

Pensamiento Espacial y Desarrollo de Competencias Matemáticas. La Enseñanza de un Caso Particular: Los Cuadriláteros

Cesar Augusto Morales Chávez, paponex@hotmail.com
Ramón Majé Floriano, ramonmaje@yahoo.es
Universidad de la Amazonia

1. Descripción del problema

La comunidad de educadores matemáticos, desde la línea de investigación en didáctica, ha centrado su interés en la formación matemática de los estudiantes para contribuir a las metas y propósitos de la educación actual. En este sentido, el Ministerio de Educación Nacional, a partir de su propuesta de lineamientos curriculares y estándares básicos de competencias en matemáticas, pretende responder a las nuevas demandas globales y nacionales relacionadas con una educación de calidad para todos y la formación integral de personas con las competencias necesarias para desenvolverse en situaciones de la vida cotidiana. (Colombia, MEN, 1998:17; 2002:46). Este hecho se evidencia en particular, en los procesos de enseñanza y aprendizaje de la geometría euclidiana, la cual, en los últimos años ha venido recuperando importancia en las instituciones educativas, después de los inconvenientes en su concepción desde la matemática moderna en las décadas de los 60, 70 y 80 (Kline,1981:23-24); que propuso la enseñanza de las matemáticas a partir de la deducción y demostración de teoremas de la teoría de conjuntos, la lógica y las estructuras algebraicas, haciendo uso de axiomas, postulados, definiciones y otros teoremas señalados previamente.

Esta situación demostró que los conocimientos aprendidos por los estudiantes utilizando esta tendencia curricular había fracasado; al respecto Thom(1973) (citado en García, 2001:2), afirma que: "...abandonaron un campo ideal para el aprendizaje de la investigación: La geometría Euclidea, mina inagotable de ejercicios y la sustituyeron por las generalidades de los conjuntos y la lógica, materiales tan pobres, vacíos y frustrantes para la enseñanza...", de tal manera que permitió a esta ciencia retomar fuerza en la educación básica y considerar que el estudio de los sistemas geométricos, potencia el desarrollo del pensamiento espacial, que es transversal a los objetos matemáticos en por lo menos una de sus formas de representación.

Desde esta perspectiva, al interior del sistema geométrico de las matemáticas escolares para el grado séptimo de la educación básica secundaria, en el caso particular de los cuadriláteros, diversas investigaciones han centrado su interés en la identificación y análisis de las dificultades asociadas a la enseñanza y el aprendizaje de este objeto matemático.

Renzulli y Scaglia (2006) en su investigación sobre clasificación de cuadriláteros en estudiantes de EGB3 y futuros profesores de nivel inicial, han identificado fenómenos asociados en los estudiantes, como la formación de esquemas mentales (prototipos) de las figuras geométricas que están fuertemente marcados por características irrelevantes desde el punto de vista conceptual (la posición de la figura en la hoja, por ejemplo); afirman además que estos prototipos se forman, entre otras razones por el uso casi exclusivo de representaciones gráficas estereotipadas durante la enseñanza de los conceptos geométricos. Se ha comprobado que algunos estudiantes, si bien son capaces de reconocer las características definitorias de algunos conceptos geométricos sencillos como el de rombo, cuadrado y rectángulo, incluyen en sus descripciones estas características irrelevantes.

De otra parte, desde la mediación instrumental en el uso de nuevas tecnologías de la informática y la computación, Cardona (2006a; 2006b) en sus estudios sobre la construcción de cuadriláteros mediados por Cabri Geometry. Perspectivas de la intervención en el aula y el papel mediador de Cabri Geometry en la construcción de conceptos relacionados con sus cuadriláteros y sus propiedades, afirma que las principales dificultades en el aprendizaje de los cuadriláteros están relacionadas con la identificación de las diversas clases, las nociones de paralelismo y perpendicularidad, el seguimiento de instrucciones y comunicación escrita de los procedimientos de construcción empleados.

Así mismo, la experiencia profesional docente, indica que la enseñanza de la geometría en general y de los cuadriláteros en particular, habitualmente consiste en la presentación formal de su definición, una clasificación esquemática de los mismos, realizar los dibujos usando la regla o la escuadra como herramientas convencionales, verificar algunas propiedades inherentes, para finalizar con la manipulación algorítmica, mecánica o de rutinas memorizadas en la solución de ejercicios sobre perímetros y/o áreas. Este tipo de enseñanza, limita las aspiraciones de toda construcción geométrica relacionadas con: asegurar el cumplimiento de propiedades geométricas buscando superar las limitaciones de

la percepción necesariamente presentes en el dibujo y lograr una generalización, asegurando la reproductibilidad del dibujo, tomando en cuenta (únicamente) las propiedades fundamentales del mismo (MEN, 2004:17).

Al considerar los resultados de evaluación externa nacionales, en pruebas SABER e ICFES sobre el componente geométrico – métrico, el análisis del año 2009 para los grados quinto y noveno, se evidenció que en esta área el desempeño relativo de los estudiantes de ambos grados es inferior al de lenguaje y ciencias. Menos de la mitad con un 44% de los estudiantes, no alcanza los desempeños mínimos establecidos en la evaluación al momento de culminar la básica primaria, además, la comparación entre los resultados alcanzados por los estudiantes de quinto y noveno grados en matemáticas muestra una situación muy preocupante en ambos casos, pues únicamente una proporción cercana a la cuarta parte (25% y 22%, respectivamente) logra o supera los desempeños esperados⁷⁴. Si bien la naturaleza de estas pruebas no permite evaluar la totalidad de las competencias que se espera desarrollen los estudiantes en la educación básica, sus resultados son un buen indicador de su capacidad para generar aprendizajes durante toda la vida y transferirlos a distintas situaciones, dentro y fuera del contexto escolar.

En el caso particular de una situación que indaga por las competencias matemáticas en lo geométrico – métrico, cuyo objeto matemático central son los cuadriláteros, específicamente trapecios y rectángulos, planteada en los años 2005 – 2006, se presenta un embalse que tiene dos de sus caras laterales en forma de trapecios isósceles, y las otras paredes y el fondo de forma rectangular; al realizar el análisis de la misma, se encontró que tan sólo el 31% de los estudiantes seleccionó la respuesta correcta, con un 69% de error en las respuestas, lo que demuestra dificultades en la identificación de los cuadriláteros en juego, la no identificación de las características de estos polígonos, como por ejemplo la altura del trapecio y cualidades de paralelismo y perpendicularidad entre otras.

Lo descrito anteriormente, conlleva a plantear la siguiente pregunta de investigación:

¿Cómo contribuir al desarrollo del pensamiento espacial y las competencias matemáticas en estudiantes de grado 7° de la educación básica secundaria, a partir del estudio de cuadriláteros y el uso de la geometría dinámica?

⁷⁴ Ver: www.icfessaber.edu.co: (2010,13-17), recuperado el 27 de agosto de 2010.

2. Objetivo general

Contribuir al desarrollo del pensamiento espacial y las competencias matemáticas en estudiantes de grado 7° de la educación básica secundaria, a partir del estudio de cuadriláteros y el uso de la geometría dinámica.

3. Referentes teóricos

3.1 Pensamiento espacial y competencias matemáticas. Al tratar de describir el proceso de desarrollo del pensamiento matemático, es necesario considerar que éste suele interpretarse de distintas formas (Cantoral, et al 2005):

1. Una reflexión espontánea que los matemáticos realizan sobre la naturaleza de su conocimiento y sobre la naturaleza del proceso de descubrimiento e invención en matemáticas.
2. Como parte de un ambiente científico en el cual los conceptos y las técnicas matemáticas surgen y se desarrollan en la resolución de tareas.
3. Se desarrolla en todos los humanos en el enfrentamiento cotidiano a múltiples tareas.

Desde esta última perspectiva, es posible inferir que el pensamiento matemático no está enraizado específicamente sobre los fundamentos de la matemática ni en la práctica exclusiva de los matemáticos, sino que trata de todas las formas posibles de construir ideas matemáticas, incluidas aquellas que provienen de la vida cotidiana. Sin embargo, es importante reconocer que el pensamiento matemático está estructurado a partir de cinco tipos de pensamiento: el numérico, el espacial, el métrico o de medida, el aleatorio o probabilístico y el variacional.

De los pensamientos anteriormente nombrados, el que brinda un mayor soporte y pertinencia a este estudio es el pensamiento espacial. A partir de lo anterior el proyecto asume la concepción de pensamiento espacial en términos del MEN, el cual es considerado como el conjunto de los procesos cognitivos mediante los cuales se construyen y manipulan las representaciones mentales de los objetos del espacio, las relaciones entre ellos, sus transformaciones, y sus diversas traducciones a representaciones materiales;

además, este pensamiento contempla las actuaciones del sujeto en todas sus dimensiones y relaciones espaciales para interactuar de diversas maneras con los objetos situados en el espacio, desarrollar variadas representaciones y a través de la coordinación entre ellas, hacer acercamientos conceptuales que favorezcan la creación y manipulación de nuevas representaciones mentales. Esto requiere del estudio de conceptos de propiedades de los objetos en el espacio físico y de los conceptos y propiedades del espacio geométrico en relación con los movimientos del propio cuerpo y las coordinaciones entre ellos y con los distintos órganos de los sentidos.

3.2 Concepciones sobre competencia y competencias matemáticas. Al realizar un acercamiento al término competencia, el –MEN– formula a través de sus lineamientos una concepción limitada, al definirla como un “saber hacer en contexto”, razón por la cual es necesario recurrir a las reflexiones hechas por (Ghisla, 2002: 12) quien afirma que esta no puede reducirse a componentes cognitivos únicamente, sino que debe contener diversos elementos que pueden ser adscritos al saber, a las capacidades, a la actitudes.

Es por ello, que esta investigación, aunque pretende ser desarrollada en una institución educativa de carácter público, no considera del todo pertinente asumir la concepción de competencia establecida por el gobierno nacional, la cual ha de llevar la superación de la visión instrumentalista de la educación. Así la incorporación actual del concepto educativo abre una visión amplia sobre el tipo de ser humano que se desea formar. Se requiere un concepto de competencia que vaya más allá de una obsesión competitiva del mercado, y apuntar al desarrollo de conocimientos, habilidades, destreza, actitudes y aptitudes, que relacionadas entre sí le permitan al educando intervenir eficazmente en todo los ámbitos de su vida. En ese sentido, este trabajo de investigación asume la concepción de competencia propuesta por Bruno D’Amore, que la reconoce como un concepto complejo y dinámico: complejo porque se trata del conjunto de dos componentes: el exógeno que hace referencia al uso y el endógeno que se refiere al dominio, pero además, dinámico porque el uso y el dominio no son las únicas expresiones de la competencia, ya que esta engloba en sí misma no sólo los conocimientos que se requieren, sino también factores meta-cognitivos: la aceptación del estímulo para usarlos, el deseo de hacerlo, el deseo de completar los conocimientos que se revelan a la prueba de los hechos, insuficientes y por lo tanto el deseo mismo de aumentar la propia competencia (D’Amore, 2008 : 1-12).

3.3. *Cuadriláteros como objeto de enseñanza para el desarrollo del pensamiento espacial.* “El trabajo con objetos bidimensionales y tridimensionales y sus movimientos y transformaciones permite integrar nociones sobre volumen, área y perímetro, lo cual a su vez posibilita conexiones con los sistemas métricos o de medida y con las nociones de simetría, semejanza y congruencia, entre otras. Así, la geometría activa se presenta como una alternativa para refinar el pensamiento espacial, en tanto se constituye en herramienta privilegiada de exploración y de representación del espacio” (MEN, 2002:62). Por lo tanto, el proyecto asume que la enseñanza de la geometría orientada al desarrollo del pensamiento espacial en los educandos, implica tener claro cuáles son los objetos matemáticos fundamentales que una buena enseñanza debe desarrollar, partiendo de la lógica racional en la cual la geometría como ciencia hace uso de una teoría axiomática desarrollada bajo leyes rigurosas de razonamiento deductivo o la intuitiva y experimental basada en la búsqueda, descubrimiento y comprensión por parte de los alumnos que aprenden los conceptos en función de aspectos del mundo en que viven.

3.4 *Los organizadores curriculares: Fenomenología y Sistemas de representación de los cuadriláteros.* Los organizadores del currículo a partir de la teoría de Rico (1997) hacen referencia a aquellos conocimientos que se adoptan como componentes fundamentales para articular el diseño, desarrollo y evaluación de unidades didácticas. Estos, se convierten en herramientas conceptuales y metodológicas para el análisis de un tema matemático y permiten la organización de la información que surge de ese análisis para el diseño de unidades didácticas. El análisis fenomenológico y los sistemas de representación del conocimiento matemático son dos organizadores contemplados en la propuesta de Rico y utilizados en este estudio. En términos de Puig (en Rico, 1997:61), el análisis fenomenológico de un concepto o de una estructura matemática consiste en describir cuáles son los fenómenos para los que es el medio de organización y qué relación tiene el concepto o la estructura con esos fenómenos. La descripción de los fenómenos para los que es un medio de organización ha de considerar la totalidad de los fenómenos para los que actualmente es así, esto es, ha de tomar las matemáticas en su desarrollo actual y en su uso actual, pero también es conveniente que se indique cuáles son los fenómenos para cuya organización fue creado y a qué fenómenos se extendió posteriormente.

Por otro lado, Castro (en Rico, 1997: 96) asume que las representaciones son notaciones simbólicas o gráficas, específicas para cada noción, mediante las que se expresan los

conceptos y procedimientos matemáticos, así como sus características y propiedades más relevantes. Indica además que cada uno de los modos distintos de representar un mismo concepto matemático proporciona una caracterización diferente de dicho concepto; no hay un único sistema capaz de agotar en su totalidad la complejidad de relaciones que cada concepto encierra.

Para el caso de cuadriláteros, es importante considerar su multiplicidad de representaciones para ayudar al estudiante a enriquecer el mundo de sus representaciones internas, para que pueda relacionar los significados correspondientes a las concepciones que elabora y construye; además, para que organicen su información sobre el objeto matemático y pueda pensar sobre él, de manera que exprese su comprensión en situaciones y problemas prácticos o en situaciones escolares convencionales.

3.5 La geometría dinámica. Los programas de ordenador proporcionan imágenes visuales que evocan nociones matemáticas, facilitan la organización, el análisis de los datos, la graficación y el cálculo de manera eficiente y precisa. Pueden apoyar la investigación de los propios estudiantes en las distintas áreas de matemáticas: geometría, estadística, álgebra, medida y sistemas numéricos. Cuando proporcionamos herramientas tecnológicas, los estudiantes pueden centrarse en la toma de decisiones, la reflexión, el razonamiento y la resolución de problemas. Asimismo, Sordo (2005) afirma que: "...el uso de la tecnología permite al alumno dedicar un tiempo suficiente para elegir aquellos modelos matemáticos que más se adaptan a la realidad que se pretende estudiar y también permite centrar la atención en la interpretación de los resultados obtenidos. Por estos motivos, una metodología basada en la resolución de problemas, es un complemento esencial para introducir los sistemas computacionales en la enseñanza de la geometría" (Sordo, 2005: 57).

Es importante mencionar que el empleo de herramientas computacionales en la resolución de problemas no solamente puede facilitar la implementación de las estrategias, sino también potenciar o extender el repertorio de las heurísticas (Santos T. 2007; 2008). En este contexto, el uso de la tecnología influye directamente en la conceptualización y forma de interactuar con los problemas y como consecuencia incide en el desarrollo de una teoría que explique las competencias de los estudiantes. Moreno A. & Santos T. establecen que el uso de herramientas digitales ha permitido la introducción y consideración de aspectos cognitivos matemáticos nuevos en el desarrollo de las competencias de los estudiantes y,

como consecuencia, ofrecen un potencial para repensar y estructurar nuevas agendas de investigación.

3.7 Los niveles de razonamiento geométrico y su pertinencia con el proyecto de investigación. La propuesta de Van Hiele es la más apropiada y relevante para determinar el desarrollo del razonamiento geométrico de los estudiantes respecto al contenido matemático cuadriláteros. Pero además, para trabajar paso a paso y cada vez con mayor nivel de complejidad, cada una de las competencias que se ponen en juego en el estudio de las matemáticas y de hecho en cada uno de los niveles de Van Hiele, porque no se podría afirmar, que en uno u otro nivel se trabaja una u otra competencia específica, ya que en el estudio de cualquier objeto matemático es posible vincular las ocho competencias matemáticas definidas por PISA dependiendo de la estrategia metodológica y los recursos utilizados por el docente en clase; sin embargo, teniendo presente que para esta investigación se asumen tres de ellas, sin restarle importancia a las demás, aquí se pretende estudiar y promover el desarrollo en los educandos a las siguientes: plantear y resolver problemas, representar, el empleo de material y herramientas de apoyo. Inicialmente, se abordará el objeto matemático cuadriláteros como temática nueva. Aquí, El modelo de Van Hiele permite determinar el progreso de los estudiantes en sus niveles de razonamiento geométrico de acuerdo a la implementación de cada uno de los elementos que componen la propuesta didáctica; esto es, El aprendizaje Basado en Problemas, los organizadores curriculares y la mediación tecnológica.

4. Marco Metodológico

Goetz y Lecompte (1988:24) afirman que la investigación educativa tiene como finalidad prioritaria apoyar los procesos de reflexión y crítica, para tratar de mejorar la enseñanza y el aprendizaje, por ello el proyecto centra la atención en una investigación de tipo aplicada, porque su finalidad radica en realizar una intervención a un problema práctico de la educación matemática, específicamente, en el ámbito de la didáctica de la matemática, y de esta manera contribuir al mejoramiento de los procesos pedagógicos en la educación básica.

En virtud de lo anterior, y dado que el problema y objeto de estudio apuntan a analizar el desarrollo del pensamiento geométrico espacial de los estudiantes, el proyecto de investigación opta por un enfoque cualitativo, de tipo descriptivo e interpretativo. Un buen

proceso de descripción e interpretación permite la formulación e implementación de una propuesta didáctica, sin olvidar que dicha propuesta se constituye en un elemento más en un proceso de reflexión, crítica y argumentación sobre los hallazgos obtenidos durante la investigación.

En concordancia con el enfoque cualitativo, se tendrán en cuenta algunos datos cuantitativos, seleccionados bajo un criterio de prioridad y relevancia, esto implicará hacer análisis y triangulación de la información para obtener un tratamiento integral de la misma; es decir, se recurre al postulado de la complementariedad: la convergencia entre los métodos cualitativos y cuantitativos, los cuales se emplearán en el desarrollo metodológico. Durante el proceso de investigación, se trabajarán dos tipos de triangulación; esto es, la triangulación de datos y metodológica. La descripción de cada una de ellas y la forma de abordarlas, se hará dentro de la fase correspondiente, específicamente en las tareas previstas para cada una de ellas.

Bibliografía

- Cantoral, R et al., (2005). Desarrollo Del Pensamiento Matemático. Editorial Trillas. 2005. Mexico, DF.
- Cardona, M. (2006a). Construcción de cuadriláteros mediados por cabri geometry. Perspectivas de intervención en el aula. Extraído el día 15 de julio de 2010 desde www.iberocabri.org/iberocabri2008/MEMORIAS.../MarioCardona_T18.pdf
- Cardona, M. (2006b). Papel mediador de cabri geometry en la construcción de conceptos relacionados con los cuadriláteros y sus propiedades. Extraído el día 15 de julio de 2010 desde www.iberocabri.org/iberocabri2008/MEMORIAS.../MarioCardona_C17.pdf
- D'amore, B et al., (2008). Competencias y matemática. Cooperativa Editorial magisterio. Bogotá, DC.
- García, J. (2001). La didáctica de las matemáticas: una visión general, extraído el día 20 de septiembre de 2009 desde www.nti.edu.rcanaria.es/rtee/rtee.htm.
- Goetz & Lecompte (1988); en Vílchez, N. (2007). Enseñanza de la geometría con utilización de recursos multimedia. Aplicación a la primera etapa de educación básica. Tesis doctoral. Universidad pública de Tarragona. España.
- ICFES, mejor saber. (2010). Resultados nacionales, resumen ejecutivo. Saber 5° y 9° de 2009. Extraído el día 27 de agosto de 2010 desde www.icfessaber.edu.co.
- Kline, M. (1981). El fracaso de la matemática moderna ¿Porqué Juanito no sabe sumar? Siglo veintiuno editores. Madrid
- MINISTERIO DE EDUCACIÓN NACIONAL. (1998). Lineamientos Curriculares para el área de Matemáticas. Serie Lineamientos. Áreas Obligatorias y Fundamentales. Creamos Alternativas Soc Ltda.. Bogotá, D.C.
- MINISTERIO DE EDUCACIÓN NACIONAL. (2002). Estándares curriculares de matemáticas para la educación preescolar, básica y media. Bogotá D. C.
- MINISTERIO DE EDUCACIÓN NACIONAL. (2001). Memorias del Seminario Nacional de Formación de Docentes: Uso de Nuevas Tecnologías en el Aula de Matemáticas. Enlace Editores Ltda. Bogotá, DC.
- MINISTERIO DE EDUCACIÓN NACIONAL (2004). Pensamiento geométrico y tecnologías computacionales. Enlace Editores Ltda. Bogotá, DC.

Renzulli, F., Scaglia, S. (2006). Clasificación de cuadriláteros en estudiantes de egb3 y futuros profesores de nivel inicial. Extraído el día 15 de julio de 2010 desde www.famaf.unc.edu.ar/rev_edu/documents/vol_21/pro_1_clasi.pdf

Rico, L. (2005), La competencia matemática en PISA. PNA. Fundación Santillana, Madrid.

Rico, L., Lupiáñez, J. (2008), Competencia matemática desde una perspectiva curricular. Alianza Editorial, España.