UNIVERSIDAD PEDAGOGICA NACIONAL
Educadora de educadores

**FACULTAD DE CIENCIA Y TECNOLOGÍA**
**DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS**

# ACTA DE EVALUACION DE TESIS DE GRADO

Escuchada la sustentación del Trabajo de Grado titulado **"Análisis del comportamiento racional y argumental de estudiantes de grado noveno cuando trabajan en grupo dentro de un ambiente que propicia la actividad demostrativa"** presentado por las estudiantes:

***Luis Fernando Lara Quintero - 2011185045***
***Jimmy Fonseca Velásquez - 2011185002***

Como requisito parcial para optar al título de **Magíster en Docencia de la Matemática**, analizado el proceso seguido por las estudiantes en la elaboración del Trabajo y evaluada la calidad del escrito final, se le asigna la calificación de **Aprobado** con **46 puntos.**

Observaciones:

---

En constancia se firma a los 25 días del mes de febrero de 2013.

**JURADOS**

Director(a) del Trabajo: Profesor(a) Carmen Samper de Caicedo
*Carmen Samper*

Jurados:

Profesor(a) Marisol Santacruz.
*Marisol Santacruz*

Profesor (a)
*Óscar Molina*

# ANÁLISIS DEL COMPORTAMIENTO RACIONAL Y ARGUMENTAL DE ESTUDIANTES DE GRADO NOVENO CUANDO TRABAJAN EN GRUPO DENTRO DE UN AMBIENTE QUE PROPICIA LA ACTIVIDAD DEMOSTRATIVA

JIMMY FONSECA VELÁSQUEZ

2011185002

LUIS FERNANDO LARA QUINTERO

2011185045

UNIVERSIDAD PEDAGÓGICA NACIONAL

FACULTAD DE CIENCIA Y TECNOLOGÍA

DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS

MAESTRÍA EN DOCENCIA DE LA MATEMÁTICA

BOGOTÁ D.C.

2013

# ANÁLISIS DEL COMPORTAMIENTO RACIONAL Y ARGUMENTAL DE ESTUDIANTES DE GRADO NOVENO CUANDO TRABAJAN EN GRUPO DENTRO DE UN AMBIENTE QUE PROPICIA LA ACTIVIDAD DEMOSTRATIVA

JIMMY FONSECA VELÁSQUEZ

2011185002

LUIS FERNANDO LARA QUINTERO

2011185045

Trabajo de Grado presentado ante el Departamento de Matemáticas de la Universidad Pedagógica Nacional para optar al título de Magíster en Docencia de la Matemática

Asesora

CARMEN INÉS SAMPER DE CAICEDO

Profesora Departamento de Matemáticas

UNIVERSIDAD PEDAGÓGICA NACIONAL

FACULTAD DE CIENCIA Y TECNOLOGÍA

DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS

MAESTRÍA EN DOCENCIA DE LA MATEMÁTICA

BOGOTÁ D.C.

2013

*Para todos los efectos, declaramos que el presente trabajo es original y de nuestra total autoría; en aquellos casos en los cuales hemos requerido del trabajo de otros autores o investigadores, hemos dados los respectivos créditos.*

# RESUMEN ANALÍTICO EN EDUCACIÓN (RAE)

| 1. Información General | |
|---|---|
| **Tipo de documento** | Trabajo de grado en maestría de profundización |
| **Acceso al documento** | Universidad Pedagógica Nacional. Biblioteca Central |
| **Título del documento** | Análisis del comportamiento racional y argumental de estudiantes de grado noveno cuando trabajan en grupo dentro de un ambiente que propicia la actividad demostrativa |
| **Autor(es)** | Fonseca Velásquez, Jimmy; Lara Quintero, Luis Fernando |
| **Director** | Samper de Caicedo, Carmen Inés |
| **Publicación** | Bogotá, D.C., Universidad Pedagógica Nacional, 2013, 118p. |
| **Unidad Patrocinante** | Universidad Pedagógica Nacional, Facultad de Ciencia y Tecnología, Departamento de Matemáticas |
| **Palabras Claves** | Actividad demostrativa, Tipo de argumento, Comportamiento racional |

| 2. Descripción |
|---|
| El presente estudio, realizado en el 2012, a un grupo de tres estudiantes de grado noveno de un colegio público ubicado en Bogotá, pretende reconocer, analizando la participación de cada uno de ellos, el comportamiento racional y argumental durante el desarrollo de una tarea intencionalmente diseñada para favorecer actividad demostrativa. Para dicho estudio se considera adecuado tomar como referencia para el diseño de las tareas el constructo *actividad demostrativa*, que ha desarrollado el grupo de investigación Aprendizaje y Enseñanza de la Geometría ($\mathcal{Æ}\cdot\mathcal{G}$) de la Universidad Pedagógica Nacional. Para analizar el comportamiento de los estudiantes, utilizamos los modelos de Habermas (comportamiento racional) y de Toulmin (tipos de argumento). |

| **3. Fuentes** |
|---|
| Se citan 27 fuentes bibliográficas, de las cuales 15 versan sobre los tres aspectos centrales de este estudio (actividad demostrativa, modelo de Habermas para el comportamiento racional, modelo de Toulmin para la argumentación) y una sobre la interacción entre estudiantes. Algunas de éstas son: |
| Boero, P., Douek, N., Morselli, F. y Pedemonte, B. (2010) Argumentation and proof: a contribution to theoretical perspectives and their classroom implementation. En Pinto, M. M. F. y Kawasaki, T. F. (Eds.). *Procedings of the 34th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 1, pp. 179-209). Belo Horizonte, Brazil: PME. |
| Camargo, L., Perry, P. y Samper C. (2005). La demostración en clase de geometría: ¿puede tener un papel protagónico? *Educación Matemática*, 17 (3), 53-76. |
| Camargo, L., Samper, C., y Perry, P. (2006). Una visión de la actividad demostrativa en geometría plana para la educación matemática con el uso de programas de geometría dinámica. *Sociedad Colombiana de Matemáticas XV Congreso Nacional de Matemáticas* (Volumen especial), 371-383. |
| Harada, O. (2009). Algunas aclaraciones sobre el “modelo” argumentativo de Toulmin ContactoS 73, 45–56. Extraído el 10 de diciembre de 2012 desde http://www.izt.uam.mx/newpage/contactos/anterior/n73ne/toulmin.pdf |
| Morselli, F., y Boero, P. (2009). Proving as a rational behavior: Habermas’ construct of rationality as a comprehensive frame for research on the teaching and learning of proof. En V. Durand-Guerrier, S. Soury-Lavergne y F. Arzarello (Eds.). *Proceedings of CERME 6* (Vol. 2, pp. 211-220). Lyon, France. |
| Pedemonte, B. (2005). Herramientas para el análisis cognitivo de la relación entre argumentación y demostración. *Recherches en Didactique de Matematiques, RDM* , 25(3) 313 – 348. Traducción no oficial realizada por Martín Acosta. |
| Perry, P., Camargo, L., Samper, C., y Rojas, C. (2006). *Actividad demostrativa en la formación inicial del profesor de matemáticas.* Bogotá: Fondo editorial de la Universidad Pedagógica |

Nacional.

Perry, P., Samper, C., Camargo, L., Echeverry, A. y Molina, Ó. (2007). *Innovación en la enseñanza de la demostración en un curso de geometría para formación inicial de profesores*. Ponencia presentada en SIEM XVII, 17 a 21 de noviembre de 2007 Universidad Autónoma del Estado de México, Toluca, Estado de México.

Samper, C., Perry, P., Camargo, L. y Molina, Ó. (2012). Capítulo 1: Innovación en un aula de geometría de nivel universitario. En Samper, C. y Molina, Ó. *Geometría Plana: Un espacio de aprendizaje* (pp. 1 – 16). Universidad Pedagógica Nacional, Bogotá. Libro en evaluación.

Webb, N. (1984). Interacción entre estudiantes y aprendizaje en grupos pequeños. *Infancia y Aprendizaje, 29/28*, 159-183. Universidad de California. Traducción realizada por Laura Pla.

**4. Contenidos**

El presente trabajo se ha organizado en seis capítulos de la siguiente manera. En el Capítulo 1 describimos el planteamiento del problema que guió nuestro estudio y que está conformado por los antecedentes, la justificación y delimitación del problema, y los objetivos. En el Capítulo 2 damos a conocer el marco teórico que sustenta este estudio de acuerdo con tres constructos teóricos: la actividad demostrativa del grupo $\mathcal{Æ} \cdot \mathcal{G}$, el modelo Habermas para el comportamiento racional y el modelo de Toulmin para la argumentación. En el Capítulo 3 presentamos el proceso que permitió el desarrollo del estudio. En particular describimos el tipo de investigación, el contexto donde se llevó a cabo y las fases del estudio. Para el último aspecto, detallamos las fases de: búsqueda del marco teórico, diseño e implementación de una secuencia didáctica, y recolección de información y análisis de datos. En el Capítulo 4 mostramos el análisis del comportamiento racional y argumental de tres estudiantes de grado noveno cuando trabajaron en grupo para resolver las dos últimas tareas de la secuencia didáctica, mencionamos las categorías de análisis que empleamos basados en el marco teórico expuesto en el Capítulo 2, y presentamos el análisis de los episodios extraídos de las transcripciones que hicimos del proceso que los estudiantes realizaron de conjeturación y justificación. En el Capítulo 5 damos cuenta de las conclusiones obtenidas en nuestro estudio. Al final de este documento se encuentran los anexos que incluyen: la secuencia didáctica, el sistema teórico local desarrollado, la solución que los tres estudiantes dieron a las dos últimas tareas, y las transcripciones de los procesos de conjeturación y justificación.

## 5. Metodología

Dados los intereses de nuestro estudio, adoptamos una metodología cualitativa centrada en la corriente descriptiva – interpretativa que corresponde a un estudio de caso. Esto porque intentamos describir e interpretar detalladamente el comportamiento de los estudiantes cuando trabajan en grupo dentro de un ambiente que propicia la actividad demostrativa. Este estudio lo llevamos a cabo en el Colegio Ciudadela Educativa de Bosa I.E.D. con estudiantes de grado noveno de educación básica secundaria (14 – 16 años), en la jornada mañana, durante el segundo semestre de 2011 e inicios del primer semestre de 2012. Las fases que conformaron nuestro estudio fueron tres. En primer lugar, hicimos una revisión bibliográfica relacionada con el constructo de *actividad demostrativa* propuesto por el grupo $\mathcal{Æ} \cdot \mathcal{G}$ porque nos permitió diseñar y aplicar una secuencia didáctica para que los estudiantes pudieran hacer actividad demostrativa. En segundo lugar, diseñamos una secuencia didáctica que consta de un conjunto de tareas para que, en un momento determinado, los estudiantes realizaran actividad demostrativa. Y en tercer lugar, analizamos las transcripciones correspondientes a los procesos de conjeturación y justificación cuando los estudiantes desarrollaron las dos últimas tareas de la secuencia didáctica. Además fue necesario considerar los modelos de Toulmin para la argumentación y de Habermas para el comportamiento racional para analizar el comportamiento de los estudiantes.

| 6. Conclusiones |
|---|
| Las conclusiones del estudio las organizamos en relación a ocho aspectos: la actividad demostrativa desarrollada por los estudiantes; los argumentos que logramos identificar y clasificar, y los aspectos del comportamiento racional que caracterizamos de acuerdo con la solución que ellos dieron a las dos últimas tareas de la secuencia didáctica; el conflicto epistémico de Cristian en relación con la unidad cognitiva; el dilema que evidenciamos durante el proceso de conjeturación y otro conflicto epistémico que identificamos al final del proceso de justificación; la comprensión de los estudiantes sobre lo que es una demostración; el aspecto social que analizamos de forma empírica y que intentamos relacionar con algunos elementos teóricos descritos en el último apartado del marco teórico; y los alcances de nuestro estudio, algunas preguntas pendientes para futuros estudios y una reflexión de los autores. |

| | |
|---|---|
| **Elaborado por:** | Fonseca Velásquez, Jimmy; Lara Quintero, Luis Fernando |
| **Revisado por:** | Samper de Caicedo, Carmen Inés |

| | | | |
|---|---|---|---|
| **Fecha de elaboración del Resumen:** | 25 | 02 | 2013 |

# TABLA DE CONTENIDO

**Pág.**

# LISTA DE TABLAS

**Pág.**

# LISTA DE FIGURAS

# LISTA DE ANEXOS

# INTRODUCCIÓN

El presente trabajo de grado está en sintonía con los intereses actuales del grupo de investigación Aprendizaje y Enseñanza de la Geometría ($\mathcal{Æ} \cdot \mathcal{G}$) de la Universidad Pedagógica Nacional (UPN) y con el cual buscamos enriquecer su constructo teórico denominado *actividad demostrativa*. Para tal fin nos interesa analizar las acciones de estudiantes de básica secundaria durante el proceso de actividad demostrativa al saber que ésta se puede asegurar si tenemos en cuenta los elementos que el grupo $\mathcal{Æ} \cdot \mathcal{G}$ plantea como su aproximación metodológica y, que al ser usados en un contexto escolar, la propician.

De manera particular nos parece apropiado analizar el comportamiento racional y argumental de estudiantes de grado noveno cuando trabajan de forma grupal en un ambiente diseñado para propiciar actividad demostrativa. Para hacer dicho análisis, nos fijaremos en el comportamiento racional según el modelo de Habermas y en el tipo de argumentos de acuerdo con el modelo de Toulmin. Nuestro estudio se ha dividido en cinco capítulos que mencionamos a continuación.

En el Capítulo 1 describimos el planteamiento del problema que guío nuestro estudio y que está conformado por los antecedentes, la justificación y delimitación del problema, y los objetivos.

En el Capítulo 2 damos a conocer el marco teórico que sustenta este estudio de acuerdo con tres constructos teóricos: la actividad demostrativa del grupo $\mathcal{Æ} \cdot \mathcal{G}$, el modelo Habermas para el comportamiento racional y el modelo de Toulmin para la argumentación.

En el Capítulo 3 presentamos el proceso que permitió el desarrollo del estudio. En particular describimos el tipo de investigación, el contexto donde se llevó a cabo y las fases del estudio. Para el último aspecto, detallamos las fases de: búsqueda del marco teórico, diseño e implementación de una secuencia didáctica, y recolección de información y análisis de datos.

En el Capítulo 4 mostramos el análisis del comportamiento racional y argumental de tres estudiantes de grado noveno cuando trabajaron para resolver las dos últimas tareas de la secuencia didáctica. Para realizar este análisis, mencionamos las categorías de análisis que empleamos, basados en el marco teórico expuesto en el Capítulo 2, y los análisis de los episodios extraídos de las transcripciones que hicimos del proceso de conjeturación y justificación.

El Capítulo 5 contiene las conclusiones obtenidas en nuestro estudio. Estas conclusiones las organizamos en relación con ocho aspectos: la actividad demostrativa desarrollada por los estudiantes; los argumentos que logramos identificar y clasificar, y los aspectos del comportamiento racional que caracterizamos de acuerdo con la solución que ellos dieron a las dos últimas tareas de la secuencia didáctica; el conflicto epistémico de Cristian en relación con la unidad cognitiva; el dilema que evidenciamos durante el proceso de conjeturación y otro conflicto epistémico que identificamos al final del proceso de justificación; la comprensión de los estudiantes sobre lo que es una demostración; el aspecto social que analizamos de forma empírica y que intentamos relacionar con algunos elementos teóricos descritos en el último apartado del marco teórico; y los alcances de nuestro estudio, algunas preguntas pendientes para futuros estudios y una reflexión de los autores.

Al final de este documento se encuentran los anexos que incluyen: la secuencia didáctica, el sistema teórico local desarrollado, la solución que los tres estudiantes dieron a las dos últimas tareas, y las transcripciones de los procesos de conjeturación y justificación.

# CAPÍTULO 1. PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA

En este capítulo se expone el problema que guió nuestro estudio, y está conformado por los antecedentes, la justificación, delimitación del problema, y los objetivos general y específicos.

## 1.1. ANTECEDENTES

Para establecer los antecedentes de nuestro estudio, hemos hecho una revisión bibliográfica en torno a dos aspectos: primero, algunas investigaciones que el grupo de investigación Aprendizaje y Enseñanza de la Geometría ($\mathcal{Æ} \cdot \mathcal{G}$) de la Universidad Pedagógica Nacional (UPN) ha desarrollado desde comienzos de 2004 relacionado con el constructo teórico que denominan *actividad demostrativa*; segundo, los intereses y resultados que han reportado algunas investigaciones de estudiantes de la Maestría en Docencia de las Matemáticas de esta misma universidad adscritas al grupo $\mathcal{Æ} \cdot \mathcal{G}$.

### 1.1.1. Investigaciones desarrolladas por el grupo $\mathcal{Æ} \cdot \mathcal{G}$

En los primeros cursos de la Licenciatura en Matemáticas de la UPN, específicamente en el área de geometría, predominaba un énfasis tradicional donde, con base en un texto, el profesor presentaba un sistema axiomático que los estudiantes debían aprender individualmente y hacía demostraciones que eran imitadas por ellos (Camargo, Perry, Samper, Molina y Echeverry, 2008). El grupo $\mathcal{Æ} \cdot \mathcal{G}$ reconoció que esta forma de trabajo no promueve competencia demostrativa en los estudiantes ni permite ampliar su concepción sobre la demostración, importantes para contribuir a su formación como futuros profesores de matemáticas en secundaria (Camargo, Perry y Samper, 2005).

De acuerdo con el contexto anterior, se llevó a cabo el proyecto de investigación *Geometría dinámica en la formación del profesor de matemáticas* durante los años 2003 y 2004, en el marco de una innovación curricular, para aportar en la construcción de un ambiente que favoreciera en los estudiantes el aprendizaje de la demostración donde la geometría dinámica tuviera un papel importante, y ampliara la visión de la demostración como una actividad básica en el quehacer matemático (Perry, Camargo, Samper y Rojas, 2006; Perry, Samper, Camargo, Echeverry y Molina, 2007). Para el desarrollo de este proyecto fue necesario establecer los primeros planteamientos en relación a las funciones y propósitos de la demostración con base en autores como de Villiers, Bell, Hanna y Jahnke. Además de estos autores, se consideraron otros elementos teóricos (enfoque sociocultural, argumento, comunidad de práctica, entre otros) para enriquecer y establecer el constructo teórico conocido como *actividad demostrativa*. En la Tabla 1 mencionamos de manera cronológica algunas investigaciones para mostrar los intereses y resultados del grupo $\mathcal{Æ} \cdot \mathcal{G}$ desde sus inicios a la actualidad.

**Tabla 1.** Intereses y resultados de algunas investigaciones del grupo $\mathcal{Æ} \cdot \mathcal{G}$

| Año | Título | Intereses y resultados en relación a… |
|---|---|---|
| 2005 | La demostración en clase de geometría: ¿puede tener un papel protagónico? | Analizar cómo el enunciado de un problema permite el planteamiento de diferentes tareas que afectan la actividad demostrativa de los estudiantes. |
| 2006 | ¿Apoya Cabri la práctica de la demostración? | Presentar evidencias del apoyo de la geometría dinámica en la tarea de producir una justificación y hacer algunas consideraciones con respecto a la pertinencia de su uso en la enseñanza. |
| 2006 | Dos episodios que plasman rasgos de una comunidad de práctica en la que juega un papel clave | Ilustrar el papel determinante de Cabri que, como instrumento de mediación y comunicación, posibilita la conformación de una comunidad de práctica matemática. |
| 2006 | Una visión de la actividad demostrativa en geometría plana para la educación matemática con el uso de programas de geometría | Presentar un panorama amplio de la actividad demostrativa.<br>Reconocer a Cabri como una herramienta que posibilita la práctica de la justificación, la construcción de un sistema teórico y la conformación de una comunidad de práctica, siempre y cuando el diseño de las situaciones apunte a esta misma dirección. |
| 2007 | Innovación en la enseñanza de la demostración en un curso de geometría para formación inicial de profesores | Involucrar a los estudiantes por medio de tareas específicas para que realicen actividad demostrativa en la que es esencial el uso de geometría dinámica y la interacción social en el aula, es gestionada por la profesora. |

**Tabla 1.** (Continuación) Descripción de algunas investigaciones del grupo Æ·G

| Año | Título | Intereses y resultados en relación a… |
|---|---|---|
| 2008 | Cabri: Si… entonces… | Reportar las dificultades de los estudiantes con respecto al uso y comprensión de la condicional cuando trabajan con Cabri.<br>Proponer tareas que apoyan el proceso de comprender la condicional como una relación de dependencia y su uso en procesos deductivos. |
| 2008 | Geometría y lineamientos curriculares: una experiencia en la formación inicial de profesores | Mostrar cómo la actividad demostrativa posibilita que las ideas propuestas en los lineamientos curriculares colombianos del MEN de 1998 sean una realidad. |
| 2009 | Use of *dragging* as organizer for conjecture validation | Evidenciar el uso de la función *arrastre* como herramienta que favorece, además de la exploración y la conjeturación, la generación de ideas que ayuden en la construcción de la demostración. |
| 2010 | Geometría dinámica: Su contribución a la comprensión de condiciones de la forma si-entonces | Plantear tareas de aprendizaje que, diseñadas en un entorno de geometría dinámica, ayuden a la comprensión y uso de proposiciones condicionales durante los procesos de la actividad demostrativa. |
| 2011 | Actividad demostrativa: participar en la producción de un teorema | Identificar los tres aspectos del comportamiento racional de Habermas (epistémico, teleológico y comunicativo) en las acciones de los estudiantes con la intención de caracterizar la participación de los estudiantes. |

### 1.1.2. Intereses y resultados de algunos trabajos de grado de la maestría

En este apartado presentamos de forma cronológica algunos trabajos de grado de la Maestría en Docencia de la Matemática que han sido dirigidos por algún miembro del grupo de investigación Æ·G que amplían o estudian aspectos relacionados con la actividad demostrativa (ver Tabla 2).

**Tabla 2.** Intereses y resultados de algunos trabajos de la Maestría en Docencia de la Matemática

| Autor (es) – Año – Título | Intereses y resultados en relación a… |
|---|---|
| Oicatá, L. (2007). Formas argumentativas de niños de grado quinto en torno al concepto de semejanza | Estudiar las *formas argumentativas* que los niños de grado quinto utilizan en relación al concepto de semejanza.<br>Mostrar los variados *niveles de validación* que los estudiantes elaboraron respecto a la semejanza. |

**Tabla 2.** (Continuación) Intereses y resultados de algunos trabajos de la Maestría en Docencia de la Matemática

| Autor (es) – Año – Título | Intereses y resultados en relación a… |
|---|---|
| Cortez, D. y Gutiérrez D. (2007). Caracterización del ambiente didáctico en las clases relacionadas con el estudio de los cuadriláteros en un curso de Geometría Euclídea | Caracterizar el entorno vivido durante el estudio del tema de cuadriláteros, a través del análisis de las acciones del profesor y de los estudiantes, identificando de éstas, cuáles potencian una *comunidad de práctica de indagación*.<br>Determinar si se manifestó o no la actividad demostrativa bajo las condiciones dadas. |
| Villalba, M. (2008). El razonamiento visual y conjetural de estudiantes de 9°, a partir del proceso de conceptualización de triángulo isósceles | Estudiar el desarrollo del *razonamiento visual y conjetural* en estudiantes de grado noveno, los *tipos de razonamientos* manifestados frente a los tipos de tareas propuestos, y las *estrategias* que ellos usaron para convencer de la *validez de la conjetura*. |
| Morales, S. (2008). Dificultades de los estudiantes en la construcción de la demostración deductiva formal en Geometría Euclídea: Un estudio en la formación inicial de profesores de Matemática | Plantear recomendaciones para los profesores acerca de las *dificultades* de los estudiantes en relación con el aprendizaje de la *demostración deductiva formal*, y el manejo de la *sintaxis y/o lenguaje icónico* propio de la geometría. |
| Acevedo, J. (2010). Modificabilidad Estructural Cognitiva Vs. Visualización: Un ejercicio de análisis del uso del Tetris en tareas de rotación y traslación | Relacionar la *Modificabilidad Estructural Cognitiva* (MEC) con los procesos y *habilidades de visualización*.<br>Introducir nociones de rotación y traslación mediante *tareas* que favorecen la visualización con el uso del *Tetris*. |
| Angulo, H y Sánchez, J. (2010). Caracterización de usos dados a un artefacto en el desarrollo de actividad demostrativa | Caracterizar los usos dados a los *diagramas de inferencia* (definición, condicional y prueba) diseñados por el grupo de investigación $\mathcal{Æ} \cdot \mathcal{G}$ con el ánimo de apoyar el aprendizaje de la *justificación.*<br>Articular los procesos de *instrumentalización* e *instrumentación* (génesis instrumental). |
| Cubillos, M. y Sánchez, S. (2010). Análisis de una práctica docente. Interacciones que se gestan en la actividad demostrativa | Caracterizar los patrones de *interacción* entre profesora y estudiantes cuando se favorece la *actividad demostrativa.*<br>Establecer *entornos favorables* para la reflexión y análisis de la práctica de enseñar matemáticas a partir de los resultados. |
| Fontalvo, F. (2010). Un estudio de la visión que presentan los docentes acerca de los diferentes tipos de razonamiento que se propician en el proceso de conceptualización de Rectángulo | Analizar el tipo de razonamiento que propician las tareas propuestas por docentes.<br>Reflexionar acerca del proceso de conceptualizar y las diferentes clases de razonamiento que están enlazadas en la formación de un concepto. |

**Tabla 2.** (Continuación) Intereses y resultados de algunos trabajos de la Maestría en Docencia de la Matemática

| Autor (es) – Año – Título | Intereses y resultados en relación a… |
|---|---|
| Bolívar, C. y Martín, M. (2010). Caracterización de la actividad demostrativa. Una experiencia en secundaria | Caracterizar la actividad demostrativa en relación a la solución de un problema geométrico abierto, utilizando geometría dinámica.<br>Plantear un ambiente que favorezca la participación activa de los estudiantes en la construcción social del conocimiento, en el cual el uso de la geometría dinámica como medio para potenciar la visualización, lo que posibilitaría plantear o completar la conjetura. |
| Franco, B. y Moreno, G. (2011). La argumentación como núcleo de la actividad demostrativa | Diseñar y aplicar situaciones problema para favorecer procesos de argumentación en estudiantes de grado octavo en el marco de la actividad demostrativa.<br>Analizar los argumentos que emplean los estudiantes para justificar sus afirmaciones, construcciones o estrategias de solución. |
| Luque, C. y Robayo, L. (2011). Emergencia de procesos de la actividad demostrativa en una clase con estudiantes en edad extraescolar | Identificar las acciones de estudiantes de edad extraescolar en clase de geometría que evidencian los procesos de la actividad demostrativa.<br>Reconocer la necesidad de extender el constructo de la actividad demostrativa al contexto escolar, específicamente en ampliar las acciones de verificar y explorar.<br>Relacionar los elementos que conforman la definición de teorema según Mariotti y los elementos de la actividad demostrativa. |
| Ospina, Y. y Plazas, T. (2011). Acciones del profesor que promueven actividad demostrativa con estudiantes de sexto grado | Establecer la posibilidad de que estudiantes de grado sexto puedan realizar actividad demostrativa.<br>Modificar, según el constructo de la actividad demostrativa, la manera como el grupo de estudiantes realizan justificaciones debido a que no estaban acostumbradas a esto ni contaban con un sistema teórico para hacerlas.<br>Diseñar y aplicar tareas que propicie actividad demostrativa, junto con la gestión que el profesor debe hacer. |
| Pinzón, I. y Rodríguez, J. (2011). Acciones del profesor que favorecen el desarrollo de la actividad demostrativa en grado noveno | Describir y analizar las acciones llevadas a cabo por un profesor de grado noveno para desarrollar actividad demostrativa.<br>Identificar acciones de la actividad demostrativa y establecer indicadores para ellas en el trabajo de los estudiantes.<br>Diseñar tareas para propiciar actividad demostrativa en los estudiantes. |

## 1.2. JUSTIFICACIÓN DEL PROBLEMA

En primera instancia, reconocemos que la demostración es un tema importante para la investigación en educación matemática y su interés ha aumentado debido a la problemática que existe en la enseñanza y el aprendizaje (Pedemonte, 2005; Godino y Recio, 2001). Por ejemplo, Hanna (1996, citada en Arzarello, Olivero, Paola, Robutti, 2007) señala que la demostración, a pesar de ser un aspecto central en matemáticas, no forma parte de todo el currículo en la escuela pues se restringe de forma exclusiva al estudio de la geometría y cuando se enseña prevalece el aprendizaje memorístico lo cual carece de valor educativo. Balacheff (2000) afirma que el método más común de enseñanza de los profesores consiste en hacer demostraciones delante de los estudiantes. Esto conlleva a que ellos tengan un bajo nivel en la compresión y la elaboración de demostraciones, según Godino y Recio (2001). Otra investigadora como Jones (2000) menciona, por un lado, que los estudiantes no ven la necesidad de hacer una demostración deductiva; y por otro, que no se pueden distinguir diferentes formas de razonamiento matemático en la clase porque se privilegia la verificación y se deja de lado la exploración y la explicación.

Para enfrentar esta realidad, el grupo $\mathcal{Æ} \cdot \mathcal{G}$ ha adelantado y motivado estudios, como los mencionados en los antecedentes, para ampliar la concepción que se debe tener sobre la demostración y establecer estrategias metodológicas que permitan favorecer la actividad demostrativa tanto en el contexto universitario como en el escolar. De acuerdo a lo anterior y en sintonía con los intereses actuales del grupo $\mathcal{Æ} \cdot \mathcal{G}$, que busca enriquecer su constructo desde una perspectiva sociocultural, nos interesa analizar las acciones de estudiantes de básica secundaria durante el proceso de actividad demostrativa. Sabemos que ésta se puede asegurar si tenemos en cuenta los elementos que Samper, Perry, Camargo y Molina (2012) plantean en su aproximación metodológica y, que al ser usados en un contexto escolar, la propician.

## 1.3. DELIMITACIÓN DEL PROBLEMA

A partir de los anteriores apartados, nos parece apropiado analizar el comportamiento de estudiantes de grado noveno cuando trabajan de forma grupal en un ambiente diseñado para propiciar actividad demostrativa. Para hacer dicho análisis, nos fijamos en el comportamiento racional según el modelo de Habermas y en el tipo de argumentos de acuerdo con el modelo de Toulmin, y nos hacemos estos cuestionamientos: ¿será muy diferente el comportamiento racional y argumental de cada uno de ellos durante el proceso de conjeturación en contraste con el proceso de demostración?, ¿producen argumentos en ambos procesos?, ¿qué tipo de argumento establecen?, ¿proponen planes que los lleven a construir una conjetura y logren demostrarla?, ¿se preocupan por validar sus ideas?, ¿expresan sus ideas de forma clara y concisa? Estos cuestionamientos nos llevaron a formular la siguiente pregunta para nuestro estudio:

*¿Cómo es el comportamiento racional y argumental de estudiantes de grado noveno cuando trabajan en grupo dentro de un ambiente que propicia la actividad demostrativa?*

## 1.4. OBJETIVOS

### 1.4.1. Objetivo General

Analizar el comportamiento racional y argumental de estudiantes de grado noveno cuando trabajan en grupo dentro de un ambiente que propicia la actividad demostrativa.

### 1.4.2. Objetivos Específicos

- Diseñar e implementar una secuencia de tareas que permita a los estudiantes de grado noveno hacer actividad demostrativa.
- Identificar y clasificar los argumentos que formulan los estudiantes en cada uno de los procesos de la actividad demostrativa.
- Caracterizar el comportamiento racional de los estudiantes en cada uno de los procesos de la actividad demostrativa.
- Comparar los argumentos de cada estudiante en los dos procesos de la actividad demostrativa, así como su comportamiento racional.

# CAPÍTULO 2. MARCO TEÓRICO

La intencionalidad de esta investigación se relaciona con el análisis del *comportamiento racional* de los estudiantes a partir de la perspectiva de Habermas adaptada por Morselli y Boero (2009) como marco para el estudio de asuntos académicos, específicamente en relación a la enseñanza y aprendizaje de la demostración. Este marco tiene en cuenta tanto aspectos cognitivos como culturales. En relación a dicho comportamiento racional, nos preocupa también identificar y caracterizar, a partir del *modelo de Toulmin*, los argumentos que se evidencian cuando los estudiantes realizan una tarea intencionalmente planeada para favorecer *actividad demostrativa*.

De acuerdo con lo anterior, son tres los constructos teóricos que sustentan nuestro trabajo: actividad demostrativa, modelo de Habermas para el comportamiento racional y modelo de Toulmin para la argumentación. A continuación exponemos los aspectos más importantes de cada uno de estos constructos, intentando definir elementos que apoyan de alguna manera el desarrollo, análisis y conclusión de este estudio. Además, exponemos al final de este capítulo dos asuntos que nos preocuparon durante el desarrollo del estudio, pero que no fueron centrales en éste: la *unidad cognitiva* y el *aspecto social*.

## 2.1. ACTIVIDAD DEMOSTRATIVA

Para entender qué es actividad demostrativa, se debe aceptar que la *demostración* es más que la validación de enunciados matemáticos, como suele pensarse en un marco restringido, y lo expresa de Villiers (1993):

> La común idea formalística de muchos profesores de matemáticas de que la convicción es una cartografía monocromática de la demostración deductiva debe ser, por tanto, completamente abandonada; la convicción no se consigue exclusivamente con la demostración ni la única función de la demostración es la de verificación/convicción. (p. 27)

El grupo de investigación $\mathcal{Æ} \cdot \mathcal{G}$ de la UPN de Bogotá asume, en correspondencia con de Villiers (1993), que la demostración, además de la validación, cumple otras funciones tales como ser medio de comunicación, de explicación, de sistematización y finalmente medio de descubrimiento. Como lo señalan Samper, Camargo y Perry (2006), diferentes investigaciones ilustran otras funciones que la demostración ha cumplido a lo largo del desarrollo histórico de la matemática, siendo una de ellas ser herramienta para la comprensión. De esta manera se destaca el potencial didáctico de la actividad demostrativa en contextos escolares.

El reconocimiento y aceptación de las diferentes funciones de la demostración tanto en el ámbito matemático como en el escolar, permiten ampliar la concepción de demostración. Por lo anterior y al admitir la necesidad de acercar a los estudiantes a realizar acciones particulares de la comunidad matemática, el grupo $\mathcal{Æ} \cdot \mathcal{G}$, en la búsqueda de alternativas para que la demostración (en geometría) juegue un papel importante y significativo en la enseñanza (Camargo, Samper y Perry, 2006), propone y viene desarrollando desde el año 2003, un constructo nuevo llamado *actividad demostrativa.* Un principio base, respecto a la función de la demostración en geometría, desde el constructo de la actividad demostrativa, es que la demostración en matemáticas tiene el propósito de proporcionar comprensión y conocimiento, así como ser un recurso para la validación.

Teniendo en cuenta esta doble función de la demostración, el grupo $\mathcal{Æ} \cdot \mathcal{G}$ plantea que la actividad demostrativa involucra dos procesos, no necesariamente independientes (Molina, Samper, Perry y Camargo, 2011). Uno de estos procesos consta de las acciones concernientes a la producción de una *conjetura*, entendida como un enunciado de carácter general que se basa en la observación o el análisis de situaciones (entendidas como sospechas que pueden llegar a ser conjeturas). Aunque se tiene un alto grado de certeza sobre su veracidad, el valor de verdad aún no está definido, lo cual motiva un proceso de justificación para ser validada en el marco de un sistema teórico. Tales acciones son de naturaleza heurística. Entre estas acciones están: la *visualización* y la *exploración* de una situación geométrica, *buscar regularidades* propiedades o invariantes que serán *verificadas*, si es que existe incertidumbre de su generalidad (la geometría dinámica es una herramienta poderosa en este propósito). Luego se realizará la *formulación de conjeturas* y su respectiva *verificación* de manera empírica. Para la formulación de la conjetura es necesario usar adecuadamente el lenguaje y notación geométrica. Además debe tener la estructura de una proposición condicional (si – entonces). La verificación de la conjetura consiste en corroborar si lo que se declara en el antecedente es suficiente para lograr como consecuencia las propiedades que se mencionan en el consecuente de la conjetura.

Las acciones que componen el segundo proceso se centran en la búsqueda y organización de las ideas que estructurarán algún tipo de *justificación*. La meta de este proceso es la construcción de una argumentación deductiva que valide la conjetura, es decir, que establezca su veracidad dentro de un sistema teórico. Las acciones que conforman este proceso, apoyadas en la *visualización* y la *exploración* que son de naturaleza heurística y que permean los dos procesos de la actividad demostrativa, son: *seleccionar entre elementos identificados, teóricos o empíricos,* aquellos que podrían sustentar la afirmación; *organizar esos elementos de manera deductiva (construir argumentos)* y *formular la justificación*. (Samper, Perry, Camargo y Molina, 2012). La demostración, vista como una de las formas en que se puede presentar la justificación, se concibe como un argumento de naturaleza deductiva basado en un *sistema teórico de referencia,* en el cual la conjetura puede llegar a considerarse un teorema (Samper et al., 2012). Una condición base para la realización de la actividad demostrativa, es el hecho de que se justifica lo que se conjetura (Samper et al., 2012).

En Samper et al. (2012) se hace una caracterización más detallada de las acciones de visualización y exploración. En la Tablas 3 y 4 presentamos las características de los procesos heurísticos de visualización y exploración, respectivamente, y que tienen pertinencia para nuestro estudio.

**Tabla 3.** Caracterización del proceso heurístico de visualización (Samper et al., 2012)

| Visualización | |
|---|---|
| *Se necesita para*:<br>• establecer conexión entre la figura y el conocimiento previo para identificar elementos de interés por medio de la vista, detectar o descubrir propiedades o regularidades que pueden ser omitidas. | *Resultado*:<br>• conseguir información geométrica de una figura.<br>• reconocer los elementos que componen las figuras y algunas configuraciones que se pueden formar con ellos (de dimensión igual o menor que la de la figura inicial).<br>• encontrar relaciones geométricas subyacentes. |

**Tabla 4.** Caracterización del proceso heurístico de exploración (Samper et al., 2012)

<table>
<tr><th colspan="2">Exploración</th></tr>
<tr><td colspan="2">Para buscar regularidades, propiedades o relaciones geométricas. La exploración puede hacerse en el mundo de:</td></tr>
<tr><td>Los fenómenos</td><td>La teoría</td></tr>
<tr><td>Empírica:<br>Se hace sobre representaciones de figuras geométricas (gráficas y materiales). Ejemplo, tomar medidas, calcular, hacer construcciones:<br>• auxiliares para enriquecer la figura.<br>• de referencia para comparar.<br>• de casos para llegar a un resultado por ensayo y error.</td><td rowspan="2">Teórica:<br>En este caso la exploración se hace sobre los enunciados que conforman el conocimiento individual. El objetivo es reconocer o encontrar enunciados que permitan justificar una afirmación o guiar la exploración empírica.</td></tr>
<tr><td>Dinámica:<br>Cuando la exploración se lleva a cabo en un entorno dinámico, es decir aquel en donde las representaciones son susceptibles de movimiento (Cabri, por ejemplo), su objetivo es detectar invariantes.</td></tr>
</table>

El objetivo central de la actividad demostrativa es el de producir un *teorema matemático.* Éste es considerado como un sistema conformado por un enunciado, su demostración y la teoría que la guía y la enmarca (Mariotti, Bartolini Bussi, Boero, Ferri y Garuti, 1997).

Esta amplia concepción de la demostración (como actividad demostrativa) y su potencial papel en la enseñanza tiene, por supuesto, importantes implicaciones en cuanto a los entornos de aprendizaje.

Antes de exponer los elementos importantes para la conformación de un entorno que favorezca el aprendizaje de la demostración, es pertinente establecer que es *aprender a* *demostrar.* Influenciados por el actual enfoque sociocultural, y en particular con los presupuestos participacionistas de Sfard (2008, citada en Samper et al., 2012) el grupo Æ · G establece que a*prender a demostrar* se da principalmente en una comunidad de aula, como un proceso gradual por el cual los estudiantes avanzan en la participación de la actividad demostrativa con una disposición genuina o auténtica, y un comportamiento autónomo y relevante. En otras palabras, a*prender a demostrar* comprende un cambio en la forma en que los estudiantes se comprometen en la actividad demostrativa; específicamente se refiere a participar en ella, aceptando las normas que se plantean en el aula con el ánimo de desarrollar el contenido geométrico del curso (Samper et al., 2012).

De esta manera Perry et al. (2007) proponen tres elementos para tener en cuenta en la generación de un ambiente adecuado que facilite el aprendizaje de la demostración: las *tareas* matemáticas propuestas, la *interacción social* en la clase y el uso de la *geometría dinámica*. Primero, *las tareas matemáticas* dejan de ser aquellas en las que se da un enunciado que el estudiante demuestra, y pasan a ser propiciadoras de experiencias de carácter empírico que llevan a la comprensión de la situación y a la formulación de conjeturas. Además, deben exigir que dicha conjetura luego se valide. Segundo, *la interacción social en el aula* entre profesor y estudiantes, y entre estudiantes, permite la comunicación y análisis crítico de ideas, y la argumentación como manifestación del proceso de razonamiento. El profesor se convierte en un guía que, como experto de la comunidad de la clase y no como la autoridad que tiene el saber, dirige el rumbo del proceso hacia el uso de términos, símbolos y formas de expresión propias de la práctica de la demostración en matemáticas; establece y utiliza las normas que rigen el funcionamiento de la justificación. Tercero, *el uso de la geometría dinámica* que incrementa la posibilidad de aprender a demostrar, si se vinculan tareas de construcción geométrica con las prácticas de justificar.

Teniendo en cuenta las anteriores consideraciones y entendiendo la complejidad subyacente en el proceso de aprender a demostrar, nos parece pertinente incluir en nuestro estudio el modelo de comportamiento racional de Habermas que Boero y Morselli (2009) han adaptado para investigar la enseñanza y aprendizaje de la demostración.

## 2.2. MODELO DEL COMPORTAMIENTO RACIONAL DE HABERMAS

Morselli y Boero (2009) declaran que la adaptación del constructo del comportamiento racional de Habermas es una manera de incluir, en las investigaciones relacionadas con el proceso de enseñanza y aprendizaje de la demostración, tanto los aspectos cognitivos como los culturales.

Un primer aspecto a tener en cuenta en la contextualización de este nuevo marco de referencia es el planteamiento de Balacheff (1982, citado en Morselli y Boero, 2009) en cuanto a que la enseñanza de las demostraciones y teoremas debe tener un doble objetivo: el de lograr que los estudiantes entiendan lo que es una demostración y aprendan a producirla. Además, Morselli y Boero (2009) reconocen un carácter doble en la acción de demostrar y en el objeto demostración. Teniendo en cuenta estos dos planteamientos, los autores proponen que en la enseñanza de la demostración se debe considerar, por un lado, el aspecto *objeto*, es decir, la demostración como un producto que cumple ciertos requisitos de orden epistémico y comunicativo que se establecen en la comunidad matemática actual o en las matemáticas escolares. Y por el otro, el aspecto *proceso*, entendido este como un caso particular de la solución de problemas, que consta de un proceso que apunta a plantear una demostración como producto. Esta dualidad, aunque no tiene una correspondencia directa con el constructo *actividad demostrativa*, sí es reconocida y aceptada por ésta, razón por la cual nos parece pertinente asumir los planteamientos del constructo que aquí se expone.

Entre los propósitos de la adaptación de modelo del comportamiento racional de Habermas, que Morselli y Boero (2009) presentan, están facilitar al investigador un marco general con el cual se puedan analizar dificultades de los estudiantes en torno a los teoremas y las demostraciones, y generar discusión sobre asuntos relacionados y las incidencias de éstos para la enseñanza de teoremas y demostraciones.

Habermas (2003, cap.2 citado en Boero y Morselli, 2009) establece tres componentes interrelacionados del comportamiento racional: el componente epistémico, el componente teleológico y el componente comunicativo. Estos tres componentes se pueden identificar en una práctica discursiva más específica como la de demostrar. Boero y Morselli (2009) han decidido caracterizarlos como aspecto *epistémico*, aspecto *teleológico* y aspecto *comunicativo*. En la Tabla 5, presentamos la adaptación del modelo de Habermas.

**Tabla 5.** Componentes del comportamiento racional de Habermas y su adaptación por Morselli y Boero (2009)

| Modelo de Habermas | Adaptación Boero y Morselli |
|---|---|
| *Componente epistémico*<br>Inherente en el control de las proposiciones y su encadenamiento. | *Aspecto epistémico*<br>Tiene que ver con la validación consciente de las afirmaciones y el control de los requerimientos establecidos por la comunidad de discurso matemático de acuerdo a premisas compartidas y formas legítimas de razonamiento. |
| *Componente teleológico*<br>Inherente a la elección consciente de las herramientas para lograr el objetivo de la actividad. | *Aspecto teleológico*<br>Relacionado con la solución de problemas y las elecciones conscientes que deben considerarse con el fin de obtener el producto deseado. En otras palabras se refiere a enfocarse en una meta, formular un plan o desarrollar uno (no necesariamente formulado) para lograr la meta, proponer estrategias que puedan contribuir a llevar a cabo el plan, tener la meta bajo control. |
| *Componente comunicativo*<br>Inherente a la elección consciente de los medios de comunicación apropiados dentro de una comunidad dada. | *Aspecto comunicativo*<br>Consiste en la adherencia consciente de las reglas que garanticen tanto la posibilidad de comunicar los pasos de razonamiento, como la conformidad de los productos (justificaciones) a las normas en una determinada cultura matemática. Tiene que ver con la preocupación de formular clara y concisamente las ideas desde el punto de vista matemático. |

Nuestro interés tiene en cuenta el modelo del comportamiento racional de Habermas tal y como lo presentan Morselli y Boero (2009) en su adaptación.

## 2.3. MODELO DE TOULMIN

Un elemento que creemos está relacionado con el comportamiento racional de los estudiantes son los argumentos. Una herramienta poderosa para analizar y comparar el tipo y la construcción de los argumentos que los estudiantes producen en los diferentes momentos y durante el desarrollo de las acciones de la actividad demostrativa es el *modelo de argumentación de Toulmin*.

Stephen Edelston Toulmin (1922 - 2009) es considerado como uno de los precursores de la teoría de la argumentación contemporánea (Harada, 2009). Aunque su trabajo no se desarrolló en un contexto con propósitos didácticos, ha sido tomado como marco para analizar y presentar el progreso del aprendizaje en un contexto escolar, dada la pertinencia y obvia relación con los procesos de enseñanza y aprendizaje, o para proponer un contexto que favorezca la discusión en clase (Wood, 1999 citado en Boero, Douek, Morselli, y Pedemonte, 2010).

Por su parte Pedemonte (2001) propone el modelo de Toulmin como una herramienta para analizar la relación entre la estructura del proceso de argumentación y la correspondiente del proceso de demostración. Boero et al. (2010) señalan que este modelo ha sido utilizado por ellos para planear, gestionar y analizar actividades diseñadas con el ánimo de acercar a los estudiantes a "*aspectos relevantes del demostrar y la demostración*".

El modelo de Toulmin consta de seis elementos que se relacionan entre sí para estructurar cualquier tipo de argumento (no necesariamente geométrico). Harada (2009) propone, como una de las posibles interpretaciones de este modelo, aquel que:

> […] contiene aseveración, dato (data), garantía (warrant), respaldo (backing), reserva (rebuttal) y cualificador (qualifier) y con el cual se pretende reflejar el uso práctico de la argumentación, a diferencia de la distancia que siempre ha existido entre esta última y la lógica formal. (p.46)

De acuerdo con Harada (2009), bajo esta interpretación el modelo da origen a argumentos propiamente dichos, entendidos éstos como un conjunto de actos lingüísticos y no lingüísticos utilizados para conseguir la aceptación de alguien, en otras palabras, permiten modificar sus creencias, actitudes, valores y hasta su conducta.

De esta manera, asumimos que un *argumento* es un enunciado oral o escrito, utilizado para convencerse o convencer a otros de la veracidad de un hecho particular. En relación con el modelo de Toulmin, el argumento tiene estructura ternaria, que relaciona proposiciones particulares (*datos* y *conclusión*) y una general (*garantía*). Según Samper et al. (2012), la *conclusión* (C) es la afirmación del hablante (en términos de Habermas, el punto de vista expuesto en relación a algo), los *datos* (D) son los que dan lugar a la *conclusión* (la evidencia o información sobre la cual se basa la *conclusión*) y la *garantía* (G) es la regla de inferencia, la cual relaciona los *datos* con la *conclusión* (justifican la pertinencia de los *datos* sobre la *conclusión*). En un enunciado, las proposiciones no necesariamente están todas explicitas, sin embargo debe ser posible identificarlas para poder formalizar lo expresado. La manera como se estructuran y relacionan los tres elementos de todo argumento, las proposiciones particulares (D y C) y la general (G), define el *tipo de argumento* planteado: deductivo, inductivo o abductivo. Como ya se mencionó, el modelo de Toulmin consta de seis elementos, aunque para nuestro estudio se tendrán en cuenta los tres ya mencionados (*datos*, *garantía* y *conclusión*), se mencionan los demás: *respaldo* (apoyo de la regla), *cualificador* (fuerza del argumento) y *refutador* (la invalidez a la regla).

En cuanto a la tipología de los argumentos, mencionada en el párrafo anterior, adherimos a la descripción hecha de cada uno de ellos en Samper et al. (2012). En los esquemas que se presentan a continuación, el recuadro punteado indica lo que se obtiene con cada tipo de argumento.

*Argumento deductivo* (Figura 1) (aparece principalmente en el proceso de justificación): En su estructura se cuenta con unos *datos* (D) y una regla (garantía) para obtener la *conclusión* (C).


**Figura 1.** Esquema de un argumento deductivo

*Argumento abductivo* (Figura 2) (pueden aparecer durante el proceso de conjeturación o de justificación): Se asume que la *conclusión* (C), que se refiere a un hecho que se observa, es posible que se dé. A partir de este hecho y de posibles garantías conocidas que podrían justificar a C, se buscan *datos* (D) adecuados. Los datos así obtenidos son provisionales.. Es importante mencionar que la naturaleza de la regla general (*garantía*) puede ser diferente: puede ser una regla hipotética que proviene de una exploración empírica o puede ser una regla extraída, por una exploración teórica, del sistema teórico en el que se trabaja.

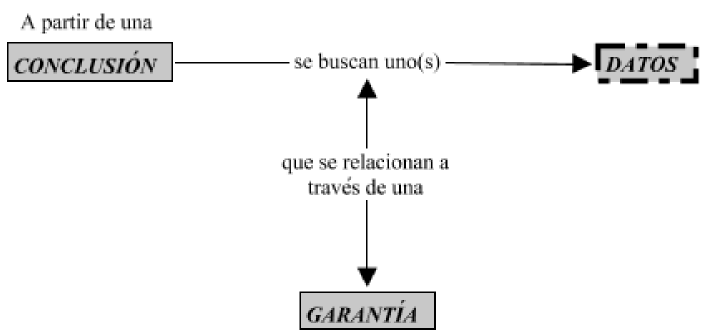



**Figura 2.** Esquema de un argumento abductivo

*Argumento inductivo de descubrimiento* (Figura 3) (son utilizados con mayor frecuencia en el proceso de conjeturación): Para este tipo de argumento, se tienen varios datos o proposiciones particulares $D_1$, $D_2$, $D_3$,… $D_n$ de una proposición general D que producen un mismo resultado (R), que corresponde a la *conclusión* (C). Ello conlleva a la formulación de una proposición o regla general (G). La regla obtenida en este tipo de argumento es provisional, es decir, es una proposición plausible.

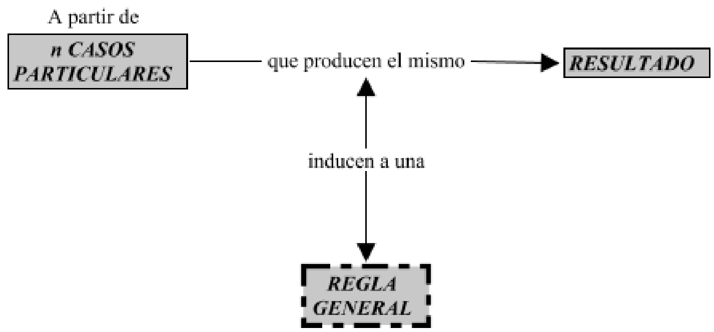



**Figura 3.** Esquema de un argumento inductivo

## 2.4. UNIDAD COGNITIVA

Garuti, Boero y Lemut (1998) declaran que la idea de este constructo proviene de un análisis histórico y epistemológico en relación al trabajo realizado por diferentes geómetras, tanto del pasado como del presente. Dicho estudio mostró numerosos ejemplos de la continuidad entre el planteamiento de una conjetura y el desarrollo de su demostración.

En Garuti et al. (1998) se plantea una hipótesis en relación al carácter holístico de la elaboración de un teorema (conjetura y prueba). Esta hipótesis, que introduce el constructo de la *unidad cognitiva de teoremas*, plantea una continuidad entre la fase de producción de una conjetura y la potencial construcción de su demostración. La hipótesis propone dos características que se deben propiciar para favorecer la producción de un teorema. Una de ellas está relacionada con la actividad de argumentación realizada durante la producción de la conjetura, y la otra con la conexión y organización coherente de algunos de estos argumentos durante el proceso de justificación. En Garuti et al. (1998) se expresa de la siguiente manera:

> Durante la producción de la conjetura, el estudiante trabaja progresivamente su enunciado a través de una actividad argumentativa intensa funcionalmente entremezclada con la justificación de la plausibilidad de sus elecciones. Durante la etapa posterior de demostración del enunciado, el estudiante se conecta con este proceso de manera coherente, organizando algunos de los argumentos previamente producidos según una cadena lógica. (p. 1)

Sin ser la búsqueda de *unidad cognitiva* uno de los propósitos centrales en nuestro estudio, pero dada correspondencia obvia entre este constructo y la actividad demostrativa, quisimos incluirla en nuestros referentes con el objetivo analizar y seguirle la pista a algunas de las ideas producidas por los estudiantes durante el proceso de conjeturación, y verificar su presencia durante el proceso de justificación. De no ser así, examinar las causas de la ruptura.

## 2.5. APROXIMACIÓN INICIAL A ELEMENTOS TEÓRICOS PARA EL ANÁLISIS DEL ASPECTO SOCIAL

Al reconocer la importancia del aspecto social en el complejo proceso de enseñanza y aprendizaje de la matemática, en particular de la geometría, nos parece pertinente destacar algunas particularidades que tienen que ver con la interacción entre estudiantes cuando se llevan a cabo tareas que propician la actividad demostrativa, aun cuando este asunto no hizo parte central de nuestro estudio. Luego de revisar varios documentos relacionados con el aprendizaje en grupo, hemos decidido considerar, como una aproximación inicial, los tres aspectos que Webb (1984) considera respecto al aprendizaje en grupos pequeños: *variables de interacción del grupo*, *mecanismos que enlazan la interacción con los resultados* y *características individuales*. A continuación describimos brevemente dichos aspectos.

### 2.5.1. Variables de interacción del grupo

Una de las variables que se tendrá en cuenta y que determinará en gran parte la interacción entre los estudiantes del grupo es el ***comportamiento de ayuda***, conocido también como tutoría entre compañeros o comportamiento de trabajo entre compañeros (Webb, 1984). Esta variable se puede verificar principalmente en dos circunstancias: *ofrecer ayuda* y *recibir ayuda.* La primera circunstancia está caracterizada porque alguno de los miembros del grupo auxilia, explica o apoya a alguno o algunos de los otros miembros. Webb (1984) destaca que el hecho de que un estudiante ofrezca ayuda se relaciona significativamente con sus resultados individuales, dado que asume un rol de "profesor" que lo obliga a estructurar de mejor manera sus conocimientos para poder explicar. Mientras que el hecho de recibir ayuda, según Webb (1984), no presenta una relación tan directa y clara con los resultados que se obtienen a nivel individual. Se deben tener en cuenta dos aspectos en esta circunstancia en torno a la efectividad de la ayuda recibida; (a) la naturaleza de la ayuda recibida y (b) el comportamiento del estudiante quien recibe ayuda. La ayuda recibida surte efectos negativos o positivos dependiendo de: si la ayuda es solicitada o no, si se da como respuesta a una necesidad del estudiante o no, y si las respuestas son elaboradas o no.

La otra variable de interacción del grupo es ***comportamiento pasivo y comportamiento no centrado en el trabajo.*** El comportamiento pasivo está referido a los estudiantes que no se involucran de forma activa al trabajo que realizan los demás miembros del grupo, dedicándose simplemente a observar el trabajo de los demás. Este comportamiento fue definido como la ausencia de *todo* tipo de participación observable en la tarea grupal. El comportamiento no centrado en el trabajo se refiere a las actividades realizadas por los estudiantes que son ajenas a la tarea, este comportamiento, según Webb (1984), evita que la interacción entre los estudiantes sea productiva y significativa.

### 2.5.2. Mecanismos que enlazan la interacción con los resultados

Webb (1984) reconoce, en investigaciones previas, dos tipos de mecanismos que pueden relacionar la interacción grupal con los resultados posteriores. Por un lado están los mecanismos que afectan los ***procesos cognitivos*** y por el otro los que tienen que ver con el clima emocional o intelectual favorable para el aprendizaje, las ***variables socioemocionales***.

Entre los mecanismos que afectan los procesos cognitivos están: *verbalización versus reestructuración cognitiva*, *resolución de conflictos* y *señales verbales y no verbales*. El mecanismo de verbalización versus reestructuración cognitiva está relacionado con la capacidad de expresar en forma oral o escrita los resultados o explicaciones relacionadas con la tarea. Webb (1984) resalta que es más importante, para el aprendizaje, lo que provoca la verbalización, que la verbalización misma. De aquí que es más provechoso cuando la verbalización se hace a partir de un rol de "profesor" que cuando se hace de un rol de estudiante, dado que el primer rol le exige estructurar la información para poder ser comunicada.

El mecanismo de resolución de conflictos asume como hipótesis que:

los estudiantes que experimentan un conflicto conceptual como resultado de la controversia están en mejores condiciones para generalizar los principios que aprenden a una más amplia variedad de situaciones que los estudiantes que no experimentan dicho conflicto conceptual. (p. 167)

El último mecanismo que afecta los procesos cognitivos reconoce las señales verbales y no verbales particulares del grupo de estudiantes que no son parte del lenguaje formal. Más bien es un tipo de comunicación informal compuesto de señas y palabras propias de su contexto escolar.

Además, Webb (1984) destaca tres variables socioemocionales: *motivación, ansiedad y satisfacción,* que no las describe.

### 2.5.3. Características individuales

Un elemento que queremos destacar en este aspecto es la *habilidad del estudiante*. Esta variable reconoce que algunos estudiantes se destacan más que otros en asuntos relacionados con conocimientos matemáticos, manipulación de algoritmos, análisis de información y manejo de artefactos.

En seguida sintetizamos la información descrita en el apartado 2.5.

**Tabla 6.** Síntesis de los aspectos de interacción social según Webb (1984)

<table>
<tr><th colspan="5">ASPECTOS DE INTERACCIÓN SOCIAL</th></tr>
<tr><th colspan="2">Variables de interacción del grupo</th><th colspan="2">Mecanismos que enlazan la interacción con los resultados</th><th>Características del individuo</th></tr>
<tr><td rowspan="2">Comportamiento de ayuda</td><td>Ofrecer ayuda</td><td rowspan="3">Procesos Cognitivos</td><td>Verbalización versus reestructuración cognitiva</td><td rowspan="6">Habilidad del estudiante</td></tr>
<tr><td>Recibir Ayuda</td><td>Resolución de conflictos</td></tr>
<tr><td colspan="2" rowspan="4">Comportamiento pasivo y comportamiento no centrado en el trabajo</td><td>Señales verbales y no verbales</td></tr>
<tr><td rowspan="3">Variables socioemocionales</td><td>Motivación</td></tr>
<tr><td>Ansiedad</td></tr>
<tr><td>Satisfacción</td></tr>
</table>

# CAPÍTULO 3. MARCO METODOLÓGICO

Este capítulo presenta el proceso que permitió el desarrollo de nuestro estudio. Específicamente describimos el tipo de investigación, el contexto donde se llevó a cabo y las fases del estudio. El último aspecto está conformado por tres fases: la búsqueda del marco teórico, el diseño e implementación de una secuencia didáctica, y la recolección y análisis de la información.

## 3.1. TIPO DE INVESTIGACIÓN

Nuestro estudio adoptó una metodología cualitativa centrada en la corriente descriptiva – interpretativa que corresponde a un estudio de caso porque intentamos describir e interpretar detalladamente el comportamiento racional y argumental de los estudiantes cuando trabajan en grupo dentro de un ambiente que propicia la actividad demostrativa. Según Cohen y Maníon (1999), este estudio de caso es, por un lado, de tipo no participante porque el observador evita ser miembro del grupo para no involucrarse durante los dos procesos de la actividad demostrativa. Por otro lado, es estructurado porque usamos la aproximación metodológica del grupo $\mathcal{Æ} \cdot \mathcal{G}$ con el fin de generar un entorno favorable para aprender a demostrar y en el que analizamos las intervenciones de los estudiantes cuando solucionan dos situaciones específicas.

## 3.2. CONTEXTO DE LA INVESTIGACIÓN

Este estudio lo llevamos a cabo en el Colegio Ciudadela Educativa de Bosa I.E.D. con estudiantes de grado noveno de educación básica secundaria (14 – 16 años), en la jornada mañana, durante el segundo semestre de 2011 e inicios del primer semestre de 2012. Específicamente, el estudio de caso se hizo con un grupo de tres estudiantes conformado por Diana, Dayana y Cristian. Estos estudiantes trabajaron como grupo durante gran parte del desarrollo de la secuencia didáctica, quizá porque se conocían varios años atrás y eran amigos. En términos generales, Diana siempre se destacaba en matemáticas; Dayana era un estudiante con un rendimiento académico promedio, al parecer debido a la ayuda que Diana le brindaba; y Cristian era un muchacho que mostraba mayor interés en tener buenas relaciones de amistad con sus compañeros que dedicarse a asuntos académicos.

Previo al diseño y aplicación de las tareas que se describen en el apartado 3.3.2. del presente capítulo, fue necesario obtener información del trabajo desarrollado por los estudiantes en torno al estudio de la geometría. Al revisar el plan de estudios de la asignatura de matemáticas y dialogar con la profesora encargada, fue posible determinar que en grado octavo se abordaron temas relacionados con la identificación de figuras geométricas, el cálculo de áreas y perímetros, y el uso del teorema de Pitágoras. De acuerdo con el testimonio del profesor responsable de la asignatura de matemáticas en grado noveno y uno de los autores de este estudio, durante el primer semestre de 2011 sólo se habían tratado temas de álgebra, a pesar de que en el horario de clases existe una hora para geometría. Aunque el colegio dispone de calculadoras que tienen incorporado el programa de geometría dinámica Cabri y video beam, el profesor utilizó únicamente este último para el estudio de funciones. Además, la metodología de enseñanza correspondía a un estilo tradicional en el que los estudiantes, organizados por filas para mantener orden dentro del aula, prestaban atención a las explicaciones que él daba de los diferentes temas de álgebra, tomaban apuntes de lo que escribía en el tablero, y realizaban individualmente los ejercicios propuestos en la clase.

Con base en la anterior información, podemos señalar que es muy posible que este tipo de enseñanza no favorece un ambiente donde los estudiantes alcancen las metas propuestas por el MEN (1998) respecto a la resolución y planteamiento de problemas en el proceso de construcción del conocimiento matemático, donde se deben favorecer acciones como: explorar diferentes situaciones matemáticas, desarrollar procesos del pensamiento matemático y comunicarse matemáticamente.

## 3.3. FASES DE LA INVESTIGACIÓN

### 3.3.1. Primera Fase: Búsqueda del marco teórico

Para poder caracterizar el comportamiento racional y argumental de estudiantes de grado noveno cuando trabajan en grupo dentro de un ambiente que propicia actividad demostrativa, hicimos una revisión bibliográfica relacionada con dos aspectos: actividad demostrativa y comportamiento racional y argumental de los estudiantes. Consideramos el constructo de la *actividad demostrativa* propuesto por el grupo $\mathcal{Æ} \cdot \mathcal{G}$ (Camargo, Samper y Perry, 2006) porque nos permite diseñar y aplicar una secuencia didáctica para que los estudiantes puedan hacer actividad demostrativa. De esta forma estamos en sintonía con el objetivo, según este grupo, de proponer alternativas para que la demostración sea importante y significativa en el ámbito escolar. Respecto al comportamiento racional y argumental de los estudiantes en la actividad demostrativa, empleamos los modelos de Habermas para el comportamiento racional y de Toulmin para la argumentación porque, según Boero et al. (2010), la integración de estos modelos se convierte en una herramienta poderosa para analizar los resultados a los que llegan los estudiantes y las dificultades que presentan en el desarrollo de habilidades para demostrar.

### 3.3.2. Segunda Fase: Diseño e implementación de una secuencia didáctica

De acuerdo con el contexto anterior y el objetivo general de nuestro estudio, diseñamos una secuencia didáctica que consta de un conjunto de tareas para que, en un momento determinado, los estudiantes realizaran actividad demostrativa. Teniendo en cuenta la descripción que hace el grupo $\mathcal{Æ} \cdot \mathcal{G}$ sobre los dos procesos de la actividad demostrativa (Samper et al., 2012), los objetivos que señala Balacheff en la enseñanza de demostraciones y teoremas (1982, citado en Morselli y Boero, 2009) y lo que dicen Mariotti et al. (1997) acerca de lo que es un teorema matemático, esta secuencia didáctica tuvo como propósito construir un sistema teórico local para que los estudiantes pudieran formular y demostrar una conjetura. Para ello, y al considerar los planteamientos que Samper et al. (2012) hacen de cómo debe ser un entorno favorable para aprender a demostrar, se generó un ambiente de aprendizaje con tres elementos. Primero, las tareas favorecieron la visualización, la exploración, la formulación de conjeturas en forma de condicional y la demostración de enunciados. Segundo, la interacción social en el aula entre profesor y estudiantes, y entre estudiantes permitió la comunicación y discusión de ideas que se validaron o rechazaron a través de la argumentación; el profesor pasó de ser la autoridad que tiene el saber a ser un experto en la clase quien dirigió el proceso para desarrollar acciones propias de la práctica de la demostración en matemáticas (i.e. uso de términos, símbolos y maneras de comunicarse). Tercero, el uso de la geometría dinámica como Cabri favoreció la construcción y exploración de propiedades geométricas para que los estudiantes produjeran conjeturas y se organizaran en un sistema teórico local con apoyo del profesor.

Esta secuencia didáctica tuvo una duración de 18 sesiones de clase, de aproximadamente una hora y media y se desarrolló en tres momentos específicos: *primero*, conformación inicial del sistema teórico local con los criterios de congruencia de triángulos; *segundo*, ampliación del sistema teórico local usando Cabri; y *tercero*, formulación y justificación de una conjetura. Cada uno de estos momentos se describe con más detalle a continuación.

#### *3.3.2.1. Primer momento: Conformación inicial del sistema teórico local con los criterios de congruencia de triángulos*

Para este momento fueron necesarias seis sesiones de clase. En las cuatro primeras sesiones, el grupo de estudiantes se organizó en diez subgrupos de cuatro personas. Desarrollaron la tarea[1] "En busca del triángulo perdido" cuyo objetivo era descubrir los criterios de congruencia de triángulos. Para ello, el profesor elaboró previamente, en madera, seis piezas correspondientes a las partes de un triángulo específico para cada subgrupo: tres regletas con la longitud de los tres lados y tres moldes con la amplitud de los tres ángulos (Figura 4). Como los subgrupos no conocían su respectivo triángulo, el profesor entregaba a cada uno el material de acuerdo con los casos que aparecen en la Tabla 7 y ellos dibujaban en hojas de papel pergamino la mayor cantidad de triángulos diferentes que tuvieran partes correspondientes congruentes a las dadas. Luego, registraban en una

[1] Esta tarea es una adaptación de las actividades propuestas en el libro Elementos de Geometría escrito por Samper, Molina y Echeverry, 2011.

tabla el nombre de los moldes y/o regletas usadas, y cuántos triángulos diferentes obtenían (ver Anexo A. Tarea No. 1).

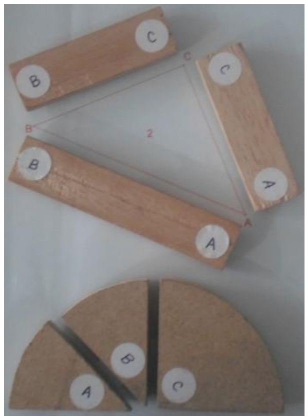


**Figura 4.** Piezas de madera correspondientes al $\Delta ABC$

**Tabla 7.** Listado de casos

| No. | Caso |
|---|---|
| 1 | Dos ángulos |
| 2 | Un lado y el ángulo con vértice en el lado |
| 3 | Un lado y e ángulo sin vértice en el lado |
| 4 | Dos lados |
| 5 | Tres ángulos |
| 6 | Dos lados y el ángulo no incluid |
| 7 | Dos lados y el ángulo incluido |
| 8 | Dos ángulos y el lado no incluido |
| 9 | Dos ángulos y el lado incluido |
| 10 | Tres lados |

Después, el profesor entregó el triángulo original a los estudiantes y ellos lo comparaban con las diferentes representaciones hechas en papel y determinaban en qué casos obtenían dicho triángulo. Tras una socialización de los resultados a los que llegaron los diferentes subgrupos, se establecieron los criterios de congruencia de triángulos y tres definiciones. De esta manera se empezó a conformar el sistema teórico local (Tabla 8).

**Tabla 8.** Sistema teórico local inicial

| | |
|---|---|
| **Criterios de congruencia de triángulos** | LLL, LAL, ALA, LAA, Hipotenusa – Cateto |
| **Definiciones** | Segmentos congruentes, ángulos congruentes y triángulos congruentes |

En las siguientes dos sesiones propusimos dos tareas (ver Anexo A. Tarea No. 2 y Tarea No. 3). Algunos ejercicios de estas tareas fueron de visualización para que los estudiantes representaran y/o reconocieran triángulos congruentes, y estudiaran dichos criterios de congruencia. En otros ejercicios introdujimos un esquema a tres columnas denominado por Samper, Molina y Echeverry (2011) como *esquema – deducción* (ver Tabla 9), para que los estudiantes consignaran demostraciones de un solo paso al escribir el *dato*, la *garantía* que proviene del sistema teórico local conformado y la *conclusión* del argumento en las columnas *Qué sé*, *Qué uso* y *Qué concluyo*, respectivamente, y respondieran algunas preguntas con base en la información suministrada en el esquema.

**Tabla 9.** Esquema – deducción

| Qué sé | Qué uso | Qué concluyo |
|---|---|---|
| | | |

### *3.3.2.2. Segundo momento: Ampliación del sistema teórico local usando Cabri*

Diseñamos cinco tareas en las que fue esencial el uso del programa de geometría dinámica Cabri y que se desarrollaron en parejas, una por sesión de clase (ver Anexo B). Hasta la tercera tarea participó el grupo de 40 estudiantes en el horario habitual de clase; en la cuarta tarea participaron ocho estudiantes y en la quinta sólo participaron cinco estudiantes quienes, de manera voluntaria, asistieron en la tarde porque las actividades programadas en la institución para el cierre del año escolar impidieron el normal desarrollo de las sesiones que faltaban.

A partir del momento en que Cabri se convirtió en artefacto de uso en clase, los estudiantes reportaban en una tabla tres aspectos. Primero, indicaban las construcciones hechas a través de las diferentes herramientas que este programa dispone. Debemos aclarar que en la primera tarea fue necesario explicitar qué construcción debían hacer y cómo hacerla pues fue la primera vez que ellos empleaban este programa. Segundo, describían qué y cómo exploraban en Cabri porque con la opción de arrastre se pueden visualizar diferentes propiedades geométricas. Y tercero, con base en lo que ellos exploraban, formulaban una conjetura en forma de condicional que era socializada con el fin de establecer una definición o un hecho geométrico que se incluía en el sistema teórico local. Al finalizar cada tarea con Cabri, excepto la quinta tarea, y para reforzar lo aprendido, los estudiantes desarrollaban una tarea adicional[2] en la que debían hacer demostraciones de afirmaciones, a través del esquema – deducción, cuyo número de pasos poco a poco aumentaba (ver Anexo C). Cabe resaltar que este sistema teórico se amplió porque en la socialización de las conjeturas de dos tareas fue necesario considerar otros hechos geométricos y/o definiciones. En la Tabla 10 hacemos un resumen de la anterior descripción, y en el Anexo F se encuentran los enunciados del listado de definiciones y hechos geométricos.

---

[2] Estas tareas son una adaptación de las actividades propuestas en el libro Geometría escrito por Samper, 2008.

**Tabla 10.** Sistema teórico local conformado

| Tarea No. | Nombre | Hecho geométrico (HG) ó Definición (D) | Hecho geométrico (HG) y/o Definición (D) adicional |
|---|---|---|---|
| 1 | Pmedio | D. Punto medio | |
| 2 | AOV | HG. Ángulos opuestos por el vértice | D. Ángulo<br>D. Ángulos opuestos por el vértice |
| 3 | RecP | D. Rectas perpendiculares | D. Ángulo recto<br>HG. Ángulos rectos<br>D. Triángulo rectángulo<br>D. Ángulos par lineal<br>D. Ángulos suplementarios<br>HG. Ángulos par lineal |
| 4 | BdA | D. Bisectriz de ángulo | |
| 5 | DiPunRe | D. Distancia de un punto a una recta | |

*3.3.2.3. Tercer momento: Formulación y justificación de una conjetura*

Para este último momento, diseñamos dos tareas (Tarea No. 6 y No. 7). Hicimos una primera aplicación a finales del mes de noviembre de 2011, en sesiones diferentes, a dos grupos de estudiantes de dos y tres personas (ver Anexo D). Sin embargo, por razones que exponemos en el siguiente apartado, tuvimos que hacer una segunda aplicación a un grupo de tres estudiantes que no participó en el desarrollo de la quinta tarea de Cabri. Esta aplicación se hizo durante los días 6, 7 y 8 de febrero de 2012 (ver Anexo E).

El objetivo de la Tarea No. 6, titulada como "TeoPELAn", era formular una conjetura con base en una situación relacionada con un contexto no geométrico que los estudiantes debían representar con Cabri. Al representar las matas con puntos equidistantes a los lados del ángulo, esperábamos que ellos recurrieran a la definición de distancia de un punto a una recta, indicaran que son infinitos los puntos que cumplen esa condición, y describieran que dichos puntos pertenecen a la bisectriz del ángulo. Debían llegar a formular una conjetura, en términos geométricos y en forma de condicional, aproximada a la siguiente: *"Si la distancia de un punto a cada lado de un ángulo es igual entonces el punto está sobre la bisectriz del ángulo".*

El objetivo de la Tarea No. 7, fue justificar la conjetura anterior. Esperábamos que los estudiantes hicieran, con lápiz y papel, una representación de esta conjetura (Figura 5) y lograran hacer una justificación en forma deductiva con el uso del esquema – deducción.

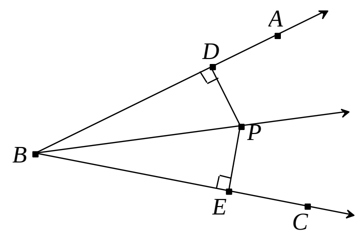



**Figura 5.** Representación de la conjetura "TeoPELAn"

### 3.3.3. Tercera Fase: Recolección de información y análisis de datos

Para la recolección de información, grabamos en audio y video cada una de las sesiones del desarrollo de la secuencia didáctica, y recogimos las producciones escritas de los estudiantes. Procedimos a transcribir del último momento, las dos sesiones correspondientes a la primera aplicación. Sin embargo, al revisar esta transcripción hecha en el esquema que se muestra en la Tabla 11, nos dimos cuenta que intervenimos con comentarios durante el desarrollo que los dos grupos hicieron de las tareas, lo cual hizo que fuéramos miembros de estos grupos y afectara los resultados esperados. Además, con base en las respuestas dadas por los estudiantes, vimos la necesidad de hacer algunas modificaciones a los enunciados de las tareas para asegurar la comprensión de éstas (ver Anexo E). Por esta razón, decidimos hacer la segunda aplicación a otro grupo de estudiantes conformado por Diana, Dayana y Cristian, y en la que estuvieron presentes los dos autores de este estudio, Profesor J y Profesor L (el segundo de ellos docente titular de la institución donde desarrollamos el estudio). Después realizamos las transcripciones correspondientes al proceso de conjeturación y al proceso de justificación de la conjetura (ver Anexos I y J, respectivamente).

**Tabla 11.** Esquema para la transcripción de las intervenciones

| No. | Sujeto | Intervención | Observación(es) |
|---|---|---|---|
| 1. | | | |
| 2. | | | |
| … | | | |

Para realizar el análisis de datos y teniendo en cuenta que el objetivo inicial de nuestro estudio era identificar *unidad cognitiva* en la actividad demostrativa del grupo de tres estudiantes, nos fijamos en cómo era el comportamiento de cada uno en relación con: tipos de argumentos de acuerdo con el modelo de Toulmin y comportamiento racional según el modelo de Habermas adaptado por Morselli y Boero (2009). En las reuniones con la asesora de nuestro estudio, realizamos una primera revisión de la información e hicimos las correspondientes anotaciones en la última columna del esquema anterior. Debido a que no logramos encontrar evidencia clara de *unidad cognitiva* entre ambos procesos de la actividad demostrativa, decidimos fijarnos en el comportamiento racional de los estudiantes y en los argumentos que formularon. Para ser más detallado el análisis de los argumentos, fue necesario establecer dos subcategorías en relación con la manifestación explícita o no de alguno de los tres elementos que conforman un argumento. De tal manera que llamamos *argumentos completos* cuando están explícitos los tres elementos del argumento, y llamamos *argumentos incompletos* cuando no es explícito alguno de ellos por parte del grupo de estudiantes.

Para hacer un mejor análisis de la información: dividimos las transcripciones por episodios; ilustramos las acciones de los estudiantes con gráficas capturadas de los videos y escaneamos sus producciones escritas; hicimos anotaciones en paréntesis cuadrados para complementar las intervenciones que involucraron acciones no verbales. En cada uno de dichos episodios, hicimos un resumen de lo que pasó antes y/o de lo que sucederá en la transcripción de las intervenciones que mostramos; en dicha transcripción eliminamos aquellas intervenciones de los estudiantes que involucraron cuestiones ajenas a la solución de las dos tareas del tercer momento en la secuencia didáctica; luego, damos a conocer nuestro respectivo análisis. En el título de cada episodio aparece como subíndice las intervenciones que lo conforman según los números escritos en paréntesis cuadrados.

# CAPÍTULO 4. ANÁLISIS Y RESULTADOS

El presente capítulo presenta el análisis del comportamiento racional y argumental de tres estudiantes de grado noveno cuando trabajaron para resolver las dos tareas del tercer momento de la secuencia didáctica descrita en el Capítulo 3. Para ello, mencionamos las categorías de análisis que empleamos basados en el marco teórico expuesto en el Capítulo 2, y analizamos los episodios extraídos de las transcripciones que hicimos del proceso de conjeturación y justificación.

## 4.1. CATEGORÍAS DE ANÁLISIS

Para analizar el comportamiento racional y argumental de los estudiantes cuando trabajaron en grupo en un ambiente que favorece la actividad demostrativa, usamos los modelos de Habermas para el comportamiento racional y de Toulmin para la argumentación. En cuanto al primer modelo adaptado por Boero y Morselli (2009), caracterizamos el comportamiento racional de los estudiantes de acuerdo con la descripción que ellos hacen de cada uno de los aspectos del comportamiento racional (ver Tabla 5 del Capítulo 2).

En cuanto al segundo modelo, junto con la descripción que Samper et al. (2012) hacen para los tipos de argumentos, identificamos y clasificamos los argumentos de los estudiantes en *deductivos*, *inductivos* o *abductivos* (ver Figuras 1, 2 y 3 del Capítulo 2). Además, tuvimos en cuenta si los estudiantes construyeron *argumentos completos* cuando explicitaban los tres elementos que conforman un argumento (*datos*, *conclusión* y *garantía*) o si formularon *argumentos incompletos* cuando faltaba uno de estos tres elementos.

## 4.2. ANÁLISIS DEL COMPORTAMIENTO RACIONAL Y ARGUMENTAL DE LOS ESTUDIANTES EN EL PROCESO DE CONJETURACIÓN

El proceso de conjeturación se dividió en siete episodios para facilitar su análisis. Al finalizar el análisis del Episodio 7, presentamos una síntesis del comportamiento racional y argumental de los estudiantes durante este proceso de la actividad demostrativa.

### 4.1.1. Episodio 1: Recuerdan y formalizan la tarea "DiPunRe" [1 – 122]

En esta primera parte de la sesión, que se inicia con la lectura de la Tarea No. 5, (situación y preguntas), el profesor motiva a los estudiantes a re-construir en Cabri lo hecho en la sesión anterior. A la par, se van corrigiendo asuntos relacionados con la notación (de puntos y rectas). El Profesor L retoma la idea de perpendicularidad con el objetivo de relacionarla con lo encontrado, tanto en la Tarea No. 5 como en la retroalimentación: la necesidad de que el segmento forme un ángulo de 90° para obtener la menor distancia.

A partir de la conjetura planteada por los estudiantes, ***Si $\overline{PQ}$ y una recta r entonces lo que descubrimos fue dos ángulos rectos por medio de una perpendicular***, el Profesor L [85] propone un elemento más para el sistema axiomático local: *la definición de distancia de un punto a una recta*. El episodio finaliza con la propuesta de varios ejercicios en donde se busca, por un lado, el afianzamiento de la definición ya mencionada, y por otro, el mejoramiento del manejo de Cabri. Finalmente, el profesor [122] recoge lo practicado en Cabri en torno a la definición.

Luego de leer el enunciado de la Tarea No. 5, el Profesor L solicita a Diana que utilice el programa Cabri (en el computador) para re-construir lo hecho en la sesión anterior.

| | | |
|---|---|---|
| 11. | Diana: | No profe. Hágalo usted. |
| 12. | Profesor L: | O Cristian. [Le pasa el computador a Cristian el cual no pone inconveniente]. Entonces vamos a… ¿Cómo lo hicieron? |
| 13. | Cristian: | Hicimos un segmento de *P*… [Mientras lo va construyendo en Cabri] |

Diana rechaza el ofrecimiento y es Cristian quien toma control de esta herramienta. Hay un establecimiento de manera implícita del rol que va a desempeñar Cristian en adelante. Él es el encargado de usar la tecnología tanto para representar la situación como para explorarla.

A pesar de esto Diana sigue conectada con la actividad, mostrando comprensión tanto de la geometría que subyace en la situación como del uso de Cabri. Es precisamente ella quien presenta un razonamiento deductivo incompleto al responder la pregunta que plantea el profesor L en relación a la tarea en cuestión ¿cómo encontraron el punto *Q*?

| | | |
|---|---|---|
| 49. | Diana: | Por que como decía que la llave no era un punto de la, de la canal, entonces tenía que ser el más corto. Principalmente de lógica, pues no de lógica pero si lo más simple es que si es recto, entonces sería el más corto. |

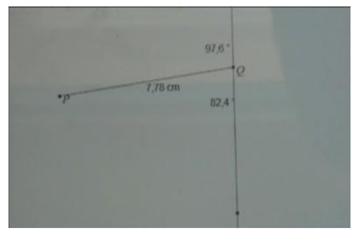
En la argumentación de Diana [49] se toma como *dato* la existencia del ángulo recto, como *conclusión*, que el segmento sería el más corto, y como *garantía* la evidencia visual extraída durante la exploración, siendo éste un argumento deductivo completo.

Por otro lado, el profesor, busca corregir el lenguaje geométrico usado por los estudiantes y de esta manera mejorar la *comunicación*, para que ésta sea clara y concisa.

50. Profesor L: Cuando tú te refieres a recto, ¿a qué te refieres? [Murmullos.] Es precisamente lo que tú, o sea, veo que lo que tú estás diciendo de recto es que el segmento debe ser perpendicular.

51. Diana: Hmm.

52. Profesor L: Debe ser perpendicular a *r*, porque si no lo fuera, por ejemplo si el ángulo fuera así… [señala] Ahí por ejemplo ¿el segmento es perpendicular a la recta?




53. Diana: Aaaa, no.

54. Profesor L: No, porque no forman un ángulo, no forman ángulo de 90°, o sea que ustedes…

55. Diana: Para encontrarla así fue que formara… que fuera perpendicular con *r*, ¿no?

Diana [55], luego de la sugerencia del profesor, corrige su lenguaje y se refiere a "perpendicular" y ya no a "… si es recto". Es importante resaltar que la participación de Diana y Cristian fue muy pareja, en contraste con Dayana que, en lo corrido de los 20 minutos de duración de este episodio, nunca participó.

Este primer episodio de retroalimentación termina con la exposición, por parte del profesor, de la relación entre la definición ya mencionada y la forma como puede ser utilizada en Cabri.

122. Profesor L: […] es decir, que para hallar la distancia, nuevamente, la distancia de un punto a una recta, debe haber un segmento… lo que dice acá…[se refiere a la hoja del sistema axiomático local] un segmento que sea perpendicular […] desde el punto, en este caso *A*, hasta un punto aquí de la recta, de tal manera que, en este caso, nos da la distancia de ese punto a la recta,[…] o sea que ya no tenemos que hacer toda esa exploración de localizar el punto, arrastrarlo, tener que mirar, mmh, aproximadamente me queda, entonces, ya no hay necesidad de estar aproximando […]

Con esta insinuación que cierra el primer episodio, el Profesor L pretende resaltar y afianzar la conexión que existe entre la definición, los elementos que la caracterizan, su representación y el uso del software.

### 4.1.2. Episodio 2: Representan la situación en Cabri [123 – 376]

Este segundo episodio busca analizar lo sucedido en relación al literal *a* de la Tarea No. 6; *Represente la situación usando Cabri.* La situación está planteada de la siguiente manera: *Uno de los terrenos en la finca de Don Gustavo tiene forma de cuña* [ver Figura 6], *bordeado por dos canales. Él quiere sembrar matas de arroz de tal forma que la distancia de cada mata a cada canal sea la misma.*

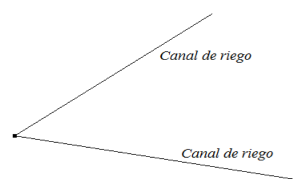
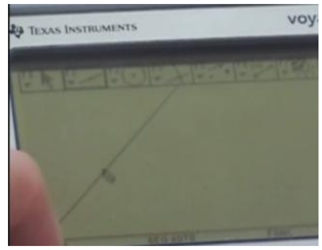



**Figura 6.** Representación de la situación

Luego de leer la situación y aclarar lo que significa la palabra "*cuña*", los estudiantes intentan representarla en Cabri. Sin embargo se encuentran con un *problema epistémico* en relación con la definición de ángulo.

| | | |
|---|---|---|
| 166. | Cristian: | […] Se supone que no se acaba nunca, ¿cierto?, entonces toca hacer dos rectas. |
| | | […] |
| 168. | Cristian: | Sí eso es un ángulo, pues no se acaba nunca, toca hacer dos rectas. |
| 169. | Diana: | ¿No hay una opción en Cabri que sirva para hacer ángulos? ¡No! |
| 170. | Profesor L: | ¿Cuál es la definición de ángulo? |
| 171. | Diana: | ¿Ángulo? |
| 172. | Profesor L: | Que incluso hasta en clase ahorita de trigonometría la estuvimos recordando. |
| 173. | Diana: | Ángulo es una figura geométrica que es formada por dos rayos. |
| 174. | Profesor L: | Dos rayos. |
| 175. | Diana: | Y el punto que se llama vértice. |
| 176. | Dayana: | No, es que los dos rayos son los que forman los vértices |
| 177. | Diana: | Aja. |
| 178. | Dayana: | Entonces se forma el ángulo. |
| 179. | Diana: | Entonces eso es un ángulo. Excelente. Si ve que si estábamos poniendo cuidado. [Cristian: inicia la construcción en Cabri de la calculadora]. |
| 180. | Profesor L: | Mira lo que está haciendo Cristian:, ¿eso es un rayo? |




181. Diana: ¡Qué! [negando].

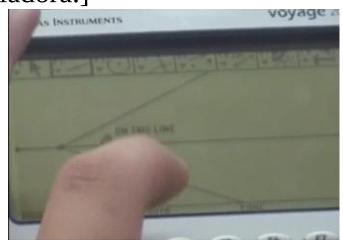
Cristian argumenta su propuesta de representación. El argumento de Cristian, [166, 168] de naturaleza deductiva (incompleta), plantea como *dato* que los lados de un ángulo "no se acaban", como *garante* que las rectas se extienden infinitamente en ambas direcciones y como *conclusión* que los lados del ángulo son rectas. El problema epistémico tiene su origen en la confusión entre rayo y recta. El problema se resuelve con la insinuación del Profesor L de recordar la definición de ángulo. Diana [173] y Dayana [175] son quienes hacen un control epistémico al proponer una definición de ángulo que, aunque incompleta, (falta mencionar que los rayos no pertenecen a la misma recta y que comparten el mismo origen) es suficiente para que Cristian pueda representar, como un ángulo, las canales en forma de "cuña" en Cabri.

Luego de lograr dibujar el ángulo que representa la situación, surge el inconveniente de graficar los puntos que representan las matas con la condición dada. Es necesaria la guía del Profesor L para poder entender cómo deben estar ubicados dichos puntos. Al momento de trabajar en la calculadora Cristian parece tener una idea que el Profesor L no deja progresar.

253. Cristian: [Reinicia su trabajo en Cabri]. ¿Acá también se puede volver invisible las líneas?
254. Profesor L: Eh, claro, si. ¿Por qué?
255. Cristian: Ah bueno.
256. Diana: ¿Para qué va volver invisible las líneas? ¡Eso no se hace, es un punto! [Cristian traza una línea con apariencia de bisectriz].


257. Cristian: Por eso.
[…]
259. Profesor L: Un punto, cada puntico… [es interrumpido por Cristian].
260. Cristian: Si… digamos que hago una línea por la mitad y…

261. Profesor L: Esa línea, ¿que nos va a representar?
262. Cristian: No. Hasta el momento nada.
263. Profesor L: ¿Qué acabamos de trazar?
264. Cristian: Pues la… para calcular la distancia.
265. Profesor L: Pero…
266. Cristian: O sea, hago un angulito acá, otro angulito acá y tiene que medir lo mismo en ambos lados la línea pa que… pa saber que sí está en la mitad. [señala con el dedo en la calculadora.]



267. Profesor L: Pero primero está ubicada la mata y luego tiene que… [Cristian lo interrumpe].
268. Cristian: No porque la línea se va. [Diana interrumpe].
[…]
270. Cristian: La línea no existe.
271. Profesor L: ¡A a! [como tratando de corregir la aseveración de Cristian] Primero está la mata.

Cristian [260, 264, 266 y 268] muestra claramente el aspecto teleológico del comportamiento racional en cuanto a que sugiere una forma de encontrar puntos con la condición dada. Sin embargo el Profesor L [267, 271] evita que su idea prospere. A pesar de desistir de su plan, Cristian conserva la idea manifestada en [260] durante el desarrollo de la tarea. A esta idea se le seguirá la pista en la justificación intentando descubrir la presencia de unidad cognitiva.

El Profesor L pretende que sea utilizada la definición de distancia previamente establecida (en la retroalimentación) para poder ubicar un punto con la condición pedida en la situación. Luego de crear y nombrar un punto al cual llamaron *K*, en Cabri, el Profesor L sugiere que sea corrido dado que está muy cerca del vértice del ángulo. Cristian arrastra el punto de tal forma que parece moverlo sobre la recta que inicialmente había trazado y luego fue borrada [256]. Dayana comenta acerca de la ubicación del punto.

298. Dayana: No tiene la misma distancia. [Refiriéndose al punto arrastrado].
299. Profesor L: ¿Cómo verificas, Dayana:, que tengan la misma distancia?
300. Dayana: Porque es que ahí se ve.
301. Cristian: ¡No! ¿Cómo se verifica?
302. Dayana: Aaa.

303. Cristian: Ah bueno. [Risas y simultáneamente interviene el Profesor L].
304. Profesor L: Bueno, ahí se ve. Dice que ahí se ve, pero ¿cómo establecemos que tengan la misma distancia?
305. Dayana: [Entre risas] Pues midiendo.

Dayana presenta un argumento no matemático cuya *conclusión* es que el punto recién arrastrado ($K$) no cumple la condición dada. Los *datos* están relacionados con la representación hecha en Cabri. Ante el cuestionamiento del Profesor L [299], Dayana propone como *garantía* la evidencia visual [300]. Cristian manifiesta control epistémico [301] al no aceptar esta *garantía* y exigir una explicación más teórica de que el punto ($K$) no cumple la condición.

A partir de la intervención [306] hasta la [344] Diana y el Profesor L sostienen un dialogo el cual motiva a Diana a hacer una representación en el papel. Cristian, por su lado, para medir la distancia del punto $K$ a cada uno de los lados del ángulo, traza un segmento cercano a $K$ que tiene extremos en cada lado del ángulo, mide la distancia de cada uno de los extremos de dicho segmento al punto, arrastra el punto para colocarlo en el segmento de tal forma que queda ubicado en lo que parece ser el punto medio del segmento (Figura 7).

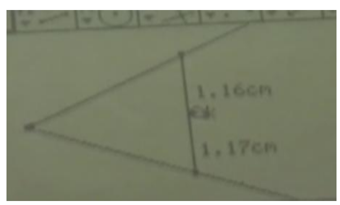


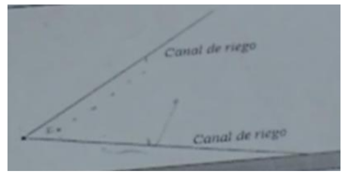

**Figura 7.** Representación de la situación en Cabri

Cristian, acorde con su idea inicial [260], cree que la mitad de la región es el punto medio de los segmentos con extremos a cada uno de los lados del ángulo. (Primer acercamiento geométrico a "mitad")

En un dialogo paralelo a la actividad de construcción de Cristian, Diana, guiada por el Profesor L, recuerda las condiciones que debe cumplir el segmento para poder determinar la *distancia de un punto a una recta* de acuerdo a la definición. En la intervención [336] el Profesor L le pide a Diana que determine si lo realizado por Cristian es correcto.

335. Diana: Que deben ser perpendiculares.
336. Profesor L: Que deben ser perpendiculares. Pregunto allá, [refiriéndose a la construcción en Cabri realizada por Cristian: en la calculadora] ese segmento… [es interrumpido por Diana]

337. Diana: ¡No! Ese no es perpendicular en nada.
338. Profesor L: ¿Por qué?
339. Diana: Yo digo que debería ir de acá a acá, [señala con su dedo en la calculadora el punto *K* y el rayo de la parte inferior de la pantalla] y ahí sí se formaría una perpendicular. Desde la matica hasta acá, [dibuja en la hoja de trabajo un segmento del punto al rayo, aparentemente perpendicular] y ahí se formaría una perpendicular.




[…]
341. Diana: Y después… […] Se mide.
[…]
343. Diana: y… después haríamos lo mismo acá, [dibuja en la hoja de trabajo un segmento de apariencia perpendicular del punto al otro rayo] pero, o sea, no sé…
[…]
345. Cristian: ¡Pues eso hice! [Cristian finalmente logra que las medidas que están en la pantalla sean iguales, sin embargo el punto *K*, que no pertenece al segmento, como se creía, fue arrastrado hasta el segmento].
346. Profesor L: Pero… esos segmentos, dice Diana, que ¿cómo son?
347. Diana: Perpendiculares.
348. Profesor L: A los rayos.
349. Diana: Así como lo hicimos ahí en el computador. [Se refiere a la retroalimentación].
[…]
351. Diana: Es que usted hizo un segmento, gordo.
352. Cristian: Si ya sé… pégueme pero pasito [en voz muy baja] o sea, ¿que tengo que borrar todo esto? Ah no pero el puntico no.

En las intervenciones [337, 339, 343] Diana manifiesta control epistémico al corregir la construcción de Cristian y sugerir cómo debe ser realizada en la calculadora según la definición de *distancia de un punto a una recta*. Por un lado exige la perpendicularidad del segmento a cada uno de los lados del ángulo. Luego propone, apoyada de papel y lápiz, una construcción que tiene en cuenta elementos de tal definición. Cristian [352], reconociendo y aceptando la propuesta de Diana, desiste de su construcción y se prepara para corregirla. Finalmente Cristian parece recordar la forma correcta de medir la distancia del punto *K* a cada uno de los rayos y lo hace mostrando habilidad en el manejo de la calculadora. Diana por su parte está atenta y supervisa la construcción que Cristian va haciendo en Cabri.

### 4.1.3. Episodio 3: Lo construido y lo explorado [377 – 477]

El literal *b*, de la Tarea No. 6 (Anexo D), pide que sea diligenciada la tabla de *Construcción y Exploración.* Este episodio presenta el análisis en cuanto a lo sucedido en relación a la primera parte de dicha tabla (ver Figura 8).

***b.*** Complete la tabla con la información solicitada.

| | ***¿Qué hacer?*** | ***¿Cómo hacerlo?*** |
|---|---|---|
| Construcción y Exploración | | |

**Figura 8.** Primera parte del literal b de la Tarea No. 6

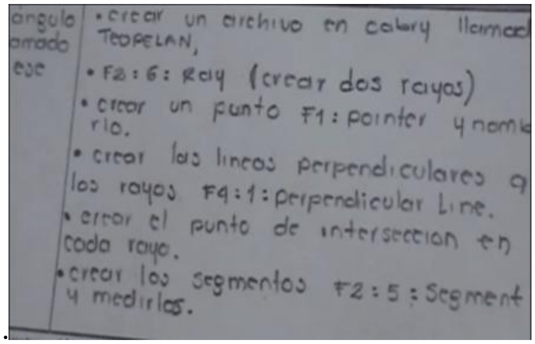
En la columna ***¿Qué hacer?*** los estudiantes escriben, con un lenguaje geométrico adecuado, los elementos que deben ser construidos para representar la situación. En la columna ***¿Cómo hacerlo?*** describen los pasos a seguir en Cabri, para lograr dicha representación. Este episodio está caracterizado por el interés de comunicar adecuadamente lo construido y explorado. Diana se preocupa por completar la columna ***¿Qué hacer?*** y asume el control de esta actividad.

378. Diana: [Lee] *¿Qué hacer? construcción y exploración*. Eeeeh, construir una cuña, construir un… ¿cómo se llama eso? Un ángulo…
379. Cristian: En forma de cuña.
380. Diana: No, un ángulo.
381. Cristian: Una cuña con forma de ángulo.
382. Diana: No, un ángulo. Construir un ángulo y… como colocar, ¿cómo se llamaba ese punto?
[…]
386. Diana: Y construir un punto dentro de ese ángulo, que sea, que tenga la misma medida de seg… ¿de una línea a la otra? No sé cómo explicarlo, la verdad es que ese gordo tampoco colabora.
387. Cristian: Ahí pues, crear un ángulo y… no. Primero crear un archivo en Cabri [risas] ay eso siempre sale, crear un archivo en Cabri
[…]
389. Cristian: Bueno, nada entonces... pues crear un ángulo y colocar un punto *K* cosa que… ¿esté en la mitad de los dos?
390. Diana: Ja, está peor que yo.

Podemos observar en el diálogo anterior que Diana asume control comunicativo. Evidencia de esto es su preocupación por el uso del lenguaje geométrico que debe ser usado [378, 380, 382]. Diana, a pesar de exigirle a Cristian [386] que le colabore en la redacción, no acepta su propuesta [390] insinuándole que él se expresa de una manera no geométrica, reafirmando el aspecto comunicativo al controlar el discurso de Cristian. Dicha propuesta de Cristian [389] está en sintonía con la idea de la intervención [260] del episodio dos en cuanto a que persiste representar los puntos en la "mitad".

Luego de completar la información en la primera columna de la tabla, los estudiantes, se disponen a trabajar en la segunda (***¿Cómo hacerlo?***). Diana sigue asumiendo el liderazgo de lo que se comunica en la tabla, aunque esta vez, sujeta a la construcción en Cabri previamente realizada por Cristian. En esta parte de la actividad el lenguaje utilizado es una combinación del geométrico y del propio del software.

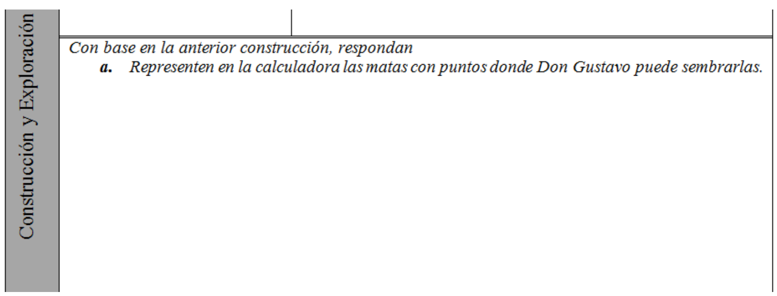
| | | |
|---|---|---|
| 403. | Diana: | Luego… crear un ángulo, es que no sé, espere, espere, espere. Un ángulo, ¿Cómo fue gordo? ¿Qué lo hizo? Con rayos… |
| 404. | Cristian: | Eh con dos rayos… |
| 405. | Diana: | Efe uno (**F1**)… efe dos (**F2**) diré, seis, rayo [mira en la calculadora para recordar, Dayana escribe]. Eeeh crear dos rayos, ¿no? |
| | | […] |
| 412. | Diana: | ¡Ah sí! crear el punto… y nombrarlo. |
| | | […] |
| 414. | Cristian: | Efe uno… |
| 415. | Diana: | Y nombrar un… Efe uno (**F1**), punto [lo sigue en la calculadora, Dayana escribe] |
| | | […] |
| 426. | Diana: | ¿Listo? Ahora… crear el segmento ¿no? |
| 427. | Cristian: | Crear las líneas perpendiculares a la… al rayo. |
| 428. | Diana: | A los rayos, sí. |
| 429. | Dayana: | ¿Escribo? |
| 430. | Diana: | Sí [Dayana escribe]. |
| | | […] |
| 454. | Diana: | ¿Crear las líneas perpendiculares? |
| | | […] |
| 456. | Diana: | Ya creamos las líneas perpendiculares, ahora… ¿usted qué fue lo que hizo?, ¿ocultarlas…? ¡Ocultarlas! |
| | | […] |
| 463. | Diana: | En cada, en cada… rayo [Dayana interrumpe diciendo "en cada canal"] ¡Rayo! |
| | | […] |
| 469. | Diana: | ¿Listo? Ahora, ¿qué hizo Gordo? ¡Ah! Crear un segmento, ¿no? |
| | | […] |
| 476. | Diana: | Y medirlos. [Dayana: escribe] ¡Ya! ¿No? |




Podemos apreciar, en las líneas de diálogo anterior, que Diana sigue liderando el control comunicativo hasta el final del episodio. Se preocupa por utilizar un lenguaje geométrico adecuado y coherente según la situación y la construcción realizada. Cristian apoya a Diana re-construyendo en Cabri la situación. Las intervenciones de Dayana siguen siendo muy escasas y poco valoradas.

### 4.1.4. Episodio 4: Representan matas con puntos [478- 521]

Este episodio esta guiado por el literal *a* de la Tabla *Construcción y Exploración* (Figura 9).


Construcción y Exploración

*Con base en la anterior construcción, respondan*

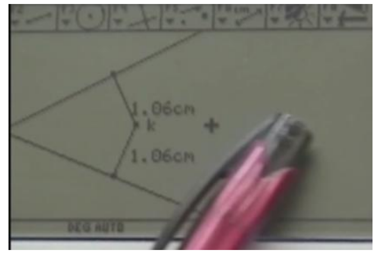
***a.*** *Representen en la calculadora las matas con puntos donde Don Gustavo puede sembrarlas.*

**Figura 9.** Literal *a* de la Tabla *Construcción y Exploración*

Teniendo en cuenta que los estudiantes ya habían construido un punto, el punto *K*, cuando representaron la situación (Episodio 2), el Profesor L pregunta si se pueden sembrar más matas que cumplan la condición dada, y sugiere que se ubique un punto más en la construcción ya hecha en Cabri.

En esta sección del trabajo es Cristian quien lidera las acciones.

| | | |
|---|---|---|
| 486. | Cristian: | Podemos sembrar hartas, acá una, acá una, en toda esta line así. [traza imaginariamente con un portaminas, en la pantalla, la bisectriz.] |




487. Profesor L: ¿Cómo así Cristian?
488. Cristian: Claro.
[…]
490. Cristian: Pues digamos que… si, mire digamos… pues no una línea necesariamente [simultáneamente habla Dayana]
491. Dayana: No porque es que si seguimos el mismo procedimiento de eso, no cabe.
[…]
493. Cristian: Pues no porque… no es por lo que quepa. Pero ahí se pueden crear, digamos, cada milimetr, cada… cada centímetro una bolsita así… tun, tun, tun, tun. [Señala nuevamente con la punta del portaminas una línea imaginaria del punto *K* al vértice del ángulo.]

Vemos en las intervenciones [486 y 493] que Cristian muestra coherencia con su idea inicial (Episodio 2, intervención [260]) y su propuesta de redacción (Episodio 3, intervención [389]). Esta vez evita referirse a la “mitad” y prefiere señalar lo que sería la bisectriz. En estas mismas intervenciones, Cristian expone una razón para explicar el porqué de su sugerencia. En la siguiente tabla se presenta los dos argumentos inductivos (generaliza) incompletos, ya que para ninguno de ellos se explicita la *regla* obtenida, utilizados por Cristian (ver Tabla 12).

**Tabla 12.** Argumentos inductivos incompletos

| | ***Datos*** | ***Regla que se obtiene*** | ***Resultado*** |
|---|---|---|---|
| **Primer argumento** | Varios ejemplos de puntos que cumplen la condición. Construcción del punto *K* y muestra varias posiciones [486] | Los puntos que equidistan están en una misma recta. No es explícita. | Los puntos de la recta. Imagen cinética[3] en [486] |
| **Segundo argumento** | Los puntos de la recta. Imagen cinética en [486] | La recta tiene infinitos puntos. No es explícita. | “hartas” matas. [486] |

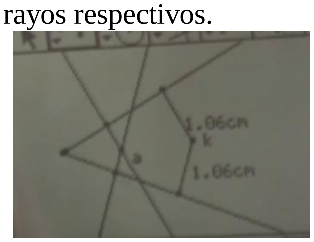
Dayana, por su parte, revela un *dilema* [491] al no lograr separar el mundo de la semirrealidad de la situación y el mundo teórico de la geometría, de aquí en adelante se llamara *dilema de los contextos*. Hemos caracterizado este dilema como la circunstancia,

[3] Las imágenes cinéticas, según Presmeg (1986), son aquellas imágenes creadas, transformadas o comunicadas mediante movimientos físicos, por ejemplo, con partes del cuerpo.

manifestada por alguno de los estudiantes, en la cual se evidencia un conflicto de elección entre el contexto de la semirrealidad en la que se plantea la situación y el contexto geométrico en el cual se debe desarrollar la tarea. Lo que se espera es que los estudiantes se desprendan rápidamente del contexto de la situación y se sumerjan en el de la geometría, realizando la respectiva matematización de situación.

Enseguida, Cristian, quien controla la calculadora, recrea la situación para otro punto $A$.

505. Cristian: Ahh, venga le colocamos… se llama *A*. [Cristian sigue con la construcción y traza una perpendicular a uno de los lados del ángulo y que pasa por *A*, y hace lo mismo para el otro lado. Traza los puntos de intersección de las perpendiculares con los rayos respectivos.




Oculta las rectas perpendiculares]. Y ahora hago los segmentos… [sigue manipulando la calculadora. Traza los segmentos perpendiculares de *A* a cada uno de los rayos] … ahora sí los mido… [las medidas iniciales apenas realiza la medición son; 0,52cm y 0,44cm. Arrastra el punto *A* hasta lograr que las medidas sean; 0,51cm y 0,54cm; no logra la igualdad de las medidas, por limitaciones del software] ay no, pailas. [Diana y Cristian se comunican en voz baja.]

[…]

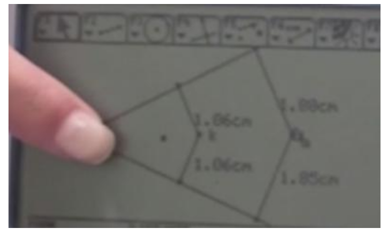
511. Cristian: Tiene que tener la misma distancia, ¿no?

[…]

515. Cristian: [Cristian piensa en voz alta mientras arrastra el punto *A* intentando guiarlo por una línea imaginada, la bisectriz, hacia el vértice del ángulo.] Ah, pero es que se corre todo. [Parece referirse a la dificultad de mantener las medidas aproximadamente iguales] Ahh, ya entendí. [arrastra el punto hacia la ubicación inicial y lo intenta de nuevo] Dos, cuatro… [En coro]… Dos [refiriéndose a la diferencia entre las medidas que se van mostrando mientras que arrastra el punto *A*].

[…]

517. Cristian: No. Ahí hay dos [mientras arrastra el punto *A*. De pronto arrastra el punto de la zona en que venía trabajando a una ubicación más lejana del vértice, tal vez con la idea de encontrar más fácilmente la igualdad de las medidas, pero, se encuentra con el mismo inconveniente.].



[…]

521. Cristian: Toca conseguir la aproximación más aproximada.

Se destaca el liderazgo de Cristian durante toda esta actividad. Es él quien asume totalmente el control de la calculadora y quien realiza nuevamente la construcción que ubica al punto *A* con la condición pedida en la situación. La actuación de Cristian, referenciada en las intervenciones [515 y 517], muestra nuevamente la idea expuesta desde el Episodio 2 [260] respecto a la bisectriz.

### 4.1.5. Episodio 5: En la búsqueda de "infinitos" [522-595]

La pregunta del literal *b* de la Tabla *Construcción y Exploración* (Figura 10), aunque pudiera parecer sencilla de responder, generó varios conflictos en relación al contexto. Tales conflictos finalmente tienen su desenlace gracias a la intervención del Profesor L.

| | |
|---|---|
| Construcción y Exploración | *Con base en la anterior construcción, respondan*<br><br>***b.*** *¿Cuántas de éstas puede sembrar?* |

**Figura 10.** Literal *b* de la Tabla *Construcción y Exploración*

Cristian, según lo que expresa en las siguientes intervenciones, parece tener clara la respuesta a la pregunta.

522. Diana: ¡Bueno! [Lee la hoja de trabajo] *b. ¿Cuántas de estas puede sembrar?*
523. Diana y Cristian: ¡Muchas! [Dayana murmura.]
524. Diana: Pero nosotros pudimos sembrar dos.
525. Cristian: ¡No!, quisimos sembrar dos.
526. Diana: ¿Se pueden sembrar más?
527. Cristian: Claro.
528. Dayana: Siembre otra. [Risas]
529. Cristian: Siémbrela usted, haga todo, todo lo que yo hice. [Tal vez reacciona con

cierta agresividad por la dificultad que conllevó hacer la construcción.]

En el Episodio 4 destacamos un argumento de Cristian quien explica por qué se pueden ubicar “hartas matas” con la condición dada. Además de señalar con el portaminas varias posibles ubicaciones, Cristián también hace la representación de un punto más (el punto $A$) en Cabri. A pesar de estos tres tipos explicaciones distintas, Diana y Dayana [524, 526 y 528] aún no están convencidas en cuanto a la cantidad de matas que pueden ser sembradas. Estas tres acciones no son suficientes para que las niñas hagan inducción, es decir, aceptan para el punto $K$, aceptan para el punto $A$ pero no logran generalizar para más puntos. A Cristian no se le ocurre la acción de arrastrar el punto $A$ para convencer a sus compañeras, a pesar de haberlo hecho para ubicar el punto. Este hecho muestra que no está completamente instrumentalizado el artefacto. Cristian [525 y 527], luego de la intervención de Diana, hace control epistémico al corregirle su apreciación respecto a la cantidad de puntos ubicados en la construcción (matas sembradas).

Dada la situación descrita anteriormente, el Profesor L le pide a Cristian que le “muestre” a Dayana dónde pueden ir más matas.

539. Cristian: Pues, o sea, aquí puede ir otra, acá puede ir otra, acá puede ir otra, acá puede ir otra, acá puede ir otra,… [Termina con un murmullo queriendo decir muchas matas, al mismo tiempo que señala con la punta del portaminas las posibles ubicaciones de puntos todos ellos en la bisectriz.]


Cristian refleja nuevamente su convicción (reportada en los episodios anteriores) al hacer un señalamiento continuo y rectilíneo de las posibles posiciones de las matas. Señala la bisectriz, que aún no está trazada, como aquella que cumple la condición pedida para cualquiera de sus puntos.

Sin embargo nuevamente se presenta un conflicto en relación al contexto del problema y el contexto en el que deben dar su solución. Las siguientes intervenciones reflejan tal conflicto.

542. Diana: ¿Y qué vamos a escribir? [Lee] *¿Cuántas de éstas puede sembrar?*
543. Dayana: ¡Pues muchas!
544. Diana: Muchas
545. Cristian: Muchas [y lo repiten]
546. Diana: Pues depende, si es de la vida real, en la vida real… [Es interrumpida]
547. Cristian: Pues depende del tamaño.
548. Dayana: …no también depende del costo… [Ríe. Cristian respalda]
549. Cristian: Del presupuesto, aja.
550. Dayana: Y de que tan grande sea eso.
551. Diana: Si es en la vida real, se pueden crear muchas, pero si es en Cabri…unas tres por ahí. [Dayana ríe]

[…]

558. Diana: Depende de cuanta sea la longitud del ángulo…
559. Profesor L: ¿Seguro? [Risas] mmm, no sé…[Cristian interrumpe]
560. Cristian: No porque el ángulo se puede extender.

A pesar de este conflicto, Cristian [560] sigue manifestando control epistémico, esta vez en relación a la conceptualización de ángulo, entendiendo que los lados de un ángulo se extienden infinitamente. Diana sigue mostrando dificultad con respecto a ese asunto.

Este *dilema de contextos* se sigue manifestando en algunas intervenciones más hasta que finalmente el Profesor L: les pide que se enfoquen solo en el contexto geométrico.

577. Profesor L: Pero si por ejemplo lo tomamos, ya ampliándonos un poco del contexto de Don Gustavo, y lo ponemos ya en términos geométricos, ¿cuántas matas podemos…? Bueno, perdón, ¿cuántos puntos podemos… ubicar?
578. Cristian: Estos mire. [hace el símbolo de infinito en una hoja (∞)]
579. Profesor L: ¿y eso cómo… eso qué es?
580. Cristian: Infinitos. [Con un poco de duda]

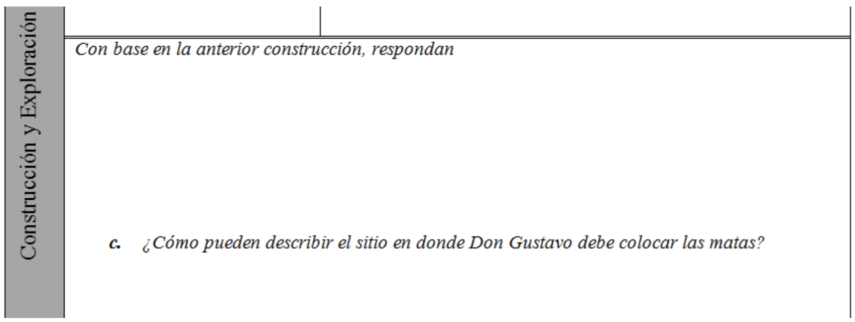
[…]

586. Dayana Ole. ¿Varias o muchas? [Preguntándole a Diana en relación a la pregunta *b*.]
587. Diana: Mmm, varias matas… muchas matas. [El Profesor L sigue el dialogo con Cristian pero con un audio muy bajo ]
588. Cristian: ¡Infinitas! [Corrigiendo a Diana y Dayana]
589. Dayana: ¿Infinitas?
590. Cristian: Si, infinitas maticas hablando de términos geométricos.

Luego de lograr superar el asunto del contexto, Cristian [580 y 590] finalmente refleja el aspecto comunicativo del comportamiento racional al utilizar el término adecuado para indicar la cantidad de puntos que pueden cumplir la condición dada en el contexto geométrico sugerido y al rechazar los términos que usan sus compañeras [588].

### 4.1.6. Episodio 6: Diana y Cristian se complementan para responder [596–685]

En este episodio, la pregunta del literal *c* de la Tabla *Construcción y Exploración* (Figura 11), generó, inicialmente, el mismo conflicto relacionado con el contexto del problema reportado en el episodio anterior (*dilema de los contextos*). Nuevamente el Profesor L tuvo que intervenir para encausar la actividad. Por primera vez se menciona la bisectriz. Por sugerencia de Cristian se crea, en Cabri, la bisectriz para verificar y comunicar.


Construcción y Exploración

*Con base en la anterior construcción, respondan*

***c.*** *¿Cómo pueden describir el sitio en donde Don Gustavo debe colocar las matas?*

**Figura 11.** Literal *c* de la Tabla *Construcción y Exploración*

A partir de la intervención [596] hasta la intervención [617] los estudiantes utilizan palabras como; "algo pequeño", "amplio", "excelente para la agrícola" y "grande" para describir el sitio en el que deben ser colocadas las matas. El Profesor L hace un primer intento por enfocar la actividad en el contexto geométrico.

| | | |
|---|---|---|
| 618. | Profesor L: | ¿Grande? Pero… ¿Qué condiciones es la que se debe cumplir para que esas matas se puedan sembrar? |
| 619. | Diana: | Deben tener la misma distancia. |
| 620. | Profesor L: | Si… |
| 621. | Diana: | Entonces un… un terreno [Es interrumpida por Cristian] |
| 622. | Cristian: | ¿En línea recta? [Dayana ríe] |
| 623. | Profesor L: | ¿En línea recta…? [Hablan simultáneamente] |
| 624. | Cristian: | En línea perpendicular. [le sigue la pregunta al Profesor L]. |
| 625. | Profesor L: | ¿…perpendicular…? |
| 626. | Dayana: | Debe ser un terreno llano. [En un segundo plano de la conversación]. |
| 627. | Profesor L: | Pues el terreno es llano. [Reconociendo la intervención de Dayana la cual ríe.] O sea, okey, olvidémonos un poco de la situación… |
| 628. | Cristian: | Ay Dayana, en términos geométricos. |

Las expresiones utilizadas, después de la sugerencia del Profesor L [618], aunque aún no describen específicamente en dónde pueden estar ubicados los puntos, ya son propias del lenguaje geométrico. Se evidencia el aspecto comunicativo del comportamiento racional cuando Cristian le exige a Dayana que hable en términos geométricos [628].

Nuevamente el Profesor L invita a los estudiantes a recordar la condición que deben cumplir los puntos según la situación planteada. Y de nuevo replantea la pregunta.

| | | |
|---|---|---|
| 633. | Profesor L: | Entonces, […] ¿cómo le podrían describir a alguien donde localizar esos puntos? |
| 634. | Diana: | Mas o menos en la mitad de… de… del ángulo |
| 635. | Profesor L: | […] En la mitad del ángulo, ¿Cómo así? |
| 636. | Cristian: | [Dayana ríe] Pues dividir el ángulo en dos. |
| 637. | Profesor L: | Aja. |
| 638. | Cristian: | Y determinar…, o sea, la mitad del ángulo, y ahí en toda la mitad, pues, va construyendo la matica… [Profesor L interrumpe] |
| 639. | Profesor L: | Y en toda la mitad… ¿eso qué es? |
| 640. | Cristian: | Pues toca medir… |
| 641. | Diana: | Debe tener un nombre. Se llama "Bisectriz". |

Diana [634] retoma la idea que Cristian ha expuesto y desarrollado desde el inicio de la Tarea No. 6 (puntos en la mitad) alejándose momentáneamente de su propuesta (puntos que equidistan de cada uno de los lados del ángulo). Cristian [636], por primera vez, expresa verbalmente su idea, plantea una característica más para el conjunto de puntos de su idea original, la de dividir el ángulo en dos, dando un gran paso hacia la bisectriz. Se puede evidenciar el aspecto comunicativo cuando Diana [641], finalmente, y por primera vez en el desarrollo de la tarea, aporta el nombre adecuado al conjunto de puntos de la propuesta que Cristian ha venido desarrollando, ***bisectriz***.

Cristian propone construir la bisectriz en Cabri.

| | | |
|---|---|---|
| 645. | Cristian: | Ah pues se puede crear una bisectriz. [Un breve silencio, tal vez esperando la aceptación del Profesor L] |
| 646. | Profesor L: | Y si…, o sea, ¿y para qué crear la bisectriz? |
| | | […] |
| 648. | Cristian: | [Respondiendo la pregunta del Profesor L] Pues pa decirle a Don Gustavo que como haga eso. [El Profesor L hace un gesto de aceptación] ¡Ah sí! Creo una bisectriz. |
| | | […] |
| 664. | Cristian: | […] Ahora sí. Es que pa crear con punticos es una joda. [Sigue manipulando la calculadora] Ya. [Traza con Cabri la bisectriz del ángulo construido] |
| 665. | Profesor L: | Y que ocurrió ahí Diana… |
| 666. | Diana: | Aaah, ¿si ve?, sss. |
| 667. | Cristian: | Si… ahí está. [Murmullos de Diana y Dayana] |

Podemos advertir, en las anteriores intervenciones, que Cristian [648] muestra el aspecto teleológico de su comportamiento, al proponer una representación gráfica como respuesta a la pregunta del literal *c*. Se resalta el hecho de que Cristian [664] reconoce el artefacto como medio de comunicación y validación [667] de su propia idea. Tal acto también convence a Diana [666].

Después de haber realizado la construcción, el Profesor L nuevamente plantea la misma pregunta de la intervención [633] animando a los estudiantes a que finalmente redacten la respuesta utilizando lenguaje geométrico.

| | | |
|---|---|---|
| 674. | Diana: | Donde dé la bisectriz del ángulo. |
| 675. | Cristian: | [Complementando y de acuerdo con Diana:, casi al tiempo] En toda la línea bisectora. |
| 676. | Diana: | [Completa su idea] En toda esa parte… En toda esa parte tengo que escribir puntos. |
| 677. | Cristian: | Si. Puede construir maticas |
| 678. | Diana: | Aja… Escriba [Dayana se dispone a escribir] |
| 679. | Dayana: | ¿En toda qué? |
| 680. | Cristian: | En toda la línea bisectriz. |
| 681. | Diana: | Del ángulo. |
| 682. | Cristian: | Del ángulo. [Dayana escribe. Cristian y Diana conversan en voz muy baja] |
| 683. | Dayana: | [Mientras escribe] ¿De la cuña? |
| 684. | Diana: | Noo, del ángulo. [Risas. Comentarios] |
| 685. | Dayana: | Ya. [Termina de escribir la respuesta de la pregunta c. y suelta el lápiz sobre la hoja] |

Al fin Cristian y Diana logran complementarse para redactar la respuesta [674, 675, 676, 680 y 681]. Dayana [683], alejada conceptualmente un poco de la actividad de sus compañeros, muestra no haber superado el dilema de los contextos. Se puede percibir el aspecto comunicativo en las intervenciones [681 y 684] cuando Diana complementa la redacción de Cristian señalando la necesidad de especificar que se trata de la bisectriz “del ángulo”. Además reafirma su control comunicativo y corregir de inmediato a Dayana.

### 4.1.7. Episodio 7: En busca de la conjetura [686-850]

Este episodio final está relacionado con la actividad desarrollada por los estudiantes en torno a la última parte de la Tarea No. 6, *Conjeturación* donde se exige, para la conjetura, un enunciado en forma condicional. Se aporta, además, una pista que puede inducir la redacción del antecedente y del consecuente (Figura 12).

| | |
|---|---|
| Conjeturación | *En términos de geometría, ¿qué pueden concluir?* Escriban su conclusión en la forma de condicional: *Si* **(lo que construimos)** *entonces* **(lo que descubrimos)**. |

**Figura 12.** Parte final de la Tarea No. 6

A pesar de la estructura lingüística propuesta para reportar la conjetura, los estudiantes no logran redactarla hasta que el Profesor L sugiere que se guíen por lo que escribieron en la primera parte de la tabla (Episodio 3). Los estudiantes notan la necesidad de dar nombres a los puntos en la representación para poder redactar la conjetura. El episodio se cierra cuando finalmente logran proponer y redactar una conjetura con la estructura solicitada.

En un primer momento Diana asume el liderazgo de esta parte de la tarea, intentando involucrar a Cristian y a Dayana en esta actividad. Diana le dicta a Dayana.

| | | |
|---|---|---|
| 690. | Dayana: | [Escribe, *si*] Ya. |
| 691. | Diana: | Si… [Le pregunta Cristian] ¿Qué fue lo que construyo usted? ¿un ángulo…? |
| 692. | Cristian: | Bisectriz, ¡no! Bisector [Diana lo interrumpe] |
| 693. | Diana: | No perece. Debemos utilizar, ee, términos geométricos. |
| 694. | Cristian: | Que más geométrico que un ángulo bisector. [Dayana ríe]. |
| 695. | Diana: | [Mientras, piensa en voz alta] Un ángulo… ángulo… ¿Y cómo se llamaba? |
| 696. | Cristian: | Bisector. |
| 697. | Diana: | ¡Uy si! [Como poniendo en duda la respuesta de Cristian] |

En estas líneas podemos apreciar que Diana asume el control comunicativo, utilizando y exigiendo que se utilice terminología propia de la geometría. No acepta la palabra *bisector* que Cristian insiste en utilizar [697].

| | | |
|---|---|---|
| 720. | Diana: | [Lee en la hoja de trabajo, que se ha venido diligenciando, en la columna *¿Qué hacer?*]. *Construir un ángulo y un punto llamado K dentro de ese ángulo.* ¡Un ángulo! |
| | | […] |
| 732. | Diana: | Descubrimos que… que podíamos… [Dayana habla intentando intervenir y ríe] construir… que podíamos colocar mucho más puntos, muchos más puntos colocando ¿la bisectriz? ¡Si! |
| | | […] |
| 740. | Dayana: | [Lee] *Si. Lo que construimos*… fue [Diana y Cristian hablan entre ellos] ¿Es que hago eso? |
| 741. | Coro | No. [Murmullos] |
| 742. | Diana: | Haga un ángulo así, haga un ángulo así. [Se refiere al símbolo de ángulo (∠)] |
| | | […] |

| | | |
|---|---|---|
| 748. | Diana: | Aja. ¡Haga! [Le dice a Dayana la cual escribe] ¿Qué hace? [Le dice a Dayana al ver que va a escribir algo diferente a lo que se dijo]. |
| 749. | Dayana: | Yo ya iba a escribir disque, lo que construimos. [y borra] |
| 750. | Diana: | Pero un ángulo llamado ¿qué? Venga, préstemela [Se refiere a la calculadora]. |

Se resalta, nuevamente, el liderazgo de Diana en lo concerniente al control comunicativo. En las intervenciones [732, 742 y 750], Diana se preocupa por utilizar el lenguaje y la notación geométrica adecuada; en la intervención [748], Diana controla la redacción de Dayana.

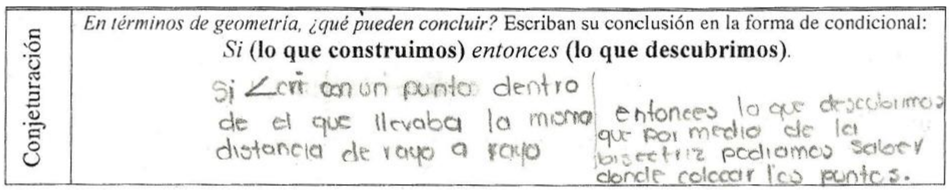
A partir de la intervención [751] hasta la intervención [780] los estudiantes buscan solucionar el inconveniente de la falta de nombres, planteado por Diana [750], que impide continuar con la redacción. Cristian, haciendo uso de la calculadora, decide ubicar un punto a cada uno de los lados del ángulo, nombrarlos con las letras $C$ e $I$, llama el vértice $R$, de tal manera que el ángulo queda nombrado como $CRI$. Diana retoma el dictado.

| | | |
|---|---|---|
| 781. | Diana: | Ángulo $CRI$ |
| 782. | Dayana: | ¿$CRI$? |
| | | […] |
| 791. | Diana: | Vea Gordo es que usted nunca le… no le puso nombre a esos punticos… [El Profesor L interviene.] |
| | | […] |
| 801. | Cristian: | Creamos segmentos para medir la distancia. |
| 802. | Diana: | ¡Pero geométricamente! |
| | | […] |
| 805. | Cristian: | Por eso. Que más geométrico que ambos segmentos para medir distancia. |
| 806. | Diana: | Pero ¿cómo se llaman los segmentos? No ve que usted no les puso nombre. [Mientras tanto Dayana borra la palabra *entonces* de la conjetura que están intentando proponer] |
| | | […] |
| 817. | Diana: | [A manera de dictado] Que tenga la misma distancia del punto a cada uno de sus rayos. A cada uno de sus rayos. |
| | | […] |
| 829. | Diana: | Entonces… lo que descubrimos… ¿Qué fue a ver, a ver? Lo que descubrimos fueeee… donde… espere, espere… [Comenta con Cristian: en voz muy baja y poco audible] Lo que descubrimos fue donde colocar los puntos, ¿no? [Mientras tanto Dayana escribe *"…entonces lo que descubrimos"*]. Redactemos bien eso. |
| | | […] |
| 831. | Diana: | Aaaa que, que, que por medio de… que por toda la bisectriz se podían colocar los puntos. |
| 832. | Dayana: | Que por medio de la bisectriz podíamos saber en dónde podíamos ubicar los puntos |

833. Cristian: Ah sí. Por medio de la bisectriz del ángulo. [Dayana: escribe …*que por medio de la bisectriz* ]

En las intervenciones de Diana se puede observar su preocupación por la necesidad de nombrar los puntos reconociendo el uso del lenguaje geométrico adecuado para la redacción de la conjetura. En la intervención [832], Dayana: por fin muestra un aporte relacionado con el aspecto comunicativo reemplazando la palabra "colocar" por la palabra "ubicar" que es de más uso en el lenguaje geométrico.

Finalmente la conjetura propuesta queda redactada de la siguiente manera, Figura 13.



| Conjeturación | *En términos de geometría, ¿qué pueden concluir?* Escriban su conclusión en la forma de condicional: *Si* **(lo que construimos)** *entonces* **(lo que descubrimos)**. |
|---|---|
| | Si ∠cri con un punto dentro de el que llevaba la misma distancia de rayo a rayo / entonces lo que descubrimos que por medio de la bisectriz podiamos saber donde colocar los puntos. |

**Figura 13.** Conjetura formulada por el grupo de estudiantes

### 4.1.8. Síntesis correspondiente al análisis del comportamiento racional y argumental de los estudiantes en el proceso de conjeturación

En este apartado presentamos, en la Tabla 13, una síntesis del comportamiento racional y argumental de los estudiantes durante el proceso de conjeturación. Para lograr mayor claridad en la correspondiente lectura, se debe tener en cuenta que: los números escritos en paréntesis cuadrados corresponden a las intervenciones de los estudiantes según la transcripción de este proceso de la actividad demostrativa; el número de la intervención acompañado de un asterisco (*) indica que se manifestó, de alguna manera, el *dilema de los contextos*; para los tipos de argumentos deductivos y abductivos, las letras D, G y C indican el *dato*, la *garantía* y la *conclusión*, respectivamente; en los argumentos inductivos, las letras D, R y G indican los diferentes datos particulares, el resultado que es producto de dichos datos y la regla general obtenida, respectivamente; y los subíndices escritos de la forma $(a, b)$ en la columna Tipo de Argumento indican el número del episodio y el número del argumento respectivamente formulado en dicho episodio.

**Tabla 13.** Síntesis correspondiente al análisis del comportamiento racional y argumental de los estudiantes en el proceso de conjeturación

| **Episodio** | **Sujeto (s)** | **Comportamiento Racional** | | | **Tipo de Argumento** | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | | | | *Deductivo* | | *Abductivo* | |
| | | *Epistémico* | *Comunicativo* | *Teleológico* | *Completo* | *Incompleto* | *Completo* | *Incompleto* |
| **1** | Diana | [49] | | | D-G-C$_{(1,1)}$: [49] | | | |
| **2** | Cristian | [301] | | [260], [264], [266], [268] | | D$_{(2,1)}$: [166] C$_{(2,1)}$: [168] | | |
| | Diana | [173], [337], [339*****], [341], [343], [345], [349], [351] | | | | | | |
| | Dayana | [175] | | | | | | |
| **3** | Diana | | [378*****], [380], [382], [390] | | | | | |
| **4** | Cristian | | | | *Inductivo* | | | |
| | | | | | | D-R$_{(4,1)}$: [486*****] | | |
| **5** | Cristian | [525], [527], [560] | [580], [590] | | | | | |
| **6** | Cristian | | [628] | [648] | | | | |
| | Diana | | [641], [681], [684] | | | | | |
| **7** | Diana | | [691], [693], [695], [697], [732], [742], [750] | | | | | |

A continuación, en las Figuras 14 y 15, representamos la anterior síntesis mediante diagramas de barras para indicar la frecuencia de las intervenciones de los estudiantes que están relacionadas, primero, con los tres aspectos del comportamiento racional y segundo, con el tipo de argumentos que ellos formularon.

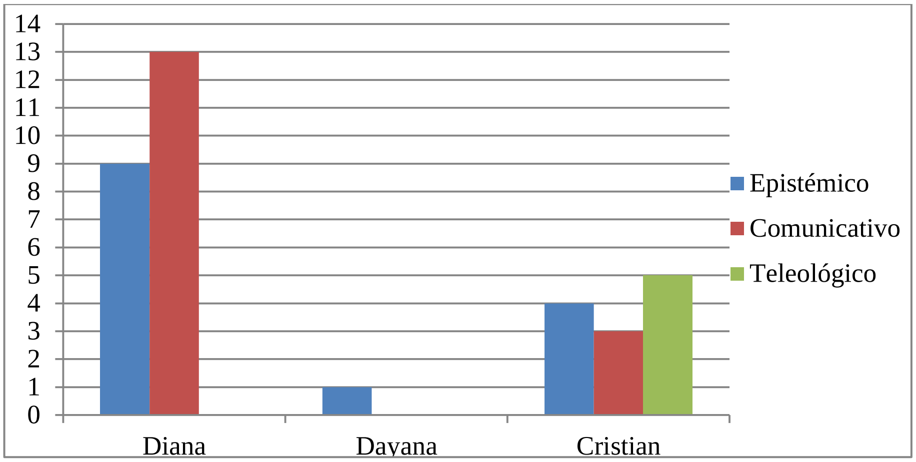



**Figura 14.** Comportamiento racional de los estudiantes durante el proceso de conjeturación

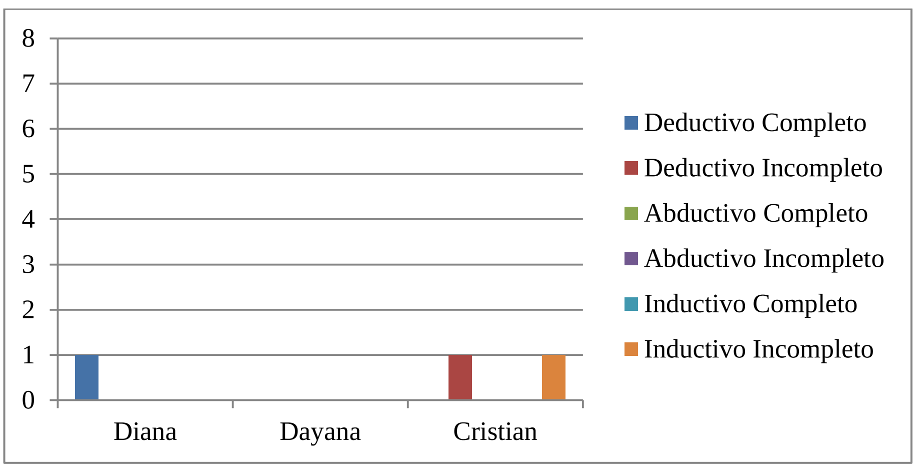



**Figura 15.** Tipos de argumentos que los estudiantes formularon en el proceso de conjeturación

## 4.2. ANÁLISIS DEL COMPORTAMIENTO RACIONAL Y ARGUMENTAL DE LOS ESTUDIANTES EN EL PROCESO DE JUSTIFICACIÓN

En el análisis del comportamiento racional y argumental de los estudiantes durante el proceso de justificación, conformado por 14 episodios, logramos establecer dos instantes para que ellos justificaran la conjetura con el uso del esquema – deducción. Recordemos que en este esquema se escribe el *dato*, la *garantía* que proviene del sistema teórico local conformado y la *conclusión* de un argumento en las columnas *Qué sé*, *Qué uso* y *Qué concluyo*, respectivamente. En un primer instante, del Episodio 1 al Episodio 7, los estudiantes formularon tres argumentos completos ligados con la información suministrada en la conjetura pero no encadenados para ser los pasos de la respectiva justificación. En un segundo instante, del Episodio 8 al Episodio 14, un integrante del grupo propone escoger uno de los tres argumentos completos para determinar el primer paso de la justificación; luego, plantean los demás pasos para formular la justificación. En el Anexo H se encuentra la justificación que lograron hacer; el número uno escrito al lado del esquema – deducción indica el primer paso de la justificación. Al finalizar el análisis del Episodio 14, presentamos una síntesis del comportamiento racional y argumental de los estudiantes durante este proceso de la actividad demostrativa.

### 4.2.1. Episodio 1: Reconstrucción de acciones realizadas para desarrollar la Tarea No. 6 "TeoPELAn" $_{[1 – 42]}$

Previo al desarrollo de la Tarea No. 7, se realiza la retroalimentación de la Tarea No. 6 desarrollada el día anterior en torno a la conjetura formulada por el grupo de estudiantes. Para ello, el Profesor L recuerda la situación planteada en esta tarea, muestra en Cabri la correspondiente representación y hace algunas preguntas. Inicialmente, el Profesor L pregunta por el objeto geométrico a que hace referencia la situación y ellos responden que hay un ángulo. Después, indaga sobre la intención de dicha tarea y Diana responde: "Sembrar matas para que quedaran de la misma medida de… la misma distancia a las canales". Geométricamente esto se traduce a localizar puntos que tienen igual distancia a cada uno de los lados del ángulo. Luego, el Profesor L le solicita a Cristian que realice en Cabri la construcción de dicha situación y mencione qué hicieron y cómo lo hicieron. Haciendo referencia a la construcción, el Profesor L revisa con los estudiantes las respuestas a cada una de las preguntas de la tarea.

| | | |
|---|---|---|
| 9. | Cristian: | […] primero hago el punto que es supuestamente la mata. [Localiza un punto en el interior del ángulo.] Y luego, se supone que, digamos, queremos medir las dos distancias, pues la forma más sencilla es con la perpendicular. Entonces, hago la perpendicular con la mata, la supuesta |

mata y el rayo, o sea la canal. Luego, en la intersección de… acá, en este punto coloco el punto de intersección. [Marca con un punto la intersección entre el rayo y la recta perpendicular a éste que pasa por el punto que representa la mata.] Y luego desaparezco esta línea. [Oculta la recta perpendicular.] Luego, hago un segmento, que lo voy a utilizar ahorita, [Traza un segmento con extremos el punto que representa la mata y el punto de intersección antes determinado.] y hago lo mismo pero con el otro rayo o canal […] [Repite la construcción mencionada.] Y los mido para comprobar que la mata [punto] esté a la misma distancia que los dos rayos. [Halla la longitud de cada uno de los segmentos construidos anteriormente. Uno de ellos mide 1,29 cm y el otro 1,14 cm]. Entonces, no está [a la misma distancia]; entonces toca moverlo un poquito. [Arrastra el punto que representa la mata hasta que tuviera igual distancia a cada uno de los lados del ángulo]. Ahí está.

| | | |
|---|---|---|
| 10. | Profesor L: | […] ¿cuántas matas podía sembrar Don Gustavo? […] |
| 11. | Cristian: | Infinitas. |
| 12. | Profesor L: | […] Volviendo otra vez a Cabri, ¿cómo pueden mostrar que son infinitas? |
| 13. | Diana: | Porque creamos una bisectriz y encima de esa bisectriz podía sembrar las matas. Entonces. Si el terreno es grande entonces digamos pues muchas, acá podemos [Señala en la pantalla de Cabri, el punto que localizó Cristian y que es equidistante a los lados del ángulo.] |

En la intervención [9], Cristian describe la construcción hecha para el desarrollo de la Tarea No. 6. cuando él dice “queremos medir las dos distancias, pues la forma más sencilla es con la perpendicular”, se hace visible el aspecto teleológico pues hace referencia al plan que le permitió al grupo representar en Cabri la situación y formular la conjetura. En este caso, el comportamiento de Cristian no refleja el aspecto epistémico porque en la descripción de dicha construcción no hace referencia a la definición de distancia de un punto a una recta, lo cual se corrobora en el Episodio 3. En la respuesta de Diana para mostrar que son infinitas las matas que se pueden sembrar a igual distancia de las canales o, en términos geométricos, que son infinitos los puntos equidistantes a los lados del ángulo, hay un argumento deductivo incompleto en el que se identificamos como *datos* que el terreno es grande y como *conclusión* que hay muchas matas o sea infinitos puntos. Al parecer Diana está dejando de lado el contexto físico de la tarea porque acepta que el terreno no tiene fronteras, al asignar propiedades geométricas al terreno donde se van a sembrar las matas. Este argumento es incompleto porque Diana no menciona una *garantía* que relacione los *datos* con la *conclusión*, es decir, no menciona que la bisectriz tiene infinitos puntos.

### 4.2.2. Episodio 2: Comienzan a justificar la conjetura [43 – 63]

Enseguida, el Profesor L empieza a leer la conjetura de los estudiantes: “*Si* el ángulo $cri$ con un punto dentro de él $[K]$ que llevaba la misma distancia de rayo a rayo *entonces* lo que descubrimos que por medio de la bisectriz podíamos saber dónde colocar los puntos”, e indica que hay un error de escritura al nombrar los puntos que pertenecen al ángulo. Cristian reconoce que los puntos se deben nombrar con letras mayúsculas. Luego, el Profesor L arrastra el punto $K$ sobre la bisectriz del $\angle CRI$ y pregunta a los estudiantes qué sucede. Cristian dice que la distancia del punto a cada uno de los lados del ángulo se sigue manteniendo igual o aproximadamente igual. En seguida, el Profesor L comunica a los estudiantes que la conjetura que formularon es muy cercana a la conjetura esperada. Para ilustrar esto, él presenta ambas conjeturas escritas en el computador y compara tanto el antecedente como el consecuente de la conjetura esperada (“*Si la distancia de un punto a cada lado de un ángulo es igual entonces el punto está sobre la bisectriz del ángulo*”), con las partes respectivas de la conjetura formulada. Después, el Profesor L entrega una fotocopia que contiene el sistema teórico local conformado por los hechos geométricos y las definiciones que se establecieron durante el desarrollo de la secuencia didáctica, y les indica que de dicho listado deberán sacar los elementos necesarios para justificar la conjetura esperada con el uso del esquema – deducción.

Sin recurrir a la construcción hecha en Cabri ni realizar una representación con lápiz y papel, los estudiantes mantienen una conversación en la que identifican qué saben (antecedente del condicional) y qué deben justificar (consecuente del condicional).

| | | |
|---|---|---|
| 43. | Diana: | Conjetura: [Empieza a leer la conjetura que el grupo va a justificar.] Si la distancia de un punto a cada lado de un ángulo es igual entonces el punto está sobre la bisectriz del ángulo. ¿Qué sé? |
| 44. | Cristian: | Que la distancia del punto a cada lado es igual. |
| 45. | Diana: | ¿Por qué? |
| 46. | Cristian: | Pues, eso es lo que sé. |
| 47. | Diana: | ¿Sí? |
| 48. | Cristian: | Entonces, ¿cómo se escribe? |
| 49. | Diana: | La distancia a cada lado de un ángulo es igual. |
| 50. | Cristian: | Eso es lo que sé. |
| 51. | Diana: | Por eso. |
| 52. | Cristian: | ¿Qué uso? |
| 53. | | [Cristian y Diana buscan la definición de distancia de un punto a una recta |

| | | |
|---|---|---|
| – 58. | | en el listado de hechos geométricos y definiciones, para usarla pues saben que la distancia del punto a cada lado del ángulo es igual.] |
| 59. | Diana: | No, porque… sí porque vea. Si acá dice: [Lee el antecedente de la conjetura.] La distancia de un punto a cada lado de un ángulo es igual; y acá dice: [Lee la definición de distancia de un punto a una recta.] La distancia de un punto $P$ a una recta $m$ es la longitud del segmento perpendicular desde $P$ hasta $m$… O sea, tiene algo de parecido, ¿sí? Sí porque no hay nada más así parecido. |
| 60. | Cristian: | [Parece señalarle a Diana la definición de bisectriz de un ángulo.] |
| 61. | Diana: | Ah, la bisectriz de ángulo. [Lee.] Es un rayo con extremo en el vértice del ángulo y demás puntos en el interior del ángulo, tal que el rayo con los lados del ángulo forman dos ángulos congruentes. |
| 62. | Cristian: | No. |
| 63. | Diana: | No. Efectivamente, usamos la definición de distancia de un punto a una recta.<br>[Durante algunos minutos los estudiantes silenciosamente miraban al Profesor L, quizá esperando alguna señal de aprobación.] |

El diálogo inicial entre Cristian y Diana muestra un argumento deductivo incompleto. Como *datos* toman lo que establece la hipótesis de la conjetura: la distancia del punto a cada lado de un ángulo es igual. En [59] Diana establece como *garantía* la definición de distancia de un punto a una recta justificando su decisión porque tanto la conjetura como la definición tienen el mismo antecedente. Pero en [60], Cristian propone como *garantía* la definición de bisectriz de un ángulo, la cual posteriormente ambos rechazan. Es un argumento deductivo incompleto porque no establecen la *conclusión*. Aquí, se evidencia el aspecto epistémico del comportamiento racional de los estudiantes porque quieren usar elementos teóricos para elaborar el primer argumento relacionado con la justificación.

### 4.2.3. Episodio 3: Representan la conjetura en lápiz y papel $_{[64 – 116]}$

En seguida, el Profesor L les sugiere a los estudiantes que representen la situación con lápiz y papel. Esto con el fin de que puedan iniciar la justificación de la conjetura porque han transcurrido varios minutos sin que ellos avancen. Cristian, primero dibuja sobre una hoja blanca un ángulo con un punto en su interior. Luego, traza la bisectriz del ángulo (Figura 16). Sobre dicha representación, el Profesor L les hace otra sugerencia, esta vez para que nombren los elementos geométricos que aparecen (puntos, ángulo) (Figura 17). Los estudiantes leen nuevamente la conjetura, identifican el antecedente y el consecuente, y Cristian traza dos segmentos que no son perpendiculares a los lados del ángulo (Figura 18), de lo cual se puede inferir que él realmente no está usando la definición de distancia de un punto a una recta.

**Figura 16.** Representación inicial de la conjetura en lápiz y papel

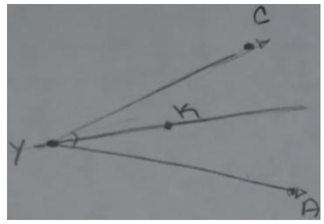



**Figura 17.** Representación de la conjetura en lápiz y papel con los nombres de los puntos

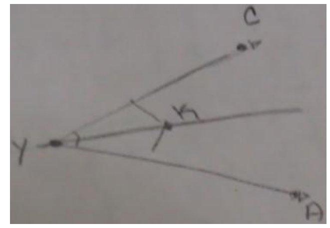



**Figura 18.** Representación de la conjetura en lápiz y papel con dos segmentos no perpendiculares a los lados del ángulo

En el siguiente diálogo, hacen referencia a la situación usando los nombres asignados a los puntos.

| | | |
|---|---|---|
| 98. | Diana: | […] Si la distancia de un punto, $K$ ¿cierto? |
| 99. | Cristian: | Sí. |
| 100. | Diana: | A cada lado de un ángulo. Entonces. $C,Y$ y $Y,A$, entonces los colocamos con… |
| 101. | Cristian: | [Escribe sobre una hoja blanca.] $\overline{CY}$ y $\overline{YA}$. |
| 102. | Diana: | Si la distancia… pues eso es lo que sabemos. |
| 103. | Cristian: | ¿A qué es lo que tenemos que concluir? El punto está sobre la bisectriz. O sea que aún no sabemos la bisectriz. O sea, no hemos sacado esto [Borra la bisectriz del $\angle CYA$.] Aún no hemos sacado esto. Hasta el momento sabemos esto. |
| | | […] |
| 108. | Diana: | Entonces lo que sabemos lo podríamos escribir así: escribir la distancia de… la distancia del punto $K$ a $C,Y$ y $Y,A$, ¿no? Pues eso es lo que sabemos. |
| 109. | Cristian: | Sabemos que la distancia del punto $A$… |
| 110. | Diana: | $K$. |
| 111. | Cristian: | $K$ es igual… |
| 112. | Diana: | Ah… espere, espere argumentemos bien. |
| 113. | Cristian: | Eso. |
| 114. | Diana: | La distancia de un punto... |
| 115. | Cristian: | A… |
| 116. | Diana: | Es lo que sabemos. La distancia del punto $K$ es igual a los lados del ángulo que son $C,Y$ y $Y,A$. |

En el diálogo anterior, cuando Cristian y Diana revisan de nuevo el antecedente de la conjetura observando la representación hecha en lápiz y papel, sugerida por el Profesor L, se evidencia el aspecto comunicativo pues en [101] Cristian simboliza correctamente lo que Diana afirma en [100] sobre los segmentos con extremo el punto $K$, que equidista de los lados del ángulo. En la intervención [103] reconocemos asuntos relacionados con el aspecto epistémico pues Cristian distingue claramente lo dado y la conclusión de la conjetura. También se evidencia este aspecto cuando Cristian borra la bisectriz del $\angle CYA$ porque aún no ha justificado el consecuente de su conjetura, y por tanto para él la bisectriz no existe. Aquí identificamos un *conflicto epistémico*, que requiere de la intervención de un experto, porque es un problema para Cristian aceptar que el rayo existe porque si él lo trazaba entonces habría trazado la bisectriz del $\angle CYA$. En otras palabras, él no comprendió que dibujar este rayo no significaba que tenía la propiedad de ser bisectriz, propiedad que debe justificar junto con sus compañeras. La intervención de Diana en [112] no se refiere a formular un argumento sino que se refiere, según afirma en [116], a establecer ideas claramente usando los nombres de los elementos geométricos involucrados (aspecto comunicativo). Este conflicto epistémico se presenta nuevamente en los Episodios 6, 7 y 8, y obliga a la intervención de los profesores en el Episodio 13.

### 4.2.4. Episodio 4: Cristian propone un plan para iniciar la justificación [117 – 152]

Para comenzar con la justificación de la conjetura, Dayana presta atención a lo que Diana dice y escribe en la columna *Qué sé* de la tabla: "La distancia del punto $K$ es igual a $\overline{CY}$ y $\overline{YA}$". En seguida Cristian propone iniciar la justificación, escribiendo en dicha columna otra idea.

| | | |
|---|---|---|
| 128. | Cristian: | [Le susurra a Diana.] Y, ¿por qué no cogemos, primero, digamos $K$ es igual a la distancia de ese…y sacamos un *Qué uso*, un *Qué concluyo*? Y luego, sacamos con el otro. ¿No nos queda más fácil? |
| 129. | Profesor L: | Cristian, otra vez porque no le alcanzamos a escuchar. |
| 130. | Cristian: | Que digamos que mejor escribimos, o sea no escribir los dos segmentos [rayos del $\angle CYA$] al tiempo sino que escribir el primero, sacar el que *Qué uso*, *Qué concluyo*. Luego, escribimos con el otro lado casi lo mismo. |

La idea de Cristian en [128] refleja el aspecto teleológico de su comportamiento racional porque formula un plan para iniciar la justificación de la conjetura que consiste en establecer una *garantía* y una *conclusión*, correspondiente a los *datos* que tiene. Luego, en [130] él aclara su estrategia que consiste en formular dos argumentos de tipo deductivo, uno con respecto al $\overline{CY}$ y otro con respecto al $\overline{YA}$ (*datos*).

Para continuar la justificación, con base en su anterior propuesta, Cristian borra una parte de lo escrito en la columna *Qué sé*, y queda: “La distancia del punto”. En seguida Diana intenta completar la información en esta columna.

| | | |
|---|---|---|
| 141. | Diana: | La distancia del punto $K$ es igual [Escribe en la columna *Qué sé* para completar el primer argumento: …$K$ e] ¡No! No se podría. |
| 142. | Cristian: | Claro. La distancia del punto $K$ es… |
| 143. | Diana: | ¿Es igual a $C, Y$? |
| 144. | Cristian: | No. |
| 145. | Diana: | No. No se puede entonces. |
| | | […] |
| 150. | Cristian: | Pues no sabemos es cómo redactarlo. Pero de que se puede, se puede. |
| 151. | Profesor J: | Les falta un elemento chiquitico. Porque lo que están diciendo está perfecto. |

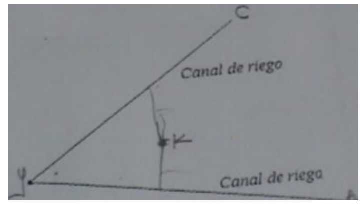
De este fragmento identificamos el aspecto comunicativo de Cristian quien al parecer intenta decirle a Diana que aproveche la idea de distancia de un punto a una recta. Tan es así que el Profesor J les informa que lo que dicen es correcto pero les falta mencionar algo que no explicita: la definición de distancia de un punto a una recta. Frente al pesimismo de Diana pues no puede plantear el *dato* del primer paso de la justificación, Cristian se muestra optimista porque reconoce que sí se puede establecer pero que no saben la manera de escribirlo.

### 4.2.5. Episodio 5: Mencionan el aspecto relacionado con la medida [153 – 268]

El Profesor L interviene para redirigir el trabajo que deben desarrollar los estudiantes, porque no saben cómo escribir las ideas que hasta el momento han expresado. Para ello, el Profesor L pregunta: “¿gráficamente como se ve la distancia del punto $K$ a cada lado del ángulo?”. Por un lado, Cristian señala la representación hecha sobre la hoja (Figura 18) y responde: “Igual gráficamente”. Por otro lado, Diana señala los segmentos de la representación mencionada y dice: “vemos que tiene la misma distancia a cada lado del ángulo”. Luego, Cristian y Diana empiezan a trabajar de manera individual, e invitan a Dayana a que también haga lo mismo.

| | | |
|---|---|---|
| 161. | Diana: | [Sobre la gráfica suministrada en la situación de la finca de Don Gustavo, que representa el lote en forma de cuña donde él debe sembrar matas de arroz que tengan igual distancia a cada canal de riego, Diana dibuja el punto $K$ y nombra tres puntos del ángulo como $C, Y, A$.] La distancia del |

punto $K$ es igual a cada uno de los [lados del] ángulo [Traza dos segmentos con extremo el punto $K$, y el otro extremo un punto sobre cada lado del $\angle CYA$.]



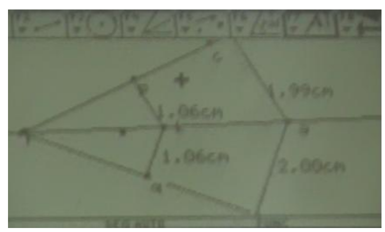

162. Cristian: [Escribe sobre la hoja en la que representó inicialmente la conjetura: La distancia del punto $K$ es igual a la dis. Luego borra: es igual a la dis.] ¿Cómo se escribe congruente?

[…]

166. Diana: Ah, Gordo, ¿será que no se le puede colocar una medida a eso? [Señala los segmentos que trazó anteriormente.]

167. Cristian: Pues, se puede. Pero, ¿para qué? O, ¿para qué vamos a usar la medida? Porque de poder, sí se puede y acá ya lo tenemos medido [Indica la longitud de los segmentos en la pantalla del computador.]

168. Diana: Pues podríamos colocar que la distancia del punto $K$ es 5, digamos 5 $cm$ al segmento $C, Y$ [Señala la longitud de los segmentos trazados en la calculadora.] Y eso es lo que sabemos y ahí construimos eso y después el otro.




169. Cristian: Y, ¿qué usamos?

[…]

172. Diana: Ahyyy… segmentos congruentes.

173. Cristian: Aaaah, entonces ¿sí ve que es por la congruencia?

[…]

179. Diana: ¡Ah, no! Eso no son segmentos congruentes. No, no, no.

180. Cristian: Sí son segmentos.

181. Diana: Ah, sí son segmentos pero que no están nombrados.

182. Cristian: Claro que están nombrados.

183. Diana: ¿Esto? [Señala un segmento con extremo el punto $K$.]

184. Cristian: El segmento se llama $Y, C$ y el otro $Y, A$ [Señala con el lápiz los extremos de $\overline{YC}$ y $\overline{YA}$.]

185. Diana: No sea bobo. Yo estoy diciendo estos segmentos [Retiñe los dos segmentos cuyo extremo es el punto $K$.]

186. Cristian: Pues, lo mismo, ¿no?

187. Diana: No, porque debe tener un nombre diferente [a los lados del $\angle CYA$.].

188. Cristian: Ah, mire acá también. Ah, sí claro.

189. Diana: […] casi que no las cogimos. Yo sé que por ahí va.

En [162] Cristian intenta redactar el primer argumento de la justificación. Al borrar la expresión “es igual a la dis” y preguntar “¿cómo se escribe congruente?”, podemos ver la preocupación que él tiene por escribir su idea empleando la notación matemática establecida (aspecto comunicativo). Al analizar la pregunta que hace Diana en [166], sin tener en cuenta las siguientes intervenciones, nos encontramos con un problema para decidir si esta intervención es de carácter teleológico o epistémico. Es teleológico si Diana está sugiriendo colocarle una medida específica porque así podrían resolver el problema en el que se encuentran. Pero, es epistémico al preguntar si es teóricamente aceptable asignarle medidas a los segmentos para poder proceder con la justificación. Luego que Cristian cuestiona en [167] el plan de Diana, él le indica que sí se puede colocar medidas a los segmentos; la explicación que él hace es con respecto al asunto teleológico ya mencionado. Sin embargo, la intervención que ella hace en [168], parece indicar que no entiende por qué es inútil asignar medidas a los segmentos, pues reitera su plan (aspecto teleológico), esta vez, diciendo que la distancia del punto $K$ al $\overline{CY}$ es de $5\,cm$. Tan pronto como Diana propone esta medida específica para ambos segmentos, inmediatamente ella evoca la congruencia de segmentos, la cual usarán enseguida como *garantía*. Más adelante en el Episodio 11, Cristian le aclara a Diana por qué es inútil colocar una longitud específica a los segmentos, explicación relacionada con el asunto epistémico. Cuando ella indica que los segmentos congruentes no están nombrados, Cristian refuta su planteamiento pues asigna a éstos los nombres de los lados del $\angle CYA$. Por tal razón, ella le explica en [185] que $C$ y $A$ no son necesariamente los extremos del segmento (aspecto comunicativo).

Antes de continuar la justificación, Cristian realiza algunos cambios en la representación que acompaña el enunciado del problema, sobre la cual Diana había hecho algunos trazos. Nombra con la letra $I$ al punto que tiene igual distancia a los lados del $\angle CYA$, así mismo los puntos que corresponden a los extremos de los dos segmentos trazados por Diana los nombra con las letras $K$ y $J$, respectivamente (Figura 19).

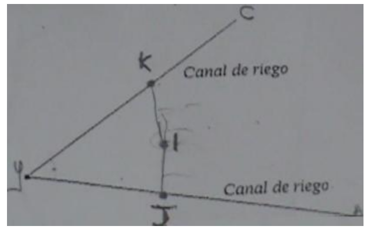


**Figura 19.** Segmentos no perpendiculares a los lados del ángulo que Diana traza sobre la representación del problema

| | | |
|---|---|---|
| 193. | Diana: | […] Vea. Lo que sabemos. Entonces lo que sabemos… ¡ay la distancia! Digamos que este tiene 5 $cm$ y acá 5 $cm$ [Asigna al $\overline{KI}$ y al $\overline{IJ}$ la longitud de 5 $cm$.] |
| 194. | Cristian: | Nooo... |
| 195. | Diana: | [Escribe en el esquema a tres columnas.] La distancia del punto $K$ es 5 $cm$ al segmentooo [Escribe en la columna *Qué sé* para completar el primer argumento: La distancia del punto $K$ es 5 $cm$.] ¡No! Pailas. No se puede. [Risas.] |
| 196. | Cristian: | El segmento $I, K$ y el segmento $I, J$ son congruentes. Sabemos eso. ¿Por qué? Porque miden lo mismo. |
| 197. | Diana: | Entonces utilizaríamos la definición de segmentos congruentes. |
| 198. | Cristian: | Ah. Hágale. |
| 199. | Diana: | Uyyyy. ¡Ah! Si no es eso, mejor dicho. [Borra en la columna *Qué sé* del primer argumento: La distancia del punto $K$ es 5 $cm$.] |
| 200. | Diana: | ¿Qué? ¿Qué sabemos? |
| 201. | Cristian: | Que el segmento $K, I$ y el segmento $I, J$ son congruentes. |
| 202. | Diana: | Yo no sé. [Aunque muestra duda en la afirmación de Cristian, escribe en la columna *Qué sé* del primer argumento: $\overline{KI} \cong \overline{IJ}$; y en la columna *Qué uso*: Definición segmentos congruentes.] |
| 203. | Cristian: | ¿Cómo así la misma distancia? |
| 204. | Profesor L: | ¿Cómo Cristian? |
| 205. | Cristian: | ¿Cómo así la misma distancia? Diana. |
| 206. | Diana: | ¿Cómo así? |
| 207. | Cristian: | Pues sí. Dice que: [Lee la definición de segmentos congruentes.] los segmentos congruentes son dos segmentos… |
| 208. | Diana: | Que tienen la misma medida. |
| 209. | Cristian: | Y la misma distancia, ¿no? |

La objeción que le hace Cristian a Diana, sobre asignarle una medida específica a la longitud de cada segmento, podría ser de índole epistémica que no la explica sino hasta el Episodio 11, como ya se mencionó. Luego, entre Cristian y Diana surge un argumento deductivo completo. En [196] Cristian plantea como *conclusión* la congruencia entre el $\overline{IK}$ y el $\overline{IJ}$, y como *datos* que dichos segmentos tienen la misma longitud. Diana en [197] provee como *garantía* la definición de segmentos congruentes. La intervención de Diana muestra una preocupación epistémica porque provee la *garantía* que Cristian no incluyó en su argumento. Cuando ellos reportan este argumento en el esquema – deducción [200 –

202], cometen un error pues escriben en la primera columna del esquema la *conclusión* de su argumento. De ello se percata Cristian más adelante. Ahora, respecto a las intervenciones [203 – 209] hay una preocupación epistémica de Cristian pues, al leer la definición de segmentos congruentes, quiere comprobar si hablar de "la misma medida" como aparece en esta definición es lo mismo que "igual distancia" como lo menciona el problema.

A continuación Diana y Cristian revisan nuevamente el anterior argumento deductivo.

| | | |
|---|---|---|
| 218. | Cristian: | Listo. ¿Entonces? |
| 219. | Diana: | Bueno ¿Qué sabemos? Que $K$ y $I$ son congruentes con $I$ y $J$ [Señala la columna *Qué sé* del primer argumento: $\overline{KI} \cong \overline{IJ}$.] Eso sabemos. |
| 220. | Cristian: | Sí. |
| 221. | Diana: | Entonces usamos la definición de segmentos congruentes. ¿Qué concluimos? |
| 222. | Dayana: | ¿Por qué segmentos congruentes? |
| 223. | Cristian: | Ah, pues concluimos que… Es que la conclusión. Es que la… |
| 224. | Diana: | ¿Qué concluimos? Que tienen la misma distancia. |
| | | […] |
| 233. | Diana: | Por eso, dice, segmentos congruentes: [Lee la definición.] dos segmentos son congruentes si tienen la misma medida. Y tienen la misma medida. |
| 234. | Cristian: | Esto [Señala $\overline{KI} \cong \overline{IJ}$ en la columna *Qué sé*] lo hubiéramos escrito acá [Señala la columna *Qué concluyo*.] Acá [Señala la columna *Qué sé*.] tendríamos que haber escrito: $KI$… |
| 235. | Diana: | Que tienen la misma medida. |
| 236. | Cristian: | Son congruentes. Tenemos que escribir… ¡Ay Dios mío! |
| 237. | Diana: | Acá en *Qué concluyo*, es eso [Escribe en la columna *Qué concluyo* del primer argumento: $\overline{KI} \cong IJ$. Luego, borra dicha congruencia de segmentos en la columna *Qué uso*.] ¿Qué sabemos? Que $K, I$ tiene la misma medida [Escribe en la columna *Qué sé*: $\overline{KI}$.] |
| 238. | Cristian: | No. |
| 239. | Diana: | ¿No? Está bien. [Borra en la columna *Qué sé*: $\overline{KI}$.] |
| 240. | Cristian: | Escriba esto [$KI$ tiene la misma medida que $IJ$.], sólo que escrito, escrito. |
| 241. | Diana: | Por eso, y ¿qué estoy haciendo? |
| 242. | Cristian: | Tienen la misma medida. |
| | | […] |
| 251. | Diana: | [Escribe en la columna *Qué se*: $\overline{KI}$ tiene la misma medida.] |
| | | […] |
| 255. | Profesor J: | Y, ¿qué están demostrando? |
| 256. | Diana: | Que son congruentes, porque… |
| 257. | Profesor J: | Miren la conjetura […]. Léanla, bien detenidamente. |
| 258. | Diana: | [Lee la conjetura.] Si la distancia de un punto a cada lado de un ángulo es igual entonces el punto está sobre la bisectriz del ángulo. Pero como todavía no podemos utilizar esa parte del *entonces* [Señala el consecuente de la conjetura.] porque eso lo que debemos concluir, al final. |

259. Cristian: Entonces, debemos saber esto [$\overline{KI}$ tiene la misma medida que $\overline{JI}$.] Sólo que lo debemos saber escribir [Realiza una marca indicando el inicio y el final del antecedente de la conjetura: *Si la distancia de un punto a cada lado de un ángulo es igual.*]

De acuerdo con la revisión de dicho argumento deductivo, Diana plantea como *datos*, la congruencia entre el $\overline{KI}$ y el $\overline{IJ}$, como *garantía*, la definición de segmentos congruentes, y como *conclusión*, que tienen la misma distancia (aspecto epistémico). Esta *garantía* es cuestionada por Dayana pero sus otros dos compañeros no le prestan atención sino hasta que ella la vuelve a plantear en la intervención [423] del Episodio 7. En [234] Cristian se da cuenta del error que cometieron al consignar en el esquema el argumento deductivo. En este caso se tiene el aspecto epistémico porque se da cuenta que la forma como han colocado los *datos* y la *garantía* no puede dar lugar a la *conclusión* que ellos querían. Por otro lado, el aspecto comunicativo se evidencia cuando Cristian solicita que se escriba "$KI$ tiene la misma medida que $IJ$" (*datos*) de manera matemática y ante la imposibilidad de hacerlo lo escriben con palabras. Mientras que Diana afirma en [258] que no se puede usar la conclusión de la conjetura, Cristian dice en [259] que se debe partir del antecedente, lo cual evidencia en ambos casos el aspecto epistémico porque ellos reconocen cuál es el papel de cada parte de la conjetura. Además, en esta última intervención, surge de nuevo la preocupación de carácter comunicativo para expresar la equidistancia de manera matemática.

### 4.2.6. Episodio 6: Formulan el segundo y tercer argumento de la justificación [269 – 419]

Terminado el primer argumento de la justificación, Cristian y Diana mantienen una conversación, inicialmente con un tono de voz bajo, que les permite establecer algunos aspectos relacionados con el siguiente argumento. En un primer momento, Cristian propone involucrar ángulos, comprobando empíricamente en la calculadora la perpendicularidad entre los segmentos con extremo el punto $I$ y los lados del $\angle CYA$. Por su parte, Diana señala que no es necesario revisar dicha propiedad porque en la construcción se empleó la herramienta de recta perpendicular. Luego, ella traza nuevamente en la representación en papel los segmentos de forma que se vea que se cumple esa propiedad (Figura 20). En un segundo momento, tanto Diana como Cristian formulan argumentos distintos en torno a la perpendicularidad mencionada. En la siguiente transcripción vamos a mostrar el argumento que cada uno desarrolló, escrito éste en cursiva, dado que la interacción es un poco difícil de seguir porque en ese proceso hubo momentos en los que se contestaba el uno al otro y hubo momentos en que uno hablaba y el otro no escuchaba.

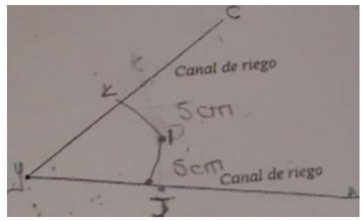



**Figura 20.** Diana traza sobre la representación del problema segmentos perpendiculares a los lados del ángulo

| Intervención de Diana | Intervención de Cristian |
| --- | --- |
| 298. *¿Así? [Escribe en la columna Qué sé del segundo argumento: $\overline{IK} \perp \overline{YC}$.] Entonces, ¿qué usamos? Pues la definición de rectas perpendiculares...* | 299. *Pero esto [Señala la afirmación $\overline{IK} \perp \overline{YC}$.] toca escribirlo acá [En la columna Qué concluyo y no en la columna Qué sé.]* |
| 300. ¿Qué? No porque vea. | 301. Entonces, ¿qué concluimos? |
| 302. *Espere y verá qué concluimos. [Continúa escribiendo en la columna Qué uso: definición de rectas perpendiculares.] Entonces lo que concluimos es que… ¡Ay, acá no está! [Revisa en el listado.]* | 303. Ah, no. Lo que sé es… |
| […] | […] |
| 306. No. | 307. *[…] [Borra en la columna Qué sé: $\overline{IK} \perp \overline{YC}$.]* |
| 308. Nooo, Gordo. | 316. [En Cabri, nombra el ángulo como $C, Y, A$; el punto que equidista de los lados del $\angle CYA$ como $I$; los puntos $K$ y $J$ son los extremos de los segmentos, desde $I$ a cada lado de $\angle CYA$.] Póngale cuidado. *Se supone que acá se forman dos ángulos rectos, ¿cierto? [Señala con el cursor el $\angle IKY$ y el $\angle IKC$.]* |
| 317. ¿Dos ángulos rectos? | 318. Sí señora. |
| 319. Ah, sí. Verdad. Sí. | 320. *Entonces, eso es lo que hay que escribir [en la columna Qué sé del segundo argumento]*. |
| 321. ¿Qué concluimos? ¿Dos ángulos rectos? | 322. Pues, no. |
| 323. Ah, no. | 334. *¿Va a poner cuidado? Póngale cuidado. Sabemos que $I$, $K$ y $C$ son ángulos rectos. [Señala con el cursor,* |

| Intervención de Diana | Intervención de Cristian |
|---|---|
| […] | *respectivamente los puntos.]* |
| 335. Aja. Es un ángulo recto [Respuesta a 334.] | 336. Toca comprobarlo. [Con la herramienta Medida de ángulo en Cabri, obtiene que la $m\angle IKC = 90º$.] Ay, no se estrese. |
| 337. Y ahí sacamos que el otro también [$m\angle IKY = 90º$.] [Completa la idea de 336.] | 338. [De la misma manera, obtiene que la $m\angle IKY = 90º$.]Entonces, utilizamos esa definición [no especifica cuál] y concluimos que […] $I,K$ y $I,C$ son congruentes [$\angle IKC \cong \angle IKY$.] |
| […] | […] |
| 341. *¿Sabe lo que yo creo? Que lo que habíamos escrito estaba bien. [Anteriormente, Diana escribió que* $\overline{IK} \perp \overline{YC}$ *en la columna Qué sé. Luego, Cristian borró dicha perpendicularidad, argumentando que éste debía estar escrita en la columna Qué concluyo.]* | 342. *No, porque eso es lo que concluimos cuando* |
| 343. *No.* | 344. *Cuando se saca la definición [de rectas perpendiculares]* |
| 345. *No. Espere. Espere. Y, ¿qué concluimos? Que los ángulos* $C,K,I$ *es congruente con* $Y,K,I$ *[*$\angle CKI \cong \angle YKI$.*] ¿Sí me entiende?* | […] |

Por un lado, Diana propone un argumento deductivo incompleto porque, a partir de la perpendicularidad entre el $\overline{IK}$ y el $\overline{YC}$ (*datos*) y el uso de la definición de rectas perpendiculares (*garantía*), no puede llegar inmediatamente a que $\angle CKI \cong \angle YKI$ (*conclusión*). De manera rigurosa, a este proceso deductivo le hizo falta un argumento si hubiera usado el hecho geométrico de ángulos rectos, o dos argumentos si hubiera empleado la definición de ángulos rectos y la definición de ángulos congruentes (ver recuadros punteados de las Tablas 14 y 15, respectivamente).

**Tabla 14.** Proceso deductivo de Diana con un argumento adicional

| Qué sé | Qué uso | Qué concluyo |
|---|---|---|
| $\overline{IK} \perp \overline{YC}$ | Definición rectas perpendiculares | $\angle CKI$ y $\angle YKI$ son rectos |
| $\angle CKI$ y $\angle YKI$ son | Hecho geométrico ángulos | $\angle CKI \cong \angle YKI$ |

**Tabla 15.** Proceso deductivo de Diana con dos argumentos adicionales

| Qué sé | Qué uso | Qué concluyo |
|---|---|---|
| $\overline{IK} \perp \overline{YC}$ | Definición rectas perpendiculares | $\angle CKI$ y $\angle YKI$ son rectos |
| $\angle CKI$ y $\angle YKI$ son rectos | Definición ángulos rectos | $m\angle CKI = 90º$<br>$m\angle YKI = 90º$ |

| | | |
|---|---|---|
| rectos | rectos | |

| | | |
|---|---|---|
| $m\angle CKI = 90º$<br>$m\angle YKI = 90º$ | Definición ángulos congruentes | $\angle CKI \cong \angle YKI$ |

Por otro lado, Cristian propone dos argumentos. El primero es un argumento abductivo completo pues, aunque no lo dice explícitamente, con la misma *garantía* empleada por Diana en su anterior argumento (definición de rectas perpendiculares), y con la *conclusión* que indica en [299] ($\overline{IK} \perp \overline{YC}$), plantea como *datos* que se forman dos ángulos rectos ($\angle IKY$ y $\angle IKC$). El segundo es un argumento deductivo incompleto porque, con los *datos* que indica en [334] ($\angle IKY$ y el $\angle IKC$ son ángulos rectos) y la *garantía* que no especifica en [338], no puede concluir inmediatamente que $\angle IKC \cong \angle IKY$. Si la *garantía* a la que alude es la definición de ángulos rectos, entonces concluiría que la medida de este par de ángulos es 90º, pero el argumento es incompleto pues le hace falta la definición de ángulos congruentes para llegar a dicha *conclusión*; si la *garantía* es la definición de ángulos congruentes, el argumento también es incompleto pues la falta concluir previamente que los ángulos miden 90º con la definición de ángulos rectos (ver recuadros punteados de la Tabla 16).

**Tabla 16.** Proceso deductivo de Cristian con un argumento adicional

| Qué sé | Qué uso | Qué concluyo |
|---|---|---|
| $\angle IKC$ y $\angle IKY$ son rectos | Definición ángulos rectos | $m\angle CKI = 90º$<br>$m\angle YKI = 90º$ |
| $m\angle CKI = 90º$<br>$m\angle YKI = 90º$ | Definición ángulos congruentes | $\angle CKI \cong \angle YKI$ |

De la anterior transcripción podemos afirmar, en primer lugar, que Diana y Cristian formulan argumentos incompletos en el sentido que no mencionan explícitamente las *garantías* necesarias para concluir la idea que expresan, es decir, formalmente en el proceso deductivo constituido por una cadena de argumentos, los estudiantes omiten uno o varios de éstos, tal y como se muestra en los anteriores esquemas – deducción (Tablas 14, 15 y 16). Y en segundo lugar, relacionado con el aspecto social, hubo momentos en los que uno prestaba atención a las ideas que el otro expresaba. Por ejemplo, mientras que Cristian en [334], [336] y [338] expone su argumento deductivo, Diana en [335] y [337] corrige o completa sus ideas. Pero en otras ocasiones uno hablaba y el otro no le escuchaba. Por ejemplo, cuando Diana reitera en [341] que $\overline{IK} \perp \overline{YC}$ son los *datos*, enseguida Cristian impide que desarrolle su idea y establece como *conclusión* que $\angle CKI \cong \angle YKI$.

Posteriormente, mientras Cristian habla, él cambia los *datos* de su argumento por ángulos con medida igual a 90º.

| | | |
|---|---|---|
| 358. | Cristian: | […] El ángulo $I$, $K$ y $C$ sabemos que mide 90º [Borra de la columna *Qué sé* del segundo argumento: $IK$. Luego escribe: $\angle IKC$ 90º.] ¿Cierto? |
| 359. | Diana: | ¿Cuál ángulo? ¿Cuál está haciendo? Ah, sí, sí… ya vi cuál ángulo es. |
| 360. | Cristian: | Y el ángulo $I$, $K$ y $Y$ también mide 90º [Continúa escribiendo en la columna *Qué sé*: $\angle IKY$ 90º.] |
| 361. | Diana: | Aja. |
| 362. | Cristian: | Puedo sacar esto [Señala la columna *Qué uso* del segundo argumento: definición de rectas perpendiculares.] ¿Cierto? |
| 363. | Diana: | Y llegamos a que… |
| 364. – 367. | | [Cristian pregunta cuál es la definición de rectas perpendiculares y Diana la lee en el listado de hechos geométricos y definiciones.] |
| 368. | Cristian: | Entonces, podemos concluir que la recta $I$, $K$ [Escribe en la columna *Qué concluyo* del segundo argumento: $\overline{IK} \perp$.] es |
| 369. | Diana: | El segmento. |
| 370. | Cristian: | El segmento $I$, $K$ |
| 371. | Diana: | Es perpendicular con |
| | | […] |
| 384. | Cristian: | […] $Y, C$ […]. Eso es lo que ya […] concluimos. Y se puede sacar la misma conclusión con el de abajo [$\overline{IJ} \perp \overline{YA}$]. |

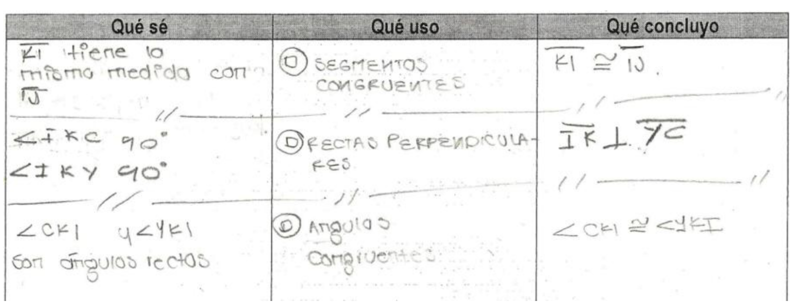
En este momento de la justificación, Cristian muestra un comportamiento epistémico porque elabora un argumento deductivo completo de la siguiente manera: en [358] y [360] escribe $\angle IKC$ 90º, $\angle IKC$ 90º, respectivamente (*datos*); en [362] señala lo escrito en la columna *Qué uso* la definición de rectas perpendiculares (*garantía*); y de acuerdo con las intervenciones [368 – 384] escribe que $\overline{IK} \perp \overline{YC}$ (*conclusión*). En [384] menciona que también se puede concluir que $\overline{IJ} \perp \overline{YA}$, pero no lo reporta en el esquema – deducción como tercer argumento. Pese a que Diana no contribuyó en la elaboración de este argumento, ella se preocupa porque Cristian exprese correctamente su idea, pues en [369] le corrige el término recta por el de segmento, que es lo que involucra este argumento (aspecto comunicativo).

Luego, Cristian y Diana escriben el tercer argumento de la justificación.

394. Cristian: La definición de ángulos congruentes. Cópiela que esa es la que vamos a hacer. La que vamos a usar.
395. Diana: [Escribe definición de ángulos congruentes en la columna *Qué uso*, correspondiente a la tercera línea.]
396. Cristian: Aaaah. Pues lo mismo que acá [Señala la columna *Qué sé* del segundo argumento: $\angle IKC$  90º, $\angle IKY$ 90º.]
397. Diana: Que son ángulos rectos. Algo así había dicho.
398. Cristian: Sí.
[…]
405. Diana: Ya, ya, ya. [Escribe $\angle CKI$ y $\angle YKI$ son ángulos rectos.] ¿Entonces? ¿Qué concluiríamos? Que el ángulo $C, K, I$ es congruente con $Y, K, I$ [Escribe $\angle CKI \cong \angle YKI$.] Tenemos tres hipótesis. Ahora, ponemos a Dayana que saque [elija] cuál es.
[…]

Para este tercer argumento de la justificación, Cristian desarrolla un argumento deductivo completo que Diana no lo escribe como lo establecen entre ellos porque en lugar de escribir que $\angle CKI$ y $\angle YKI$ tienen medida igual a 90º, escribe que dichos ángulos son rectos (*datos*). Al inicio de este diálogo, en [394] Cristian le solicita a Diana que copie la definición de ángulos congruentes pues esa es la que van a usar (*garantía*); y al final, en [405] Diana escribe que $\angle CKI \cong \angle YKI$ (*conclusión*). Lo que hace Cristian en [394] evidencia el aspecto epistémico porque proporciona un elemento teórico para la formulación de este argumento. Lo que Diana intenta decir en [405] es determinar cómo van a organizar la justificación con los tres argumentos escritos en la hoja.

En el siguiente diálogo, ellos hacen referencia a los tres argumentos completos que diligenciaron en el esquema – deducción y que no están encadenados para poder justificar la conjetura (Figura 21).



| Qué sé | Qué uso | Qué concluyo |
|---|---|---|
| $\overline{KI}$ tiene lo mismo medida con $\overline{IJ}$ | (1) Segmentos congruentes | $\overline{KI} \cong \overline{IJ}$. |
| $\angle IKC$ 90° $\angle IKY$ 90° | (D) Rectas perpendiculares | $\overline{IK} \perp \overline{YC}$ |
| $\angle CKI$ y $\angle YKI$ son ángulos rectos | (D) Ángulos congruentes | $\angle CKI \cong \angle YKI$ |

**Figura 21.** Tres argumentos completos no encadenados para justificar la conjetura

408. Cristian: O sea. Con base en esas hipótesis, tenemos que sacar más hipótesis para llegar a esta conclusión.
409. Profesor L: ¿Cuál Cristian?
410. Cristian y A la de: El punto está sobre la bisectriz del ángulo.

Diana:
411. Cristian: Que aún no la tenemos.
412. Diana: Ajá. Hasta ahora estamos haciendo lo del *Sí*.
413. Cristian: Pero, la podemos sacar.
[…]

Esta conversación es de un alto nivel epistémico puesto que los dos reconocen tanto las partes de la conjetura que están tratando de justificar como el proceso que deben desarrollar para llegar de una parte a la otra. La intervención de Cristian en [408] se trata de un asunto epistémico porque sabe que para justificar la conjetura se necesitan más argumentos aparte de los tres argumentos que ya se formularon. En [411] parece ser que se presenta nuevamente el *conflicto epistémico* de Cristian respecto a la existencia de la bisectriz.

### 4.2.7. Episodio 7: Dayana cuestiona el primer argumento $_{[420 – 447]}$

Dayana vuelve a cuestionar el uso de la definición de segmentos congruentes en el primer argumento pues su objeción anterior (intervención [222] del Episodio 5) no fue atendida por sus compañeros.

423. Dayana: Acá, ¿por qué segmentos congruentes? [Definición de segmentos congruentes]
[…]
426. Cristian: Uyyy, Dayana está participando. Dios mío.
427. Dayana: Es que se me hizo raro. Es que me quedó esa inquietud de por qué segmentos congruentes.
428. Diana: Porque vea. Dice.
429. Cristian: Porque dice que miden igual [en la definición de segmentos congruentes], aunque acá no [no hay una medida específica].
430. Dayana: Aquí dice [definición de] bisectriz de un ángulo. Y dice: [Lee.] es un rayo con extremo en el vértice del ángulo y demás puntos en el interior del ángulo tal que el rayo con los lados del ángulo forman dos ángulos congruentes [Hace énfasis en la palabra congruentes.]
431. Cristian: Entonces, usted ¿qué concluye?
432. Dayana: Pues que hay dos ángulos congruentes. Y la bisectriz
433. Cristian: Pero es que aún no tenemos la bisectriz.
434. Diana: Ajá.
435. Dayana: Aaah.
436. Cristian: Tenemos que sacar la bisectriz.

Interpretamos la intervención de Dayana como una objeción epistémica válida en la cual manifiesta que la cuestión involucrada en la situación del problema es el de la bisectriz de un ángulo y en la definición de ésta se mencionan ángulos congruentes y no segmentos congruentes. Pero esto sucede al parecer porque hay una carencia en el aspecto teleológico que le permita identificar la meta hacia la cual Diana y Cristian trabajan; además, podemos inferir que ni ella sabe la razón que justifique el uso de la definición de segmentos congruentes en este primer argumento, ni sus dos compañeros le explican el uso de dicha definición pues en este momento lo olvidaron. Dayana formula un argumento abductivo incompleto porque no explicita los *datos*. Se tiene como *garantía* la definición de bisectriz de un ángulo y como *conclusión* que hay dos ángulos congruentes. Después de dicha *conclusión*, vuelve a aparecer el *conflicto epistémico* descrito en el Episodio 3 y en el que no interviene alguno de los dos profesores sino hasta el Episodio 13.

Dayana reitera que no se debe usar la definición de segmentos congruentes pero no explica por qué. Ahora, Cristian también pone en duda el uso de dicha definición.

| | | |
|---|---|---|
| 444. | Cristian: | ¿Qué sacamos con saber que estos dos segmentos son congruentes? |
| 445. | Dayana: | Aja. |
| 446. | Cristian: | Pues eso se sabe. A simple vista se sabe. |
| 447. | Diana: | Enton… |

La intervención de índole epistémica por parte de Dayana hizo que Cristian revisara lo que había escrito con Diana. La pregunta que él hace en [444] nos permite establecer que no sabe cuál es la utilidad de concluir que los dos segmentos sean congruentes para la justificación de la conjetura. Lo que afirma en [446] muestra que olvidó de dónde se obtuvo esta congruencia, es decir, no recordó que dicha congruencia surgió de la equidistancia de un punto a los lados del ángulo y no porque se visualice en una representación que ellos construyeron.

### 4.2.8. Episodio 8: Asuntos relacionados con el primer paso de la justificación [448 – 478]

Cristian les recuerda a sus compañeros que con base en lo que se sabe (antecedente del condicional), se debe justificar lo que plantea la conjetura (consecuente del condicional). Cuando él menciona que se pueden formular más argumentos, Diana propone elegir uno de los tres argumentos completos escritos en el esquema para determinar el primer paso de la justificación.

451. Diana: Espere. Espere. Primero que todo […], ¿cuál de esas hipótesis [argumentos] vamos a manejar? Yo voy por la primera.
452. Cristian: Pero, explíquenos por qué.
453. Dayana: Aja.
454. Diana: Por eso. Primero para… para eso.
455. Cristian: Por eso. Diana, díganos por qué.
456. Diana: Nooo. Por eso. ¿Cuál hipótesis [argumento] vamos a coger?
457. Cristian: Pues, usted dice que ésta [Señala en la hoja el primer argumento.] ¿Por qué coge ésta?
458. Diana: No, Gordo. Pero es que yo no soy la única que estoy acá. Pero, ¿cuál cogemos?
459. Cristian: Por eso. Pero usted se va por ésta [primer argumento] es por algo. Queremos que nos explique para nosotros de pronto seguirla o decirle, que no, que se vaya.

En relación al comportamiento racional, Diana [451] refleja el aspecto teleológico porque plantea comenzar la justificación de la conjetura con la elección de uno de los tres argumentos completos; en este caso, ella elige el primer argumento. En seguida, las intervenciones que hace Cristian muestran un asunto epistémico porque le exige a Diana que explique su plan. En cuanto al aspecto social, hay un conflicto de grupo respecto a la colaboración de Cristian pues en [458] Diana le recuerda que no es la única responsable en justificar la conjetura.

Después, Diana y Cristian identifican algunos elementos geométricos en la construcción hecha en el computador.

463. Cristian: […] Aquí hay otros ángulos congruentes.
464. Profesor L: ¿Cuáles?
465. Cristian: Claro.
466. Diana: Dos triángulos.
467. Cristian: No. Dos ángulos congruentes aparte de los que usted dijo.
468. Diana: Yo veo dos triángulos.
469. Cristian: Yo veo dos ángulos. $I, J, A$. $I, K, C$. Son dos ángulos congruentes.
470. Diana: Y yo…
471. Cristian: Y ambos miden 90º.
472. Diana: Y yo veo que son dos triángulos congruentes: $J, Y, I$ y $I, K, Y$.
473. Cristian: No porque… es que Diana se está confundiendo con esta línea [$\overrightarrow{YI}$ bisectriz del $\angle CYA$.]
474. Profesor L: Déjenla. Bueno, no sé.
475. Cristian: No, porque esta línea aún no existe [Indica con el cursor la bisectriz del ángulo.]
476. Diana: Ocúltela.
477. Cristian: Esta línea aún no existe [Oculta la bisectriz del ángulo.] Nosotros hasta ahora vamos esto […]

478. Diana: Ya no puedo más. Ya estoy cansada de pensar.

Al inicio de este diálogo, hay un asunto teleológico porque Cristian y Diana recurren a la estrategia de describir qué se ve en la representación. Pero, el *conflicto epistémico* de Cristian sobre la existencia de la bisectriz afecta el desarrollo de la justificación cuando oculta la bisectriz del ángulo. Como resultado, se deja de lado la congruencia de dos triángulos señalada por Diana y que es parte esencial de esta justificación.

#### 4.2.9. Episodio 9: Primer paso de la justificación [479 – 509]

El Profesor L interviene para mencionar algunos aspectos relacionados con el trabajo que el grupo ha desarrollado. Primero, destaca que los tres argumentos que ellos escribieron en la hoja, a partir de la conjetura y las representaciones hechas tanto en la calculadora como en lápiz y papel, podrían ser útiles en la justificación. Segundo, menciona que la justificación de la conjetura se compone de varios pasos. Y tercero, informa que la propuesta de Diana de comenzar con el primer argumento que ellos establecieron (la congruencia de los segmentos correspondientes) es correcta, pero que deben explicar por qué lo es. Inmediatamente, Cristian le pide a Diana que justifique las razones de su elección.

| | | |
|---|---|---|
| 480. | Cristian: | Justifique. La que aplaude. Justifique. Porque nosotros le estábamos pidiendo la justificación y usted no nos la quiso dar. |
| 481. | Diana: | Pues yo decía era por intuición. |
| 482. | Cristian: | No porque usted debe decir un por qué, una razón, porque nosotros no vamos a decir: “por intuición no mire, ahí hay es una bisectriz” intuicitivamente” [intuitivamente] |
| 483. | Dayana: | “Intuicitivamente” [Risas.] Sí. |
| 484. | Profesor L: | […] pero por qué escribiste como… esa es la primera afirmación de la justificación para esa conjetura. ¿Por qué planteaste esta primera afirmación? |
| 485. | Diana: | No lo sé. |
| 486. | Cristian: | Ummm. |
| 487. | Profesor L: | ¿No sabes? |
| 488. | Cristian: | Usted debe saber. |
| 489. | Dayana: | Es usted es muy áspera [capaz, inteligente]. |
| | | […] |
| 492. | Profesor L: | Inicialmente la conjetura. ¿Qué dice la conjetura? Y que pudiste plantear esto. ¿Qué pasó Cristian? |
| 493. | Cristian: | No, hágale. |
| 494. | Diana: | Pues yo sé por lo que debían tener la misma distancia a cada lado del ángulo, entonces pues sí porque estos son los segmentos [$\overline{KI}$ e $\overline{IJ}$] |
| 495. | | [El Profesor L revisa el primer paso de la justificación y dice que, según el |

– condicional de la conjetura, se sabe que “$\overline{KI}$ tiene la misma medida con $\overline{IJ}$”. Por esto, usaron la definición de segmentos congruentes y concluyen que “$\overline{KI} \cong \overline{IJ}$”. Enseguida, Diana escribe nuevamente este primer paso en
504. el esquema – deducción y el Profesor L solicita que lo enumeren.]

505. Dayana: ¿Qué dice aquí? ¿I, j?
506. Diana: Aja.
507. Dayana: ¿No es con mayúscula?
508. Diana: Por eso, es que así es mi jota. Es que mi jota es rara [Borra y escribe $\overline{IJ}$.]

En primer lugar, evidenciamos un comportamiento epistémico cuando Cristian exige que Diana dé una explicación teórica y no la que ella ofrece. Cristian y Dayana reconocen en ese momento que Diana tiene el mayor conocimiento acerca de por qué el primer argumento es el primer paso de la justificación. Luego que Diana reporta el primer paso en el esquema, el cuestionamiento de Dayana en [507] sobre la forma como escribió el nombre del segmento corresponde al aspecto comunicativo del comportamiento pues hay un control sobre la notación matemática empleada para escribir segmentos.

### 4.2.10. Episodio 10: Intento por determinar el segundo paso de la justificación

**[510 – 673]**

De nuevo el Profesor L indaga si los estudiantes saben cuál es la meta que deben alcanzar. Cristian responde que se quiere llegar “a una bisectriz”, mientras que Dayana dice “a la bisectriz del ángulo”. Después de que el Profesor L pide al grupo que revisen el segundo y tercer argumento que habían consignado en la hoja, Diana y Cristian entran en una dinámica de buscar elementos que les permitieran conformar el segundo paso de la justificación.

519. Cristian: La definición de ángulos congruentes. Pues en la bisectriz estoy viendo uno [ángulo] y basado en esto [Señala la conclusión del primer paso de la justificación: $\overline{KI} \cong \overline{IJ}$.] ¡Ah, no! Puedo sacar otra, otra definición de segmentos congruentes [Señala la columna Qué uso del primer paso de la justificación.]…
[…]
528. Diana: ¿Será que no se puede ésta? [Segundo argumento que el grupo formuló. *Qué sé*: $\angle IKC$ 90º $\angle IKY$ 90º; *Qué uso*: definición de rectas perpendiculares; *Qué concluyo*: $\overline{IK} \perp \overline{YC}$.]
[…]
535. Cristian: Pero, yo no voy a escribir lo de arriba [Segundo o tercer argumento.]
536. Diana: Entonces, dicte.
537. Cristian: Yo voy a escribir que el ángulo $I, J, Y$ es congruente con el ángulo $I, K, Y$.

538. Diana: Escribe [Segundo paso de la justificación. *Qué sé*: $\angle IJY \cong \angle IKY$]. Aja. ¿Cuál? $I, J, Y \ldots$

539. Cristian: No, pero lo iba a escribir así [Señala la columna *Qué sé* del tercer argumento: $\angle CKI$ $y$ $\angle YKI$ son ángulos rectos.]

540. Diana: ¿Son ángulos rectos? [Borra y escribe como segundo paso. *Qué sé*: $\angle IJY$ y $\angle IKY$ son ángulos rectos.] ¿Qué utilizamos? ¿Definición de ángulos congruentes?

541. Cristian: Aja.

542. Diana: [Continúa escribiendo en el segundo paso *Qué uso:* Definición de ángulos congruentes.] Y concluimos que esos dos [ángulos] son congruentes, ¿cierto? [Empieza a escribir lo que concluyen en la tercera columna, pero es interrumpida por Cristian.]

Para el segundo paso, Cristian propone usar la definición de ángulos congruentes y la de segmentos congruentes (aspecto teleológico). Sin embargo, él mismo descarta el uso de ésta última y se enfocan en los ángulos, lo que conllevó a la formulación de un argumento deductivo completo (aspecto epistémico): *datos*, ángulos rectos; *garantía*, definición de ángulos congruentes; y *conclusión*, los ángulos son congruentes.

Inmediatamente Cristian propone a Diana la siguiente idea.

543. Cristian: ¿Por qué no sacamos un triángulo trazando un segmento?

544. Diana: [Se detiene en escribir.]

545. Cristian: Hola. Es que usted no pone cuidado.

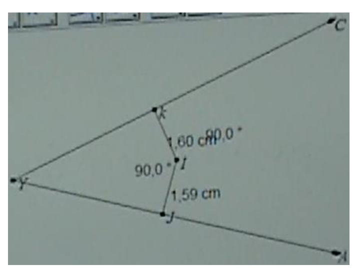
546. Diana: ¿Sacamos un triángulo rectángulo?

547. Profesor L: ¿Cómo pueden afirmar que esos dos ángulos [$\angle IJY$ y $\angle IKY$] son rectos? ¿Por qué lo pueden afirmar?

548. Cristian: Midiéndolos

549. Diana: Midiéndolos. Ah, ya los medimos.

550. Cristian: Claro. Mire la medida acá [Señala en Cabri las medidas del $\angle IKY$ y del $\angle IKC$.]




[…]

554. Diana: Nosotros medimos estos de acá arriba [Señala con el lápiz el $\angle IKC$ y el $\angle IKY$ en la construcción hecha en Cabri.] Y usted está diciendo los de acá abajo [$\angle IJA$ y el $\angle IJY$]

555. Cristian: Pero, si esto [$m\angle IKY = 90^{\circ}$ y $m\angle IKC = 90^{\circ}$] mide esto mismo acá [Señala los ángulos $\angle IJA$ y $\angle IJY$.]

556. Diana: Está bien.

557. Cristian: Se puede sacar por los de arriba también son…
558. Profesor L: ¿Son qué?
559. Cristian: Son congruentes, ¿no?
560. Diana: Son [ángulos] rectos.
561. Cristian: Son [ángulos] rectos.
562. Profesor L: […] Pero, ¿cómo saben que son [ángulos] rectos?
563. Diana: Porque tienen la medida de 90º.
564. Profesor L: ¿Ustedes hicieron la construcción para que [la medida del ángulo] les quedara de 90º?
[…]
567. Diana: Sí. Perpendiculares.
568. Profesor L: Y, ¿quiénes son perpendiculares?
569. Dayana: Las rectas.
570. Cristian: Los ángulos.
571. Diana: No. Es perpendicular [Señala en la pantalla de Cabri.] este segmento [$\overline{IK}$] con esta recta [$\overleftrightarrow{YC}$] y este segmento [$\overline{IJ}$] con esta recta [$\overleftrightarrow{YA}$].

Al inicio de esta conversación, podemos establecer que Cristian da muestra del aspecto teleológico pues propone un plan que consiste en obtener triángulos y que es parte fundamental para continuar la justificación. Esta idea no la desarrolla en el momento sino que la retoma más adelante debido a que el Profesor L pide al grupo que justifique por qué los ángulos $\angle IJY$ e $\angle IKY$ son rectos. En [548] Cristian establece un argumento deductivo incompleto porque no menciona qué se sabe (*datos*) e indica que con Cabri (*garantía empírica*) la medida de los ángulos $\angle IJY$ e $\angle IKY$ es de 90º (*conclusión*). Sin embargo, no llegan a la *conclusión* solicitada "ángulos rectos" pues no continúan su argumento usando como *garantía* la definición de ángulos rectos (ver recuadros punteados de la Tabla 17). Luego que Diana le aclara a Cristian en [554] que con Cabri se encontró la medida de los ángulos $\angle IKC$ e $\angle IKY$ y no la de los ángulos $\angle IJA$ e $\angle IJY$, él formula un argumento deductivo incompleto porque sólo insinúa una *garantía*: "Se puede sacar por los de arriba…"; los *datos* se refieren a que: para crear los ángulos $\angle IJA$ e $\angle IJY$ se hizo la misma construcción usada para formar los ángulos $\angle IKC$ e $\angle IKY$; y la *conclusión* es que: se puede obtener que la medida de los ángulos $\angle IJA$ e $\angle IJY$ es 90º. Más adelante es Diana quien dice que la *garantía* es: si la construcción involucró perpendiculares entonces los ángulos son de 90º. Cuando el Profesor L pide nuevamente al grupo que explique porque dichos ángulos son rectos (*conclusión*), Diana responde en [563] "Porque tienen la medida de 90º" (*datos*). Por tanto, se tiene un argumento deductivo incompleto porque ella no menciona como *garantía*, en este caso, la definición de ángulos rectos. Respecto a la pregunta que el Profesor L hace en [564] acerca de la perpendicularidad en la construcción, Diana rechaza las respuestas de sus otros dos compañeros y se preocupa por responderla de manera clara usando los elementos geométricos involucrados segmento – recta (aspecto comunicativo).

**Tabla 17.** Proceso deductivo incompleto de Cristian

| Qué sé | Qué uso | Qué concluyo |
|---|---|---|
| $\angle IJY$ e $\angle IKY$ | Midiéndolos (*Garantía empírica*) | $m\angle IJY = 90º$<br>$m\angle IKY = 90º$ |
| $m\angle IJY = 90º$<br>$m\angle IKY = 90º$ | Definición ángulos rectos | $\angle IJY$ e $\angle IKY$ son ángulos rectos |

Enseguida el Profesor J pregunta a los estudiantes por qué los segmentos $\overline{IK}$ e $\overline{IJ}$ son perpendiculares a los lados del $\angle CYA$. Como ellos continúan con la idea de obtener un triángulo rectángulo, no prestan atención a dicha pregunta lo que hace que él les insista en responderla antes de desarrollar cualquier otra idea.

| | | |
|---|---|---|
| 590. | Cristian: | ¿De dónde? Diana usted es muy inteligente. Usted sacó el inicio [primer paso]. |
| 591. | Diana: | Por eso. Ya no puedo seguir. |
| 592. | Profesor J: | Ustedes hicieron la construcción en Cabri. La repasaron ahorita acá y de ahí sacaron que tienen que ser perpendicular pero es por algo, no […] nace perpendicular.<br>[…] |
| 600. | Cristian: | Porque o si **no** el punto [$I$] no estaría en la mitad del ángulo. La bisectriz no estaría en la mitad del ángulo del punto. No pasaría por la mitad. |
| 601. | Diana: | No porque si no estuviera ese punto [$I$] se podría sacar la bisectriz, y ¿qué? Entonces ese punto no. Eso no. |
| 602. | Cristian: | Ah, bueno. Entonces usted sabe. Dice que no.<br>[…] |

En este fragmento queremos destacar las frases que Cristian le dirige a Diana [590, 602] pues, a pesar de la forma como lo dice, el trasfondo es que él reconoce que Diana tiene mayor conocimiento.

### 4.2.11. Episodio 11: Elaboran el segundo y tercer paso de la justificación [674 – 822]

Frente a la insistencia de ambos profesores para que expliquen por qué construyeron perpendiculares, Cristian busca todo aquello que le permita justificarla. Para ello, revisa la situación descrita en el problema, y no obtiene respuesta alguna. Ante esta situación, el Profesor J interviene con la intención de propiciar que los estudiantes recuerden la definición de distancia de un punto a una recta, al solicitarles que lean nuevamente el problema y la conjetura, y que se fijen en una palabra que se repite en ambas. Acto seguido, les pide que busquen en el listado de hechos geométricos y definiciones y logra su meta porque al preguntar de dónde sacan que es perpendicular, Diana responde: "Pues de la distancia", lo cual indica que tal vez hace referencia a la definición. Para el desarrollo del segundo paso de la justificación, el Profesor L indaga sobre qué van a escribir en el esquema – deducción.

| | | |
|---|---|---|
| 677. | Diana: | La definición de distancia de un punto a una recta [Escribe en la columna *Qué uso* del segundo paso: Definición Distancia de un punto a una recta.] Gordo, ahora concluya. |
| 678. | Cristian: | No, pero dígame usted por qué escribió esa definición. Pues sí, necesito saber para concluir. Si el ángulo… ¿qué dice ahí? ¿Eso es una "ese" [S]? |
| 679. | Diana: | $I, J, Y$ |
| 680. | Cristian: | Si el ángulo $I, J, Y$ y el ángulo $I, K, I$ [$\angle IKY$] son ángulos rectos. No son ángulos rectos. No sabemos si son ángulos rectos. |
| 681. – 685. | | [Cristian pide que se borre en la columna *Qué sé* del segundo paso: $\angle IJY$ y $\angle IKY$ son ángulos rectos. En lugar de esto, Dayana borra lo escrito en la columna *Qué uso* del mismo paso: Definición Distancia de un punto a una recta.] |
| 686. | Cristian: [Risas.] | ¿Por qué borró eso? Tenía que borrar… ¡Ayyy Dayana! |
| 687. | Diana: | ¿Si ve? Cuando participa vea lo que pasa. […] |
| 690. | Cristian: | Usted tampoco pone cuidado. |
| 691. | Profesor L: | Me gusta que escriba Diana. Deja que Diana escriba. |
| 692. | Diana: | ¡Qué pecado! |
| 693. | Cristian: | Ay, Dayana. No te dejan hacer nada. |

Al inicio de este diálogo, las intervenciones de Cristian reflejan un control epistémico en el proceso de justificación. Por un lado, le pide a Diana [678] una explicación de por qué se usa la definición de distancia de un punto a una recta como *garantía*, requisito para él poder establecer la respectiva *conclusión*. Por otro lado, él comprende que en la columna *Qué sé* se escribe solamente aquello que ha sido *conclusión* de un paso anterior, razón por la cual solicita que se borre: "$\angle IJY$ y $\angle IKY$ son ángulos rectos" pues, según él, no se sabe si dichos ángulos son rectos. Nuevamente queremos destacar que en ocasiones el discurso no académico entre los estudiantes estratifica a las personas de acuerdo con su conocimiento

[687, 693]. Tanto Cristian como Diana anulan la posible participación de Dayana con aportes para el desarrollo de la tarea.

Diana escribe nuevamente como *garantía* del segundo paso la definición de distancia de un punto a una recta y le pregunta a Cristian cuál es el correspondiente *dato*. Enseguida él exige un control en la escritura de lo que, creen ellos, es el segundo paso de la justificación.

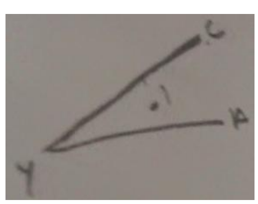
| | | |
|---|---|---|
| 696. | Cristian: | Hay que utilizar un *Qué sé* antes de *Qué uso*. Hágale. Al Profesor L le gusta que escriba usted. |
| 697. | Diana: | Que, ¿qué podría concluir? |
| 698. | Cristian: | ¿Cómo así? Pero primero hay que tener un *Qué sé*, ¿no? |
| 699. | Diana: | Ahí es donde se sabe de por qué es perpendicular, pero no sé. La distancia de un punto $P$ a una recta $m$ [Lee la definición de distancia de un punto a una recta.] Ah, entonces es esto Gordo. La distancia, digamos de un punto $P$ a una recta $m$, ¿no? [En la representación del problema, retiñe el punto $I$ que tiene igual distancia a cada uno de los lados del $\angle CYA$.] Pues yo digo, es la longitud del segmento perpendicular [Continúa leyendo la definición.] O sea, la medida del segmento, ¿no? longitud del segmento. Desde $P$ hasta $m$. O sea la medida de este segmento [Señala el $\overline{KI}$.] Pues eso es lo que yo |
| | | […] |
| 705. | Cristian: | No le entiendo. No, no sé. No entiendo. |
| 706. | Diana: | Pues vea. Que es que acá dice: La distancia de un punto $P$ [Lee la definición distancia de un punto a una recta.] entonces acá se llama punto $I$ [Señala en la representación del problema.] Entonces, es como si se llamara él $P$ a una recta $m$ [Continúa leyendo la definición.], esta es la recta [Señala el $\overrightarrow{YC}$], digamos que es la $m$. Entonces es la longitud del segmento perpendicular [Sigue leyendo.] O sea la medida del segmento [$\overline{IK}$] desde $P$ hasta $m$. Eso es lo que están diciendo. |
| | | […] |
| 711. | Cristian: | Ah, ¿qué sabemos? |
| 712. | Diana: | Entonces sabemos que… la longitud de $KI$ es $5\,cm$ [Señala la representación del problema.] ¿No? |
| 713. | Cristian: | No porque puede ser, puede ser $5$, pueden ser $20$, pueden ser $100\,cm$, pueden ser… |
| 714. | Diana: | Juepuerca estamos como… |
| 715. – 744. | | [El Profesor L interviene para aclarar aspectos relacionados con la notación que se emplea para la medida de los segmentos y para la medida de los ángulos.] |
| | | […] |
| 748. | Cristian: | Sí $IK$… ahí. Pues es la medida, ¿no? $IK$ |
| | | […] |
| 753. | Diana: | Pero ¿cuál es la medida? |
| 754. | Cristian: | Aaah, pues la medida es cualquiera. |
| 755. | Diana: | Entonces sería $IK$. ¿Y qué? |
| | | […] |

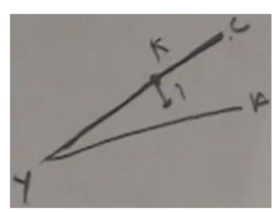
758. Cristian: O sea que la distancia es $IK$, ¿cierto? La medida.
[…]
778. Diana: ¿Y por qué no escribimos…?
779. Cristian: Es la distancia de
780. Diana: $I, K$ distancia del punto a la recta [Escribe en la columna *Qué sé* del segundo paso.]

Las intervenciones de Cristian [696, 698] se relacionan con el aspecto epistémico de su comportamiento porque, en el proceso de justificación, él afirma que primero es necesario reconocer los *datos* antes de establecer la *garantía*. Sin embargo, este comportamiento también lo podemos considerar como comunicativo porque, al reportar cada paso de la justificación en el esquema – deducción, se debe completar de izquierda a derecha. Las intervenciones de Diana [699, 706] también reflejan el aspecto epistémico porque justifica el uso de la definición de distancia de un punto a una recta (*garantía*) al relacionar los elementos geométricos de la representación del problema con los mencionados en la definición. En cuanto a los *datos* que exige Cristian, Diana retorna al trabajo empírico ocurrido en el Episodio 5 y menciona que "la longitud de $KI$ es 5 $cm$". Aunque Cristian le aclara que el segmento puede tener cualquier longitud [713, 754] (aspecto epistémico), la pregunta que ella hace en [753] permite afirmar que no ha entendido que la medida es irrelevante. La aceptación de Diana de usar el símbolo $IK$ es una muestra del aspecto comunicativo con el cual notamos un cambio en el valor epistémico.

En lo que sigue, antes de escribir el segundo paso, Cristian pretende hacer un cambio en la notación representando al $\overrightarrow{YC}$ con la sola letra $C$, acción que Diana objeta. Inmediatamente, ella le aclara que no se debe hacer dicho cambio:

> "No porque tendríamos que el punto que llega acá, que toca con la recta, ése fue el que nombramos $K$ [Sobre la representación de Cristian, dibuja el punto $K$ sobre el $\overrightarrow{YC}$ y traza el $\overline{IK}$.] […] Por eso se llama así ese segmento [Señala el $\overline{IK}$.]" [796].




Aquí se ve el aspecto comunicativo en cuanto a que Diana enfatiza que cada figura geométrica tiene un nombre específico.

En el diálogo que sigue, los estudiantes completan el segundo paso y proponen un tercer paso de la justificación.

| | | |
|---|---|---|
| 798. | Diana: | [En la columna *Qué sé* del segundo paso, cambia $IC$ por $IK$.] Y ahora, ¿qué concluimos? |
| 799. | Cristian: | Ay, yo no sé [susurra]. Tenemos que llegar a que el punto $P$ es perpendicular con el segmento éste [Señala el $\overline{IK}$ en la representación de Cristian.] Eso es lo que tenemos que llegar |
| 800. | Diana: | ¿Qué? |
| 801. | Cristian: | Pues según, si utilizamos esta definición tenemos que concluir que el punto $I$ es perpendicular a esto [Señala el $\overrightarrow{YC}$.] |
| 802. | Diana: | Aja. Entonces pues escribimos: Si $I$ perpendicular con $K$. |
| 803. | Cristian: | Pues yo no sé. |
| 804. | Profesor L: | ¿Un punto puede ser perpendicular con otro? |
| 805. | Cristian: | Tiene que ser perpendicular con un segmento. Pero… |
| 806. | Profesor L: | Miren la figura y díganlo bien. |
| | | […] |
| 811. | Cristian: | Que el segmento $I, K$ es perpendicular con el segmento $Y, C$. |
| | | […] |
| 814. | Diana: | $I, K$ es perpendicular con $Y, C$ [En la columna *Qué concluyo* del segundo paso, escribe $\overline{IK} \perp \overrightarrow{YC}$.] Rayo es con una cosa así [flecha en la parte superior], ¿cierto? Una flechita así. Ya. Uyyy, uy no. Ahora. Ahora escribimos eso [$\overline{IK} \perp \overrightarrow{YC}$] acá [En la columna *Qué sé* del tercer paso.] |
| 815. | Cristian: | No. |
| 816. | Diana: | ¿Qué más nos falta? |
| 817. | Cristian: | Se hace lo mismo con el de abajo [con el $\overrightarrow{YA}$ para plantear que $\overline{IJ} \perp \overrightarrow{YA}$.] |
| 818. | Diana: | ¿Con qué? |
| 819. | Cristian: | ¿No? Se hace lo mismo con el de abajo [$\overrightarrow{YA}$]. |
| 820. | Diana: | Aaah, sí, sí, sí. |
| 821. | Cristian: | Hágalo. |
| 822. | Diana: | Sí. [Como tercer paso, escribe en la columna *Qué sé*: $IJ$ distancia del punto a la recta; *Qué uso*: Definición Distancia de un punto a una recta; *Qué concluyo*: $\overline{IJ} \perp \overrightarrow{YA}$.] Ya. Ahora, eso sí lo escribimos aquí abajo [en la columna *Qué sé* del cuarto paso], esas conclusiones. Que es ahora lo que sabemos, ¿no? |

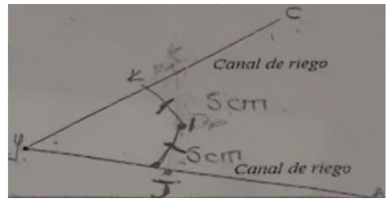
Para completar el segundo paso, Cristian reconoce que la *conclusión* de este paso debe involucrar la perpendicularidad pero él no se expresa correctamente [799, 801]. Esto muestra un asunto problemático de tipo comunicativo que el Profesor L saca a la luz [806]. La intervención de Diana en [814] evidencia dos aspectos: el comunicativo pues se preocupa por usar correctamente la notación para rayos; y el epistémico porque menciona que la *conclusión* que acaban de obtener pasa a ser ahora el *dato* de otro paso. Así se evidencia que ella comprende que una justificación es el encadenamiento de argumentos.

De esta forma, queda establecido el segundo paso de la justificación. Cristian rechaza la propuesta de Diana de colocar como *dato* del tercer paso $\overline{IK} \perp \overrightarrow{YC}$ y propone formular el mismo argumento con respecto al $\overline{IJ}$ y el $\overrightarrow{YA}$ (aspecto teleológico). Pero es Diana quien lo escribe en el esquema como el tercer paso [822] (aspecto epistémico): *datos*, $IJ$ distancia del punto a la recta; *garantía*, Definición Distancia de un punto a una recta; *conclusión*, $\overline{IJ} \perp \overrightarrow{YA}$. Cuando termina de escribir este paso, se reitera la comprensión de Diana de lo que es una justificación cuando sugiere colocar como *datos* en otro paso las *conclusiones* que acaban de obtener (aspecto epistémico), lo cual la lleva a proponer un plan para continuar dicha justificación (aspecto teleológico).

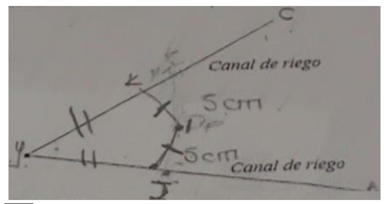
### 4.2.12. Episodio 12: Construyen el cuarto y quinto paso de la justificación [823 – 958]

Diana señala que cada *conclusión* obtenida en los pasos anteriores se convierte en el *dato* que se coloca en la columna *Qué sé* de la tabla. Tras un momento de discusión al interior del grupo por la indisposición de los estudiantes, pues ha transcurrido un poco más de una hora de trabajo, Diana afirma: “Ahora sí sacamos la bisectriz del ángulo, ¿no?”, pero no tiene respuesta de alguno sus compañeros ni del Profesor L. En lo que sigue Cristian y Diana tratan de armar el cuarto paso de la justificación pero el Profesor L les cuestiona una de sus afirmaciones.

| | | |
|---|---|---|
| 846. | Diana: | Ese profesor también no le colabora a uno. [Murmura y escribe como cuarto paso en la columna *Qué sé*: $\overline{KI} \cong \overline{IJ}$, $\overline{IK} \perp \overrightarrow{YC}$, $\overline{IJ} \perp \overrightarrow{YA}$.] Listo. Ahora, ¿qué usamos? Ummm. |
| 847. | Cristian: | Ummm. |
| 848. | Diana: | [Revisa el listado de definiciones y hechos geométricos.] ¡Ay Gordo! Ahí es donde utilizamos lado, ángulo, lado [LAL]. Eso. Sííí, para llegar a lo de la bisectriz. |
| 849. | Cristian: | Muéstreme. ¿Dónde está el lado? [Pregunta cuáles son los lados congruentes.] |
| 850. | Diana: | No lo sé. |
| 851. | Cristian: | ¡Aaah! |
| | | […] |
| 856. | Diana: | Entonces lado, lado, lado [LLL]. |
| 857. | Cristian: | Sabemos que este lado es congruente con este lado [Marca el $\overline{KI}$ y el $\overline{IJ}$ para indicar que $\overline{KI} \cong \overline{IJ}$.] Listo. |




| | | |
|---|---|---|
| 858. | Diana: | Eso, eso, eso. |
| 859. | Cristian: | Y ¿dónde están los otros dos lados? |
| 860. | Diana: | No lo sé. |
| 861. | Cristian: | Pues lo podemos sacar |
| 862. | Diana: | Ah. |
| 863. | Cristian: | Estos dos son congruentes [Marca el $\overline{YK}$ y el $\overline{YJ}$ para indicar que $\overline{YK} \cong \overline{YJ}$.] Breve. Otro lado. |




| | | |
|---|---|---|
| 864. | Profesor J: | ¿Sí saben eso [$\overline{YK} \cong \overline{YJ}$]? |
| 865. | Diana: | No. |
| 866. | Cristian: | Lo podemos sacar. |
| 867. | Diana: | Entonces… no sé. Nada más podríamos utilizar estos dos [segmentos: el $\overline{KI}$ y el $\overline{IJ}$]. |

Al inicio de este fragmento, Diana presenta un argumento [846, 848] en el cual los *datos* son las *conclusiones* de los tres pasos anteriores, la *garantía* es el hecho geométrico LAL para la congruencia de triángulos, y la *conclusión* es que el punto está en la bisectriz del ángulo, pero se da cuenta que es incorrecto a partir del control epistémico que le hace Cristian [849] a la *garantía* que ella dice. Por esto, ella propone otra *garantía* [856] y Cristian reacciona haciendo el mismo control epistémico cuando le pregunta por la congruencia del otro par de lados [859]. Al final del fragmento, bajo el cuestionamiento del Profesor L, los estudiantes caen en cuenta que les falta asegurar la congruencia del otro par de lados. Mientras que Cristian siente que pueden establecer esta congruencia, Diana manifiesta no estar tan segura de que se pueda hacer. De esta manera, nos damos cuenta que los estudiantes saben cuáles son los nuevos *datos*, saben cuál es la *conclusión* pero no han podido encontrar la *garantía*.

Después, el Profesor L les pregunta qué *garantía* podrían usar teniendo en cuenta los *datos* que han establecido. A partir de esa pregunta los estudiantes completan el cuarto paso de la justificación.

| | | |
|---|---|---|
| 871. | Diana: | Usamos la definición de rectas perpendiculares. Entonces esto [$\overline{KI} \cong \overline{IJ}$] todavía no lo usaríamos. Ah, estas dos [Señala con el lápiz $\overline{IK} \perp \overrightarrow{YC}$ y $\overline{IJ} \perp \overrightarrow{YA}$] y ésta todavía [Señala y borra en la columna *Qué sé* del cuarto paso: $\overline{KI} \cong \overline{IJ}$. Y en la columna *Qué uso* escribe: Definición de rectas perpendiculares.] |
| 872. | Cristian: | Ahí ya sabemos que son ángulos de 90º. |
| | | […] |
| 875. | Diana: | [Lee la definición de rectas perpendiculares.] Dos rectas son perpendiculares si se intersecan y determinan cuatro ángulos rectos… |
| 876. | Cristian: | Sabemos que, ahora sí sabemos que son ángulos rectos. |
| 877. | Diana: | Pues sí pero ¿cómo escribo en lo *Qué concluyo*? |
| 878. | Cristian: | Pues mire la gráfica. Si esto es perpendicular y esto es perpendicular [Marca los ángulos $\angle IKC, \angle IKY,\ \angle IJY,\ \angle IJA$ para indicar que son ángulos rectos.] |
| | | […] |
| 881. | Diana: | Eso es lo que le estoy diciendo. Que me ayude a ver cómo concluyo. |
| 882. | Cristian: | Pues escribimos que… pues escribimos los cuatro ángulos que son rec… que son de 90º, ¿no? |
| 883. | Diana: | Que son… $I, J, Y$ [Señala en la representación del problema.] ¿Sí? |
| 884. | Cristian: | $I, J, Y$; $I, K, Y$; $I, K, C$; $I, J, A$ [Señala sobre la representación los ángulos: $\angle IJY, \angle IKY, \angle IKC,\ \angle IJA$]. Cuatro ángulos perpendiculares. |
| 885. | Diana: | ¿Perpendiculares? |
| 886. | Cristian: | Eh, rectos y usted hubiera hecho con uno y después con el otro. Con eso no nos hubiéramos escrito tanto. Hágale. |
| 887. – 921. | | [Los estudiantes tuvieron dificultades para expresar la conclusión porque, primero dijeron que la medida de los ángulos fuera 90º; después, que fueran congruentes. Por eso, el Profesor L tuvo que intervenir para que finalmente escribieran que los ángulos son rectos.] |
| 922. | Diana: | ¿Qué era? ¡Ah, ya! [Lo que había borrado anteriormente lo vuelve a escribir en la columna *Qué sé* del cuarto paso: $\overline{IJ} \perp \overrightarrow{YA}$.] Ahora sí. Ángulo $I, K, C$… [Escribe en la columna *Qué concluyo* del cuarto paso: $\angle IKC$, $\angle IKY,\ \angle IJY,\ \angle IJA$ son ángulos rectos.] Siguiente. |

Lo anterior muestra que Diana se da cuenta que la *garantía* que pueden usar con esos *datos* es la definición de rectas perpendiculares, pero no encuentra la respectiva *conclusión*. Para determinarla, podemos reconocer que en la intervención de Cristian [878] hay una cuestión relacionada con la comunicación porque, a través de lo que él observa en la gráfica, puede indicarle a Diana cuáles son los ángulos rectos (*conclusión*). De este modo, la gráfica se convierte en una fuente de información con la cual se puede decir lo que tendría que ser verdadero.

Terminado el cuarto paso de la justificación, inmediatamente Diana y Cristian, con la guía del Profesor J, escriben el quinto paso.

| | | |
|---|---|---|
| 923. | Cristian: | Ésta. ¿Dónde está? Ésta [Señala el hecho geométrico en el listado que expresa que los ángulos rectos son congruentes.] |
| 924. | Diana: | Escriba acá [sobre la hoja]. |
| 925. | Cristian: | Pues ésta [Señala lo que se concluye en el cuarto paso.] |
| 926. | Diana: | Pues ahí ya sé. |
| 927. | Cristian: | Y luego ésta [Parece ser que señala el hecho geométrico de ángulos rectos.] y ya sabemos que son rectos. |
| 928. | Profesor L: | ¿Y ya lo dijeron? |
| 929. | Diana: | Pues acá ya sabemos que son ángulos rectos [Señala la columna *Qué concluyo* del cuarto paso.] |
| 930. | Cristian: | Entonces acá ya sabemos que miden 90º porque ya sabemos que son ángulos rectos. |
| 931. – 956. | | [El Profesor L guía a los estudiantes para que utilicen como *garantía* el hecho geométrico que Cristian mencionó, y fueran completando las otras dos columnas de la tabla. Escriben en la columna *Qué concluyo*: $\angle IKC \cong \angle IKY$, $\angle IJY \cong \angle IJA$; y en la columna *Qué sé*: $\angle IKC$, $\angle IKY$, $\angle IJY$, $\angle IJA$ son ángulos rectos.] |

Cristian formula un argumento deductivo incompleto, en el que se tiene como *garantía* el hecho geométrico de ángulos rectos; como *datos* la conclusión del paso anterior; y no indica cuál es la *conclusión*. Luego que Diana repite los *datos* ya mencionados, Cristian propone otro argumento deductivo incompleto porque, para los *datos* (los ángulos son rectos) y la *conclusión* (los ángulos miden 90º), él no señala la *garantía* correspondiente [930].

### 4.2.13. Episodio 13: Establecen la congruencia de los dos triángulos [959 – 1281]

Hasta el Episodio 12, al parecer los estudiantes son conscientes de que deben justificar congruencia de triángulos. Por ejemplo, en el Episodio 8, Diana señaló la congruencia de triángulos, idea que se descartó debido a que el *conflicto epistémico* de Cristian, con respecto a la existencia de la bisectriz, no permitió la representación de triángulos y que en este episodio uno de los profesores ve la necesidad de aclararlo; en el episodio anterior ella nombró dos hechos geométricos que podrían ser útiles para justificar dicha congruencia. En este episodio, ellos se dedican a determinar la congruencia entre las partes correspondientes del $\Delta IKY$ y del $\Delta IJY$, descubrir que el hecho geométrico que asegura la congruencia de los dos triángulos es el de Hipotenusa – Cateto (HC), y concluir el sexto paso de la justificación. A continuación, el Profesor J pide a los estudiantes que repitan lo que habían dicho cuando señalaron sobre la representación del problema que $\overline{KI} \cong \overline{IJ}$ y que $\overline{YK} \cong \overline{YJ}$. Cristian recuerda que Diana mencionó los hechos geométricos lado, lado, lado [LLL] y lado, ángulo, lado [LAL], y le manifiesta al Profesor J su confusión sobre la congruencia de los triángulos.

968. Cristian: Estoy confundido en… es que no sé. Porque sí… […] Sabemos que estos dos son congruentes [$\overline{KI} \cong \overline{IJ}$].

969. Profesor J: Aja.

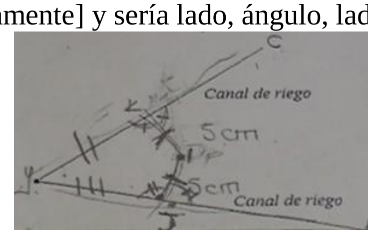
970. Cristian: Cierto. Sabemos que estos dos ángulos son congruentes, igual que estos dos ángulos [Marca los ángulos rectos $\angle IKC$, $\angle IKY$, $\angle IJY$, $\angle IJA$ para indicar que son congruentes.] ¿Cierto? Ahí vamos.

971. Diana: Aja.

972. Cristian: Entonces toca sacar algo más.

[…]

978. Diana: Vea porque es que acá sería… Sí porque vea… Si acá [en la representación del problema] el profesor nos enseñó con rayitas, ¿cierto? Entonces que son congruentes [Retiñe la marca hecha sobre el $\overline{IK}$ y el $\overline{IJ}$.] Entonces fuuun acá se ponen dos rayitas [para indicar que $\angle IJY \cong \angle IJA$] y aquí se ponen tres [al $\overline{YJ}$ solamente] y sería lado, ángulo, lado.




[…]

981. Cristian: […] [Borra en la representación del problema una de las marcas que Diana hizo al $\overline{YJ}$.] Póngale cuidado. Tenemos que deducir… tenemos que estos dos [$\overline{YK}$ y $\overline{YJ}$] son congruentes.

El anterior diálogo muestra dos aspectos del comportamiento racional: el aspecto epistémico cuando Cristian afirma que les falta un *dato* más para llegar a la congruencia de triángulos [972], y el aspecto comunicativo cuando, por un lado, Diana indica sobre la representación gráfica la información de congruencia que tienen [978], y por otro, cuando Cristian hace una corrección sobre dicha representación [981].

Posteriormente, el Profesor L pregunta cuál hecho geométrico querían usar para asegurar la congruencia de los triángulos y les hace caer en cuenta que éste se usa cuando hay triángulos, figuras que no están representadas en la hoja (Figura 22). Él les sugiere que tracen la bisectriz para que puedan visualizar los dos triángulos. Cristian, con algo de duda, muestra en el computador la bisectriz del $\angle CYA$ (Figura 23) y Diana la traza en la representación en papel (Figura 24). En el siguiente diálogo el Profesor J aborda el *conflicto epistémico* de Cristian, y que se manifestó en los Episodios 3, 6, 7 y 8.

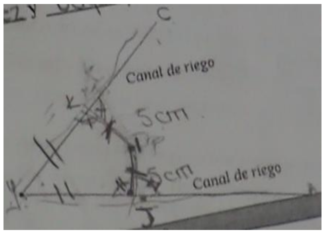



**Figura 22.** Representación del problema sin la bisectriz $\overrightarrow{YI}$

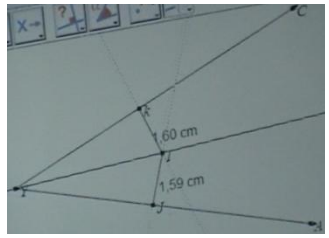



**Figura 23.** Representación del problema hecha en Cabri

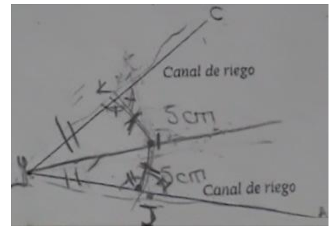



**Figura 24.** Representación del problema con la bisectriz $\overrightarrow{YI}$

| | | |
|---|---|---|
| 1014. | Profesor J: | Yo sé cuál es el problema de Cristian. Cristian quiere construir la bisectriz. Quiere construirla, no quiere verla sino hasta cuando la pueda demostrar, ¿cierto? Pero resulta que la bisectriz está ahí. Lo que hay es que demostrar es que ése punto [$I$] pertenece a esa bisectriz [$\overrightarrow{YI}$]. ¿Sí me entienden? |
| 1015. | Cristian: | ¿Ese punto? |
| 1016. | Profesor J: | ¿Qué es lo que dice ahí? [Lee la conjetura.] Si la distancia de un punto a cada lado de un ángulo es igual entonces el punto está sobre la bisectriz del ángulo. ¿Se dan cuenta que la bisectriz existe? Entonces si existe nos permite, en cierta manera, usarla así como visualmente. […] |
| 1017. | Diana: | Pues ahí, yo veo los triángulos, ¿no Gordo? |
| 1018. | Cristian: | Ahí sí yo veo los triángulos. Puedo sacar un hecho geométrico de lado, ángulo, lado [LAL]. |
| 1019. | Diana: | Aja. |
| 1020. | Profesor J: | Pero ¿cuál sería el lado, el ángulo y el lado? |
| 1021. | Diana: | Lado, ángulo, lado, ¿no? |

Con su intervención, el Profesor J intenta explicar que la bisectriz del ángulo existe pero que el rayo que quieren construir no necesariamente lo es, cuestión que los estudiantes parece que aceptan y que les permite avanzar en la justificación. Tanto Diana como Cristian identifican los triángulos y reafirman (aspecto teleológico) que una posibilidad para lograr su congruencia es usar el hecho geométrico LAL.

Previo a las intervenciones que se muestran en seguida, se generó una interacción entre el Profesor L y los estudiantes que los llevó a reconocer de nuevo la congruencia de los lados $\overline{IK}$ e $\overline{IJ}$, la congruencia de los ángulos rectos $\angle IKY$ y el $\angle IJY$ que no habían considerado antes, cosa que consigan en la *conclusión* del quinto paso, y a proponer el establecimiento de la congruencia entre $\overline{YK}$ y $\overline{YJ}$ para usar el hecho geométrico LAL. Esta propuesta de

Cristian evidencia el aspecto teleológico. Sin embargo, el Profesor L les aclara que, de acuerdo con la construcción inicial, justificar dicha congruencia no es posible, lo que motiva a Cristian a buscar la congruencia de otro par de lados. Finalmente descubren que el hecho geométrico que deben usar es el de HC.

| | | |
|---|---|---|
| 1103. | Cristian: | O, podemos sacar el de acá [Señala el $\overline{YI}$] |
| 1104. | Profesor L: | ¿Cuál? |
| | | […] |
| 1111. | Cristian: | Éste mire. Éste [Señala nuevamente en la pantalla del computador el $\overline{YI}$] Que digamos que de forma inversa. Es que no me acuerdo cómo se… |
| 1112. | Diana: | Aaah, la propiedad reflexiva. |
| 1113. | Cristian: | Eso. Ahí está. Eso era lo que yo quería decir. |
| 1114. | Diana: | Ahora sí llegamos a otra cosa peor. |
| 1115. | Cristian: | No porque ahí podemos definir que es otro lado con la propiedad reflexiva. |
| 1116. | Diana: | Entonces sería ángulo, ¿lado, lado [ALL]? Pero eso no existe. |
| 1117. | Cristian: | No. |
| 1118. | Diana: | Entonces sería lado, ángulo, ángulo [LAA]. ¡Ah, no! Tampoco [Risas.] |
| 1119. | Cristian: | Entonces sería H, C [Hecho geométrico Hipotenusa – Cateto] [Risas.] |
| 1120. | Profesor L y Profesor J | ¿Y por qué es H, C? |
| 1121. | Diana: | No porque sería hipotenusa y cateto. ¡Ayyy sí! No mentiras. No porque |
| 1122. | Cristian: | ¿Qué significa esto Diana? [Señala el hecho geométrico para la congruencia de triángulos rectángulos Hipotenusa – Cateto] |
| 1123. | Diana: | Hipotenusa y Cateto es que, que son ángulos rec… triángulos rectángulos o rectos. Yo no sé. Algo así. |

Cuando Cristian destaca la congruencia de otro par de lados, se evidencia el aspecto epistémico porque, en lo que dice, podemos ver un argumento deductivo completo en el cual el *dato* es el $\overline{YI}$ que muestra en la figura, la *conclusión* es que el $\overline{YI}$ es congruente consigo mismo, y la *garantía* es la propiedad que él llama “inversa”. Diana dice correctamente el nombre de la propiedad a la que él se refiere (aspecto comunicativo). En la búsqueda que Diana y Cristian realizan del hecho geométrico que se ajuste a los *datos* que tienen, se evidencia el aspecto teleológico.

Después el Profesor L solicita al grupo que escriban ordenadamente el reporte de su discusión porque pueden olvidar los dos aspectos útiles para la justificación, que han mencionado y que no han escrito en el esquema. A continuación, los estudiantes escriben el sexto paso de la justificación.

| | | |
|---|---|---|
| 1148. | Diana: | […] lo que usamos es la propiedad reflexiva [Escribe en la columna *Qué uso* del sexto paso: Propiedad reflexiva.] Dígame si no. |

[…]

1151. Cristian: Y sabemos que $Y, I\ldots$

1152. Diana: Espere, espere. Ahora lo que concluimos es que $Y$ y $I$,

1153. Cristian: Es congruente

1154. Diana: Con $I$ y $Y$.

1155. Cristian: ¡Uy! Severo.

1156. Diana: [Escribe en la columna *Qué concluyo* del sexto paso: $\overline{YI} \cong \overline{IY}$.] Ay, Dios mío. Entonces lo que sabemos [Risas.]

1157. Cristian: Pues que $Y, I$ y $I, Y$ [Escribe en una hoja $YI$ y $IY$.]

1158. Diana: No porque eso es lo que, es lo que

1159. Cristian: No porque yo no estoy diciendo que son congruentes. Porque $Y, I$ y $I, Y$.

1160. Diana: Ummm, no.

1161. – 1177. [Diana y Cristian discuten lo que van a escribir en la columna *Qué sé* del sexto paso de la justificación.]

1178. Cristian: Pues que $Y, I$ comparte lado con el triángulo de arriba [$\Delta YKI$] y con el triangulito de abajo [$\Delta YJI$].

1179. Diana: Que el triángulo $K, I, Y$

1180. Cristian: Y el triángulo

1181. Diana: $J, Y, I$ comparten

1182. Cristian: El segmento

1183. Diana: El segmento $Y, I$

1184. Diana: [Escribe en la columna *Qué sé* del sexto paso: Que el $\Delta KIY$ y el $\Delta JIY$ comparten el $\overline{YI}$.]

En este fragmento, Diana y Cristian de manera conjunta escriben su argumento matemáticamente, cada uno aportando en su momento la expresión matemática que se debía usar, lo cual es una muestra del aspecto comunicativo. Vale la pena resaltar aquí que, aun cuando el argumento lo construyeron deductivamente, escribir el reporte en el formato los hizo dudar respecto a cuál era el *dato* en ese argumento; para expresar la congruencia del $\overline{YI}$ con sí mismo, aunque ven sólo un segmento, sienten la necesidad de poder hablar de dos y los nombran con las letras en orden distinto.

Antes de continuar la justificación y frente al poco tiempo que les queda para terminar la tarea, los estudiantes examinan nuevamente los *datos* deducidos y lo representan en la figura de la hoja.

1200. Cristian: Sabemos… sabemos esto: que el segmento $I, J$ y el segmento $I, K$ son congruentes [$\overline{IJ} \cong \overline{IK}$]; que el ángulo […] $I, J, Y$ es congruente con el ángulo $I, K, Y$ [$\angle IJY \cong \angle IKY$]; […] sabemos que el segmento $I, Y$ y el segmento $I, Y$ son congruentes [$\overline{IY} \cong \overline{IY}$].

1201. Diana: Excelente.

1202. Dayana: Excelente [Risas.]

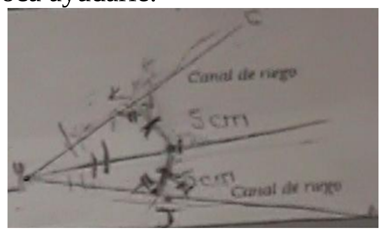
1203. Cristian: Eso es lo que sabemos. O sea que ahí no va eso

1204. Diana: [Borra suavemente las marcas que indican la congruencia de $\overline{YK}$ y $\overline{YJ}$.]

1205. Cristian: Eso. Va $I, Y$.

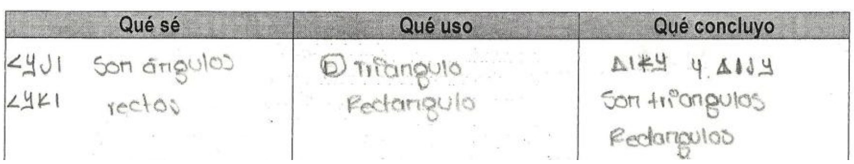
1206. Diana: [Marca el $\overline{YI}$ con una raya, lo cual indica que $\overline{IK} \cong \overline{IJ} \cong \overline{YI}$.]

1207. Cristian: No. Son dos rayitas. Pues mire [Toma el lápiz que tiene Diana y hace otra marca sobre el $\overline{YI}$.] Toca ayudarle.




En este diálogo, podemos establecer una preocupación de índole comunicativa cuando Cristian le corrige a Diana la forma como debe registrar la información deducida en la gráfica. Marcar la figura es para ellos parte del plan que les permite verificar que HC es el hecho geométrico que deben usar para concluir que los dos triángulos son congruentes (aspecto teleológico).

Luego, el Profesor J interviene en ese momento para recordarles a los estudiantes que el hecho geométrico HC exige establecer antes que los triángulos son rectángulos y les ayuda a construir el séptimo paso de la justificación (Figura 25). Los estudiantes revisan una vez más los *datos* que tienen y elaboran el octavo paso.



| Qué sé | Qué uso | Qué concluyo |
|---|---|---|
| <YJI <YKI Son ángulos rectos | (5) triángulo Rectángulo | ΔIKY y ΔIJY Son triángulos Rectángulos |

**Figura 25.** Octavo paso de la justificación

1273. Diana: [En el octavo paso, escribe en la columna *Qué uso*: Hecho geométrico HC, y en la columna *Qué concluyo*: $\Delta IKY \cong \Delta IJY$.]

1274. Profesor L: Eso. Pero para poder utilizarlo [el hecho geométrico HC], ¿qué necesitan saber?

[…]

1280. Cristian: Que el segmento $I, J$ y el segmento $I, K$ son congruentes. Que el ángulo $I, J, Y$ y el ángulo $I, K, Y$ son congruentes. Y que el segmento $I, Y$ y el segmento $I, Y$ son congruentes. Por lo tanto podemos utilizar esto [Señala en la columna *Qué uso* del octavo paso: Hecho geométrico HC] y concluir esto [Al parecer señala la conclusión del octavo paso: $\Delta IKY \cong \Delta IJY$.]

1281. Diana: [Mientras Cristian expone su idea, ella escribe solamente en la columna *Qué sé* del octavo paso: $\Delta IKY$ y $\Delta IJY$ son triángulos rectángulos.]

En la intervención de Cristian reconocemos un argumento deductivo incompleto pues le falta incluir como *dato* que los triángulos son rectángulos. Diana escribe ese *dato* pero no todos los demás ($\overline{IJ} \cong \overline{IK}$, $\angle IJY \cong \angle IKY$ e $\overline{IY} \cong \overline{IY}$). En este argumento, la *garantía* es el hecho geométrico HC y la *conclusión* es la congruencia entre los triángulos $\Delta IKY$ y $\Delta IJY$.

### 4.2.14. Episodio 14: Analizan el uso de la congruencia entre los triángulos en la justificación [1282 – 1521]

Terminado el octavo paso de la justificación, el Profesor J cuestiona la utilidad de haber concluido que $\Delta IKY \cong \Delta IJY$ y pregunta cuál es la meta a la que se quiere llegar. Cristian responde que ellos deben concluir que el punto $I$ pertenece a la bisectriz del $\angle CYA$ (aspecto epistémico). Luego, el Profesor J pide que lean la definición de bisectriz de un ángulo, indiquen en la representación del problema cuáles son los dos ángulos congruentes a los que se refiere dicha definición y expliquen por qué se puede afirmar que $\angle IYK \cong \angle IYJ$. En el siguiente diálogo, los estudiantes formulan diferentes tipos de argumentos para justificar dicha congruencia.

| | | |
|---|---|---|
| 1324. | Diana: | Pues podemos descubrir que son congruentes esos dos ángulos. Entonces sabemos que son congruentes porque… |
| 1325. | Cristian: | [Lee la definición de ángulos congruentes.] Dos ángulos son congruentes si tienen la misma medida. |
| 1326. | Diana: | Tienen la misma medida. |
| 1327. | Cristian: | ¿Cómo sabemos que esos dos ángulos tienen la misma medida Diana? |
| 1328. | Diana: | ¿Cómo se saben si tienen la misma medida? Pues midiendo. |
| 1329. – 1345. | | [De acuerdo con los pasos anteriores, el Profesor L pregunta a los estudiantes qué es lo último que saben. Mientras que Diana responde que hay dos triángulos, Cristian afirma que hay dos triángulos congruentes.] |
| 1346. | Cristian: | […] Si los dos triángulos son congruentes podemos deducir que […] [Señala en la pantalla de Cabri del computador.] los ángulos son congruentes. Porque ya sabemos que el triángulo es congruente. ¿Cierto? Pues eso es lo que sabemos. |
| 1347. | Profesor L: | ¿Qué usa para justificar [la congruencia entre los ángulos $\angle IYK \cong \angle IYJ$]? |
| 1348. – 1359. | | [Debido a que Diana y Cristian nombran algunas definiciones que involucran ángulos, ambos profesores piden que aprovechen lo que saben, es decir, aquello que ya concluyeron.] |
| 1360. | Diana: | Que los dos triángulos son congruentes [Señala la conclusión del octavo paso.] |
| 1361. | Profesor J: | ¿Y qué son triángulos congruentes? |
| | | […] |
| 1364. | Diana: | [Lee la definición de triángulos congruentes en el listado.] Dos triángulos |

| | | |
|---|---|---|
| | | son congruentes si existe una correspondencia entre sus vértices tal que sus lados y ángulos correspondientes son congruentes. O sea que de ahí sacamos que los ángulos son congruentes porque ahí lo dice. […] […] |
| 1375. | Cristian: | Sí. Pero, ¿cómo hacemos para llegar a eso? ¿Qué usamos para llegar a eso [Diana escribe en la columna *Qué concluyo* del noveno paso: $\angle KIY \cong \angle JIY$]? |
| 1376. – 1382. | | [El Profesor J le indica al grupo que la conclusión del noveno paso está mal escrita. Por eso, Diana escribe: $\angle KYI \cong \angle JYI$.] |
| 1383. | Diana: | ¿Qué usamos? |
| 1384. | Profesor L: | ¿Qué fue lo que usamos? |
| 1385. | Diana: | [Susurra.] Triángulos congruentes. Triángulos congruentes, ¿no? [Escribe en el *Qué uso* del noveno paso: Definición de triángulos congruentes.] |
| 1386. | Cristian: | Y sabemos esto [Al parecer señala la conclusión del octavo paso: $\Delta IKY \cong \Delta IJY$.] |
| 1387. | Profesor J: | Aja. |
| 1388. | Diana: | [Escribe en la columna *Qué sé* del noveno paso: $\Delta IKY \cong \Delta IJY$.] Listo. |

Inicialmente, de manera colectiva, Diana y Cristian realizan un primer argumento [1324 – 1328] abductivo completo porque, para explicar que los ángulos $\angle IYK$ e $\angle IYJ$ son congruentes (*conclusión*), Diana propone usar la definición de ángulos congruentes (*garantía*), lo cual significaría mostrar que tienen la misma medida (*datos*); Cristian a su vez propone que son ángulos de triángulos congruentes (*datos*). Luego, Diana provee la *garantía* que Cristian no da y la valida a partir de la lectura de esa definición (aspecto epistémico). Al final, de [1375] a [1388] arman el argumento deductivo correspondiente.

A continuación, Diana y Cristian comienzan a escribir el décimo paso de la justificación.

| | | |
|---|---|---|
| 1389. | Cristian: | Ahora sabemos esto. [Señala la conclusión del noveno paso: $\angle KYI \cong \angle JYI$.] |
| 1390. | Diana: | Ahora nos falta [Escribe en la columna *Qué sé* del décimo paso: $\angle KYI \cong \angle JYI$.] |
| 1391. | Cristian: | Y ahí podemos utilizar la [definición] de bisectriz de un ángulo. |
| 1392. | Diana: | [Escribe en la columna *Qué uso* del décimo paso: Definición de bisectriz de un ángulo.] Y si utilizamos la [definición] de bisectriz de un ángulo concluimos que… concluimos… |
| 1393. | Cristian: | ¿A qué tenemos que llegar? |
| 1394. | Diana: | Pues dice que el punto está sobre la bisectriz del ángulo [Señala el consecuente de la conjetura.] Entonces concluimos que… |
| 1395. | Cristian: | Pues ahí ya acabamos, ¿no? |
| 1396. | Diana: | Pero debemos concluir algo. |
| 1397. | Cristian: | Pues eso. |
| 1398. | Diana: | ¿Qué? |

| | | |
|---|---|---|
| 1399. | Cristian: | El *entonces*. |
| 1400. – 1413. | | [Ambos profesores intervienen para que los estudiantes puedan escribir la respectiva conclusión.] |
| 1414. | Cristian: | Pues conseguimos una bisectriz. Si son congruentes [$\angle KYI$ y $\angle JYI$], conseguimos una bisectriz. Entonces conseguimos la bisectriz $,I$.<br>[…] |
| 1434. | Diana: | ¡Ay! [Escribe finalmente en la conclusión de la décima afirmación: Conseguimos la bisectriz $YI$]<br>[…] |

Cristian presenta un argumento deductivo completo (aspecto epistémico) en el que se tiene explícitamente: *dato*, $\angle KYI \cong \angle JYI$; *garantía*, la definición de bisectriz de un ángulo; y *conclusión*, que el punto está sobre la bisectriz del ángulo. Enseguida, Diana hace una objeción de índole epistémica a la *conclusión* de Cristian porque al usar dicha *garantía* se debe concluir que el $\overrightarrow{YI}$ es la bisectriz del $\angle CYA$. Esta objeción hace que él revise su argumento y cambie su *conclusión*. Enseguida, durante las intervenciones [1437 – 1505], evidenciamos un *conflicto epistémico de la notación de la bisectriz* en el cual los estudiantes no quedaron satisfechos con la *conclusión* que obtuvieron porque no llegaron al consecuente de la conjetura. Este conflicto hizo que el Profesor L interviniera para aclararles que el haber concluido que el $\overrightarrow{YI}$ es la bisectriz, podían afirmar que el punto $I$ está en la bisectriz, porque ellos no comprendían que al nombrar ese rayo como $\overrightarrow{YI}$ se tiene que el punto $I$ pertenece a dicho objeto. Luego que los estudiantes aceptaron la explicación que el Profesor L ofreció para el último paso de la justificación, ellos escribieron como *dato* que la bisectriz del $\angle CYA$ es $\overrightarrow{YI}$ y como *conclusión* que $I \in \overrightarrow{YI}$. Al no poder establecer la correspondiente *garantía* y tras dos horas para justificar la conjetura, el Profesor L afirma que deben usar la definición de "pertenecer a", la cual no se empleó en el desarrollo de alguna de las actividades de la secuencia didáctica, por tanto no se incluyó en el sistema teórico local conformado.

### 4.2.15. Síntesis correspondiente al análisis del comportamiento racional y argumental de los estudiantes en el proceso de justificación

En este apartado mostramos una síntesis del comportamiento racional y argumental de los estudiantes durante el proceso de justificación en las Tablas 18, 19 y 20, tal como lo hicimos para el proceso de conjeturación. Estas tablas las dividimos hasta un determinado episodio para lograr mayor claridad en la correspondiente lectura. Además, recordamos tener en cuenta que: los números escritos en paréntesis cuadrados corresponden a las intervenciones de los estudiantes; si el número de la intervención está acompañado de un asterisco (*) significa que se presentó el *conflicto epistémico* sobre la existencia de la bisectriz; las letras D, G y C indican el *dato*, la *garantía* y la *conclusión* de un argumento deductivo o abductivo, respectivamente; y los subíndices escritos de la forma $(a,\ b)$ en la columna Tipo de Argumento indican el número del episodio y el número del argumento formulado en dicho episodio.

**Tabla 18.** Síntesis correspondiente al análisis del comportamiento racional y argumental de los estudiantes en el proceso de justificación (Episodios 1 a 6)

| **Episodio** | | **Comportamiento Racional** | | | **Tipo de Argumento** | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | | | | *Deductivo* | | *Abductivo* | |
| | **Sujeto (s)** | *Epistémico* | *Comunicativo* | *Teleológico* | *Completo* | *Incompleto* | *Completo* | *Incompleto* |
| **1** | Cristian | | | [9] | | | | |
| | Diana | | | | | $C_{(1,1)}$-$D_{(1,1)}$: [13] | | |
| **2** | Cristian | [60] | | | | $D_{(2,1)}$: [44] $G_{(2,1)}$: [60] | | |
| | Diana | [59] | | | | $G_{(2,1)}$: [59] | | |
| **3** | Cristian | [103], [103]* | [101] | | | | | |
| | Diana | | [112-116] | | | | | |
| **4** | Cristian | [150] | | [128-130] | | | | |
| **5** | Cristian | [194], [203-209], [234], [259] | [162], [240], [259] | | $C_{(5,1)}$-$D_{(5,1)}$: [196] | | | |
| | Diana | [166], [197], [219- 224] [258] | [185] | [166], [168] | $G_{(5,1)}$: [197] $_{(5,2)}$: [219-224] | | | |
| **6** | Cristian | [358-384], [394], [408], [410], [411]* | | | D-G-$C_{(6,4)}$: [358-384] D-G-$C_{(6,5)}$: [394, 397, 405] | $D_{(6,3)}$: [334] $C_{(6,3)}$: [338] | D-G-$C_{(6,2)}$: [299-320] | |
| | Diana | [410], [412] | [369] | | | $D_{(6,1)}$-$G_{(6,1)}$: [298] | | |

**Tabla 19.** Síntesis correspondiente al análisis del comportamiento racional y argumental de los estudiantes en el proceso de justificación (Episodios 7 a 11)

| Episodio | | **Comportamiento Racional** | | | **Tipo de Argumento** | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | **Sujeto (s)** | *Epistémico* | *Comunicativo* | *Teleológico* | *Deductivo* | | *Abductivo* | |
| | | | | | *Completo* | *Incompleto* | *Completo* | *Incompleto* |
| **7** | Cristian | [433-436]* | | | | | | |
| | Dayana | [423] | | | | | | $G_{(7,1)}$: [430]<br>$C_{(7,1)}$: [432] |
| **8** | Cristian | [452-459], [473-477]* | | [463-471] | | | | |
| | Diana | | | 451, [466-472] | | | | |
| **9** | Cristian | [480-482] | | | | | | |
| | Dayana | | [507] | | | | | |
| **10** | Cristian | [539] | | [519], [543] | $D_{(10,1)}$: [539] | $G_{(10,2)}$-$C_{(10,2)}$: [548]<br>$G_{(10,3)}$-$C_{(10,3)}$: [555] | | |
| | Diana | [542] | [571] | | $G_{(10,1)}$-$C_{(10,1)}$: [542] | $C_{(10,4)}$: [560]<br>$D_{(10,4)}$: [563] | | |
| **11** | Cristian | [678], [680], [696-698], [713-754] | [696-698] | [817] | | | | |
| | Diana | [699-706], [814], [822] | [755], [796], [814] | [822] | D-G-$C_{(11,1)}$: [822] | | | |

**Tabla 20.** Síntesis correspondiente al análisis del comportamiento racional y argumental de los estudiantes en el proceso de justificación (Episodios 12 a 14)

| **Episodio** | **Sujeto (s)** | **Comportamiento Racional** | | | **Tipo de Argumento** | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | *Epistémico* | *Comunicativo* | *Teleológico* | *Deductivo* | | *Abductivo* | |
| | | | | | *Completo* | *Incompleto* | *Completo* | *Incompleto* |
| **12** | Cristian | [849], [859] | [878] | | $C_{(12,2)}$: [878] | $G_{(12,3)}$: [923] $D_{(12,3)}$: [925] $D_{(12,4)}$-$C_{(12,4)}$: [930] | | |
| | Diana | | | | D-G-$C_{(12,1)}$: [846, 848, 856] $D_{(12,2)}$-$G_{(12,2)}$: [871] | | | |
| **13** | Cristian | [972], [1103-1115] | [981], [1148-1184], [1207] | [1018], [1119], [1200-1207] | D-G-$C_{(13,1)}$: [1103-1115] | $G_{(13,2)}$-$C_{(13,2)}$: [1280] | | |
| | Diana | | [978], [1112], [1148- 1184], [1206] | [1017-1021], [1116-1118], [1200-1207] | | | | |
| **14** | Cristian | [1389-1414] | | | D-G-$C_{(14,2)}$: [1389-1414] | | | |
| | Diana | [1364], [1396]* | | | | | | |
| | Diana y Cristian | | | | | | D-G-$C_{(14,1)}$: [1324–1328] | |

En seguida, en las Figuras 26 y 27, representamos la anterior síntesis mediante diagramas de barras para indicar la frecuencia de las intervenciones de los estudiantes que están relacionadas, primero, con los tres aspectos del comportamiento racional y segundo, con el tipo de argumentos que ellos formularon.

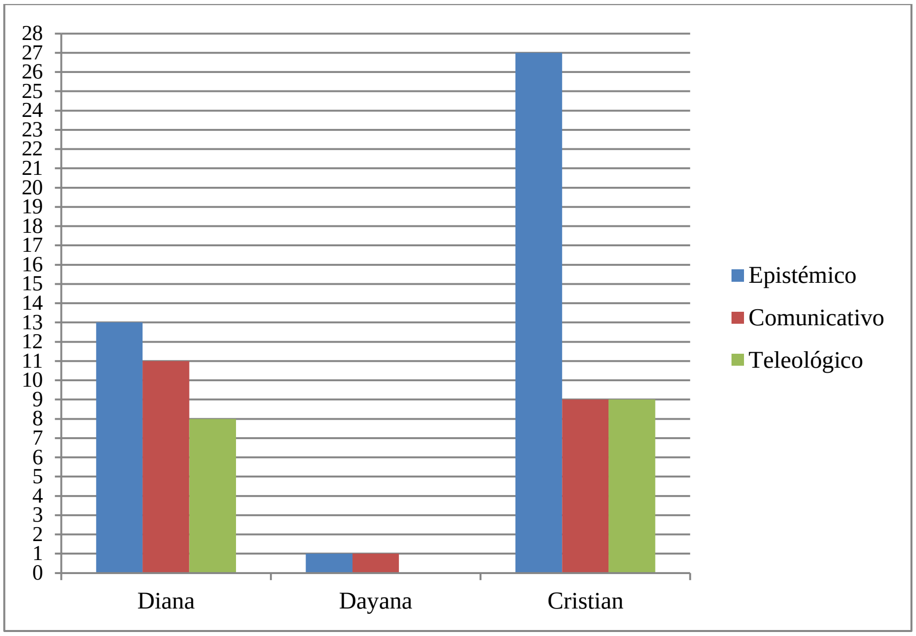



**Figura 26.** Comportamiento racional de los estudiantes durante el proceso de justificación

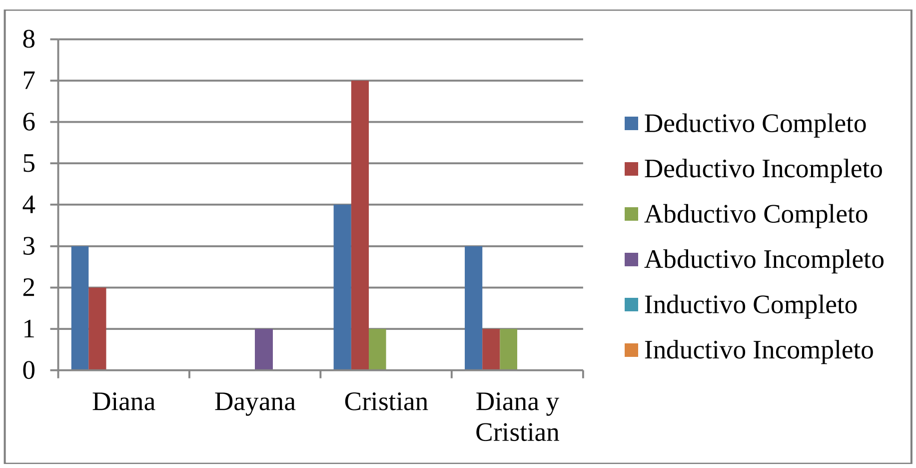



**Figura 27.** Tipos de argumentos que los estudiantes formularon en el proceso de justificación

# CAPÍTULO 5. CONCLUSIONES

Este capítulo da cuenta de las conclusiones obtenidas en nuestro estudio, las cuales organizamos en relación a ocho aspectos: la actividad demostrativa desarrollada por los estudiantes; los argumentos que logramos identificar y clasificar, y los aspectos del comportamiento racional que caracterizamos de acuerdo con la solución que ellos dieron a las dos últimas tareas de la secuencia didáctica; el conflicto epistémico de Cristian en relación con la unidad cognitiva; el dilema que evidenciamos durante el proceso de conjeturación y otro conflicto epistémico que identificamos al final del proceso de justificación; la comprensión de los estudiantes sobre lo que es una demostración; el aspecto social que analizamos de forma empírica y que intentamos relacionar con algunos elementos teóricos descritos en el último apartado del marco teórico; y los alcances de nuestro estudio, algunas preguntas pendientes para futuros estudios y una reflexión de los autores.

## 5.1. ACERCA DE LA ACTIVIDAD DEMOSTRATIVA DESARROLLADA POR LOS ESTUDIANTES

Podemos plantear que la secuencia de tareas sí permitió que el grupo de estudiantes lograra hacer actividad demostrativa porque formularon una conjetura que luego justificaron. Específicamente, en el proceso de conjeturación realizaron acciones como: *detectar propiedades* cuando recuerdan y establecen las condiciones a tener en cuenta para ubicar un punto que esté a la misma distancia de cada rayo, específicamente, la perpendicularidad del segmento que tiene la menor distancia del punto al rayo [339], o cuando logran identificar la bisectriz como aquella en la que se ubican infinidad de puntos que cumplen la condición pedida (Episodio 5 y 6); *verificar propiedades* cuando, con ayuda de Cabri, trazan la bisectriz y comprueban que los puntos ya construidos pertenecen a ella; *formular conjetura* cuando, con ayuda de la estructura proposicional (si – entonces), plantean la conjetura a partir de lo desarrollado durante la Tarea No. 6 (Episodio 7) y *corroborar conjetura* cuando durante el Episodio 7 en la medida que van haciendo exploración dinámica con el ánimo de plantear la conjetura, ésta misma les ayuda a verificarla.

En cuanto a la *visualización* y la *exploración* vale la pena señalar que, estas dos acciones heurísticas, estuvieron presentes durante el desarrollo de la actividad demostrativa. Específicamente, la exploración *dinámica* era un elemento importante dada la estructura de la tarea; en ocasiones se alejaban de la construcción en Cabri y preferían realizar acciones en papel y lápiz (*empírica*) para "ver" la situación. Por su parte, la exploración *teórica* se presentó particularmente en tres momentos; cuando recordaron la definición de ángulo, la definición de distancia y los elementos que caracterizan la bisectriz.

En el proceso de justificación, que constó de dos instantes, pudimos reconocer que los estudiantes seleccionaron definiciones o hechos geométricos del sistema teórico local, construido a través del diseño y aplicación de la secuencia didáctica, para elaborar argumentos que los condujeran a la correspondiente justificación de la conjetura.

## 5.2. ACERCA DEL COMPORTAMIENTO ARGUMENTAL DE LOS ESTUDIANTES

Durante el proceso de conjeturación, los estudiantes produjeron muy pocos argumentos en contraste con los que lograron hacer en el proceso de justificación (ver Figura 28). Los tres únicos argumentos que ellos dijeron durante el primer proceso tenían que ver con la colinealidad e infinitud de los puntos de la recta, cosas que no eran esenciales para que ellos pudieran justificar la conjetura. La conjetura la formularon a partir de la percepción que ellos tenían de los puntos equidistantes a los lados del ángulo, pues en varias ocasiones indicaban que éstos debían pertenecer a una línea que pasara por la mitad del ángulo. En este caso, Cristian hizo dos argumentos, Diana tan sólo uno y la argumentación de Dayana fue nula. De manera similar, en la justificación de la conjetura, nuevamente Cristian fue quien formuló más argumentos deductivos completos e incompletos que Diana, con una mayor diferencia que en el anterior proceso, y Dayana uno solamente.

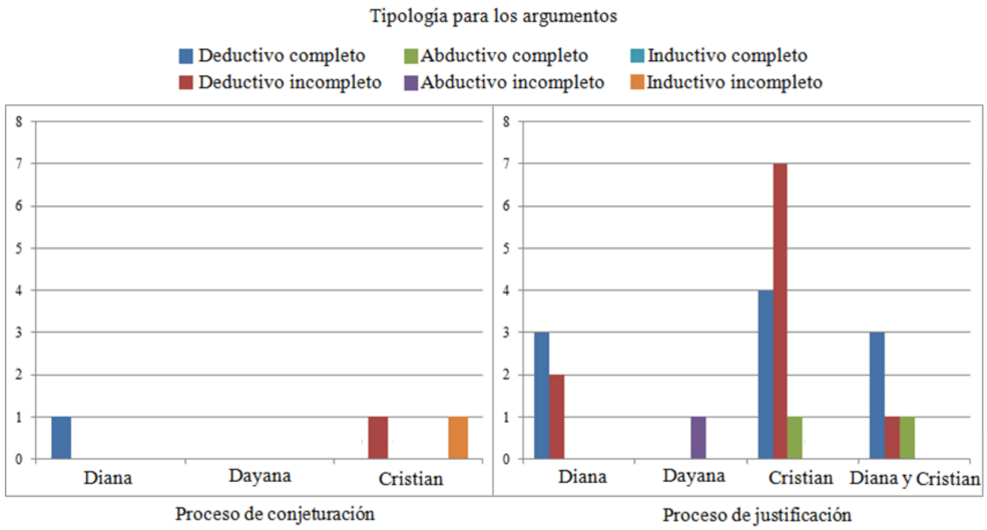



**Figura 28.** Tipos de argumentos que los estudiantes formularon durante los procesos de la actividad demostrativa

Al revisar los argumentos en el segundo proceso de la actividad demostrativa, nos dimos cuenta que Cristian y Diana a veces se apoyaron mutuamente para construir argumentos, razón por la cual el eje horizontal de los ambos diagramas de barras es diferente (Figura 28). De esta manera podemos decir que al identificar y clasificar los argumentos de los estudiantes cuando trabajan en grupo, también es necesario considerar, dentro de la tipología que empleamos, si éstos son *argumentos individuales* o *argumentos colectivos*. Esto con el fin de analizar si la argumentación, para formular y justificar una conjetura, se ve favorecida por un trabajo individual o por un trabajo colectivo entre sus integrantes.

En este último proceso hubo dos instantes para justificar la conjetura: en el primero, los estudiantes hicieron *argumentos* ligados a la *situación* del problema (*AS*) de donde se formuló la conjetura; y en el segundo, ellos plantearon *argumentos paso* de la justificación (*AP*). La característica de los *AS* que reportaron en el esquema – deducción es que son argumentos que no forman una cadena deductiva como los *AP*, pero que pueden ser potencialmente un paso de la justificación. Para ilustrar este hecho y con ayuda de la Figura 29, la discusión que hubo al interior del grupo sobre cuál era el primer paso de la justificación hizo que el primer *AS* fuera el primer *AP* (rectángulos verdes); el segundo *AS* tuviera la misma *garantía* que el cuarto *AP* y la *conclusión* de este *AS* fuera parte de los *datos* de dicho *AP* (óvalos rojos); y el tercer *AS*, excepto por la *garantía*, pasara a ser parte del quinto *AP* (hexágonos azules). En total, se formularon once *AP*, dos de ellos (séptimo y undécimo) con ayuda del profesor.

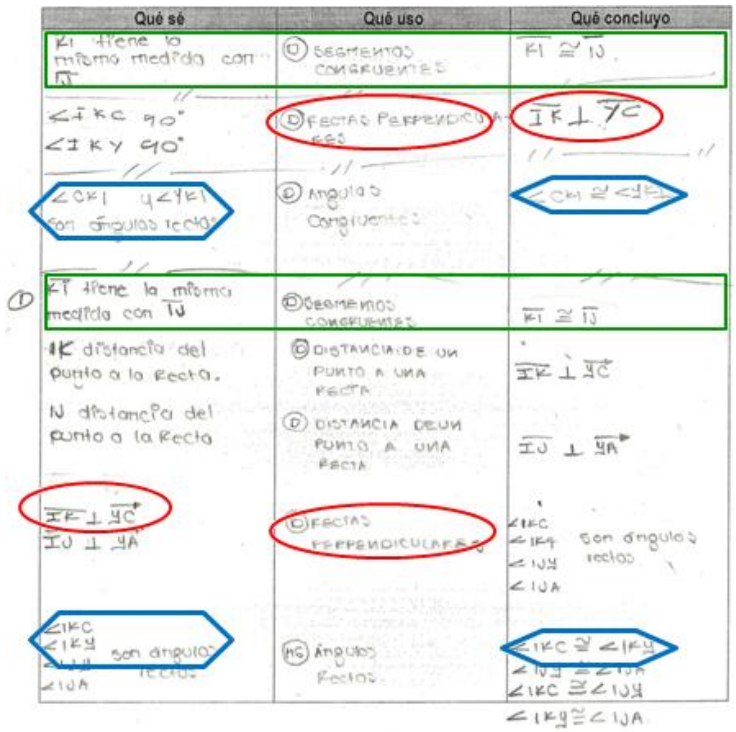



**Figura 29.** Identificación de *argumentos* ligados a la *situación* del problema (*AS*) y *argumentos paso* de la justificación (*AP*)

## 5.3. ACERCA DEL COMPORTAMIENTO RACIONAL DE LOS ESTUDIANTES

Cuando empezamos a caracterizar el comportamiento racional de los estudiantes, según la descripción que Boero y Morselli (2009) hacen de los aspectos epistémico, comunicativo y teleológico, como una adaptación al modelo de Habermas, decidimos precisar y/o ampliar las acciones que evidencian los dos primeros aspectos. El aspecto epistémico, además de referirse a la preocupación por validar las ideas de acuerdo con las premisas compartidas y las formas legítimas de razonamiento, también alude específicamente a que el estudiante: proporcione elementos teóricos para la formulación de argumentos, elabore *argumentos completos*, reconozca las partes de una condicional y el papel de cada una, y comprenda el proceso para justificar una conjetura con el uso del esquema – deducción.

El aspecto comunicativo, relacionado con la preocupación de formular clara y concisamente las ideas desde el punto de vista matemático, también se evidencia cuando el estudiante concretamente: usa el lenguaje y la notación geométrica precisa, se refiere a elementos del sistema teórico local y a elementos geométricos involucrados en una situación o representación dada con los nombres correctos, y registra correctamente en una representación gráfica la información que conoce.

Como resultado del análisis del comportamiento racional, proponemos en la Tabla 21 algunos indicadores en los aspectos epistémico, teleológico y comunicativo que podrían ser utilizados para futuras investigaciones.

**Tabla 21.** Indicadores del comportamiento racional propuestos para futuros estudios

| Aspecto | Adaptación Boero y Morselli | Indicadores propuestos |
| --- | --- | --- |
| *Epistémico* | Tiene que ver con la validación consciente de las afirmaciones y el control de los requerimientos establecidos por la comunidad de discurso matemático de acuerdo a premisas compartidas y formas legítimas de razonamiento. | • Valida las ideas de acuerdo con las premisas compartidas y las formas legítimas de razonamiento.<br>• Proporciona elementos teóricos para la formulación de argumentos.<br>• Elabora *argumentos completos.*<br>• Reconoce las partes de una condicional y el papel de cada una.<br>• Comprende el proceso para justificar una conjetura con el uso del esquema – deducción.<br>• Comprende que el uso del nombre de un punto en el de una figura es reconocer que éste tiene ciertas propiedades.[4] |
| *Teleológico* | Relacionado con la solución de problemas y las elecciones conscientes que deben considerarse con el fin de obtener el producto deseado. En otras palabras se refiere a enfocarse en una meta, formular un plan o desarrollar uno (no necesariamente formulado) para lograr la meta, proponer estrategias que puedan contribuir a llevar a cabo el plan, tener la meta bajo control. | • Propone qué y cómo hacer, en términos de *visualización* y *exploración* (dinámica, empírica y teórica), para encontrar la solución de la tarea.<br>• Propone un camino a seguir para construir la justificación de una afirmación. |

[4] La propuesta de este indicador se justifica en el apartado 5.5.

**Tabla 21.** (Continuación) Indicadores del comportamiento racional propuestos para futuros estudios

| Aspecto | Adaptación Boero y Morselli | Indicadores propuestos |
|---|---|---|
| *Comunicativo* | Consiste en la adherencia consciente de las reglas que garanticen tanto la posibilidad de comunicar los pasos de razonamiento, como la conformidad de los productos (justificaciones) a las normas en una determinada cultura matemática. Tiene que ver con la preocupación de formular clara y concisamente las ideas desde el punto de vista matemático. | • Formula clara y concisamente las ideas desde el punto de vista matemático<br>• Usa el lenguaje y la notación geométrica precisa cuando se refiere a elementos geométricos involucrados en una situación o representación dada.<br>• Se refiere a elementos del sistema teórico local con los nombres correctos.<br>• Le asigna el estatus teórico correcto a los elementos del sistema teórico.<br>• Registra correctamente, en una representación gráfica, la información que conoce. |

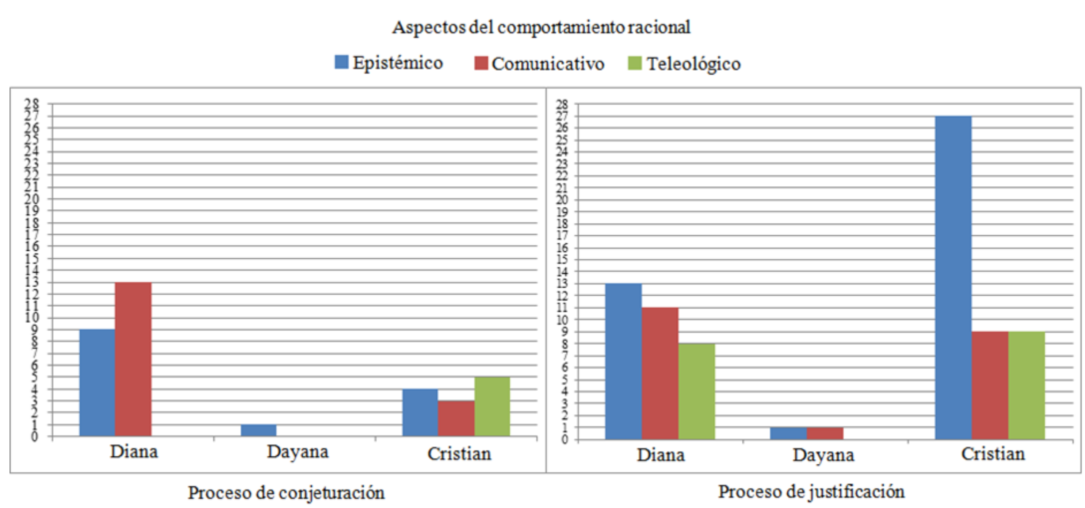



**Figura 30.** Comportamiento racional de los estudiantes durante los procesos de la actividad demostrativa

Al revisar los gráficos de barras suministrados en la Figura 30 y los análisis de los episodios en ambos procesos, podemos afirmar que durante el proceso de conjeturación, fue Diana quien manifestó más el aspecto epistémico ya que se preocupó por recordar y controlar el uso de hechos geométricos y definiciones, que hacen parte del sistema teórico local, en más ocasiones que sus otros dos compañeros. Diana también reporta con mayor frecuencia el aspecto comunicativo ya que se preocupó por expresar y corregir el lenguaje geométrico que usaban para expresar los resultados a los que llegaba el grupo. Cristian fue el único que evidenció el aspecto teleológico porque propuso cómo localizar puntos equidistantes a los lados del ángulo y Dayana simplemente mostró, en una ocasión, el aspecto epistémico porque empleó la definición de ángulo para indicarle a Cristian cómo lo debía representar.

Durante el proceso de justificación, el comportamiento de Cristian mostró que en varios momentos estuvo centrado en el aspecto epistémico porque solicitaba a sus compañeras que explicaran sus ideas, hizo más argumentos completos y expresó el conflicto epistémico sobre la existencia de la bisectriz. Observamos que Diana refleja, de manera equitativa, los tres aspectos del comportamiento racional. Además, vemos que tanto Diana como Cristian se preocupan por comunicar matemáticamente sus afirmaciones y proponen planes para resolver la tarea.

Con respecto al comportamiento de cada estudiante en ambos procesos, Diana tuvo manifestaciones equiparables en los aspectos epistémico y comunicativo pero no contribuyó planes para la formulación de la conjetura. Las intervenciones relacionadas con los tres aspectos del comportamiento racional de Cristian fueron más durante la justificación de la conjetura que en la formulación de ésta. El comportamiento racional de Dayana no permitió que aportara significativamente al desarrollo de las dos últimas tareas de la secuencia didáctica pues simplemente se limitó a escribir o leer lo que sus dos compañeros le indicaban.

## 5.4. ACERCA DEL CONFLICTO EPISTÉMICO DE CRISTIAN EN RELACIÓN CON LA UNIDAD COGNITIVA

El conflicto epistémico Cristian consistió en rechazar la existencia de la bisectriz en la representación de la conjetura porque él consideraba que si trazaba el $\overrightarrow{YK}$ entonces habría trazado la bisectriz. Es decir, no comprendió que dibujar dicho rayo no significaba que tenía la propiedad de ser bisectriz, propiedad que finalmente debía justificar. Frente a esta situación tenemos las siguientes dos interpretaciones. Primero, podríamos afirmar que no hubo *unidad cognitiva* porque este conflicto epistémico fue un obstáculo para construir la justificación de la conjetura pues no permitió que se visualizaran los triángulos, hecho en el que tuvo que intervenir el profesor.

Como segunda interpretación podríamos decir que, a pesar de dicho obstáculo, sí hubo *unidad cognitiva* porque encontramos que la bisectriz estuvo presente tanto en el proceso de conjeturación como en el de justificación. En el proceso de conjeturación, Cristian mencionó propiedades de la bisectriz, por ejemplo, al trazar una línea que "pasara por la mitad del ángulo" o al indicar que los puntos que pertenecen a la bisectriz son equidistantes a los lados del ángulo. Mientras que en el proceso de justificación, aunque hubo instantes en los que los estudiantes no visualizaban la bisectriz debido al conflicto epistémico de Cristian, la argumentación y el comportamiento racional de ellos aludió en varios momentos a ese objeto geométrico.

## 5.5. ACERCA DEL DILEMA EN LA CONJETURACIÓN Y OTRO CONFLICTO EPISTÉMICO EN LA JUSTIFICACIÓN

Un dilema que evidenciamos durante el proceso de conjeturación fue el relacionado con el contexto no geométrico de la Tarea No. 6 (*dilema de los contextos*). A pesar de haber establecido que este dilema se manifiesta explícitamente en el Episodio 4 con la intervención de Dayana [491], creemos que este dilema puede estar presente, pero invisible, durante gran parte del desarrollo de la tarea, no solamente para Dayana sino para sus compañeros. Esta percepción se puede evidenciar en el uso del lenguaje hibrido en diferentes ocasiones como, por ejemplo, Cristian en [339*] o [486*] o Diana en [378*]. Este conflicto se presenta durante gran parte del desarrollo de la tarea. Además de las intervenciones ya mencionadas, en el Episodio 5 ([543-551]) y en el Episodio 6 ([596-617]) este dilema se manifiesta colectivamente en los tres estudiantes. Sin embargo, Diana y Cristian, gracias a las intervenciones y sugerencias del profesor, logran finalmente superarlo. Dayana, por su parte, no lo logra y esto se evidencia en la intervención [638] ya que sus afirmaciones se refieren aún a aspectos de la semirrealidad y no de la geometría, y es Cristian quien le recuerda que debe pensar en términos geométricos.

El otro conflicto epistémico sobre la notación de la bisectriz lo identificamos al final del proceso de justificación cuando los estudiantes no quedaron satisfechos al concluir que $\overrightarrow{YI}$ era la bisectriz del $\angle CYA$ pues debían llegar al consecuente de la conjetura. En este conflicto, ellos no comprendieron que al haber nombrado al rayo como $\overrightarrow{YI}$, inmediatamente se indica que el punto $I$ pertenece a dicho objeto. A pesar de que ellos se preocuparon por usar de forma correcta la notación para rayos (aspecto comunicativo), encontramos que esto no implica necesariamente que evoquen lo que usar el nombre del punto significa respecto a sus propiedades. Ante dicha situación queremos, por un lado, ampliar las acciones que muestran el aspecto epistémico del comportamiento racional de los estudiantes cuando ellos comprenden la relación entre el nombre de una figura, usando los puntos que están en ella, y las propiedades que ello conlleva para dichos puntos. Por esta razón propusimos el último indicador en la Tabla 21. Por otro lado, destacamos el papel del profesor quien, como experto, atendió este conflicto para que los estudiantes lograran entender la notación empleada para la bisectriz y terminaran la justificación de la conjetura.

## 5.6. Acerca de la comprensión de los estudiantes sobre lo que es una demostración

Tras analizar el comportamiento racional y argumental de los estudiantes durante el segundo proceso de la actividad demostrativa, podemos afirmar que Cristian y Diana lograron evidenciar comprensión de lo que es una demostración y aprendieran a producirla, aunque Cristian con mayor seguridad lo cual nos sorprendió pues él no se destacaba en lo académico. De esta manera se cumplió el doble objetivo que Balacheff (1982, citado en Morselli y Boero, 2009) plantea sobre la enseñanza de las demostraciones y teoremas: lograr que los estudiantes entiendan lo que es una demostración y aprendan a producirla. Ambos estudiantes reconocieron el papel de cada parte de la conjetura escrita en forma de condicional que debían justificar, es decir, entre lo dado (antecedente) y la conclusión (consecuente). Con esto, particularmente Cristian, luego de formular los tres *AS* en el primer instante del proceso de justificación, menciona la necesidad de formular más argumentos para poder llegar a la conclusión de esta conjetura. Además, muestra un desarrollo deductivo correcto pues señala que se debe conocer el *dato* de un argumento que, junto con la *garantía*, permita establecer la correspondiente *conclusión*. Esto ocurre porque, al diligenciar el esquema – deducción, él sabe que: en la columna *Qué sé* se escribe únicamente aquello que haya sido *conclusión* de un paso anterior en la justificación (*dato*);

en la columna *Qué uso*, algún elemento del sistema teórico local conformado (*garantía*); y en la columna *Qué concluyo*, la *conclusión* que se obtiene de acuerdo con el *dato* y la *garantía*. En el caso de Diana, ella entiende que para justificar la conjetura se deben encadenar argumentos pues indica que el *dato* de un paso pasa a ser la *conclusión* de otro.

## 5.7. ACERCA DEL ASPECTO SOCIAL QUE ANALIZAMOS DE FORMA EMPÍRICA

Otro asunto que nos inquietó durante el desarrollo del estudio, específicamente durante el análisis de las transcripciones, fue el aspecto social. Es por esto que fue necesario buscar bibliografía relacionada con el trabajo en grupo, como un aporte final a nuestro análisis central. En lo que sigue, relacionamos algunos elementos teóricos de la interacción por grupos, según Webb (1984), con algunas particularidades que queremos resaltar del comportamiento racional y argumental de cada uno de los estudiantes durante el trabajo grupal en torno a la actividad demostrativa.

En primer lugar, Dayana mostró un *comportamiento pasivo* porque sus intervenciones fueron escazas y poco productivas para el desarrollo de las tareas. Suponemos que esto fue debido a, por un lado, su bajo *nivel de habilidad* respecto a los tres aspectos del comportamiento racional, la formulación de argumentos y el manejo de Cabri. Por otro, la *motivación escaza* es producida posiblemente por *señales verbales y no verbales* de sus compañeros que restringieron su participación pues ellos no le prestaron atención a sus preguntas o aportes; esto no corresponde a un comportamiento de ofrecer ayuda.

En el caso de Diana, según el análisis de las intervenciones en relación a su comportamiento racional, podemos afirmar que su *nivel de habilidad* en el aspecto comunicativo es mayor que el de sus compañeros. Esto se relaciona con el *mecanismo de verbalización* que Webb (1984) destaca como puente importante entre la interacción dentro del grupo y los resultados de las tareas.

Mientras que el *nivel de habilidad* de Cristian se destaca durante la actividad demostrativa por dos razones: primero, el uso eficiente de Cabri para hacer construcciones y exploraciones que le permitieron establecer y llevar a cabo planes a favor del desarrollo de la tarea (aspecto teleológico); segundo, como ya se mencionó, es quien con mayor frecuencia manifiesta intervenciones relacionadas con el aspecto epistémico. Suponemos que Cristian, por su nivel de habilidad, mostró *motivación* y liderazgo que le da un estatus dentro del grupo.

Teniendo en cuenta el análisis del comportamiento racional y de la formulación de los argumentos durante la actividad demostrativa, así como lo expuesto anteriormente, podemos concluir que Cristian y Diana se complementaron porque identificamos en ellos un comportamiento de *ofrecer* y *recibir ayuda* mutuamente.

## 5.8. Alcances de nuestro estudio, algunas preguntas pendientes para futuros estudios y una reflexión de los autores

Los alcances de nuestro estudio muestran, primero, que es posible que estudiantes de grado noveno de educación básica secundaria logren hacer actividad demostrativa, si en el diseño y aplicación de la secuencia de tareas se tienen en cuenta los planteamientos que el grupo $\mathcal{Æ} \cdot \mathcal{G}$ hace sobre cómo generar un entorno favorable para propiciar dicha actividad. De esta manera, ratificamos que el constructo *actividad demostrativa* puede referirse a un campo de acción más amplio, desde un contexto universitario hasta uno escolar, de igual manera como lo concluyen Bolívar y Martín (2010), Franco y Moreno (2011), Luque y Robayo (2011), Ospina y Plazas (2011) y Pinzón y Rodríguez (2011).

Segundo, que los estudiantes tienen un comportamiento racional y argumental que les permite formular una conjetura y justificarla, pese a su poca madurez matemática.

Tercero, que la caracterización que hicimos del comportamiento racional de los estudiantes, basados en la descripción de Boero y Morselli (2009) para el modelo de Habermas, nos permite proponer algunos indicadores para los aspectos epistémico, teleológico y comunicativo (ver Tabla 21). Consideramos que estos indicadores podrían ser útiles para próximas investigaciones en las que se emplee dicho modelo como marco teórico. Particularmente serviría para que estudios como el reportado por el grupo $\mathcal{Æ} \cdot \mathcal{G}$ en Molina et al. (2011) puedan ser realizados con mayor profundidad.

Y cuarto, que los elementos teóricos que plantea Webb (1984) sobre la interacción entre estudiantes y que relacionamos con el comportamiento racional y argumental de cada uno de ellos cuando realizaban actividad demostrativa pueden servir para precisar otros aspectos del enfoque sociocultural del aprendizaje cuando los estudiantes realizan actividad demostrativa; aunque en la delimitación de nuestro problema de investigación mencionamos el interés por analizar el comportamiento racional y argumental de los estudiantes, también es necesario considerar los roles sociales que ellos desempeñan y cómo inciden en el desarrollo de la tarea que se les propone.

Al culminar nuestro estudio, planteamos algunas preguntas que quedan pendientes para estudios posteriores. Con el análisis del comportamiento racional del grupo de estudiantes y de los argumentos que ellos formularon durante los dos procesos de la actividad demostrativa, nos damos cuenta que Diana y Cristian siempre interactuaron para la solución de las tareas propuestas. Por esta situación, nos preguntamos: ¿cuál fue el papel de Dayana?, ¿será que la tercera persona facilita la comunicación entre las otras dos?, ¿qué pasaría si Dayana no hubiera estado presente en el grupo?, ¿será que sus otros compañeros habrían trabajado de forma similar sin su presencia? o ¿cada uno de ellos trabajaría individualmente lo cual generaría un trabajo competitivo?

Teniendo en cuenta el *dilema de los contextos* que surgió durante el proceso de conjeturación y que Dayana no logró superar, nos hacemos estas preguntas: ¿qué tan conveniente es contextualizar la situación en la que se plantea un problema?, ¿siempre que se contextualice la situación de un problema subyace dicho dilema?, ¿cuál es la manera pertinente para que un profesor aborde este dilema?

De acuerdo con el dilema de los contextos, el conflicto de la existencia de la bisectriz y el conflicto epistémico de la notación de la bisectriz, que se relacionan con la *resolución de conflictos* (Webb, 1984), sugerimos como hipótesis que *los estudiantes que experimentaron y superaron alguno de estos tres conflictos tendrán mayor oportunidad de éxito cuando se enfrenten a situaciones similares*.

Para finalizar este apartado, destacamos que la elaboración del presente estudio nos permitió reflexionar sobre la importancia de propiciar un ambiente de aprendizaje donde estudiantes de educación básica secundaria pudieran hacer actividad demostrativa, diseñar tareas para que ellos descubrieran de forma autónoma hechos geométricos y favorecer la interacción social en el aula de clase. Además, destacamos que este estudio, como un ejercicio de investigación, contribuyó a desarrollar competencias para: sintetizar información para incluirla en un documento que cumple con la estructura de un trabajo de grado en la modalidad de profundización y con la adecuada presentación de referencias y citas de referencias; plantear una situación problemática que, para nuestro caso, estuvo acorde a los intereses del grupo de investigación $\mathcal{Æ} \cdot \mathcal{G}$; revisar algunas investigaciones en Didáctica de la Geometría y metodologías de investigación cualitativa para abordar dicha problemática y que permitieran la conformación de un marco teórico y un marco metodológico, respectivamente; analizar la información recogida con base en las categorías provenientes del marco teórico; formular las conclusiones del estudio y establecer el cumplimiento de los objetivos planteados al inicio de éste.

# REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS


Arzarello, F., Olivero, F., Paola, D. y Robutti, O. (2007). The transition to formal proof in geometry. En P. Boero (Ed.), *Theorems in school. From history, epistemology and cognition to classroom practice*. Sense Publishers. Traducción realizada por Patricia Inés Perry.

Balacheff, N. (2000). *Procesos de prueba en los alumnos de matemáticas.* Una empresa docente, Universidad de los Andes, Bogotá.

Boero, P., Douek, N., Morselli, F. y Pedemonte, B. (2010) Argumentation and proof: a contribution to theoretical perspectives and their classroom implementation. En Pinto, M. M. F. y Kawasaki, T. F. (Eds.). *Procedings of the 34$^{th}$ Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 1, pp. 179-209). Belo Horizonte, Brazil: PME.

Camargo, L., Perry, P. y Samper C. (2005). La demostración en clase de geometría: ¿puede tener un papel protagónico? *Educación Matemática*, 17 (3), 53-76.

Camargo, L., Samper, C., y Perry, P. (2006). Una visión de la actividad demostrativa en geometría plana para la educación matemática con el uso de programas de geometría dinámica. *Sociedad Colombiana de Matemáticas XV Congreso Nacional de Matemáticas* (Volumen especial), 371-383.

Camargo, L., Perry, P., Samper, S., Molina, O., y Echeverry, A. (2008). Geometría y lineamientos curriculares: una experiencia en la formación inicial de profesores. *Memorias del 9º Encuentro Colombiano de Matemática Educativa.* Difusión digital.

Camargo, L., Samper, C., Perry, P., Molina, Ó. y Echeverry, A. (2009) Use of *dragging* as organizer for conjecture validation.

Cohen, L. y Maníon, L. (1999). *Métodos de investigación educativa*. Madrid, España: La muralla.

de Villiers, M. (1993). El papel y la función de la demostración en matemáticas. *Epsilón*, 26, 15 – 29.

Garuti R., Boero P. y Lemut E. (1998). Cognitive unity of theorems and difficulty of proof. En PME 22. Traducción realizada por Patricia Inés Perry en el marco del proyecto de investigación "Geometría dinámica: medio para el establecimiento de condicionalidad lógica", desarrollado en 2008 en UPN.

Godino, J. y Recio, A.M. (2001). Significados institucionales de la demostración. Implicaciones para la educación matemática. *Enseñanza de las Ciencias*, 19(3), 405 – 414.

Harada, O. (2009). Algunas aclaraciones sobre el "modelo" argumentativo de Toulmin ContactoS 73, 45–56. Extraído el 10 de diciembre de 2012 desde http://www.izt.uam.mx/newpage/contactos/anterior/n73ne/toulmin.pdf

Jones, K. (2000). Providing a foundation for deductive reasoning: students' interpretations when using dynamic geometry software and their evolving mathematical explanations. *Educational Studies in Mathematics*, 44, 55 – 85.

MEN. (1998). *Lineamientos curriculares para el área de matemáticas*. Colombia: Ministerio de Educación Nacional.

Mariotti, Bartolini Bussi, Boero, Ferri y Garuti (1997). Approaching geometry theorems in contexts: from history and epistemology to cognition (pp. 180-195). PME XXI, Lahti, Finland. Traducción parcial realizada por Patricia Inés Perry en el marco del proyecto de investigación "Geometría dinámica: medio para el establecimiento de condicionalidad lógica", desarrollado en 2008 en UPN.

Molina, Ó., Samper, C., Perry, P. y Camargo, L. (2011). Actividad demostrativa: participar en la producción de un teorema. *Revista Integración*, *29*(1), 73-96.

Morselli, F., y Boero, P. (2009). Proving as a rational behavior: Habermas' construct of rationality as a comprehensive frame for research on the teaching and learning of proof. En V. Durand-Guerrier, S. Soury-Lavergne y F. Arzarello (Eds.). *Proceedings of CERME 6* (Vol. 2, pp. 211-220). Lyon, France.

Pedemonte, B. (2001). Some cognitive aspects of the relationship between argumentation and proof in mathematics, PME XXV, Vol.4, pp.33-40

Pedemonte, B. (2005). Herramientas para el análisis cognitivo de la relación entre argumentación y demostración. *Recherches en Didactique de Matematiques, RDM* , 25(3) 313 – 348. Traducción no oficial realizada por Martín Acosta.

Perry, P., Camargo, L., Samper, C., y Rojas, C. (2006). *Actividad demostrativa en la formación inicial del profesor de matemáticas.* Bogotá: Fondo editorial de la Universidad Pedagógica Nacional.

Perry, P., Samper, C., Camargo, L., Echeverry, A. y Molina, Ó. (2007). *Innovación en la enseñanza de la demostración en un curso de geometría para formación inicial de profesores*. Ponencia presentada en SIEM XVII, 17 a 21 de noviembre de 2007 Universidad Autónoma del Estado de México, Toluca, Estado de México.

Presmeg, N.C. (1986): Visualization in high school mathematics, *For the Learning of Mathematics* vol. 6.3, pp. 42-46.

Samper C., Camargo L. y Perry P. (2006). El papel del enunciado en la actividad demostrativa. *Matematicas para el siglo XXI. Col.leccio "Treballs d'informatica i Tecnologia".* Num. 23, 303-312.

Samper, C. (2008). *Geometría*. Editorial Norma. Bogotá.

Samper, C., Molina, Ó. y Echeverry, A. (2011). *Elementos de Geometría*. Bogotá: Fondo editorial de la Universidad Pedagógica Nacional.

Samper, C., Perry, P., Camargo, L. y Molina, Ó. (2012). Capítulo 1: Innovación en un aula de geometría de nivel universitario. En Samper, C. y Molina, Ó. *Geometría Plana: Un espacio de aprendizaje* (pp. 1 – 16). Universidad Pedagógica Nacional, Bogotá. Libro en evaluación.

Webb, N. (1984). Interacción entre estudiantes y aprendizaje en grupos pequeños. *Infancia y Aprendizaje, 29/28,* 159-183. Universidad de California. Traducción realizada por Laura Pla.

# ANEXOS

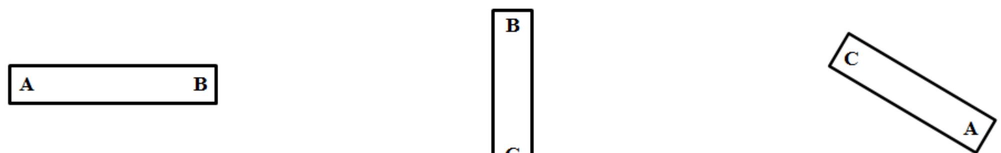
# ANEXO A. TAREAS DEL PRIMER MOMENTO

## TAREA NO. 1: EN BUSCA DEL TRIÁNGULO PERDIDO

### INDICACIONES QUE DEBEN SEGUIR

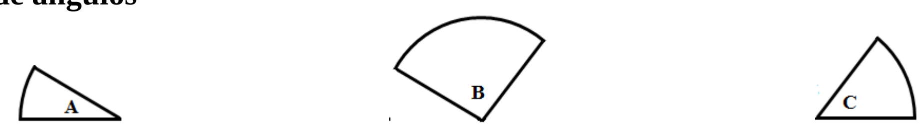
El propósito de esta actividad es determinar cuál es el **triángulo perdido** en cada grupo. Para ello, recibirán el material necesario para cada uno de los **Casos** mencionados en tabla que deberán diligenciar. El material consiste en unas **regletas** con las que se dibujarán **segmentos** y unos **moldes** con los que se dibujarán **ángulos**.

**Regletas**




$\overline{AB}$ $\overline{BC}$ $\overline{CA}$

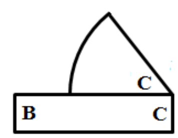
**Moldes de ángulos**



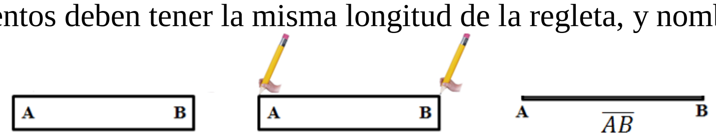

$\angle A$ $\angle B$ $\angle C$

Usando las piezas indicadas, el grupo tratará de dibujar la mayor cantidad de triángulos diferentes, obedeciendo las siguientes reglas:

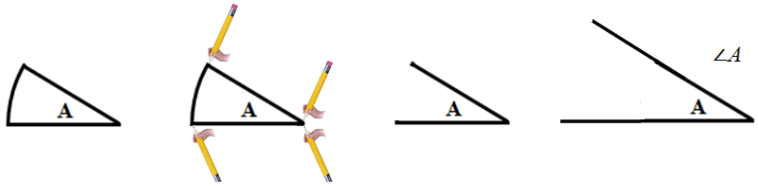
- Las letras indicadas en cada pieza deben coincidir. Por ejemplo, si se usa la regleta **BC** y el molde **C**, el extremo del segmento y el vértice del molde ángulo deben coincidir en **C.**




- Los segmentos deben tener la misma longitud de la regleta, y nombrarse como ésta.




- Para dibujar un ángulo se deben trazar rayas contra los lados rectos del molde. Estas rayas se pueden extender o acortar cuanto sea necesario para que el dibujo dé lugar a un triángulo, a menos que sobre una de las rayas se deba colocar una de las regletas, como se menciona en la primera regla.

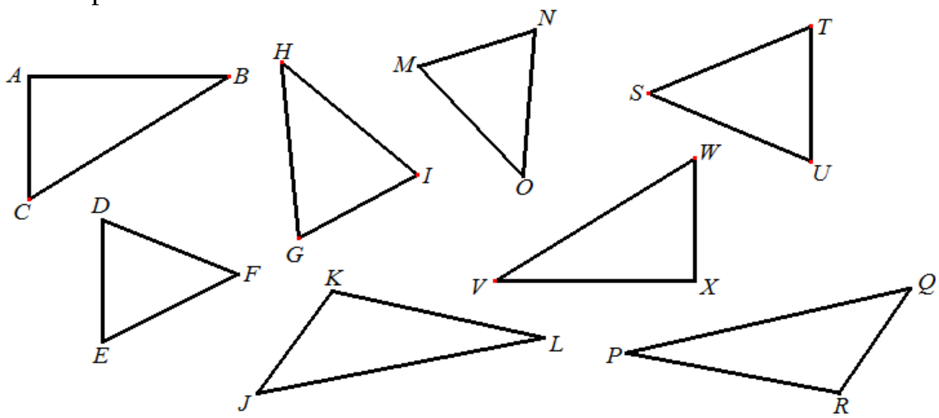


**DILIGENCIAMIENTO DE LA TABLA**

| Caso | Moldes | Regletas | ¿Cuántos triángulos diferentes se obtienen? |
|---|---|---|---|
| ***Caso 1*** Dos ángulos | | | |
| ***Caso 2*** Un lado y el ángulo con vértice en el lado | | | |
| ***Caso 3*** Un lado y el ángulo sin vértice en el lado | | | |
| ***Caso 4*** Dos lados | | | |
| ***Caso 5*** Tres ángulos | | | |
| ***Caso 6*** Dos lados y el ángulo no incluido | | | |
| ***Caso 7*** Dos lados y el ángulo incluido | | | |
| ***Caso 8*** Dos ángulos y el lado no incluido | | | |
| ***Caso 9*** Dos ángulos y el lado incluido | | | |
| ***Caso 10*** Tres lados | | | |

## TAREA NO. 2: USO DE LOS CRITERIOS DE CONGRUENCIA DE TRIÁNGULOS (I)

**1.** Identifique parejas de triángulos que aparentan ser congruentes. Nómbrelos de acuerdo con la correspondencia adecuada.




**2.** Si $\Delta SED$ y $\Delta RAT$ son triángulos rectángulos, ¿se cumple que $\Delta SED \cong \Delta RAT$? Explique su respuesta.

**3.** Localice los siguientes puntos en el plano cartesiano y dibuja el $\Delta ABC$ y $\Delta DEF$. ¿Estos dos triángulos son congruentes?

***a.*** $A(-1,\ 2)$; $B(4,\ 2)$; $C(2,\ 4)$; $D(5,\ -1)$; $E(7,\ 1)$; $F(10,\ -1)$.

***b.*** $A(-3,\ 1)$; $B(2,\ 1)$; $C(2,\ 3)$; $D(4,\ 3)$; $E(6,\ 3)$; $F(6,\ 8)$.

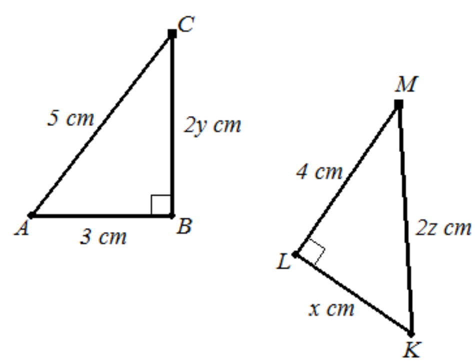
**4.** Localiza los puntos en el plano cartesiano. Dibuja el $\Delta ABC$ y el $\overline{DE}$. En cada caso, ¿en dónde debe localizarse el punto $F$ para que el $\Delta ABC$ sea congruente al $\Delta DEF$?

***a.*** $A(1,\ 2)$; $B(4,\ 2)$; $C(2,\ 4)$; $D(6,\ 4)$; $E(6,\ 7)$.

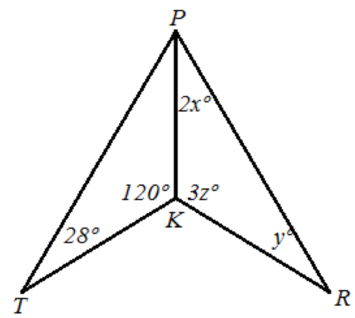
***b.*** $A(-1,\ 0)$; $B(-5,\ 4)$; $C(-6,\ 1)$; $D(1,\ 0)$; $E(5,\ 4)$.

**5.** De acuerdo con la información de cada ilustración, halle los valores de $x$, $y$ y $z$.

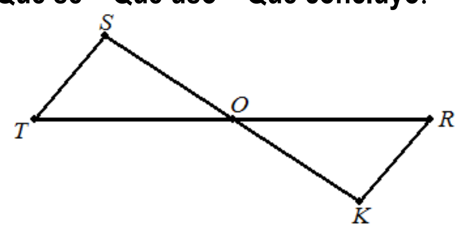
***a.*** $\Delta ABC \cong \Delta KLM$




***b.*** $\Delta TPK \cong \Delta RPK$ (Asuma como verdadero que ***La suma de las medidas de los ángulos interiores de un triángulo es 180º***)




**6.** Los dos triángulos que se muestran a continuación son congruentes. Complete el esquema a tres columnas **Qué sé – Qué uso – Qué concluyo**.




| Qué sé | Qué uso | Qué concluyo |
|---|---|---|
| $\Delta STO \cong \Delta KRO$ | | |

Con base en el anterior esquema, complete

***a.*** $\angle S \cong \boxed{\phantom{XX}}$ ***b.*** $\overline{SO} \cong \boxed{\phantom{XX}}$

**7.** Realice un dibujo en el cual registre la información que se da y decida si existe congruencia entre los $\Delta PQR$ y $\Delta XYZ$ . Si es el caso, escriba la congruencia de los triángulos y el HG **Hecho Geométrico: Congruencia de triángulos** que lo asegura, haciendo uso del esquema a tres columnas **Qué sé – Qué uso – Qué concluyo**.

***a.*** $\overline{PQ} \cong \overline{YZ}$, $\overline{QR} \cong \overline{ZX}$, $\overline{PR} \cong \overline{XY}$.

***b.*** $\angle P \cong \angle Y$, $\angle Q \cong \angle X$, $\overline{PR} \cong \overline{YZ}$.

***c.*** $\overline{QR} \cong \overline{ZY}$, $\overline{PR} \cong \overline{XY}$, $\angle R \cong \angle Y$.

***d.*** $\overline{QP} \cong \overline{ZY}$, $\angle Q \cong \angle Z$, $\angle P \cong \angle Y$.

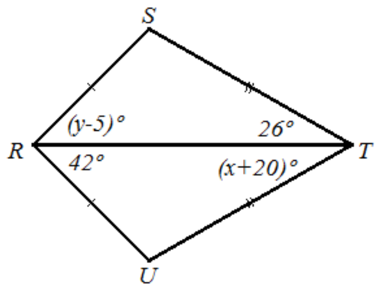
**8.** En cada caso se da la congruencia entre partes correspondientes del $\Delta DEF$ y $\Delta KLM$ . ¿Qué dato faltaría para establecer la congruencia de los triángulos? Explique su respuesta.

***a.*** $\overline{DE} \cong \overline{KL}$, $\overline{DF} \cong \overline{LM}$. ***b.*** $\angle F \cong \angle L$, $\angle E \cong \angle M$.

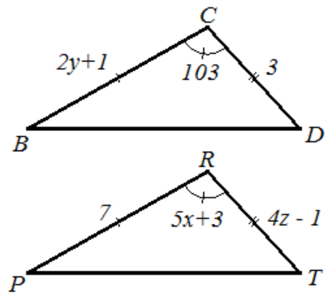
***c.*** $\overline{EF} \cong \overline{LM}$, $\angle F \cong \angle L$. ***d.*** $\overline{MK} \cong \overline{DE}$, $\angle F \cong \angle L$.

**9.** En cada caso, determine si con la información dada existe congruencia en cada pareja de triángulos. Justifique su respuesta haciendo uso del esquema a tres columnas **Qué sé – Qué uso – Qué concluyo**. Luego, halle el valor de $x$, $y$, $z$, según corresponda.

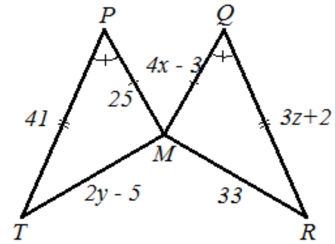
***a.***




***b.***

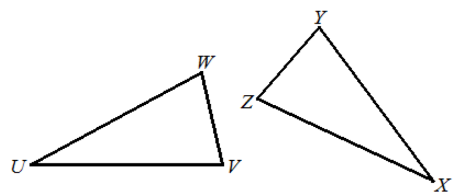



***c.***



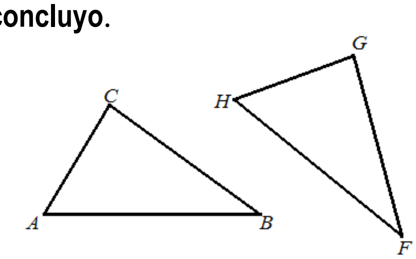

## TAREA NO. 3: USO DE LOS CRITERIOS DE CONGRUENCIA DE TRIÁNGULOS (II)

**1.** Dado que $\Delta UVW \cong \Delta XYZ$, completen el esquema a tres columnas **Qué sé – Qué uso – Qué concluyo**.




| Qué sé | Qué uso | Qué concluyo |
|---|---|---|
| $\Delta$____ $\cong$ $\Delta$____ | D | $\angle U \cong$______ $\overline{UV} \cong$______<br>$\angle V \cong$______ $\overline{UW} \cong$______<br>$\angle V \cong$______ $\overline{VW} \cong$______ |

**2.** Dado que los dos triángulos son congruentes, completen el esquema a tres columnas **Qué sé – Qué uso – Qué concluyo**.




| Qué sé | Qué uso | Qué concluyo |
|---|---|---|
| | | |

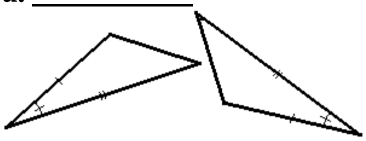
Teniendo en cuenta el anterior esquema, seleccionen la proposición *falsa* en cada literal.

***a.*** $\overline{AC} \cong \overline{HG},\ \angle B \cong \angle F,\ \overline{BC} \cong \overline{HF},\ \angle C \cong \angle G$

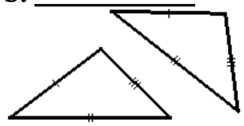
***b.*** $\overline{AB} \cong \overline{FH},\ \angle A \cong \angle H,\ \angle C \cong \angle G,\ \overline{AB} \cong \overline{FG}$

**3.** ¿Por cuál de los **Hechos Geométricos Congruencia de triángulos** son congruentes cada par de triángulos? (*Acéptese que la congruencia está indicada por las marcas, aunque es posible que los triángulos no parezcan congruentes*).

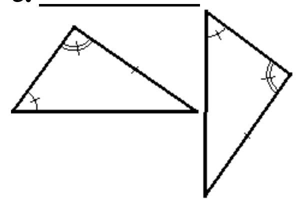
***a.*** ___________



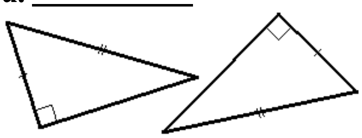
***b.*** ___________



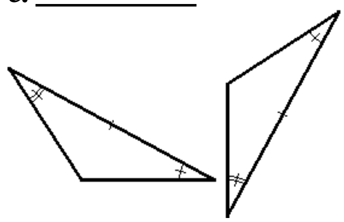
***c.*** ___________



***d.*** ___________

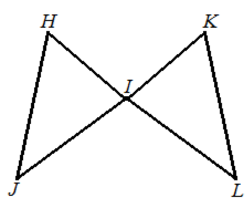


***e.*** ___________



**4.** Para cada caso, determinen si con la información dada existe congruencia en cada pareja de triángulos. Justifiquen su respuesta haciendo uso del esquema a tres columnas **Qué sé – Qué uso – Qué concluyo**.

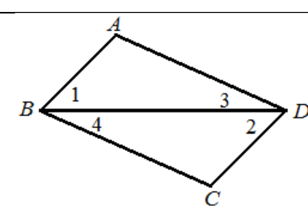
***a.*** **Dado:** $\overline{HI} \cong \overline{KI}, \angle HIJ \cong \angle KIL, \overline{JI} \cong \overline{IL}$




| Qué sé | Qué uso | Qué concluyo |
|---|---|---|
| | | |

***b.*** **Dado:** $\angle 1 \cong \angle 2,\ \angle 3 \cong \angle 4$

| Qué sé | Qué uso | Qué concluyo |
|---|---|---|
| | | |



# ANEXO B. TAREAS DEL SEGUNDO MOMENTO USANDO CABRI

## TAREA NO. 1: PMEDIO

| | *¿Qué hacer?* | *¿Cómo hacerlo?* |
|---|---|---|
| Construcción | Crear un archivo en Cabri llamado *pmedio* | Al abrir el programa **Cabri Geometry**, seleccione **3: New...**, oprima ENTER. Desplace el cursor al recuadro **Variable:**, digite *pmedio* y oprima ENTER. |
| | Trazar el segmento *AB* | Oprima **F2**, y con el cursor seleccione **5: Segment**.<br>Ubique el cursor en cualquier parte de la pantalla, oprima ENTER e inmediatamente nombre el punto con la letra *A*.<br>Desplace el cursor, oprima ENTER e inmediatamente nombre el punto con la letra *B*. |
| | Construya el punto medio | Oprima **F4** y señale **3: Midpoint**. |
| | Medir longitudes | Oprima **F6** y seleccione **1: Distance & Length**. Señale el punto *A* y el punto *M*. Repita este proceso con los puntos *M* y *B*. |
| Exploración | *Con base en la anterior construcción hecha en Cabri, ¿qué pueden observar?* | |
| | Arrastrar | Arrastren cualquiera de los extremos del $\overline{AB}$ y verifiquen su conjetura. |
| Conjeturación | *¿Qué pueden concluir?* Escriban su conclusión en la forma de condicional:<br>*Si* **(lo que construimos)** *entonces* **(lo que descubrimos)**. | |

## TAREA NO. 2: AOV

| | *¿Qué hacer?* | *¿Cómo hacerlo?* |
|---|---|---|
| Construcción | Crear un archivo en Cabri llamado *aov* | |
| | Trazar las rectas *m* y *n* que se intersecan | |

| | | |
|---|---|---|
| | Nombrar el punto $P$ como la intersección de las rectas $m$ y $n$ | |
| | Nombrar dos puntos, de la recta $m$, $A$ y $B$ de tal manera que el punto $P$ esté entre $A$ y $B$ | |
| | Nombrar dos puntos, de la recta $n$, $C$ y $D$ de tal manera que el punto $P$ esté entre $C$ y $D$ | |
| | Medir los ángulos que se determinan | |
| Exploración | *Con base en la anterior construcción hecha en Cabri, ¿qué observan de los ángulos?* | |
| | Arrastrar | Arrastre una de las dos rectas y verifiquen su conjetura. |
| Conjeturación | *¿Qué pueden concluir?* Escriban su conclusión en la forma de condicional: *Si* **(lo que construimos)** *entonces* **(lo que descubrimos)**. | |

## TAREA NO. 3: RECP

| | ***¿Qué hacer?*** | ***¿Cómo hacerlo?*** |
|---|---|---|
| Construcción | Crear un archivo en Cabri llamado *recp* | |
| | Trazar dos rectas perpendiculares. | |
| | Medir los ángulos que se determinan. | |
| Exploración | *Con base en la anterior construcción hecha en Cabri, ¿qué observan de los ángulos?* | |
| | Arrastrar | Arrastre una de las dos rectas y verifiquen su conjetura. |

<table>
<tr><td>Conjeturación</td><td>¿Qué pueden concluir? Escriban su conclusión en la forma de condicional:<br>Si (lo que construimos) entonces (lo que descubrimos).</td></tr>
</table>

## TAREA NO. 4: BDA

<table>
<tr><td rowspan="5">Construcción</td><td>¿Qué hacer?</td><td>¿Cómo hacerlo?</td></tr>
<tr><td>Crear un archivo en Cabri llamado bda</td><td></td></tr>
<tr><td>Construir un $\angle ABC$</td><td></td></tr>
<tr><td>Construir la bisectriz del ángulo $\angle ABC$</td><td></td></tr>
<tr><td>Medir los ángulos que se determinan.</td><td></td></tr>
<tr><td rowspan="2">Exploración</td><td colspan="2">Con base en la anterior construcción hecha en Cabri, ¿qué observan de los ángulos?</td></tr>
<tr><td>Arrastrar</td><td></td></tr>
<tr><td>Conjeturación</td><td colspan="2">¿Qué pueden concluir? Escriban su conclusión en la forma de condicional:<br>Si (lo que construimos) entonces (lo que descubrimos).</td></tr>
</table>

## TAREA NO. 5: DIPUNRE

**Situación.**
Don Gustavo es un campesino que desea cultivar arroz en su finca. Para ello, tiene que inundar el potrero en que sembrará las matas de arroz, sacando agua de una canal. Hay una llave de agua en el punto $P$ lejos de la canal. Por tanto, debe construir una tubería desde el punto $P$ a un punto de la canal para llenarla de agua. Si Don Gustavo quiere que la

construcción sea lo más barata posible, entonces ¿cómo localiza un punto $Q$ en la canal para que pueda cumplir con su intención?

- ***a.*** Representen la situación en esta hoja.
- ***b.*** Representen la situación usando Cabri y encuentren el punto $Q$.
- ***c.*** Completen la tabla con la información solicitada.
- ***d.*** ¿Cómo encontraron el punto $Q$?

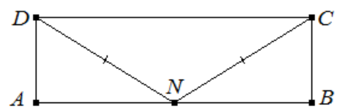
<table>
<tr><th></th><th>¿Qué hacer?</th><th>¿Cómo hacerlo?</th></tr>
<tr><td>Construcción</td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>Exploración</td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>Conjeturación</td><td colspan="2">¿Qué pueden concluir? Escriban su conclusión en la forma de condicional:<br>Si (lo que construimos) entonces (lo que descubrimos).</td></tr>
</table>

# ANEXO C. TAREAS DEL SEGUNDO MOMENTO PARA USAR ELEMENTOS DEL SISTEMA TEÓRICO LOCAL

## TAREA NO. 1: DEFINICIÓN DE PUNTO MEDIO

**1.** Dado que $N\ es\ el\ punto\ medio\ de\ AB$,

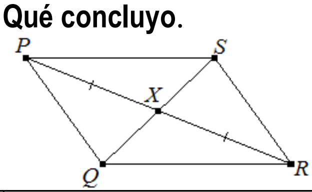
***a.*** ¿qué pueden concluir? Completen el esquema a tres columnas **Qué sé – Qué uso – Qué concluyo**.




| Qué sé | Qué uso | Qué concluyo |
|---|---|---|
| | | |

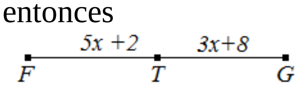
***b.*** ¿es $N\ punto\ medio\ de\ \overline{DC}$? Expliquen.

**2.** De acuerdo con la siguiente figura, ¿qué pueden concluir? Completen el esquema a tres columnas **Qué sé – Qué uso – Qué concluyo**.




| Qué sé | Qué uso | Qué concluyo |
|---|---|---|
| | | |

**3.** Si $T\ es\ punto\ medio\ de\ \overline{FG}$, entonces

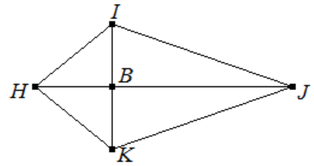



***a.*** ¿qué pueden concluir? Completen el esquema a tres columnas **Qué sé – Qué uso – Qué concluyo**.

| Qué sé | Qué uso | Qué concluyo |
|---|---|---|
| | | |

***b.*** Con base en la columna **Qué concluyo** del anterior esquema, ¿cuál es el valor de $x$?

**4.** Dado que $B\ es\ el\ punto\ medio\ de\ \overline{IK}$,




***a.*** ¿qué pueden concluir? Completen el esquema a tres columnas **Qué sé – Qué uso – Qué concluyo**.

| Qué sé | Qué uso | Qué concluyo |
|---|---|---|
| | | |

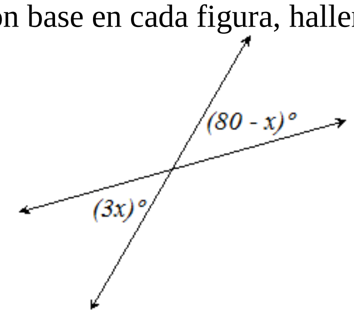
***b.*** De acuerdo con la figura dada, ¿es $B\ punto\ medio\ de\ \overline{HJ}$? Expliquen.

**5.** Si $X \in \overline{PR}\ y\ \overline{PX} \cong \overline{XR}$, entonces ¿qué pueden concluir?

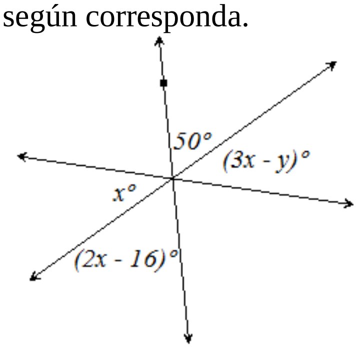
| Qué sé | Qué uso | Qué concluyo |
|---|---|---|
| | | |

## TAREA NO. 2: HECHO GEOMÉTRICO DE ÁNGULOS OPUESTOS POR EL VÉRTICE

**1.** Con base en cada figura, hallen el valor de $x$ y $y$, según corresponda.

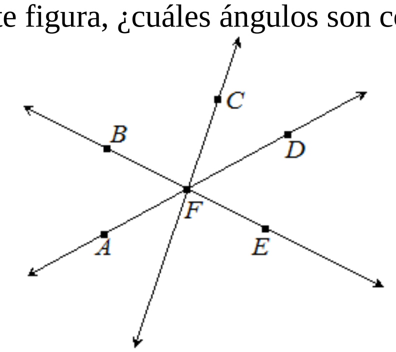



***a.***

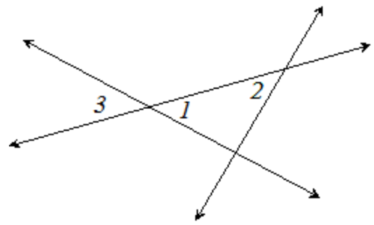



***b.***

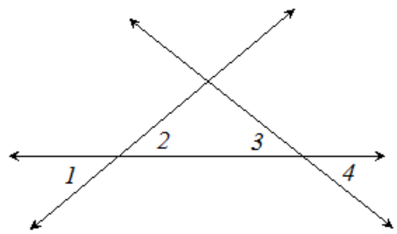
**2.** De acuerdo con la siguiente figura, ¿cuáles ángulos son congruentes?



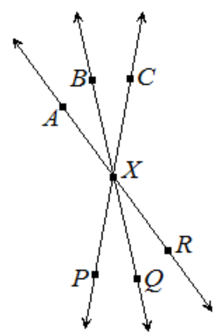
**3.** Dado $\angle 1 \cong \angle 2$, ¿qué pueden concluir? Empleen el esquema a tres columnas **Qué sé – Qué uso – Qué concluyo**.




**4.** Dado $\angle 2 \cong \angle 3$, ¿qué pueden concluir? Empleen el esquema a tres columnas **Qué sé – Qué uso – Qué concluyo**.

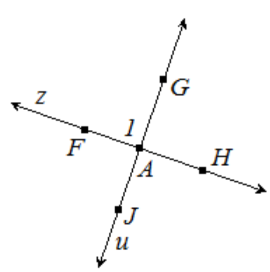



**5.** Si $\angle AXB \cong \angle BXC$ entonces ¿qué pueden concluir? Empleen el esquema a tres columnas **Qué sé – Qué uso – Qué concluyo**.

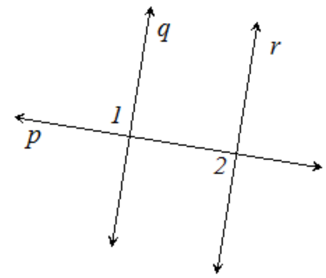



## TAREA NO. 3: DEFINICIÓN DE RECTAS PERPENDICULARES

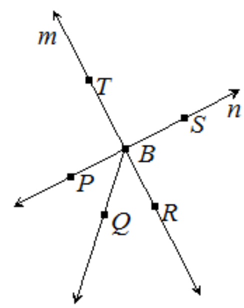
**1.** Si $m\angle 1 = 90°$ entonces ¿qué pueden concluir? Utilicen el esquema a tres columnas **Qué sé – Qué uso – Qué concluyo**.



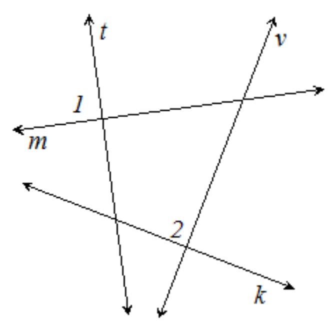
**2.** Si $p \perp q$, $\angle 1 \cong \angle 2$ entonces ¿qué pueden concluir? Utilicen el esquema a tres columnas **Qué sé – Qué uso – Qué concluyo**.




**3.** Dado $m \perp n$, $\angle PBQ \cong \angle RBQ$, ¿qué pueden concluir? Utilicen el esquema a tres columnas **Qué sé – Qué uso – Qué concluyo**.




**4.** Dado $m \perp t$, $k \perp v$, ¿qué pueden concluir? Utilicen el esquema a tres columnas **Qué sé – Qué uso – Qué concluyo**.

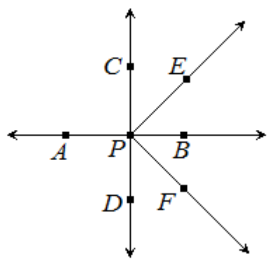



**5.** Dados $\Delta ABC$ y $\Delta DEF$ tal que $\overline{AB} \perp \overline{BC}, \overline{FE} \perp \overline{ED}, \overline{AB} \cong \overline{EF}$ y $\overline{CB} \cong \overline{DE}$, ¿qué pueden concluir sobre los triángulos? Utilicen el esquema a tres columnas **Qué sé – Qué uso – Qué concluyo**.

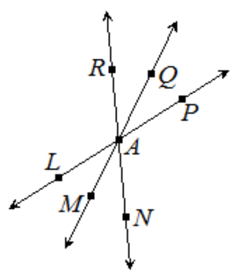
**6.** Dado $X$ punto medio de $\overline{WZ}$ y también punto de intersección de $\overleftrightarrow{WZ}$ y $\overleftrightarrow{VY}$, $\overline{YZ} \perp \overline{XZ}, \overline{VW} \perp \overline{WX}$. ¿Qué pueden decir de $\Delta WXV$ y $\Delta ZXY$? Utilicen el esquema a tres columnas **Qué sé – Qué uso – Qué concluyo**.

## TAREA NO. 4: DEFINICIÓN DE BISECTRIZ DE UN ÁNGULO

**1.** Si $\overleftrightarrow{AB} \perp \overleftrightarrow{CD}, \overrightarrow{PE}\ bisectriz\ del\ \angle CPB$ y $\overrightarrow{PF}\ bisectriz\ del\ \angle BPD$, ¿qué pueden decir de $\angle EPB$?

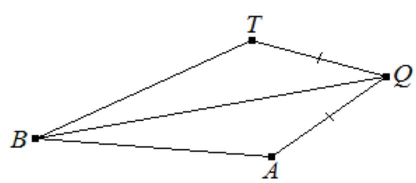



**2.** Dado que $\overrightarrow{AQ}\ bisectriz\ del\ \angle RAP$ y $\overrightarrow{AM}\ bisectriz\ del\ \angle LAN$, ¿qué pueden concluir de $\angle RAQ$ y $\angle LAM$? Empleen el esquema a tres columnas **Qué sé – Qué uso – Qué concluyo**.



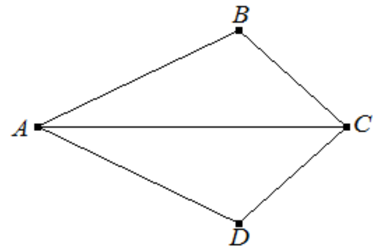

**3.** Completen el esquema a tres columnas **Qué sé – Qué uso – Qué concluyo**.

Si $\overrightarrow{QB}\ biseca\ al\ \angle TQA\ y\ \overline{QT} \cong \overline{QA}$, entonces $\Delta BQT \cong \Delta BQA$.

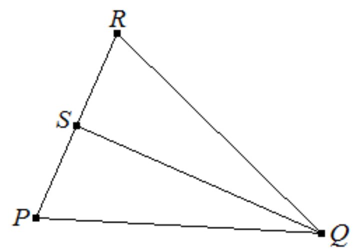



| Qué sé | Qué uso | Qué concluyo |
|---|---|---|
| 1. $\overrightarrow{QB}\ biseca\ al\ \angle TQA$ | D Bisectriz de un ángulo | |
| 2. | Propiedad reflexiva | |
| 3. $\overline{QT} \cong \overline{QA}$ | ____________________ | $\Delta BQT \cong \Delta BQA$ |

**4.** Si $\overrightarrow{AC}$ $biseca\ al\ \angle DAB\ y\ \overrightarrow{CA}\ biseca\ al\ \angle DCB$ entonces ¿Qué pueden decir de $\Delta BCA$ y $\Delta DCA$. Empleen el esquema a tres columnas **Qué sé – Qué uso – Qué concluyo**.



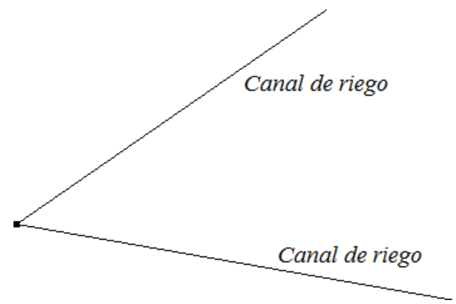

**5.** Dado $\overrightarrow{QS}\ bisectriz\ del\ \angle PQR, \angle R \cong \angle P,$ ¿pueden afirmar que $\Delta RSQ \cong \Delta PSQ$? Empleen el esquema a tres columnas **Qué sé – Qué uso – Qué concluyo**.



# ANEXO D. TAREAS DEL TERCER MOMENTO – PRIMERA APLICACIÓN

## TAREA NO. 6: TEOPELAN

**Situación.**
Uno de los terrenos en la finca de Don Gustavo tiene forma de cuña. Él quiere sembrar matas de arroz de tal forma que su distancia a cada canal de riego sea la misma. *a*) ¿Dónde puede sembrar las matas? *b*) ¿Cuántas de éstas puede sembrar? *c*) ¿Cómo puede describirle a Don Gustavo el sitio donde debe colocar las matas?



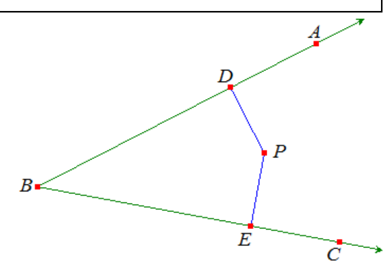

***a.*** Represente la situación usando Cabri.
***b.*** Complete la tabla con la información solicitada.

| | | |
|---|---|---|
| Construcción y Exploración | ***¿Qué hacer?*** | ***¿Cómo hacerlo?*** |
| | | |
| | *Con base en la anterior construcción, respondan*<br>**a.** *¿Dónde puede sembrar las matas?*<br>**b.** *¿Cuántas de éstas puede sembrar?*<br>**c.** *¿Cómo puede describir a Don Gustavo el sitio en donde debe colocar las matas?* | |
| Conjeturación | *En términos de geometría, ¿qué pueden concluir?* Escriban su conclusión en la forma de condicional:<br>*Si* **(lo que construimos)** *entonces* **(lo que descubrimos)**. | |

## TAREA NO. 7: JUSTIFICACIÓN DE TEOPELAN

**Conjetura:**

***Si*** *un punto equidista de los lados de un ángulo* ***entonces*** *el punto está sobre la bisectriz del ángulo.*

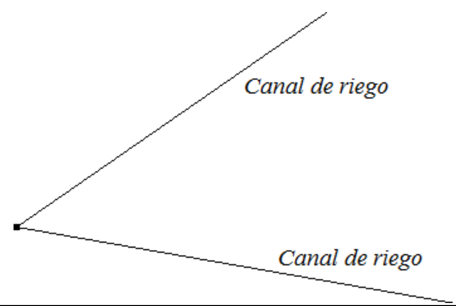



| Qué sé | Qué uso | Qué concluyo |
|---|---|---|
| | | |

# ANEXO E. TAREAS DEL TERCER MOMENTO – SEGUNDA APLICACIÓN

## TAREA NO. 6: TEOPELAN

**Situación.**
Uno de los terrenos en la finca de Don Gustavo tiene forma de cuña, bordeado por dos canales. Él quiere sembrar matas de arroz de tal forma que la distancia de cada mata a cada canal sea la misma.




- ***c.*** Represente la situación usando Cabri.
- ***d.*** Complete la tabla con la información solicitada.

<table>
<tr><td rowspan="3">Construcción y Exploración</td><td>¿Qué hacer?</td><td>¿Cómo hacerlo?</td></tr>
<tr><td></td><td></td></tr>
<tr><td colspan="2">Con base en la anterior construcción, respondan<br>d. Representen en la calculadora las matas con puntos donde Don Gustavo puede sembrarlas.<br>e. ¿Cuántas de éstas puede sembrar?<br>f. ¿Cómo pueden describir el sitio en donde Don Gustavo debe colocar las matas?</td></tr>
<tr><td>Conjeturación</td><td colspan="2">En términos de geometría, ¿qué pueden concluir? Escriban su conclusión en la forma de condicional:<br>Si (lo que construimos) entonces (lo que descubrimos).</td></tr>
</table>

## TAREA NO. 7: JUSTIFICACIÓN DE TEOPELAN

**Conjetura:**

***Si*** *la distancia de un punto a cada lado de un ángulo es igual* ***entonces*** *el punto está sobre la bisectriz del ángulo.*

| Qué sé | Qué uso | Qué concluyo |
|---|---|---|
| | | |

# ANEXO F. SISTEMA TEÓRICO LOCAL

### Hechos Geométricos HG y Definiciones D

D **Segmentos congruentes:** dos segmentos son congruentes si tienen la misma medida.

D **Ángulos congruentes:** dos ángulos son congruentes si tienen la misma medida.

D **Triángulos congruentes:** Dos triángulos son congruentes si existe una correspondencia entre sus vértices tal que sus lados y ángulos correspondientes son congruentes.

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| HG **LLL** | HG **LAL** | HG **ALA** | HG **LAA** | HG **HC** |

D **Punto medio:** $M$ es punto medio de $\overline{AB}$ si

- $M \in \overline{AB}$
- $\overline{AM} \cong \overline{MB}$

D **Ángulo:** es la figura geométrica formada por dos rayos que no son colineales y que tienen el mismo origen.

D **Ángulos opuestos por el vértice:** son dos ángulos cuyos lados forman dos pares de rayos opuestos.

HG **Ángulos opuestos por el vértice:** Si dos ángulos son opuestos por el vértice entonces son congruentes.

D **Ángulo recto:** Un ángulo es recto si su medida es 90º.

HG **Ángulos rectos:** Si dos ángulos son rectos entonces son congruentes.

D **Rectas perpendiculares:** Dos rectas son perpendiculares si se intersecan y determinan cuatro ángulos rectos.

$\boldsymbol{Notació}$n: $m \perp n$, $\overleftrightarrow{AB} \perp \overleftrightarrow{CD}$

D **Triángulo rectángulo:** es un triángulo con un ángulo recto.

D **Ángulos par lineal:** son dos ángulos que comparten un lado, y los lados no comunes son rayos opuestos.

D **Ángulos suplementarios:** son dos ángulos tales que la suma de sus medidas es 180º.

HG **Ángulos par lineal:** Si dos ángulos son par lineal entonces son suplementarios.

D **Bisectriz de un ángulo:** es un rayo con extremo en el vértice del ángulo y demás puntos en el interior del ángulo, tal que el rayo con los lados del ángulo forman dos ángulos congruentes.

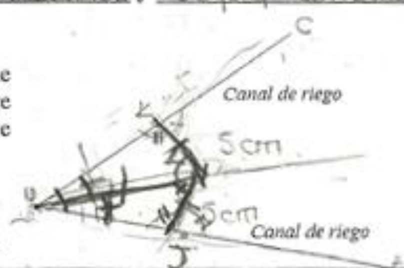
D **Distancia de un punto a una recta:** La distancia de un punto $P$ a una recta $m$ es la longitud del segmento perpendicular desde $P$ hasta $m$.

# ANEXO G. SOLUCIÓN DE LA TAREA No. 6 CORRESPONDIENTE A LA FORMULACIÓN DE LA CONJETURA

**Nombres:** Cristian Galviz, Diana Martinez y Dayana Garizado

**Situación.**

Uno de los terrenos en la finca de Don Gustavo tiene forma de cuña, bordeado por dos canales. Él quiere sembrar matas de arroz de tal forma que la distancia de cada mata a cada canal sea la misma.




$\overline{YK}$ $\overline{YJ}$

*a.* Represente la situación usando Cabri.

*b.* Complete la tabla con la información solicitada.

**Construcción y Exploración**

| *¿Qué hacer?* | *¿Cómo hacerlo?* |
|---|---|
| Construir un angulo y un punto llamado K dentro de ese angulo, que debia tener la misma distancia de rayo a rayo. | • crear un archivo en cabry llamado TEOPELAN, • F2 : 6 : Ray (crear dos rayos) • crear un punto F1 : pointer y nombrarlo. • crear las lineas perpendiculares a los rayos F4 : 1 : perpendicular Line. • crear el punto de intersection en cada rayo. • crear los segmentos F2 : 5 : Segment y medirlos. |

*Con base en la anterior construcción, respondan*

*a.* *Representen en la calculadora las matas con puntos donde Don Gustavo puede sembrarlas.*

*b.* *¿Cuántas de éstas puede sembrar?*

infinitas.

*c.* *¿Cómo pueden describir el sitio en donde Don Gustavo debe colocar las matas?*

En toda la linea Bisectriz del angulo

**Conjeturación**

*En términos de geometría, ¿qué pueden concluir?* Escriban su conclusión en la forma de condicional:

*Si* **(lo que construimos)** *entonces* **(lo que descubrimos)**

Si ∠CYJ con un punto dentro de el que llevaba la misma distancia de rayo a rayo | entonces lo que descubrimos que por medio de la bisectriz podiamos saber donde colocar los puntos.

# ANEXO H. SOLUCIÓN DE LA TAREA No. 7 CORRESPONDIENTE A LA JUSTIFICACIÓN DE LA CONJETURA

**Nombres:** Cristian Galviz, Diana Martinez y Dayana Gonzalez.

**Conjetura:**

***Si** la distancia de un punto a cada lado de un ángulo es igual **entonces** el punto está sobre la bisectriz del ángulo.*

| Qué sé | Qué uso | Qué concluyo |
|---|---|---|
| $\overline{KI}$ tiene la misma medida con $\overline{IJ}$ | (D) SEGMENTOS CONGRUENTES | $\overline{KI} \cong \overline{IJ}$. |
| $\angle IKC$ 90° <br> $\angle IKY$ 90° | (D) RECTAS PERPENDICULARES | $\overline{IK} \perp \overline{YC}$ |
| $\angle CKI$ y $\angle YKI$ son ángulos rectos | (D) Ángulos Congruentes | $\angle CKI \cong \angle YKI$ |
| (1) $\overline{KI}$ tiene la misma medida con $\overline{IJ}$ | (D) SEGMENTOS CONGRUENTES | $\overline{KI} \cong \overline{IJ}$ |
| IK distancia del punto a la recta. | (D) DISTANCIA DE UN PUNTO A UNA RECTA | $\overline{IK} \perp \overrightarrow{YC}$ |
| IJ distancia del punto a la recta | (D) DISTANCIA DE UN PUNTO A UNA RECTA | $\overline{IJ} \perp \overrightarrow{YA}$ |
| $\overline{IK} \perp \overrightarrow{YC}$ <br> $\overline{IJ} \perp \overrightarrow{YA}$ | (D) RECTAS PERPENDICULARES | $\angle IKC$ <br> $\angle IKY$ <br> $\angle IJY$ <br> $\angle IJA$ son ángulos rectos |
| $\angle IKC$ <br> $\angle IKY$ <br> $\angle IJY$ <br> $\angle IJA$ son ángulos rectos | (HG) Ángulos Rectos | $\angle IKC \cong \angle IKY$ <br> $\angle IJY \cong \angle IJA$ <br> $\angle IKC \cong \angle IJY$ <br> $\angle IKY \cong \angle IJA$. |
| (1) el $\triangle KIY$ y el $\triangle JIY$ comparten el $\overline{YI}$ | Propiedad Reflexiva | $\overline{YI} \cong \overline{IY}$ |

(*Continúa en la siguiente página*)

**Nombres:** ______________________, __________________ y ___________________

**Conjetura:**

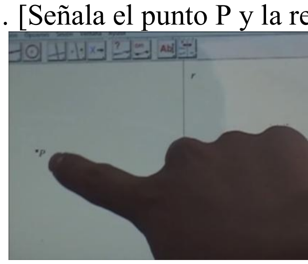
***Si*** *la distancia de un punto a cada lado de un ángulo es igual* ***entonces*** *el punto está sobre la bisectriz del ángulo.*

| Qué sé | Qué uso | Qué concluyo |
|---|---|---|
| $\angle YJI$, $\angle YKI$ Son ángulos rectos | D Triángulo Rectangulo | $\Delta IKY$ y $\Delta IJY$ Son triángulos Rectangulos |
| $\Delta IKY$ y $\Delta IJK$ son triángulos Rectangulos. | HG HC | $\Delta IKY \cong \Delta IJY$ |
| $\Delta IKY \cong \Delta IJY$ | D TRIÁNGULOS CONGRUENTES | $\angle KYI \cong \angle JYI$ |
| $\angle KYI \cong \angle JYI$ | D BISECTRIZ DE UN ÁNGULO | CONSEGUIMOS LA BISECTRIZ $\overrightarrow{YI}$ |
| La bisectriz del $\angle CYA$ es $\overrightarrow{YI}$ | D Pertenecer a. | $I \in \overrightarrow{YI}$ |

# ANEXO I. TRANSCRIPCIÓN DEL PROCESO DE CONJETURACIÓN

La siguiente transcripción corresponde a la sesión No. 17 del 7 de febrero de 2012 en la que participaron el grupo de estudiantes conformado por Diana, Dayana y Cristian quienes resolvieron la Tarea No. 6 titulada "TeoPELAn" (ver Anexo E). Los observadores fueron los autores del estudio, Profesor J y Profesor L (el segundo de ellos, docente titular de la institución donde desarrollamos el estudio).

| | | |
|---|---|---|
| 1. | Profesor L: | Vamos a hacer la retroalimentación de la actividad que ustedes desarrollaron el día de ayer. ¿De acuerdo?, entonces leo la situación nuevamente, dice: [lee la situación]. Y la primera tarea era que debía representar la situación en la hoja que yo les entregaba, la hoja que ustedes…, la hoja que ustedes me entregaron. Bueno, finalmente representaron en la hoja, que eso quedó ayer en el video, luego representaron esa situación en Cabri y en Cabri ustedes hicieron esto, ¿de acuerdo? [Utilizando Cabri se van recreando las siguientes acciones.] Ustedes ubicaron el punto $P$, ¿de acuerdo?, ¿el punto $P$ qué era lo que representaba en la situación? |
| 2. | Diana: | Eh, la llave. |
| 3. | Profesor L: | La llave del agua y la recta, una recta era la canal y la recta la llamaron como… |
| 4. | Cristian: | $r$ |
| 5. | Profesor L: | $r$. Voy a colocarle un nombre, colocarle un nombre $r$. ¿De acuerdo? Listo. ¿Y luego que hicieron? |
| 6. | Diana: | La tubería. |
| 7. | Cristian: | La tubería. |
| 8. | Profesor L: | La tubería,.. Entonces, ¿cómo la hicieron? |
| 9. | Diana: | Hicimos un segmento… [Señala el punto P y la recta $r$ en el computador.] |



| | | |
|---|---|---|
| 10. | Profesor L: | Si quieres ayúdame. |
| 11. | Diana: | No profe. Hágalo usted. |
| 12. | Profesor L: | O Cristian:. [Le pasa el computador a Cristian:]. Entonces vamos a… ¿Cómo lo hicieron? |
| 13. | Cristian: | Hicimos un segmento de $P$… |
| 14. | Diana: | …Ahí… [Cristian: dibuja la recta en Cabri] |
| 15. | Cristian: | … y a la unión la llamamos $Q$ |
| 16. | Profesor L: | $Q$. Okey. Simplemente una observación acá. Las letras se nombran con |

letra mayúscula, las rectas… [Cristian: cambia la $Q$ (minúscula) por la $Q$ (mayúscula)] Sí. Okey. Listo. Y después ¿qué hicieron?, Trazaron la…

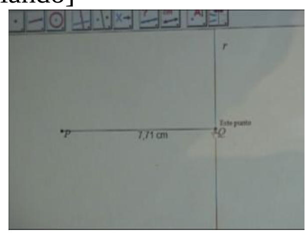
17. Cristian: Eh, medimos la…, medimos el segmento. Perdón. [Miden el segmento en Cabri.]

18. Profesor L: Okey. Y ¿después de que midieron el segmento?

19. Cristian: Eee, medimos los ángulos.

20. Diana: ¡No! Empezamos a mirar a ver si esa era la tubería más barata.

21. Cristian: A pues moviendo… pero, moviendo el punto $Q$ por la canal… [Hace el arrastre mientras va hablando]



22. Profesor L: Sí.

23. Cristian: …o sea, por la línea

24. Profesor L: Sí.

25. Cristian: Y veíamos que si lo bajábamos o lo subíamos pues aumentaba la medida de la tubería. Entonces no le iba a salir más barata.

26. Profesor L: Aja.

27. Cristian: Tocaba colocarla de una forma…

28. Profesor L: ¿De qué forma lo colocaron?

29. Cristian: Es que no sabemos cómo decirle.

30. Diana: Eeee, horizontal.

31. Profesor L: Horizontal. 😐[Expresión en la cara que solicita revisión.]

32. Diana: Recta. Pero ¿que es recta?

33. Profesor L: Recta. Tuvieron esa confusión ayer. Luego descubrieron una…, o sea, hicieron eso para que la tubería fuera la más corta porque la idea era que le saliera barato a Don Gustavo, la tubería, ¿y luego como…? midieron otra cosa.

34. Cristian: Pues los ángulos.

35. Profesor L: Los ángulos, okey.

36. Diana: ¿Si ve? [Se sigue el proceso para medida de ángulos en Cabri]

37. Cristian: Ah, pero no hay punto. [Se refiere a un punto que sería el vértice del ángulo que quiere medir.]

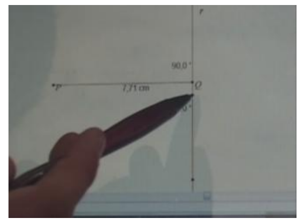
38. Profesor L: No importa, se puede marcar, marque el ángulo y se puede marcar el punto ahí, por ejemplo. [Cristian: mide el ángulo del segmento con la recta y da 90,0°.] Aja. Y, ¿cuál otro?

39. Cristian: Y... no, pues por deducción sacamos que el de acá era, pues, igual. [Señala el ángulo suplementario en la pantalla, sin embargo lo mide]

40. Profesor L: Sí. Y ¿qué fueron lo que conjeturaron? Entonces, mire que lo que ustedes conjeturaron fue esto, que fue lo que escribieron acá [Señala en el computador.] Completaron la información; ehh, completaron la tabla con la información solicitada. No hay ningún inconveniente. Luego conjeturaron y escribieron; [lee] *si* $PQ$… [está escrito $\overline{PQ}$] Voy a dejarlo… Voy a dejar Cabri abierto acá. [Murmullos, organiza la pantalla para ver lo realizado en Cabri y poder leer la conjetura al mismo tiempo.]

Dice… para que lean, *Si* $PQ$*…* vamos señalando Cristian: $P, Q$ [se refiere a señalar $\overline{PQ}$ en la construcción hecha en Cabri] señalándolo… el segmento…okey P,Q [Cristian: señala el segmento con un lapicero en la pantalla] *Si PQ y una recta r.* Si. *Entonces lo que descubrimos fue dos ángulos rectos,* aja*, por medio de una perpendicular.*

Okey. Pero, cuando hablan de perpendicular, ¿quién era, quién es perpendicular o quién…?



41. Diana: P, Q con *r* ¿no?

42. Profesor L: P, Q con *r*. O sea, que ustedes lo que descubrieron, si muy bien, lo del ángulo recto acá, [Señala en Cabri] o sea, de 90 o el ángulo de 90 acá [Señala los dos ángulos] Es decir que, ¿el segmento P,Q cómo es con respecto a la recta *r?*

43. Diana: Perpendicular.

44. Profesor L: Es perpendicular. O sea que ustedes debieron haberla, por ejemplo, escrito de la siguiente manera. ¿Me prestan un lápiz, por favor? Por lo menos, para no ponerme a escribir allá.
Y es, eh, así; que *P, Q* perpendicular a, ¿quién?

45. Coro A *r.*

46. Profesor L: A *r.* [Escribe en la hoja $\overline{PQ} \perp r$ ] Entonces, yo sé que … obtuvieron lo de los ángulos rectos, pero finalmente ésta era una de las… de lo que, una de las cosas que descubrían después de que movieran, después de que movían el punto *Q* sobre la recta *r* de tal manera que el segmento *PQ* fuera el más corto, ¿de acuerdo? Ustedes descubrieron eso.
Hay unas cositas de acá que nos sirven para llegar a una definición la cual vamos a ver ya.
Entonces, mírela. Ésta fue la conjetura que ustedes, a la que ustedes llegaron.
Y con esta conjetura llegamos a una definición. Entonces, lo que ustedes, lo que ustedes hicieron acá [señala la construcción en Cabri], lo que ustedes hicieron acá de trazar el segmento *PQ*, localizar el punto *Q* de tal manera que… Ah bueno, una cosita acá, antes de pasar a eso. Se me olvidaba; a ustedes les faltó comple… responder esta pregunta *¿Cómo encontraron el punto Q?* Entonces…

47. Cristian: No la vimos

48. Profesor L: No. Sí aparecía al final, sino que no la respondieron. Completaron la tabla pero no la respondieron. Entonces, ya hicimos la… el recorderis de la situación, como encontraron ese punto *Q*. Hagamos, hagámoslo de manera verbal. Creo que algo ya lo dijimos. ¿Cómo descubrieron que ése era el punto *Q*?

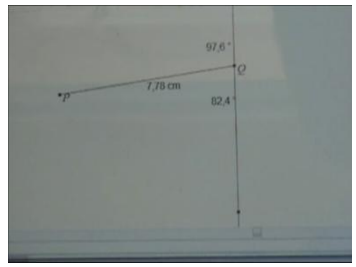
49. Diana: Por que como decía que de la llave no era un punto de la, de la canal, entonces tenía que ser el más corto. Principalmente de lógica, pues no de

lógica pero si lo más simple es que si es recto, entonces sería el más corto.

50. Profesor L: ¿Cuando tú te refieres a recto a que te refieres?... [Un breve silencio y luego murmullos.] Es precisamente lo que tú, o sea, veo que lo que tú estás diciendo de recto es que el segmento debe ser perpendicular.

51. Diana: mmm

52. Profesor L: Debe ser perpendicular a *r*, porque si no lo fuera, por ejemplo si el ángulo fuera así… [Arrastra el punto *Q*] Ahí por ejemplo ¿el segmento es perpendicular a la recta?




53. Diana: No.

54. Profesor L: No, porque no forman un ángulo, no forman ángulo de 90, o sea que ustedes…

55. Diana: Para encontrarla así fue que formara… que fuera perpendicular con *r*, ¿no?

56. Profesor L: Que fuera perpendicular con *r*. Esto que aparece allá. Vamos a hacer un nuevo archivo… hmm, si. Vamos a hacer un nuevo archivo. Supongamos que tenemos, que tenemos esta recta, tenemos esta recta y ustedes tienen ese punto. Entonces éste es el punto… coloquémosle *A*, coloquémosle nuevamente *P*. Ésta es la recta… ésta es la recta... Coloquémosle *r* nuevamente, ¿de acuerdo? ¿Cómo hallan ese segmento que sea más corto entre *P* y la recta?

57. Cristian: Eee, midiéndolo.

58. Profesor L: Midiendo ¿qué?, o sea…

59. Cristian: Pues, colocando el segmento primero para hacer la medida.

60. Profesor L: O sea que… voy a… ¿cómo sería?

61. Diana: O sea, colocar la línea así. ¿No? [Señala con el dedo en el computador]

62. Profesor L: Si

63. Cristian: Pues no. Primero haga el segmento

64. Profesor L: El segmento, bueno. [Cristian: traza un segmento de *P* hasta *r*.]

65. Cristian: Entonces, digamos… mido los ángulos… ah no, espere. Primero hagamos esto… [se refiere a nombrar el punto de intersección entre el segmento recién construido y la recta *r*]

66. Profesor L: En ese caso si lo puedes dejar….

67. Cristian: ¿Lo puedo dejar así?

68. Profesor L: Ah bueno, no. O sea, le da click [al punto de intersección] y lo puede nombrar, pongámosle *Q*.

69. Cristian: Entonces mido los ángulos [realiza la medición]
Entonces, digamos si queremos hacer una recta perpendicular entonces empiezo a mover la *Q* [Arrastra el punto *Q* por la recta *r*, intentando que los ángulos tengan la misma medida, 90º]

70. Profesor L: ¿Aproximadamente?

| | | |
|---|---|---|
| 71. | Cristian: | Ahí |
| 72. | Profesor L: | Seria aproximadamente. |
| 73. | Cristian: | Por aproximación. |
| 74. | Profesor L: | Si. Entonces lo que Cristian:… lo que Cristian: está haciendo finalmente es... estamos utilizando una definición. ¿Qué definición es la que estamos utilizando? Precisamente la actividad mire cómo se llama: “DIPUNRE”, que significa *distancia de un punto a una recta*.<br>¿Cuál es el punto que tenemos inicialmente? El punto P .¿Cuál es la recta que teníamos… que tenemos? |
| 75. | Diana: | *“r”* |
| 76. | Profesor L: | “*r*”. Entonces la distancia que hay del punto… ¿Cómo podríamos decir la distancia que hay del punto *P* y la recta *r*?... ¿Cómo la podríamos decir? |
| 77. | Cristian: | Midiendo, midiendo la recta… eeh el segmento. |
| 78. | Profesor L: | El segmento, y de tal manera que ¿qué? |
| 79. | Cristian: | Que… |
| 80. | Diana: | Que formen dos ángulos rectos. |
| 81. | Profesor L: | O sea… |
| 82. | Cristian: | O una aproximación |
| 83. | Profesor L: | O aproximación. Y si forman dos ángulos rectos es porque la… ¿Cómo es el segmento con respecto a…? |
| 84. | Diana: | Perpendicular. |
| 85. | Profesor L: | Son perpendiculares. Y eso es finalmente lo que ustedes tienen en esta definición. Dice: [Lee en la hoja en donde se condensa el sistema axiomático local] *la distancia de un punto P a una recta*, en este caso la llamamos *m*, puede ser *r* también, *es la longitud*… ustedes en este caso hicieron que los ángulos fueran de 90° Bueno, para que fuera perpendicular…*es la longitud del segmento perpendicular desde P hasta m.* Entonces ustedes hicieron que *P* y *Q* [$\overline{PQ}$] fuera perpendicular. ¿Cuál es la distancia? Pues simplemente ustedes calculan la…la medida, la distancia o longitud del segmento, aquí lo tienen [muestra en Cabri la opción, lee] *longitud de este segmento,* o sea que la distancia del punto P con la recta… |
| 86. | Diana: | *r* |
| 87. | Profesor L: | *r,* es la longitud de, ¿cuál segmento? |
| 88. | Diana: | P, Q |
| 89. | Profesor L: | Que es… ¿qué con la recta? Si P, Q |
| 90. | Diana: | Que es perpendicular a la recta. |
| 91. | Profesor L: | Que es perpendicular con la recta… Muy bien. Hagamos un ejercicio, si por ejemplo ahora me dicen acá que tengo esta… esta recta *m,* este punto *P*; [El Profesor L: traza en Cabri la recta y el punto] ¿cómo… cómo aplico esa definición en esa situación? Es decir, ¿cuál sería la distancia entre el punto P y la recta *m*? ¿Cómo lo haría? |
| 92. | Diana: | Formando un segmento P… |
| 93. | Profesor L: | O sea, ¿como lo haría? Ya hablamos de perpendicular, ¿cierto? Será que nos podemos ahorrar ese paso, porque ustedes hicieron… mire todo lo que ustedes hicieron acá. [muestra la construcción anterior y arrastra de nuevo] Todo lo que hicieron en la otra… en la otra parte. Ustedes movían el punto *Q* hasta que llegaran a 90°… median… listo. ¿No habrá en Cabri una opción que me permita crear ese segmento para que quede |

perpendicular?

94. Diana: Mire gordo ahí. [Cristian: explora las funciones de Cabri]. Espere, espere. Empiece de aquí para allá, despacio.

95. Profesor L: Repito. ¿Cómo debe ser el segmento con respecto a la recta?

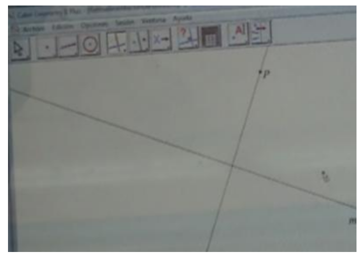
96. Diana: Perpendicular.

97. Profesor L: Perpendicular. [Sigue la exploración. Murmullos]

98. Diana: ¿Perpendicular?

99. Profesor L: No. O sea ahí preguntan si es perpendicular [se refieren a la opción de Cabri] pero no….

100. Diana: No… [Cristian: finalmente encuentra la opción apropiada. Diana: lee] *Recta perpendicular*, [Cristian: traza una recta perpendicular a *m* que pasa por *P*]



101. Profesor L: Y, ¿Ahí hay un segmento?

102. Diana: No.

103. Profesor L: ¿Cómo haríamos entonces para obtener un segmento?

104. Cristian: Pues nombrando un punto acá. [En la intersección de las rectas. Lo traza y lo nombra *Q*]

105. Profesor L: Y ¿ya tenemos el segmento?

106. Diana: Eh, *P*, *Q*

107. Profesor L: Gráficamente, ¿está el segmento?

108. Diana: No.

109. Profesor L: No. ¿Qué es lo que vemos ahí? Vemos es la recta *Q*, *P*... la recta *Q*, *P* o la recta *P*, *Q*. Y lo que queremos es que se vea en la… en la… en la pantalla de Cabri el segmento. Entonces, ¿cómo trazaríamos esa… esa distancia entre el punto *P* y la recta *m*? Ya sé que trazaron la perpendicular, tienen el punto de intersección ¿Qué nos faltaría?

110. Cristian: ¿Otro punto?

111. Profesor L: ¿Otro punto? Hm ☺, Y ¿para que otro punto? Miren que hay una opción en Cabri que se llama “ocultar y mostrar”, entonces uno puede ocultar esa recta y nos quedo el punto *Q* [El Profesor L: lo hace] ¿Qué falta por hacer?

112. Diana: Formar el segmento

113. Profesor L: Formar el segmento… trazar el segmento. Y ahí que… que fue lo que hicimos ahí, utilizando una herramienta de Cabri que se llama recta perpendicular, luego ocultamos la recta y trazamos el segmento, lo que hicimos finalmente fue hallar la distancia entre el punto *P* y la recta *m,* y mire con recta perpendicular y no nos pusimos a correr el punto y lo podemos… ¿ese punto se puede correr? Pues no, no se puede correr porque es perpendicular, uno lo puede verificar ¿será que son perpendiculares?, miren que esta la opción de perpendicular…¿ *este es perpendicular a esta recta*? [lee la opción que aparece en Cabri] Y por

aquí me dicen “*los objetos son perpendiculares*”, entonces ahí ya tenemos porque efectivamente lo hicimos con la herramienta de Cabri, ¿de acuerdo?, si… hagamos otro ejercicio, si… nuevamente, amm bueno. Si tenemos la recta… la recta *l* y el punto *A*, por ejemplo [realiza la construcción en Cabri], ¿Cómo hallamos o como hallamos la distancia entre ese punto y la recta?

114. Diana: Eh… perpendicular. [Cristian: empieza la construcción en Cabri. Diana: murmura intentando ayudar en la exploración]

115. Profesor L: Si la ocultas no se puede… a bueno

116. Diana: A no pero toca marcarlo, toca marcar el punto de intersección. ¿Ya lo marco?

117. Cristian: Eeee… [Silencio mientras trabajan en el computador] Se hace el segmento ¿No?

118. Profesor L: Okey. ¿Cual es la distancia?

119. Cristian: ¿Se mide?

120. Profesor L: Exacto. [Cristian: realiza la medición en Cabri] O sea que cual es la distancia del punto *A* a la recta *l*

121. Diana: 5.10 centímetros

122. Profesor L: 5.10. Muy bien, es decir, que para hallar la distancia nuevamente la distancia de un punto a una recta debe haber un segmento… lo que dice acá…[se refiere a la hoja del sistema axiomático local] un segmento que sea perpendicular y la longi… sea perpendicular desde el punto, en este caso *A*, hasta un punto aquí de la recta de tal manera que en este caso nos da la distancia de ese punto a la recta, ¿bien?, ¿hay preguntas ahí?, ¿no?, ¿es claro?, o sea que ya no tenemos que hacer toda esa exploración de localizar el punto, arrastrarlo, tener que mirar mmh aproximadamente me queda, entonces, ya no hay necesidad de estar aproximando sino que ya con la herramienta de Cabri es sencillo que…, y con la herramienta *ocultar/mostrar*, tengo la recta perpendicular y con esa recta y el punto de corte de acá construir el segmento, y después lo mido, ¿de acuerdo? FIN DE LA RETROALIMENTACIÓN

123. Diana: [A partir de este momento se empieza a trabajar en la actividad con Cabri no. 6, TeoPELan] *Situación; Uno de los terrenos en la finca de Don Gustavo tiene forma de cuña*, pregunta técnica, ¿qué es cuña?

124. Profesor L: ¿Dime?

125. Diana: ¿Qué es cuña?

126. Profesor L: Sigan leyendo que ahí lo pueden aclarar

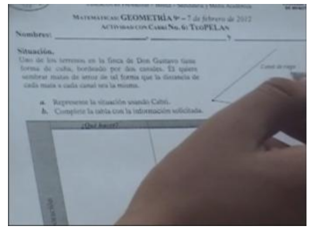
127. Diana: *…bordeado por dos canales. Él quiere sembrar matas de arroz de tal forma que la distancia de cada mata a cada canal sea la misma.*

128. Profesor L: ¿Que es cuña? Ahí muestran la representación de la cuña

129. Diana: Aaaa… ¿eso es lo que bota agüita para que… regar las matas? ¿No? [Risas]

130. Profesor L: Que….

131. Cristian: Se supone que por aquí pasa el agua… por aquí en esto [Señala en la hoja]



| | | |
|---|---|---|
| 132. | Profesor L: | Si |
| 133. | Cristian: | ¿Cierto?, entonces ésta es la forma de cuña |
| 134. | Profesor L: | ¿La cuña tiene forma de triangulo? Así no, no es que se cierre acá. |
| 135. | Cristian: | Ah no, acá sigue |
| 136. | Profesor L: | Sigue y sigue, entonces geométricamente ¿la cuña que forma tiene? |
| 137. | Cristian: | Un ángulo. |
| 138. | Profesor L: | Un ángulo, continúen [Diana: murmura mostrando signos de no entender] |
| 139. | Cristian: | Pues, ay, un angulito, rodeado por dos riítos [y señala el dibujo en la guía] |
| 140. | Diana: | Aaaa, esos son ríos? |
| 141. | Cristian: | Siii, lo que esta por fuera, lea y lo verá |
| 142. | Diana: | [Entre risas lee] *Uno de los terrenos en la finca de Don Gustavo tiene forma de cuña*… ah ya! *…bordeado por dos canales*. *Él quiere sembrar matas de arroz de tal forma que la distancia de cada mata a cada canal sea la misma*. ¿Entendido muchachos? |
| 143. | Cristian: | Aja |
| 144. | Diana: | Hágale |
| 145. | Cristian: | ¿Que? |
| 146. | Dayana: | ¿Que? [Ríe] |
| 147. | Diana: | No se. Ay ¿no entendieron? |
| 148. | Cristian: | Ah, [Lee] *Represente la situación en Cabri…* |
| 149. | Diana: | Ah espere, *represente la situación*… |
| 150. | Cristian: | Mm, es que usted no lee completo |
| 151. | Dayana: | Ah entonces hagan esto. [Parece referirse a la imagen que apoya el problema. Cristian: empieza a trabajar en la calculadora] |
| 152. | Cristian: | Se llama…? |
| 153. | Diana: | "TEOPELAN" |
| 154. | En coro (Diana:, Dayana:, Cristian:) | "TELOPELAN" [Risas] |
| 155. | Diana: | TEO… PELAN. Pero, la "T" mayúscula |
| 156. | Profesor L: | No no no, déjenlo así. |
| 157. | Diana: | "TEOPELAN" |
| 158. | Dayana: | "TELOPELAN" |
| 159. | Diana: | Enter, enter. |
| 160. | Cristian: | "TELOPELAN" |
| 161. | Diana: | Haga el segmento [Insisten en repetir el nombre de la actividad de manera jocosa por tanto no se va a reportar mas esta actividad] |
| 162. | Cristian: | Pero… |
| 163. | Diana: | Pero… dijeron que colocara la calculadora más para acá |
| 164. | Cristian: | Yo le dije que me dejara en la mitad. |

165. Profesor L: Si quieres… vamos a cambiar. [se refiere a la ubicación de los tres estudiantes para que Cristian: quede en la mitad, ya que él es quien manipulará la calculadora]

166. Cristian: Cierto?, que me haga en la mitad. [Luego del cambio] Se supone que no se acaba nunca, ¿cierto?, entonces toca hacer dos rectas.

167. Profesor L: Mmmmh, decidan ustedes…

168. Cristian: Sí eso es un ángulo, pues no se acaba nunca, toca hacer dos rectas

169. Diana: ¿No hay una opción en Cabri que sirva para hacer ángulos? No!

170. Profesor L: ¿Cuál es la definición de ángulo?

171. Diana: Ángulo?

172. Profesor L: Que incluso hasta en clase ahorita de trigonometría la estuvimos recordando?

173. Diana: Ángulo es una figura geométrica que es formada por dos rayos

174. Profesor L: Dos rayos

175. Diana: Y el punto que se llama vértice

176. Dayana: No, es que los dos rayos son los que forman los vértices

177. Diana: Aja

178. Dayana: Entonces se forma el ángulo

179. Diana: Entonces eso es un ángulo. Excelente. Si ve que si estábamos poniendo cuidado. [Cristian: inicia la construcción en Cabri de la calculadora]

180. Profesor L: Mira lo que esta haciendo Cristian:, ¿eso es un rayo?


181. Diana: ¡Qué! [negando]

182. Cristian: ¿Eso  no es un rayo?, ¿no es una “lain”? [Line]

183. Diana: No rayo… rayo. Ahí mismo, ahí no. Ahí! [Señala la opción en Cabri mientras Cristian: explora]

184. Cristian: Aaah, ray…ray [lee]

185. Dayana: Gordo

186. Cristian: Ay, no me concentro. Ay mona no se haga coger fastidio. “Mona” esa palabra se oye toda chistosa.

187. Diana: [Risas]. Ay venga pongámonos serios ahora si.

188. Cristian: Si ve que no me concentro

189. Diana: No se concentra, ¿en que? [Cristian: sigue intentando formar la figura del terreno de Don Gustavo en la calculadora]

190. Diana: Gordo deje de pegarse tanto ahí que no ve que no deja ver bien a la cámara.

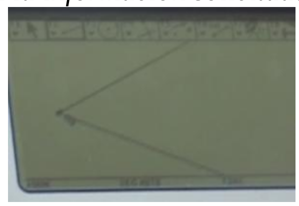
191. Cristian: Pues si yo no veo bien

192. Diana: A bueno entonces ¿para que le sirve esos lentes?

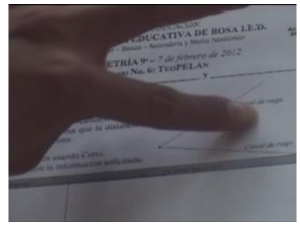
193. Cristian: No lo tengo puesto hoy [Risas y comentarios]

194. Diana: Ya!, ahí! [Le dice a Cristian:, refiriéndose a la construcción de la gráfica] Ahora… [Lee] *Uno de los terrenos tiene forma de cuña bordeado por dos canales. Él quiere sembrar matas de arroz de tal forma que la distancia de cada mata a cada canal sea la misma.*

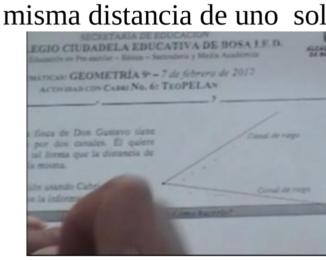
*b. Complete la tabla con la información solicitada.*



| | | |
|---|---|---|
| 195. | Profesor L: | La… ¿Que acabaron de representar en Cabri? |
| 196. | Cristian: | El ángulo |
| 197. | Diana: | La cuña |
| 198. | Cristian: | O la cuña |
| 199. | Profesor L: | Si, la cuña pero, según la situación nos hace falta mas cositas ¿no? |
| 200. | Cristian: | Eh, ¿nombrar? ¡No! |
| 201. | Profesor L: | Dice…bueno lean bien la situación y represéntenla en Cabri |
| 202. | Diana: | Pues... formar las matas ¿no? |
| 203. | Cristian: | Ay no, nos vamos a poner a dibujar maticas en Cabri |
| 204. | Profesor L: | Las matas en ese caso se van a representar con puntos ¿de acuerdo?, los puntos van a representar las matas… |
| 205. | Dayana: | Que sean de la misma distancia. |
| 206. | Profesor L: | Y eso que está diciendo Dayana:, deben estar a la misma distancia de cada canal |
| 207. | Diana: | Aja |
| 208. | Profesor L: | Entonces… |
| 209. | Dayana: | Hágale Gordo, empiece a hacer puntos |
| 210. | Diana: | ¿No dice que usted es bueno pa` eso? Hágale. |
| 211. | Cristian: | ¿Punticos no más? |
| 212. | Diana: | Ay, ahora no es que se vaya a poner a llenar, ahí, todo loco… |
| 213. | Dayana: | no entiendo |
| 214. | Cristian: | Yo pienso… [mientras trabaja en la calculadora] |
| 215. | Profesor L: | Repito, los puntos… |
| 216. | Dayana: | Profe pero los… puntos tienen que estar… uno acá, uno acá, uno acá. [Señala en la calculadora pero no parece referirse a puntos ubicados en la mediatriz] |
| 217. | Cristian: | Tiene que estar a la misma distancia… por dentro, ¿Cuántos puntos? |
| 218. | Profesor L: | No, dice, las matas están… ¿en las canales? |
| 219. | Cristian: | No. |
| 220. | Profesor L: | No. Los puntos que condición… |
| 221. | Dayana: | Ah ya! |
| 222. | Cristian: | Lea la situación |
| 223. | Diana: | *Uno de los terrenos en la finca de Don Gustavo tiene forma de cuña*… |
| 224. | Cristian: | Cuña. |
| 225. | Diana: | …*bordeado por dos canales* |
| 226. | Cristian: | Canales. |
| 227. | Diana: | O sea este es el terreno lo de por dentro, ahora si entiendo… [señala el interior del ángulo que representa la situación en la hoja ] |



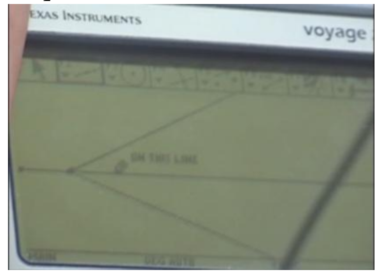
| | | |
|---|---|---|
| 228. | Cristian: | Siiii … canales [ríe] |
| 229. | Diana: | *…él quiere sembrar matas de arroz de tal forma que la distancia a cada mata a cada canal sea la misma.*<br>Por eso, ahí adentro |
| 230. | Dayana: | Siiii. |
| 231. | Cristian: | Pero es que toca hacer la misma distancia |
| 232. | Dayana: | De acá a acá, ¿No? [ Señala en la pantalla de la calculadora pero nadie parece atender a la sugerencia] |
| 233. | Diana: | Por eso así, que tenga la misma distancia [Hace puntos en la hoja, de tal manera que están a la misma distancia de uno solo de los lados] |



| | | |
|---|---|---|
| 234. | Dayana: | Pero a las dos… [Corrigiendo la construcción de Diana:] |
| 235. | Profesor L: | Pero bueno… |
| 236. | Dayana: | …a las dos canales. |
| 237. | Diana: | Aja |
| 238. | Cristian: | Por eso… |
| 239. | Profesor L: | El primer puntico llámalo con una letra |
| 240. | Dayana: | Y ¿cuantos puntos son? |
| 241. | Profesor L: | Coloca un punto, o sea… |
| 242. | Cristian: | ¿Cómo se llama el punto? |
| 243. | Profesor L: | El punto ¿cómo se va a llamar? |
| 244. | Diana: | Este… Katerine |
| 245. | Profesor L: | Bueno entonces la letra k. Ese… esa… ese punto que representa una mata ¿que debe cumplir? |
| 246. | Cristian: | Que este…. |
| 247. | Diana: y Dayana: (Coro) | Que este a la misma distancia de cada canal. |
| 248. | Diana: | O sea, acá y acá. [Señala las canales en la hoja] |
| 249. | Profesor L: | De acuerdo |
| 250. | Diana: | ¿No?, si porque… si. |
| 251. | Profesor L: | Entonces, hagamos eso mismo allá en Cabri |
| 252. | Diana: | Si entendió Gordo que este a la misma distancia de este [rayo] y este [rayo]… |
| 253. | Cristian: | [Reinicia su trabajo en Cabri] ¿Acá también se puede volver invisible las líneas? |
| 254. | Profesor L: | Eh, claro, si. ¿Por qué? |

255. Cristian: Ah bueno…

256. Diana: ¿para qué va volver invisible las líneas?. Eso no se hace es un punto! [Cristian: traza una línea]




257. Cristian: Por eso…

258. Diana: Ay que pecado!

259. Profesor L: Un punto, cada puntico… [es interrumpido por Cristian:]

260. Cristian: Si… digamos que hago una línea por la mitad y…

261. Profesor L: Esa línea que nos va a representar?

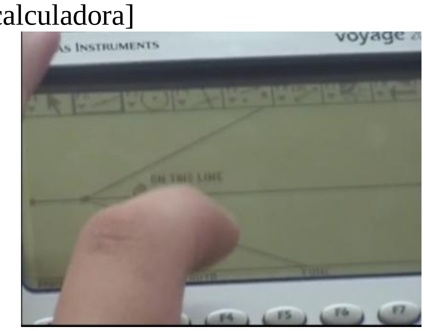
262. Cristian: No. Hasta el momento nada

263. Profesor L: ¿Qué acabamos de trazar?

264. Cristian: Pues la… para calcular la distancia

265. Profesor L: Pero…

266. Cristian: O sea, hago un angulito acá, otro angulito acá y tiene que medir lo mismo en ambos lados la línea pa que… pa saber que sí está en la mitad [Señala con el dedo en la calculadora]




267. Profesor L: Pero primero está ubicada la mata y luego tiene que… [Cristian: lo interrumpe]

268. Cristian: No porque la línea se va. [Diana: interrumpe]

269. Diana: Primero ay que [no se entiende]

270. Cristian: La línea no existe.

271. Profesor L: A a! [como tratando de corregir la aseveración de Cristian: ] Primero está la mata.

272. Cristian: Aish, era mi idiota [Ideota]

273. Profesor L: Y llamémosla con la letra… la que quieran ustedes.

274. Cristian: No, espere… [Cristian: se dispone a borrar la linea]

275. Diana: Borre eso….. Ay con ese!

276. Cristian: Ese puntico [no se entiende el final de la frase]

277. Diana: [en voz muy baja] Que deje de poner la cabeza ahí.

278. Cristian: Entonces, ¿donde la pongo? No me la puedo quitar.

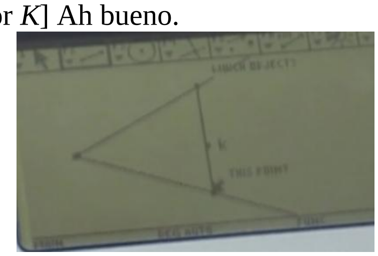
279. Dayana: [Cristian: ubica el primer punto] ¿Eso no tenia sino un punto?

280. Cristian: ¿Cuantas maticas son?

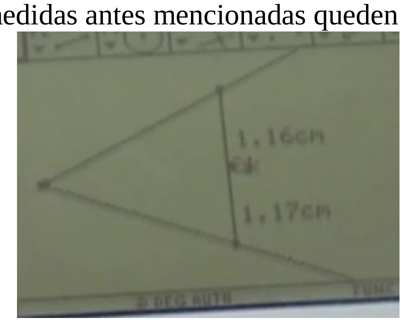
281. Diana: Que hasta ahora una!! Y que esa la nombre con k.

| | | |
|---|---|---|
| 282. | Cristian: | ya! |
| 283. | Diana: | ¿Listo? Y ahora hay que medir la distancia. |
| 284. | Dayana: | ¿De ese punto a los dos lados? |
| 285. | Cristian: | Aja. |
| 286. | Profesor L: | Y como se mide la distancia de ese punto a los… |
| 287. | Cristian: | Con un segmento!? No. |
| 288. | Profesor L: | Con? |
| 289. | Cristian: | Con un segmento? |
| 290. | Profesor L: | Con un segmento. Y ese segmento como debe ser? |
| 291. | Cristian: | ¿Así? [señala la pantalla de la calculadora asimilando que traza un segmento con el dedo y se ríe] |
| 292. | Profesor L: | Así ¿como?. [serio] |
| 293. | Diana: | Vertical |
| 294. | Cristian: | Pues si, vertical así |
| 295. | Profesor L: | Vertical… [como buscando mayor explicación] |
| 296. | Cristian: | Que atraviese el punto. [se ayuda señalando con el dedo en la pantalla] |
| 297. | Profesor L: | Que atraviese el punto.. Bueno. Si quiere arrastremos un poco, ese punto está muy metido allá en la cuña, cerca al vértice, entonces alejemos un poquito más ese punto. [Cristian: arrastra el punto *K* distanciándolo del vértice, el movimiento es sobre la recta que inicialmente había trazado] Eso por allí muy bien. Entonces lo que se quiere es ubicar ese punto de tal forma que, que? |
| 298. | Dayana: | No tiene la misma distancia. [refiriéndose al punto arrastrado] |
| 299. | Profesor L: | Como verificas, Dayana:, que tengan la misma distancia? |
| 300. | Dayana: | Porque es que ahí se ve! |
| 301. | Cristian: | No! Como se verifica? |
| 302. | Dayana: | Aaa. |
| 303. | Cristian: | Ah bueno. [Risas y simultáneamente interviene el Profesor L:] |
| 304. | Profesor L: | Bueno, ahí se ve! Dice que ahí se ve, pero ¿Cómo lo establecemos que tengan la misma ditancia? |
| 305. | Dayana: | [entre risas] Pues midiendo. |
| 306. | Profesor L: | Midiendo. Que…? [los estudiantes exploran en la calculadora buscando la herramienta adecuada] |
| 307. | Diana: | La AB. |
| 308. | Dayana: | ¿Con cual? |
| 309. | Diana: | La AB! |
| 310. | Cristian: | ¿Y para que la AB? |
| 311. | Diana: | Ah yo pensé que hasta ahora se iba a nombrar. ¿Entonces que quiere hacer? |
| 312. | Cristian: | Pues medir… [en coro con Dayana:] |
| 313. | Diana: | Ah. [Siguen explorando en la calculadora] |
| 314. | Cristian: | Porque es tan chistosa [refiriendo se a Diana: que oprime alguna tecla de la calculadora], es acá. |
| 315. | Dayana: | ¿No dice por ahí cuña? [y se ríe] [y explorando en la opción **F4, 5: Angle Bisector** les llama la atención el icono que se familiariza con la situación, pero la rechazan y continúan con la exploración] |
| 316. | Profesor L: | ¿Qué van a hacer? |
| 317. | Diana: | Buscar. |
| 318. | Cristian: | Buscar para medir la liniesita. |

319. Profesor L: Cual liniesita?
320. Diana: Medir la plasta… la mata, digo.
321. Profesor L: Medir la distancia?
322. Diana: Aja..
323. Profesor L: La distancia de donde?
324. Diana: Distancia de ambos. [hablan al tiempo pero solo se entiende lo que dice Diana:]
325. Dayana: De canal a canal. [señala en la calculadora con el borrador de un lápiz y con el dedo]
326. Profesor L: Si. Y como se hace para medir la distancia de ese punto a… [es interrumpido] … una canal
327. Diana: Formando un segmento.
328. Profesor L: Y ese segmento como debe ser?
329. Diana: Debe ir, el segmento debe ir de acá a acá. [señala en la hoja de trabajo pero la cámara no alcanza a hacer la toma]
330. Profesor L: De ahí a ahí?. Mirémoslo en Cabri
331. Diana: Sí si si
332. Profesor L: Como debe ser… como debe ser la distancia del punto a la canal? [Cristian: traza en Cabri un segmento de uno de los lados del ángulo al otro lado pasando por *K*] Ah bueno.



333. Diana: Así. Y lo mide… [mientras tanto Cristian: va realizando la medida, en Cabri, desde uno de los extremos del segmento que acaban de trazar al punto *K* y también la medida del punto *K* al otro extremo del segmento. Una medida da 1.29cm y la otra da 1.04cm]
334. Profesor L: ¿Esa es la manera de hallar la distancia de un punto a una… a un rayo, en ese caso? ¿Qué definición tenemos de distancia de un punto… en ese caso haya un rayo? Pero la podemos también aplicar a una… en una recta, lo teníamos. ¿recuerdan? ¿la definición de punto a una recta? ¿en que consistía la distancia de un punto a una recta, que acabamos de hacer la retroalimentación? Que ¿Qué condición debería cumplir ese segmento con la recta? [Cristian: mientras tanto arrastra el punto *k* intentando que los valores de las medidas antes mencionadas queden iguales]



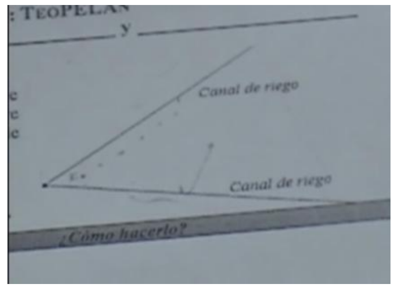

335. Diana: Que deben ser perpendiculares.
336. Profesor L: Que deben ser perpendiculares. Pregunto allá [refiriéndose a la

construcción en Cabri realizada en la calculdora] ¿ese sgmento…? [es interrumpido por Diana:]

337. Diana: No! Ese no es perpendicular en nada.

338. Profesor L: Por qué?

339. Diana: Yo digo que debería ir de acá a acá [señala con su dedo en la calculadora el punto *K* y el rayo de la parte inferior de la pantalla] y ahí sí se formaría una perpendicular. Desde la matica hasta acá [dibuja en la hoja de trabajo un segmento del punto al rayo, aparentemente perpendicular] y ahí se formaría una perpendicular.




340. Profesor L: Acá [señala en la hoja el rayo] ¿y después?

341. Diana: Y después medi… haría un… y se mediría. Se mide

342. Profesor L: Listo

343. Diana: y… después haríamos lo mismo acá [dibuja en la hoja de trabajo un segmento de apariencia perpendicular del punto al otro rayo] pero, o sea, no sé…

344. Profesor L: Hagamos eso allá. [En la calculadora]

345. Cristian: Pues eso hice!!! [Cristian: finalmente logra que las medidas que están en la pantalla sean iguales, sin embargo el punto que *K*, que no pertenece al segmento, como se creía, fue arrastrado hasta el segmento]

346. Profesor L: Pero… esos segmentos, dice Diana:, que como son?

347. Diana: Perpendiculares

348. Profesor L: A los rayos

349. Diana: Asi como lo hicimos ahí en el computador

350. Dayana: Si, pero [no se entiende el final de la frase]

351. Diana: Es que usted hizo un segmento, gordo

352. Cristian: Si ya sé….pégueme pero pasito [en voz muy baja] o sea, que tengo que borrar todo esto? A no pero el puntico no

353. Profesor L: Si eso no [Cristian: borra el segmento, las medidas, los puntos de intersección con los rayos]

354. Cristian: A entonces acá. [elige la opción **F4, 1: perpendicular line** de Cabri, traza una línea perpendicular a un lado del ángulo] ¿con cuál se oculta acá? A no, puntico

355. Diana: Que es lo que hace? [y se ríe]

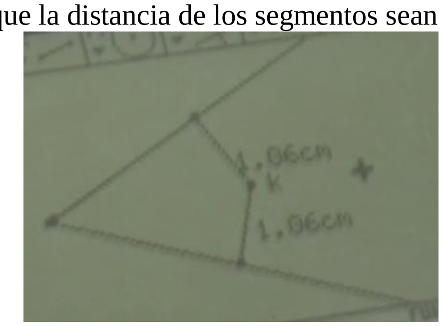
356. Cristian: No?, pa medir

357. Profesor L: Mira lo que está haciendo a ver si está bien o está mal [mientras tanto Cristian: traza un punto en la intersección entre el rayo y la perpendicular] llamen ese punto como ustedes lo hacen.

358. Cristian: Sin nom

359. Diana: Eh, jota

360. Cristian: Sin nom..bre [hablan muy bajo y no se entiende]
361. Dayana: Ahí ya hay una perpendicular
362. Cristian: Entonces de mide ?
363. Diana: Pero hay que ocultar, gordo
364. Cristian: Pero ¿toca ocultarlo con cuál ?
365. Diana: Ay pues con ese [opción **F7 1:Hide/Show**]
366. Dayana: Con el de arriba
367. Diana: Con ese.
368. Cristian: Listo, ¿y que?
369. Diana: Y ahora crear el segmento *K* a acá [señala con el dedo. Trazan el segmento, trazan la perpendicular al otro rayo y hacen el mismo procedimiento ]
370. Cristian: Por qué no hace el puntito? [intentando trazar el punto en la intersección de la nueva perpendicular y el otro rayo]
371. Profesor L: No lo hace?
372. Cristian: Ah, ya hizo el puntito. [oculta la línea perpendicular y traza el segmento]
373. Diana: Ahora mida. Mida cada uno de los segmentos [luego de haber trazado los segmentos perpendiculares del punto *K* a los rayos, realizan la medición de los segmentos]
374. Dayana: Corra ese punto un poquito para abajo [señala con el dedo el punto *k*] listo [luego de lograr que la distancia de los segmentos sean iguales (1.06 cm)]




375. Cristian: Ya
376. Diana: Hemos creado un ángulo
377. Profesor L: Ya con lo que está hecho, por fa, diligenciemos la….
378. Diana: [Lee] *¿Qué hacer? Construcción y exploración*. Ehhh, construir una cuña, construir un… ¿cómo se llama eso? Un ángulo…
379. Cristian: En forma de cuña
380. Diana: No, un ángulo
381. Cristian: Una cuña con forma de ángulo
382. Diana: No, un ángulo. Construir un ángulo y….como colocar, ¿cómo se llamaba ese punto?
383. Cristian: Punto
384. Diana: Cómo se llama?
385. Cristian: Punto
386. Diana: Y construir un punto dentro de ese ángulo, que sea, que tenga la misma medida de…seg… de una línea a la otra?. No sé cómo explicarlo, la verdad es que ese gordo tampoco colabora.
387. Cristian: Ay pues, crear un ángulo y… no. Primero crear un archivo en cabri [risas] ay eso siempre sale crear un archivo en cabri
388. Profesor L: Ya después de que crea uno el archivo….

| | | |
|---|---|---|
| 389. | Cristian: | Bueno, nada entonces…. Pues crear un ángulo y colocar un punto *K* cosa que… este en la mitad de los dos? [Diana: murmura] |
| 390. | Diana: | Ja, está peor que yo. |
| 391. | | ay pero usted tampoco ayuda también, solo se queja |
| 392. | Diana: | No porque es que… [Cristian: interrumpe] |
| 393. | Cristian: | No es que esta… esto ya no sirve. Ya? |
| 394. | Diana: | Construir un ángulo, listo, y ¿cómo era lo que usted estaba diciendo? |
| 395. | Cristian: | No, no era que no sirve? |
| 396. | Diana: | Ah que construir un punto llamado *K* dentro de ese ángulo. Es que no sé como especificarlo. O sea, para que tenga la misma distancia. |
| 397. | Profesor L: | Pero, es que todo eso que están diciendo ya deberían haberlo escrito, o sea, están diciendo las cosas bien solamente hay que escribirlo. |
| 398. | Dayana: | Si ve? Está bien. Construir un ángulo…? [risas y comentarios simultáneos, Dayana: intenta encaminar de nuevo el trabajo] Construir un ángulo… |
| 399. | Diana: | Construir un ángulo y punto llamado *K*, en, en... dentro de ése ángulo [Dayana: escribe en la casilla de ***¿Qué hacer?***] |
| 400. | Dayana: | Ya, ya. …dentro de ese ángulo. ¿*Cómo hacerlo*?, primero abrir un archivo en Cabri |
| 401. | Diana: | …crear un archivo en Cabri Geométrico [Dayana: escribe en la casilla ***¿Cómo hacerlo?***] |
| 402. | Cristian: | Llamado… teopelan [risas y comentarios] |
| 403. | Diana: | Luego… crear un ángulo, es que no se, espere, espere, espere. Un ángulo, ¿Cómo fue gordo qué lo hizo?. Con rayos… |
| 404. | Cristian: | Eh con 2 rayos… |
| 405. | Diana: | Efe uno… efe dos diré, seis, rayo [mira en la calculadora para recordar, Dayana: escribe] eeh crear dos rayos, no? |
| 406. | Cristian: | Si son dos. |
| 407. | Diana: | Entre paréntesis [dirigiéndose a Dayana:] |
| 408. | Cristian: | Entre paréntesis, dos rayos [Dayana: escribe] |
| 409. | Dayana: | Ya. Tercero nombrar el punto… hacer, hacer perpendiculares [pero no escribe] |
| 410. | Cristian: | No. El punto… |
| 411. | Dayana: | Nombrar el punto… |
| 412. | Diana: | Ah sí crear el punto… y nombrarlo. |
| 413. | Dayana: | Crear el punto. |
| 414. | Cristian: | Efe uno… |
| 415. | Diana: | Y nombrar un… Efe uno, punto [lo sigue en la calculadora, Dayana: escribe] |
| 416. | Cristian: | No… |
| 417. | Dayana: | Yo estoy escribiendo crear un punto. [opina] Pues crear un…un punto en el plano, no? |
| 418. | Cristian: | No porque eso es lo que uno tiene que hacer. |
| 419. | Diana: | Efe uno. Escriba efe uno… [Dayana: procede a borrar lo último que escribió] |
| 420. | Cristian: | Creo… No! Escribe, creo un punto… si porque eso ya es como hacer. Crear suena como si uno estuviera diciendo como hacer |
| 421. | Diana: | Crear un punto… [Dayana: se arrepiente de borrar] efe uno, pointer [intenta leerlo en inglés] ¿ya? |

| | | |
|---|---|---|
| 422. | Dayana: | Aja. |
| 423. | Diana: | Ahora, entonces ahora sí nombrar el punto. Ahí entre paréntesis [dictándole a Dayana:] |
| 424. | Dayana: | Y nombrarlos… |
| 425. | Cristian: | Y nombrarlos. [Dayana: escribe] |
| 426. | Diana: | Listo? Ahora… crear el segmento ¿no? |
| 427. | Cristian: | Crear las líneas perpendiculares a la… al rayo |
| 428. | Diana: | A los rayos, sí |
| 429. | Dayana: | Escribo? |
| 430. | Diana: | Sí [Dayana: escribe] |
| 431. | Dayana: | Y fin. |
| 432. | Cristian: | No. Luego crear los segmentos y medirlos. No? |
| 433. | Diana: | […] …no! [Cristian: murmura] |
| 434. | Cristian: | A pero… crear qué? |
| 435. | Dayana: | … los segmentos [Dayana: aun no escribe] y medirlos. No toca medirlos? [Cristian: al tiempo menciona algo de la perpendicularidad de los segmentos pero no es claro el audio] |
| 436. | Cristian: | Eso toca escribirlo? [Risas de las niñas] Ay póngale cuidado, es que… |
| 437. | Diana: | En que vas, en que vas? |
| 438. | Cristian: | Ay pues en crear las estas y… |
| 439. | Dayana: | Las líneas perpendiculares a los rayos. |
| 440. | Diana: | Entonces, entre paréntesis,… |
| 441. | Cristian: | No. Efe cuatro, uno, dos… dos perpendiculares [Diana: manifiesta no aceptación] si, algo así, son dos perpendiculares que toca crear. [Diana: expresa inconformidad] ¿¡Entonces cuantas!? |
| 442. | Diana: | Pues si pero… |
| 443. | Cristian: | Ah bueno. |
| 444. | Diana: | no me grite. Toca escribir *perpendicular Line* [Dayana: duda entre lo que tiene que escribir o no] |
| 445. | Cristian: | Ah entonces escriba *perpendicular line…* [murmuran mientras Dayana: escribe] |
| 446. | Dayana: | Ya. |
| 447. | Diana: | Listo |
| 448. | Cristian: | Severo |
| 449. | Dayana: | Ahora? |
| 450. | Diana: | Ahora… |
| 451. | Dayana: | Crear los segmentos? Y medirlos? |
| 452. | Diana: | Crearlos ? |
| 453. | Cristian: | Toca sacar las líneas perpendiculares [¿?] |
| 454. | Diana: | Crear las líneas perpendiculares ? |
| 455. | Cristian: | ¿Qué hicimos despues? |
| 456. | Diana: | Ya creamos las líneas perpendiculares, ahora… ¿usted qué fue lo que hizo?, ocultarlas…? ¡Ocultarlas! |
| 457. | Coro: Diana: y Cristian: | … Ocultarlas! |
| 458. | Cristian: | Ah no, crear los puntitos, crear los puntitos. [insiste en ser escuchado ya que Diana: y Dayana: hablan al mismo tiempo] |
| 459. | Dayana: | Cuales punticos? [se presenta un momento de silencio de todos y Dayana: aún no escribe nada] |

460. Cristian: … Sí es que yo cree estos puntitos… antes de borrar la línea. [la cámara no muestra a que se refiere Cristian:]

461. Dayana: ¿Escribo eso?, Crear los puntitos? [risas]

462. Cristian: Ay no… pues … crear los puntos, ya!

463. Diana: En cada, en cada… rayo [Dayana: interrumpe diciendo “en cada canal”]…Rayo!

464. Dayana: Ay sí…pero le estoy diciendo de la forma que esta acá.

465. Cristian: En cada línea perpendicular que creamos. [Risas. Dayana: no sabe que escribir dado que no escucho bien a Cristian: ]

466. Diana: Ah! Crear el punto de intersección de cada perpendicular.

467. Cristian: Ah si ve? ríase, ríase… [Mientras tanto Dayana: escribe] […]

468. Dayana: Ya!

469. Diana: Listo?. ¿Ahora que hizo gordo? Ah, crear un segmento ¿no?

470. Dayana: … y medirlos, ¿o medirlos después?

471. Diana: Después, de que ya están creados. [Dayana: escribe] Crearlos. ¿y cómo creo los segmentos?, en efe dos, segment

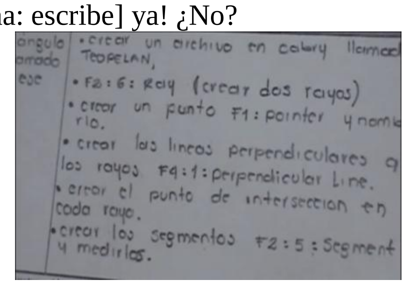
472. Cristian: ¿Y cómo creo los puntitos… si no los ha borrado? [parece referirse a una construcción con cabri que esta realizando]

473. Dayana: Efe dos…? [pidiendo que repitan lo último dictado]

474. Diana: Eh… cinco, segment [Dayana: escribe…]

475. Dayana: Ahora sí medirlos

476. Diana: Y medirlos. [Dayana: escribe] ya! ¿No?




477. Dayana: Yo creo que sí.

478. Diana: Ahora… [lee] *Con base en la anterior construcción responda: a. Represente en la calculadora las matas con puntos donde Don Gustavo puede sembrarlas.*

479. Dayana: Uy entonces toca hacer la de matas [risas]

480. Diana: Hagale.

481. Profesor L: ¿Cuántas matas hay sembradas? [Refiriéndose a la construcción hecha en Cabri]

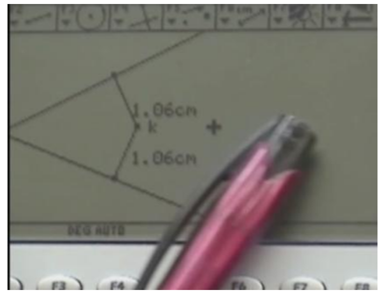
482. Coro Una!

483. Profesor L: Una! ¿Podemos sembrar otras? Sembremos otra.

484. Cristian: Podemos sembrar…

485. Dayana: Como… va aquí? [señala con un dedo un lugar en la pantalla aproximadamente en la bisectriz la cual no está trazada]

486. Cristian: Podemos sembrar hartas, acá una, acá una, en toda esta line así. [traza imaginariamente con un portaminas una línea, en la pantalla, la bisectriz]




487. Profesor L: Como así, Cristian:

488. Cristian: Claro.

489. Profesor L: En cual, esa línea?

490. Cristian: Pues digamos que… si, mire digamos pues no una línea necesariamente [simultáneamente habla Dayana:]

491. Dayana: No porque es que si seguimos el mismo procedimiento de eso, no cabe.

492. Profesor L: Mmmm, no… [Cristian: interrumpe]

493. Cristian: Pues no porque… no es por lo que quepa. Pero ahí se pueden crear, digamos, cada milimetr, cada… cada centímetro una bolsita así… tun tun tun tun [señala con la punta del portaminas una linea imaginaria del punto *K* al vértice del ángulo]

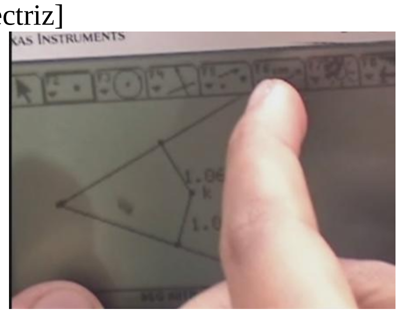
494. Profesor L: Podemos crear otra? Por lo menos una!!?.

495. Diana: Si. Yo creo que si [Cristian: se apropia de la calculadora]

496. Dayana: Créela mas abajito ¿No? ¿O arriba? [mientras Cristian: manipula en Cabri] no!

497. Diana: ¿Arriba de qué?

498. Dayana: Arriba, arriba. Acá arriba, acá [señala una parte de la construcción que no hace parte de la bisectriz]



499. Diana: Ahí, ahí…[Cristian: manipula el puntero y lo va ubicando en un lugar en la línea imaginaria entre *K* y el vértice del ángulo]

500. Dayana: Súbala un poquito más. [se conecta con la construcción de Cristian: y Diana:]

501. Diana: Ahí.

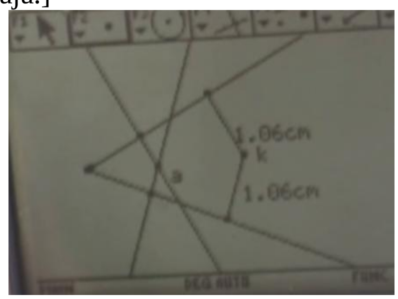
502. Dayana: Súbala un poquito más.

503. Cristian: Ahorita!! [respondiéndole a Dayana:] Que… que hago ahí ahora…---[ Parece referirse a construir la perpendicular] a no, nombrarla [Diana: exclama aceptación. Cristian: silba levemente mientras manipula la calculadora] Ese se va a llamar… *C* [refiriéndose al nuevo punto trazado] porque yo quiero que se llame *C.*

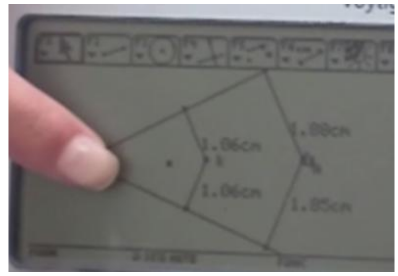
504. Diana: … su novia se llama Camila ?

505. Cristian: Ahh, venga le colocamos… se llama *A* [le cambia el nombre al punto, Dayana: hace un comentario pero no se entiende. Risas y murmullos.

Cristian: sigue con la construcción y traza una perpendicular a uno de los lados del ángulo y que pasa por *A*, y hace lo mismo para el otro lado. Traza los puntos de intersección de las perpendiculares con los rayos respectivos, invisibiliza las rectas perpendiculares] … Y ahora hago los segmentos… [sigue manipulando la calculadora con cierta habilidad. Traza los segmentos perpendiculares de *A* a cada uno de los rayos]… Ahora sí los mido… [las medidas iniciales apenas realiza la medición son; 0,52cm y 0,44cm. Arrastra el punto *A* hasta lograr que las medidas sean; 0,51cm y 0,54cm, no logra la igualdad de las medidas, por limitaciones del software]… ay no… pailas… [Diana: y Cristian: se comunican en voz baja.]




506. Diana: Deje así
507. Cristian: Entonces como voy a ver, entonces, para mirar si… [ Es interrumpido por el Profesor L:]
508. Profesor L: No hay problema.
509. Cristian: Señor? [Dirigiéndose al Profesor L:] Pero no ve que no queda igual!
510. Profesor L: No?
511. Cristian: Tiene que tener la misma distancia ¿No?
512. Profesor L: O aproximadamente igual.
513. Cristian: Por tres milímetros.
514. Profesor L: Bueno. Listo
515. Cristian: [Cristian: piensa en voz alta mientras arrastra el punto *A* intentando guiarlo por una línea imaginada, la bisectriz, hacia el vértice del ángulo.] Ah, pero es que se corre todo [Parece referirse a la dificultad de mantener la medida aproximadamente iguales] Ahh, ya entendí [arrastra el punto hacia la ubicación inicial y lo intenta de nuevo] Dos, cuatro… [En coro]… Dos [refiriéndose a la diferencia entre las medidas que se van mostrando mientras que arrastra el punto *A*]
516. Dayana: .. ocho..
517. Cristian: No. Ahí hay dos [mientras arrastra el punto *A.* De pronto arrastra el punto de la zona en que venía trabajando a una ubicación más lejana del vértice, tal vez con la idea de encontrar más fácilmente la igualdad de las medidas, pero, se encuentra con el mismo inconveniente]



| | | |
|---|---|---|
| 518. | Dayana: | Quedaba mejor acá [Señala una ubicación en la calculadora] |
| 519. | Profesor L: | Bueno, con aproximación, o sea, estamos haciendo… [Es interrumpido por los estudiantes] |
| 520. | Coro | Ahí, Ahí [logran que las medida sean de 1,99cm y 2,00cm. Exclamaciones de satisfacción] |
| 521. | Cristian: | Toca conseguir la aproximación más aproximada. |
| 522. | Diana: | Bueno! [Lee la hoja de trabajo] *b. ¿Cuántas de estas puede sembrar?* |
| 523. | Diana: y Cristian: | Muchas! [Dayana: murmura.] |
| 524. | Diana: | Pero nosotros pudimos sembrar dos. |
| 525. | Cristian: | No!, quisimos sembrar dos. |
| 526. | Diana: | Se pueden sembrar más? |
| 527. | Cristian: | Claro. |
| 528. | Dayana: | Siembre otra. [Risas] |
| 529. | Cristian: | Siémbrela usted, haga todo, todo lo que yo hice. [tal vez por la dificultad que conllevo hacerlo] |
| 530. | Profesor L: | Muestre…[Es interrumpido por algo que se cae] Ay! |
| 531. | Dayana: | Ahí tiene [Risas. Refiriéndose a lo que se cae. Comentarios. NSE] |
| 532. | Profesor L: | Cristian:, muéstrele a Dayana: donde puede ir otra mata. |
| 533. | Cristian: | Acá, acá, acá… [Señalando con el dedo en la construcción varias posibles ubicaciones de las matas, puntos, todos ellos en lo que sería la bisectriz] |
| 534. | Profesor L: | Muéstrele… |
| 535. | Cristian: | ¿Quiere que haga más? |
| 536. | Profesor L: | Mire, precisamente fue lo que hicieron…[es interrumpido por Cristian:] |
| 537. | Cristian: | Quiere que haga más? |
| 538. | Profesor L: | Hay necesidad de hacer otro? Muéstrale a Dayana: otra mata. [le dice a Cristian:] |
| 539. | Cristian: | Pues, o sea, aquí puede ir otra, acá puede ir otra, acá puede ir otra, acá puede ir otra, acá puede ir otra,…[termina con un murmullo queriendo decir muchas matas, al mismo tiempo que señala con la punta del portaminas las posibles ubicaciones de puntos todos ellos en la bisectriz] |

| | | |
|---|---|---|
| 540. | Profesor L: | Entonces contéstele ---[NSE. Cristian: inicia un conteo pero la cámara no toma que esta contando] |
| 541. | Cristian: | Un, dos, tres, cuatro,…[Es interrumpido por Diana:] |

| | | |
|---|---|---|
| 542. | Diana: | ¿Y que vamos a escribir? [Lee] *¿cuántas de estas puede sembrar?* |
| 543. | Dayana: | Pues muchas! |
| 544. | Diana: | Muchas |
| 545. | Cristian: | Muchas [y lo repiten] |
| 546. | Diana: | Pues depende, si es de la vida real, en la vida real… [Es interrumpida] |
| 547. | Cristian: | Pues depende del tamaño. |
| 548. | Dayana: | …no también depende del costo… [Ríe. Cristian: respalda] |
| 549. | Cristian: | Del presupuesto, aja |
| 550. | Dayana: | Y de que tan grande sea eso. |
| 551. | Diana: | Si es en la vida real, se pueden crear muchas, pero si es en Cabri…unas tres por ahí [Dayana: ríe] |
| 552. | Profesor L: | ¿ya? |
| 553. | Diana: | Escriba eso. [Le dice a Dayana:] |
| 554. | Dayana: | Muchas? No!! [Ríe] |
| 555. | Diana: | Si es en la vida real… [Intentando un dictado. Cristian: interrumpe] |
| 556. | Dayana: | Nooo, muchas [refiriéndose a lo que se debe escribir] |
| 557. | Cristian: | Pues depende cuanto mida esto, ¿No? |
| 558. | Diana: | Depende de cuanta sea la longitud del ángulo… |
| 559. | Profesor L: | Seguro? [Risas] mmm, no sé…[Cristian: interrumpe] |
| 560. | Cristian: | No porque el ángulo se puede extender. |
| 561. | Profesor L: | Exacto. |
| 562. | Diana: | Entonces se pueden crear varias…[Cristian: la interrumpe] |
| 563. | Cristian: | Depende del tamaño de… ¿Cómo se llama este bichito? |
| 564. | Coro | De la cuña. |
| 565. | Cristian: | Depende del tamaño de la cuña |
| 566. | Profesor L: | Cuando hablan del tamaño de la cuña es… ¿Es qué? |
| 567. | Diana: | El tamaño de la cuña… [Dayana: la interrumpe] |
| 568. | Dayana: | Pues sí!! Que tan grande es. |
| 569. | Profesor L: | [Al mismo tiempo que habla Dayana:, el Profesor L: cuestiona] O sea, la magnitud del ángulo? |
| 570. | Diana: | Aja´! |
| 571. | Profesor L: | ¿la amplitud? |
| 572. | Diana: | No, la anchitud. |
| 573. | Dayana: | …la anchitud [Risas] |
| 574. | Cristian: | No, pues digamos que es el…[Diana: interrumpe] |
| 575. | Diana: | Amplitud…? Y… [Cristian: interrumpe] |
| 576. | Cristian: | No toda la finca va a ser así. |
| 577. | Profesor L: | Pero si por ejemplo lo tomamos, ya ampliándonos un poco del contexto de Don Gustavo, y lo ponemos ya en términos geométricos, ¿cuántas matas podemos..? Bueno, perdón, ¿cuántos puntos podemos… ubicar? |
| 578. | Cristian: | Estos mire. [hace algún símbolo en una hoja] |
| 579. | Profesor L: | ¿y eso cómo?, ¿eso qué es? |
| 580. | Cristian: | Infinitos [Con un poco de duda] |
| 581. | Profesor L: | Ya respondamos eso… |
| 582. | Cristian: | Ah no, ¿no es así profe? Sino que es un ochito más bonito? |
| 583. | Profesor L: | Expresémoslo con palabras. |
| 584. | Dayana: | Si, Si, muchas, muchas o varias [Cristian: dice algo en voz baja.] ¿Varias o muchas? |
| 585. | Profesor L: | No sé ---[Parece que tiene un dialogo paralelo con Cristian: pero no se |

entiende]

586. Dayana: Ole, ¿Varias o muchas? [Preguntándole a Diana: en relación a la pregunta b.]

587. Diana: Mmm, varias matas… muchas matas [El Profesor L: sigue el dialogo pero con un audio muy bajo ]

588. Cristian: Infinitas!!.

589. Dayana: ¿Infinitas?

590. Cristian: Si, infinitas maticas hablando de términos geométricos

591. Diana: Infinitas!!?

592. Cristian: Mh, infinitas. ¿Segura que es ahí? [Le pregunta a Dayana: que se prepara para escribir en la hoja]

593. Dayana: [interrumpe lo que esta escribiendo] Si.

594. Cristian: Y que tocaba escribir entonces en la a.

595. Dayana: No porque aquí dice que toca representar en la calculadora. [Cristina hace un gesto de aceptación] Escribir no. [Y continua con la escritura. Murmullos]

596. Dayana: [Lee la pregunta c. de la guia] *¿Cómo pueden describir el sitio en donde Don Gustavo debe colocar las matas?* [Murmullos. NSE. Risas]

597. Diana: Pues que es como algo pequeño [risas de Dayana:]

598. Dayana: Pues que es amplio porque si puede… hacer todas esas maticas… no es cualquier terreno [Comentario de Diana:. Risas]

599. Profesor L: Y como le dicen a Don Gustavo de sembrar las matas?

600. Diana: Qué? Ah?

601. Profesor L: Como le dicen…? O sea, ¿Cómo es la pregunta?

602. Diana: Dice; [Lee] *¿Cómo pueden describir el sitio en donde Don Gustavo debe colocar las matas?*. ¡Excelente! Excelente para la agrícola.

603. Profesor L: O sea que si tu le dices a Don Gustavo, es excelente, con eso de decir excelente, ya Don Gustavo ¿sabe dónde colocar las matas? Con esa palabra…? [Es interrumpido]

604. Dayana: No! escribamos… es… aaa…

605. Cristian: Es perfectamente…

606. Profesor L: ¿Cómo pueden describir? Miren la gráfica y superpongan la claculadora… y traten de describirle después a Don Gustavo como… [Cristian: interrumpe]

607. Cristian: Que si lo construye así hace un dulce.

608. Profesor L: ¿Hace un qué?

609. Cristian: Un dulce. [Y señala la construcción echa en Cabri] Me dio hambre.

610. Profesor L: No Cristian:, otra vez que no le escuché.

611. Cristian: No nada deje así [Risas y comentarios]

612. Diana: Bueno.

613. Cristian: Bueno. [Como retomando] Entonces.

614. Dayana: [Vuelve y lee] *¿Cómo pueden describir el sitio en donde Don Gustavo debe colocar las matas?*. Pues amplio.

615. Cristian: Amplio…

616. Profesor L: ¿Amplio es?

617. Dayana: Pues Grande.

618. Profesor L: ¿Grande? Pero… ¿Qué condiciones es la que se debe cumplir para que esas matas se puedan sembrar ?

619. Diana: Deben tener la misma distancia.

620. Profesor L: Si…
621. Diana: Entonces un… un terreno [Es interrumpida por Cristian:]
622. Cristian: En línea recta!!? [Dayana: ríe]
623. Profesor L: En línea recta…? [Hablan simultáneamente]
624. Cristian: En línea perpendicular [le sigue la pregunta al Profesor L:]
625. Profesor L: …perpendicular…?
626. Dayana: Debe ser un terreno llano [En un segundo plano de la conversación]
627. Profesor L: Pues el terreno es llano [reconociendo la intervención de Dayana: la cual ríe.] O sea, oquei olvidémonos un poco de la situación…
628. Cristian: Ay Dayana: en términos geométricos
629. Profesor L: Olvidémonos un poco de la situación de Don Gustavo y… yo les cambio un poco la pregunta y les… y les digo como pueden describir el sitio en donde deben localizar esos puntos que… ¿Qué condiciones es la que cumplen esos puntos?.
630. Diana: [al mismo tiempo que Cristian: y Dayana:] … que es que deben tener la misma distancia… de… rayo a rayo [casi en coro con Cristian:]
631. Profesor L: Oquei, de rayo a rayo.
632. Diana: O sea, de canal a canal.
633. Profesor L: Entonces, ¿como le pueden describir a otra persona donde localizar esos puntos?. Una descripción, ¿Cómo la podrían… cómo le podrían describir a alguien donde localizar esos puntos?
634. Diana: Mas o menos en la mitad de… de… del ángulo
635. Profesor L: Y la mitad del ángulo…, o sea, eso cómo..?, eso…qué es? En la mitad del ángulo, ¿Cómo así?
636. Cristian: [Dayana: ríe] Pues dividir el ángulo en dos.
637. Profesor L: Aja.
638. Cristian: Y determinar…, o sea, la mitad del ángulo, y ahí en toda la mitad, pues, va construyendo la matica [Profesor L: interrumpe]
639. Profesor L: ¿Y en toda la mitad…, eso qué es… ?
640. Cristian: Pues toca medir…
641. Diana: Debe tener un nombre, se llama "Bisectriz"
642. Profesor L: Aaaah…,
643. Diana: ¿Uy en serio? Nooo
644. Profesor L: …Se llama bisectriz? [Risas. Comentarios] No sé.
645. Cristian: Ah pues se puede crear una bisectriz. [Un breve silencio, tal vez esperando la aceptación del Profesor L:]
646. Profesor L: Y si…, o sea, ¿y para que crear la bisectriz?
647. Diana: No!, no gordo no.
648. Cristian: [Respondiendo la pregunta del Profesor L:] Pues pa decirle a Don Gustavo que como haga eso. [El Profesor L: hace un gesto de aceptación] Ah si! Creo una bisectriz.
649. Profesor L: Pues mirémoslo a ver, acá. [Cristian: se apropia de la calculadora. Comentarios.] Ojo una pregunta antes de que inicie [Cristian: interrumpe]
650. Cristian: Con efe cuatro…
651. Profesor L: ¿Qué pasa si se crea la bisectriz… si se traza una bisectriz, ahí en esa… de ese ángulo?
652. Diana: No queda así recta?, o sea, no queda así, fun [Señala con el dedo]
653. Profesor L: Miremos a ver…
654. Cristian: ¿Cómo se crea una bisectriz?

| | | |
|---|---|---|
| 655. | Diana: | Yo no sé. Pues, ay, intentando es que se aprende. [Cristian: manipula la calculadora]. Parece un ratón [refiriéndose al gráfico actual de construcción] |
| 656. | Cristian: | No. Acá. Claro. [Mientras sigue buscando como trazar la bisectriz] |
| 657. | Profesor L: | Mmm, ¿ya activo la opción de bisectriz? |
| 658. | Cristian: | Creo que si. [Verifica] Si como no. |
| 659. | Diana: | Noo. |
| 660. | Cristian: | Si. |
| 661. | Diana: | Póngala |
| 662. | Cristian: | Ay es esa. [señala la pantalla] |
| 663. | Diana: | *Perpendicular bisector?* [Lee en la pantalla de la calculadora] |
| 664. | Cristian: | No. Es un ángulo, ángulo bisector [Lo lee así a pesar de que en la calculadora aparece *Angle Bisector*] Ahora sí. Es que pa crear con punticos es una joda. [ Sigue manipulando la calculadora. Comentarios ] Ya. [Traza con Cabri la bisectriz (recta) del ángulo construido] |
| 665. | Profesor L: | Y que ocurrió ahí Diana:… |
| 666. | Diana: | Aaah, ¿Si ve? Sss |
| 667. | Cristian: | Si… ahí está. [Murmullos de Diana: y Dayana:] |
| 668. | Profesor L: | Entonces, ¿cómo le describen a Don Gustavo…? o bueno o, ¿Cómo describimos el sitio donde se deben localizar los puntos? |
| 669. | Dayana: | ¿En la bisectriz? [Y ríe] |
| 670. | Profesor L: | Ya. Entre ustedes discútanlo y terminen de escribir esa respuesta. |
| 671. | Cristian: | ¿Cómo así?... ¿Cómo así? |
| 672. | Diana: | Si… [Profesor L: interrumpe] |
| 673. | Profesor L: | Lean la pregunta. O bueno les pregunto; ¿Cómo deben localizar…? Olvidándonos un poco del contexto…de Don Gustavo [casi en coro con Cristian:] ¿Cómo deben describirle a alguien donde deben locali… zar o colocar los puntos…? |
| 674. | Diana: | Donde dé la bisectriz del ángulo. |
| 675. | Cristian: | [Complementando y de acuerdo con Diana:, casi al tiempo] En toda la línea bisectora. |
| 676. | Diana: | [Completa su idea] En toda esa parte… En toda esa parte tengo que escribir puntos. |
| 677. | Cristian: | Si. Puede construir maticas |
| 678. | Diana: | Aja… Escriba [Dayana: se dispone a escribir] |
| 679. | Dayana: | ¿En toda qué? |
| 680. | Cristian: | En toda la línea bisectriz. |
| 681. | Diana: | Del ángulo. |
| 682. | Cristian: | Del ángulo. [Dayana: escribe. Cristian: y Diana: Conversan en voz muy baja] |
| 683. | Dayana: | [Mientras escribe] ¿De la cuña? |
| 684. | Diana: | Noo, del ángulo. [Risas. Comentarios] |
| 685. | Dayana: | Ya. [Termina de escribir la respuesta de la pregunta c. y suelta el lápiz sobre la hoja] |
| 686. | Diana: | Listo, uish, [Lee] *Conjeturación, En términos de geometría, ¿Qué pueden concluir?. Escriban su concusión en forma de condicional. Si…* Escriba si. [Le dice a Dayana: la cual lo duda o no entiende] |
| 687. | Cristian: | Siiii, uish Dayana:! [Como apresurando a Dayana: para que escriba] |
| 688. | Dayana: | Yo estoy escuchando! |

| | | |
|---|---|---|
| 689. | Cristian: | Escriba porque si no ---[NSE] |
| 690. | Dayana: | [Escribe] Ya. |
| 691. | Diana: | Si… [Le pregunta Cristian:] ¿Qué fue lo que construyo usted? …un ángulo…!!? |
| 692. | Cristian: | Bisectriz, no! Bisector [Diana: lo interrumpe] |
| 693. | Diana: | No perece, debemos utilizar, ee, términos geométricos. |
| 694. | Cristian: | Que mas geométrico que un ángulo bisector [Dayana: ríe] |
| 695. | Diana: | [Mientras, piensa en voz alta] Un ángulo… ángulo… ¿Y cómo se llamaba? |
| 696. | Cristian: | Bisector. |
| 697. | Diana: | Uy si.. [Como poniendo en duda la respuesta de Cristian:] |
| 698. | Cristian: | Y que, ¿Vamos a hacer eso? [Breve silencio] ¿Se puede hacer eso? [Le pregunta directamente al Profesor L:] |
| 699. | Profesor L: | ¿qué se puede hacer? |
| 700. | Cristian: | Ángulo bisector. |
| 701. | Profesor L: | ¿Qué construyeron? |
| 702. | Cristian: | El ángulo bisector. |
| 703. | Profesor L: | Construyeron… ¿Eso? Y entonces, ¿Qué fue lo que descubrieron? |
| 704. | Cristian: | Donde Don Gustavo… No, en términos geométricos. Donde se podían poner… |
| 705. | Dayana: | No, donde debía ser… [Diana: la interrumpe] |
| 706. | Diana: | Descubrimos donde se deberían… [Dayana: interrumpe] |
| 707. | Dayana: | Donde se deberían sembrar las matas. |
| 708. | Profesor L: | Aaaa |
| 709. | Cristian: | No porque es en términos geométricos. ¿No? |
| 710. | Profesor L: | …Si. Es en términos geométricos… |
| 711. | Dayana: | Aaa |
| 712. | Cristian: | Dayana:! ---[NSE] |
| 713. | Profesor L: | O sea, ya no le llamemos matas sino puntos [Hace la aclaración mientras Cristian: habla con Dayana:. Un breve silencio ] |
| 714. | Dayana: | Ay, ¿y entonces? |
| 715. | Profesor L: | ¿Qué construyeron? |
| 716. | Cristian: | Un ángulo bisector. |
| 717. | Profesor L: | Revisen en la tabla, que fue lo que construyeron...? ¿Qué construyeron, en la tabla? |
| 718. | Diana: | En la tabla gordo. [No está en video a donde acude Cristian: ] |
| 719. | Cristian: | Ah, pues hágale usted entonces. |
| 720. | Diana: | [Lee la hoja de trabajo en la columna *¿Qué hacer?*] *Construir un ángulo y un punto llamado K dentro de ese ángulo.* Un ángulo! |
| 721. | Profesor L: | Y ese punto… ¿qué características tiene? |
| 722. | Cristian: | Que esta en la mitad de los dos… |
| 723. | Dayana: | Que está dentro del ángulo |
| 724. | Profesor L: | ¿Y qué más? |
| 725. | Diana: | … y que… tiene… |
| 726. | Cristian: | La misma distancia de un rayo al otro |
| 727. | Diana: | Un rayo [Dayana: se ríe. Risas] |
| 728. | Profesor L: | Leíste en la tabla o eso fue lo que construyo |
| 729. | Diana: | Si. |
| 730. | Cristian: | Si. |

| | | |
|---|---|---|
| 731. | Profesor L: | Entonces, ¿Qué fue lo que descubrieron? |
| 732. | Diana: | Descubrimos que… que podíamos [Dayana: habla intentando intervenir y ríe] construir… que podíamos colocar mucho más puntos, muchos más puntos colocando la bisectriz ¡!? Si! |
| 733. | Profesor L: | Si, aja. |
| 734. | Diana: | Está bien… |
| 735. | Cristian: | Pero toca redactarlo. |
| 736. | Diana: | Aja. |
| 737. | Dayana: | Es que nosotros para eso si no nacimos. |
| 738. | Cristian: | Creo que no servimos de escritores |
| 739. | Diana: | Hágale por que toca irnos. |
| 740. | Dayana: | [Lee] *Si. Lo que construimos*… fue [Diana: y Cristian: hablan entre ellos] ¿Es que hago eso? |
| 741. | Coro | No. [Murmullos] |
| 742. | Diana: | Haga un ángulo así, haga un ángulo así. [No es claro en el video a que se refiere] |
| 743. | Profesor L: | Que dibujaron… ah ya, el simbolo |
| 744. | Cristian: | Escríbale… ángulo bisector. |
| 745. | Profesor L: | Aaaa la notación. |
| 746. | Diana: | A? |
| 747. | Profesor L: | La notación de ángulo. |
| 748. | Diana: | Aja. Haga! [Le dice a Dayana: la cual escribe] ¿Qué hace? [Le dice a Dayana: al ver que va a escribir algo diferente a lo que se dijo] |
| 749. | Dayana: | Yo ya iba a escribir disque, lo que construimos. [y borra] |
| 750. | Diana: | Pero un ángulo llamado ¿qué? Venga, préstemela [Parece referirse a la calculadora] |
| 751. | Cristian: | Un ángulo…? Pues escríbale; Si ángulo… |
| 752. | Dayana: | Llamado |
| 753. | Cristian: | …Bisector |
| 754. | Diana: | Ay, que…[Parece no aceptar su propuesta] |
| 755. | Dayana: | Llamado *K*. |
| 756. | Diana: | Noo |
| 757. | Cristian: | No. Es que el ángulo no tiene nombre. |
| 758. | Dayana: | ¿No? |
| 759. | Profesor L: | Pues bautícenlo |
| 760. | Cristian: | Ah ¿Lo podemos bautizar? [El Profesor L: asiente] Pongámosle una cruz entonces. [Comentarios] |
| 761. | Dayana: | Entonces pongámosle ángulo *K*. |
| 762. | Cristian: | Pero no ve que ese puntico se llama *K* y el otro se llama… [Lo interrumpen] |
| 763. | Diana: | [Parece referirse a una situación anterior en donde Cristian: nombro un punto al parecer por la novia]--- entonces escríbale Cristian: [Risas] Si hágale sss |
| 764. | Cristian: | Ustedes si la montaron. |
| 765. | Dayana: | O no escríbale ee… ¿Cómo es que se llama su novia? |
| 766. | Diana: | Andrea |
| 767. | Dayana: | Entonces *a* y *c* juntos por siempre. [Risas. Se hacen comentarios respecto a un asunto diferente a la conjetura que se intenta plantear.] |
| 768. | Cristian: | [Intentando volver a la tarea, muestra algo que ha agregado en la |

| | | |
|---|---|---|
| | | construcción hecha en la calculadora] … Ay, no se ve la $i$. |
| 769. | Profesor L: | ¿Dónde lo… ? |
| 770. | Cristian: | Se llama $cri$. |
| 771. | Profesor L: | A bueno entonces pongamoslo |
| 772. | Cristian: | ¿y qué? |
| 773. | Diana: | ¿Cómo se llama? |
| 774. | Cristian: | $cri$ |
| 775. | Diana: | ¿Dónde dice? |
| 776. | Cristian: | Es que la $i$ está escondida. [Refiriéndose a la notación puesta en la construcción] |
| 777. | Diana: | Y la $c$ también. [Cristian: señala con su dedo la ubicación de la letra $c$ en la pantalla de la calculadora] |
| 778. | Cristian: | [NSE] |
| 779. | Diana: | Ay que pecado. |
| 780. | Cristian: | Aaaaag. Ya, ya me esta ofendiendo, uish [Muestra un poco de enojo por el comentario de Diana:. Diana: y Dayana: murmuran] |
| 781. | Diana: | Ángulo $cri$ |
| 782. | Dayana: | ¿$cri$? |
| 783. | Diana: | Mh |
| 784. | Dayana: | ¿$cri$? [Y se dispone a continuar escribiendo la conjetura] |
| 785. | Diana: | [Corrige a Dayana: que está escribiendo $Si\angle crit$] No pero escrib… $cri$, solo $cri$, $cri$. |
| 786. | Dayana: | Aaaa [Mostrando haber entendido] |
| 787. | Diana: | $cri$!! [Dayana: borra y corrige] Entonces [Sigue dictando y Dayana: escribe]. |
| 788. | Dayana: | Entonces… [Indicando que ya esta lista para que le sigan dictando] |
| 789. | Diana: | ¿Qué más construimos?, una bisectriz, ¿No? [Un momento de silencio]. Ah rectas perpendiculares, segmento. Oiga nosotros construimos la de cosas. |
| 790. | Cristian: | Si! |
| 791. | Diana: | Vea gordo es que usted nunca le… no le puso nombre a esos punticos… [El Profesor L: interviene.] |
| 792. | Profesor L: | … Lean, lean lo que escribieron arriba. ¿Qué construyeron? [Se refiere a la hoja de trabajo en la casilla *¿Qué hacer?*] |
| 793. | Dayana: | Un ángulo… Creamos un ángulo. [Un breve silencio] Si, creamos un ángulo $cri$ [Risas] |
| 794. | Diana: | … y un punto $K$ dentro de ese… |
| 795. | Cristian: | … un punto $K$ así mire, [parece referirse a la construcción el Cabri] un punto $k$ y un punto $a$… |
| 796. | Diana: | Pero también creamosss…. Segmentos… |
| 797. | Cristian: | Aish… [] |
| 798. | Profesor L: | ¿Para que servían los segmentos? |
| 799. | Diana: | Para medir la distancia. |
| 800. | Profesor L: | Aaaa, o sea que… |
| 801. | Cristian: | Creamos segmentos para medir la distancia. |
| 802. | Diana: | Pero geométricamente. |
| 803. | Cristian: | Por eso. |
| 804. | Diana: | No escribir ahí.. |

| | | |
|---|---|---|
| 805. | Cristian: | Por eso. Que más geométrico que ambos segmentos para medir distancia. |
| 806. | Diana: | Pero ¿Cómo se llaman los segmentos? No ve que usted no les puso nombre. [Mientras tanto Dayana: borra la palabra *entonces* de la conjetura que están intentando proponer] |
| 807. | Cristian: | Pues este se llama c, a y acá… [parecen estar señalando la construcción hecha en Cabri] |
| 808. | Diana: | ¿Y éste? |
| 809. | Cristian: | Éste digamos k, p y … [Diana: repite k, p y ríen] |
| 810. | Profesor L: | Yo sé lo que están diciendo, pero lo que dijeron ¿Concuerda con lo que está escrito acá? [Hoja de trabajo en la columna, *¿Qué hacer?*] |
| 811. | Cristian: | Si, es que yo les dije que termináramos de escribir acá más [Señala en la hoja de trabajo la casilla *¿Qué hacer?*] y ustedes empezaron fue a escribir acá. [Señala la casilla *¿Cómo hacerlo?*] |
| 812. | Profesor L: | No, solamente mire acá un momento [Señala la casilla *¿Qué hacer?*] ¿Qué hacer? Construir un ángulo y un punto llamado $K$ dentro de ese ángulo. ¿Qué propiedad tenía ese punto $K$? |
| 813. | Dayana: | Tener la misma distancia de rayo a rayo |
| 814. | Profesor L: | Eso fue lo que hicieron. O sea, que nos faltooo… [Señala nuevamente la casilla *¿Qué hacer?*] |
| 815. | Diana: | Escribir. |
| 816. | Profesor L: | Escribir |
| 817. | Diana: | [A manera de dictado] Que tenga la misma distancia del punto a cada uno de sus rayos. A cada uno de sus rayos. |
| 818. | Dayana: | [Dayana: duda un poco al escribir, lee de nuevo lo escrito, pone una coma en lo que llevaba escrito y escribe “*..., que debía tener la misma distancia de rayo a rayo.*”] Listo [Y ríe. Nuevamente comentan un asunto ajeno al trabajo que están realizando. Debido a esta distracción es necesario cortar en 12CORTEMIN1:04 hasta enfocar de nuevo el trabajo. Luego de esta prolongada interrupción se retoma el trabajo desde la lectura de lo último escrito por Dayana: en la casilla de *¿Qué hacer?*] |
| 819. | Diana: | [Lee]*que debía llevar la misma distancia de rayo a rayo* [En coro con Dayana:] |
| 820. | Dayana: | ¿Segura que escribo eso? [Se refiere al hecho de escribirlo en la conjetura que ha sido borrada y solo queda $Si\angle$] |
| 821. | Diana: | Si. |
| 822. | Dayana: | [Con mucha duda de lo que escribe] … con un punto… con un punto ¿Dentro de él o con un punto que debía… llevar una misma distancia de rayo a rayo? |
| 823. | Diana: | [Dictando] Con un punto dentro de él… que lleve la misma distancia… de rayo a rayo. |
| 824. | Dayana: | ¿Cómo se escribe llevaba? [Murmullos y comentarios al respecto. Finalmente que da escrita la primera parte de la conjetura *“*$Si \angle\ con\ un\ punto\ dentro\ de\ elque\ llevaba\ la\ misma\ distancia\ de\ rayo\ a\ rayo$*”* ]. Entonces… |
| 825. | Diana: | Entonces… ¿? [Risas y murmullos. Nuevamente es necesario hacer un corte de la grabación] |
| 826. | Dayana: | Entonces… |
| 827. | Diana: | Escriba. |
| 828. | Dayana: | Ah. [Risas] |

| | | |
|---|---|---|
| 829. | Diana: | Entonces… lo que descubrimos… ¿Qué fue haber, haber?. Lo que descubrimos fueeee… donde… espere, espere… [Comenta con Cristian: en voz muy baja y poco audible] Lo que descubrimos fue donde colocar los puntos ¿No? [Mientras Dayana: escribe *"...entonces lo que descubrimos"*] redactemos bien eso. |
| 830. | Cristian: | Bueno. Descubrimos que… ¿Qué descubrimos?. Un ángulo… |
| 831. | Diana: | Aaaa que, que, que por medio de… que por toda la bisectriz se podían colocar los puntos. |
| 832. | Dayana: | Que por medio de la bisectriz podíamos saber en dónde podíamos ubicar los puntos |
| 833. | Cristian: | Ah sí. Por medio de la bisectriz del ángulo. [Dayana: escribe …*que por medio de la bisectriz* ] |
| 834. | Dayana: | Que por medio de la bisectriz ¿? |
| 835. | Diana: | Podríamos saber dónde colocar los puntos ¿No? |
| 836. | Cristian: | Si [Dayana: continua escribiendo, … *podríamos saber dónde colocar los puntos.*] |
| 837. | Dayana: | Ya. |
| 838. | Profesor L: | ¿Les falta algo? Revisen. |
| 839. | Dayana: | No señor. Pues nos falto… [Señala la hoja de trabajo] |
| 840. | Diana: | No, eso ahí no. Ya no nos falta nada ¿o creo que si?, no. |
| 841. | Cristian: | Pues esto pero tocaría… [El Profesor L: interrumpe] |
| 842. | Profesor L: | Una cosita acá. Si ángulo. [$Si\angle$, Señala en la hoja de trabajo], ¿cómo lo llamaron? |
| 843. | Dayana: | Ángulo $cri$ |
| 844. | Diana: | Ángulo $cri$. ¿Lo borro? |
| 845. | Cristian: | Ahora corra esto un poquito para acá, uish usted si… [Se refiere a la primera parte del antecedente de la conjetura. Dayana: procede a borrar y escribir.] |
| 846. | Diana: | Si ángulo $cri$. [Murmullos y comentarios] |
| 847. | Dayana: | Por que no ponemos; Si un ángulo. |
| 848. | Diana: | Noo. Si ángulo $cri$. [Dayana: sede y corrige; $Si\angle cri\ con\ un$ ...] |
| 849. | Dayana: | [Leyendo] …con un punto dentro… |
| 850. | Diana: | Ya! [Murmullos] Ya. [FIN DE LA GRABACIÓN] |

# ANEXO J. TRANSCRIPCIÓN DEL PROCESO DE JUSTIFICACIÓN DE LA CONJETURA

La siguiente transcripción corresponde a la sesión No. 18 del 8 de febrero de 2012 en la que intervinieron, nuevamente, el grupo de estudiantes de la sesión anterior (Diana, Dayana y Cristian); y los dos observadores, autores del estudio (Profesor J y Profesor L). Inicialmente, el Profesor L hace la retroalimentación de la Tarea No. 6 desarrollada la sesión anterior en torno a la conjetura que los estudiantes formularon: *Si* $\angle cri$ *con un punto dentro de él que llevaba la misma distancia de rayo a rayo entonces lo que descubrimos que por medio de la bisectriz podíamos saber dónde colocar los puntos*. Luego, ellos resuelven la Tarea No. 7 en la justifican la conjetura a la que debían llegar: "*Si la distancia de un punto a cada lado de un ángulo es igual entonces el punto está sobre la bisectriz del ángulo*".

| | | |
|---|---|---|
| 1. | Profesor L: | El día de ayer ustedes desarrollaron la Tarea No. 6, en la que resolvieron o leyeron una situación, otra vez con Don Gustavo. La voy a leer y ahorita vamos a mirar todos los puntos, qué fue lo que ustedes dijeron e hicieron. [Comienza a leer la situación.] Dice: Uno de los terrenos en la finca de Don Gustavo tiene forma de cuña, bordeado por dos canales. Él quiere sembrar matas de arroz de tal forma que la distancia de cada mata a cada canal sea la misma. Entonces, lo primero que ustedes hicieron fue representar la situación usando Cabri [Abre un archivo de Cabri y muestra a los estudiantes la representación del terreno de Don Gustavo como un ángulo.] Eso fue lo que dibujaron. Ustedes dibujaron las dos canales y que geométricamente ¿qué es eso? |
| 2. | Cristian: | Un ángulo. |
| 3. | Diana: | Un ángulo. |
| 4. | Profesor L: | Un ángulo. ¿Alguien puede, no sé si Cristian, Diana o Dayana, volver a hacer toda la construcción que ustedes hicieron respecto a la situación? ¿Cuál era la intención de Don Gustavo? O, ¿cuál es la intención de Don Gustavo? |
| 5. | Diana: | Sembrar matas para que quedaran de la misma medida de… la misma distancia a las canales. |
| 6. | Profesor L: | La misma distancia a las canales. Entonces, y decíamos que cada mata geométricamente se iba representar en Cabri como… |
| 7. | Cristian: | Un punto. |
| 8. | Profesor L: | Como un punto. Entonces, lo podemos otra vez hacer […] [El Profesor L solicita a Cristian que realice la construcción en Cabri de dicha situación.] |
| 9. | Cristian: | […] primero hago el punto que es supuestamente la mata. [Localiza un punto en el interior del ángulo.] Y luego, se supone que, digamos, queremos medir las dos distancias, pues la forma más sencilla es con la |

perpendicular. Entonces, hago la perpendicular con la mata, la supuesta mata y el rayo, o sea la canal. Luego, en la intersección de… acá, en este punto coloco el punto de intersección. [Marca con un punto la intersección entre el rayo y la recta perpendicular a éste que pasa por el punto que representa la mata.] Y luego desaparezco esta línea. [Oculta la recta perpendicular.] Luego, hago un segmento, que lo voy a utilizar ahorita, [Traza un segmento con extremos el punto que representa la mata y el punto de intersección antes determinado.] y hago lo mismo pero con el otro rayo o canal […] [Repite la construcción mencionada.] Y los mido para comprobar que la mata [punto] esté a la misma distancia que los dos rayos. [Halla la longitud de cada uno de los segmentos construidos anteriormente. Uno de ellos mide 1,29 cm y el otro 1,14 cm]. Entonces, no está; entonces toca moverlo un poquito. [Arrastra el punto que representa la mata hasta que tuviera igual distancia a cada uno de los lados del ángulo]. Ahí está.

| | | |
|---|---|---|
| 10. | Profesor L: | Bien. Entonces, esa fue la construcción que ustedes hicieron. Sigamos revisando las preguntas ahora, luego de hacer la construcción […]. Escribieron lo que hicieron, cómo lo hicieron, que eso ya está […] hecho en Cabri. Ahora dice: [Lee la primera pregunta de la Tarea No. 6] con base en la anterior construcción, o sea, ésa que acabamos de hacer, […] ¿cuántas matas podía sembrar Don Gustavo? […] |
| 11. | Cristian: | Infinitas. |
| 12. | Profesor L: | […] Volviendo otra vez Cabri, ¿cómo pueden mostrar que son infinitas? |
| 13. | Diana: | Porque creamos una bisectriz y encima de esa bisectriz podía sembrar las matas. Entonces. Si el terreno es grande entonces digamos pues muchas, acá podemos [Señala en la pantalla de Cabri, el punto que localizó Cristian y que es equidistante a los lados del ángulo.] |
| 14. | Profesor L: | Entonces, mostremos. |
| 15. | Cristian: | […] estamos haciendo la bisectriz [Traza la bisectriz usando la herramienta correspondiente.] Ya. |
| 16. | Profesor L: | Okey. Entonces ya con eso que acaba de hacer Cristian y lo dijo ya Diana, [Lee la tercera y última pregunta.] […] ¿cómo le pueden describir el sitio en donde Don Gustavo debe colocar las matas? ¿Cómo lo describieron? O, ¿cómo respondieron a esa pregunta? Recordemos. |
| 17. | Diana: | [Lee la respuesta consignada en la hoja.] En toda la línea bisectriz del ángulo. |
| 18. | Profesor L: | Dime. |
| 19. | Diana: | Que se podía cons… que se podían sembrar matas en toda la bisectriz del ángulo. |
| 20. | Profesor L: | Okey. Luego de que hicieron esa construcción, llegaron a una conjetura, que ya la tengo escrita aquí en el computador. Dice: [Empieza a leer la conjetura que formularon los estudiantes.] Si ángulo $CRI$ [$\angle cri$]… Y aquí hay un error. ¿Cuál es el error de la escritura? |
| 21. | Cristian: | En mayúscula, ¿no? |
| 22. | Profesor L: | Es en mayúscula porque […] $C$, $R$ e $I$ representan los puntos, que en este caso ¿quiénes serían? [Regresa al programa Cabri, nombra el ángulo que aparece en la pantalla como $\angle CRI$.] ¿De acuerdo? Eso para la corrección. Ahora, [Continúa leyendo la conjetura.] con un punto dentro de él. ¿Cuál es el punto? |
| 23. | Cristian: | Ese. [Señala el punto que representa la mata.] |

24. Profesor L: ¿Cómo lo llamaron ustedes?
25. Diana: $K$.
26. Profesor L: ¿Cómo lo llamaron ustedes? ¿$A$ ó $K$?
27. Diana: Era $K$.
28. Profesor L: Repito. [Lee la conjetura desde el inicio.] Si el ángulo $CRI$ [$\angle CRI$] con un punto con un punto dentro de él que llevaba la misma distancia de rayo a rayo entonces, ¿qué fue lo que descubrieron? Lo que descubrimos, dicen ustedes: lo que descubrimos que por medio de la bisectriz podíamos saber dónde colocar los puntos […] Y si ustedes desplazan el punto por la bisectriz ¿qué sucede? [Arrastra el punto $K$ sobre $\overrightarrow{RK}$, que es la bisectriz del ángulo $\angle CRI$.]
29. Cristian: Sigue manteniendo la misma distancia.
30. Profesor L: Exacto.
31. Cristian: O una aproximación.
32. Profesor L: En ese caso, [Arrastra el punto $K$, de manera que la longitud de un segmento es $1{,}60\ cm$ y el otro $1{,}59\ cm$.] puede ser una aproximación. Bien. Esa conjetura es muy aproximada a la conjetura ideal para este problema. Entonces. Yo señalé el antecedente del condicional con verde y el consecuente con rojo. Entonces, miremos en qué cosas hay de iguales entre la conjetura que ustedes escribieron y la conjetura que era la ideal para el problema. Dice: [Empieza a leer la conjetura ideal para el problema y la compara con la conjetura que el grupo de estudiantes formuló para establecer semejanzas y diferencias.] Si la distancia de un punto a cada lado de un ángulo es igual… ¿tiene alguna diferencia entre lo que ustedes escribieron?
33. Cristian: No mucho.
34. Profesor L: ¿No mucho? ¿Qué dijeron ustedes?
35. Diana: [Lee el antecedente de la conjetura que el grupo formuló.] Si ángulo $CRI$ [$\angle CRI$] con un punto, con un punto dentro de él que llevaba la misma distancia de rayo a rayo.
36. Profesor L: En esencia, dicen que llevaban la misma distancia y aquí dice [Lee la conjetura ideal.] que la distancia de un punto a cada lado, y el lado ¿cómo se representa gráficamente? Es un rayo [Señala el antecedente de la conjetura escrita por el grupo.] y aquí dice los lados del ángulo. ¿Qué concluyeron ustedes Diana? [Refiriéndose al consecuente de la conjetura].
37. Diana: ¿Qué concluimos?
38. Cristian: Sí, el *entonces* [Consecuente del condicional.], ¿no?
39. Diana: [Lee el consecuente de la conjetura.] Entonces lo que descubrimos que por medio de la bisectriz podíamos saber dónde colocar los puntos.
40. Profesor L: Ese *entonces* mirémoslo aquí en la conjetura. [Lee el consecuente de la conjetura ideal para compararla con la conjetura formulada.] Entonces el punto está sobre la bisectriz del ángulo. ¿El punto está sobre la bisectriz del ángulo? [Muestra la pantalla de Cabri que contiene la construcción hecha por Cristian.]
41. Diana: Aja.
42. Profesor L: De acuerdo. Esa conjetura que ustedes hicieron y la ideal, de cierta manera se encuentran algo aproximado […]. [Como parte final de la retroalimentación, el Profesor L entrega una fotocopia que contiene el

listado de hechos geométricos y definiciones, que han establecido desde el comienzo de la unidad y de dónde deberán sacar los elementos necesarios para justificar la conjetura ideal, haciendo uso del esquema a tres columnas *Qué sé – Qué uso – Qué concluyo*.]

[Pausa # 1]

43. Diana: Conjetura: [Empieza a leer la conjetura que el grupo va a justificar.] Si la distancia de un punto a cada lado de un ángulo es igual entonces el punto está sobre la bisectriz del ángulo. ¿Qué sé?

44. Cristian: Que la distancia del punto a cada lado es igual.

45. Diana: ¿Por qué?

46. Cristian: Pues, eso es lo que sé.

47. Diana: ¿Sí?

48. Cristian: Entonces, ¿cómo se escribe?

49. Diana: La distancia a cada lado de un ángulo es igual.

50. Cristian: Eso es lo que sé.

51. Diana: Por eso.

52. Cristian: ¿Qué uso?

53. Diana: Espere que Dayana va a… [Revisa el listado de hechos geométricos y definiciones.]

54. Cristian: Distancia de un punto a una recta… [Revisa el listado de hechos geométricos y definiciones.]

55. Diana: […] pues ¿sí? La distancia de un punto a cada lado de un ángulo… sí, esa.

56. Cristian: ¿Segura?

57. Diana: No.

58. Cristian: Ah, bueno.

59. Diana: No, porque… sí porque vea. Si acá dice: [Lee el antecedente de la conjetura.] La distancia de un punto a cada lado de un ángulo es igual; y acá dice: [Lee la definición de distancia de un punto a una recta.] La distancia de un punto $P$ a una recta $m$ es la longitud del segmento perpendicular desde $P$ hasta $m$… O sea, tiene algo de parecido, ¿sí? Sí porque no hay nada más así parecido.

60. Cristian: [Parece señalarle a Diana la definición de bisectriz de un ángulo.]

61. Diana: Ah, la bisectriz de ángulo. [Lee.] Es un rayo con extremo en el vértice del ángulo y demás puntos en el interior del ángulo, tal que el rayo con los lados del ángulo forman dos ángulos congruentes.

62. Cristian: No.

63. Diana: No. Efectivamente, usamos la definición de distancia de un punto a una recta.

[Durante algunos minutos los estudiantes silenciosamente miraban al Profesor L, quizá esperando alguna señal de aprobación.]

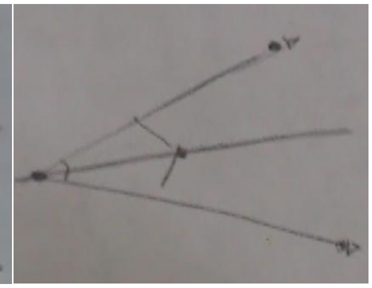
64. Profesor L: ¿Podrían antes de seguir con la justificación, podrían hacer una representación de esa situación? En lápiz y papel, vamos a hacer una representación.

65. Cristian: [Lee la condicional de la conjetura.] La distancia de un punto a cada lado de un ángulo es igual. Pues es esto [Señala la pantalla de Cabri en el computador.]

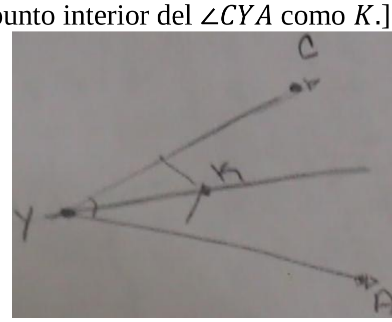
66. Profesor L: Si quieren hagámosla en lápiz y papel; por eso les alcance lápiz y papel.

67. Cristian: [Dibuja sobre la hoja un ángulo con un punto en su interior. Los segmentos no son perpendiculares a los lados del ángulo pero sí son congruentes.] Ya.

Dice. Entonces [Lee el consecuente de la conjetura.] el punto está sobre la bisectriz de un ángulo.

68. Diana: Del ángulo.
69. Cristian: [Traza la bisectriz del ángulo] Dícese.
70. Diana: ¿Bisectriz de un ángulo?
71. Cristian: Sí.
72. Profesor L: Con eso que saben, ¿está suministrado en la gráfica?
73. Diana: ¿Cómo así? No.
74. Profesor L: Una cosita. Para que puedan referirse a los objetos que están en ese dibujo, pues es necesario nombrarlos: cómo se llama el ángulo, cómo se llaman los puntos.
75. Diana: El ángulo es $CRI$.
76. Cristian: No. El ángulo $C, Y, A$ [Risas.] ¿Y qué? ¿Y punto [punto del interior del ángulo] qué?
77. Diana: Punto $K$.
78. Cristian: Punto $K$ [Marca el punto interior del $\angle CYA$ como $K$.] Listo.

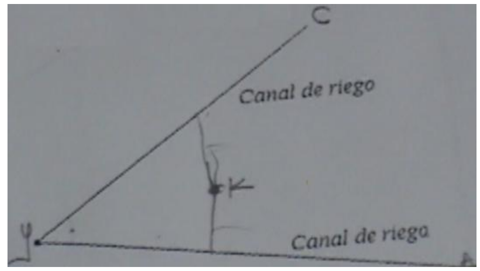



79. Diana: Listo. Entonces.
80. Cristian: ¿La bisectriz se nombra?
81. Diana: ¿La bisectriz se nombra? No. El punto de intersección… Ah, no. No.
82. Cristian: No. ¿No cierto que no? Entonces ahí voy bien.
83. Diana: Ahí está bien. [Lee el antecedente de la conjetura.] La distancia de un punto a cada lado de un ángulo… Sabe lo que deberíamos hacer…
84. Cristian: Si, pues lo que sé, si la distancia del punto $K$, ¿no?, que ya lo estamos nombrando.
85. Diana: Ajá. Si la distancia de un punto, que es $K$, a cada lado del ángulo, o sea $C, Y, A$.
86. Cristian: $C, Y, A$.
87. Diana: Es igual.
88. Cristian: Es igual.
89. Diana: Eso es lo que sabemos.
90. Cristian: Eso es lo que sabemos.
91. Diana: $C, A$. Entonces. [Lee el antecedente de la conjetura.]

| | | |
|---|---|---|
| 92. | Cristian: | ¿Cómo se representa? |
| 93. | Diana: | Entonces, ángulo ¿$C, A$? |
| 94. | Profesor L: | ¿Quién es $C, A$ en la gráfica? |
| 95. | Cristian: | El ángulo [Señala en la hoja el $\angle CYA$.] |
| 96. | Diana: | Eh… los lados del ángulo. Pero el ángulo se llamaría $CRI$, eh […] $C, Y, A$. |
| 97. | Cristian: | Los lados [del ángulo] se llaman $Y, A$ y $Y, C$ [Señala los lados de $\angle CYA$.] Si es por nombrar los lados. |
| 98. | Diana: | Ah, verdad. Ay, sí Gordo. Si la distancia de un punto, $K$ ¿cierto? |
| 99. | Cristian: | Sí. |
| 100. | Diana: | A cada lado de un ángulo. Entonces. $C, Y$ y $Y, A$, entonces los colocamos con… |
| 101. | Cristian: | [Escribe sobre una hoja blanca.] $\overline{CY}$ y $\overline{YA}$. |
| 102. | Diana: | Si la distancia… pues eso es lo que sabemos. |
| 103. | Cristian: | ¿A qué es lo que tenemos que concluir? El punto está sobre la bisectriz. O sea que aún no sabemos la bisectriz. O sea, no hemos sacado esto [Borra la bisectriz del $\angle CYA$.] Aún no hemos sacado esto. Hasta el momento sabemos esto. |
| 104. | Diana: | El punto. |
| 105. | Cristian: | El punto y el lado, ¿cierto? |
| 106. | Diana: | ¿Entonces? |
| 107. | Cristian: | ¿Entonces? |
| 108. | Diana: | Entonces lo que sabemos lo podríamos escribir así: escribir la distancia de… la distancia del punto $K$ a $C, Y$ y $Y, A$, ¿no? Pues eso es lo que sabemos. |
| 109. | Cristian: | Sabemos que la distancia del punto $A$… |
| 110. | Diana: | $K$. |
| 111. | Cristian: | $K$ es igual… |
| 112. | Diana: | Ah… espere, espere argumentemos bien. |
| 113. | Cristian: | Eso. |
| 114. | Diana: | La distancia de un punto... |
| 115. | Cristian: | A… |
| 116. | Diana: | Es lo que sabemos. La distancia del punto $K$ es igual a los lados del ángulo que son $C, Y$ y $Y, A$. |
| | […] | [Los estudiantes esperan aprobación de cualquiera de los docentes presentes sobre las afirmaciones que han hecho.] |
| 117. | Dayana: | Ahora sí. Díganme. |
| 118. | Diana: | La distancia del punto $K$… |
| 119. | Dayana: | [Escribe en la columna *Qué sé* del primer paso: La distancia del punto $K$.] |
| 120. | Diana: | La distancia del punto $K$ es igual a cada lado… Es igual. |
| 121. | Dayana: | [Continua escribiendo en la columna *Qué sé* del primera paso: …es igual] A cada… |
| 122. | Diana: | Es igual a cada lado del ángulo… es igual. Escribamos de una vez eso, ¿no Gordo? |
| 123. | Cristian: | Es igual a… mire que está ahí y está diciendo que $K$ es igual a este coso. |
| 124. | Diana: | No porque está refiriéndose antes a la distancia. |
| 125. | Cristian: | Ah, entonces sí. |
| 126. | Diana: | Es igual a $C, Y$, segmento $C, Y$ [$\overline{CY}$] y $Y, A$ [$\overline{YA}$]. |
| 127. | Dayana: | [Sigue escribiendo en la columna *Qué sé* del primer paso: … a $\overline{CY}$ y $\overline{YA}$.] |

| | | |
|---|---|---|
| 128. | Cristian: | [Le susurra a Diana.] Y, ¿por qué no cogemos, primero, digamos $K$ es igual a la distancia de ese…y sacamos un *Qué uso*, un *Qué concluyo*? Y luego, sacamos con el otro. ¿No nos queda más fácil? |
| 129. | Profesor L: | Cristian, otra vez porque no le alcanzamos a escuchar. |
| 130. | Cristian: | Que digamos que mejor escribimos, o sea no escribir los dos segmentos [rayos del $\angle CYA$] al tiempo sino que escribir el primero, sacar el que *Qué uso*, *Qué concluyo*. Luego, escribimos con el otro lado casi lo mismo. |
| 131. | Diana: | O sea… |
| 132. | Profesor L: | ¿Cómo sería…? |
| 133. | Diana: | O sea. Él está diciendo que saquemos la distancia del punto $K$… a ¿qué? ¿A sólo un lado del ángulo? |
| 134. | Cristian: | A sólo un lado, para sacar un *Qué uso* y un *Qué concluyo*. |
| 135. | Diana: | Y luego, ¿sacamos al otro lado del ángulo? |
| 136. | Cristian: | Sí. |
| 137. | Diana: | ¿Sí? |
| 138. | Cristian: | Sí. Hágale. Entonces, borre esto último, el $Y$… |
| 139. | Diana: | Espere. Deberíamos de complementar todo primero en esta hoja, y ahí sí pasarla allá […] |
| 140. | Cristian: | [Borra en la columna *Qué sé* del primer paso: $K$ es igual a $\overline{CY}$ y $\overline{YA}$.] |
| 141. | Diana: | La distancia del punto $K$ es igual [Escribe en la columna *Qué sé* para completar el primer paso: …$K$ e] ¡No! No se podría. |
| 142. | Cristian: | Claro. La distancia del punto $K$ es… |
| 143. | Diana: | ¿Es igual a $C, Y$? |
| 144. | Cristian: | No. |
| 145. | Diana: | No. No se puede entonces. |
| 146. | Cristian: | Pailas. |
| 147. | Diana: | ¡No! Toca dejarlo como estaba. |
| 148. | Cristian: | Pero es una buena idea. |
| 149. | Diana: | Pues sí, pero es que no se puede. |
| 150. | Cristian: | Pues no sabemos es cómo redactarlo. Pero de que se puede, se puede. |
| 151. | Profesor J: | Les falta un elemento chiquitico. Porque lo que están diciendo está perfecto. |
| 152. | Cristian: | Pero, ¿si pilla que vamos bien? |
| 153. | Profesor L: | […] ¿Gráficamente cómo se ve la distancia del punto $K$ a cada lado del ángulo? |
| 154. | Cristian: | Igual gráficamente [Señala la representación hecha en la hoja.] |
| 155. | Profesor L: | Y, ¿la tienen suministrada? |
| 156. | Diana: | No. O sea pues medida no está. |
| 157. | Profesor L: | No, no. No es la medida. Esa es sólo una representación. |
| 158. | Diana: | Sí, una representación gráfica que así vemos que tiene la misma distancia a cada lado del ángulo [Señala los segmentos dibujados por Cristian.] |
| | […] | [Tanto Cristian como Diana, cada uno, trabaja de manera individual.] |
| 159. | Cristian: | Eche cacumen y yo echo cacumen por otro lado. |
| 160. | Diana: | Dayana, eche cacumen también. |
| 161. | Diana: | [Sobre la gráfica suministrada en la situación de la finca de Don Gustavo, que representa el lote en forma de cuña donde él debe sembrar matas de arroz que tengan igual distancia a cada canal de riego, Diana dibuja el punto $K$ y nombra tres puntos del ángulo como $C, Y, A$.] La distancia del |

punto $K$ es igual a cada uno de los [lados del] ángulo [Traza dos segmentos con extremo el punto $K$, y el otro extremo un punto sobre cada lado del $\angle CYA$.]




162. Cristian: [Escribe sobre la hoja en la que representó inicialmente la conjetura: La distancia del punto $K$ es igual a la dis. Luego borra: es igual a la dis.] ¿Cómo se escribe congruente?
[Susurros]

163. Cristian: Congruente.

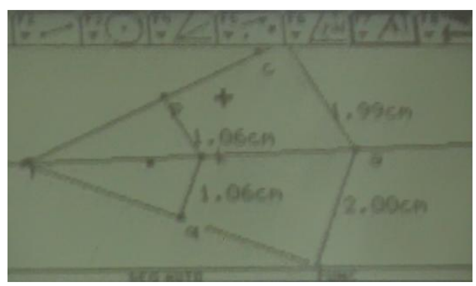
164. Profesor L: Congruente, ¿qué?

165. Cristian: Si la distancia del punto $K$ es congruente con la… ah, es que se me fue la paloma. ¿Sí ve?

166. Diana: Ah, Gordo, ¿será que no se le puede colocar una medida a eso? [Señala los segmentos que trazó anteriormente.]

167. Cristian: Pues, se puede. Pero, ¿para qué? O, ¿para qué vamos a usar la medida? Porque de poder, sí se puede y acá ya lo tenemos medido [Indica la longitud de los segmentos en la pantalla del computador.]

168. Diana: Pues podríamos colocar que la distancia del punto $K$ es 5, digamos 5 $cm$ al segmento $C,Y$ [Señala la longitud de los segmentos trazados en la calculadora.] Y eso es lo que sabemos y ahí construimos eso y después el otro.




169. Cristian: Y, ¿qué usamos?

170. Diana: No lo sé. Pues yo creo que un… Espere.

171. Cristian: [Risas.] No. Yo creo que es más como que…

172. Diana: Ahyyy… segmentos congruentes.

173. Cristian: Aaaah, entonces ¿sí ve que es por la congruencia?

174. Profesor L: ¿Qué dice de segmentos congruentes?

175. Diana: Pues sí porque…

176. Cristian: Aaaah, sí…

177. Diana: Pues estos segmentos. [Señala en la representación que ella hizo, los dos segmentos.]

178. Cristian: Sabemos que el…

179. Diana: ¡Ah, no! Eso no son segmentos congruentes. No, no, no.

180. Cristian: Sí son segmentos.

181. Diana: Ah, sí son segmentos pero que no están nombrados.

182. Cristian: Claro que están nombrados.

183. Diana: ¿Esto? [Señala un segmento con extremo el punto $K$.]

184. Cristian: El segmento se llama $Y, C$ y el otro $Y, A$ [Señala con el lápiz los extremos de $\overline{YC}$ y $\overline{YA}$.]

185. Diana: No sea bobo. Yo estoy diciendo estos segmentos [Retiñe los dos segmentos cuyo extremo es el punto $K$.]

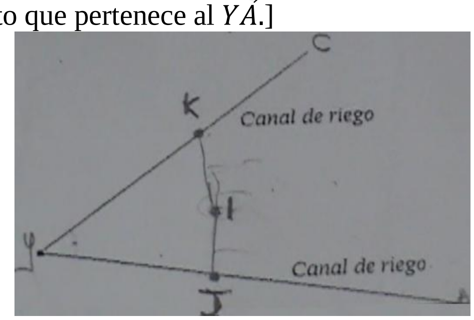
186. Cristian: Pues, lo mismo, ¿no?

187. Diana: No, porque debe tener un nombre diferente [a los lados del $\angle CYA$.].

188. Cristian: Ah, mire acá también. Ah, sí claro.

189. Diana: […] casi que no las cogimos. Yo sé que por ahí va.

190. Cristian: Ah. Entonces cambiémosle el nombre al punto $K$. Ahora se llama […] $I$ latina. [Nombra los elementos sobre la representación dada en la Tarea No. 6, ya mencionada, y sobre la que Diana dibujó el punto que equidista de los lados del ángulo y los dos segmentos.] El punto de arriba es $K$ [Punto que pertenece al $\overrightarrow{YC}$.] , $I$ latina [Punto que equidista de los lados del $\angle CYA$.] y $J$ [Punto que pertenece al $\overrightarrow{YA}$.]




191. Diana: No sé ponga a…

192. Cristian: Pero, ya los nombré.

193. Diana: […] Vea. Lo que sabemos. Entonces lo que sabemos… ¡ay la distancia! Digamos que este tiene 5 $cm$ y acá 5 $cm$ [Asigna al $\overline{KI}$ y al $\overline{IJ}$ la longitud de 5 $cm$.]

194. Cristian: Nooo...

195. Diana: [Escribe en el esquema a tres columnas.] La distancia del punto $K$ es 5 $cm$ al segmentooo [Escribe en la columna *Qué sé* para completar el primer paso: La distancia del punto $K$ es 5 $cm$.] ¡No! Pailas. No se puede. [Risas.]

196. Cristian: El segmento $I, K$ y el segmento $I, J$ son congruentes. Sabemos eso. ¿Por qué? Porque miden lo mismo.

197. Diana: Entonces utilizaríamos la definición de segmentos congruentes.

198. Cristian: Ah. Hágale.

199. Diana: Uyyyy. ¡Ah! Si no es eso, mejor dicho. [Borra en la columna *Qué sé* del primer paso: La distancia del punto $K$ es 5 $cm$.]

200. Diana: ¿Qué? ¿Qué sabemos?

201. Cristian: Que el segmento $K, I$ y el segmento $I, J$ son congruentes.

202. Diana: Yo no sé. [Aunque muestra duda la afirmación de Cristian, escribe en la columna *Qué sé* del primer paso: $\overline{KI} \cong \overline{IJ}$; y en la columna *Qué uso*: Definición segmentos congruentes.]

203. Cristian: ¿Cómo así la misma distancia?

204. Profesor L: ¿Cómo Cristian?

205. Cristian: ¿Cómo así la misma distancia? Diana.

206. Diana: ¿Cómo así?
207. Cristian: Pues sí. Dice que: [Lee la definición de segmentos congruentes.] los segmentos congruentes son dos segmentos…
208. Diana: Que tienen la misma medida.
209. Cristian: Y la misma distancia, ¿no?
210. Diana: ¿Dónde dice? ¿Usted qué está leyendo?
211. Cristian: Ah, yo leí abajo.
212. Diana: ¿No tiene el lente puesto?
213. Cristian: No. [Risas.]
214. Diana: *¿Qué concluyo?* Entonces pues que… ¿seguro que eso sabemos?
215. Cristian: Entonces, ¿qué sabemos?
216. Diana: Bueno. Entonces, ¿qué concluimos?
217. Cristian: No, pero no. Pues concluimos lo que sabemos… ¡Ay, sí! Concluimos lo que sabemos. Sí estoy seguro […]

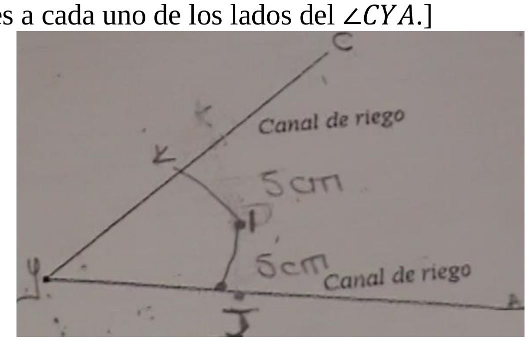
[Pausa # 2]

218. Cristian: Listo. ¿Entonces?
219. Diana: Bueno ¿Qué sabemos? Que $K$ y $I$ son congruentes con $I$ y $J$ [Señala la columna *Qué sé* del primer paso: $\overline{KI} \cong \overline{IJ}$.] Eso sabemos.
220. Cristian: Sí.
221. Diana: Entonces usamos la definición de segmentos congruentes. ¿Qué concluimos?
222. Dayana: ¿Por qué segmentos congruentes?
223. Cristian: Ah, pues concluimos que… Es que la conclusión. Es que la…
224. Diana: ¿Qué concluimos? Que tienen la misma distancia.
225. Cristian: No.
226. Diana: ¿No?
227. Cristian: ¿Cómo vamos a escribir eso con letra bonita? No vamos a escribir: igual de.
228. Diana: Tienen la misma medida.
229. Cristian: ¿Dónde está mi hojita? [Revisa el listado de definiciones y hechos geométricos.]
230. Profesor L: ¿Qué definición están utilizando?
231. Diana: Definición de segmentos congruentes.
232. Profesor L: Si utilizan alguna definición, cualquiera, revísenla que ustedes la tienen ahí a la mano.
233. Diana: Por eso, dice, segmentos congruentes: [Lee la definición.] dos segmentos son congruentes si tienen la misma medida. Y tienen la misma medida.
234. Cristian: Esto [Señala $\overline{KI} \cong \overline{IJ}$ en la columna *Qué sé*] lo hubiéramos escrito acá [Señala la columna *Qué concluyo*.] Acá [Señala la columna *Qué sé*.] tendríamos que haber escrito: $KI$…
235. Diana: Que tienen la misma medida.
236. Cristian: Son congruentes. Tenemos que escribir… ¡Ay Dios mío!
237. Diana: Acá en *Qué concluyo*, es eso [Escribe en la columna *Qué concluyo* del primer paso: $\overline{KI} \cong IJ$. Luego, borra dicha congruencia de segmentos en la columna *Qué uso*.] ¿Qué sabemos? Que $K, I$ tiene la misma medida [Escribe en la columna *Qué sé*: $\overline{KI}$.]
238. Cristian: No.
239. Diana: ¿No? Está bien. [Borra en la columna *Qué sé*: $\overline{KI}$.]

| | | |
|---|---|---|
| 240. | Cristian: | Escriba esto [$KI$ tiene la misma medida que $IJ$.], sólo que escrito, escrito. |
| 241. | Diana: | Por eso, y ¿qué estoy haciendo? |
| 242. | Cristian: | Tienen la misma medida. |
| 243. | Diana: | Entonces, ¿qué escribo? |
| 244. | Cristian: | Pues $K,\ I$ es congruente… Claro. |
| 245. | Diana: | ¿Así? |
| 246. | Cristian: | Sí, porque así me acuerdo que así lo hacíamos, ¿no? el año pasado. Yo me acuerdo que era así [Escribe en una hoja: $\overline{K\iota}$ es con.] |
| 247. | Diana: | Yo la verdad… |
| 248. | Cristian: | Sí porque esto fue lo primero que vimos. |
| 249. | Diana: | Yo la verdad no sé de eso… No. Yo digo la verdad que escribamos así: $K, I$ tiene la misma medida con $I$ y $J$. $I, J$. |
| 250. | Cristian: | Entonces… Ah, sí. |
| 251. | Diana: | [Escribe en la columna *Qué se*: $\overline{KI}$ tiene la misma medida.] |
| 252. | Profesor J: | ¿De dónde sacan ustedes que tiene la misma medida? |
| 253. | Cristian: | De la gráfica. (Construcción hecha en Cabri.) |
| 254. | Diana: | Pues como este… |
| 255. | Profesor J: | Y, ¿qué están demostrando? |
| 256. | Diana: | Que son congruentes, porque… |
| 257. | Profesor J: | Miren la conjetura […]. Léanla, bien detenidamente. |
| 258. | Diana: | [Lee la conjetura.] Si la distancia de un punto a cada lado de un ángulo es igual entonces el punto está sobre la bisectriz del ángulo. Pero como todavía no podemos utilizar esa parte del *entonces* [Señala el consecuente de la conjetura.] porque eso lo que debemos concluir, al final. |
| 259. | Cristian: | Entonces, debemos saber esto [$\overline{KI}$ tiene la misma medida que $\overline{JI}$.] Sólo que lo debemos saber escribir [Realiza una marca indicando el inicio y el final del antecedente de la conjetura: *Si la distancia de un punto a cada lado de un ángulo es igual.*] |
| 260. | Diana: | Si la distancia de un punto a cada lado de un ángulo es igual… [Susurra.] Distancia de un punto a cada lado de un ángulo… |
| 261. | Cristian: | La distancia de un punto es igual al… |
| 262. | Diana: | Si la distancia de un punto a cada lado de un ángulo es igual […] |
| 263. | Cristian: | Pues, ¿por qué no…? |
| 264. | Diana: | $K,\ I$ tiene la misma medida a este segmento [$\overline{IJ}$] ¿no? $I,\ J$ tiene la misma medida a este segmento [$\overline{IK}$]. Pues, eso es lo que yo entiendo. |
| 265. | Cristian: | Y usted no se hace entender porque no le entendí igual. |
| 266. | Diana: | Dice: [Lee nuevamente la conjetura.] si la distancia de un punto a cada lado de un ángulo es igual, ¿cierto? |
| 267. | Cristian: | Sí. |
| 268. | Diana: | Entonces, [Señala en la gráfica de la situación de Don Gustavo.] la distancia de este punto [$I$] es igual a este [$K$] lado del ángulo, ¿cierto? Entonces el lado del ángulo se llama $C, Y$ [$\overrightarrow{CY}$]. ¿Si me entiende? Entonces, yo digo que sabríamos que $I$ tiene la misma distancia al lado $C, Y$ y también a $Y, A$, ¿no? |
| | | De [269 – 274] *Diana y Cristian susurran entre ellos.* |
| 269. | Cristian: | ¡Ah! No, en serio. ¿No se puede ver un ángulo? |
| 270. | Diana: | ¿Y qué? |
| 271. | Cristian: | Sí, le hacemos y sacamos un ángulo. |

272. Diana: ¿Éste? ¿Un ángulo acá? [Señala en la gráfica hecha por Cristian el $\angle CYA$.] Eso también ya lo sabemos […]


273. Cristian: […] estamos como conectados.
274. Diana: Entonces como que por ahí va la cosa.
275. Cristian: ¡Ah! O lo otro que le digo ¿qué es?
276. Diana: ¿Qué?
277. Cristian: Que el punto $I$, no, no. O ¿sí? ¿Acá no se puede hacer preguntas? ¿Cierto?
278. Profesor L: ¿Qué preguntas Cristian?
279. Cristian: ¿Que si éste es perpendicular? ¿Dónde está? Quiero saber de perpendicular. [Busca la herramienta en Cabri que permite verificar la perpendicularidad entre dos segmentos.] Éste. ¿Si este segmento…?
280. Diana: Sí es perpendicular.
281. Cristian: ¿… es perpendicular con éste?
282. Diana: Claro.
283. Cristian: La respuesta por favor. [Obtiene en la pantalla de Cabri que: Los objetos, rayo y segmento, son perpendiculares.]
284. Diana: Claro que son perpendiculares [$\overline{IK}$ y $\overrightarrow{YC}$] porque nosotros los hicimos con ésa [herramienta perpendicular en Cabri.]
285. Cristian: Entonces, el segmento $I, K$ es perpendicular con el segmento $Y, C$. [Señala con el lápiz los extremos de ambos segmentos.]
286. Diana: El segmento $I, K$. Espere lo hago… [En la gráfica de la situación de Don Gustavo, borra los segmentos y los traza de forma que se visualicen como perpendiculares a cada uno de los lados del $\angle CYA$.]




287. Cristian: Nooo, pero esas líneas […]
288. Profesor L: Recuerden eso que escribieron acá. [Construcción hecha en Cabri.].
289. Cristian: Sí.
290. Diana: Entonces que $I$… Entonces esa recta se llamaría $K$, ¿no? Gordo, ¿cómo fue que usted dijo?
291. Cristian: Que el segmento $I, K$ es congruente… es perpendicular al segmento $Y, C$.

| | | |
|---|---|---|
| 292. | Diana: | [Lee la definición de rectas perpendiculares.] Se intersecan y forman cuatro ángulos rectos. Forman dos. Entonces, sí. Entonces […] ¿ya vamos a cambiar [o borrar el primer paso]? |
| 293. | Cristian: | Sí. Toca cambiar. O, ¿no? No porque esto también lo sabemos [Señala el primer paso en la que saben que $\overline{KI}$ tiene la misma medida; usaron la definición de segmentos congruentes; y concluyeron que $\overline{KI} \cong \overline{IJ}$.] |
| 294. | Diana: | Pero, dejémoslo para después. |
| 295. | Cristian: | Sí. |
| 296. | Diana: | Entonces vamos a ver cuál es, ¿verdad? ¿Qué sabemos? |
| 297. | Cristian: | Que el segmento $I, K$ es perpendicular con el segmento $Y, C$ […] |
| 298. | Diana: | ¿Así? [Escribe en la columna *Qué sé* del segundo paso: $\overline{IK} \perp \overline{YC}$.] Entonces, ¿qué usamos? Pues la definición de rectas perpendiculares... |
| 299. | Cristian: | Pero esto [Señala la afirmación $\overline{IK} \perp \overline{YC}$.] toca escribirlo acá [En la columna *Qué concluyo* y no en la columna *Qué sé*.] |
| 300. | Diana: | ¿Qué? No porque vea. |
| 301. | Cristian: | Entonces, ¿qué concluimos? |
| 302. | Diana: | Espere y verá qué concluimos. [Continúa escribiendo en la columna de *Qué uso*: definición de rectas perpendiculares.] Entonces lo que concluimos es que… ¡Ay, acá no está! [Revisa en el listado.] |
| 303. | Cristian: | Ah, no. Lo que sé es… |
| 304. | Diana: | Punto medio. |
| 305. | Cristian: | Ay, no. Espérese. |
| 306. | Diana: | No. |
| 307. | Cristian: | Espere terminamos con ésta [Borra en la columna *Qué sé*: $\overline{IK} \perp \overline{YC}$.] |
| 308. | Diana: | Nooo, Gordo. |
| 309. | Cristian: | Ay, aguante… ¿Cómo va a sacar ahí un punto medio? Muéstreme, muéstreme. |
| 310. | Diana: | No, espérese. |
| 311. | Cristian: | Muéstreme cómo va a sacar un punto medio. |
| 312. | Diana: | Espérese que estoy pensando yo otra cosa. |
| 313. | Profesor L: | Una cosita en cuanto a la definición. Recuerden que en la definición [Definición de rectas perpendiculares.] puede ser escrita así: dos rectas son perpendiculares si se intersecan y determinan cuatro ángulos rectos. Y también es válida, encontrar la definición de esta manera: dos rectas son perpendiculares si se intersecan y determinan un ángulo recto. Que diga cuatro o que diga uno es correcto. ¿De acuerdo? Si van a utilizar esa definición. |
| 314. | Cristian: | Póngale cuidado. Venga le explico. Diana, yo le explico. |
| 315. | Diana: | Aja. |
| 316. | Cristian: | [En Cabri, nombra el ángulo como $C, Y, A$; el punto que equidista de los lados del $\angle CYA$ como $I$; los puntos $K$ y $J$ son los extremos de los segmentos, desde $I$ a cada lado de $\angle CYA$.] Póngale cuidado. Se supone que acá se forman dos ángulos rectos, ¿cierto? [Señala con el cursor el $\angle IKY$ y el $\angle IKC$.] |
| 317. | Diana: | ¿Dos ángulos rectos? |
| 318. | Cristian: | Sí señora. |
| 319. | Diana: | Ah, sí. Verdad. Sí. |
| 320. | Cristian: | Entonces, eso es lo que hay que escribir [en la columna *Qué sé* del segundo |

paso].

321. Diana: ¿Qué concluimos? ¿Dos ángulos rectos?

322. Cristian: Pues, no.

323. Diana: Ah, no.

324. Cristian: Lo que sé es que

325. Diana: $C, K, I$ [Señala los puntos respectivamente en la pantalla del computador.]

326. Cristian: No. Lo que sé es que

327. Diana: No Gordo.

328. Cristian: $I, K, C$ y $I, K, Y$

329. Diana: Y, ¿para qué borró?

330. Cristian: Porque quedó mal.

331. Diana: No quedo mal.

332. Cristian: Venga le explico, venga le explico. ¿Se va a dejar explicar?

333. Diana: Hágale.

334. Cristian: ¿Va a poner cuidado? Póngale cuidado. Sabemos que $I$, $K$ y $C$ son ángulos rectos. [Señala con el cursor, respectivamente los puntos.]

335. Diana: Aja. Es un ángulo recto.

336. Cristian: Toca comprobarlo. [Con la herramienta Medida de ángulo en Cabri, obtiene que la $m\angle IKC = 90$º.] Ay, no se estrese.

337. Diana: Y ahí sacamos que el otro también [que la $m\angle IKY = 90$º.]

338. Cristian: [De la misma manera, obtiene que la $m\angle IKY = 90$º.] Entonces, utilizamos esa definición y concluimos que […] $I, K$ y $I, C$ son congruentes [$\angle IKC \cong \angle IKY$.]

339. Diana: No. ¿Sabe lo que yo digo?

340. Cristian: No. Son… son, ¿cómo se llama eso? Se me olvidó.

341. Diana: ¿Sabe lo que yo creo? Que lo que habíamos escrito estaba bien. [Anteriormente, Diana escribió que $\overline{IK} \perp \overline{YC}$ en la columna *Qué sé*. Luego, Cristian borró dicha perpendicularidad, argumentando que éste debía estar escrita en la columna *Qué concluyo*.]

342. Cristian: No, porque eso es lo que concluimos cuando

343. Diana: No.

344. Cristian: Cuando se saca la definición [de rectas perpendiculares]

345. Diana: No. Espere. Espere. Y, ¿qué concluimos? Que los ángulos $C, K, I$ es congruente con $Y, K, I$ [$\angle CKI \cong \angle YKI$.] ¿Sí me entiende?

346. Cristian: ¿Segura?

347. Diana: Porque si sacamos dos ángulos rectos es porque

348. Cristian: No porque se tendría para sacar esa definición tendríamos… para sacar esa conclusión, tendríamos que sacar la definición de ángulos congruentes. Que también es otra opción.

349. Diana: ¡Ay, Dios mío! Eso está muy complicado.

350. Cristian: Pues si la vamos a hacer como esa, toca hacerla como yo le digo. Sabemos que $I, K, C$ y $I, K, Y$ son dos ángulos de 90º. Por lo tanto...

351. Diana: Utilizamos la definición de ángulos congruentes, y entonces, llegamos a la conclusión de que esos dos ángulos son congruentes.

352. Cristian: Si se quiere sacar por la definición de ángulos congruentes.

353. Diana: Ya vamos por otra hipótesis.

354. Cristian: No, pues tan abeja. Borre esto [Primer paso.] Pues también se puede sacar como yo le digo. Si el ángulo $I, K$ [Escribe en la columna *Qué sé* del

segundo paso: $IK$.]

355. Diana: ¿Ángulo?

356. Cristian: Sí. Ah, espere que se me olvidó el ángulo.

357. Diana Segmento, ¿no?

358. Cristian: […] El ángulo $I,\ K$ y $C$ sabemos que mide 90º [Borra de la columna *Qué sé* del segundo paso: $IK$. Luego escribe: $\angle IKC$ 90º.] ¿Cierto?

359. Diana: ¿Cuál ángulo? ¿Cuál está haciendo? Ah, sí, sí… ya vi cuál ángulo es.

360. Cristian: Y el ángulo $I$, $K$ y $Y$ también mide 90º [Continúa escribiendo en la columna *Qué sé*: $\angle IKY$ 90º.]

361. Diana: Aja.

362. Cristian: Puedo sacar esto [Señala la columna *Qué uso* del segundo paso: definición de rectas perpendiculares. ¿Cierto?

363. Diana: Y llegamos a que…

364. Cristian: ¿Qué dice la ésta? [Definición de rectas perpendiculares.]

365. Diana: Rectas perpendiculares: [Lee la definición de rectas perpendiculares.] dos rectas son perpendiculares si se intersecan y determinan un ángulo recto o cuatro ángulo rectos, o bueno.

366. Cristian: Por eso. En este caso son dos.

367. Diana: Aja.

368. Cristian: Entonces, podemos concluir que la recta $I$, $K$ [Escribe en la columna *Qué concluyo* del segundo paso: $\overline{IK}\ \perp$.] es

369. Diana: El segmento.

370. Cristian: El segmento $I$, $K$

371. Diana: Es perpendicular con

372. Cristian: Con el segmento

373. Diana: $I, J$

374. Cristian: $J, C$.

375. Diana: $I, J$.

376. Cristian: ¿Cómo va a ser $I$, $J$? [Escribe finalmente como conclusión del segundo paso: $\overline{IK} \perp \overline{YC}$.]

377. Diana: ¿$J$, $C$?

378. Cristian: Claro. Pues acá hay un triángulo… [Señala la pantalla de Cabri.] Ayyy, hay un triángulo.

379. Diana: ¿$J$, $C$?

380. Cristian: $J$, $C$. $I$, $K$ perpendicular…

381. Diana: ¿$J$, $C$ Gordo? Vea la $J$ aquí y la $C$ allá [Señala los puntos $J$ y $C$ en Cabri.]

382. Cristian: Aaaah, ya. Ay, $Y, C$.

383. Diana: Por eso […] $I, K$.

384. Cristian: Y $Y, C$ son perpendiculares. Eso es lo que ya concluí, […] concluimos. Y se puede sacar la misma conclusión con el de abajo [$\overline{IJ} \perp \overline{YA}$].

385. Diana: Ummm. Eso está más largo. Bueno.

386. Cristian: Ya llevamos, ya tenemos

387. Diana: Dos hipótesis.

388. Cristian: No porque ahí podemos sacar tres hipótesis, prácticamente.

389. Diana: Ahora, sacamos la otra.

390. Cristian: Que es la que usted dijo.

391. Diana: Entonces, el ángulo $C, K, I$ [Como tercer paso, escribe en la columna *Qué sé*: $\angle CKI$.] ¿Qué era lo que yo había dicho? Ya se me olvidó.

| | | |
|---|---|---|
| 392. | Cristian: | Sííí, que el ángulo $C, K, I$ y el ángulo $Y, K, I$ son… |
| 393. | Diana: | Nooo. Yo había dicho otra cosa muy diferente. Que yo había dicho que acá hay ángulos… ángulos… |
| 394. | Cristian: | La definición de ángulos congruentes. Cópiela que esa es la que vamos a hacer. La que vamos a usar. |
| 395. | Diana: | [Escribe definición de ángulos congruentes en la columna *Qué uso*, correspondiente a la tercera línea.] |
| 396. | Cristian: | Aaaah. Pues lo mismo que acá [Señala la columna *Qué sé* del segundo paso: $\angle IKC\quad 90º$, $\angle IKY\quad 90º$.] |
| 397. | Diana: | Que son ángulos rectos. Algo así había dicho. |
| 398. | Cristian: | Sí. |
| 399. | Diana: | Y, ¿cuál es? ¿$Y, K, I$? |
| 400. | Cristian: | Sí. |
| 401. | Diana | Son… [Escribe que $\angle CKI$ y $\angle YKI$.] |
| 402. | Cristian: | Ángulos rectos. |
| 403. | Diana: | Entonces, ¿por qué vamos a utilizar…? [Señala en la columna *Qué uso*, definición de ángulos congruentes.] |
| 404. | Cristian: | Pues para sacar… Ay, Dios mío. |
| 405. | Diana: | Ya, ya, ya. [Escribe $\angle CKI$ y $\angle YKI$ son ángulos rectos.] ¿Entonces? ¿Qué concluiríamos? Que el ángulo $C, K, I$ es congruente con $Y, K, I$ [Escribe $\angle CKI \cong \angle YKI$.] Tenemos tres hipótesis. Ahora, ponemos a Dayana que saque [elija] cuál es. |
| 406. | Cristian: | Ummm…. Me acaba de desconvencer. |
| 407. | Diana: | Ay, Dios mío. |
| 408. | Cristian: | O sea. Con base en esas hipótesis, tenemos que sacar más hipótesis para llegar a esta conclusión. |
| 409. | Profesor L: | ¿Cuál Cristian? |
| 410. | Cristian y Diana: | A la de: El punto está sobre la bisectriz del ángulo. |
| 411. | Cristian: | Que aún no la tenemos. |
| 412. | Diana: | Ajá. Hasta ahora estamos haciendo lo del *Sí*. |
| 413. | Cristian: | Pero, la podemos sacar. |
| 414. | Diana: | Entonces. ¿Cuál de esas hipótesis hacer? |
| 415. | Cristian: | La primera dice. |
| 416. | Diana: | [Lee el primer paso.] Segmento $K, I$ tiene la misma medida… y ¿qué? Y eso, ¿qué? No pues… |
| 417. | Cristian: | Ahí falta. |
| 418. | Diana: | Espere. Sí, ahí falta. [Lee.] El segmento $K, I$ tiene la misma medida que el segmento $I, J$. Era así, ¿no? |
| 419. | Cristian: | Sí. |
| 420. | Dayana: | Tengo una pregunta. |
| 421. | Cristian: | Pregunta. |
| 422. | Diana: | Pregunte. |
| 423. | Dayana: | Acá, ¿por qué segmentos congruentes? [Definición de segmentos congruentes] |
| 424. | Cristian: | Espere que termine de escribir. |
| 425. | Diana: | Aja. $K, I$ tiene la misma medida con |
| 426. | Cristian: | Uyyy, Dayana está participando. Dios mío. |

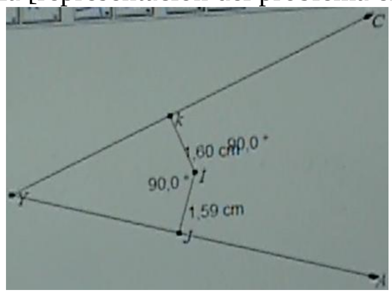
| | | |
|---|---|---|
| 427. | Dayana: | Es que se me hizo raro. Es que me quedó esa inquietud de por qué segmentos congruentes. |
| 428. | Diana: | Porque vea. Dice. |
| 429. | Cristian: | Porque dice que miden igual [en la definición de segmentos congruentes], aunque acá no [no hay una medida específica]. |
| 430. | Dayana: | Aquí dice [definición de] bisectriz de un ángulo. Y dice: [Lee.] es un rayo con extremo en el vértice del ángulo y demás puntos en el interior del ángulo tal que el rayo con los lados del ángulo forman dos ángulos congruentes [Hace énfasis en la palabra congruentes.] |
| 431. | Cristian: | Entonces, usted ¿qué concluye? |
| 432. | Dayana: | Pues que hay dos ángulos congruentes. Y la bisectriz |
| 433. | Cristian: | Pero es que aún no tenemos la bisectriz. |
| 434. | Diana: | Ajá. |
| 435. | Dayana: | Aaah. |
| 436. | Cristian: | Tenemos que sacar la bisectriz. |
| 437. | Diana: | Yo digo |
| 438. | Dayana: | Pero yo digo que ahí no debería ir… |
| 439. | Diana: | ¿Qué? |
| 440. | Cristian: | ¿Cierto que no? |
| 441. | Dayana: | Segmentos congruentes |
| 442. | Cristian: | Yo digo lo mismo. Porque ¿qué sacamos |
| 443. | Dayana: | Segmentos congruentes, ¿por qué? |
| 444. | Cristian: | ¿Qué sacamos con saber que estos dos segmentos son congruentes? |
| 445. | Dayana: | Aja. |
| 446. | Cristian: | Pues eso se sabe. A simple vista se sabe. |
| 447. | Diana: | Enton… |
| 448. | Cristian: | Pero tenemos que llegar es a esto. Y con base a esto [Antecedente de la conjetura.], vamos a llegar a esto [Consecuente de la conjetura.] |
| 449. | Dayana: | Aja. |
| 450. | Cristian: | Pues, uno que puede sacar más punticos [es decir, formular más pasos] |
| 451. | Diana: | Espere. Espere. Primero que todo […], ¿cuál de esas hipótesis vamos a manejar? Yo voy por la primera. |
| 452. | Cristian: | Pero, explíquenos por qué. |
| 453. | Dayana: | Aja. |
| 454. | Diana: | Por eso. Primero para… para eso. |
| 455. | Cristian: | Por eso. Diana, díganos por qué. |
| 456. | Diana: | Nooo. Por eso. ¿Cuál hipótesis vamos a coger? |
| 457. | Cristian: | Pues, usted dice que ésta [Señala en la hoja el primer paso.] ¿Por qué coge ésta? |
| 458. | Diana: | No, Gordo. Pero es que yo no soy la única que estoy acá. Pero, ¿cuál cogemos? |
| 459. | Cristian: | Por eso. Pero usted se va por ésta [Primer paso.] es por algo. Queremos que nos explique para nosotros de pronto seguirla o decirle, que no, que se vaya. |
| 460. | Profesor L: | O, ¿qué pregunta tienen?, si hay dudas. |
| 461. | Todos: | Ummm. |
| 462. | Diana: | Podemos hacer muchas hipótesis. |
| 463. | Cristian: | Demasiadas. Es que, ahí podemos sacar unas diez más […] Ah, mire [Señala la pantalla de Cabri.] Aquí hay otros ángulos congruentes. |

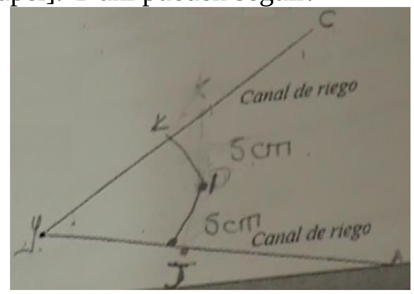
| | | |
|---|---|---|
| 464. | Profesor L: | ¿Cuáles? |
| 465. | Cristian: | Claro. |
| 466. | Diana: | Dos triángulos. |
| 467. | Cristian: | No. Dos ángulos congruentes aparte de los que usted dijo. |
| 468. | Diana: | Yo veo dos triángulos. |
| 469. | Cristian: | Yo veo dos ángulos.$I, J, A$. $I, K, C$. Son dos ángulos congruentes. |
| 470. | Diana: | Y yo… |
| 471. | Cristian: | Y ambos miden 90º. |
| 472. | Diana: | Y yo veo que son dos triángulos congruentes: $J, Y, I$ y $I, K, Y$. |
| 473. | Cristian: | No porque… es que Diana se está confundiendo con esta línea [$\overrightarrow{YI}$ bisectriz del $\angle CYA$.] |
| 474. | Profesor L: | Déjenla. Bueno, no sé. |
| 475. | Cristian: | No, porque esta línea aún no existe [Indica con el cursor la bisectriz del ángulo.] |
| 476. | Diana: | Ocúltela. |
| 477. | Cristian: | Esta línea aún no existe [Oculta la bisectriz del ángulo.] Nosotros hasta ahora vamos esto […] |
| 478. | Diana: | Ya no puedo más. Ya estoy cansada de pensar. |
| 479. | Profesor L: | De acuerdo con la conjetura […] y también con la imagen, con la representación que tienen en Cabri y los dibujitos que están haciendo en la hoja, están sacando varias afirmaciones. ¿De acuerdo? La justificación se compone de varias afirmaciones. Nosotros [Profesor L y Profesor J] vamos a empezar diciendo cuál es la primera [afirmación] Y la primera, y es cierta, es la que ustedes tienen acá, ¿de acuerdo? [*Qué sé*: $\overline{KI}$ tiene la misma medida con $\overline{IJ}$; *Qué uso*: definición de segmentos congruentes; *Que concluyo*: $\overline{KI} \cong \overline{IJ}$.] ¿De acuerdo? [*Aplauso de Diana como señal de optimismo.*] Pero, justifíquenme por qué es la correcta. Claro. ¿Por qué la escribieron y por qué es correcta? |
| 480. | Cristian: | Justifique. La que aplaude. Justifique. Porque nosotros le estábamos pidiendo la justificación y usted no nos la quiso dar. |
| 481. | Diana: | Pues yo decía era por intuición. |
| 482. | Cristian: | No porque usted debe decir un por qué, una razón, porque nosotros no vamos a decir: "por intuición no mire, ahí hay es una bisectriz" intuicitivamente" [intuitivamente] |
| 483. | Dayana: | "Intuicitivamente" [Risas.] Sí. |
| 484. | Profesor L: | […] pero por qué escribiste como… esa es la primera afirmación de la justificación para esa conjetura. ¿Por qué planteaste esta primera afirmación? |
| 485. | Diana: | No lo sé. |
| 486. | Cristian: | Ummm. |
| 487. | Profesor L: | ¿No sabes? |
| 488. | Cristian: | Usted debe saber. |
| 489. | Dayana: | Es usted es muy áspera. |
| 490. | Profesor L: | Uno tiene en cuenta |
| 491. | Cristian: | Algo |
| 492. | Profesor L: | Inicialmente la conjetura. ¿Qué dice la conjetura? Y que pudiste plantear esto. ¿Qué paso Cristian? |
| 493. | Cristian: | No, hágale. |

| | | |
|---|---|---|
| 494. | Diana: | Pues yo sé por lo que debían tener la misma distancia a cada lado del ángulo, entonces pues sí porque estos son los segmentos [$\overline{KI}$ e $\overline{IJ}$] |
| 495. | Profesor L: | Aja. |
| 496. | Diana: | Entonces por eso. |
| 497. | Profesor L: | Bien. Entonces estás utilizando el antecedente de la condicional. Esto es lo que sabes, lo dijeron acá [$\overline{KI}$ tiene la misma medida con $\overline{IJ}$.] Usaron la definición de segmentos congruentes y concluyen una congruencia de segmentos [$\overline{KI} \cong \overline{IJ}$.]. Esa es la primera afirmación, de una serie de afirmaciones que nos hacen falta. Entonces, ya tenemos la primera. |
| 498. | Diana: | [Diana comienza la demostración de nuevo y reescribe la primera afirmación en el esquema a tres columnas.] |
| 499. | Cristian: | Sí Diana. Nosotros pensamos igual que usted. Eso se escucha hasta acá [Susurra.] |
| 500. | Diana: | Siga así Gordo. Ya di la iniciativa. Imposible. |
| 501. | Profesor L: | Bueno, si es la primera |
| 502. | Cristian: | Tan chistosa copió lo mismo de arriba. |
| 503. | Diana: | Por eso. Es que era eso. |
| 504. | Profesor L: | De acá arrancamos, por fa, así que es la primera afirmación. ¿De acuerdo? Pues, enumerémosla. |
| 505. | Dayana: | ¿Qué dice aquí? ¿I, j? |
| 506. | Diana: | Aja. |
| 507. | Dayana: | ¿No es con mayúscula? |
| 508. | Diana: | Por eso, es que así es mi jota. Es que mi jota es rara [Borra y escribe $\overline{IJ}$.] |
| 509. | Cristian: | Ja, ja, ja. |
| 510. | Profesor L: | […] ¿a dónde es que queremos finalmente llegar? |
| 511. | Cristian: | A una bisectriz. |
| 512. | Profesor L: | A una bisectriz, pues… |
| 513. | Dayana: | A la bisectriz del ángulo. |
| 514. | Profesor L: | … esas dos [afirmaciones] están bien en una parte pero hay que acomodarlas [Cambiar el orden.] Hay que acomodarlas y ¿de acuerdo con qué? Con lo que ustedes trabajaron. |
| 515. | Cristian: | Hay una frecuencia, una… ¿Cómo se llama esto [Señala la definición de rectas perpendiculares.] |
| 516. | Diana: | ¿Una recta perpendicular? |
| 517. | Cristian: | No. |
| 518. | Diana: | ¿Una definición? |
| 519. | Cristian: | La definición de ángulos congruentes. Pues en la bisectriz estoy viendo uno [ángulo] y basado en esto [Señala la conclusión del primer paso de la demostración: $\overline{KI} \cong \overline{IJ}$.] ¡Ah, no! Puedo sacar otra, otra definición de segmentos congruentes [Señala la columna Qué uso del primer paso de la demostración.]… |
| 520. | Profesor L: | ¿Para…? |
| 521. | Cristian: | Para llegar a una definición de ángulos congruentes. |
| 522. | Profesor L: | Trata otra definición de ángulos congruentes. Así como hay definición de segmentos congruentes también hay definición de ángulos congruentes. |
| 523. | Cristian: | Aaaah… |
| 524. | Profesor L: | Piensen en que todas estas afirmaciones deben servir para justificar finalmente lo que aparece en la conjetura. |

525. Cristian: Es que no sé.

526. Profesor L: Diana. Apóyate un poco más, si no puedes ver muy bien el dibujito acá [construcción hecha en el computador] apóyate en el dibujito que tú hiciste allá [representación del problema en papel]. Y ahí pueden seguir.




527. Cristian: Ummm, ¿un segmento…?

528. Diana: ¿Será que no se puede esta [Segunda afirmación que el grupo formuló. *Qué sé*: $\angle IKC$ 90º$\angle IKY$ 90º; *Qué uso*: definición de rectas perpendiculares; *Qué concluyo*: $\overline{IK} \perp \overline{YC}$.]?

529. Cristian: Pues esta sí, póngale cuidado [Empieza a escribir: $\angle$. Pero es interrumpido por Diana.]

530. Diana: Pues eso es lo que vemos ahí, ¿no? Espere, espere Gordo.

531. Cristian: Igualmente, es Dayana la que va a escribir.

532. Diana: ¿Ya copió?

533. Cristian: No, porque espere.

534. Diana: [Borra lo escrito por Cristian.]

535. Cristian: Pero, yo no voy a escribir lo de arriba [Segunda o tercera afirmación que el grupo formuló.]

536. Diana: Entonces, dicte.

537. Cristian: Yo voy a escribir que el ángulo $I, J, Y$ es congruente con el ángulo $I, K, Y$.

538. Diana: Escribe [Segunda afirmación. *Qué sé*: $\angle IJY \cong \angle IKY$]. Aja. ¿Cuál? $I, J, Y\ldots$

539. Cristian: No, pero lo iba a escribir así [Señala la columna *Qué sé* de la tercera afirmación: $\angle CKI\ y\ \angle YKI$ son ángulos rectos.]

540. Diana: ¿Son ángulos rectos? [Borra y escribe como segunda afirmación. *Qué sé*: $\angle IJY$ y $\angle IKY$ son ángulos rectos.] ¿Qué utilizamos? ¿Definición de ángulos congruentes?

541. Cristian: Aja.

542. Diana: [Continúa escribiendo en la segunda afirmación *Qué uso:* Definición de ángulos congruentes.] Y concluimos que esos dos [ángulos] son congruentes, ¿cierto? [Escribe en *Qué concluyo:*$\angle$. Ahora ella es interrumpida por Cristian.]

543. Cristian: ¿Por qué no sacamos un triángulo trazando un segmento?

544. Diana: [Se detiene en escribir.]

545. Cristian: Hola. Es que usted no pone cuidado.

546. Diana: ¿Sacamos un triángulo rectángulo?

547. Profesor L: ¿Cómo pueden afirmar que esos dos ángulos [$\angle IJY$ y $\angle IKY$] son rectos? ¿Por qué lo pueden afirmar?

548. Cristian: Midiéndolos

549. Diana: Midiéndolos. Ah, ya los medimos.

550. Cristian: Claro. Mire la medida acá [Señala en Cabri las medidas de los dos

ángulos.]

| | | |
|---|---|---|
| 551. | Profesor L: | Bueno, y ¿por qué son… ¿hicieron la medición con [una herramienta de] Cabri? |
| 552. | Diana: | Gordo, nosotros medimos fue otros [ángulos]. |
| 553. | Cristian: | ¿Cuáles? |
| 554. | Diana: | Nosotros medimos estos de acá arriba [Señala con el lápiz el $\angle IKC$ y el $\angle IKY$ en la construcción hecha en Cabri.] Y usted está diciendo los de acá abajo [$\angle IJA$ y el $\angle IJY$] |
| 555. | Cristian: | Pero, si esto [$m\angle IJY = 90º$ y $m\angle IKY = 90º$] mide esto mismo acá [Señala los ángulos $\angle IJA$ y $\angle IJY$.] |
| 556. | Diana: | Está bien. |
| 557. | Cristian: | Se puede sacar por los de arriba también son… |
| 558. | Profesor L: | ¿Son qué? |
| 559. | Cristian: | Son congruentes, ¿no? |
| 560. | Diana: | Son [ángulos] rectos. |
| 561. | Cristian: | Son [ángulos] rectos. |
| 562. | Profesor L: | Son rectos. Pero, ¿cómo saben que son rectos? |
| 563. | Diana: | Porque tienen la medida de 90º. |
| 564. | Profesor L: | ¿Ustedes hicieron la construcción para que [la medida del ángulo] les quedara de 90º? |
| 565. | Diana: | ¿Cómo? |
| 566. | Profesor L: | Recuerden la construcción. |
| 567. | Diana: | Sí. Perpendiculares. |
| 568. | Profesor L: | Y, ¿quiénes son perpendiculares? |
| 569. | Dayana: | Las rectas. |
| 570. | Cristian: | Los ángulos. |
| 571. | Diana: | No. Es perpendicular [Señala en la pantalla de Cabri.] este segmento [$\overline{IK}$] con esta recta [$\overrightarrow{YC}$] y este segmento [$\overline{IJ}$] con esta recta [$\overrightarrow{YA}$]. |
| 572. | Profesor J: | ¿Por qué perpendicular? ¿Por qué tiene que ser perpendicular? [Enfatiza en la palabra “tiene”.] |
| 573. | Diana: | Porque… sí. |
| 574. | Cristian: | Porque sí [Risas.] Porque tienen dos… |
| 575. | Diana: | Porque se intersecan y forman ángulos rectos. ¿Sí ve? Por eso, sí. |
| 576. | Cristian: | Sí, acá dice. |
| 577. | Profesor L: | ¿Dónde dice? |
| 578. | Diana: | Dice rectas perpendiculares [Comienza a leer la definición pero es interrumpida por el Profesor J.] |
| 579. | Profesor J: | Sí, pero ¿por qué tienen que ser perpendicular? ¿Por qué? |
| 580. | Diana: | Porque… |
| 581. | Profesor J: | ¿No había podido ser otro ángulo? ¿Tiene que ser perpendicular? ¿De dónde nace la idea de que sean perpendiculares? |
| 582. | Cristian: | Ah, sí ve que tienen |
| 583. | Diana: | Un triángulo rectángulo |
| 584. | Cristian: | Exacto. |
| 585. | Profesor J: | Pero esperen. No brinquen hasta por allá [Justifiquen la perpendicularidad de los dos segmentos con los rayos.] ¿Por qué tienen que ser perpendicular? Y de ahí para allá, ustedes construyen lo que quieren construir. Pero, ¿por qué [enfatiza] tienen que ser perpendicular? |

| | | |
|---|---|---|
| 586. | Cristian: | Porque si es perpendicular podemos sacar más de un puntito. |
| 587. | Profesor L: | Y ese puntico ¿cómo era con respecto |
| 588. | Cristian: | Pues eso es Trigo [Trigonometría] |
| 589. | Profesor J: | Espere. No brinquen mi pregunta. Es que esa pregunta que les estoy haciendo es súper importante. ¿De dónde nace la idea que sea perpendicular la vaina esa [$\overline{IK} \perp \overrightarrow{YC}$ y $\overline{IJ} \perp \overrightarrow{YA}$] |
| 590. | Cristian: | ¿De dónde? Diana usted es muy inteligente. Usted sacó el inicio. |
| 591. | Diana: | Por eso. Ya no puedo seguir. |
| 592. | Profesor J: | Ustedes hicieron la construcción en Cabri. La repasaron ahorita acá y de ahí sacaron que tienen que ser perpendicular pero es por algo, no […] nace perpendicular. |
| 593. | Cristian: | Tiene que ser perpendicular porque … |
| 594. | Diana: | Para sacar la bisectriz |
| 595. | Cristian: | Esa bobada. |
| 596. | Diana: | [Risas.] |
| 597. | Profesor L: | ¿Por qué Cristian? |
| 598. | Cristian: | Porque para, que digamos, cómo le explico. Tiene que ser exactamente perpendicular para que quede, digamos, ¿cómo se dice eso? Para que quede… |
| 599. | Profesor J: | No piensen para qué, sino que piensen por qué tienen que ser perpendiculares. ¿Por qué? |
| 600. | Cristian: | Porque o si no el punto [$I$] no estaría en la mitad del ángulo. La bisectriz no estaría en la mitad del ángulo del punto. No pasaría por la mitad. |
| 601. | Diana: | No porque si no estuviera ese punto [I] se podría sacar la bisectriz, y ¿qué? Entonces ese punto no. Eso no. |
| 602. | Cristian: | Ah, bueno. Entonces usted sabe. Dice que no. |
| 603. | Profesor L: | ¿Por qué se localizó ese punto [$I$] ahí? |
| 604. | Cristian: | Por dos perpendiculares. Se localizó el |
| 605. | Diana: | No |
| 606. | Cristian: | ¿Cómo que no? |
| 607. | Diana: | Sí. Ayyy. |
| 608. | Cristian: | Ya me está ofendiendo. |
| 609. | Profesor J: | Pero, ¿por qué perpendiculares? [$\overline{IK} \perp \overrightarrow{YC}$ y $\overline{IJ} \perp \overrightarrow{YA}$] |
| 610. | Cristian: | Ayyy, porque el problema lo pide. |
| 611. | Profesor J: | Sí. ¿Dónde lo dice? |
| 612. | Cristian: | Aquí. Mire [Toma la hoja donde se encuentra la situación de la finca de Don Gustavo.] |
| 613. | Profesor J: | Listo. Vamos al problema. |
| 614. | Diana: | No invente Gordo |
| 615. | Profesor J: | Léase el problema de nuevo. |
| 616. | Diana: | Ya [se equivocó]. |
| 617. | Profesor J: | Nooo, pero sí, ahí va bien. |
| 618. | Cristian: [Risas] | Ah, voy bien. |
| 619. | Profesor J: | Lea el problema de nuevo. |
| 620. | Diana: | [Susurra.] |
| 621. | Cristian: | […] lea usted […] |
| 622. | Diana: | Ah, bueno. |

623. Cristian: Ya me está ofendiendo.
624. Diana: [Lee el enunciado del problema de Don Gustavo] Uno de los terrenos en la finca de Don Gustavo tiene forma de cuña, bordeado por dos canales. Él quiere sembrar matas de arroz de tal forma que la distancia a cada canal sea la misma.
625. Cristian: Aaaah. Sí ve que no decía [Risas.]
626. Profesor L: ¿Qué característica tiene ese punto [$I$]?
627. Cristian: Que está en la mitad del ángulo.
628. Dayana: Que está a la misma medida de las dos
629. Cristian: De las dos lí [líneas], de los dos rayos.
630. Profesor L: ¿De los dos rayos o de los lados del ángulo? […]
631. Profesor L: ¿$I, K$ [$IK$] qué es con respecto a $Y, C$ [$YC$]?
632. Diana: Perpendicular.
633. Profesor L: No. Yo estoy preguntando qué es y no cómo son.
634. Cristian: ¿Qué es?
635. Diana: ¿Qué es?
636. Profesor L: ¿Qué es $I, K$ [$\overline{IK}$]…? Incluso tomaron la medida ¿Qué es $I, K$ [$\overline{IK}$] con respecto a ese lado del ángulo [$\overrightarrow{YC}$]?
637. Diana: [Susurra]
638. Profesor L: ¿Son qué Diana?
639. Diana: Nooo…
640. Cristian: Diana.
641. Diana: Aaaa…
642. Cristian: Ay, mami piensa.
643. Diana: Hay, juepuerca.
644. Cristian: ¿Ya? $I, K$ [$\overline{IK}$]
645. Profesor L: Sí.
646. Cristian: Y $J, C$.
647. Dayana: ¿Cuál J?
648. Diana: ¿Cuál J?
649. Cristian: Ayyy, entonces cambiemos la letrica
650. Diana: […] no.
651. Profesor J: ¿Yo encuentro el problema sabe en dónde?
652. Cristian: ¿En dónde?
653. Profesor J: Les voy a ayudar en lo que sigue.
[Risas.]
654. Profesor J: Les voy a ayudar. Vuelva y léanse el problema.
655. Cristian: [Susurra]
656. Diana: [Lee el enunciado del problema de Don Gustavo] Uno de los terrenos en la finca de Don Gustavo tiene forma de cuña, bordeado por dos canales. Él quiere sembrar matas de arroz de tal forma que la distancia de cada mata a cada canal sea la misma.
657. Profesor J: Okey. Ahora, lea aquí el antecedente de esta conjetura.
658. Diana: [Lee el antecedente de la conjetura.] Si la distancia de un punto a cada lado de un ángulo es igual entonces
659. Profesor J: Listo. Fíjense que allá [enunciado del problema] hay una palabrita que acá [antecedente de la conjetura] se repite y que ustedes están le están cambiando el nombre.

| | | |
|---|---|---|
| 660. | Diana: | La distancia del… |
| 661. | Profesor J: | Okey. ¿Será que ese “distancia” es un elemento, es un hecho geométrico, es un elemento geométrico? |
| 662. | Diana: | Yo creo, pero… |
| 663. | Profesor J: | Búsquenlo acá. [Listado de hechos geométricos y definiciones.] Tal vez lo hayan trabajado. |
| 664. | Diana: | No creo. |
| 665. | Cristian: | Ay, ¡qué fastidio! |
| 666. | Diana: | [Revisa el listado de hechos geométricos y definiciones.] Sí. [Lee.] Distancia de un punto a una recta. Lo que yo les dije desde un principio. La distancia de un |
| 667. | Cristian: | ¡Qué mentirosa! ¡Si lo dije yo! |
| 668. | Diana: | [Lee la definición en el listado de definiciones y HG.] La distancia de un punto $P$ a una recta $m$ es la longitud del segmento perpendicular desde $P$ hasta $m$. Entonces… |
| | [Risas.] | |
| 669. | Profesor J: | Entonces, ¿de dónde sacan que es perpendicular [los segmentos $\overline{IK}$ e $\overline{IJ}$ con los lados del $\angle CYA$]? |
| 670. | Cristian: | De que el segmento |
| 671. | Diana: | Pues de la distancia [Risas.] |
| 672. | Profesor J: | Ya les ayudé. |
| 673. | Cristian: | Ayyy, vamos bien. |
| | [Risas y Susurros.] | |
| 674. | Cristian: | Ya empezamos. |
| 675. | Diana: | ¿Qué? Yo no sé. Yo voy a escribir eso. |
| 676. | Profesor L: | ¿Qué van a escribir? |
| 677. | Diana: | La definición de distancia de un punto a una recta [Escribe en la columna *Qué uso* de la segunda afirmación: Definición Distancia de un punto a una recta.] Gordo, ahora concluya. |
| 678. | Cristian: | No, pero dígame usted por qué escribió esa definición. Pues sí, necesito saber para concluir. Si el ángulo… ¿qué dice ahí? ¿Eso es una “ese” [S]? |
| 679. | Diana: | $I, J, Y$ |
| 680. | Cristian: | Si el ángulo $I, J, Y$ y el ángulo $I, K, I$ [$\angle IKY$] son ángulos rectos. No son ángulos rectos. No sabemos si son ángulos rectos. |
| 681. | Diana: | Tienen la misma distancia |
| 682. | Cristian: | Tiene que borrar. ¿No? En serio. |
| 683. | Diana: | Ay, hágale usted. Ya no puedo más. |
| 684. | Cristian: | No porque usted fue la que dijo que era la que quería escribir. |
| 685. | Dayana: | [Toma la hoja y borra en la columna *Qué uso* de la segunda afirmación: Definición Distancia de un punto a una recta.] |
| 686. | Cristian: | ¿Por qué borró eso? Tenía que borrar… [Señala en la columna *Qué sé* de la segunda afirmación: $\angle IJY$ y $\angle IKY$ son ángulos rectos.] ¡Ayyy Dayana! |
| | [Risas.] | |
| 687. | Diana: | ¿Si ve? Cuando participa vea lo que pasa. |
| 688. | Cristian: | Lo que borró. Tenía que borrar son lo de ángulos rectos. Dayana, no. |
| 689. | Dayana: | [Susurra] |
| 690. | Cristian: | Usted tampoco pone cuidado. |
| 691. | Profesor L: | Me gusta que escriba Diana. Deja que Diana escriba. |

692. Diana: ¡Qué pecado!
693. Cristian: Ay, Dayana. No te dejan hacer nada.
694. Diana: [Escribe nuevamente en la columna *Qué uso* de la segunda afirmación: Definición Distancia de un punto a una recta.] Listo. Gordo, entonces ¿usted qué pensaría que se utilizaría en *Qué sé*?
695. Profesor L: Si tú utilizas ese *Qué uso* entonces ¿qué puedes concluir?
696. Cristian: Hay que utilizar un *Qué sé* antes de *Qué uso*. Hágale. Al Profesor L le gusta que escriba usted.
697. Diana: Que, ¿qué podría concluir?
698. Cristian: ¿Cómo así? Pero primero hay que tener un *Qué sé*, ¿no?
699. Diana: Ahí es donde se sabe de por qué es perpendicular, pero no sé. La distancia de un punto $P$ a una recta $m$ [Lee la definición de distancia de un punto a una recta.] Ah, entonces es esto Gordo. La distancia, digamos de un punto $P$ a una recta $m$, ¿no? [En la gráfica de la situación de Don Gustavo, retiñe el punto $I$ que tiene igual distancia a cada uno de los lados del $\angle CYA$.] Pues yo digo, es la longitud del segmento perpendicular [Continúa leyendo la definición.] O sea, la medida del segmento, ¿no? Longitud del segmento. Desde $P$ hasta $m$. O sea la medida de este segmento [Señala el $\overline{KI}$.] Pues eso es lo que yo
700. Cristian: Escríbalo.
701. Diana: Pero, ¿qué escribo? Le estoy diciendo eso.
702. Cristian: Pues si usted no entiende, usted no se hace entender. Nooo, en serio.
703. Diana: Más claro no puedo.
704. Profesor L: Pero, ¿por qué para Cristian no es claro?
705. Cristian: No le entiendo. No, no sé. No entiendo.
706. Diana: Pues vea. Que es que acá dice: La distancia de un punto $P$ [Lee la definición distancia de un punto a una recta.] entonces acá se llama punto $I$ [Señala en la gráfica de la situación de Don Gustavo.] Entonces es como si se llamara el $P$. A una recta $m$ [Continúa leyendo la definición.] esta es la recta [Señala el $\overrightarrow{YC}$], digamos que es la $m$. Entonces es la longitud del segmento perpendicular [Sigue leyendo.] O sea la medida del segmento [$\overline{IK}$] desde $P$ hasta $m$. Eso es lo que están diciendo.
707. Cristian: Entonces sabemos que… el segmento
708. Diana: Sabemos la medida del segmento, ¿no? Sí sabemos cuál es la medida del segmento porque si eso es lo que nos dicen acá. Es la longitud del segmento. Pues
709. Cristian: ¿Qué concluyo?
710. Diana: ¿Qué sabemos?
711. Cristian: Ah, ¿qué sabemos?
712. Diana: Entonces sabemos que… la longitud de $KI$ es 5 cm [Señala la gráfica de la situación de Don Gustavo.] No.
713. Cristian: No porque puede ser, puede ser 5, pueden ser 20, pueden ser 100 cm, pueden ser…
714. Diana: Juepuerca estamos como…
715. Profesor L: [Interviene para aclarar aspectos relacionados con la notación que se emplea para la medida de los segmentos.] Cuando uno tiene escrito así… Déjenme ver el dibujito que tienen acá [gráfica de la situación de Don Gustavo] $I, K$ con la rayita horizontal arriba, ¿qué indica esa notación?

| | | |
|---|---|---|
| | | [Escribe sobre una hoja blanca $\overline{IK}$.] |
| 716. | Diana: | Segmento $I, K$. |
| 717. | Profesor L: | Segmento $I, K$. Pero si lo escribimos de esta manera solamente [Escribe $IK$]. |
| 718. | Cristian: | $I, K$. |
| 719. | Diana: | $I, K$. |
| 720. | Profesor L: | Pero… |
| 721. | Diana: | Pero, ¿qué? |
| 722. | Profesor L: | ¿Qué significa esta notación [$IK$], así como está? |
| 723. | Cristian: | Punto $I$, punto $K$. |
| 724. | Profesor L: | No, no. Así como está. Completo, completo. |
| 725. | Diana: | No sé. |
| 726. | Profesor L: | Este es el segmento [señala $\overline{IK}$]. Así como está escrito es la medida del segmento [encierra en un óvalo $IK$]. |
| 727. | Diana: | ¿Sííí? |
| 728. | Profesor L: | Sí. |
| 729. | Cristian: | Eso usted nunca nos lo enseñó. |
| 730. | Diana y Dayana: | Ajá. |
| 731. | Profesor L: | Bueno, eso lo podemos tomar acá. Lo podemos tomar acá [columna *Qué sé* de la segunda afirmación]. |
| 732. | Diana: | Cómo quería que llegáramos a eso. |
| 733. | Profesor L: | Revisemos unas cositas que sí nos podemos acordar. Por ejemplo, ¿cómo nombrábamos, cómo decíamos, por ejemplo… digamos ¿cómo se llama el ángulo allá? $C, K$ ¿qué? |
| 734. | Diana: | Ángulo |
| 735. | Profesor L: | Ángulo $C, Y, J$ [Escribe $\angle CYJ$.] |
| 736. | Diana: | $C, Y, A$ |
| 737. | Profesor L: | $C, Y, A$. ¿Cómo se…? Aquí estamos hablando de la figura geométrica y ¿cómo se habla respecto a la medida de ese ángulo? |
| 738. | Diana: | Ah pues entonces se colocaría ¿$C, Y, A$? |
| 739. | Profesor L: | No. |
| 740. | Diana: | No. |
| 741. | Cristian: | Porque $C, Y, A$. |
| 742. | Profesor L: | Nosotros decíamos, la medida [escribe $m\angle CYJ$]. La medida del ángulo. |
| 743. | Diana: | Aja. |
| 744. | Profesor L: | Mientras que, esto es con ángulos, miremos un momento en cuanto a los segmentos. Si está con la rayita arriba estamos refiriéndonos a la figura. Si tiene… no tiene la rayita ahí encima estamos hablando de la longitud de ese segmento. ¿Listo? Eso para aclarar un poco. Entonces tengan en cuenta eso en lo que están discutiendo. |
| 745. | Diana: | Entonces, ya se me olvidó la idea. |
| 746. | Profesor L: | ¡Ah! Ustedes estaban hablando de la figura [gráfica de la situación de Don Gustavo]. |
| 747. | Diana: | Ah, verdad. Yo ya terminé [Explicación de por qué emplea la definición de distancia de un punto a una recta en la segunda afirmación.] |
| 748. | Cristian: | Si $IK$… ahí. Pues es la medida, ¿no? $IK$ |
| 749. | Diana: | $IK$… y ¿qué? |

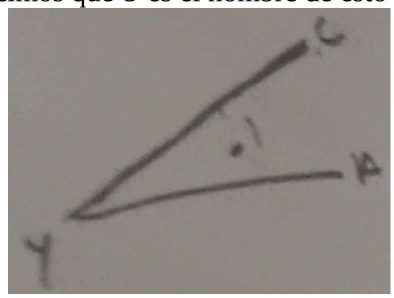
| | | |
|---|---|---|
| 750. | Cristian: | $IK$ |
| 751. | Diana: | Esto significa medida de $IK$ |
| 752. | Cristian: | Si la medida de $IK$ |
| 753. | Diana: | Pero ¿cuál es la medida? |
| 754. | Cristian: | Aaah, pues la medida es cualquiera. |
| 755. | Diana: | Entonces sería $IK$. ¿Y qué? |
| 756. | Cristian: | Sí. |
| 757. | Diana: | Y ¿qué más podríamos escribir en *Qué sé*? |
| 758. | Cristian: | O sea que la distancia es $IK$, ¿cierto? La medida. |
| 759. | Diana: | Aja. |
| 760. | Cristian: | La medida de un segmento perpendicular. Ah, yo no sé. No, es que es serio me está doliendo la barriga, ya. No, fuera de chiste. Ya en serio. ¡No! Es en serio ya me está doliendo la barriga. |
| 761. | Profesor L: | ¿Qué es $IK$? |
| 762. | Cristian y Diana: | La medida. |
| 763. | Profesor L: | ¿De qué? |
| 764. | Diana: | Del segmento $IK$. Pues sí la medida de la longitud… ay Dios mío. |
| 765. | Profesor L: | Pero miren… |
| 766. | Cristian: | La distancia que hay de la... |
| 767. | Diana: | Del punto a la recta. |
| 768. | Cristian: | Del punto a la línea. |
| 769. | Profesor L: | Aaah, entonces… |
| 770. | Cristian: | Ya eso es. Escriba $I, K\ YA$. |
| 771. | Diana: | $I, K\ YA$ ¿Qué? |
| 772. | Cristian: | $I, K\ YA$ |
| 773. | Dayana: | $I, K\ YA$ [Risas.] |
| 774. | Diana: | ¿$I, K$? [Escribe en la columna *Qué sé* de la segunda afirmación: $IK$.] |
| 775. | Cristian: | $YA$ |
| 776. | Diana: | Nooo. |
| 777. | Cristian: | Porque la recta se llama $K$, y si se supone que |
| 778. | Diana: | Y por qué no escribimos |
| 779. | Cristian: | Es la distancia de |
| 780. | Diana: | $I, K$ distancia del punto a la recta [Escribe en la columna *Qué sé* de la segunda afirmación.] |
| 781. | Cristian: | Complicar las cosas porque eso es lo que significa la figura. |
| 782. | Diana: | ¿Qué concluimos? |
| 783. | Cristian: | Concluimos que $I$ es perpendicular a $K$. Eso concluimos. Que el segmento… no pero es que acá también usted [se equivocó]. Porque no es $I, K$ [En la columna *Qué sé* de la segunda afirmación, cambia $IK$ por $IC$.] El punto se llama $K$. La línea se llama $C$. |
| 784. | Diana: | ¿$I, C$? |
| 785. | Cristian: | La recta se llama $C$, la lo… nosotros colocamos fue el punto llamado $K$. |
| 786. | Diana: | Ummm, no. |
| 787. | Cristian: | Sí. |
| 788. | Diana: | Espérese. Es $I, K$. |
| 789. | Cristian: | ¿Y por qué $I, K$? |
| 790. | Diana: | Porque vea. ¿Cómo va a colocar $I, C$? [Mueve el computador en el |

escritorio para explicar mostrar a Cristian la construcción hecha en Cabri.]

791. Cristian: No porque no se acuerda que nosotros dibujamos fue esto, el ángulo [$\angle CYA$] y el punto [$I$], ¿cierto?

792. Diana: Por eso.

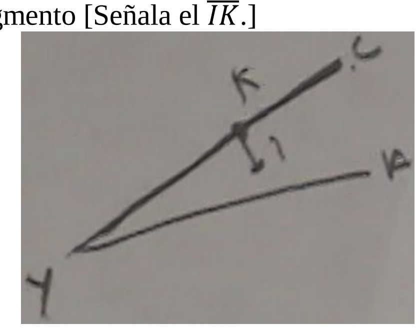
793. Cristian: Y nombramos: el punto $I$, la $C$ [punto], acá la $A$ y acá la $Y$. Nosotros aún no tenemos la $K$ [punto] [Dibuja en una hoja de papel el $\angle CYA$ y el punto $I$ en el interior.] Deducimos que $C$ es el nombre de esto [Retiñe el $\overrightarrow{YC}$.]




794. Profesor L: ¿Solamente $C$?

795. Cristian: Y $Y$, ¿no? Pues un segmento, ¿cierto? Ahí voy bien. Pues yo creo. Entonces sería que $I, C$

796. Diana: No porque tendríamos que el punto que llega acá, que toca con la recta, ése fue el que nombramos $K$ [Sobre el dibujo que Cristian hizo, ubica el punto $K$ sobre el $\overrightarrow{YC}$ y traza el $\overline{IK}$.] Ese fue el punto que nombramos $K$. Por eso se llama así ese segmento [Señala el $\overline{IK}$.]




797. Cristian: Aaah, ¡Breve! ¡Ah sí! Continúe. Ayyy

798. Diana: [En la columna *Qué sé* de la segunda afirmación, cambia $IC$ por $IK$.] Y ahora, ¿qué concluimos?

799. Cristian: Ay, yo no sé [susurra]. Tenemos que llegar a que el punto $P$ es perpendicular con el segmento este [señala el $\overline{IK}$ que Diana trazó en la figura de 789.] Eso es lo que tenemos que llegar

800. Diana: ¿Qué?

801. Cristian: Pues según, si utilizamos esta definición tenemos que concluir que el punto $I$ es perpendicular a esto [Señala el $\overrightarrow{YC}$.]

802. Diana: Aja. Entonces pues escribimos: Si $I$ perpendicular con $K$.

803. Cristian: Pues yo no sé.

804. Profesor L: ¿Un punto puede ser perpendicular con otro?

805. Cristian: Tiene que ser perpendicular con un segmento. Pero…

806. Profesor L: Miren la figura y díganlo bien.

807. Diana: Ummm.

808. Profesor L: ¿Qué es lo que van a concluir?

809. Cristian: Que

| | | |
|---|---|---|
| 810. | Diana: | Que son perpendiculares. |
| 811. | Cristian: | Que el segmento $I, K$ es perpendicular con el segmento $Y, C$. |
| 812. | Diana: | Por eso por qué no escribimos… |
| 813. | Profesor J: | Con el rayo [$\overrightarrow{YC}$] |
| 814. | Diana: | $I, K$ es perpendicular con $YC$ [En la columna *Qué concluyo* de la segunda afirmación, cambia $\angle$ por $\overline{IK} \perp \overrightarrow{YC}$.] Rayo es con una cosa así, [flecha en la parte superior] ¿cierto? Una flechita así. Ya. Uyyy, uy no. Ahora. Ahora escribimos eso [$\overline{IK} \perp \overrightarrow{YC}$] acá [En la columna *Qué sé* de la tercera afirmación.] |
| 815. | Cristian: | No. |
| 816. | Diana: | ¿Qué más nos falta? |
| 817. | Cristian: | Se hace lo mismo con el de abajo [con el $\overrightarrow{YA}$ para plantear que $\overline{IJ} \perp \overrightarrow{YA}$.] |
| 818. | Diana: | ¿Con qué? |
| 819. | Cristian: | ¿No? Se hace lo mismo con el de abajo [$\overrightarrow{YA}$]. |
| 820. | Diana: | Aaah, sí, sí, sí. |
| 821. | Cristian: | Hágalo. |
| 822. | Diana: | Sí. [Como tercera afirmación, escribe en la columna *Qué sé*: $IJ$ distancia del punto a la recta; *Qué uso*: Definición Distancia de un punto a una recta; *Qué concluyo*: $\overline{IJ} \perp \overrightarrow{YA}$.] Ya. Ahora, eso sí lo escribimos aquí abajo [en la columna *Qué sé* de la cuarta afirmación], esas conclusiones. Que es ahora lo que sabemos, ¿no? |
| 823. | Profesor L: | ¿Qué saben? |
| 824. | Diana: | Eso [Señala con el lápiz lo que concluyeron en la primera, segunda y tercera afirmación.] |
| 825. | Profesor L: | ¿Eso qué es? |
| 826. | Diana: | Las conclusiones que hemos llegado anteriormente. |
| 827. | Cristian: | Tengo hambre. |
| 828. | Dayana: | [Susurra.] |
| 829. | Diana: | Ya le están sonando esas tripitas. ¡Qué pecado! |
| 830. | Diana: | Gordo, no puedo. |
| 831. | Cristian: | Eche. Hágale. |
| 832. | Diana: | Pienso. |
| 833. | Cristian: | Tú puedes. |
| 834. | Profesor L: | Ese es un trabajo de grupo. |
| 835. | Cristian: | Dayana. Ayude [Le pasa la hoja de la justificación a Dayana.] |
| 836. | Profesor L: | No nos pasemos la hoja como si fuera un balón. |
| 837. | Dayana: | Ayuden ahí. |
| 838. | Cristian: | ¿Y qué? Y usted mira el celular. No pues ¡Qué chimba! Ummm. Sabemos que… |
| 839. | Diana: | Ahora sí sacamos la bisectriz del ángulo, ¿no? |
| 840. | Cristian: | ¿Cómo? |
| 841. | Diana: | No lo sé. |
| 842. | Cristian: | Sabemos que… |
| 843. | Profesor J: | Ustedes saben que eso que concluyen ya lo pueden utilizar como sé, ¿no? |
| 844. | Diana: | Ayyy por eso. Lo que estaba diciendo. |
| 845. | Cristian: | Por eso. |
| 846. | Diana: | Ese Profesor L también no le colabora a uno. [Murmura y escribe como |

cuarta afirmación en la columna *Qué sé*: $\overline{KI} \cong \overline{IJ}$, $\overline{IK} \perp \overrightarrow{YC}$, $\overline{IJ} \perp \overrightarrow{YA}$.] Listo. Ahora, ¿qué usamos? Ummm.

847. Cristian: Ummm.

848. Diana: [Revisa el listado de definiciones y hechos geométricos.] ¡Ay Gordo! Ahí es donde utilizamos lado, ángulo, lado [LAL]. Eso. Sííí, para llegar a lo de la bisectriz.

849. Cristian: Muéstreme, ¿dónde está el lado?

850. Diana: No lo sé.

851. Cristian: ¡Aaah!

852. Profesor L: Muéstrele la figura.

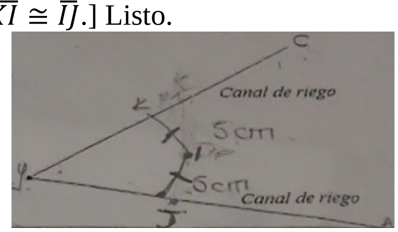
853. Cristian: Sí.

854. Diana: La tiene en la mano.

855. Cristian: Sabemos que es

856. Diana: Entonces lado, lado, lado.

857. Cristian: Sabemos que este es lado y es congruente con este lado [Marca el $\overline{KI}$ y el $\overline{IJ}$ para indicar que $\overline{KI} \cong \overline{IJ}$.] Listo.




858. Diana: Eso, eso, eso.

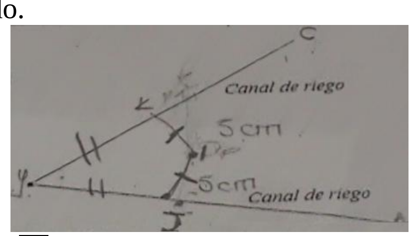
859. Cristian: Y ¿dónde están los otros dos lados?

860. Diana: No lo sé.

861. Cristian: Pues lo podemos sacar

862. Diana: Ah.

863. Cristian: Estos dos son congruentes [Marca el $\overline{YK}$ y el $\overline{YJ}$ para indicar que $\overline{YK} \cong \overline{YJ}$.] Breve. Otro lado.




864. Profesor J: ¿Sí saben eso [$\overline{YK} \cong \overline{YJ}$]?

865. Diana: No.

866. Cristian: Lo podemos sacar.

867. Diana: Entonces… no sé. Nada más podríamos utilizar estos dos [segmentos: el $\overline{KI}$ y el $\overline{IJ}$].

868. Profesor L: Lo pueden utilizar

869. Diana: Pues sí, pero no.

870. Profesor L: Ustedes ya saben, por ejemplo, si ya saben esto [$\overline{KI} \cong \overline{IJ}, \overline{IK} \perp \overrightarrow{YC}, \overline{IJ} \perp \overrightarrow{YA}$] usan algo, pero ¿qué?

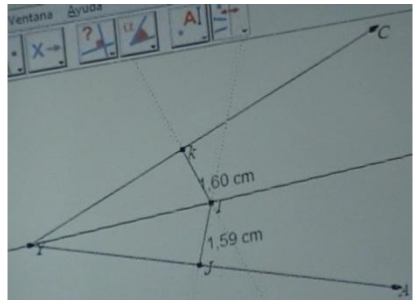
871. Diana: Usamos la definición de rectas perpendiculares. Entonces esto [$\overline{KI} \cong \overline{IJ}$] todavía no lo usaríamos. Ah, estas dos [Señala con el lápiz $\overline{IK} \perp \overrightarrow{YC}$ y $\overline{IJ} \perp \overrightarrow{YA}$] y ésta todavía [Señala y borra en la columna *Qué sé* del cuarto paso: $\overline{KI} \cong \overline{IJ}$. Y en la columna *Qué uso* escribe: Definición de rectas

| | | |
|---|---|---|
| | | perpendiculares.] |
| 872. | Cristian: | Ahí ya sabemos que son ángulos de 90º. |
| 873. | Diana: | ¿Qué concluimos? |
| 874. | Cristian: | Que son de 90º. Lea. |
| 875. | Diana: | [Lee la definición de rectas perpendiculares.] Dos rectas son perpendiculares si se intersecan y determinan cuatro ángulos rectos… |
| 876. | Cristian: | Sabemos que, ahora sí sabemos que son ángulos rectos. |
| 877. | Diana: | Pues sí pero ¿cómo escribo en lo *Qué concluyo*? |
| 878. | Cristian: | Pues mire la gráfica. Si esto es perpendicular y esto es perpendicular [Marca los ángulos $\angle IKC, \angle IKY$, $\angle IJY$, $\angle IJA$ para indicar que son ángulos rectos.] |
| 879. | Diana: | Aja. |
| 880. | Cristian: | Pues mire como esto. |
| 881. | Diana: | Eso es lo que le estoy diciendo. Que me ayude a ver cómo concluyo. |
| 882. | Cristian: | Pues escribimos que… pues escribimos los cuatro ángulos que son rec… que son de 90º, ¿no? |
| 883. | Diana: | Que son… $I, J, Y$, ¿sí? |
| 884. | Cristian: | $I, J, Y$ [$\angle IJY$]; $I, K, Y$ [$\angle IKY$]; $I, K, C$ [$\angle IKC$]; $I, J, A$ [$\angle IJA$]. Cuatro ángulos perpendiculares. |
| 885. | Diana: | ¿Perpendiculares? |
| 886. | Cristian: | Eh, rectos y usted hubiera hecho con uno y después con el otro. Con eso no nos hubiéramos escrito tanto. Hágale. |
| 887. | Diana: | ¿Y yo cómo escribo que son rectos? Yo diría que se… ahí se sabe que son perpendiculares por lo que son rectos, ¿no? Eh, son congruentes. |
| 888. | Profesor L: | Después. |
| 889. | Diana: | ¿Después? ¿Entonces? |
| 890. | Cristian: | Sé que son congruentes porque miden 90º. |
| 891. | Profesor J: | La linealidad que llevan está bien. Todo lo que están pensando es cierto. Lo que pasa es que para escribirlo, hay que escribirlo un poquito más tediosamente. ¿Sí? |
| 892. | Cristian: | Sí es mejor escribirlo uno por uno. |
| 893. | Profesor J: | Si saben esto [Señala en la columna Qué sé: $\overline{IK} \perp \overrightarrow{YC}$, $\overline{IJ} \perp \overrightarrow{YA}$], y por la definición [Señala en la columna *Qué uso* de la tercera afirmación: Definición de rectas perpendiculares] ¿qué saben?, ¿qué concluyen? |
| 894. | Cristian: | ¿Sí ve? Hagamos con uno, así no nos complicamos tanto. |
| 895. | Profesor J: | Y después lo que tú dices. |
| 896. | Cristian: | Bórrelo. |
| 897. | Diana: | [Borra en la columna *Qué sé* de la cuarta afirmación: $\overline{KI} \perp \overrightarrow{YA}$.] $I, K$… $I, K$ |
| 898. | Cristian: | $C$. |
| 899. | Diana: | Es perpendicular con $Y, C$ [Señala el $\overrightarrow{YC}$.] Entonces |
| 900. | Cristian: | Nooo, tenemos que llegar… |
| 901. | Diana: | Nooo. Pues eso es lo que estoy mirando. |
| 902. | Cristian: | Por eso. Podemos llegar que son congruentes entonces estos dos, ¿no? [Señala con el $\angle IKC$ y el $\angle IKC$.] Porque miden… porque digamos si son perpendiculares tienen que me… pues ya sabemos que… ¡Ay! |
| 903. | Diana: | ¡Ya sé! ¡Claro! Escribimos acá [columna *Qué concluyo* de la cuarta afirmación] que son de 90º y acá [columna *Qué sé* de la quinta afirmación] escribiríamos que son de 90º y utilizaríamos [en la columna *Qué uso* de la |

| | | |
|---|---|---|
| | | quinta afirmación]… ¡Sí! Algo así. |
| 904. | Profesor J: | Ajá. Algo así. |
| 905. | Cristian: | Algo así. |
| 906. | Profesor J: | Pero por la definición de rectas perpendiculares, todavía no puedes concluir que son de 90. |
| 907. | Cristian: | Son dos ángulos congruentes Diana. |
| 908. | Profesor J: | Todavía tampoco. |
| 909. | Cristian: | ¿Por qué? |
| 910. | Profesor J: | Por la definición de rectas perpendiculares, allá ¿qué me dice? |
| 911. | Diana: | Que determinan cuatro ángulos rectos. |
| 912. | Profesor J: | Exacto. Que son [ángulos] rectos. Y después, como ya saben que son rectos… |
| 913. | Diana: | Son de 90º |
| 914. | Cristian: | ¿Cómo escribimos acá que son rectos? [Señala la columna *Qué concluyo* de la cuarta afirmación.] |
| 915. | Profesor J: | Son rectos, simplemente. |
| 916. | Cristian: | Ah, pues escriba: Son rectos. |
| 917. | Profesor J: | El ángulo |
| 918. | Cristian: | Entonces sí puede escribir esto. Escriba aquí abajo: ángulos rectos. |
| 919. | Profesor J: | Pero el ángulo, ¿no? Tal ángulo […] |
| 920. | Diana: | Aja. |
| 921. | Cristian: | Nooo, escriba que es |
| 922. | Diana: | ¿Qué era? ¡Ah, ya! [Lo que había borrado anteriormente lo vuelve a escribir en la columna *Qué sé* de la cuarta afirmación: $\overline{IJ} \perp \overrightarrow{YA}$.] Ahora sí. Ángulo $I, K, C\ldots$ [Escribe en la columna *Qué concluyo* de la cuarta afirmación: $\angle IKC,\ \angle IKY,\ \angle IJY, \angle IJA$ son ángulos rectos.] Siguiente. |
| 923. | Cristian: | Ésta, ¿dónde está? Ésta [Señala el hecho geométrico de ángulos congruentes en el listado.] |
| 924. | Diana: | Escriba acá. |
| 925. | Cristian: | Pues ésta [Señala lo que se concluye en el cuarta afirmación.] |
| 926. | Diana: | Pues ahí ya sé |
| 927. | Cristian: | Y luego ésta [Parece ser que señala el hecho geométrico de ángulos congruentes.] y ya sabemos que son rectos. |
| 928. | Profesor L: | ¿Y ya lo dijeron? |
| 929. | Diana: | Pues acá ya sabemos que son ángulos rectos [Señala la columna *Qué concluyo* de la cuarta afirmación.] |
| 930. | Cristian: | Entonces acá ya sabemos que miden 90º porque ya sabemos que son ángulos rectos. |
| 931. | Diana: | ¿Sí? ¿Ya podemos saber? |
| 932. | Profesor J | Sí. Si quieren utilizar el de 90º [Definición ángulo recto: Un ángulo es recto si su medida es 90º.] pero ahí hay otra [en el listado], ¿no? Un hecho geométrico. Búsquenlo ahí. |
| 933. | Cristian: | Hecho geométrico ángulos rectos. |
| 934. | Profesor J: | […] |
| 935. | Cristian: | Bueno. |
| 936. | Diana: | Entonces lo que sabemos |
| 937. | Cristian: | Si dos ángulos son rectos entonces son congruentes. Entonces podemos decir que el ángulo $I, K, C$ y el ángulo $I, K, Y$ son ángulos congruentes. |

| | | |
|---|---|---|
| | | Hágale. |
| 938. | Diana: | ¿Eso sabemos? |
| 939. | Profesor J: | Eso es lo que concluyen. |
| 940. | Cristian: | Eso es lo que concluimos. Sabemos que… bueno, hágale de una vez. |
| 941. | Diana: | [Como quinta afirmación, escribe en la columna *Qué concluyo*: $\angle IKC \cong \angle IKY$.] Listo y también |
| 942. | Cristian: | El ángulo |
| 943. | Diana: | ¿De una vez podríamos incluir ese [$\angle IJY$ y $\angle IJA$]? |
| 944. | Cristian: | El ángulo $I, J, Y$ y el ángulo $I, J, A$ son congruentes. ¡Y se acabó la hojita! |
| 945. | Diana: | [Continúa escribiendo en la conclusión de la quinta afirmación: $\angle IJY \cong \angle IJA$.] Ahora, ¿qué usamos? ¿El hecho geométrico de ángulos rectos? |
| 946. | Cristian: | ¿Qué? |
| 947. | Diana: | ¿O la definición? |
| 948. | Cristian: | Hecho geométrico. Hecho, hecho, hecho. |
| 949. | Diana: | [Escribe en la columna *Qué uso* de la quinta afirmación: Hecho geométrico Ángulos rectos.] Y entonces lo que sabemos… que miden 90º. |
| 950. | Profesor J: | Lo que saben es que son rectos, pero pueden concluir… |
| 951. | Diana: | ¿Lo que sabemos es que son rectos? |
| 952. | Profesor J: | O sea saben esto [Señala la conclusión de la cuarta afirmación.] |
| 953. | Cristian: | Escriba esto [Señala la conclusión de la cuarta afirmación.] |
| 954. | Diana: | ¿Qué? ¿Todo eso? |
| 955. | Cristian: | Todo eso. |
| 956. | Diana: | Está bien [Escribe en la columna Qué sé de la quinta afirmación: $\angle IKC$, $\angle IKY$, $\angle IJY, \angle IJA$ son ángulos rectos] |
| 957. | Profesor L: | Cristian, ¿qué va hacer ahí? [Pues él está utilizando Cabri en el computador.] |
| 958. | Cristian: | No, nada. Voy a quitar los ángulos. Los ángulos, la medición de los ángulos. |
| 959. | Profesor J: | Ustedes habían dicho ahorita algo importantísimo, que fue cuando Cristian rayó acá, tal, tal y tal [Las marcas que Cristian realizó sobre la gráfica de la situación de Don Gustavo en la que indicó que $\overline{KI} \cong \overline{IJ}$ y que $\overline{YK} \cong \overline{YJ}$.] |
| 960. | Diana: | Ah, ¿lo de que son congruentes? |
| 961. | Profesor L: | ¿Quiénes? |
| 962. | Cristian: | Los ángulos. Lo… nooo. Los… que era esto. |
| 963. | Diana: | ¿No era esto? |
| 964. | Cristian: | Esto es por lo que dijo Diana. Que era lo del hecho geométrico lado, lado, lado [LLL], o lado, ángulo, lado (LAL). Digamos era eso. |
| 965. | Profesor L: | Bueno… |
| 966. | Cristian: | Pero… |
| 967. | Profesor L: | ¿Pero? |
| 968. | Cristian: | Estoy confundido en… es que no sé. Porque sí… sabemos que… […] Muestre un momentico esto [la hoja donde está la representación del problema.] Sabemos que estos dos son congruentes [$\overline{KI} \cong \overline{IJ}$]. |
| 969. | Profesor J: | Aja. |
| 970. | Cristian: | Cierto. Sabemos que estos dos ángulos son congruentes, igual que estos dos ángulos [Marca los ángulos $\angle IKC$, $\angle IKY$, $\angle IJY, \angle IJY$ para indicar que son congruentes.] ¿Cierto? Ahí vamos. |
| 971. | Diana: | Aja. |

| | | |
|---|---|---|
| 972. | Cristian: | Entonces toca sacar algo más. |
| 973. | Diana: | Que sería… |
| 974. | Cristian: | Porque lado, vértice… Toca estos dos [Señala el $\overline{YK}$ y el $\overline{YJ}$] Sacar |
| 975. | Diana: | Lado, ángulo… laaado. |
| 976. | Cristian: | Sí, pero… Ay |
| 977. | Profesor J: | Sí, pero espera un momentico… para, para… |
| 978. | Diana: | Vea porque es que acá sería. Sí porque vea. Si acá [en la figura] el Profesor L nos enseñó con rayitas, ¿cierto? Entonces que son congruentes [Retiñe la marca hecha sobre el $\overline{IK}$ y el $\overline{IJ}$.] Entonces fuuun acá se ponen dos rayitas [para indicar que $\angle IJY \cong \angle IJA$] y aquí se ponen tres [al $\overline{YJ}$ solamente] y sería lado, ángulo, lado. |
| 979. | Cristian: | ¡No sea abeja! |
| 980. | Diana: | Entonces si entiende ¿por qué se recuesta [no aporta]? |
| 981. | Cristian: | Porque me está doliendo la barriga. Uyyy, Dios mío usted tampoco lo entiende a uno. Póngale cuidado. Tenemos que deducir… tenemos que estos dos [$\overline{YK}$ y $\overline{YJ}$] son congruentes. |
| 982. | Profesor J: | Perdón, ¿cuáles? |
| 983. | Cristian: | El segmento $Y, K$, ¿cierto? Y el segmento $Y, J$ [Escribe al lado de la figura $\overline{YK}$ $\overline{YJ}$.] Pues eso es lo que yo entiendo. Para deducir que estos dos ángulos [señala en la figura el $\overline{YK}$ y el $\overline{YJ}$] también pueden ser congruentes. |
| 984. | Profesor L: | ¿Cuál hecho geométrico supuestamente iban a usar? |
| 985. | Cristian: | Lado… no. |
| 986. | Diana: | Lado… |
| 987. | Profesor L: | O sea, alguno de |
| 988. | Cristian: | Lado, ángulo, lado [Señala en el listado el hecho geométrico LAL.] |
| 989. | Profesor L: | Pregunto. ¿Esos hechos geométricos se utilizan para cuando hay…? |
| 990. | Cristian: | Un triángulo. |
| 991. | Diana: | Para cuando hay triángulos. |
| 992. | Cristian: | Pero esto no es un triángulo. |
| 993. | Profesor L: | ¿Hay triángulos ahí [en la figura]? |
| 994. | Cristian: | Eso era lo que yo le quería explicar ahorita. |
| 995. | Profesor L: | ¿Hay triángulos? |
| 996. | Diana y Cristian: | Nooo. |
| 997. | Cristian: | Eso era lo que yo iba a explicar ahorita. |
| 998. | Diana: | Tenemos que llegar a lo de la bisectriz. |
| 999. | Profesor L: | A lo de la bisectriz. Entonces, ¿por qué no trazarla [bisectriz del $\angle CYA$]? |
| 1000. | Cristian: | ¿La trazamos? |
| 1001. | Diana: | Está bien. |
| 1002. | Cristian: | Pero… |
| 1003. | Diana: | Trácela ahí |
| 1004. | Cristian: | Pero, pero… |
| 1005. | Profesor L: | ¿Qué pasa si la…? Trácenla a ver qué pasa. |
| 1006. | Diana: | Ummm, ¡Qué no pasa! |
| 1007. | Profesor L: | Por ejemplo, allá la van a trazar. Si quieres Diana dale con el lápiz. |
| 1008. | Cristian: | Listo. Trazar [En la pantalla de Cabri, Cristian muestra la bisectriz del $\angle CYA$.] |

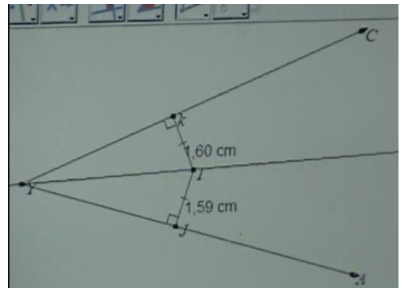



1009. Profesor L: Bien.
1010. Cristian: Eso era lo que teníamos ahorita. Salen dos triángulos.
1011. Diana: [Traza en la gráfica de Don Gustavo un rayo pero éste no pasa por $I$.]
1012. Profesor J: Te torciste.
1013. Diana: Pero, poquito. No se nota casi [Borra en la gráfica de Don Gustavo el trazo anterior y vuelve a dibujar un rayo de tal manera que pasa por $I$.]


1014. Profesor J: Yo sé cuál es el problema en Cristian. Cristian quiere construir la bisectriz. Quiere construirla, no quiere verla sino hasta cuando la pueda demostrar, ¿cierto? Pero resulta que la bisectriz está ahí. Lo que hay es que demostrar es que ése punto [$I$] pertenece a esa bisectriz [$\overrightarrow{YI}$]. ¿Sí me entienden?
1015. Cristian: ¿Ese punto?
1016. Profesor J: ¿Qué es lo que dice ahí? [Lee la conjetura.] Si la distancia de un punto a cada lado de un ángulo es igual entonces el punto está sobre la bisectriz del ángulo. Se dan cuenta que la bisectriz existe. Entonces si existe nos permite, en cierta manera, usarla así como visualmente. Lo que no podemos es decir: Ah, bueno como la bisectriz está ahí es… Pero así visualmente nos permite usarla. Entonces ya nos muestra algo. Que era lo que ustedes tenían ahorita pensado en su cabecita.
1017. Diana: Pues ahí, yo veo los triángulos, ¿no Gordo?
1018. Cristian: Ahí sí yo veo los triángulos. Puedo sacar un hecho geométrico de lado, ángulo, lado [LAL].
1019. Diana: Aja.
1020. Profesor J: Pero ¿cuál sería el lado, el ángulo y el lado?
1021. Diana: Lado, ángulo, lado, ¿no?
1022. Cristian: Pues el que yo estaba diciendo.
1023. Profesor L: Yo voy a ayudarles. Aquí porque no lo saben aquí en Cabri. [Utiliza Cabri del computador para registrar en la construcción hecha inicialmente en la retroalimentación aquella información que los estudiantes han concluido.] Aspecto… ¿este segmento [$\overline{IK}$] es congruente con éste [$\overline{IJ}$]?
1024. Cristian: Sí.
1025. Profesor L: Sí.
1026. Diana: Sí es congruente con ese.
1027. Profesor L: Bien. ¿Qué otra cosa es lo que saben? [Él coloca marcas para indicar

congruencia.]

1028. Profesor J: Eso. ¿Qué otra cosa saben?
1029. Cristian: Que este… pues no lo sabemos.
1030. Diana: Pero así a simple vista se ve.
1031. Cristian: No. No a simple vista.
1032. Diana: ¿Entonces?
1033. Cristian: Pues, sabemos que esos dos ángulos [Señala en la pantalla el $\angle IKY$ y el $\angle IJY$.] son de 90º entonces…
1034. Profesor L: Son de 90º. Bueno. Entonces, ¿cuáles ángulos de 90º?
1035. Diana: ¿Cuáles ángulos son de 90º? [Risas.]
1036. Cristian: Éste y éste [$\angle IKY$ y $\angle IJY$].
1037. Diana: ¡Ah, qué pena!
1038. Cristian: Son de 90º. Pero sólo una liniecita [Marca en la gráfica de Don Gustavo el $\angle IKY$ y el $\angle IJY$ para indicar que miden 90º.]
1039. Profesor J: Pero de hecho no sabemos que son de 90º, sino que sabemos es que ¿qué?
1040. Diana: Que son rectos.
1041. Profesor J: Eso.
1042. Cristian: Pero, po… entonces echemos una definición de ángulos rectos.
1043. Profesor J: ¿Pero la tienen? ¿La buscaron?
1044. Cristian: No. No la hemos usado.
1045. Diana: Sí, vea [Señala el hecho geométrico que escribieron en la columna Qué uso de la quinta afirmación.]
1046. Cristian: Eh, definición, no hecho geométrico.
1047. Diana: Hecho geométrico de ángulos
1048. Cristian: Definición. No hecho geométrico.
1049. Profesor L: Pero lo que nos interesa más es el hecho geométrico.
1050. Cristian: No porque usted nos está diciendo que no sabemos que son de 90º. Mientras que si usamos la definición ya sabemos. Un ángulo recto es de…
1051. Profesor J: Sí, sí, sí. Completamente de acuerdo con lo que Cristian está diciendo. Pero se acuerda que habían dicho que nos servía saltar este paso [Señala en el listado la definición de ángulos rectos]
1052. Cristian: [Pausa # 5] Por eso mismo. Si nos lo saltamos significa que… [Pausa]
1053. Profesor J: Con el hecho geométrico de ángulos rectos [Señala en el listado y lee.] Si dos ángulos
1054. Diana: Son rectos.
1055. Profesor L: Son rectos [entonces] son congruentes.
1056. Cristian: Aaah.
1057. Profesor L: ¿Sabemos que esos dos son rectos?
1058. Cristian: Sí. Entonces son congruentes. Esos dos ángulos son congruentes [Señala los ángulos en la construcción hecha en el computador.]
1059. Diana: ¡Ah, vea! Esos ya son congruentes.
1060. Cristian: El de acá [$\angle IJY$] y el de acá [$\angle IKY$].
1061. Profesor L: Espero yo los marco. [Marca en la construcción del computador los ángulos $\angle IKY$ y $\angle IJY$ para indicar que son ángulos rectos.]




1062. Profesor J: Falta es escribirlo.

1063. Profesor L: Ahí está.

1064. Cristian: Entonces concluimos que los dos [ángulos] son

1065. Profesor J: Congruentes.

1066. Cristian: Congruentes.

1067. Profesor J: Lo que faltaba es escribir. O sea, aquí lo podríamos escribir [Señala la columna Qué concluyo de la quinta afirmación.] Si todos esos [ángulos] son rectos

1068. Cristian: Aaah, entonces podemos concluir que estos dos y estos dos son congruentes.

1069. Diana: ¿O sea que el ángulo $I, K, C$ es congruente con el ángulo $I, J, Y$?

1070. Cristian: Y el ángulo $I, K, Y$ es congruente con el ángulo $I, J, A$.

1071. Diana: Está bien. [Continúa escribiendo en la columna Qué concluyo de la quinta afirmación: $\angle IKC \cong \angle IJY$, $\angle IKY \cong \angle IJY$.] Listo. Ahora sí sabemos que los ángulos son congruentes

1072. Cristian: Pero falta el otro lado.

1073. Profesor L: ¿Otro lado?

1074. Cristian: Pues falta para que sea ángulo, lado, ángulo [ALA].

1075. Diana: ¿Ángulo, lado, ángulo [ALA]?

1076. Cristian: Oh, no. Ángulo, lado, lado [ALL].

1077. Diana: Lado, ángulo, lado [LAL]

1078. Cristian: Exacto.

1079. Profesor L: Lado, ángulo… Listo.

1080. Cristian: Entonces el otro lado tendría que ser

1081. Diana: $J, Y$.

1082. Profesor L: Yo le voy a borrar ese numerito [en el computador], ¿de acuerdo? [1,60 $cm$ y 1,59 $cm$ que representa la distancia del punto $I$ al $\overrightarrow{YC}$ y al $\overrightarrow{YA}$, respectivamente.]

1083. Cristian: Y el de abajo también. Eso. Entonces tenemos ahora que concluir que estos dos [segmentos] son congruentes. [Señala con el cursor el $\overline{YK}$ y el $\overline{YJ}$]. Estos dos.

1084. Diana: Ummm.

1085. Profesor L: O sea, estos dos ¿qué es?

1086. Cristian: El…Pues ahí ya están marcados. Que el segmento… yo acá lo escribí ¿no? ¿Dónde escribí eso? Pues acá lo escribí [Se refiere a lo que escribió anteriormente en la hoja de papel.] Que el ángulo $I, K$ [$\overline{YK}$] y el ángulo $I, J$ [$\overline{YC}$]… tienen que ser congruentes.

1087. Profesor L: ¿Tienen que ser congruentes? ¿Y cómo podemos justificar que esos dos [segmentos] son congruentes?

1088. Cristian: Con el primer término que usamos antes, ¿no?

| | | |
|---|---|---|
| 1089. | Profesor L: | ¿Cuál? |
| 1090. | Cristian: | Con el  de segmentos congruentes. [Se refiere a la definición de segmentos congruentes.] |
| 1091. | Profesor L: | Pero ese [par de segmentos] que me dijo usted fue los que yo marqué acá: $J, I$ [$\overline{JI}$] |
| 1092. | Cristian: | Pues sí, pero luego ¿no lo podemos usar para sacar que ellos dos son congruentes? |
| 1093. | Profesor L: | ¿Cuáles? |
| 1094. | Cristian: | Para definir. |
| 1095. | Profesor L: | ¿Cuáles? ¿Para este segmento $Y, J$ y este segmento $Y,\ K$? [Señala con el cursor el $\overline{YJ}$ y el $\overline{YK}$.] |
| 1096. | Cristian: | Sí. Se hace el mismo procedimiento. Digamos… Digamos. ¿Cómo es que se escribe ahí? |
| 1097. | Diana: | ¡Ah! ¿De que tienen la misma medida? |
| 1098. | Cristian: | Midiéndolos. |
| 1099. | Diana: | Midiéndolos |
| 1100. | Profesor L: | ¡Ah! Pero, cuando ustedes hicieron la construcción ubicaron el punto de tal manera que ¿qué? |
| 1101. | Diana: | Que quedaran la misma distancia de los dos rayos. |
| 1102. | Profesor L: | Entonces, por eso fue que afirmaron… se hizo la primera afirmación. Esta congruencia ya se tiene [$\overline{IK} \cong \overline{IJ}$.] |
| 1103. | Cristian: | O, podemos sacar el de acá [Señala el $\overline{YI}$] |
| 1104. | Profesor L: | ¿Cuál? |
| 1105. | Cristian: | Pero tendría que ser lado… |
| 1106. | Profesor L: | ¿Cuál? |
| 1107. | Cristian: | La… ¿Dónde estaba? Éste. [Señala en la pantalla del computador el $\overline{YI}$.] O sea el de acá que es con ¿cuál congruente? |
| 1108. | Diana: | ¿Señor? |
| 1109. | Profesor L: | Dígalo Cristian cómo es. No sé cuál es. |
| 1110. | Diana: | Lado, ángu |
| 1111. | Cristian: | Éste mire. Éste [Señala nuevamente en la pantalla del computador el $\overline{YI}$] Que digamos que de forma inversa. Es que no me acuerdo cómo se… |
| 1112. | Diana: | Aaah, la propiedad reflexiva. |
| 1113. | Cristian: | Eso. Ahí está. Eso era lo que yo quería decir. |
| 1114. | Diana: | Ahora sí llegamos a otra cosa peor. |
| 1115. | Cristian: | No porque ahí podemos definir que es otro lado con la propiedad reflexiva. |
| 1116. | Diana: | Entonces sería ángulo, ¿lado, lado [ALL]? Pero eso no existe. |
| 1117. | Cristian: | No. |
| 1118. | Diana: | Entonces sería lado, ángulo, ángulo [LAA]. ¡Ah, no! Tampoco [Risas.] |
| 1119. | Cristian: | Entonces sería H, C [Hecho geométrico Hipotenusa – Cateto] [Risas.] |
| 1120. | Profesor L y Profesor J | ¿Y por qué es H, C? |
| 1121. | Diana: | No porque sería hipotenusa y cateto. ¡Ayyy sí! No mentiras. No porque |
| 1122. | Cristian: | ¿Qué significa esto Diana? [Señala el hecho geométrico para la congruencia de triángulos rectángulos Hipotenusa – Cateto] |
| 1123. | Diana: | Hipotenusa y Cateto es que, que son ángulos rec… triángulos rectángulos o rectos. Yo no sé. Algo así. |
| 1124. | Profesor J: | Triángulos rectángulos. |

| | | |
|---|---|---|
| 1125. | Diana: | Eso. Por eso. |
| 1126. | Profesor J: | ¿Qué es un triángulo rectángulo? |
| 1127. | Diana: | Que miden 90º, ¿no? |
| 1128. | Cristian: | Ahí está. |
| 1129. | Diana: | Sí. |
| 1130. | Profesor L: | Revisen en la gráfica. |
| 1131. | Cristian: | Ahí hay un triángulo rectángulo. Claro. Si eso yo lo vi en Trigonometría […] [Risas.] |
| 1132. | Diana y Dayana: | [Risas.] |
| 1133. | Profesor L: | Que tengamos la clase de Trigonometría… incluso en su hoja de definiciones y hechos geométricos está. |
| 1134. | Diana: | ¿Qué? |
| 1135. | Profesor L: | ¿No está una definición de triángulo rectángulo? |
| 1136. | Diana: | ¿Sí? |
| 1137. | Cristian: | Claro. ¿Dónde? ¡Ah! Mírela acá [Señala en el listado la definición de triángulo rectángulo y comienza a leer la definición.] Es un triángulo |
| 1138. | Diana: | Con un ángulo recto. |
| 1139. | Cristian: | Ya. Claro. Ahí está. |
| 1140. | Diana | ¿Y cuál es el ángulo…? Ayyy |
| 1141. | Cristian: | Pues mírelo acá [Señala en la pantalla del computador.] Ayyy. ¡Hace cuánto que lo sacamos! |
| 1142. | Diana: | Ya. Ya. |
| 1143. | Profesor L: | Les voy a hacer una petición. Ordenados. Lanzaron una afirmación acá que Cristian le pidió el favor a Diana, ¿qué fue? |
| 1144. | Diana: | Ummm. Se me |
| 1145. | Profesor L: | Que para determinar |
| 1146. | Cristian: | ¿Cómo es que se llama? Propiedad… |
| 1147. | Diana y Cristian: | Reflexiva. |
| 1148. | Diana: | Entonces. Acá. Lo que sabemos, lo que usamos es la propiedad reflexiva [Escribe en la columna Qué uso de la sexta afirmación: Propiedad reflexiva.] Dígame si no. |
| 1149. | Profesor L: | ¿Saben? |
| 1150. | Diana: | Eh, usamos. |
| 1151. | Cristian: | Y sabemos que $Y, I$… |
| 1152. | Diana: | Espere, espere. Ahora lo que concluimos es que $Y$ y $I$, |
| 1153. | Cristian: | Es congruente |
| 1154. | Diana: | Con $I$ y $Y$. |
| 1155. | Cristian: | ¡Uy! Severo. |
| 1156. | Diana: | [Escribe en la columna Qué concluyo de la sexta afirmación: $\overline{YI} \cong IY$] Ay, Dios mío. Entonces lo que sabemos [Risas.] |
| 1157. | Cristian: | Pues que $Y, I$ y $I, Y$ [Escribe en una hoja $YI$ y $IY$] |
| 1158. | Diana: | No porque eso es lo que, es lo que |
| 1159. | Cristian: | No porque yo no estoy diciendo que son congruentes. Porque $Y, I$ y $I, Y$. |
| 1160. | Diana: | Ummm, no. |
| 1161. | Profesor L: | ¿Qué pasa así como lo están escribiendo? |
| 1162. | Cristian: | Ay, profe. Préstenos las hojitas de la vez pasada. |
| 1163. | Diana: | Aaah, ¿que es la medida? |

1164. Profesor L: Es la medida
1165. Diana: De ese segmento [$\overline{YI}$], ¿sí?
1166. Cristian: Que comparten, comparten, comparten algo. Comparten ummm
1167. Diana: Un lado.
1168. Cristian: Sí comparten… algo
1169. Diana: Comparten lado.
1170. Cristian: Sí. Que los dos triángulos rectángulos comparten un lado. Entonces se puede utilizar la propiedad reflexiva.
1171. Profesor L: Ah, bueno. Aunque lo ven, ¿no?
1172. Diana: Aja.
1173. Profesor L: Lo saben porque lo ven.
1174. Diana: Por eso, pero ¿cómo lo escribimos?
1175. Cristian: Esa es la pregunta.
1176. Profesor L: Pues… escribiéndolo.
1177. Diana: [Risas.]
1178. Cristian: Pues que $Y, I$ comparte lado con el triángulo de arriba [$\Delta YKI$] y con el triangulito de abajo [$\Delta YJI$].
1179. Diana: Que el triángulo $K, I, Y$
1180. Cristian: Y el triángulo
1181. Diana: $J, Y, I$ comparten
1182. Cristian: El segmento
1183. Diana: El segmento $Y, I$
1184. Diana: [Escribe en la columna Qué sé de la sexta afirmación: Que el $\Delta KIY$ y el $\Delta JIY$ comparten el $\overline{YI}$.]
[Al grupo de estudiantes se les suministra otra hoja con el *esquema – deducción*. En este momento, la persona encargada de la biblioteca informa que se debe cerrar pues ya son las 5:00 p.m. del miércoles 8 de febrero. Frente a esto, los estudiantes se preocupan pues el tiempo es corto debido al permiso que sus acudientes autorizaron para que ellos desarrollaran la Tarea No. 7 en contra jornada dentro del plantel educativo.]
1185. Cristian: Hágale Diana.
1186. Diana: ¿Qué?
1187. Cristian: Escriba rápido.
1188. Diana: ¿Pero qué escribo? Ya me está ofendiendo. Pónganse serios.
1189. Profesor J: ¿Qué saben?
1190. Diana: Ummm. Todo eso. Gordo, ¿qué sabemos?
1191. Cristian: ¿Qué? Siempre yo. Ah, ahora sabemos esto […] [En el computador marca el $\overline{YI}$ con dos rayas.] Eso sabemos.
1192. Diana: ¿Qué?
1193. Cristian: Que ángulo, lado… o Lado, lado, ángulo.
1194. Diana: Lado…
1195. Profesor J: ¿Qué saben? ¿Qué saben? […]
1196. Cristian: Sabemos esto: que $I, Y$ es congruente con $I, Y$ [$\overline{YI} \cong \overline{IY}$].
1197. Diana: ¿Sabe lo que sabemos? Esto [Señala la conclusión de la primera afirmación: $\overline{KI} \cong \overline{IJ}$] y esto [Señala y corrige la conclusión de la sexta afirmación, para indicar que IY es un segmento: $\overline{YI} \cong \overline{IY}$], ¿no? Sí. Eso es lo que sabemos Gordo.

1198. Cristian: Y lo, y lo del ángulo [Señala la conclusión de la quinta afirmación: $\angle IKC \cong \angle IKY$,
$\angle IJY \cong \angle IJA$, $\angle IKC \cong \angle IJY$,
$\angle IJY \cong \angle IJA$]

1199. Diana: ¿Qué?

1200. Cristian: Sabemos… sabemos esto. Que el segmento $I, J$ y el segmento $I, K$ son congruentes [$\overline{IJ} \cong \overline{IK}$]. Que el ángulo $J$… no. Que el ángulo $I, J, Y$ es congruente con el ángulo $I, K, Y$ [$\angle IJY \cong \angle IKY$]. Sabemos esto también. Sabemos que el segmento $I, Y$ y el segmento $I, Y$ son congruentes [$\overline{IY} \cong \overline{IY}$].

1201. Diana: Excelente.

1202. Dayana: Excelente [Risas.]

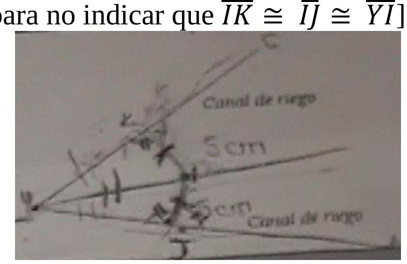
1203. Cristian: Eso es lo que sabemos. O sea que ahí no va eso

1204. Diana: [Borra suavemente las marcas que indican la congruencia de $\overline{YK}$ y $\overline{YJ}$.]

1205. Cristian: Eso. Va $I, Y$.

1206. Diana: [Marca el $\overline{YI}$ con una raya, lo cual indica que $\overline{IK} \cong \overline{IJ} \cong \overline{YI}$]

1207. Cristian: No son dos rayitas. Pues mire [Toma el lápiz que tiene Diana y hace otra marca sobre el $\overline{YI}$, para no indicar que $\overline{IK} \cong \overline{IJ} \cong \overline{YI}$]. Toca ayudarle.




1208. Profesor L: Y con eso ¿qué saben?

1209. Cristian: Lado, ángulo, lado [LAL].

1210. Diana: No.

1211. Cristian: Y podemos utilizar un hecho geométrico ya, de éstos.

1212. Profesor L: ¿Cuál?

1213. Cristian: [Susurra]

1214. Diana: Sí porque ya hay dos triángulos. Hipotenusa – Cateto [HC]. Yo sigo intentando con eso [Hecho geométrico]

1215. Profesor J: Para utilizar hipotenusa – cateto, ¿qué debemos saber antes?

1216. Diana: Pero espero lo escribo en qué uso.

1217. Profesor J: No, pero no pueden utilizar Hipotenusa – Cateto porque Hipotenusa – Cateto es ¿para qué?

1218. Diana: Para triángulos rectángulos.

1219. Profesor J: ¿Sabemos que son triángulos rectángulos?

1220. Diana: Ummm, ¿o sea que ahora tenemos que averiguar si es triángulos rectángulos?

1221. Profesor L: No es tanto que lo tengan que averiguar

1222. Profesor J: No. No es tanto que lo tengan que averiguar ustedes ya lo saben

1223. Cristian: Ya lo sabemos. Hay un triángulo rectángulo.

1224. Profesor L: Es escribirlo.

1225. Diana: ¿Es escribirlo? Entonces ¿cómo?

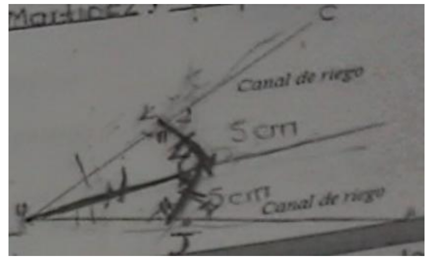
1226. Profesor J: Pues, ¿qué saben?

1227. Diana: ¡No! ¡Ay, Dios mío!

1228. Profesor J: ¿Qué tienen que saber para que un triángulo sea rectángulo?

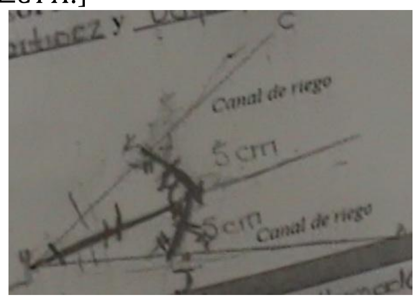
| | | |
|---|---|---|
| 1229. | Diana: | Que mida 90º. |
| 1230. | Profesor J: | Un ángulo de 90º. |
| 1231. | Cristian: | Ah, sabemos que |
| 1232. | Profesor L: | ¿Sabemos que hay un ángulo de 90º? |
| 1233. | Cristian y Diana: | Sí. |
| 1234. | Profesor J: | Entonces, ¿cómo? Si este ángulo es de 90º [Señala en la gráfica de la situación de Don Gustavo el ángulo $\angle IKY$.] |
| 1235. | Todos: | [Risas.] |
| 1236. | Profesor J: | Pongan cuidado chinos que me están sacando la… Como este ángulo [$\angle IKY$] es de 90, ¿listo? |
| 1237. | Diana: | Aja. |
| 1238. | Profesor J: | Entonces este triángulo [$\Delta IKY$] es rectángulo. |
| 1239. | Cristian: | Aja. |
| 1240. | Profesor J: | Y como éste [$\angle IJY$] es de 90 pues este es un triángulo rectángulo [$\Delta IJY$]. |
| 1241. | Diana: | Aja |
| 1242. | Profesor J: | Eso lo saben. |
| 1243. | Diana: | Sí. |
| 1244. | Profesor J: | Lo que pasa es que tienen es que escribirlo. ¿Qué sé? Que este ángulo es de 90. |
| 1245. | Profesor L: | Ese [$\angle IKY$] y ese otro [[$\angle IJY$]]. |
| 1246. | Diana: | ¿Cuál? ¿Cuál ángulo Gordo? |
| 1247. | Cristian: | Que el ángulo $I, J, Y$ y el ángulo $I, K, Y$ |
| 1248. | Diana: | [Escribe en la columna Qué sé de la séptima afirmación: $\angle YJI$, $\angle YKI$.] |
| 1249. | Cristian: | Listo. Son congrue… no. Son ángulos rectos. |
| 1250. | Diana: | ¿Son ángulos… rectos? [Completa en la columna Qué sé de la séptima afirmación: $\angle YJI$, $\angle YKI$ son ángulos rectos.] |
| 1251. | Cristian: | Por lo tanto, podemos utilizar la definición de ángulo rectángulo. ¿Es un hecho geométrico? Sí. |
| 1252. | Diana: | ¿Ángulo rectángulo? |
| 1253. | Cristian: | Triángulo rectángulo. |
| 1254. | Diana: | [Escribe en la columna Qué uso de la séptima afirmación: Definición de triángulo rectángulo.] |
| 1255. | Cristian: | Y concluimos que el triángulo $I, Y, K$ y el triángulo $I, J, Y$ son triángulos rectángulos. |
| 1256. | Diana: | [Escribe en la columna Qué concluyo de la séptima afirmación: $\Delta IYK \cong \Delta IJY$] ¡Ah! ¿Son triángulos rectángulos? ¿$I, J, Y$? [Corrige lo escrito en la conclusión de la séptima afirmación: $\Delta IYK$ y $\Delta IJY$ son triángulos rectángulos.] |
| 1257. | Cristian: | Son triángulos rectángulos. Bueno, Ya sabemos eso. |
| 1258. | Diana: | Espere. Espere. Espere. |
| 1259. | Profesor L: | Ahora, ¿qué ya saben? |
| 1260. | Cristian: | Que tenemos dos triángulos rectángulos. |
| 1261. | Profesor L: | Y… |
| 1262. | Cristian: | Son congruentes. |
| 1263. | Profesor L: | Ah, bueno. Antes de que sean congruentes |
| 1264. | Cristian: | Porque tienen |
| 1265. | Profesor L: | Ah, bueno. Dígame. Porque ¿qué? |

| | | |
|---|---|---|
| 1266. | Diana: | Espere, espere Gordo. |
| 1267. | Cristian: | Claro porque tienen… comparten ¿cómo le explico eso? Porque… porque sus segmentos y su ángulo es igual, ¿no? Miden igual |
| 1268. | Profesor L: | Miden igual. |
| 1269. | Profesor J: | Puedes utilizar esta [Se refiere al hecho geométrico Hipotenusa – Cateto.] |
| 1270. | Cristian: | Utilícela. |
| 1271. | Profesor J: | La van a utilizar para decir que ¿qué? |
| 1272. | Cristian: | Que son congruentes los dos triángulos. |
| 1273. | Diana: | [Escribe en la columna Qué sé de la octava afirmación: Hecho geométrico HC; en la columna Qué concluyo: $\Delta IKY \cong \Delta IJY$.] |
| 1274. | Profesor L: | Eso. Pero para poder utilizarla [hecho geométrico HC], ¿qué necesitan saber? |
| 1275. | Diana: | Que son triángulos rectángulos. |
| 1276. | Cristian: | No sea abeja. |
| 1277. | Diana: | ¿No? Sí |
| 1278. | Cristian: | Pues yo tenía otra idea pero… |
| 1279. | Profesor L: | ¿Qué Cristian? |
| 1280. | Cristian: | Que el segmento $I, J$ y el segmento $I, K$ son congruentes. Que el ángulo $I, J, Y$ y el ángulo $I, K, Y$ son congruentes. Y que el segmento $I, Y$ y el segmento $I, Y$ son congruentes. Por lo tanto podemos utilizar esto [Señala en la columna Qué uso de la octava afirmación: Hecho geométrico HC] y concluir esto [Al parecer señala la conclusión de la octava afirmación: $\Delta IKY \cong \Delta IJY$.] |
| 1281. | Diana: | [Mientras Cristian expone su idea, ella escribe en la columna Qué sé de la octava afirmación: $\Delta IKY$ y $\Delta IJY$ son triángulos rectángulos.] |
| 1282. | Profesor J: | Pero, bueno. Ya lo tienen ahí. Ahora, ¿para qué nos sirve eso? ¿A dónde queremos llegar? |
| 1283. | Cristian: | A que el punto pertenece ahí [a la bisectriz del ángulo]. |
| 1284. | Profesor J: | Busquen allá en la definición de bisectriz si dice qué es lo que necesitamos |
| 1285. | Diana: | Bisectriz del ángulo. [Lee la definición de bisectriz de un ángulo en el listado.] Es un rayo con extremo en el vértice del ángulo y demás puntos en el interior del ángulo, tal que el rayo con los lados del ángulo forman dos ángulos congruentes. |
| 1286. | Profesor J: | Dos ángulos congruentes. ¿Cuáles serían los ángulos congruentes? |
| 1287. | Cristian: | Estos dos. |
| 1288. | Profesor L: | ¿Cuáles? |
| 1289. | Cristian: | Estos dos. Vea. Éste y éste [Señala en la pantalla del computador el $\angle YIK$ y el $\angle YIJ$.] |
| 1290. | Profesor L: | Marquémoslo en la hojita [en la gráfica de la situación de Don Gustavo.] ¿Son congruentes? |
| 1291. | Cristian: | Este ángulo y este [Retiñe con el lápiz los lados del $\angle YIK$ y el $\angle YIJ$. Luego, marca dichos ángulos para indicar la congruencia entre éstos.]. Son congruentes. |




1292. Profesor J: ¿Pero esos son lo que me hace que sea… que ésta [Señala el $\overrightarrow{YI}$.] sea la bisectriz de ese ángulo [Señala el $\angle CYA$.]?

1293. Cristian: No. Éste [Marca el $\angle CYA$.]



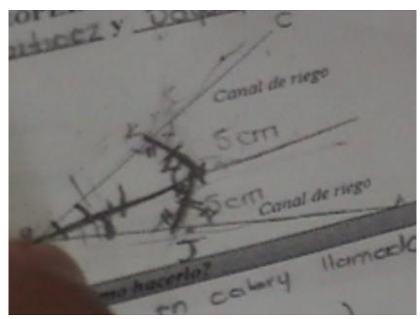

1294. Profesor J: ¿Cuáles son los dos ángulos que necesitan que sean iguales?

1295. Diana: Éste y éste [Señala el $\angle IYK$ y el $\angle IYJ$]

1296. Profesor J: Exactamente. Éste y éste.

1297. Cristian: Por eso acá ya lo había señalado [Sólo señaló el $\angle CYA$, mas no el $\angle IYK$ y el $\angle IYJ$]

1298. Profesor J: Éste y éste necesitamos que sean iguales [Marca el $\angle IYK$ y el $\angle IYJ$.] ¿Cierto?




[Pausa # 6]

1299. Cristian: ¿Dónde íbamos?

1300. Diana: Acá. Todo esto. Vea. [Señala rápidamente las afirmaciones formuladas.]

1301. Cristian: Llegamos a que los dos triángulos son congruentes. Y eso nos sirve

1302. Diana: Y tenemos que llegar a que…

1303. Cristian: La hojita Dayana […]

1304. Diana: A que… eso. Lo de la bisectriz.

1305. Cristian: No. Esa no.

1306. Diana: Sí, claro. Ahora tenemos que utilizar lo de… esto. Lo de bisectriz de un ángulo.

1307. Profesor L: Pero, espérate. Lea la definición de bisectriz.

1308. Dayana: [Lee la definición de bisectriz de un ángulo en el listado.] Es un rayo con extremo en el vértice del ángulo y demás puntos en el interior del ángulo, tal que el rayo con los lados del ángulo forman dos ángulos congruentes. Forman dos ángulos congruentes.

| | | |
|---|---|---|
| 1309. | Diana: | O sea los ángulos que necesitamos |
| 1310. | Cristian: | Ah, no. Nosotros íbamos acá. Deduciendo que estos dos ángulos son congruentes [Retiñe las marcas hechas al $\angle IYK$ y al $\angle IYJ$.] Que estos dos ángulos tienen que ser congruentes. ¿Cierto? |
| 1311. | Diana: | Sí. |
| 1312. | Profesor L: | […] ¿Por qué pueden afirmar que son congruentes [los ángulos]? |
| 1313. | Diana y Cristian: | Porque… |
| 1314. | Cristian: | ¿Por qué Diana? |
| 1315. | Diana: | ¿Por qué podemos afirmar que son congruentes? |
| 1316. | Cristian: | Porque es un triángulo rectángulo y comparte un vértice. |
| 1317. | Diana: | Y… |
| 1318. | Cristian: | Ya di una idea. Complételа. |
| 1319. | Profesor L: | Faltan más cosas. |
| 1320. | Cristian: | Ufff |
| 1321. | Profesor L: | ¿Qué es una partecita de lo que se busca? |
| 1322. | Diana: | Pues lo que buscamos |
| 1323. | Cristian: | Descubrir que ese ángulo [Señala en la pantalla el $\angle CYA$.] |
| 1324. | Diana: | Pues podemos descubrir que son congruentes esos dos ángulos. Entonces sabemos que son congruentes porque… |
| 1325. | Cristian: | [Lee la definición de ángulos congruentes.] Dos ángulos son congruentes si tienen la misma medida. |
| 1326. | Diana: | Tienen la misma medida. |
| 1327. | Cristian: | ¿Cómo sabemos que esos dos ángulos tienen la misma medida Diana? |
| 1328. | Diana: | ¿Cómo se saben si tienen la misma medida? Pues midiendo. |
| 1329. | Profesor L: | Miren. Escribieron varias afirmaciones. Y con todas esas afirmaciones, ¿qué es lo último que ya saben? |
| 1330. | Diana: | ¿Lo último? |
| 1331. | Cristian: | Que tenemos dos ángulos congruentes. |
| 1332. | Profesor L: | ¿Dos ángulos? |
| 1333. | Diana: | Dos triángulos. |
| 1334. | Cristian: | Dos triángulos congruentes. |
| 1335. | Profesor L: | Entonces ya tienen que hay dos triángulos congruentes. Si ya saben eso… |
| 1336. | Cristian: | Ah, pues podemos deducir que ese vértice… ese ángulo de la parte de arriba son congruentes, ¿no? [Señala el $\angle IYK$ y el $\angle IYJ$.] Algo así. |
| 1337. | Diana: | Eso es la bisectriz. Yo sé. La cosa es la bisectriz. |
| 1338. | Profesor L: | ¿Qué caracteriza eso? |
| 1339. | Diana: | Por eso. |
| 1340. | Cristian: | Eso es lo que no sabemos. Pues lo podemos… |
| 1341. | Profesor L: | Cristian estaba leyendo algo de por acá. ¿Qué era lo que iba a leer? |
| 1342. | Cristian: | Pues esto. |
| 1343. | Profesor L: | ¡Ah! Lo de ángulos congruentes [definición]. |
| 1344. | Cristian: | Para saber si los ángulos son congruentes. Pero… |
| 1345. | Profesor L: | ¿Pero ahora no sabemos ya otra cosa? |
| 1346. | Cristian: | Que sí son congruentes. Por deducción de un triángulo. Sí porque si el ángulo es congruente y son dos triángulos… Si los dos triángulos son congruentes podemos deducir que la medida de las dos punticas de acá |

[Señala en la pantalla de Cabri del computador.] los ángulos son congruentes. Porque ya sabemos que el triángulo es congruente. ¿Cierto? Pues eso es lo que sabemos.

1347. Profesor L: ¿Qué usa para justificar?
1348. Cristian: Ummm.
1349. Diana: Ángulos opuestos por el vértice.
1350. Cristian: Nooo.
1351. Diana: [Susurra.] Ayyy. Ángulos par lineal, ¿no?
1352. Cristian: ¿Ángulos par lineal?
1353. Profesor L: ¿Ángulos par lineal?
1354. Cristian: No. Ángulos opuestos por el vértice.
1355. Profesor L: ¿Cuáles son los dos ángulos…? Ahí no hay dos rectas que se intersecan…
1356. Cristian: Ay, no, no, no.
1357. Diana: Ángulos…
1358. Profesor L: Aprovechen lo que ya saben.
1359. Profesor J: ¿Qué es lo último que saben que concluyeron?
1360. Diana: Que los dos triángulos son congruentes [Señala la conclusión de la octava afirmación.]
1361. Profesor J: ¿Y qué son triángulos congruentes?
1362. Diana: Triángulos congruentes son que tienen la misma…
1363. Cristian: Tienen todos sus lados iguales. Mentiras. No, no.
1364. Diana: [Lee la definición de triángulos congruentes en el listado.] Dos triángulos son congruentes si existe una correspondencia entre sus vértices tal que sus lados y ángulos correspondientes son congruentes. O sea que de ahí sacamos que los ángulos son congruentes porque ahí lo dice. Entonces
1365. Cristian: Eso es lo que
1366. Diana: Eso es lo que debemos escribir
1367. Cristian: […] Sabemos que el ángulo $K, Y, I$ […] y el ángulo… Claro
1368. Profesor L: ¿Eso es lo que ya saben?
1369. Cristian: No. Eso es lo que deducimos. Ah, pues eso es lo que concluimos.
1370. Diana: Que el ángulo…
1371. Cristian: $K, Y, I$ […] y el triángulo
1372. Diana: El ángulo
1373. Cristian: El ángulo $J, I, Y$ son congruentes. Son congruentes.
1374. Diana: ¿Son congruentes?
1375. Cristian: Sí. Pero, ¿cómo hacemos para llegar a eso? ¿Qué usamos para llegar a eso [Diana escribe en la columna *Qué concluyo* del noveno paso: $\angle KIY \cong \angle JIY$]?
1376. Diana: Ángulos congruentes.
1377. Profesor J: Está mal escrito. Es $K, Y, I$
1378. Cristian: Ah, sí. Están volteadas.
1379. Diana: Y, ¿$J, Y, I$?
1380. Cristian: Sí.
1381. Diana: [Corrige en la conclusión de la novena afirmación: $\angle KYI \cong \angle JYI$.] Ya.
1382. Cristian: Listo. Ahora sí.
1383. Diana: ¿Qué usamos?
1384. Profesor L: ¿Qué fue lo que usamos?
1385. Diana: [Susurra.] Triángulos congruentes. Triángulos congruentes, ¿no? [Escribe en la columna *Qué uso* de la novena afirmación: Definición de triángulos

congruentes.]

1386. Cristian: Y sabemos esto [Al parecer señala la conclusión de la octava afirmación: $\Delta IKY \cong \Delta IJY$.]

1387. Profesor J: Aja.

1388. Diana: [Escribe en la columna *Qué sé* de la novena afirmación: $\Delta IKY \cong \Delta IJY$.] Listo.

1389. Cristian: Ahora sabemos esto [Señala la conclusión de la novena afirmación: $\angle KYI \cong \angle JYI$.]

1390. Diana: Ahora nos falta [Escribe en la columna *Qué sé* de la décima afirmación: $\angle KYI \cong \angle JYI$.]

1391. Cristian: Y ahí podemos utilizar la [definición] de bisectriz de un ángulo.

1392. Diana: [Escribe en la columna *Qué uso* de la décima afirmación: Definición de bisectriz de un ángulo.] Y si utilizamos la [definición] de bisectriz de un ángulo concluimos que… concluimos…

1393. Cristian: ¿A qué tenemos que llegar?

1394. Diana: Pues dice que el punto está sobre la bisectriz del ángulo [Señala el consecuente de la conjetura.] Entonces concluimos que…

1395. Cristian: Pues ahí ya acabamos, ¿no?

1396. Diana: Pero debemos concluir algo.

1397. Cristian: Pues eso.

1398. Diana: ¿Qué?

1399. Cristian: El *entonces*.

1400. Diana: Que… que este punto [Señala el punto $I$ en la gráfica de la situación de Don Gustavo.]

1401. Cristian: Espere, espere. Leamos [Toma el listado de definiciones y hechos geométricos.] Lea y yo le pongo cuidado.

1402. Dayana: Dice: [Empieza a leer la definición de bisectriz de un ángulo.] es un rayo con extremo en el vértice y demás puntos en el interior del ángulo, tal que el rayo con los lados del ángulo forman dos ángulos congruentes.

1403. Diana: Yo creo que lo que concluimos es que… ummm… ¡Ay, juepuerca! Algo del punto […] Que el punto está sobre la bisectriz.

1404. Profesor L: Si estos dos ángulos [Retiñe y marca la congruencia del $\angle KYI$ con el $\angle JYI$.] ya dijeron que son congruentes, ¿qué pueden decir ya? Bueno. Ya saben esto [$\angle KYI \cong \angle JYI$] van a usar la definición de bisectriz de un ángulo para concluir… que ¿qué?

1405. Diana: Que gracias a la bisectriz sacamos los ángulos.

1406. Profesor L: [Susurra]

1407. Profesor J: Todavía no tienen esto [bisectriz del ángulo]

1408. Cristian: Tenemos el segmento.

1409. Profesor J: Tienen que estos dos ángulos con iguales [$\angle KYI$ y $\angle JYI$]. Son congruentes.

1410. Diana: Aja.

1411. Profesor J: Y si son congruentes entonces ¿qué?

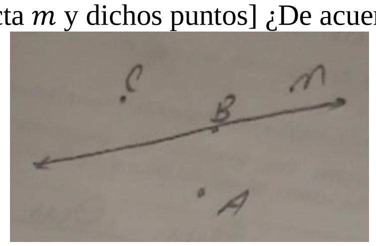
1412. Diana: ¿Cómo?

1413. Profesor J: En la definición pues léanla.

1414. Cristian: Pues conseguimos una bisectriz. Si son congruentes [$\angle KYI$ y $\angle JYI$], conseguimos una bisectriz. Entonces conseguimos la bisectriz $, I$.

1415. Profesor L: ¿Cómo se llama la bisectriz?

1416. Cristian: $Y, I$.
1417. Diana: $Y, I$.
1418. Cristian: La bisectriz sólo tiene un nombre.
1419. Profesor L: ¿Qué es la bisectriz?
1420. Profesor J: ¿Qué es la bisectriz?
1421. Cristian: La línea que
1422. Diana: Es un rayo.
1423. Profesor L: Ah, es un rayo. Y ¿cómo se nombran los rayos?
1424. Cristian: Con una letra.
1425. Profesor L: ¿Con una?
1426. Diana: Con dos. Con una letra en cada extremo, ¿no? Pues yo creo [Empieza a escribir en la columna *Qué concluyo* de la décima afirmación: Conseguimos]
1427. Cristian: Ah, la bisectriz, $I$… no porque ese es el segmento que nosotros buscamos ahí.
1428. Diana: [Continua escribiendo la conclusión de la décima afirmación: Conseguimos la bisectriz] La bisectriz…
1429. Dayana: $Y, I$
1430. Profesor L: Bisectriz… ¿Cuál?
1431. Cristian: $Y, I$
1432. Diana: $Y, I. Y, I$.
1433. Cristian: Ya.
1434. Diana: ¡Ay! [Escribe finalmente en la conclusión de la décima afirmación: Conseguimos la bisectriz $YI$]
1435. Profesor J: Ojo que es un rayo. Es una medida.
1436. Cristian: Es un rayo [Traza una flecha sobre $YI$ para indicar que éste es un rayo y no es la medida de un segmento.] Ah bueno.
1437. Profesor L: Yo sé que partimos de que el punto […] $I$ tiene igual distancia a los lados del ángulo [$\angle CYA$], ¿sí? Partimos desde ahí. ¿A dónde pretendemos llegar?
1438. Diana: A que el punto está en la bisectriz
1439. Profesor L: Que el punto está sobre la bisectriz […] Yo que puedo decir de…: Yo tengo esta recta $m$, este punto $A$, este punto $B$ y este punto $C$ [Dibuja sobre una hoja blanca la recta $m$ y dichos puntos] ¿De acuerdo?




1440. Diana: Aja
1441. Profesor L: […] ¿Qué relación podría establecer entre el punto $C$ y la recta $m$ [Escribe en la hoja una afirmación para que los estudiantes completen: $C \quad m$]?
1442. Cristian: Que son…
1443. Diana: Que es una recta perpendicular [Señala el punto $C$.]
1444. Profesor L: No. Miremos […]
1445. Cristian: Que puedo conseguir un ángulo.
1446. Profesor L: No. Bueno. Entonces pongámoslo así. ¿Qué pasa con $B$ y $m$? [Escribe en la hoja otra afirmación incompleta: $B \quad m$]

1447. Diana: ¿$B$ y $m$?
1448. Profesor L: Sí
1449. Diana: Pues que $B$ está en la
1450. Cristian: Que $B$ pertenece a $m$.
1451. Profesor L: Pertenece. Pertenece.
1452. Cristian: Pertenece.
1453. Profesor L: Entonces como se escribe [con símbolos “pertenece”]
1454. Cristian: Ah, entonces la [Toma la hoja y completa el enunciado: B pertenece a m] Entonces podríamos escribir esto: […] que el punto $I$ pertenece a la bisectriz $\overrightarrow{YI}$ [Escribe sobre la hoja blanca: $I \in \overrightarrow{YI}$.]
1455. Diana: Al rayo
1456. Profesor L: O sea… Sabemos ahora esto [Señala la conclusión de la décima afirmación: Conseguimos la bisectriz $\overrightarrow{YI}$] ¿De acuerdo? Ya sabemos esto.
1457. Diana: Aja
1458. Profesor L: Cristian dice concluimos esto: [$I \in \overrightarrow{YI}$.] Hay algo que podemos usar de lo cual ya vamos a decir
1459. Cristian: El punto medio
1460. Profesor L: […] Ya esto es lo que sabemos [Señala nuevamente la conclusión de la décima afirmación: Conseguimos la bisectriz $\overrightarrow{YI}$]. ¿De acuerdo? Cristian concluye que: $I \in \overrightarrow{IY}$.
1461. Diana: Sí.
1462. Profesor L: ¿Qué se usó? Escribamos primero eso [$I \in \overrightarrow{YI}$]
1463. Diana: […] [Escribe como conclusión de la undécima afirmación: $I \in \overrightarrow{YI}$]
1464. Cristian: Definición de […]
1465. Profesor L: Bueno, ¿qué se sabe?
1466. Diana: Punto medio. Definición de punto medio, ¿no?
1467. Cristian: No…
1468. Profesor L: Si porque vea que ahí dice que pertenece [Señala en el listado una parte de la definición de punto medio: $M$ es punto medio de $\overline{AB}$ si $M \in \overline{AB}$]
1469. Cristian: No porque pertenece a un segmento.
1470. Profesor L: ¡Ah! No busquemos definiciones acá [en el listado] donde aparezca “pertenece”, ya es ese porque aparece el símbolo de pertenece.
1471. Profesor J: Bueno. ¿Qué sé?
1472. Profesor L: Pero sí podemos escribir algo que sabemos. Sabemos esto [Señala la conclusión de la décima afirmación: Conseguimos la bisectriz $\overrightarrow{YI}$.]
1473. Diana: ¿Qué sabemos? Pues la bisectriz $Y, I$ [Empieza a escribir en la columna *Qué sé* de la undécima afirmación: Bisectri]
1474. Profesor J: Que $Y, I$ [$\overrightarrow{YI}$] es la bisectriz de [$\angle CYA$]
1475. Cristian: Ah, que
1476. Dayana: Bisectriz del ángulo
1477. Cristian: […] No escriba así. Escriba que: La bisectriz del ángulo, ¿no?
1478. Dayana: Aja.
1479. Diana: [Borra lo que empezó a escribir en la columna *Qué sé* de la undécima afirmación: Bisectri]
1480. Cristian: La bisectriz del ángulo… ¿cómo se llama? $C, Y, A$.
1481. Diana: [Escribe en la columna Qué sé de la undécima afirmación: La bisectriz del $\angle CYA$ es $\overrightarrow{YI}$]

| | | |
|---|---|---|
| 1482. | Profesor L: | Miren acá en Cabri. Ese punto está ahí [Señala en la pantalla el punto $I$]. ¿Ese punto pertenece a la bisectriz, ya después de haber hecho todas las justificaciones pertinentes? Sí. Sé que dentro de las clases y lo que hemos trabajado no utilizamos esa definición pero hay una definición en matemáticas que se llama "definición pertenecer a" Entonces uno puede emplear esa definición para decir si pertenece o no pertenece. Cuando yo les preguntaba, por ejemplo dada esta recta [$m$] y dados estos puntos [$A, B, C$] [Señala la hoja en la que dibujó la recta $m$ y tres puntos.], yo podría […] usar esa definición. Por ejemplo, si yo uso esa definición, ¿qué puedo decir de $C$ con respecto a $m$? |
| 1483. | Diana: | Que $C$ pertenece a… Ah, no. |
| 1484. | Profesor L: | Que $C$ |
| 1485. | Cristian: | Pertenece a $m$. |
| 1486. | Profesor L: | [Escribe en la hoja $C \in m$.] ¿C pertenece a m? |
| 1487. | Cristian y Diana: | No. |
| 1488. | Profesor L: | C no pertenece a m [Completa la anterior afirmación, escribiendo que $C \notin m$.] |
| 1489. | Diana y Cristian: | ¡Aaah! |
| 1490. | Profesor L: | […] si me dijeron que $B$ pertenece a $m$, ¿qué pasa con $A$? |
| 1491. | Cristian y Diana: | Que [$A$] no pertenece a $m$. |
| 1492. | Profesor L: | ¿Y qué pasa con $I$ [con respecto a la recta $\overleftrightarrow{YI}$?] [Señala en la pantalla del computador.] |
| 1493. | Cristian: | Que pertenece a… |
| 1494. | Diana y Cristian: | $Y$. |
| 1495. | Profesor L: | A $I, Y$. |
| 1496. | Cristian: | A $I, Y$. |
| 1497. | Profesor L: | ¿$I, Y$ quién es? |
| 1498. | Cristian y Diana: | La bisectriz. |
| 1499. | Profesor L: | Es la bisectriz […] del ángulo [$\angle CYA$] |
| 1500. | Cristian: | Entonces [usamos la] definición de pertene |
| 1501. | Profesor L: | pertenecer a |
| 1502. | Diana: | ¿De pertenecer a? |
| 1503. | Profesor L: | Aja |
| 1504. | Diana: | [Escribe en la columna *Qué uso* de la undécima afirmación: Definición Pertenecer a.] |
| 1505. | Cristian: | Y ya. Listo. |
| 1506. | Profesor L: | Ya habíamos hecho el ejercicio. ¿Se acuerdan el de… el del triángulo isósceles [Hecho geométrico del triángulo isósceles: Si un triángulo es isósceles entonces los ángulos opuestos a los lados congruentes son congruentes.]? Que hicieron unas justificaciones y que empleaban unos diagramas: el rectángulo, el óvalo, … |
| 1507. | Diana: | Aaaah. Sí, sí, sí. |
| 1508. | Profesor L: | […] nosotros utilizamos una serie de definiciones y hechos geométricos |

para justificar una conjetura. […] Cuando se utilizan todas esas definiciones y hechos geométricos para justificar una conjetura, decimos que esa conjetura es un teorema. O sea, ya no hablamos de un hecho geométrico, ni hablamos de una definición, sino que hablamos de un teorema. Por eso la tarea [No. 7: Justificación de TeoPELAn] se llamaba: Teorema Puntos Equidistantes… Ustedes no dijeron en ningún lado puntos equidistantes pero uno sí sabe qué significa la palabra “equidistantes”. ¿Qué significa equidistante?

| | | |
|---|---|---|
| 1509. | Diana: | La… |
| 1510. | Profesor L: | Equidistante |
| 1511. | Cristian: | Equi… |
| 1512. | Diana: | Equi… equidad |
| 1513. | Cristian: | Equi… |
| 1514. | Diana: | Si, equivale, equivalente |
| 1515. | Profesor L: | Equivalente, o sea… |
| 1516. | Cristian: | A una distancia |
| 1517. | Profesor L: | O sea ¿a cuál distancia? |
| 1518. | Cristian: | Aaaa |
| 1519. | Profesor L: | Así, cuando uno habla de triángulo equilátero, triángulos que tiene igual […] longitud de los lados […] Teorema Puntos Equidistantes a los Lados de un Ángulo |
| 1520. | Cristian y Diana: | TeoPELAn [Risas.] |
| 1521. | Profesor L: | Esa conjetura ahora es un teorema porque finalmente ustedes la demostraron con hechos geométricos y definiciones. Gracias muchachos. [FIN DE LA GRABACIÓN] |