

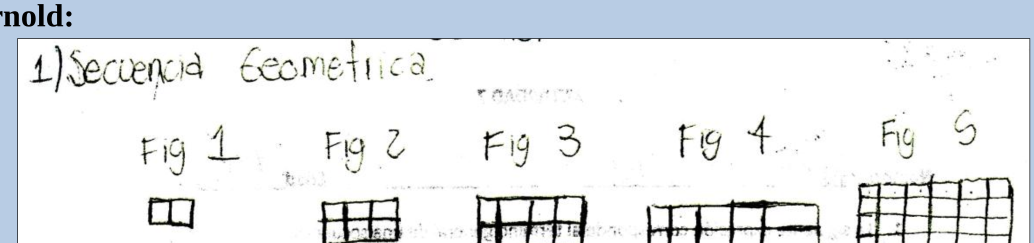


Imagen 49.