	FORMATO
UNIVERSIDAD PEDAGOGICA NACIONAL	LICENCIA DE USO DEL TRABAJO Y/O TESIS DE GRADO A FAVOR DE LA BIBLIOTECA CENTRAL DE LA UNIVERSIDAD PEDAGOGICA NACIONAL
CODIGO: FOR021GIB	Versión: 01
Fecha de Aprobación: 10-10-2012	Página 1 de 2

Bogotá, D.C., 28 de febrero de 2013

Señores

Biblioteca Central

UNIVERSIDAD PEDAGÓGICA NACIONAL

Cuidad

Los suscritos:

Luis Eduardo Cock Bautista	, con C.C. No	**11275745 de Cajicá**
Diego Rodríguez Ramos	, con C.C. No	**80733766 de Bogotá**
	, con C.C. No	

En mi (nuestra) calidad de autor (es) exclusivo (s) de la obra titulada:

Una tesis de cero: Concepciones de los estudiantes de prima y seconda elementare del colegio italiano Leonardo da Vinci acerca del cero cardinal y posicional

(por favor señale con una "X" las opciones que apliquen) Tesis ____ Trabajo de Grado _X_ presentado en el año 2013, por medio del presente escrito autorizo (autorizamos) a la Biblioteca Central de la Universidad Pedagógica Nacional para que, en desarrollo de la presente licencia de uso parcial, pueda ejercer sobre mi (nuestra) obra las atribuciones que se indican a continuación, teniendo en cuenta que en cualquier caso, la finalidad

perseguida será facilitar, difundir y promover el aprendizaje, la enseñanza y la investigación.

En consecuencia, las atribuciones de usos temporales y parciales que por virtud de la presente licencia se autorizan a la Biblioteca Central de la Universidad Pedagógica Nacional, a los usuarios de la Biblioteca Central, así como a los usuarios de las redes, bases de datos y demás sitios web con los que la Universidad tenga perfeccionado un convenio, son:

AUTORIZO (AUTORIZAMOS)	SI	NO
1. La conservación de los ejemplares necesarios en la Biblioteca	X	
2. La consulta física o electrónica según corresponda	X	
3. La reproducción por cualquier formato conocido o por conocer		
4. La comunicación pública por cualquier procedimiento o medio físico o electrónico, así como su puesta a disposición en Internet	X	
5. La inclusión en bases de datos y en sitios web sean éstos onerosos o gratuitos, existiendo con ellos previo convenio perfeccionado con la Biblioteca Central de la Universidad Pedagógica Nacional para efectos de satisfacer los fines previstos. En este evento, tales sitios y sus usuarios tendrán las mismas facultades que las aquí concedidas con las mismas limitaciones y condiciones	X	
6. La inclusión en el repositorio digital de la Biblioteca Central de la Universidad Pedagógica Nacional	X	

De acuerdo con la naturaleza del uso concedido, la presente licencia parcial se otorga a título gratuito por el máximo tiempo legal colombiano, con el propósito de que en dicho lapso mi (nuestra) obra sea explotada en las condiciones aquí estipuladas y para los fines indicados, respetando siempre la titularidad de los derechos patrimoniales y morales correspondientes, de acuerdo con los usos honrados, de manera proporcional y justificada a la finalidad perseguida, sin ánimo de lucro ni de comercialización. Por su parte, la Universidad Pedagógica se obliga con los autores a proporcionar los medios razonables que impidan la reproducción o transformación de los textos.

De manera complementaria, garantizo (garantizamos) en mi (nuestra) calidad de estudiante (s) y por ende autor (es) exclusivo (s), que la Tesis o Trabajo de Grado en cuestión, es producto de mi (nuestra) plena autoría, de mi (nuestro) esfuerzo personal intelectual, como consecuencia de mi (nuestra) creación original particular y, por tanto, soy (somos) el (los) único (s) titular (es) de la misma. Además, aseguro (aseguramos) que no contiene citas, ni transcripciones de otras obras protegidas, por fuera de los límites autorizados por la ley, según los usos honrados, y en proporción a los fines previstos; ni tampoco contempla declaraciones difamatorias contra terceros; respetando el derecho a la imagen, intimidad, buen nombre y demás derechos constitucionales. Adicionalmente, manifiesto (manifestamos) que no se incluyeron expresiones contrarias al orden público ni a las buenas costumbres. En consecuencia, la responsabilidad directa en la elaboración, presentación, investigación y, en general, contenidos de la Tesis o Trabajo de Grado es de mí (nuestro) competencia exclusiva, eximiendo de toda responsabilidad a la Universidad Pedagógica Nacional, por tales aspectos.

Sin perjuicio de los usos y atribuciones otorgadas en virtud de este documento, continuaré (continuaremos) conservando los correspondientes derechos patrimoniales sin modificación o restricción alguna, puesto que de acuerdo con la legislación colombiana aplicable, el presente es un acuerdo directo que en ningún caso conlleva la enajenación de los derechos patrimoniales derivados del régimen del Derecho de Autor.

De conformidad con lo establecido en el artículo 30 de la Ley 23 de 1982 y el artículo 11 de la Decisión Andina 351 de 1993, *"Los derechos morales sobre el trabajo son propiedad de los autores"*, los cuales son irrenunciables, imprescriptibles, inembargables e inalienables. En consecuencia, la Universidad Pedagógica Nacional está en la obligación de RESPETARLOS Y HACERLOS RESPETAR, para lo cual tomará las medidas correspondientes para garantizar su observancia.

NOTA: Información Confidencial:

Esta Tesis o Trabajo de Grado es una obra inédita, que contiene información privilegiada, estratégica, secreta, confidencial y demás similar, o hace parte de una investigación que se adelanta y cuyos resultados finales no se han publicado. Si ____ No __X__. En caso afirmativo expresamente indicaré (indicaremos), en carta adjunta, tal situación con el fin de que se mantenga la restricción de acceso.

NOMBRE COMPLETO	No. Documento Identidad	FIRMA
Luis Eduardo Cock Bautista	11275745 Cajicá	
Diego Rodríguez Ramos	80733766 Bogotá	

FACULTAD Ciencia y Tecnología

PROGRAMA ACADÉMICO: Maestría en docencia de las Matemáticas

UNA TESIS DE CERO: CONCEPCIONES DE LOS ESTUDIANTES DE PRIMA Y SECONDA ELEMENTARE DEL COLEGIO ITALIANO LEONARDO DA VINCI ACERCA DEL CERO CARDINAL Y EL CERO POSICIONAL

Eduardo Cock Bautista

Diego Rodríguez Ramos

Director

María Nubia Soler Álvarez

UNIVERSIDAD PEDAGÓGICA NACIONAL

FACULTAD DE CIENCIA Y TECNOLOGÍA

MAESTRÍA EN DOCENCIA DE LA MATEMÁTICA

BOGOTÁ D.C

2012

UNIVERSIDAD PEDAGOGICA NACIONAL

Educadora de educadores

FACULTAD DE CIENCIA Y TECNOLOGÍA
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS

ACTA DE EVALUACION DE TESIS DE GRADO

Escuchada la sustentación del Trabajo de Grado titulado "Una tesis del cero: concepciones de los estudiantes de prima y seconda elementare del Colegio Lonardo Da Vinci acerca del cero cardinal y el cero posicional" presentado por los estudiantes:

Luis Eduardo Cock Bautista - 2009185006
Diego Rodriguez Ramos - 2009185021

Como requisito parcial para optar al título de **Magister en Docencia de la Matemática**, analizado el proceso seguido por los estudiantes en la elaboración del Trabajo y evaluada la calificación del escrito final, se le asigna la calificación de **Aprobado** con **47 puntos.**

Observaciones:

En constancia se firma a los 27 días del mes de febrero de 2013.

JURADOS

Director(a) del Trabajo: Profesor(a) *María Nubia Soler Alvarez*

Jurados:

Profesor(a) *Cristina Cruz Fonseca*

Profesor (a) *Claudia Salazar Amaya*

Para todos los efectos, declaramos que el presente trabajo es original y de nuestra total autoría; en aquellos casos en los cuales hemos requerido del trabajo de otros autores o investigadores, hemos dado los respectivos créditos.

RESUMEN ANALÍTICO EN EDUCACIÓN

1. Información General	
Tipo de documento	Tesis de Grado de Maestría de Investigación.
Acceso al documento	Universidad Pedagógica Nacional. Biblioteca Central
Título del documento	Una tesis de cero: Concepciones de los estudiantes de prima y seconda elementare del colegio italiano Leonardo da Vinci acerca del cero cardinal y posicional.
Autor(es)	Rodríguez Ramos, Diego; Cock Bautista, Eduardo
Director	Soler Álvarez, María Nubia
Publicación	Bogotá, Universidad Pedagógica Nacional
Unidad patrocinante	Universidad Universidad Pedagógica Nacional
Palabras Claves	Concepciones, Cero cardinal, Cero posicional, Valor Posicional, conteo, componer, cardinal.

2. Descripción
Tesis de maestría que propone la caracterización de las concepciones de niños de primerio y segundo de primaria de la Istituzione Leonardo da Vinci acerca de cero. Se muestra como este objeto ha sido elemento de discusión en el aula de clase, a través de las actividades realizadas en la institución, pasando de una problemática docente a un problema de investigación. Los trabajos realizados en torno al cero diferencian entre tres objetos matemáticos a saber: el cero como número *cardinal*, el *cero posicional* en la escritura de numerales en un sistema de numeración y el cero como primer elemento de la secuencia numérica de los números naturales (*cero ordinal*), sin embargo, el interés de este documento es el de se profundiza en el estudio de los dos primeros. Los resultados obtenidos muestran, de manera general, que algunas concepciones que tienen los estudiantes del *cero cardinal* influyen en aquellas concepciones del *cero posicional*.

3. Fuentes

Las siguientes fuentes bibliográficas son consideradas parte esencial del marco teórico y de referencia del trabajo de grado aquí presentado, ya que brindan información fundamental alrededor del objeto matemático cero, así como también dan elementos necesarios para la construcción de algunos de los instrumentos de recolección de datos usados en la metodología de análisis.

Angeli, A., & Leone, T. (2012). *Io, tu e Pilú.* Firenze: Giunti scuola.

Anthony, G., Whashaw, M. (2004). *Zero: A "none" number?.* En: Teaching Children Mathematics, v.11 n.1 p.38 - 50. Agosto.

Bassedas, M., & Sellares, R. (1982). *La construcción individual del sistema de numeración convencional.* Revista infancia y aprendizaje, 75-88.

Chamorro, M. d., Belmonte, J., Ruiz, M., & Rubio, F. (2005). *Didáctica de las matemáticas.* Madrid: Pearson Pentice Hall.

D´amore, B. (2007). Zero, da ostacolo epistemologico ad ostacolo didattico. *La matematica e la sua didattica* , 425-454.

D´Amore, B., & Fandiño, M. (2009). *Zero. Aspetti concettuali e didattici.* Italia: Erickson.

Godino, J., & Batanero, C. (2003). *Sistemas numéricos y su didactica para maestros.* proyecto EDUMAT. Granada.

Gutierres, A. (1991). Las investigaciones en didactica de las matemáticas. In A. Gutierres, *Las investigaciones en didactica de las matemáticas.* Madrid: Sintesis.

Luque, C., Jimenez, H., & Ange, J. (2009). *Actividades de matemáticas para el desarrollo de procesos lógicos. Representar estructuras algebráicas y numéricas.* Bogotá: UPN.

MEN. (1999). *Lineamientos curriculares de matemáticas.* Bogotá: MEN.

Orozco, M., & Bedoya, E. (1991). El niño y el sistema de numeraciòn decimal. *Comunicaciòn, Lenguaje y Educación* , 55 - 62.

Orozco, M. (1994). *Los niños y sus dificultades en el sistema e numeración base diez. Comunicaciòn, Lenguaje y Educación* , 34 - 56.

Rico, L., & Castro, E. (2004). *Números y operaciones. Fundamentos para una aritmética escolar.*

Malaga: Dykison.

Terigi, F., Wolman, S. (2007). *Sistemas de numeración: consideraciones acerca de su enseñanza.*Revista iberoamericana de educación, 59 - 83.

Torres, J., & Mora, L. (2004). *Concepciones de estudiantes de licenciatura sobre números reales.* Bogotá: UPN.

4. Contenidos

Este trabajo de grado está compuesto por 5 capítulos cuyo contenido se describen a continuación:

Problema de investigación: El objetivo de este capítulo es el de justificar el problema de investigación y su pertinencia, realizando para ello una descripción de las actividades realizadas y una ubicación del trabajo en el contexto curricular de la institución, esto con la finalidad de mostrar el origen del problema de investigación como resultado de una problemática docente. De igual forma, se trata de mostrar que este documento aporta a la investigación didáctica del cero, ya que, complementa y ofrece información en relación a las concepciones individuales propias. Por último, se plantea la problemática alrededor del cero y se establece el objetivo general del trabajo de grado, que consiste en identificar y categorizar las concepciones de algunos estudiantes de primero y segundo grado acerca del cero.

Marco teórico: En este capítulo se destaca el significado del cero cardinal desde la teoría de conjuntos, considerado como el cardinal del conjunto vacío, de igual forma se describe las características de un sistema posicional y el papel que juega el cero en estos, encontrando elementos necesarios para el análisis de los resultados como lo son los procesos de componer y descomponer. El estudio realizado en este capítulo aporta objetos fundamentales para la construcción de los instrumentos y para el posterior análisis de la información.

Metodología: En este capítulo se describe la metodología seguida para la elaboración del trabajo de grado, la cual incluye, entre otras cosas, la población y los instrumentos de recolección de datos que se aplicaron para obtener la información, así como también se presenta una descripción de cada una de las etapas (cero cardinal y posicional) establecidas para la realización del análisis de la información recolectada por medios escritos o videograbaciones.

Análisis de resultados: En este capítulo se presenta el análisis de las respuestas obtenidas durante la aplicación de cada técnica de recolección, teniendo en cuenta la tipología de respuestas previstas en el cero cardinal y en el cero posicional. Las argumentaciones dadas por los estudiantes en referencia con la naturaleza de cada uno de los ceros que se encuentran en las actividades propuestas se analizaron bajo las categorías de análisis con la finalidad de poder concluir que tipo de concepción tiene los estudiantes y si esta cumple de manera completa con las características necesarias y suficientes de un cero cardinal o un cero posicional.

Conclusiones: En este capítulo se destacan los resultados obtenidos del análisis de los resultados, en referencia con las concepciones del cero que los estudiantes de primero y segundo tienen del objeto.

Bibliografía: Se presenta el listado de manera específica de los documentos consultados como apoyo de referencia del trabajo de grado.

5. Metodología
Las características de la investigación aquí realizada para abordar las concepciones del cero, se ubican en el diseño de una metodología propia, en la cual se destacan dos momentos: *i)* la construcción y filtración de los instrumentos bajo el sustento teórico y *ii)* la metodología de análisis usada para identificar y caracterizar las concepciones de los niños a través de los instrumentos aplicados. Se presenta una descripción de cada uno de estos momentos, encontrando

en dicha descripción la población, las técnicas de recolección de la información e instrumentos y la metodología de análisis usada para el estudio realizado al rededor del objeto matemático cero.

6. Conclusiones

A partir del análisis de los datos recolectados a través de los dos instrumentos implementados es posible concluir que:

Referente al cero cardinal se tiene:

Durante el desarrollo de esta investigación se ha establecido que un niño alcanza una concepción completa de cero en su aspecto cardinal: *(i)* si determina que cero es el número cardinal correspondiente a cualquier colección vacía; y si de manera inversa establece que, *(ii)* si se ha utilizado a cero como el cardinal de una cierta colección a esta no pertenece elemento alguno.

Como demuestran investigaciones anteriores y se reafirma en esta, existe un conocimiento social de los niños de la representación **0,** del cero cardinal. Así, desde temprana edad los niños son capaces de interpretar, usar y asociar a cero con la acción de *no hacer nada*, o con hechos como el *no tener nada* o el *no tener ninguno*. Sin embargo, es importante tener en cuenta que expresiones sociales tales como **nada** o **ninguno,** y que hacen referencia a cero desde un contexto social, son carentes de significado si no existe claridad en la definición por compresión de la colección que se afirma es vacío.

En otros términos, se afirma que, cuando se trata de reconocer a cero como el representante de la clase de equivalencia de algún conjunto equipotente a vacío *(ii)*, el camino se encuentra ya recorrido, siempre y cuando el niño establezca una clara definición por compresión del conjunto vacío al cual hace referencia.

Por otro lado, se sostiene que el énfasis en lograr que un niño tenga una concepción completa del cero cardinal debe centrarse en el proceso de entender que 0 es el representante de la clase de equivalencia de toda colección vacía. Pero para el desarrollo de este proceso es importante tener en cuenta que, determinar el cardinal de una colección vacía:

- Depende en gran parte de la claridad que se tenga acerca de la definición por compresión de esta y del contexto a la que pertenezca.

  En efecto, cuando un niño debe determinar el cardinal de una colección cuyos elementos observa esta infiriendo, por la extensión, la manera en que este se encuentra definido. Nótese que no es posible proceder de igual manera cuando se trata de la cardinalización una colección vacía, donde la única vía en la definición de la colección es la compresión de los elementos que la conforman.

- Está influenciada por índices perceptivos, específicamente por índices visuales.

  La información recolectada y analizada muestra que algunos niños están gobernados por la visión. Estos niños, no reconocen la existencia de una colección vacía ante la usencia de elemento alguno que la defina por extensión, lo cual los lleva a considerar que no hay alguna colección de la cual se deba determinar su cardinal.

- Implica una transición: asociar un número a vocablos comunes socialmente establecidos.

  En el contexto de lo cotidiano basta con utilizar palabras del vocabulario común como *nada* o *ninguno* para referirse al cardinal de una colección vacía. Así, hay niños que son capaces de reconocer la existencia de una colección ante la ausencia de sus elementos; sin embargo, no hacen uso explícito del número cero para referirse a su cardinal y a cambio utilizaran palabras socialmente equivalentes como *nada* o *ninguno*.

  De estos niños se esperaría que logren relacionar que, el hecho de que "*no tener ninguna pera*" es equivalente al de tener "*cero peras*"; asociando de esta manera que el tener *nada de algo* o *ninguno de un algo* significa tener *cero de ese algo*.

Los resultados obtenidos muestran además que, efectivamente hay un grupo de niños que logran superar los obstáculos visuales y las asociaciones con vocablos comunes, para lograr determinar la función que tiene el cero cardinal como el número natural que describe la cantidad total de elementos de una colección vacía bien definida de objetos discretos.

Por último, se tiene que algunos niños muestran estar en la intersección de lo visual, lo social y lo matemáticamente establecido para determinar el cardinal de colecciones vacías. Así, estos niños ante la tarea de cardinalización de una colección vacía de objetos discretos bien definidos, algunas veces omitirán la cardinación ante la ausencia visual de sus elementos, otras veces utilizaran palabras socialmente equivalentes como *nada* o *ninguno* y en otras ocasiones harán uso del número cero. La elección en el proceder de estos niños estará mediada por la especificidad del contexto y forma en la que la tarea se les se propuesta.

Hasta este momento se han presentado las conclusiones *practicas* acerca de las concepciones de los niños objeto de estudio en cuanto a los instrumentos implementados, los datos recolectados y el análisis desarrollado. Sin embargo, para finalizar este apartado de las conclusiones, se considera relevante presentar dos conclusiones más, emergentes de una reflexión sistemática de dos de los elementos que sustentan teóricamente la investigación desarrollada:

- Aunque, matemáticamente, todas las colecciones vacías sean cardinables con el número 0 y el principio de abstracción de Gelman y Gallistel sostenga que, "*contar una colección supone interesarse solo por el aspecto cuantitativo de la misma, dejando de lado las características físicas de los objetos contados*"(Ver apartado 2.1.2.1.2); se considera que la introducción de un contexto específico de utilización del número y el de hecho explicitar por compresión la colección cuyo cardinal se desea escribir, (es decir, *interesarse por el aspecto cualitativo del colección*), son elementos conceptualmente necesarios para los niños en la tarea de comprender y hacer uso del cero como el cardinal de una colección vacía.

Finalmente se llama la atención sobre la aparente diferencia entre los resultados de investigaciones como las de D'Amore (2007) y Sheffield y Cruikshank (2001). Los resultados de la investigación aquí desarrolla muestra que, los resultados de estas investigaciones no son contradictorias sino que son distintos, en cuanto cada uno de estos autores se enfoca en un proceso distinto del uso e interpretación del cero como cardinal. Mientras que D'Amore se interesa en investigar la manera en que los niños definen colecciones vacías cuyo cardinal dado es 0 (entre otro aspectos), Sheffield y Cruikshank (2001) centran su atención en la manera en que los niños efectúan la tarea de cardinalización con cero de colecciones vacías ya definidas. Este resultado cambiará seguramente, las perspectivas en las consideraciones didácticas a tener en cuenta en estudios posteriores, que tengan como objeto de estudio al cero cardinal; Sumando una diferenciación teórica importante, que evitará confusiones innecesarias al interpretar los resultados de las investigaciones en el campo.

Referente al cero posicional se tiene:

- El cero en un sistema posicional tiene dos características: Es el resultado de un número de agrupaciones suficientes y corresponde al cardinal de un *conjunto vacío complemento* en una posición dada, características que para algunos estudiantes no son naturales, ya que consideran que el cero es la simple representación de un conjunto vacío, lo que conlleva a no identificar diferencia alguna entre los ceros en cada una de las posiciones dadas en un numeral.

- A través de las situaciones se observó, que los estudiantes que no comprenden la importancia de los procesos de composición y descomposición para la justificación del cero en un sistema posicional encuentran dificultad para entender que el cero representa el cardinal de un *conjunto complemento* y de la misma forma reconocer que el cero posicional es un número que puede representar algo y nada al mismo tiempo.

- El ser más natural para los estudiantes el proceso de *representar lo determinado por un cardinal dado,* con lleva a no reconocer que la existencia del cero en cada uno de los órdenes es producto de la agrupación de unidades inferiores, es decir, presentan dificultad para justificar a partir del *principio del valor relativo,* característica propia de los sistemas de numeración posicionales, la existencia de cada uno de los ceros.

- Las situaciones aplicadas, muestran una tendencia de los estudiantes a representar simplemente el cardinal observado, proceso propio de las actividades de cardinación.

- La aceptación de comprender al cero como **“nada”** o **“ninguno”**, propicia en los estudiantes dificultades en reconocer diferencias de este elemento en actividades de numerales en un sistema posicional, es decir, para el estudiante será difícil encontrar una diferencia entre el cero de las decenas y el cero de las unidades, ya que, simplemente representan lo mismo **“nada”.**

Elaborado por:	Rodríguez Ramos, Diego; Cock Bautista, Eduardo
Revisado por:	Soler Álvarez, María Nubia

Fecha de elaboración del Resumen:	28	02	2013

CONTENIDO

0. INTRODUCCIÓN

En este documento se presenta un estudio alrededor del objeto matemático cero, considerado, en las últimas dos décadas, un objeto de investigación importante en la parte didáctica de la matemática, ya que, hace parte fundamental en la adquisición de otros conceptos matemáticos como lo son la medida, las ecuaciones, los algoritmos de las operaciones, entre otros y en donde toma un papel protagónico. Teniendo en cuenta lo anterior, el trabajo tiene como objetivo el identificar y caracterizar las concepciones de cero que tienen los estudiantes de prima y seconda de la institución educativa Leonardo Da Vinci, reconociendo la dificultad que algunos de los estudiantes presenta en el identificar la naturaleza del cero en un sistema posicional.

Es de rescatar, que las investigaciones realizadas en torno a este objeto han ofrecido un amplio campo de información, entre las cuales sobresale la identificación de tres objetos matemáticos a saber: el cero como número *cardinal*, el cero como *posicional* en la escritura de numerales y el cero como primer elemento de la secuencia numérica de los números naturales (*cero ordinal)*, sin embargo, será de nuestro interés profundizar en los dos primeros.

Por las anteriores razones, se realizará en un primer momento, la descripción de algunas investigaciones cuyo objeto de estudio ha sido el cero en niveles escolares, destacando de esta manera la pertinencia del estudio de las concepciones del cero y ubicando ésta trabajo en el campo investigativo de la didáctica como elemento aportador al aspecto de la enseñanza y el aprendizaje. Por otro lado, se determinarán las componentes importantes para el análisis de los resultados y la construcción de los instrumentos de recolección de información, a partir del estudio de documentos base descritos en el marco teórico aquí presentado, y de esta manera presentar un marco metodológico acorde a la intención del trabajo investigativo.

Por último, se presentará el análisis de los resultados obtenidos durante el proceso de recolección de información y de igual forma el conjunto de conclusiones obtenidas alrededor de las concepciones de los niños de prima y seconda elementare.

CAPÍTULO 1. PROBLEMA DE INVESTIGACIÓN

El Colegio italiano Leonardo da Vinci es una institución educativa que desde hace más de cincuenta años ha construido una oferta educativa para la comunidad de inmigrantes italianos y familias colombianas, interesadas en educar a sus hijos en el marco de un modelo de educación binacional, en lengua italiana, que responde a las exigencias académicas de ambos países y es avalada por sus ministerios de educación.

Como resultado de la interculturalidad con la que se concibe el colegio, éste cuenta con una planta docente compuesta por profesionales de ambas nacionalidades; los cuales comparten y construyen continuamente experiencias y prácticas educativas que atiendan a las necesidades culturales, sociales y curriculares tanto de Colombia como de Italia.

En particular, desde hace más de veinte años, los docentes de matemáticas de la institución adoptaron la metodología italiana de los cubos de Dienes, como una estrategia didáctica que permite desarrollar en los estudiantes la compresión del sistema de numeración decimal y la construcción de los algoritmos tradicionales de la adición, la sustracción, la multiplicación y la división a partir de la manipulación. En el caso del sistema de numeración decimal, este material permite representar de manera concreta a una cierta cantidad de numerales, de hasta cuatro cifras, en distintas bases numéricas como lo son: la base dos, tres, cuatro, cinco, seis y diez.

La premisa de trabajo es clara:

Construir en los estudiantes el conocimiento acerca de los sistemas posicionales de numeración en distintas bases y presentar al sistema de numeración decimal, como un caso particular de estas.

De esta manera, durante gran parte del segundo grado de primaria, los niños desarrollan actividades que pretenden desarrollar su evolución en la compresión en la forma en que funcionan los sistemas de numeración posicionales, realizando actividades de agrupación en las distintas bases de numeración mencionadas.

El problema de investigación que esta tesis plantea, nace precisamente de la identificación recurrente de algunas de las dificultades que enfrentan los niños al interpretar la función y uso del cero cardinal y el cero posicional, en la escritura de numerales en distintas bases, a partir de las actividades de agrupación previas a la manipulación de los bloques de Dienes.

En consecuencia a lo anterior, este primer capítulo describe en detalle el tipo de actividades de agrupación que desarrollan los estudiantes y el conjunto de dificultades recurrentes que a estas pueden ser asociadas, desde una perspectiva docente. A continuación, se presenta una interpretación de dichas dificultades, a la luz de los resultados de investigaciones anteriores, para demostrar que la problemática docente abordada, alrededor de cero, es compleja y puede considerarse como un legítimo problema de investigación, con un lugar específico en el campo de la Didáctica. Finalmente, se presenta el objetivo general y aquellos específicos, que se persiguen ante la labor de identificar y caracterizar las concepciones de los niños de primero y segundo de primaria del colegio italiano Leonardo da Vinci, acerca del cero posicional y el cero cardinal.

1.1 Un Problema de Investigación

Se comienza por describir el tipo de actividades que desarrollan los estudiantes de los grados *prima* y *seconda elementare* (primero y segundo de primaria, respectivamente), del colegio italiano Leonardo da Vinci, para contextualizar de una manera clara la problemática docente que dio origen al problema de investigación que se plantea en este trabajo.

Los doce integrantes del grupo de matemáticas del colegio, en su sección primaria, acogen y comparten los planteamientos teóricos presentes en los Lineamientos curriculares en

Matemáticas (1994, p. 26):, reconociendo la importancia de apoyar el desarrollo del pensamiento numérico de los estudiantes desde los tres ejes básicos que allí se plantean

- Comprensión de los números y la numeración.
- Comprensión de concepto de las operaciones.
- Cálculos con números y aplicaciones de números y operaciones.

La manera concreta en que se pretende desarrollar el pensamiento numérico de los estudiantes a través de estos tres ejes, puede ser vista a través de los programas de matemáticas, los cuales a partir de *contenidos*, *objetivos específicos* e *indicadores de competencia* permiten detallar el tipo de actividades que se desarrollan.

1.1.1 Descripción general del tipo de actividades desarrolladas con los estudiantes de prima elementare

Del programa de matemáticas para el primer grado, se destacan a continuación aquellos contenidos, objetivos e indicadores que guardan relación con el aprendizaje del uso y significado de los números naturales desde su aspecto cardinal, ordinal y la compresión inicial del sistema de numeración decimal.

Tabla 1.

Contenidos, objetivos específicos e indicadores de competencia relacionados con el desarrollo del pensamiento numérico de los estudiantes del grado prima elementare.

Contenido	Objetivos específicos	Indicadores de competencia
Números naturales hasta el 20	• Usar los números naturales en su aspecto cardinal hasta 20. • Usar los números naturales en su aspecto ordinal hasta 10.	• Reconocer el número como símbolo que representa una cantidad. • Reconocer el número como símbolo que representa una posición en un orden dado.
Relaciones de equivalencia y orden entre cantidades	• Establecer relaciones de equivalencia entre dos o más cantidades.	• Establece relaciones de equivalencia entre dos o más cantidades.
Introducción al valor posicional	• Aproximase a conocimiento del valor posicional de las cifras.	• Realizar agrupaciones de primer orden. • Verbalizar el resultado obtenido al desarrollar distintas agrupaciones. • Identificar el número de unidades y grupos que resultan de las agrupaciones. • Identificar y desarrollar agrupaciones en distintas bases numéricas: dos, tres, cuatro, cinco, seis, siete, ocho, nueve y diez.
Adición y sustracción de números naturales hasta 20	• Comprender la función aditiva. • Comprender la función aditiva y la sustracción relación inversa.	• Desarrollar adiciones entre el 20 y las representa de distintas maneras. • Desarrollar sustracciones entre el 20 y las representa de distintas maneras.
Histogramas para la representación gráfica de datos	• Representa y lee situaciones concretas con gráficos a barras.	• Representa encuestas simples con bloques de construcción y los registra gráficamente. • Construye diagramas de barras de una encuesta dada.

Se describirán a continuación las generalidades en el tipo de actividades propuestas y desarrolladas por los estudiantes de prima elementare, que se supone contribuyen en el desarrollo de su pensamiento numérico, teniendo en cuenta los objetivos específicos y los indicadores de competencia presentados en la tabla 1, y, los tres ejes básicos de desarrollo enunciados anteriormente.

En referencia a la *compresión de los números*, se desarrollan prácticas educativas encaminadas a la apropiación del *concepto de número*, por parte de los estudiantes[1]. Se destaca por el momento, las generalidades en el tipo de actividades enmarcadas en el uso y significado de los números desde el *contexto cardinal* y el *contexto el ordinal*.

Desde su aspecto cardinal, se proponen dos tipos de actividades:

i) aquellas en las que, se debe contar y determinar la cantidad total de elementos de una colección bien definida de objetos discretos; o bien,

ii) aquellas en las que, se debe representar la cantidad de elementos correspondientes a una colección cuyo cardinal esta dado. (Figura 1)

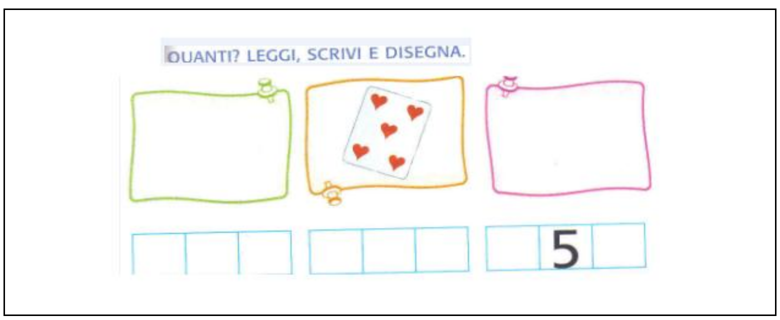


Figura 1. Actividades cardinales del tipo i) y ii). Tomado del libro de texto Io, tu e Pilú (2011, p. 15)

[1] De manera general, los lineamientos curriculares (1994, p. 26) afirman que, *comprender los números* implica, en parte, determinar la(s) manera(s) en que los estudiantes logran construir y dar significado al *concepto de número*. Al respecto, el trabajo inicial de Karen Fuson (1991, citado por Chamorro 2006), ampliado posteriormente por Rico (1987) y retomado en los lineamientos, coinciden en afirmar que, en la práctica social y escolar los niños construyen el concepto de número a través de una síntesis entre los *contextos*, *usos* y *significados* que puedan tener los números. Esta idea será desarrollada y ampliada posteriormente en el marco teórico de este trabajo en el capítulo 2.

Adicionalmente, se considera como una tarea de tipo *i)*, la construcción de tablas de conteo y de diagramas de barras, como método de organización y representación de los datos recolectados de una encuesta; ya que estos, hacen uso de los números en su aspecto cardinal, para determinar la cantidad total de sujetos que expresan su preferencia ante solo una de las posibles opciones de respuesta de una indagación.

Desde su aspecto ordinal, se distinguen nuevamente dos tipos de actividades a desarrollar:

i) aquellas en las cuales, el número hace referencia a un elemento dentro de una colección ordenada, describiendo la posición relativa de ese elemento dentro de la serie (Fuson, 1991, citado por Chamorro, 2006, p. 169); o bien,

ii) aquellas en las que, a través del número se identifica la posición relativa de un elemento en una colección ordenada para asignarle un cierto atributo particular.

Ahora bien, el tipo de actividades propuestas, enmarcadas en la *comprensión de concepto de las operaciones* y los *cálculos con números y aplicaciones de números y operaciones*, se fundamentan en tres aspectos:

i) La aproximación del estudiante al significado de las operaciones aritméticas de adición, como la acción de *unir* o *agregar* los elementos de ciertas colecciones; y de la sustracción, como la acción de *quitar* elementos de una colección determinada.

ii) El cálculo de adiciones y sustracciones, basado en la manipulación de material concreto o algunos registros de representación, como: las regletas de Cuiseinare, los bloques de lego, el ábaco, los saltos en la recta numérica, o, el uso de diagramas de Venn.

iii) La resolución de situaciones problemáticas aritméticas.

La *compresión de la numeración*, se basa en actividades de *composición* y *descomposición* de agrupaciones de primer orden con material concreto y en distintas bases numéricas. Explicitar las actividades que pertenecen a este eje, son de gran importancia para el desarrollo de este trabajo, por eso se le dedicará especial atención y tratamiento en el apartado siguiente.

Es importante resaltar que, en cuanto al número cero se refiere, los ejes generales de desarrollo del pensamiento numérico y los programas planteados por el colegio, determinan por lo menos cuatro usos de este número, ya presentes desde el primer grado de educación primaria:

- Cero como un número cardinal
- Cero como un número ordinal
- Cero como una cifra en la escritura de numerales en un sistema de numeración posicional
- Cero como elemento neutro de la adición

1.1.2 Descripción general de la actividad desarrollada con los estudiantes de seconda elementare

Del programa de matemáticas para el segundo grado, se destacan a continuación aquellos contenidos, objetivos e indicadores que guardan relación con el aprendizaje del uso y significado de los números en la numeración en distintas bases numéricas, y en particular del sistema de numeración decimal.

Tabla 2

Contenidos, objetivos específico e indicadores de competencia relacionados con el pensamiento numérico de los estudiantes del grado seconda elementare

Contenidos	Objetivos específicos	Indicadores de competencia
Números naturales hasta 100	• Conocer los números naturales hasta el cien y su aspecto cardinal. • Realizar adiciones y sustracciones entre el cien.	• Realiza cálculos orales entre el cien. • Realiza operaciones de adición y sustracción en columna.
Valor posicional	• Agrupar en bases diferentes y representar los agrupamientos con símbolos numéricos. • Descomponer y componer los números en base diez (centena, decena y unidad) • Realizar cambios y agrupaciones en diversos ordenes (primero, segundo y tercer orden) con el material estructurado.	• Reconoce que los números en base diez tienen nombres convencionales(centena y decena) • Descompone los números en centenas, decenas y unidades. • Forma agrupamientos de primer, segundo y tercer orden en diversas bases. • Construye con el Multibase números en base 10.
Histograma para la representación gráfica de datos	• Representar simples encuestas usando las tablas de conteo y las gráficas de barra.	• Recoge, organiza e interpreta datos usando el histograma.

La Tabla 2., muestra la continuidad entre los contenidos de prima elementare y seconda elementare, en relación con el aspecto cardinal del número, basada en la representación de datos a través de la construcción de tablas de conteo y diagrama de barras como se mostró en el apartado 1.1.1.

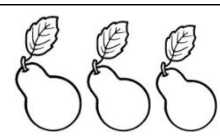
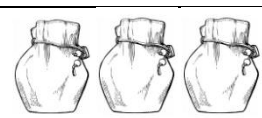
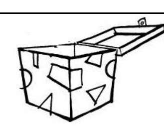
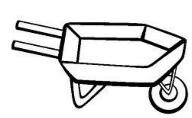
Ahora bien, en relación con la *compresión de la numeración* y con el contenido específico del valor posicional, es de reconocer que las actividades que se plantean y desarrollan con el material manipulable, se ven enmarcadas en un principio, en contextos de bases diferentes a la decimal; ya que, como lo afirma Orozco (1991), el progreso de los niños en la comprensión del sistema base diez se puede enriquecer con actividades en otras bases, profundizando de esta manera, en las características de un sistema posicional e identificando de manera más fácil y significativa las propiedades de un sistema decimal.

A continuación, se realiza una descripción de la actividad que se desarrolla en el aula para aproximar al estudiante a la compresión del valor posicional de las cifras en un numeral, a través de uso de material manipulable no estructurado y el conjunto de reglas y acuerdos establecidos por el profesor para el desarrollo de la clase.

Como actividad precedente al uso de los cubos de Dienes, se plantea a los estudiantes una situación en la cual deben realizan agrupaciones de una cantidad determinada de frutas en otros objetos como lo son bolsas, cajas y carretillas. Inicialmente, la dinámica en la tarea de agrupación se establece a partir de las reglas presentes en Tabla 3, las cuales varían dependiendo de la base en que se desee trabajar. Las reglas de agrupación instauradas, dan relevancia al proceso de inclusión (Orozco 1991), en donde es importante que el estudiante reconozca la relación parte-todo entre las unidades de cada orden; para el caso presentado el hecho que, las peras se agrupan en bolsas, las bolsas en cajas y las cajas en carretillas.

Tabla 3

Reglas de agrupación de peras, bolsas, cajas carretillas en base 3

Cada…	***se agrupan en una***
	
	
	

A continuación, se les presenta una tabla de registro, en la cual se muestra el orden en la inclusión de los elementos utilizados para realizar las agrupaciones, que viene ordenada por tamaño, de pequeño a grande y de izquierda a derecha; y la que cada columna viene diferenciada por una letra que identifica los elementos que le pertenecen. (Figura 2)

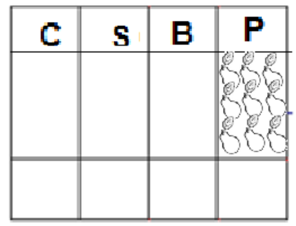
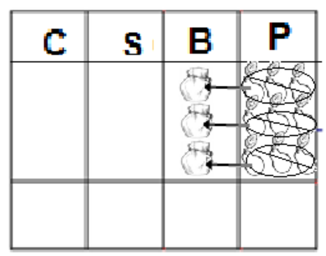
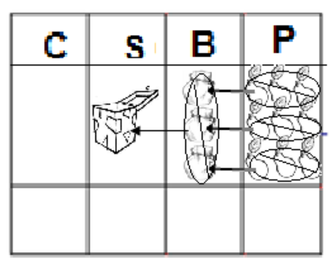
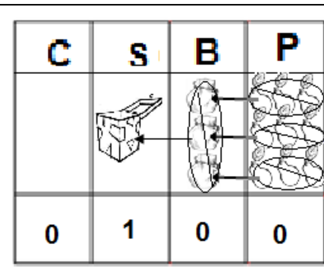
C	S	B	P

Figura 2. Tabla de registro para realizar las agrupaciones de peras, en bolsas, en cajas y carretillas

El proceso de registro y la dinámica en la cual se desarrolla la actividad vienen descritos en la tabla 4:

Tabla 4

Proceso de registro y dinámica de la actividad de agrupación

Dinámica	**Registro**
Se establece una cantidad determinada de peras las cuales el estudiante dibuja en la columna acordada.	**Agrupar 9 peras** 
Se realiza tantas agrupaciones de peras como sea posible, teniendo en cuenta la primera de las reglas (ver tabla 3). Cabe aclarar que los estudiantes representan los grupos formados, encerrando cada grupo y haciendo una línea hacia la siguiente columna, para indicar el agrupamiento de las peras en las bolsas.	
Se continua, de ser posible, con la agrupación de bolsas en cajas, como lo indica la segunda de las reglas.	
Se escribe la cantidad de peras, bolsas, cajas y carretillas que quedan en cada columna después de realizar las agrupaciones suficientes y necesarias.	

La forma aquí descrita para llevar a cabo el registro de la agrupación de una cierta cantidad de elementos es análoga a la que se desarrolla con los cubos de Dienes. Sin embargo, no se profundiza en este aspecto, ya que no es un elemento relevante en el desarrollo de este trabajo.

1.1.3 De un Problema Docente a un Problema de Investigación

Gutiérrez (1991, p. 153) distingue entre dos grandes grupos que componen lo que podría considerarse investigaciones en el campo de la Didáctica de las Matemáticas:

- En el primer grupo, se encuentran los trabajos de elaboración de teorías de enseñanza y aprendizaje de las Matemáticas. Estas investigaciones abordan las distintas componentes matemáticas, psicológicas y pedagógicas que intervienen en los procesos de compresión y aprendizaje de las Matemáticas: Procesos y capacidades de razonamiento, estrategias de enseñanza, niveles de compresión, entre otras.

- Mientras que, en el segundo grupo se ubican, los trabajos de aquellos profesores que deciden complementar o sustituir el contenido del libro de texto y elaboran bloques de actividades o planes de enseñanza complementaria, con los que intentan mejorar la eficacia de su enseñanza y la profundidad del aprendizaje de sus alumnos.

Con base en lo anterior, se afirma que, en el campo de la Didáctica de las Matemáticas se distingue entre las investigaciones cuyos objetos emergen de problemáticas teóricas al interior del mismo campo; y aquellas investigaciones, en donde los objetos de estudio surgen de la identificación de problemáticas específicas del ejercicio práctico de la docencia.

Refiriéndose a las investigaciones del segundo grupo, Gutiérrez (1991, p. 153 - 154) aclara que, no todo objeto de una problemática docente constituye un objeto de investigación en Didáctica; ya que, en ocasiones los esfuerzos por mejorar la eficacia de las prácticas educativas, carece de algunas componentes importantes de la actividad investigativa como:

i) Una planificación cuidadosa que tenga en cuenta los conocimientos sobre el tema y no solo la experiencia personal acumulada por el profesor;

ii) la inclusión del trabajo que se va a realizar dentro de un marco conceptual que permite analizarlo y relacionarlo con otras investigaciones sobre el mismo tema;

iii) un amplio conocimiento (matemático y didáctico) del tema de estudio, para identificar los orígenes de las dificultades de aprendizaje;

iv) una verificación objetiva de los logros alcanzados, más allá de la intuición personal o los resultados de los exámenes.

El presente trabajo pertenece al segundo grupo de investigaciones; es decir, corresponde a una actividad investigativa, cuyo objeto de estudio nace de la identificación de dificultades recurrentes en los estudiantes de seconda elementare, al interpretar los usos y significados de cero, en su aspecto cardinal y posicional, durante la escritura de numerales en distintas bases de numeración a partir de actividades de agrupación.

Se asegura entonces que el trabajo aquí presentado, constituye en sí mismo el registro escrito de una actividad investigativa válida; ya que, detalla y explicita cada una de las componentes anteriormente enunciadas:

- Se identifica a través de una problemática docente un problema de investigación alrededor de cero y se reporta investigaciones relacionadas.

- Se desarrolla un marco teórico, que permite determinar y profundizar en los aspectos didácticos y matemáticos de cero, como número cardinal y como cifra en la escritura de numerales en un sistema posicional.

- Se establece una metodología para el análisis de los datos recolectados, a partir de los instrumentos construidos e implementados; y se utiliza el constructo didáctico de las *concepciones*, para identificar y caracterizar los distintos usos e interpretaciones que los estudiantes de prima y seconda elementare hacen del cero.

- Finalmente, como conclusión y síntesis de la actividad investigativa desarrollada, se identifican y caracterizan las concepciones de los estudiantes de prima y seconda elementare acerca del cero cardinal y el cero posicional.

1.1.4 Descripción de la problemática

En el anterior apartado 1.1.2, se detalló la actividad de agrupación (de peras en bolsas, en cajas y en carretillas), presentada a los estudiantes de seconda elementare, que antecede al trabajo manipulativo con los cubos de Dienes. Se ejemplifica a continuación las dificultades observadas en los niños, al interpretar los usos y significados de cero, cardinal y posicional, en el desarrollo de dicha actividad.

Se ha asignado la tarea a los estudiantes de agrupar once peras en base tres; esperando que después de realizar los dibujos correspondientes a las agrupaciones realizadas, escriban el numeral $0102_{(3)}$ en la parte inferior de la tabla (Figura 3.).

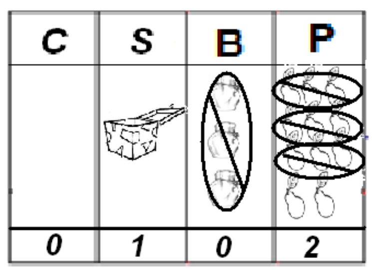


Figura 3. El registro escrito a la tarea de agrupar 11 peras en base 3.

Inicialmente, el docente nota que algunos estudiantes escriben el numeral 01311, ya que en la tabla se **observa** que, después de realizadas la agrupaciones respectivas, hay 0 carretillas, 1 caja, 3 bolsas y 11 peras (Figura 4a). Otros estudiantes escriben el numeral 0113, haciendo referencia a que en la tabla hay 0 carretillas, 1 caja, 1 grupo de tres bolsas y 3 tres grupos de tres peras (Figura 4b).

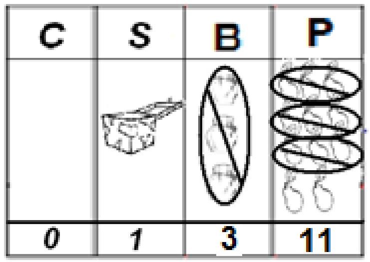


Figura 4a. Asignación de cardinales al total de los elementos observados en cada columna.

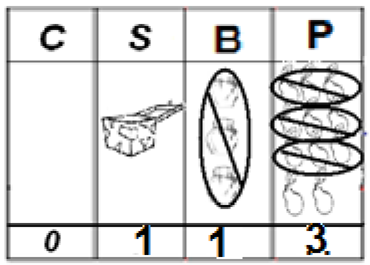


Figura 4b. Asignación de cardinales al total de grupos observados en cada columna.

Ante estos casos, el docente guía el trabajo de los estudiantes con el objetivo de hacerles notar que:

- Al agrupar las once peras en tres grupos el número a escribir es el dos; ya que, es posible formar tres grupos cada uno con tres peras, quedando solamente dos peras sin poderse agrupar.

- De manera análoga, el docente explica la existencia del cero en la columna de las bolsas; ya que, con las tres bolsas (producto de la agrupación de las peras), es posible obtener un solo grupo de cajas y como resultado de este proceso no queda bolsa alguna por agrupar.

- Para el número de cajas, el docente sigue reiterando la explicación a través de las agrupaciones, de manera que el uno de la columna de las cajas, corresponde a la caja (producto de la agrupación de las bolsas y las peras) que es cantidad no suficiente para realizar una agrupación.

- De igual forma, la explicación del cero en la columna de las carretillas, se basa en la inexistencia de una cantidad suficiente de cajas para ser agrupadas, es decir, el número cero de las carretillas no es producto de alguna agrupación.

A través de este tipo de explicaciones y aclaraciones el docente pretende que la mayoría de los estudiantes, fijen la atención en los elementos que se deben contar en cada una de las columnas de las tablas al finalizar todas las agrupaciones posibles[2]; y así de esta manera, logren escribir en forma *correcta* el numeral correspondiente a la cantidad de peras dadas en la base solicitada.

Sin embargo, la elección del docente de este cantidad de peras no es arbitraria; es más, dicha cantidad ha sido escogida a propósito con el fin que, en el numeral escrito como producto del cambio de base (de la diez a la tres), sean escritos explícitamente el cero posicional correspondiente a la columna de las bolsas y el cero cardinal correspondiente a la columna de las cajas; para discutir con los niños la naturaleza de los ceros escritos y llegar a diferenciarlos.

Al respecto, el docente ***espera*** que los estudiantes logren determinar qué; aquel cero escrito en la segunda columna, representa la ausencia de bolsas como producto de la agrupación de **todas ellas** en una caja; lo cual implica que, estas no *han desaparecido* sino que se encuentran ya en otro lugar. Y en el caso contrario que, el cero de la cuarta columna, representa la ausencia de alguna carretilla, dado que **no hay la cantidad suficiente** de cajas para ser agrupadas en ella.

Derivado del razonamiento anterior, el niño ***debería*** concluir que, si bien los dos ceros escritos indican una ausencia, de bolsas o de carretillas, estos son distintos; ya que uno de ellos representa **la agrupación total** de bolsas un una caja; mientras que el otro representa, **la no agrupación** en carretillas, por no haber la suficiente cantidad de cajas.

Si bien, la idea teórica de aproximar a los estudiantes a diferenciar los usos y significados del cero posicional y cardinal, basado en el hecho de comparar su función con respecto a la

[2] Esta cuestión exige a los estudiantes: determinar la cantidad de elementos restantes en cada una de las columnas en donde haya sido realizada alguna agrupación; y a continuación, determinar la cantidad de elementos presentes en cada una de las columnas en donde no.

posibilidad, de que estos signifiquen (o no) la acción de agrupar; la realidad en la práctica entre docentes y estudiantes es distinta.

A pesar de que los niños desarrollan las habilidades y destrezas para representar las agrupaciones que se les requieren de forma exitosa, son por lo menos dos, de las dificultades que reiteradamente se observan:

a) Un primer grupo de estudiantes, escriben correctamente el numeral que representa la cantidad de peras dadas en la base requerida y justifican, a través de los dibujos realizados, que hay ceros que surgen (o no) de la acción de agrupar; sin embargo, continúan interpretando cada una de las cifras escritas en la tabla de una forma cardinal. Así, en el caso presentado, si se cuestiona acerca de la cantidad **total** de peras, se asegura que son dos; como si el hecho de haber agrupado nueve peras, en tres bolsas las hiciera *desaparecer*. De manera análoga se afirma que, hay una caja que contienen tres bolsas, pero que el total de bolsas es cero.

Si estos niños tuvieran que agrupar veintisiete peras, asegurarían que tienen una carretilla, cero cajas, cero bolsas y cero peras $1000_{(3)}$; haciendo referencia a que, para tener una carretilla es necesario tener tres cajas, con tres bolsas cada una con tres peras; pero que la cantidad total de peras, bolsas y cajas son cero.

b) Hay un segundo grupo de estudiantes que al no tener elementos en algunas de las columnas de la tabla, expresan no tener *nada* o *ninguno* de ese algo y consideran innecesaria la escritura de cero. Estos niños escriben el numeral: __1__2 $_{(3)}$; donde el símbolo "__" corresponde a los espacios vacíos dejados.

Ante las dificultades presentadas y su continua recurrencia, el grupo de docentes consideró que una posible solución sería, centrar la atención de los niños únicamente sobre el cero posicional. Para esto, el docente debería realizar una reflexión con los niños que los llevara a concluir que, el cero de las columnas de las peras (el posicional) debería ser escrito, en cuanto representaba la ausencia de las peras por su agrupación en una caja; mientras que, el cero de la columnas de las carretillas (el cardinal) no debería ser escrito, en cuanto no se tiene la cantidad suficiente de cajas para realizar alguna agrupación. Esto consecuente con la idea que en los numerales en base diez, "*los ceros escritos a la izquierda del numeral no tienen valor alguno*"; por ejemplo, nadie escribe el número cincuenta y cuatro como 00054.

Esta consideración, en el contexto de la situación presentada, parece solo entorpecer o complejizar la compresión que hacen los estudiantes de cero:

c) Así, algunos niños escriben el numeral $01\_\_2_{(3)}$;

d) y otros, se niegan a borrar el cero de las carretillas en cuanto consideran que es aun necesario para expresa el hecho que, no hay la cantidad de cajas suficientes para ser agrupadas en una carretilla.

1.1.5 Análisis de la problemática a través de algunas investigaciones en Didáctica de las Matemáticas

Hasta el momento se han descrito de manera general, las cuatro dificultades más recuentes en los estudiantes al interpretar y dar uso y significado al cero posicional y al cardinal, a partir de las actividades de agrupamiento que se realizan en clase.

Dada la especificidad de las actividades planteadas, no se reportan investigaciones que aborden la misma problemática; sin embargo, a continuación se presenta una interpretación de las dificultades referidas, a partir de los resultados de dos investigaciones acerca del cero cardinal.

D'Amore (2007) y D'Amore y Fandiño (2009), hacen una presentación de las *concepciones espontaneas* de cero que tienen los niños italianos en edad pre-escolar. En su estudio, estos autores afirman que, ya desde la infancia los niños dan significado y uso al cero como número cardinal, ordinal y posicional, resaltando que (p.86):

- No todos los niños entrevistados saben escribir las cifra de 1 a 9, pero casi todos saben escribir cero, o por lo menos demuestra saber que cero se representa por medio del símbolo **0**.

- La mayor parte de los niños sabe asociar a eso el significado de cero al *nada*, comprendiéndolo algunas veces como la ausencia de acción o de objeto.

- Casi todos los niños consideran que cero es un número.

Una revisión de las entrevistas hechas y que soportan las conclusiones apenas presentadas; muestra que los niños asocian espontáneamente a cero su significado cardinal, como *nada* o *ningún*, cuando se les propone reconocer que, si el cardinal de una colección de objetos discretos es cero, seguramente esta debe ser vacía. Por ejemplo, si se le solicitara a alguien entregar *cero* lápices, esta persona no haría nada, o, respondería que no debe entregar *nada* o *ningún*.

Estos resultados de investigación, más las actividades desarrolladas por los estudiantes en prima elementare para dar significado cardinal y ordinal a los números hasta veinte, explicaría la primera de las dificultades observadas en los niños.

En efecto, podría decirse que, cuando se le pide a un niño interpretar los ceros presentes en el numeral $0102_{(3)}$ y dispone de un registro escrito, como el de la tabla que elaboró (Figura 4.), este procede guiado por su intuición, que además ha sido reforzada a través de las actividades que ha desarrollado en la escuela, para interpretar cada una de las cifras que componen el numeral como cardinales, particularmente en el caso de cero como: el número que se utilizada para representar que no hay nada de algo.

Ahora bien, aunque los resultados de D'Amore y Fandiño podrían explicar el origen de las dificultades de los niños de primer grupo, no permiten afirmar algo acerca de las dificultades de segundo grupo; es más parecería contradecirlos. Si se acepta la tesis que los niños hacen un uso intuitivo del cero, que conocen su representación y que su uso y significado es reforzado por la escuela, ¿por qué hay estudiantes que omiten su escritura, aun cuando reconocen en la tabla que después de realizadas (o no) ciertas agrupaciones algunas colecciones quedan vacías?

En contraposición a los argumentos y resultados de D'Amore y Fandiño, los resultados de investigadores como Sheffield y Cruikshand (2001, citados por Anthony y Walshaw, 2004) entre otros; afirman que, no es natural ni espontáneo que los niños en edad preescolar o durante los primeros curso de la primaria comprendan el hecho que, el cardinal correspondiente a toda colección vacía sea precisamente cero. Al respecto afirman que, aunque los niños quizás comprendan el hecho de que "*no tener ninguna manzana*", "*no tener ninguna oveja*" o "*que no hay ningún elefante*" es en esencia lo mismo, la idea de que a todos estos conjuntos corresponda un mismo cardinal es por sí misma abstracta, aunque que siga la idea natural de que dos (o más) colecciones vacías distintas de objetos deben tener el mismo cardinal. En palabras textuales de los autores:

"Reconocer que "no hay" elefantes en un cuarto es más sencillo que reconocer que hay "cero elefantes", es decir, "no tener algo" es un concepto más sencillo que el concepto de "tener cero"

Siendo así, podría decirse que, cuando se le pide a un niño escribir el numeral que resulta al agrupar las once peras en base tres, este reconoce que como producto de haber realizado toda las agrupaciones posible, dos de las columnas hayan quedado vacías; es decir, que no hay *nada* o *ninguna* bolsa o carretilla; más sin embargo no establece que, el número cardinal que expresa matemáticamente esta ausencia de elementos en una colección de objetos concretos es el precisamente el cero.

Finalmente, desarrollar un discurso con los niños que los induzca a considerar importante la escritura del cero posicional y el borrar aquellos que no los sean, puede influir negativamente en el uso e interpretación que hagan del cero como elemento neutro de la adición (en N).

Al respecto Anthony y Walshaw (2004, p. 23) reportan que el énfasis dado a los estudiantes a considerar que *cero* es *nada*, dificulta su uso y compresión como elemento neutro de la adición. A una población de cincuenta estudiantes de grado cuarto les fue propuesta la siguiente situación:

"¿Hay un número que se pueda agregar o quitar a 7 de tal suerte que el resultado siga siendo el mismo?"

Algunos de los resultados de este estudio muestran que:

Cuando se identifica correctamente a cero como elemento neutro, las explicaciones de los estudiantes reflejan la dificultad partica real del tratar de describir físicamente la acción de agregar o quitar "*nada*", por ejemplo: "*Bueno, si se tiene 7 y se quiere agrega nada permanece como el mismo número y lo mismo cuando se quita. Si usted tiene 7 y le quita nada, sigue siendo el mismo número.*"

Algunas explicaciones implican la noción de que cero "***no** es un número*":

- *Bueno, se escribe 7 y se pone abajo menos y ahí se pone el cero. No hay nada no hay un número.*
- *Cero es nada. Por lo tanto, no cuenta como nada. No se puede poner ningún otro número con él.*

La interpretación de las dificultades los estudiantes, abordada desde las tres investigaciones presentadas, demuestra la complejidad en el uso e interpretación de cero en la actividad propuesta; además de ilustrar otra que podría emerger, como en el caso de cero como elemento neutro, como fruto de la toma de decisiones proco premeditadas que pretenden mejorar la práctica de la enseñanza y que carecen de algún fundamento teórico que la sustente.

1.2 Una Investigación de Concepciones Individuales

Ruiz y Flores (1994 y 1998, respectivamente; citado por Mora y Torres, 2004, p. 50) afirman que, las concepciones se pueden determinar como una organización y clasificación del conocimiento didáctico y matemático alrededor de un objeto, y determinan una caracterización como se muestra en la figura 5.

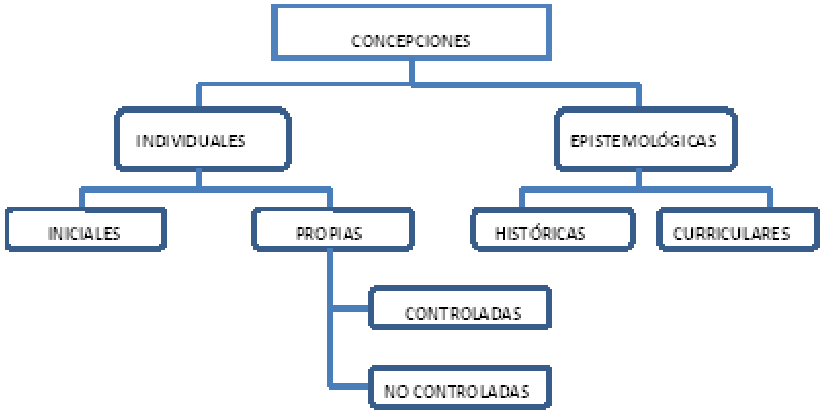


Figura 5.Clasificacion de las concepciones de un concepto matemático.

Las concepciones individuales o cognitivas hacen referencia al conocimiento interno del sujeto. Así, un sujeto posee un conjunto de concepciones acerca de un objeto, ya sea de una manera *inicial* (o e*spontánea*), o, de una manera *propia* (o *inducida*) dada su pertenencia y participación en procesos de enseñanza y aprendizaje. Por otro lado, las concepciones propias (o inducidas), que pueden ser de dos tipos: *controladas* y *no controladas*, diferenciadas porque unas son intencionalmente provocadas por la enseñanza mientras que las otras no; como por ejemplo, el deseo personal de comprender un objeto de conocimiento no escolar. (Figura 5)

Por su parte, las concepciones epistemológicas se relacionan con los tipos de conocimientos de "una comunidad" que existen en un determinado periodo histórico o en los textos, programas, currículos escolares para algún nivel. Estas concepciones se refieren a problemas dentro de la propia disciplina, relacionados con otras disciplinas y a la manera en que se accede al saber. (Figura 5)

Ahora bien, reconociendo la finalidad de éste trabajo en relación con la identificación y caracterización de concepciones controladas y no controladas del cero, emergentes, ya sea antes o después de la actividad docente de enseñanza y aprendizaje descrita en el apartado 1.1.2, podemos afirmar que la investigación aquí planteada, aporta y complementa a la tipología de una investigación en el campo de las concepciones individuales propias, y de esta manera justificar la importancia de este trabajo en el campo de la didáctica en torno a las concepciones de un objeto matemático.

1.3 Justificación y Planteamiento Del Problema

Después de realizar la descripción de una problemática presente en el aula de clase, originada por una actividad específica en el contexto de la institución italiana y destacando que algunos estudiantes presentan dificultades en el identificar la naturaleza del cero en un sistema posicional, y abordando esta problemática a través de los tres documentos guía (apartado 1.1.5), es de subrayar la importancia de estudiar las concepciones del cero en prima y seconda elementare, con la finalidad de identificarlas y caracterizarlas antes y durante el proceso de construcción del valor posicional, cuyo proceso se lleva a cabo, según el currículo de la institución, en los niveles de prima y seconda reconociendo la continuidad que se tiene en los dos programas, y de esta manera poder identificar la influencia de estas caracterizaciones del objeto cero en la comprensión del cero posicional.

Por otro lado, se desea que este documento sea herramienta para la mejora de la enseñanza, evitando concepciones no adecuadas del cero, que podrían conllevar a posibles dificultades en el desarrollo de otros conceptos matemáticos; además, como investigación enriquecedora del pensamiento numérico, pues, se considera que el estudio de las concepciones de los estudiantes sobre el cero, puede permitir a los profesores de Matemáticas generar actividades de clase a edad temprana, con las cuales los estudiantes construyan un pensamiento numérico significativo.

Por último, se rescata la pertinencia e importancia de este trabajo en el ámbito investigativo, ya que, aporta y complementa en aspectos relacionados con las concepciones individuales propias, descritas en el apartado de antecedentes de investigación, donde se reconoce al objeto matemático cero como elemento de interés investigativo.

1.4 Objetivos

Después de reconocer la complejidad del objeto matemático cero en la didáctica y de su papel e influencia en la enseñanza y aprendizaje de otros conceptos matemáticos, cabe resaltar la pertinencia de la realización de un estudio de las concepciones de este objeto en estudiantes de primero y segundo de primaria. Por esta razón se planteará un objetivo general que se logra a través de la consecución de un conjunto de objetivos específicos que se describen a continuación:

1.4.1 General

- Identificar y caracterizar las concepciones de los estudiantes de primero y segundo grado de la institución educativa Leonardo Da Vinci, acerca del significado y uso del cero posicional y del cero cardinal, que emergen de la tarea de escribir numerales es distintas bases numéricas, a partir de las actividades escritas de agrupación que desarrollan.

1.4.2 Específicos

- Plantear un problema de investigación a través de una problemática docente, alrededor de las dificultades recurrentes en los estudiantes, al interpretar y dar uso a los ceros posicionales y cardinales, en la escritura de numerales en distintas bases.

- Desarrollar un marco de referencia que permita determinar los aspectos teóricos, didácticos y matemáticos de cero, desde su aspecto cardinal y posicional, para la construcción pertinente de los instrumentos de recolección de datos y la formulación de categorías de análisis.

- Establecer una metodología para el análisis de los datos recolectados, que tenga en cuenta el marco teórico desarrollado y la información obtenida de la aplicación los instrumentos.

- Determinar las concepciones de los estudiantes, acerca del cero cardinal y el cero posicional, a partir de la clasificación de las respuestas obtenidas en los instrumentos de recolección y su respectiva agrupación en las categorías de análisis planteadas.

CAPITULO 2. MARCO TEÓRICO

Durante la presentación de los programas de matemáticas para los grados prima y seconda elementare de colegio Leonardo da Vinci, se han destacado los cuatro usos y significados que tiene cero desde el primer grado de primaria: *cero número cardinal*, *cero como número ordinal*, *cero como cifra* en la escritura de numerales en un sistema posicional de numeración y el *cero como elemento neutro*.

Dado los objetivos de este trabajo, se dedica el presente capítulo a realiza una presentación del objeto matemático cero, desde su aspecto cardinal y como cifra en un sistema posicional de numeración[3], tanto desde las Matemáticas como la Didáctica, con la finalidad de determinar las características, elementos y procesos en pro del análisis de los resultados y la construcción de los instrumentos de recolección de datos.

2.1 Cero Como Número Cardinal Del Conjunto Ø

2.1.1 Aspectos matemáticos

El *número cero* como el *número cardinal del conjunto vacío (Ø)*, que actualmente se nota como 0, se considera como el representante de la clase de equivalencia de todos los conjuntos equipotentes al conjunto vacío. Asumir al cero de esta manera requiere del entendimiento teórico de conceptos matemáticos tales como: la equipotencia entre conjuntos y las relaciones de equivalencia, conceptos que se relacionan intrínsecamente con otros como: función como relación, la biyectividad y el conjunto vacío. La articulación de estos conceptos para construir una definición de cero desde el concepto de *cardinalidad* en la teoría de conjuntos será el objetivo de este apartado.

[3] Los aspectos teóricos y didácticos acerca del cero desde su aspecto ordinal, se encuentran en la tesis doctoral: Fernández, C. (2004). *Análisis didáctico de la secuencia numérica*. Málaga: Dykinson S.L. Mientras que, los aspecto matemáticos relacionados con cero, como elemento neutro en el conjunto de los números naturales, desde una perspectiva axiomática, pueden encontrarse en: Luque, C., Jiménez, H., Ángel, J. (2009). *Actividades matemáticas para el desarrollo de procesos lógicos: Representar estructuras algebraicas finitas y enumerables*. Capítulo 4. Bogotá: Universidad Pedagógica Nacional.

Se comienza entonces construyendo una función $\boldsymbol{f}$ de Ø en Ø, mostrando que dicha función es justamente el conjunto Ø. Nótese que se habla del conjunto Ø en dos sentidos, el primero, como conjunto sin elemento alguno, y el segundo, como una relación funcional en Ø × Ø. Para facilitar la compresión de las demostraciones la función Ø se notará en adelante como $\boldsymbol{f}$.

Pero, ¿es posible construir una función $\boldsymbol{f}$ cuyo dominio y rango sea el conjunto vacío?

Mostrar que $\boldsymbol{f}$ es una relación de Ø en Ø consiste en verificar que

$$\boldsymbol{f} = \emptyset \subseteq \emptyset \times \emptyset$$

resultado que deriva inmediatamente del hecho que Ø es un subconjunto de cualquier conjunto, en particular, del conjunto Ø × Ø.

Se continúa probando que la relación Ø, es una función. Para ello se debe verificar que:

i) Para todo x en Ø, existe y en Ø tal que $\boldsymbol{f}(x)=y$, y que

ii) si $(x, y) \in \boldsymbol{f}$ y $(x, z) \in \boldsymbol{f}$ entonces $y = z$.

La condición *i)* establece que para cualquier elemento x del conjunto Ø existe un elemento y de Ø tal que la imagen de x por la relación $\boldsymbol{f}$ es y. De la contradicción de esta condición resulta que, existe un elemento del dominio x que no tiene una imagen y por $\boldsymbol{f}$. Sin embargo, esta situación no es posible dado que el dominio de $\boldsymbol{f}$ es Ø, conjunto al cual no pertenece elemento alguno. Por tanto la condición *i)* queda demostrada.

Ahora bien, la condición *ii)* afirma que, si un elemento x del dominio de $\boldsymbol{f}$ se relaciona con un elemento y, y a su vez x se relaciona con un elemento z entonces $y = z$. La hipótesis de la condición establece que tanto (x, y) como (x, z) son elementos de la relación $\boldsymbol{f}$ esto es que

$$(x, y) \in \boldsymbol{f} \subseteq \emptyset \times \emptyset \text{ y que } (x, z)\, \boldsymbol{f} \subseteq \emptyset \times \emptyset$$

de donde se tiene de nuevo que $x \in \varnothing$, situación imposible para el conjunto vacío. Por lo tanto $y = z$. Quedando así verificada la condición *ii)*.

Por lo tanto $\boldsymbol{f} = \varnothing$ es una relación funcional de Ø en Ø.

Antes de continuar, se hace necesario reflexionar y explicitar el tipo de argumentos que se han utilizado para la validación de la existencia de $\boldsymbol{f}$ como función, ya que éstos se utilizarán nuevamente en demostraciones posteriores. Éstos han sido dos tipos:

i) el primero, referido a la existencia del conjunto vacío, como conjunto sin elemento alguno.

ii) El segundo de carácter lógico, ya que toda proposición matemática expresada de manera condicional, con un antecedente falso, sin importar su consecuente, resultará siempre como una proposición veraz.

Este segundo argumento fue necesario en la prueba de la condición *ii)*, ya que se mostró que la conjunción establecida en la hipótesis, $(x, y) \in \boldsymbol{f}$ y $(x, z) \in \boldsymbol{f}$, es falsa; más sin embargo, la forma condicional en la fue expresada la valida como una proposición verdadera.

Por medio de los argumentos expuestos y teniendo en cuenta que la equipotencia entre conjuntos es una relación de equivalencia con la cual es posible definir el cardinal de un conjunto, se muestra a continuación una construcción que permite definir el cardinal del conjunto vacío como caso particular.

Para ello se muestra que $\boldsymbol{f}: \emptyset \to \emptyset$ es una función biyectiva, es decir, que el conjunto vacio es equipotente a sí mismo y que a su vez dicha equipotencia cumple las propiedades establecidas para ser una relación de equivalencia.

La existencia $\boldsymbol{f}$ como función ya fue probada. Ahora para mostrar que $\boldsymbol{f}$ es una biyección debe probarse que ésta es una función *inyectiva* y *sobreyectiva*, esto es:

- $\boldsymbol{f}$ es una función *uno a uno* o inyectiva, si $\boldsymbol{f}(x) = \boldsymbol{f}(y)$ implica que $x = y$.

- $\boldsymbol{f}$ es una función sobreyectiva o *epiyectiva*, si para cada $y \in \emptyset$ (del rango), existe $x \in \emptyset$ (del dominio) tal que $\boldsymbol{f}(x)= y$.

En efecto, en términos de proposiciones condicionales, que $\boldsymbol{f}$ sea una función inyectiva significa que, dadas las parejas $(x, w), (y, z) \in \boldsymbol{f}$ y $w = z$ entonces $x = y$. Al igual que en pruebas anteriores no es posible $(x, w), (y, z) \in \boldsymbol{f}$ ya que esto significa que

$$(x, w) \in \boldsymbol{f} \subseteq \emptyset \times \emptyset \text{ y que } (y, z)\, \boldsymbol{f} \subseteq \emptyset \times \emptyset$$

de donde $x, y \in \emptyset$, lo cual no es posible, haciendo de la conjunción de la hipótesis una proposición falsa. Sin embargo, ya que la proposición a demostrar es una proposición condicional cuyo antecedente es falso, toda tesis que se concluya a partir de su hipótesis resulta verdadera; por lo tanto $\boldsymbol{f}: \emptyset \to \emptyset$ es una función inyectiva.

Para mostrar que $\boldsymbol{f}$ es una función sobreyectiva basta tener en cuenta que, no hay un elemento y que pertenezca al dominio de la función ni un elemento x perteneciente al dominio, que implique que $\boldsymbol{f}(x)= y$. Por lo tanto $\boldsymbol{f}$ es sobreyectiva.

Por lo tanto $\boldsymbol{f}$ es una función biyectiva del conjunto vacío en sí mismo. Además, por la definición de equipotencia entre conjuntos, de la prueba anterior se deriva inmediatamente que el conjunto vacío es equipotente a sí mismo ($\emptyset \sim \emptyset$).

A continuación se muestra que, en particular, la equipotencia de vacío en sí mismo respeta las condiciones de ser una relación de equivalencia.

La *propiedad reflexiva* fue ya probada al demostrar la biyectividad de $\boldsymbol{f}$. Para las propiedades *simétrica* y *transitiva* se tiene que verificar que:

- *Simetría*: Si $\emptyset$ es equipotente a otro conjunto B entonces el conjunto B será equipotente a $\emptyset$.

- *Transitividad*: Si Ø es equipotente a otro conjunto B y B es equipotente a otro C entonces Ø será equipotente al conjunto C.

Las pruebas de estas dos propiedades pueden ser reducidas a la propiedad reflexiva evidenciando el hecho de que es necesario que $B = C = Ø$.

En efecto, si Ø es equipotente con B, quiere decir que existe una función $\boldsymbol{g}$ biyectiva de Ø sobre B. Si se supone que $B \neq Ø$, se tendría que existe $b \in B$. Para dicho b de B debe existir un elemento a, tal que $a \in Ø$, ya que $\boldsymbol{g}$ es en particular sobreyectiva, lo cual no es posible. Luego $B = Ø$ y $\boldsymbol{g} = \boldsymbol{f}$.

Ahora, para que exista una equipotencia entre Ø y B fue necesario que $B = Ø$, pero la hipótesis de la transitividad exige además que B sea equipotente con C, esto implica que la función biyectiva de B sobre C sea $\boldsymbol{f}$ *(o* $\boldsymbol{g}$*)* nuevamente y el conjunto $C = Ø$ (¿por qué?).

En resumen se tiene que: existe una función biyectiva $\boldsymbol{f}: \emptyset \to \emptyset$ de tal suerte que $Ø \sim Ø$ que permite definir la clase de clase equivalencia de todos los conjuntos equipotentes al conjunto vacío.

Las clases de equivalencia obtenidas a partir de la relación de equipotencia entre conjuntos es lo que se conoce como un ***número cardinal***. El número cardinal de un conjunto A, notado como $Card(A)$, suele asociarse comúnmente con el número de elementos que le pertenecen (sea este finito o infinito); tanto así que en ocasiones se omite de la notación propia de las clases y en su lugar dicho número suele ser representado con un número natural.

En el caso particular del conjunto vacío, $Card$ (Ø), se defiende como $Card(Ø) = 0$ y se le llama usualmente "*cero*".

2.1.2 Aspectos didácticos

Para presentar los aspectos didácticos del cero desde su aspecto cardinal se comienza retomando los tres ejes básicos sobre los cuales, se piensa radica el desarrollo del pensamiento numérico de un estudiante, estos son:

- Comprensión de los números y la numeración.

- Comprensión de concepto de las operaciones.

- Cálculos con números y aplicaciones de números y operaciones.

Pero, ¿qué significa comprender los números?, y en particular, ¿qué significa comprender a *cero*? Los lineamientos afirman que, *comprender los números* implica, en parte, determinar la(s) manera(s) en que los estudiantes logran construir y dar significado al *concepto de número* (p. 27).

Al respecto, el trabajo inicial de Fuson (1991, citado por Chamorro, 2005. p. 189 - 170), ampliado posteriormente por Rico (1992) y retomado por en los lineamientos curriculares en Matemáticas (1994), coinciden en afirmar que, en la práctica social y escolar los niños construyen el concepto de número a través de una síntesis entre los *contextos*, *usos* y *significados* que puedan tener los números.

Por lo tanto, comprender a cero teóricamente implica, por una parte, darle uso en una variedad de contextos específicos en los que este puede llegar a tener un significado como número cardinal, numero ordina o cifra en un sistema posicional de numeración. Para que a través de la síntesis entre los usos, los contextos y los significados de cero se logre construir el concepto del número cero.

2.1.2.1 Contextos generales de utilización de los números

La literatura en Didáctica de las Matemáticas reporta siete contextos de utilización de los números, estos son progresivamente utilizados y comprendidos por los niños y los cuales se resumen a continuación[4]:

2.1.2.1.1 Primer contexto: la secuencia verbal

En el contexto de *secuencia* se emplean los números como una *serie ordenada de palabras* (uno, dos, tres, cuatro, …) sin hacer referencia a ningún ente u objeto en particular. Se suele emplear las secuencias numéricas con propósitos distintos, como el recitar y aprender a memoria la serie numérica, como se muestra en una de las "*canciones para aprender los números*" de Adriana Balter[5]:

"*(…) primero el uno,*

parece un tallarín, es flaco y largo y le pica la nariz;

después el dos, tiene mucha tos;

y luego el tres que gordito es, son redonditas las vueltitas del tres;

y aquí el cuatro, baila con un gato;

y al final el cinco viene dando brincos (…) "

es claro que las números/palabras utilizadas aquí funcionan como una *secuencia verbal* que, únicamente, han sido escogidas para rimar.

[4] El resumen que se presenta de los siete contextos numéricos es una síntesis de las ideas presentes en los libros de Chamorro y Rico (2007) y los Lineamientos Curriculares en Matemáticas (1994), lo cuales fueron referenciados con anterioridad.

[5] BALTER, A: *Canciones para aprender los números.*

A su vez, en este contexto, la serie numérica es memorizada y recita simplemente por el placer de aprenderla[6]. Se suele emplear la secuencia numérica con distintos propósitos como pueden ser los de cronometrar el tiempo (por ejemplo, pronunciando los números hasta 20 en el juego de las escondidas) o atraer la atención de los demás, como suele hacer los profesores para señalar el inicio de la clase. Es una actividad equivalente a recitar los días de la semana, los meses del año o las estaciones.

2.1.2.1.2 Segundo contexto: el conteo (o recuento)

En el contexto del conteo o el recuento los números son utilizados para *contar*, total o parcialmente, los elementos de **una colección de objetos discretos**. Sin embargo, hacer frente a esta tarea requiere, por parte de un individuo, una serie de competencias específicas. Dichas competencias se conocen como *los principios de conteo de Gelman y Gallistel* y son los cinco principios siguientes:

2.1.2.1.2.1 Principio de correspondencia término a término

Supóngase se desea contar los elementos de la colección de puntos de la Figura 5,

Figura 5. Una colección discreta de 5 puntos.

A cada elemento de la colección que se va a contar debe corresponderse, de manera univoca, con una, y sólo una, de las palabras/número de la serie numérica.

[6] Al respecto, los resultados de las investigaciones de Gréco, Meljac, Perret y El Bouazzaoui han demostrado que el aprendizaje de la serie numérica escrita se produce con posterioridad a la serie oral; y además que, el aprendizaje de la serie numérica oral es anterior a la conservación de la cantidad. El lector interesado en ampliar la información acerca de la manera en que se estructura la cadena numérica de manera verbal y escrita y su relación con la conservación de la cantidad, puede remitirse a: CHAMORRO, M. (2005). *Didáctica de las matemáticas. Capítulo 5: La construcción del número natural.* Madrid: Pearson. Prentice-Hall.

Este principio necesita, de manera implícita, que el estudiante sepa hacer una correcta tarea de *enumeración*[7] que le permita no dejar elementos sin contar, o contar otros varias veces. Teóricamente es posible contar con una lista cualquiera de palabras a la habitual, siempre que no se repitan y estén ordenadas; de hecho, cada lengua utiliza una lista diferente de palabras, que como se refirió en el contexto de la secuencia, es memorizada y aprendida antes de manera sociocultural y sin significación matemática alguna.

2.1.2.1.2.2 Principio de orden estable

La secuencia verbal de palabras/número que se escoja para contar debe ser recitada siempre de la misma forma, siguiendo un orden estable.

Así, si se contaran los elementos de la colección de la Figura 5, con la secuencia numérica habitual se obtendría *cinco*, pero si la secuencia utilizada fuera, por ejemplo: *uno*, *dos*, *tres*, *cinco*, *cuatro*, el resultado sería cuatro. La secuencia numérica usada debe ser siempre la misma y debe ser recita en el mismo orden; pues, aunque en principio la secuencia podría ser cualquiera, por necesidades de comunicación todos utilizamos la misma.

Este principio tiene por objetivo *etiquetar* una colección de manera que pueda ser diferenciada de otras, razón por la cual las palabras/número de la secuencia numérica deben ser necesariamente distintas, sin que una misma palabra pueda ser reutilizada.

2.1.2.1.2.3 Principio de abstracción

Contar una colección supone interesarse solo por el aspecto **cuantitativo** de la misma, dejando de lado las características físicas de los objetos contados. Por esta razón, las colecciones A y B de la Figura 6, tienen el mismo cardinal, y ello independiente de que a la colección A pertenezcan puntos y a la colección B cuadriláteros, y sin importar si tiene diferente tamaño o forma.

[7] Se refiere aquí como *enumeraciones*, como lo establece Gelman, al conjunto de acciones materiales que hay que realizar para que una colección sea susceptible al conteo: separar los elementos contados de los que quedan por contar, ir marcando los elementos ya contados, tocar los elementos y pronunciar la palabra/número que le corresponde en la serie numérica, situar los elementos en una disposición espacial que permita la identificación de cada elemento, etc.

Colección A **Colección B**

Figura 6. Dos colecciones discretas e equipolentes; la colección A de puntos y la colección B de cuadriláteros.

2.1.2.1.2.4 Principio de no pertinencia del orden

El número obtenido al contar una colección no depende del orden en que se enumeren sus elementos. Los elementos de una colección pueden ser contados en el orden que se desee, puede empezarse por donde se desee, el orden no es pertinente, siempre se obtendrá el mismo resultado.

Cuando se enfrentar la tarea de contar y son respetados los cuatro principios enumerados hasta ahora: correspondencia término a término, orden estable, abstracción y no pertinencia de orden, se dice que el sujeto realiza un **conteo numerado**. Para reconocer que un niño hace un conteo, se requiere aún otro principio, que según, Gréco y Chamorro, sea quizás el más importante desde el punto de vista de la compresión y significación de lo que supone el hecho de contar, el principio de cardinación.

2.1.2.1.3 Tercer contexto: cardinal

Un contexto cardinal es aquel en el que un número natural describe la cantidad total de elementos de una colección bien definido de objetos discretos.

2.1.2.1.3.1 El principio de cardinalidad o cardinalización

Que un niño logre responder a la pregunta “*¿cuántos hay?”*, no sólo implica el realizar un conteo numerado de los elementos que componen la colección, sino el reconocimiento del hecho que, el número enunciado en último lugar no representa únicamente al elemento correspondiente, sino también al total de la colección.

Un comportamiento común en los niños para responder a la pregunta "*¿cuántos hay?*" es la de utilizar el *último número pronunciado* para referirse a la totalidad de elementos de una colección, sin embargo dicho comportamiento, como señala Gréco, no implica la compresión del principio de cardinalidad. Sus estudios han mostrado que, los niños que aplican la regla del último número pronunciado contestan *cinco* si se les pregunta cuántas bolas hay, y cuando se les piden que muestren los *cinco*, señalan la bola blanca (Figura 7.). Por lo tanto al cardinar la colección, *cinco* no sólo es la palabra/número que en la enumeración corresponde a la bola blanca, *cinco* representa a la totalidad de la colección, es el cardinal de la misma.

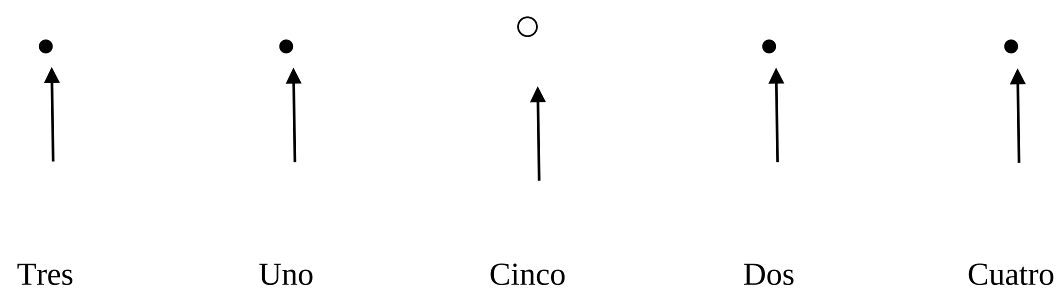


Figura 7. El principio de cardinación y la regla del último número pronunciado.

Según Fuson esta regla precede a la compresión del principio cardinal, y podría tener su origen en la imitación de la actividad sociocultural de contar.

La adquisición del principio de cardinalidad supone dar significación cardinal a los símbolos numéricos, y se produce entre los 4 y los 5 años, dependiendo del nivel de estructuración de la secuencia verbal numérica en que se encuentre el niño[8].

2.1.2.1.4 Cuarto contexto: la medida

En los contextos de medida, los números describen la cantidad de unidades de alguna *magnitud continua*, como longitud, superficie, volumen, capacidad, peso tiempo, etc. Según Rico (p. 26), los números como cardinales y como medidas son semejantes en el hecho que

[8] Una presentación completa acerca los niveles de estructuración de la secuencia verbal numérica y sus fases de aprendizaje puede encontrarse en: CHAMORRO, M (2006). *Didáctica de las matemáticas. Capítulo 5: La construcción del número natural.* Madrid: Pearson. Prentice-Hall.

los dos describen una cantidad de unidades de algún tipo. En el caso de las colecciones de entidades discretas el *cardinal* no es otra cosa que su medida, pero, para las cantidades continuas, el número hace referencia al número de cantidades-unidad que *"caben"* en una cantidad dada, esto con el fin de responder a la pregunta *¿cuántas unidades hay?* Esta concepción del número es para algunos autores como Vergnaud[9] de gran importancia, considerándola como una de las ideas fundadoras del concepto de número.

2.1.2.1.5 Quinto contexto: ordinal

En el contexto ordinal el número hace referencia a la posición relativa de un elemento en una colección discreta y totalmente ordenada en la que se ha tomado uno de los elementos como inicial. De manera análoga a la cardinalización, determinar la posición ordinal está supeditado al procedimiento de *contar* o *enumerar*; así, se debe iniciar en el elemento inicial especificado por la ordenación y seguir el orden hasta alcanzar el objeto al que se hace referencia.

2.1.2.1.6 Sexto contexto: código o simbólico

En los contextos de código, los números se utilizan para distinguir clases de elementos. Son etiquetas que identifican cada una de las clases. El número es utilizado para simbolizar o denotar algo: las rutas del transporte público, el número del documento de identidad (o estudiantil), el dorsal de un jugador, un número de teléfono, etc.

2.1.2.1.7 Séptimo contexto: el número como tecla

En un contexto de tecla el número está asociado a un botón diferenciado, que hay que accionar físicamente para su utilización. Algunos dispositivos electrónicos disponen de teclados en los cuales se representan los dígitos de 0 a 9, y a partir de estos es posible componer los demás. Esto lleva implícito que cuando se pulsa una tecla el número correspondiente puede tener un valor absoluto o relativo. Absoluto, cuando es el único, o el último que se pulsa; relativo, en el restante de los casos.

[9] Ver la teoría de los *campos conceptuales* de Gérard Vergnaud en: D'AMORE,B. (2009). *Zero: Aspetti concettuali e didattici.* p 66-68. Gardolo: Ediciones Erickson.

Suele haber dos tipos de teclados numéricos: uno lineal, como los que aparecen en la parte superior de las máquinas de escribir; otro en forma de matriz o rectángulo, como en el caso de las calculadores o los teléfonos celulares; o algunos teclados de computador que incluyen ambos tipos de teclado. En el caso específico de las computadoras el teclado numérico lineal suele tener asignada una función de acción específica (aumentar el disminuir el brillo de la pantalla, dar inicio a una presentación, cambiar lo caracteres seleccionadas de minúscula a mayúsculas, etc.) o como tecla para escritura de algunos caracteres especiales. El otro tipo suele desempeñar diversas funciones, como efectuar cálculos en el caso de las calculadoras, realizar funciones de edición en algunos programas de edición de texto, o marcar números telefónicos.

2.1.2.2 *Utilidad y uso de cero en los distintos contextos numéricos*

Ahora bien, se ha afirmado que en el contexto social y escolar un niño construye el concepto de número a través de una síntesis entre los *contextos*, *usos* y *significados* que puedan tener los números; siendo así *cero* no sería la excepción.

Es posible entonces diferenciar entre los uso de cero en contextos sociales: como símbolo, como tecla y como elemento de una secuencia verbal de palabras/numero; y contextos matemáticos, como el ordinal, el conteo (y la cardinalidad) y la medida.

Cero es un número presente los contextos sociales de utilización de los números. Elementos como, documentos de identidad, números telefónicos, rutas de trasporte público, las placas de los automóviles, los códigos de barras o los códigos bibliográficos demuestra su uso como símbolo o códigos. Está presente en los teclados de algunos aparatos electrónicos de uso habitual como, los teclados de computador o de teléfonos celulares, los controles de los televisores o de teléfonos habituales, balanzas, cronómetros, termómetros o en calculadoras. Incluso existe una canción titulada "*la canción de cero*" que intenta explicar su naturaleza cardinal y posicional, como cifra que incrementa diez veces el valor de un cierto número dado[10].

En cuanto a los contextos matemáticos de uso y significación de los números, cero se muestra como un número particular. En el contexto de la medida, al calcular peso, áreas o volúmenes cero puede ser interpretado como una ausencia; sin embargo, esto no siempre es cierto, sobre todo cuando se trabaja con magnitudes continuas como la temperatura.

En cuanto a cero en el contexto ordinal, D'Amore (1999) resalta que el énfasis en la compresión de su uso y significado radica en el reconocimiento de este como primer elemento de la una serie ordena de los números, como por ejemplo en N (p. 21 - 22)

Ahora bien, en los contextos de conteo y cardinalización el uso y significado de cero está ligado a la capacidad de comprender a cero como el número que representa la cantidad total de elementos en una colección vacía. Sin embargo, a la luz de los principios de conteo presentados esto no parece ser muy claro. Si bien, existen una diferencia entre realizar un conteo numerado de los elementos discretos pertenecientes a una colección y reconocer el último número pronunciado como su cardinal; ¿cómo se realiza este proceso de conteo ante una colección ausente de elementos?, es más, ¿cómo se caracterizan los elementos pertenecientes a la colección que va ser contada si esta es vacía? Estos dos últimos cuestionamientos son relevantes para identificar y caracterizar las concepciones de los estudiantes en este estudio y serán retomados y abordados en el apartado 3.2.1. Por el momento, solo se afirma que, gran parte del éxito de un estudiante al determinar que el cardinal de una colección vacía es cero, depende de la claridad con que esta sea defina por compresión.

2.2 La Aparición del Cero en los Sistemas de Numeración posicional

En este apartado se realiza una descripción general de las características, componentes y procesos que se enmarcan alrededor del concepto de sistema posicional, así como también

10 _________________________: *La canción del cero.* Audio en: http://www.youtube.com/watch?v=7knNK85yRbc

de los aciertos para la economía de la escritura de cantidades y uso de símbolos. De igual forma se describe de manera explícita la importancia del cero en la escritura de cantidades y el ser parte fundamental para la representación de ausencia de unidades en un orden determinado.

2.2.1 La utilización de agrupamientos

El agrupar objetos y representar con símbolos estos grupos ayudó a superar la mera notación por correspondencia uno a uno, es decir, apareció la primera forma económica de escritura ya que no era necesario enumerar uno a uno los objetos de un grupo, sino reducirlo al uso de un solo símbolo o nombre, respondiendo a las necesidades de algunas sociedades de representar números grandes y ser más fácilmente identificados. Un ejemplo es el sistema de numeración romano, donde 5 unidades se representaban por el símbolo *V*, diez unidades por el símbolo *X* y otros que se presentan en la figura 8. Se logra así economizar la escritura de grandes números, ya que para representar cantidades como el mil ciento treinta y cinco ya no era necesario usar una cantidad desmedida de símbolos, sino al contrario se utilizarían tan solo seis "**MCXXXV**".

I	1
V	5
X	10
L	50
C	100
D	500
M	1000

Figura 8. Numeración romana

Sin embargo, estos sistemas no eran del todo confiables ya que se presentaban irregularidades en las agrupaciones, es decir, no siempre se agrupaba la misma cantidad de objetos, lo que hacía difícil recordar y comprender cada agrupación.

2.2.2 Sistemas de bases

Terigi & Wolman (2007) definen los sistemas de bases como "*sistemas de agrupamientos regulares, donde el número de elementos que se agrupan es igual al número de símbolos utilizados en la escritura*". Son regulares porque realizan agrupamientos de la misma cantidad, lo que a su vez se define como base. Un ejemplo claro de este tipo de sistemas de bases es el sistema greco, el cual usaba los símbolos que se presentan en la figura 9. El sistema greco era un sistema de base decimal, ya que se realizaban agrupaciones de diez elementos y se obtenían cambios a otro símbolo, por ejemplo, diez unidades se representaban con el símbolo Δ y grupos de diez Δ correspondían al símbolo H y así sucesivamente.

Figura 9. Símbolos del sistema de numeración greco.

Otro ejemplo de sistema de numeración de base, es el sumerio, el cual Kaplan (2006) lo describe como un sistema decimal y sexagesimal al mismo tiempo, ya que diez unidades agrupadas se representaban por el símbolo  , seis de estos símbolos se representaban por  , en la figura 10 se muestran algunos de los simbolos que se utilizaban en el sumerio con su respectivo equivalente del sistema decimal

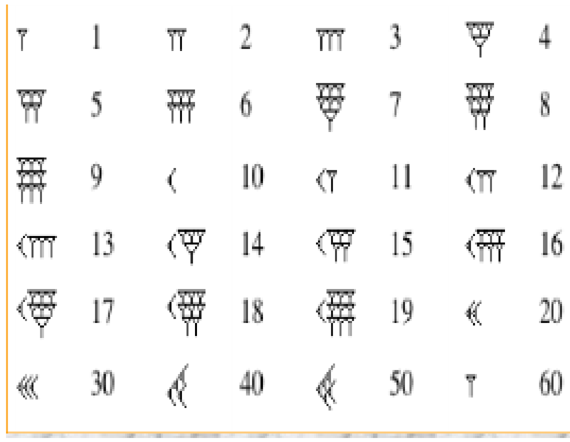


Figura 10. Sistema sumerio

Sin embargo en este sistema, como lo dice Kaplan, la simbología llevaba a ambigüedades, ya que en este caso el número uno que tenía el símbolo  era semejante al número 60 que se representaba con el símbolo , o en el peor de los casos, la representación  puede ser el número 2 o 61, lo que lleva a pensar que la necesidad de usar pocos símbolos conlleva al problema de la ambigüedad en la escritura de cantidades.

Otra característica asociada a estos sistemas de base, lo describe Orozco (1991, p.12) afirmando que en éstos, las unidades se denominan de orden cero, porque no hay un número de unidades cuyo valor sea igual al de la base, es decir no se puede obtener un grupo de b elementos y lo escriben como b^0, donde b es la base. Se llaman unidades de orden uno a aquellas que se puede obtener de un grupo de unidades de orden uno equivalente a la base, es decir, se puede conformar un grupo de b unidades de orden uno, a éstas se les representa con b^1. Se llaman unidades de orden dos a aquellas que se pueden conformar con un grupo de b unidades de orden dos, es decir una unidad que vale b veces b y se escribe como b^2 y así sucesivamente y de esta forma se puede decir que cualquier cantidad se puede expresar como suma de cierta cantidad de potencias. Por ejemplo, el sistema sumerio (ver figura 10) es un sistema de base 60 y sesenta veces sesenta fue el número más grande concebido por la cultura sumeria.

Los sumerios usaban las potencias de las bases para representar las cantidades (ver figura 1), en este ejemplo se utiliza las potencias 60^2, 60 y 60^0 acompañados con las unidades de cada una de las posiciones.

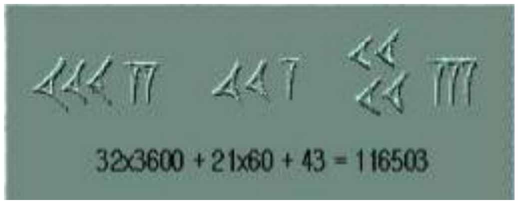


Figura 11. Composición del número 116503 en sumerio

2.2.3 Valor Posicional y Sistemas Posicionales

Los sistemas que cumplen con la característica posicional no se ven en la obligación de expresar sus cantidades en potencias como por ejemplo $5\times10^3 + 3\times10^2 + 0\times10^1 + 2\times10^0$ si no al contrario, su representación numérica correspondería a 5302, reduciéndolo en dos pasos como lo declara Orozco (1991, p.15):

> *"Solamente se escriben las cifras que especifican el número de unidades que lo componen. Las cifras se escriben, una a continuación de la otra, de izquierda a derecha, en relación decreciente con respecto al orden de las unidades."*

Así, el valor posicional se ha considerado una de las más importantes innovaciones, ya que ayudó a superar dos obstáculos en la escritura de números: *i)* la ambigüedad que se encontraba en el uso de símbolos y *ii)* la eliminación de las potencias de las bases. Con esta característica, el valor de la cifra depende de la posición que ocupa de derecha a izquierda en el numeral escrito, es decir, las **unidades** de cada orden, las cuales en base diez se les denominan unidades, decenas, centenas y unidades de mil. La figura 12 es un ejemplo de la escritura con la característica de valor posicional.

u.	c	d	u
5	0	3	0

Figura 12. Valores de las unidades del sistema

En estos tipos de sistemas, declara Orozco (1994), el cero entra hacer un papel importante en la representación de la ausencia de las unidades de cada orden, por ejemplo en la cantidad 5065, el cero representa la ausencia de unidades en el orden de las centenas, lo cual se enfatizará más adelante.

Es a partir de lo anterior, que se inicia a fundamentar un sistema de numeración decimal posicional, y cuyo símbolos 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 son coeficientes que determinan un orden específico después de realizar las agrupaciones suficientes y donde el símbolo "0" juega un papel importante en la ausencia de elementos en una determinada posición, y de esta manera, todo número natural tiene una representación única, dando lugar a la economía y fiabilidad de la comparación de cantidades y a los algoritmos de las operaciones aritméticas.

Godino y Batanero (2003) afirman que el cero es un símbolo de gran importancia, ya que también ayuda a simplificar las cantidades y representa la no existencia de unidades como se puede observar explícitamente cuando se enumeran las reglas del sistema decimal:

a) Elegido un número *b* como base del sistema de numeración, se utilizan *b* símbolos, llamados cifras o guarismos que representan el cero y los primeros números naturales. Por ejemplo, consideremos la base 6 y los símbolos (0,1, 2, 3, 4 y 5) o la base 2 con las cifras (0, 1).

b) Cada *b* unidades simples forman una unidad de segundo orden[11] se escriben a la izquierda de las unidades de primer orden. Siguiendo con el ejemplo de la base 6 se

[11] En un sistema de numeración de base, al grupo de unidades se le llama unidad de orden superior, es decir la unidad de segundo orden son los grupos que se hacen con las unidades básicas.

tendría que cada vez que encontramos 6 unidades de primer orden estas se convierten en una de segundo orden y así sucesivamente. (*Principio del valor relativo*)

c) Cuando no hay unidades de orden (carencia de unidades) se expresa mediante un 0 en la posición correspondiente.

Esta tercera regla del sistema de numeración posicional muestra la importancia del cero en la representación de los números, cuya tarea es ser el símbolo que representa la ausencia de unidades. Sin embargo, la regla dos muestra que no todos los ceros de una cantidad tienen la misma naturaleza, es decir para obtener el cero de las unidades se realizaron las agrupaciones suficientes de unidades, caso contrario en un cero de las decenas, ya que se realizaron los agrupamientos suficientes de decenas no de unidades, valores que solo se pueden hacer visibles e entendibles si el estudiante tiene la capacidad de componer y descomponer las unidades para justificar su existencia.

2.2.4 Procesos de componer y descomponer

Steefe (1990, citado por Orozco & Bedoya, 1991) señala que los niños utilizan procesos de composición y descomposición para darle sentido a un número, entendiendo la composición como relación de equivalencia para la obtención de unidades de órdenes superiores, en un sistema posicional, a partir de la agrupación de unidades de los órdenes inmediatamente precedentes, es decir, si se tienen diez unidades es lo mismo que tener una decena o si se tienen diez decenas es lo mismo que tener una centena. De forma inversa se encuentra la descomposición en la cual el niño tiene la capacidad de expresar cada una de las cifras de un número en ordenes inferiores como por ejemplo el 234 que corresponde a 200 + 30 + 4, lo que hace referencia a una descomposición aditiva que es natural en los estudiantes de la población seleccionada.

Es de esta manera que los procesos de composición y descomposición son fundamentales para reconocer que un estudiante tiene una comprensión del valor posición de las cifras, es decir, son elementos necesarios para que se pueda cumplir el *principio del valor relativo,* y de igual forma Orozco y Bedoya (1991) afirman que las operaciones de componer y descomponer permite que el estudiante tenga una distinción significativa del doble valor de las cifras: el valor correspondiente del número de las unidades y el valor relativo al orden o valor posición, en un sistema de numeración posicional.

CAPÍTULO 3. METODOLOGÍA

Las características de la investigación aquí realizada para abordar las concepciones del cero, se ubican en el diseño de una metodología propia, en la cual se destacan dos momentos: *i)* la construcción y filtración de los instrumentos bajo los sustento teórico presentados y *ii)* la metodología de análisis usada para identificar y caracterizar las concepciones de los niños a través de los instrumentos aplicados. En lo que sigue, se presenta una descripción de cada uno de estos momentos, encontrando en dicha descripción la población, las técnicas de recolección de la información e instrumentos y la metodología de análisis usada para el estudio realizado al rededor del cero cardinal y el cero posicional.

3.1 CONSTRUCCIÓN DE LOS INSTRUMENTOS

La construcción y pertinencia de las situaciones aquí planteadas, se desarrolla a través de una serie de consideraciones, como lo son:

- La determinación de los instrumentos adecuados para la intención del trabajo de investigación, a través de los sustentos teóricos descritos con anterioridad (ver capítulo 2), basados en los elementos, características y procesos que involucran los objetos a indagar, *cero cardinal y cero en un sistema posicional*

- La pertinencia de una serie de situaciones acorde al contexto curricular y metodología de la institución.

- Una categorización de las situaciones, a través de las intenciones de cada una de ellas en torno a los objetos a indagar, en *cero cardinal* y *cero en un sistema posicional*.

- La determinación de un conjunto de tipología de respuestas esperadas por la población a las situaciones planteadas.
- La construcción de guías de entrevistas basados en la tipología de respuesta esperada, con la finalidad de ser instrumentos enriquecedores y aclaradores en el análisis de los resultados.

3.1.1 Técnicas e Instrumentos de Recolección

Los instrumentos y técnicas, que se describen a continuación, se clasificaron en dos grupos (ver tabla 6), con el objetivo de indagar y ser fuente de información valiosa y concreta que apoye la temática de interés en la investigación.

Tabla 6

Categorización de las situaciones según su intención.

Concepción que se estudia	Situaciones
Concepción del cero como cardinal de un conjunto.	Situaciones 1 y 2
Concepción del cero en un sistema posicional a partir de actividades de agrupamiento.	Situación 3

La construcción de las situaciones 1 y 2 se realizó a partir de la información ofrecida por el marco metodológico, en las cuales se destaca de manera importante a la asociación inmediata que hacen los estudiantes del símbolo “0” al conjunto vacío; sin embargo, se muestra que la situación contraria, asociar al conjunto vacío el símbolo “0”, no es del todo natural para los estudiantes. Por las razones anteriores, la intensión del instrumento de cero cardinal, se concentró en detallar la manera en que los estudiantes determinan (o no) a cero como el cardinal de una colección vacía definida claramente por compresión.

De manera análoga, a partir del estudio del marco teórico y basados en los documentos de referencia de la tesis en especial en (Orozco & Bedoya, 1991), documento en el cual se describe los dos valores de una cifra en un sistema posicional (valor relativo a las unidades y valor posición), se realizó la construcción de la situación 3, cuyo objetivo es indagar si los estudiantes comprenden la doble naturaleza del cero en un sistema posicional, en este caso en base 3, diferenciando el orden de cada uno de los ceros a partir de las columnas (peras, bolsas, cajas, carretillas) elementos que se trabajan como actividad introductoria al valor posicional en la institución seleccionada para la investigación.

3.1.1 .1 Descripción de las situaciones del cero cardinal

A continuación se presentan y describen las actividades propuestas como instrumentos de recolección correspondientes a las situaciones 1 y 2 que hacen referencia al cero cardinal, así como el conjunto de las posibles respuestas que podrían dar los estudiantes a las mismas durante su desarrollo.

La situación 1, fue desarrollada por la población completa y a partir de la clasificación de las repuestas de los estudiantes en tres sub-categorías definidas y en una cuarta sub-categoría emergente, determinadas a partir del tipo de respuesta que se evidenciaba, se realizó una selección al azar de doce estudiantes (tres estudiantes por cada sub-categoría) para la posterior aplicación de la situación 2.

Situación 1: *Número o cantidad*

Teniendo en cuenta los antecedentes teóricos (didácticos y matemáticos) presentados con anterioridad, se diseñó un primer instrumento de recolección de datos: la situación 1. Esta situación, denominada "*Número o cantidad"*, fue dividida en dos partes en las cuales se les proponía a los estudiantes: determinar el cardinal de cuatro conjuntos dados, donde uno de ellos es vacío (parte A); y a continuación, dibujar los elementos correspondientes a cuatro conjuntos con un cierto cardinal propuesto, donde uno de los cardinales es precisamente 0 (parte B). (Ver tabla 7.)

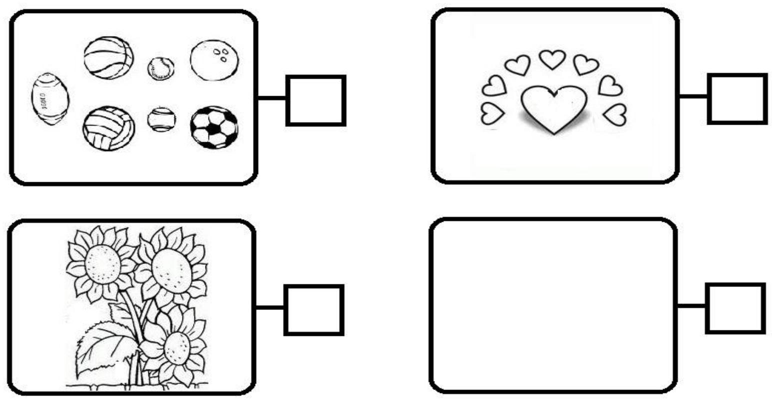
Tabla 7

Situación 1 para la recolección de la información del cero cardinal

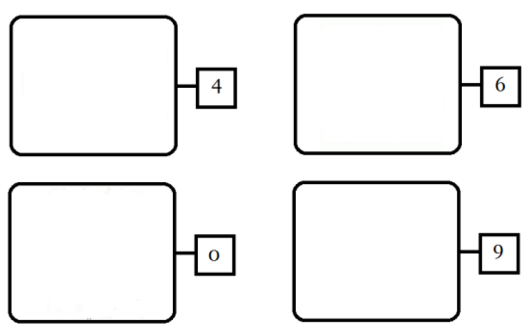
Situación 1

***Número o cantidad*.**

A. Observa y escribe cuántos objetos hay en cada conjunto.



B. *Dibuja tantos objetos como el número indica*



De la parte **A**, se establecieron tres tipos de posibles respuestas en el momento en que los estudiantes tuvieran que determinar el cardinal del conjunto vacío:

i) **Respuesta tipo I**: la omisión de la escritura del número 0 en la etiqueta. Al no haber algún elemento en el conjunto vacío, no se debe escribir *nada* (o *algún* número) en la etiqueta del diagrama que lo representa.

ii) **Respuesta tipo II**: la escritura del número 0 en la etiqueta. A un conjunto *sin elemento alguno* le corresponde el cardinal 0.

iii) **Respuesta tipo III**: la definición y respectiva cardinación de un conjunto no vacío, dibujando *algunos* elementos en el diagrama. No existe algún conjunto ausente de elementos.

Con respecto a la parte **B**, los resultados presentados por investigaciones anteriores (D'Amore, 2007), establecen que la gran mayoría de los estudiantes no dibujarán *algún* elemento en el diagrama cuya etiqueta es *"*0*"*.

No obstante, los intentos de análisis de los datos recolectados a través de la situación 1, pusieron en evidencia una total ausencia de un contexto específico de la utilización del número; mostrando falencias para obtener resultados sustentables[12].

Situación 2: *¿Cuántos hay?*

La actividad denominada "*¿Cuántos hay?*" fue diseñada como instrumento complementario de recolección a la situación 1, en ella los estudiantes deberían enfrentar la tarea de determinar el cardinal de tres colecciones distintas de objetos. Esta situación, fue dividida en dos momentos:

[12] Por el momento no se presentaran los argumentos que sustentaron la necesidad de construir un segundo instrumento de recolección de datos y se acota este apartado a la descripción de la situación 2; ya que estos, serán presentados y desarrollados de manera completa en el apartado *3.4.1 (Metodología de análisis cero cardinal*).

Momento 1: Fase manipulativa

Se conformaron tres colecciones de objetos afines al contexto escolar de los estudiantes: lápices, borradores y tijeras. Después de que el sujeto ha identificado los objetos que definen (por compresión) cada una de las colecciones, se les explica que la actividad consiste en determinar la cantidad total de elementos que pertenecen a cada de estas en cinco intentos, cambiando en cada intento la cantidad total de lápices, borradores y tijeras.

Durante el primer intento el investigador presenta al estudiante

seis lápices, cinco borradores y un par de tijeras

en seguida, pidió al sujeto determinar el cardinal de cada uno de los conjuntos presentados, requiriéndole adicional y necesariamente, ser específico en nombrar, por compresión, la colección a la que se hacía referencia. En consecuencia, no bastaba con responder "*6, 5, 1*", sino que era necesario explicitar los elementos pertenecientes a cada colección, así: "*6 lápices*, *5 borradores* y *1 par de tijeras".*

Durante el segundo intento, el investigador procede a modificar la cantidad de elementos en cada uno de los conjunto, **mientras el estudiante lo observa**, disponiendo:

cuatro lápices, cuatro borradores y un par de tijeras,

para luego solicitarle, nuevamente, determinar el cardinal de manera completa[13] de las colecciones dispuestas, a través de la pregunta *"¿cuántos hay?"* Esto con el fin de determinar si la tarea solicitada era lo suficientemente clara.

Procediendo de manera análoga, durante el tercer, cuarto y quinto intento el entrevistador presenta:

cinco lápices, cero borradores y tres pares de tijeras, ("*¿cuántos hay?*")

dos lápices, cero borradores y cero pares de tijeras, ("*¿cuántos hay?*")

[13] Se hace referencia a describir de manera oral la naturaleza de cada una de las colecciones, es decir, el estudiante dice 3 borradores y no tan solo tres.

y finalmente, cero lápices, tres borradores y dos pares de tijeras ("*¿cuántos hay?*");

Los objetos involucrados son dispuestos siempre sobre una mesa en el mismo orden: de derecha a izquierda (desde la posición del investigador) y agrupados, comenzando por los lápices, a continuación los borradores y finalizando con las tijeras; esto con el fin de hacer notar la ausencia de elementos de cierta colección en la presentación de alguna de las colecciones vacías.

Momento 2: Fase de registro

Concluido el primer momento, el entrevistador procederá a entregar al estudiante cinco tablas de registro, como la que se presenta en la tabla 8. A diferencia de la fase manipulativa, esta vez los estudiantes tendrán que hacer un registro gráfico de la cantidad de objetos que observan y escribir su cardinal correspondiente.

Tabla 8

Tabla de registro de la observación de los intentos

Objeto	*Dibujo*	*¿Cuántos hay?*
		
Objeto	*Dibujo*	*¿Cuántos hay?*
		
Objeto	*Dibujo*	*¿Cuántos hay?*
		

La columna "*objeto*" define por compresión, a través de un dibujo, el conjunto cuyo cardinal debe ser determinado. La columna "*dibujo*" pide al sujeto determinar el cardinal implícitamente del conjunto definido por el objeto, dibujando tantos elementos como los que observa, además de permitir al investigador verificar que efectivamente se está efectuando la cardinalización de la colección requerida. Finalmente, la columna "*¿cuántos hay?*" permite hacer explícito, ya sea por la escritura de número o una palabra, el cardinal correspondiente al conjunto definido por el objeto.

La cantidad de elementos pertenecientes a cada uno de los tres conjuntos sería la misma que fue presentada con anterioridad:

6 lápices, 5 borradores y 1 par de tijeras,

cuatro lápices, cuatro borradores y un par de tijeras,

cinco lápices, cero borradores y tres pares de tijeras,

dos lápices, cero borradores y cero pares de tijeras,

y finalmente, cero lápices, tres borradores y dos pares de tijeras

Con un número igual de ocasiones y con el mismo proceder del investigador.

Se consideran tres tipos de repuestas en la fase manipulativa de la situación 2:

i) **Respuesta tipo I**: omisión cualitativa y cuantitativa de las colecciones vacías. Ante la ausencia de lápices, borradores o tijeras estos dejan de ser reconocidos como una colección y por lo tanto no se determina su cardinal correspondiente.

ii) **Respuesta tipo II**: reconocimiento cualitativo de las colecciones vacías sin su cardinalización respectiva. La ausencia de lápices, borradores o tijeras no implica la inexistencia de la colección; sin embargo, no se asocia a estas colecciones vacías el cardinal cero.

iii) **Respuesta tipo III:** reconocimiento cualitativo y cuantitativo de las colecciones vacías. El estudiante reconoce la existencia de la colección pese a que esta es vacía y la cardina con el número 0.

Nótese entonces que, las respuestas de tipo I y II, de la parte A de la situación 1, se corresponden (respectivamente) con las respuestas de tipo I y III de la fase manipulativa de la situación 2. No sucede lo mismo con la respuesta de tipo III de la parte A de la situación 1 y la respuesta de tipo II de la situación 2. Esto se debe a que se trata de actividades distintas, en donde en una prima la escritura, mientras que la otra es de carácter oral. Esta cuestión es relevante y se retoma en la metodología de análisis (Ver apartando 3.4.1)

Con respecto a la fase escrita, se consideran como posibles respuestas las de tipo I y III de la fase manipulativa; dada la suposición de que la inclusión de un contexto específico de la utilización del número y la especificidad en la definición por compresión de la colección cuyo cardinal debe ser determinado, disminuye la tendencia al uso de palabras socialmente asociadas al cero cardinal como lo son *nada* o *ninguno*.

3.1.1.2 Descripción de la situación y entrevista del cero en un sistema posicional

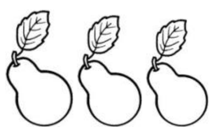
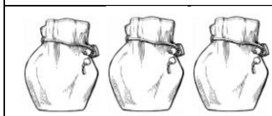
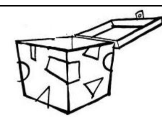
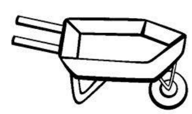
Para la recolección de la información de la concepción del cero en un sistema posicional se realiza una actividad en un contexto base 3 (ver tabla 9), y que, cuya pertinencia se declara manera general en el apartado 1.1.2, teniendo en cuenta que el progreso de los niños en la comprensión del sistema base diez se puede enriquecer con actividades en otras bases, profundizando de esta manera, en las características de un sistema posicional e identificando de manera más fácil y significativa las propiedades de un sistema decimal.

Tabla 9

Situación 3 para la recolección de información. Cero en un sistema posicional.

Situación 3

Mario tiene una finca en la que cultiva peras. Para recolectarlas Mario las agrupa así:

CADA …	***LAS AGRUPA EN UNA***
	
	
	

Mario ha recolectado algunas peras y ha escrito:

0	1	0	0

Observa la tabla y completa con los dibujos que consideres necesarios.

Para esta situación se espera tener cuatro posibles respuestas que se describen a continuación:

a) **Respuesta tipo I (*<u>Solución por descomposición de la unidad de orden superior)</u>*:** El estudiante completa la tabla dada, mostrando de manera detallada y discriminada **todas** las agrupaciones necesarias para generar la cifra de segundo orden (el uno de la columna "*cajas*").

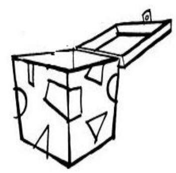
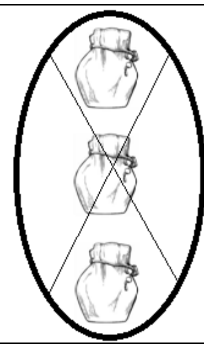
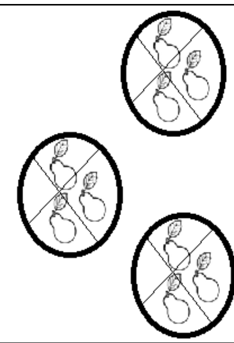
Carretillas	Cajas	Bolsas	Peras
			
0	1	0	0

Figura 13. Solución por descomposición de la unidad de orden superior.

Ante una solución como la presentada en la figura 13, puede inferirse que el estudiante conoce y aplica las reglas de agrupación para la generación de numerales en base 3, y que, realiza una descomposición de la unidad de segundo orden explicitando *todos* las agrupaciones necesarios (de bolsas y peras) para la existencia de dicha unidad.

b) Respuesta tipo II. (*Solución por agrupamiento total):* Se espera que el estudiante complete la tabla dada mostrando **todos** los agrupamientos necesarios para generar la cifra del segundo orden a través de un único dibujo en la columna *"cajas"* (Figura 14).

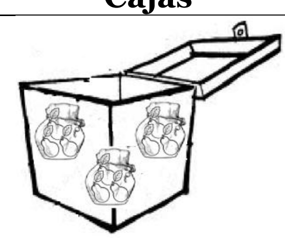
carretillas	Cajas	Bolsas	Peras
			
0	1	0	0

Figura 14. Solución por agrupamiento total.

Tanto la *solución por agrupamiento total* como la *solución por descomposición de la unidad de orden superior,* mostrarían el conocimiento y aplicación de las reglas de agrupación por parte del estudiante. Sin embargo, existe aquí por lo menos una diferencia: mientras que en la primera solución, el estudiante realiza una descomposición explícita y ordenada de las bolsas y peras para justificar la existencia de la unidad de segundo orden; en segunda solución, por agrupamiento total, la caja *contiene* y explicita todas las unidades de orden inferior necesarias para la composición de la unidad de segundo orden en un *todo compacto* representado en el dibujo de la columna "*cajas*" y en el que las columnas *"bolsas"* y *"peras"* se encuentran *vacías* (figura 14). Entonces, dada la naturaleza del dibujo, la entrevista girará en torno a caracterizar la manera en que los estudiantes interpretan la usencia de dibujo alguno en las columnas "*bolsas"* y *"peras"* y en el detallar si en dicha interpretación emerge una concepción de cero como cardinal o cero como posicional.

c) **Respuesta tipo III. (*<u>Solución por agrupación no evidente):</u>*** El estudiante completa la tabla mostrando, *aparentemente que*, los números escritos en la tabla representan cardinales, y por ende los símbolos "0100" significan dibujar tantos elementos como el símbolo de cada columna indica. (figura 15)

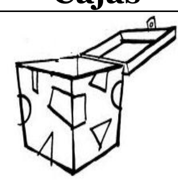
carretillas	Cajas	Bolsas	Peras
			
0	**1**	**0**	**0**

Figura 15. Solución por agrupamiento no evidente.

Se ha utilizado en el párrafo anterior la expresión "*aparentemente qué*", ya que, el no dibujar alguna pera o bolsa dentro de la caja no implica que el estudiante reconozca que ésta sea producto del agrupamiento exacto de nueve peras en tres bolsas y de tres bolsas en una caja. Así, la diferencia entre una *solución por reagrupamiento total* y una *solución por agrupamiento no evidente* radica en cuan explícitos son las agrupaciones necesarias que dan origen a la caja.

d) **Respuesta tipo IV.*<u>(Solución por agrupación no consecuente):</u>*** Aquí el estudiante completa la tabla dada, mostrando **algunos** de los agrupamientos necesarios para generar la cifra de segundo orden (el uno de la columna "*cajas*").

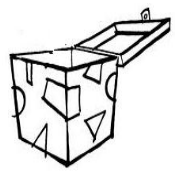
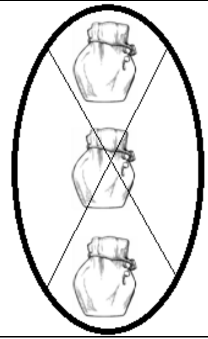
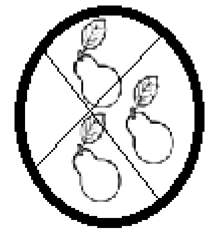
Carretillas	Cajas	Bolsas	Peras
			
0	1	0	0

Figura 16. Solución por agrupamiento no consecuente.

Ante una solución como la presentada en la figura 16, puede inferirse que el estudiante utiliza el dibujo como una manera para *recordar* las reglas de agrupación de la base. Aunque en este tipo parcial de solución las agrupaciones dibujadas no corresponden a la cantidad total de peras necesarias para generar la caja, se evidencia por lo menos un esfuerzo del estudiante por hacer explícita la naturaleza de los dos ceros posicionales como ausencia de peras y bolsas como producto de algún(as) agrupaciones exactas.

Una vez aplicada la actividad anteriormente descrita se procede a la selección de una muestra de la población para la aplicación de la guía de entrevista (ver tabla 10) cuya dinámica de desarrollo está orientada en base a respuestas obtenidas durante el momento de registro.

Tabla 10

Guía de entrevista situación 3

GUÍA DE ENTREVISTA

En el desarrollo de esta situación se pueden presentar tres posibles soluciones:

Solución por descomposición de la unidad de orden superior

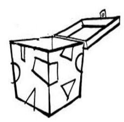
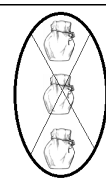
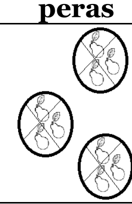
carretillas	cajas	bolsas	peras
			
0	**1**	**0**	**0**

Fig. 1. Solución por descomposición de la unidad de orden superior

Preguntas

i. *¿Me podrías explicar el dibujo que hiciste?*
ii. *¿Por qué has dibujado nueve peras si el número escrito* [en la columna “*peras*”] *es 0*?
iii. *¿Por qué has dibujado tres bolsas si el número escrito* [en la columna “*bolsas*”] *es 0*?
iv. *Entonces, ¿qué significa el cero de la columna de las carretillas?*
v. *¿Qué diferencia encuentras entre el cero de la columna “carretillas” y el cero de la columna “bolsas”* [o la columna “*peras*”]?

Solución por agrupamiento total

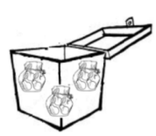
Carretillas	cajas	bolsas	peras
			
0	**1**	**0**	**0**

Fig. 2. Solución por agrupación total.

Preguntas

i. *¿Me podrías explicar el dibujo que hiciste?*
ii. *¿Por qué no has dibujado algo en la columna* “*peras*”?
iii. *Entonces, ¿cómo es posible tener una caja si no hay peras ni bolsas?*
iv. *¿Qué significa el cero de la columna de las carretillas?*
v. *¿Qué diferencia encuentras entre el cero de la columna “carretillas” y el cero de la columna “bolsas”* [o la columna “*peras*”]?

<u>Solución por agrupaciones no consecuente</u>

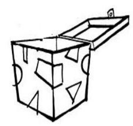
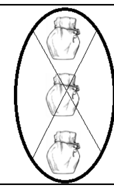
carretillas	cajas	bolsas	peras
			
0	1	0	0

Fig. 3. Solución por agrupaciones no consecuente.

Preguntas

i. *¿Me podrías explicar el dibujo que hiciste?*
ii. *¿Por qué has dibujado tres peras si el número escrito* [en la columna "*peras*"] *es 0*?
iii. *¿Por qué has dibujado tres bolsas si el número escrito* [en la columna "*bolsas*"] *es 0*?
iv. *Entonces, ¿qué significa el cero de la columna de las carretillas?*
v. *¿Qué diferencia encuentras entre el cero de la columna "carretillas" y el cero de la columna "bolsas"* [o la columna "*peras*"]?

3.1.2 Población y Muestra

La población seleccionada para la realización de la investigación corresponde a los estudiantes de primero y segundo grado con edades entre 6 y 8 años de la institución educativa Leonardo Da Vinci. Teniendo en cuenta los contenidos tratados en cada uno de estos niveles (ver capítulo 1), se toma la decisión de aplicar a la población de prima, los instrumentos en relación al cero cardinal y de manera paralela, al grupo de estudiantes de seconda, aquellos instrumentos con respecto al cero posicional.

Ahora bien, por las características de los instrumentos construidos y por la complejidad de análisis de la información que brinda cada uno de ellos, se realiza una selección de 114 estudiantes de la sección prima y una muestra de 25 estudiantes de la sección seconda, teniendo en cuenta que, el instrumento construido para el cero posicional brinda una carga más dispendiosa de información para el posterior análisis de la misma.

Se aclara, de igual manera, que en momentos posteriores a la aplicación del primer instrumento, en cada una de los dos casos *(cero cardinal y posicional)*, se realizó la selección de una segunda muestra de acuerdo a las respuestas dadas por los estudiantes, a la cual se aplicará las guías de entrevista (en el caso del cero posicional), según el caso que corresponda.

3.1.3 Cualificación del Instrumento

Cada uno de los instrumentos descritos con anterioridad fue el resultado de un proceso de filtración, en el cual se determina de manera general las siguientes etapas:

- Un estudio detallado del marco metodológico y del currículo de la institución, con el fin de encontrar componentes, procesos y elementos necesarios para la determinación de las características de los dos ceros (cardinal y posicional), en cada uno de los niveles.

- Construcciones de instrumentos y una posterior prueba piloto con un grupo de estudiantes, con la finalidad de observar la pertinencia del instrumento en el campo de estudio y la población seleccionada.

- La cualificación de los instrumentos finales por parte de un experto en el campo de la temática, cuyos trabajos se han dirigido al cero y sus concepciones en niños de edad preescolar y el estudio didáctico del cero en el aula de clase.

A partir de lo anterior, se buscó encontrar un conjunto de situaciones acordes a las intenciones que se quieren observar, e intentar dar respuesta a los interrogantes planteados en la investigación, es decir un conjunto de situaciones fiables que ofrezcan información adecuada para lograr el objetivo de esta actividad investigativa.

3.2 METODOLOGÍA DE ANÁLISIS

Con en el fin de construir una base sólida que permita sustentar y cualificar las concepciones caracterizadas de los estudiantes acerca del cero cardinal y del cero posicional, se presenta a continuación una descripción general del método utilizado para el análisis de los datos recolectados a través de las situaciones descritas con anterioridad (Ver apartado 3.1.1.).

- Determinar, a partir de los elementos teóricos (didácticos y matemáticos) de los instrumentos diseñados, categorías generales basadas en los procesos involucrados en la interpretación y uso del cero cardinal y el cero posicional.

- Establecer un conjunto de categorías teóricas de análisis, basadas en los tipos de respuestas que se esperaban de los estudiantes.

- Definir sub-categorías emergentes de análisis para aquellas respuestas que no pudieran ser clasificadas dentro de las categorías establecidas con anterioridad.

- Identificar y categorizar las respuestas dadas de los estudiantes a partir de las categorías y sub- categorías encontradas.

En términos generales, la aplicación de los instrumentos y el análisis de los datos recolectados se realizó en dos momentos: el primero, que se denomina *de registro*, en el cual se recolectó y analizó la información escrita; y el segundo, que se denomina *de entrevistas*, las cuales se realizaron de acuerdo a las respuestas dadas por los estudiantes en los registros escritos.

A continuación, se realiza una descripción detallada del método de análisis usado en la caracterización de los dos objetos matemáticos involucrados en este trabajo *(cero cardinal y cero posicional*).

3.2.1 Metodología de análisis cero cardinal

Para la caracterización de las concepciones de los estudiantes en cuanto al cero cardinal se refiere, se partió inicialmente del análisis de las respuestas obtenidas de la situación 1.Esta situación fue desarrollada por una muestra de 114 estudiantes pertenecientes a las cinco secciones de *prima elementare* del colegio italiano.

El planteamiento teórico de la primera situación se fundamentó en la identificación de por lo menos dos tipos de tareas distintas e inversas, involucradas al determinar el cardinal de una colección. Tareas con las cuales se definieron dos procesos generales en la interpretación y uso del cero cardinal:

i) **La cardinalización de lo representado:** son aquellas tareas que requieren de la determinación de la cantidad total de elementos pertenecientes a una colección (vacía o no) dada.

ii) **Representar lo determinado por un cardinal dado:** son aquellas tareas que requieren representar los elementos correspondientes a una colección (vacía o no) cuyo cardinal se propone.

Por tanto, siendo consecuentes con los procesos generales establecidos, durante el desarrollo de la situación 1, los estudiantes tendrían que desarrollar una actividad que, por una parte (la A) les pediría determinar el cardinal de una colección vacía de elementos representado en un diagrama de Venn (la cardinalización de lo representado); y por otra parte (la B), dibujar los elementos correspondientes en un diagrama vacío que posee una etiqueta con el cardinal 0 (representar lo determinado por una cardinal dado).

Aplicada y desarrollada la situación 1 por la muestra seleccionada, se encontró que, gran parte de las respuestas de los estudiantes se correspondían con el tipo de respuestas esperadas durante el diseño de la actividad al efectuar la cardinalización de lo representado; sin embargo, se encontró un pequeño porcentaje de sujetos (3 niños) cuyas respuestas no era posible clasificar dentro de los tipos de respuestas definidas. Por tal motivo, se definió un nuevo tipo de respuesta que se denominó **respuesta IV**.

La respuesta de tipo IV, corresponde a aquellos estudiantes que han inventado elementos para el diagrama vacío de la parte A, pero que *por algún motivo* han cambiado su respuesta y han optado por borrar.

En cuanto a la tarea de representar lo determinado por un cardinal dado se refiere, y como estaba previsto, un gran porcentaje de estudiantes (93,27%) reconoce la representación "*0*" y asocian esta representación a la acción de no dibujar algún elemento en el diagrama que representa el conjunto vacío de la parte B.

Sin embargo, pese a que los datos de la parte B se corroboraban positivamente, no sucedía lo mismo en la tarea de cardinalización de lo representado, donde los datos mostraban una alta tendencia de los niños (67.5 %) a inventar elementos para el diagrama para después determinar su cardinal. Este fenómeno dificultó una identificación y caracterización de concepciones válidas y sustentables de los niños acerca del cero cardinal y volcó la atención de los investigadores sobre el instrumento implementado para la recolección de los datos.

Un estudio detallado de la situación 1 puso en evidencia la ausencia total de un contexto de uso significativo del número cero. Cierto es que, una tarea habitual para los niños, al *crear*, *hacer* o *definir* conjuntos es: dada una colección finita de objetos (que conforman un *universo*), seleccionar *algunos (o todos)* de estos con base en *una cierta característica* que permite agruparlos y diferenciarlos de los demás objetos que la componen. Dicha característica es, por lo general, *cualitativa* y corresponde a la *definición por compresión* del conjunto. Esta tarea precede incluso a la cardinalización.

De esta manera, es posible relacionar a cada conjunto dos características: *una cualitativa,* correspondiente a *su definición por compresión*; y otra *cuantitativa* correspondiente a *su cardinal*. Por lo tanto, en cuanto al diagrama vacío de la parte A se refiere, se tiene que, reconocer que no "*hay nada"* o que "*no hay ninguno*" en la colección y asociarlo con el cardinal 0, no es suficiente ni equivalente a reconocer que "*no hay nada de un algo"* en el mismo. Es por esto que el contexto juega un papel importante en la compresión del cero cardinal.

Teniendo en cuenta los aciertos y desaciertos del primer instrumento y la validez parcial que podrían tener los resultados basados en este, se elaboró un segundo instrumento de recolección, la situación 2, que:

- estuviera enmarcado en por lo menos uno de los contexto de la utilización de los números,

- se enmarcara en los procesos de interpretación de cero cardinal definidos,

- y que, permitiera complementar el grupo de categorías de análisis al interior de los procesos de interpretación propuestos.

La necesidad de diseñar un nuevo instrumento consecuente con las tres premisas planteadas, llevó a determinar que el contexto propicio era una combinación entre el contexto de *conteo* y el contexto *cardinal*; vista su estrecha relación.

Con respecto a los procesos de interpretación de cero, se decidió profundizar en el proceso de *cardinalización de lo representado*, ya que se aceptan los resultados de la investigación desarrollada por D'Amore (2009), la cual es concluyente al afirmar que, "*ya desde edad pre-escolar una gran mayoría de niños conoce la representación "0" de cero y sabe asociarlo a "nada" o "ninguno", o como la ausencia de acción o de objetos*" (p. 86).

Para complementar el grupo de respuestas esperadas de la situación 2, se retomaron el tipo de respuestas I y II del instrumento anterior y se eliminó la posibilidad de obtener las respuestas de tipo III y IV (la invención de elementos para la colección vacía) a través de la inclusión de un contexto específico de uso y significación de cero cardinal y una definición clara, por extensión y compresión, de los conjuntos vacíos cuyo cardinal debería ser determinado. Además de contemplar nuevamente la posibilidad de obtener respuestas emergentes.

Finalmente, se decidió trabajar con una muestra más pequeña de doce estudiantes, realizando una selección al azar de tres estudiantes de cada uno de los tipos de respuestas de la situación 1.

Implementada la situación 2, se encontró que, gran parte de las respuestas de los estudiantes se correspondían con el tipo de respuestas presupuestadas en el diseño del instrumento; pero nuevamente, hubo un grupo de tres estudiantes que combinaban simultáneamente los tres tipos de respuesta en el desarrollo de la actividad, este tipo de proceder se denominó y clasificó como respuesta de tipo IV.

Aplicados los instrumentos, definidos los procesos y clasificadas las respuestas de los estudiantes se procedió a definir categorías y sub – categorías de análisis para agrupar y describir la actuación de los estudiantes en el desarrollo de las actividades, comenzando por la fase manipulativa de la situación 2. A continuación, se compararon las fases manipulativas y de registro para determinar la influencia que tuvo la inclusión del contexto específico y la clara definición de las colecciones vacías al efectuar la cardinalización de lo representado. Y finalmente, se realizó un estudio comparativo entre las actuaciones de los estudiantes durante el desarrollo de la parte A del primer instrumento y la fase registro del segundo.

Como resultado del proceso de análisis descrito en el párrafo anterior se logró identificar y caracterizar cuatro concepciones en los estudiantes con respecto al cero cardinal: la concepción por *omisión visual*, la concepción por *compresión sin cardinalización*, la concepción *completa* y concepción *mixta*. Las cuales se presentan a continuación:

- **Concepción por omisión visual**: Son aquellos estudiantes que no reconocen la existencia de colecciones vacías y por ende no determinan su cardinal.

- **Concepción por comprensión sin cardinalización**: Son aquellos estudiantes que, reconocen por compresión la existencia de colecciones vacías, pero asocia su cardinal, no con cero, sino con expresiones del lenguaje habitual equivalentes como **nada** o **ninguno**.

- **Concepción completa:** Son aquellos estudiantes que, determinan el cardinal de cualquier colección vacía con el número cero, e inversamente, interpretan al número cero como el cardinal de toda colección vacía.

- **Concepción mixta:** Son aquellos estudiantes que son esporádicos al cardinar colecciones vacías. Así, en algunas ocasiones utilizan el cardinal cero, en otras términos sociales como nada o ninguno, u**,** omiten la existencia de la colección tanto cualitativa como cuantitativamente.

La manera detalla en la que se definen estas cuatro concepciones, a partir de las soluciones dadas por los estudiantes a los instrumentos de recolección construidos, se especificarán durante el análisis de los datos.

3.2.2 Metodología de análisis cero posicional

Para la caracterización de las concepciones de los estudiantes en cuanto al cero posicional se refiere, se determinaron y se identificaron dos momentos, el momento de registro y el momento de entrevista. Los cuales se describen a continuación:

3.2.2.1 Momento de registro.

En relación con el análisis de la información del cero posicional fue necesario categorizar los datos recolectados bajo los tipos de respuestas presupuestadas y descritas en apartado 3.1.1, con la finalidad de observar la argumentación gráfica de cada uno de los estudiantes e identificar posibles respuestas que no pudieran ser clasificadas. De igual forma, el registro escrito mostró una tendencia de los estudiantes en usar (o no) los procesos de composición y descomposición, con la finalidad de justificar la existencia de cada uno de los ceros presentes en la tabla de agrupaciones, lo que conlleva a observar la importancia de estos procesos en la explicación de las cifras de un número dado.

Al observar las respuestas obtenidas en el momento de registro y teniendo como referente para el análisis aquellos estudiantes que de manera gráfica realizaban (o no) los procesos de componer y descomponer para la justificación de la existencia del cero, se lograron caracterizar tres concepciones del cero posicional: la concepción *global*, la concepción *parcial* y la concepción *nula*. Las cuales se presentan a continuación:

- **Concepción global del cero posicional**: el estudiante reconoce y argumenta a través de agrupaciones *(composición)* la existencia de cada uno de los ceros y considera que estos representan el cardinal del *conjunto complemento*[14] de los elementos de un orden dado (unidades, decenas, centenas).

- **Concepción parcial del cero posicional**: entendiendo esta como, la capacidad que el estudiante tiene tan solo de comprender al cero como el cardinal de cada posición, es decir, no se ve en la necesidad de realizar agrupaciones para realizar su argumentación en referencia a la existencia de los ceros en las diversas posiciones y simplemente realiza un proceso de "*representar lo determinado por un cardinal dado"* sin hacer énfasis en el cardinal del *conjunto complemento,* pero que de alguna forma identifican la naturaleza u objetos en cada una de las posiciones.

- **Concepción nula del cero posicional*:*** el niño simplemente realiza un el proceso de *representar el cardinal*, pero sin embargo no respetar las posiciones y de la misma manera no encuentran diferencia alguna entre la naturaleza de los conjuntos en cada una de las posiciones, es decir, considera que sin importar la posición del cero, éste representa siempre el mismo conjunto vacío.

De esta manera la actividad de registro permitió establecer categorías de análisis basadas en los procesos de composición y descomposición, que posteriormente se complementaron en el momento de la entrevista como se describe a continuación.

[14] Se considera como conjunto complemento al conjunto de las unidades que sobran en cada orden después de realizar las agrupaciones necesarias y suficientes.

3.2.2.2 Momento de entrevistas.

Después de establecer las categorías de análisis y reconociendo que el momento de registro no ofrece la información necesaria para realizar la categorización de las respuestas, se ve la necesidad de realizar entrevistas individuales.

Para tal finalidad, se realizó una selección al azar de dos estudiantes por cada tipo de respuesta a los cuales se les realizó la guía de entrevista (ver tabla 9), con la intención de indagar si el estudiante comprendía el valor posición del cero en el sistema posicional a través de preguntas que lo interrogaban en referencia a este valor.

Las transcripciones de los videos realizados dieron información adicional, mostrando que los estudiantes que logran explicar el *valor de posición* del cero, se ven en la necesidad de realizar los procesos de composición y descomposición a través de las reglas que se establecieron en la situación. Dichas transcripciones, además de ofrecer este tipo de información, ofrecieron elementos suficientes para la realización de las conclusiones del análisis, como también ser elementos de apoyo para las justificaciones y argumentaciones a cada una de las afirmaciones que se realizan en la parte de análisis del trabajo.

Cabe resaltar que cada uno de los registros escritos se categorizó y se analizó de acuerdo al tipo de respuesta prevista, dando una idea de las posibles concepciones (global, parcial o nula) que se tenía del cero.

CAPÍTULO 4. ANÁLISIS DE RESULTADOS

En este capítulo se presenta el análisis de la información obtenida en las dos etapas de la investigación (cero cardinal y cero posicional). Cabe aclarar que, durante la etapa del cero cardinal se desglosa en dos momentos (situación 1 y situación 2) de acuerdo a las actividades descritas en el capítulo 3, donde las respuestas de los estudiantes se analizan bajo las categorías y sub-categorías anteriormente nombradas. De manera análoga, se realiza el análisis de la etapa del cero posicional, la cual se determina en dos momentos, uno de registro y otro de entrevista, los cuales dieron información importante en relación con la caracterización del cero en un sistema posicional. De esta manera a continuación se presenta el proceso de análisis de los datos recolectados a partir de los instrumentos desarrollados.

4.1 Análisis de resultados. Situaciones de Cero Cardinal

Se presentan a continuación el análisis de los datos recolectados que permitió la identificación y caracterización de las cuatro concepciones de los estudiantes en cuanto al cero cardinal se refiere. Con respecto a la situación 1, se define y analiza la información recolectada definiendo dos categorías generales de análisis basadas en el tipo de tarea propuesta a los estudiantes y el tipo de respuestas esperadas y emergentes obtenidas. Hecho esto, con la información de la situación 2, se profundiza en una de las categorías generales establecidas y al interior de esta se definen cuatro sub-categorías de análisis. Finalmente, se presenta un estudio comparativo entre las actuaciones de los estudiantes durante el desarrollo del primer instrumento (parte A) y el segundo.

Como primer elemento del análisis de datos se establece que, existen por lo menos dos tipos de tareas distintas e inversas, involucradas en la cardinalización de colecciones. Tareas con la cuales se definen a continuación, dos categorías generales de análisis en la interpretación y uso del cero cardinal:

i) **Cardinalización de lo representado*:*** esta categoría será aplicada a tareas que requieran de la cardinalización de una colección, es decir, tareas en las cuales los estudiantes deban determinar la cantidad total de elementos pertenecientes a un conjunto dado.

ii) **Representar lo determinado por un cardinal dado:** esta categoría será aplicada a tareas que requieran representar los elementos correspondientes a un conjunto cuyo cardinal haya sido propuesto.

4.1.1 Análisis de la Situación 1. Parte A

La parte A de la situación 1, requería la cardinalización de cuatro colecciones, donde una de ellas era vacía; es decir, la tarea dada correspondía a la cardinalización de lo representado. Las respuestas de los estudiantes fueron clasificadas en cuatro tipos (tres esperadas y una emergente) a saber:

> **Respuesta tipo I**: la omisión de la escritura del número 0 en la etiqueta del conjunto.
>
> **Respuesta tipo II**: la escritura del número 0 en la etiqueta de conjunto.
>
> **Respuesta tipo III**: la definición y respectiva cardinalización de un conjunto no vacío, dibujando *algunos* elementos en el diagrama.
>
> **Respuesta tipo IV:** la invención de elementos para el diagrama, pero el posterior cambio de respuesta a una de tipo I o II.

Desarrollada la actividad por 114 estudiantes de las cinco secciones de prima elementare, se tiene que:

Tabla 11

Número de sujetos y tipo de respuesta dada a la parte A de la situación 1.

Respuestas VS. Cursos	**TIPO I**	**TIPO II**	**TIPO III**	**TIPO IV**
1º A	0	1	24	0
1º B	0	4	18	0
1º C	4	3	14	2 (T. I)
1º D	2	2	17	1 (T. II)
1º E	7	11	4	0

Tabla 12

Porcentaje de sujetos y tipo de respuesta dada a la parte A de la situación 1.

Respuestas VS. Cursos	**TIPO I**	**TIPO II**	**TIPO III**	**TIPO IV**
1º A	0%	4%	96%	0%
1º B	0%	18.2%	81.2%	0%
1º C	17.4%	13%	60.8%	8.7% (T.I)
1º D	9.1%	9.1%	77.2%	4.5 % (T. II)
1º E	31.8%	50%	18.2%	0%

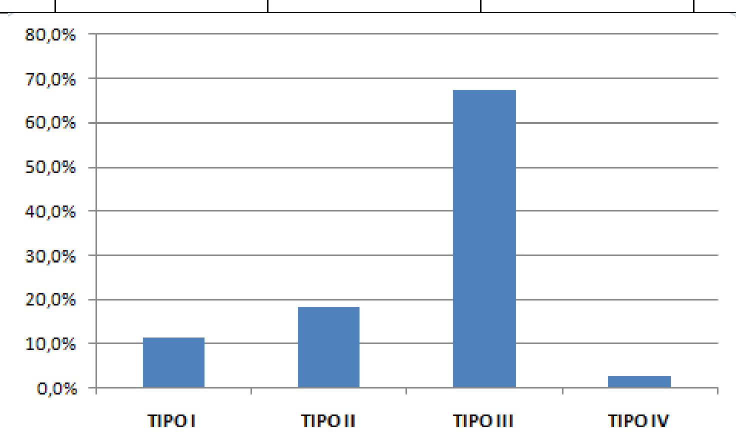


Figura 17. Resultados globales del curso 1º, parte A de la situación 1.

De la información presente en las tablas 11 y 12, y la figura 17 se observa que:

- Las repuestas emergentes de tipo IV, solo están presentes en dos de los cursos y el número de estudiantes que proceden de esta manera es bajo: 3 estudiantes, correspondientes al 2,6 % del total de la muestra.

  En la columna correspondiente a las respuestas de tipo IV, se aclara el comportamiento de estos niños; así por ejemplo, "*2 (T. I)*" corresponde a dos estudiantes del curso 1º C que han borrado los dibujos que han hecho y adicionalmente han dejado la etiqueta del conjunto vacía; mientras que, "*1 (T. II)"* corresponde a un estudiante del curso 1º D que ha borrado y ha escrito en la etiqueta el número 0.

- A excepción del grupo de 1º E, los datos muestran que, hay una alta tendencia de los estudiantes a inventar elementos para el diagrama que representa la colección vacía, esto es: el 96% de 1º A., el 81.2% de 1º B., el 60.8% de 1º C., y el 77.2% de 1º D.

  Dicha tendencia podría explicarse teniendo en cuenta que, el diagrama vacío es la última colección que se debe efectuar una cardinalización, por ende esta podría interpretarse como un espacio para la invención de una colección no vacía. Sin embargo, no se tienen las evidencias suficientes para sustentar lo anteriormente afirmado[15].

[15] Una manera usual de organizar el trabajo durante las clases de matemáticas consiste en la *presentación* de un contenido específico, el *ejercicio práctico* desarrollado alrededor del contenido presentado y por último *la invención* de ejercicios y ejemplos relacionados. Es usual en este tipo de organización que la *presentación* y el *ejercicio práctico* sea desarrollada por el docente; mientras que, *la invención* este a cargo de los estudiantes. Es posible entonces, que la tendencia a inventar elementos en el diagrama que representa la colección vacía este influencia por esta forma de organización de la clase. En tal caso sería necesario establecer si los estudiantes responden de esta manera influenciados por una cláusula en el contrato didáctico establecido.

- Más de los cuatro quintos de la muestra, el 81,6% de los estudiantes, con la cual fue implementado el instrumento proceden de una manera distinta a la de escribir 0 en la etiqueta en el diagrama que representaba la colección vacía.

4.1.2 Análisis de la Situación 1. Parte B

La parte B de la situación 1, requería por parte de los estudiantes dibujar los elementos correspondientes a cuatro conjuntos con un cierto cardinal propuesto, donde uno de ellos era precisamente el número 0.

Tal y como estaba previsto y como lo respalda las respuestas dadas por una muestra de 111 estudiantes, un gran porcentaje de estudiantes, el 93,27%, reconoce la representación **0** y asocian esta representación a la acción de no dibujar algún elemento en el diagrama que representa el conjunto vacío, como muestra la información registrada en las tablas 13 y 14.

Tabla 13

Número y porcentaje de estudiantes, por clase, que no dibujan algo en el conjunto vacío etiquetado "0" de la parte B.

RESPUESTAS VS. CURSOS	NÚMERO DE SUJETOS	PORCENTAJE DE SUJETOS
1º A	25	96.15%
1º B	22	91.6%
1º C	22	95.6%
1º D	20	91%
1º E	22	91.6%

Tabla 14

Número y porcentaje de estudiantes de primero de primaria que no dibujan algo en el conjunto de la parte B.

RESPUESTAS VS. CURSOS	**NÚMERO DE SUJETOS**	**PORCENTAJE DE SUJETOS**
1º	111	93.27%

La diferencia de tres estudiantes con respecto a la muestra de la parte A y la parte B de la misma, corresponde a aquellos niños que no completaron la actividad[16].

Si bien los datos disponibles muestran que, cuando la representación dada de cero es el dígito **0**, los estudiantes no presentan mayor dificultad en *determinar lo representado por un cardinal dado*, este resultado es de carácter parcial, dado que no hay una evidencia clara de que este número esté siendo interpretado como el cardinal *de por lo menos un conjunto vacío*.

La revisión de algunas de las soluciones dadas, muestra que, el 93.27% de los estudiantes que completaron los tres conjuntos no vacíos los definían por extensión, dibujando tantos elementos como el cardinal les indicaba. Nótese que no es posible actuar de esta manera cuando se trata de representar una colección cuyo cardinal es cero. Por lo tanto, cuando se pretende representar un conjunto vacío, no es suficiente el no dibujar algo en el diagrama, sino que además es necesario explicitar como se le ha definido, y la única vía para hacerlo es por compresión.

Teniendo en cuenta lo anterior y aunque se aclaró que en el desarrollo de esta investigación no se profundiza en tareas que requieran representar colecciones vacías; se aceptan y respaldan los resultados de la investigación de D'Amore y Fandiño (2009), se diferencia entre dos posibles actuaciones de los estudiantes ante este tipo de tarea, que podrían ser utilizados en investigaciones posteriores como sub-categorías de análisis:

[16] Se consideró que un estudiante no había completado la actividad cuando no dibujaba algún elemento en ninguna de las tres colecciones no vacías.

1º sub-categoría

"nada" o **"ninguno"**: son aquellos estudiantes que asocian la palabra *cero* o su representación como cifra **0**, con las palabras como *nada* o *ninguno* sin explicitar por compresión la colección cuyo cardinal se está determinando.

2º sub-categoría

"nada de algo": son aquellos estudiantes que asocian la palabra *cero* o su representación como cifra **0**, con las palabras *nada* o *ninguno* explicitando por compresión la colección cuyo cardinal se está determinando.

Sosteniendo entonces que, la diferencia entre las dos sub-categorías planteadas está determinada por la especificidad en la definición por compresión dada por el sujeto del conjunto cuyo cardinal es 0.

La implementación de la situación 1 y el análisis los datos aquí presentados permiten afirmar entonces que, si bien los estudiantes conocen y reconocen la representación **0** y asocian a esta la acción de no dibujar algún elemento en el diagrama, no sucede lo mismo cuando la tarea requerida es inversa, es decir, cuando se les propone asignar el cardinal cero a un conjunto vacío dado.

4.1.3 Análisis de la Situación 2

Como se aclaró con anterioridad, vista la alta tendencia de los estudiantes a inventar elementos para el diagrama vacío durante el desarrollo de la parte A de la situación 1, se diseñó una nueva situación que eliminara esta posibilidad, para de esta manera identificar y caracterizar la concepción de cero que tienen los estudiantes al solicitarles determinar el cardinal de un conjunto vacío de elementos de una naturaleza definida. Es por esto que, la situación 2, así como su análisis, pertenecen a la categoría de la *cardinalización de lo representado*.

Para establecer un grupo de sub-categorías sólidas de análisis, se retomaron el tipo de respuestas I y II del instrumento anterior, se incluyó un nuevo tipo y del trabajo de estudiantes emergió otro tipo adicional.

Finalmente, se decidió reducir la muestra a doce estudiantes[17], realizando una selección aleatoria de tres estudiantes de cada uno de los primeros tres tipos de respuestas y los tres estudiantes del tipo de respuesta IV de la situación 1.

4.1.3.1 Análisis de la fase manipulativa (Momento 1).

Derivado de las posibles respuestas presupuestadas por los investigadores; y por otra parte, las respuestas emergentes del trabajo de los estudiantes en el desarrollo de la fase manipulativa de la situación 2, se definen a continuación cuatro sub-categorías de análisis:

1º sub-categoría

Omisión: Esta categoría es aplicada a aquellos estudiantes que, ante un conjunto vacío de elementos lo omiten completamente, tanto cuantitativa como cualitativamente.

2º sub-categoría

Comprensión sin cardinalización: Esta categoría es aplicada a aquellos estudiantes que, ante un conjunto vacío de elementos reconocen su existencia por comprensión pero no asocian su cardinal con cero.

[17] Es importante resaltar que, los doce estudiantes que desarrollaron la situación 2, no dibujaron algún elementos en la colección vacía, de la parte B, la situación 1.

3º sub-categoría:

Cardinalización completa: Esta categoría es aplicada a aquellos estudiantes que, ante un conjunto vacío de elementos reconocen su existencia por comprensión y a este asocian el cardinal 0.

4º sub-categoría:

Actuación mixta: Esta categoría es aplicada a aquellos estudiantes que, ante un conjunto vacío de elementos procede en ocasiones por omisión, por compresión o por cardinación completa.

Se presentan a continuación segmentos de la dinámica desarrollada entre el investigador (entrevistador) y los estudiantes de la segunda muestra para ejemplificar las categorías expuestas; se centra la atención en las ocasiones cuando fueron presentadas las colecciones vacías de lápices, borradores o tijeras[18].

4.1.3.1.1 Omisión (cualitativa y cuantitativa)

En esta categoría fueron clasificados cinco estudiantes (E_3, E_4, E_5, E_7 y E_{12}). Se reporta a continuación la conversación del investigador con cuatro de ellos:

Primer estudiante: Este realizó el conteo por observación.

[Investigador]: *¿Cuántos hay?* (tercera ocasión)

[Estudiante 3]: *hay* [pausa para observar y contar] *tres tijeras y cinco lápices.*

[I]: *¿y ahora* [cuántos hay]? (cuarta ocasión)

[E_3]: *dos lápices.*

[I]: *¿y ahora* [cuántos hay]? (quinta ocasión)

[E_3]: *hay dos tijeras y tres borradores.*

---

[18] Adicional a las transcripciones aquí presentadas se dispone de los videos de cada uno de los estudiantes desarrollando la situación.

Segundo estudiante:

[I]: *¿Cuántos hay?* (tercera ocasión)

[E_4]: [Señalando con la mano el espacio donde se agrupan los lápices y afirma] *cinco lápices,* [desplaza la mano hacia las tijeras y afirma] *tres tijeras* [permanece en silencio y retira la mano].

[I]: *ok. ¿Y ahora* [cuántos hay]? (cuarta ocasión)

[E_4]: [desplaza la mano hacia los lápices y afirma] *dos lápices* [permanece en silencio y retira la mano].

Mientras el entrevistador procede a reorganizar los conjuntos para el último intento el estudiante se apresura, consciente de su tarea, y afirma antes de que se pregunte, apuntando nuevamente con su mano hacia los conjunto que observa

[E_4]: *dos tijeras y tres borradores*.

Finalmente, retira nuevamente para indicar que ha finalizado.

Tercer estudiante:

Durante las dos primeras ocasiones el estudiante ha tocado con el dedo índice los elementos de cada uno de los conjuntos para enumerarlos y así poder determinar su cardinal.

[I]: *¿Cuántos hay?* (tercera ocasión: en esta ocasión el investigador a dispuesto seis lápices y una par de tijeras)

[E_5]: [tocando los elementos que observa afirma, respectivamente] *seis lápices y unas tijeras.*

[I]: *¿y ahora* [cuántos hay]? (cuarta ocasión)

[E_5]: [sin tocar los elementos afirma] *dos lápices.*

[I]: *¿y ahora* [cuántos hay]? (quinta ocasión: en esta ocasión el investigador a dispuesto tres lápices y tres tijeras)

[E_5]: [nuevamente tocando los elementos dice] *tres lápices y tres tijeras*.

Dada esta última respuesta el investigador retira todo de la mesa y se escucha afirmar

[E_5]: *ahora nada* [deslizando la mano sobre la mesa de izquierda a derecha].

Cuarto estudiante:

Durante las dos primeras ocasiones el estudiante ha realizado el conteo de los elementos por observación y cada vez que quiere referirse a una colección en particular señala con la mano la posición que ocupa esta sobre la mesa.

[I]: *¿Cuántos hay?* (tercera ocasión)

[E_7]: *cinco lápices y tres tijeras.*

[I]: *¿y ahora* [cuántos hay]? (cuarta ocasión)

[E_7]: *dos lápices.*

Mientras el entrevistador procede a reorganizar los conjuntos para el último intento y la mesa está vacía murmura

[I]: *entonces …*

A lo cual el estudiante se apresura a afirmar

[E_7]: *¡nada!*

La organización de los elemento por parte del investigador prosigue

[I]: *¿y ahora* [cuántos hay]? (quinta ocasión)

[E_7]: *tres borradores y dos tijeras.*

4.1.3.1.2 Compresión sin cardinalización

En esta categoría fue clasificado un estudiante (E_2). Este ha realizado el conteo durante las dos primeras ocasiones por observación.

[I]: *¿Dime ahora cuántos hay?* (tercera ocasión)

[E_2]: *hay* [pausa para observar y contar] *cinco lápices,* [pausa para observar el espacio vacío de los borradores] *borradores* [pausa] *ninguno y las tijeras son tres.*

[I]: *¿y ahora* [cuántos hay]? (cuarta ocasión)

[E_2]: *los lápices son dos,* [nuevamente observa los espacios vacíos dejados por los elementos retirados], *los borradores ninguno y las tijeras ninguno.*

[I]: *¿y ahora* [cuántos hay]? (quinta ocasión)

[E_2]: *ahora las tijeras son tres,* [pausa] *los borradores son tres*. *¡Ah, no! Las tijeras son dos; y de los lápices ninguno.*

4.1.3.1.3 Cardinalización completa

En esta categoría fueron clasificados tres estudiantes. Al igual que el estudiante E_4, los tres estudiantes clasificados en esta categoría (E_8, E_9 y E_{11}) señalan con la mano (o con el dedo índice) los espacios donde están, o deberían estar, agrupados y organizados los elementos de cada una de las colecciones para posteriormente determinar su cardinal. Se presenta aquí solamente una de las conversaciones sostenidas, ya que el desarrollo por parte de los tres estudiantes fue similar:

[I]: *ok, tercer vez ¿cuántos hay?*

[E_8]: [señalando cada uno de los lápices sucesivamente dice] *uno, dos, tres, cuatro y cinco* [mueve su dedo índice hacia el espacio vacío de los borradores], *cero.*

[I]: *¿cinco, cero?*

[E_8]: *¡ah, no! Cinco lápices* [desplazando el dedo índice para señalarlos como un todo] y *cero borradores* [señalando el espacio vacío que les corresponde sobre la mesa] y *tres tijeras*.

[I]: *ok, cuarta vez.*

[E_8]: *dos lápices, cero borradores y cero tijeras* [señalando nuevamente los espacios vacíos dejados por los borradores y las tijeras]

[I]: *quinta vez*

[E_8]: *eh, cero lápices*, *tres borradores y tres tijeras*.

En el video de este estudiante se observa claramente la manera en que utiliza sus manos tanto para enumerar y contar los elementos correspondientes a cada una de las tres colecciones, como para indicar también que el último número que pronuncia corresponde al cardinal del conjunto. Una evidencia análoga a lo anteriormente afirmado, es verificable los videos de los estudiantes E_9 y E_{11}, los cuales proceden de una manera similar a la de E_8 para realizar la cardinalización completa.

4.1.3.1.4 Actuación mixta

En esta categoría fueron clasificados tres estudiantes (E_1, E_6 y E_{10}).

Primer estudiante

Durante las dos primeras ocasiones el estudiante ha realizado el conteo de los elementos por observación y cada vez que quiere referirse a una colección en particular señala con el dedo índice la posición que esta ocupa sobre la mesa.

[I]: *¿y ahora* [cuántos hay]? (tercera ocasión)

[E_1]: *las tijeras son tres, los borradores no hay ninguno* [señalando el espacio vacío], *y los lápices son* [pausa] *cinco*.

[I]: *¿y ahora* [cuántos hay]? (cuarta ocasión: en esta ocasión el investigador a dispuesto únicamente dos pares de tijeras sobre la mesa)

[E_1]: *hay dos tijeras, los borradores son cero y los lápices son cero* [señalando de nuevo los espacios vacíos, respectivamente].

[I]: *¿y ahora* [cuántos hay]? (quinta ocasión)

[E_1]: *las tijeras son dos, los borradores son tres y los lápices son* [pausa] *ninguno.*

Segundo estudiante

El estudiante ha realizado el conteo durante las dos primeras ocasiones por observación contando, algunas veces, un elemento menos en cada colección.

[I]: *¿y ahora* [cuántos hay]? (tercera ocasión)

[E$_6$]: *hay* [pausa para observar y contar] *cero borradores, cinco lápices y tres tijeras.*

[I]: *¿y ahora* [cuántos hay]? (Cuarta ocasión)

[E$_6$]: *hay dos lápices* [pausa para observar los espacios vacíos] *y no hay ni tijeras ni borradores.*

[I]: *¿y ahora* [cuántos hay]? (Quinta ocasión)

[E$_6$]: *No hay lápices, hay tres borradores y dos tijeras.*

Nótese como estos dos estudiantes han utilizado a cero para efectuar la cardinalización de algunas de las colecciones durante algunas de las ocasiones; sin embargo, el hecho de no tener elementos en algunos momentos los lleva a hacer una compresión sin cardinación de los mismos.

Tercer estudiante

Durante las dos primeras ocasiones el estudiante ha realizado el conteo de los elementos por observación y cada vez que quiere referirse a una colección en particular señala con la mano la posición que esta ocupa sobre la mesa.

[I]: *¿y ahora* [cuántos hay]? (tercera ocasión)

[E$_{12}$]: aquí [señalando el conjunto de lápices con su mano] *hay cinco, y aquí* [señalando el conjunto de tijeras con otra mano] *tres.*

[I]: *¿y ahora* [cuántos hay]? (cuarta ocasión)

[E$_{12}$]: *dos.*

[I]: *¿dos qué?*

[E_{12}]: *dos lápices.*

[I]: *¿y ahora* [cuántos hay]? (quinta ocasión)

[E_{12}]: *cero lápices, tres tijeras, ¡no!, dos tijeras y tres borradores.*

Es evidente la manera como el estudiante E_{12} durante la tercera y cuarta ocasión omite los conjuntos vacíos, no así, durante la tercera oportunidad donde realiza la cardinación completa de la colección de lápices.

4.1.3.2 Análisis de la fase de registro (momento 2)

Si bien las evidencias presentadas en el apartado anterior demuestran que, hay por lo menos cuatro maneras distintas de proceder por parte de los estudiantes ante la tarea de determinar el cardinal de las colecciones vacías de lápices, borradores o tijeras; no sucede de igual manera cuando la misma tarea fue efectuada con el apoyo de las tablas de registro, donde la cardinalización completa fue casi una constante.

En efecto, de los doce estudiantes seleccionados para la aplicación del segundo instrumento, diez de ellos (el 83.4%) realizaron una cardinalización completa al completar las tablas de registro. Un estudiante (E_4) tuvo una actuación mixta, al realizar la cardinalización completa durante la tercera y la quinta ocasión, pero omitiendo la escritura de cero durante la cuarta oportunidad. Mientras que, un estudiante (E_5) que había procedido por omisión durante el momento 1, reiteró su actuación en la parte escrita.

4.1.3.3 Análisis comparativo de las fases manipulativa y de registro de la situación 2

En los apartados anteriores se han reportado observaciones acerca de la manera oral en que actúan los estudiantes al determinar el cardinal de algunas colecciones vacías; y además, de la forma en que proceden de manera escrita para llevar a cabo las mismas tarea. Adicionalmente, se realizaron observaciones comparando las dos partes escritas de los instrumentos implementados, al interior de la categoría de interpretación del cero cardinal definido como cardinalización de lo representado. Antes de caracterizar las concepciones objeto de este trabajo, se emplea este apartado para realizar algunas observaciones comparativas en referencia a las dos partes, oral y escrita, de la situación 2. (Ver Tabla 14.)

En cuanto a los cinco estudiantes que proceden por omisión en la parte oral, se tiene que:

- En uno de ellos (E_5) permanece esta tendencia en la parte escrita.

- Otro estudiante (E_4) procede de manera mixta, demostrando efectuar la cardinalización de manera completa a través de las tablas de registro de manera esporádica.

- Los otros tres estudiantes (E_3, E_7, E_{12}) realizaron siempre una cardinalización completa en las tablas de registro. Los videos de estos niños prueban como la parte perceptiva visual los influencia para omitir, cualitativa y cuantitativamente, las colecciones vacías que no observan: utilizan las manos para señalar únicamente la posición ocupada sobre la mesa por las colecciones cuando estas eran no vacías.

El estudiante (E_2) que había demostrado una compresión sin cardinalización en la parte oral, realiza una cardinalización completa en la parte escrita. Así, es posible que este niño logre relacionar, por ejemplo que, el hecho de que "*no tener ningún lápiz*" es equivalente al de tener "*cero lápices*"; asociando de esta forma que el tener *nada de algo* o *ninguno de un algo* significa tener *cero de ese algo*.

Hay tres estudiantes (E_8, E_9 y E_{11}) que realizaron una cardinalización completa en los dos momentos de la actividad. Es de resaltar la manera en que estos niños utilizan las manos para determinar el cardinal de cada una de las tres colecciones; además de utilizarlas para señalar explícitamente y todo momento la posición sobre la mesa ocupada por cada una de estas aun cuando fueran vacías.

Finalmente, en cuanto a los tres estudiantes (E_1, E_6, E_{10}) que actúan de manera mixta, se tiene que:

- Uno de ellos (E_{10}) en la parte oral procede por omisión y cardinación completa; mientras que, en la parte escrita procede por cardinación completa. El video muestra que, cuando de la parte oral se trata, el niño actúa influenciado por su parte perceptual, lo cual lo lleva a realizar la omisión.

- Dos de ellos (E_1 y E_6) en la parte oral proceden por compresión sin cardinalización (como lo hace el estudiante E_2) y cardinalización completa; mientras que, en la parte escrita proceden por cardinalización completa.

4.1.4 Análisis comparativo de los dos instrumentos de recolección

Finalmente, se presenta a continuación un análisis comparativo entre las actuaciones de los doce estudiantes durante el desarrollo de la parte A., del primer instrumento y la fase de registro del segundo; estos es, una análisis final de la manera en que los estudiantes efectuaron la cardinalización de lo representado durante el desarrollo de los dos instrumentos de recolección.

Tabla 15

Tabla de análisis comparativo entre los dos instrumentos de recolección diseñados.

Tipo de respuesta, parte A., del 1º instrumento	Estudiante	Respuestas de la parte oral del 2º instrumento	Respuesta de la parte escrita del 2º instrumento
Tipo I (omisión de 0)	E_1	Actuación mixta	Cardinación completa
	E_2	Compresión sin cardinación	Cardinación completa
	E_4	Omisión	Actuación mixta
Tipo II (cardinación con 0)	E_3	Omisión	Cardinación completa
	E_6	Actuación mixta	Cardinación completa
	E_7	Omisión	Cardinación completa
Tipo III (inventa elementos para la colección y cardina)	E_8	Cardinación completa	Cardinación completa
	E_9	Cardinación completa	Cardinación completa
	E_{11}	Cardinación completa	Cardinación completa
Tipo IV (inventa, borra y cardina con 0 u omite)	E_5	Omisión	Omisión
	E_{10}	Actuación mixta	Cardinación completa
	E_{12}	Omisión	Cardinación completa

De la información expuesta en la Tabla 15, en referencia al trabajo escrito desarrollado en los dos instrumentos, se observa que:

- La introducción de un contexto específico de utilización del número y el hecho de explicitar por compresión la colección que se debía cardinar llevó a siete estudiantes (E_1, E_2, E_8, E_9, E_{10}, E_{11} y E_{12}) a la cardinalización completa de las colecciones presentadas, disminuyendo así actuaciones como, la omisión en la escritura del cardinal, o, la tendencia a completar el diagrama que representaba la colección vacía dibujando (o borrando) algún tipo de elementos en la tabla de registro.

- Tres estudiantes (E_3, E_6 y E_7) realizan una cardinalización completa de las colecciones vacías en los dos instrumentos implementados pese a la carencia absoluta de contexto en el primero de ellos.

  Nótese sin embargo que, dos de los estudiantes de este grupo al desarrollar la actividad de manera visual (E_3 y E_7) omiten la cardinalización ante la ausencia visual de los elementos que definen por extensión las colecciones presentadas; mientras que, el tercer estudiantes (E_6) ante la misma ausencia procede por de manera mixta entre la cardinalización completa y la compresión sin cardinalización.

- Un estudiante (E_4), omite la cardinalización en el primer instrumento en la fase manipulativa del segundo. Este mismo estudiante se muestra esporádico al determinar el cardinal con la introducción de un contexto específico y la definición por compresión de las colecciones en la fase de registro de la situación 2.

- Un estudiante (E_5), omite la cardinalización en el desarrollo de ambas actividades.

- Llama la atención el hecho que los tres estudiantes (E_8, E_9 y E_{11}) que durante la primera actividad inventaron elementos para el diagrama vacío; efectuaran una cardinalización completa, tanto de manera oral como escrita, de las colecciones vacías de la segunda actividad. Este cambio en el proceder de los estudiantes podría explicarse teniendo en cuenta que, en la parte A. del primer instrumento, el diagrama que representa el conjunto vacío es el último en que se les pide a los estudiantes cardinar lo representado, por ende este podría interpretarse como un espacio para la invención de una colección no vacía por extensión; mientras que, la especificidad en la definición por compresión de las colecciones presentadas en el segundo instrumento eliminaba la opción a dicha interpretación.

4.1.5 Caracterización de las concepciones de los estudiantes de prima elementare con respecto al cero cardinal.

En los apartados precedentes de este análisis se ha detallado la manera en que han sido identificadas las concepciones de los estudiantes acerca del cero cardinal a través de la definición de los procesos generales de interpretación de este número, la implementación de los instrumentos de recolección de datos y las categorías y sub-categorías de análisis definidas a partir del desarrollo de los estudiantes de los instrumentos propuestos. Finalmente, se presenta a continuación una caracterización de las concepciones de los estudiantes de prima elementare del colegio italiano Leonardo da Vinci con respecto al cero cardinal basada en las categorías de análisis establecidas a partir de las respuestas dadas en la fase manipulativa de la situación 2.

A lo largo de este trabajo se ha afirmado que el uso e interpretación del cero cardinal está basado en dos procesos generales distintos e inversos, a saber: la cardinalización de lo representado y el representar lo determinado por un cardinal dado.

Con base en lo anterior, se afirma entonces que un sujeto tiene una **concepción completa** del número cero si: *i)* efectúa la cardinalización de cualquier colección vacía con el número 0; y si de manera inversa, *ii)* reconoce al número 0 como el representante de la clase de equivalencia de toda colección equipotente al conjunto vacío.

Como lo han mostrado investigaciones anteriores y se reafirma en esta, ya desde la edad preescolar un sujeto es capaz de interpretar, usar y asociar al cero cardinal con la acción de *no hacer nada, no tener algo* o el *no tener ninguno*; es decir, desde edades muy tempranas los niños están en la capacidad de representar lo determinado por un cardinal dado, esto debido posiblemente al temprano aprendizaje del uso que tienen los números naturales en el contexto social. Es por este hecho que, en el uso e interpretación del cero cardinal la mitad del camino se encuentra ya recorrida.

Por tanto, la caracterización de las concepciones resultante de esta investigación, están centradas en el proceder de los estudiantes cuando desarrollan tareas en que se les exige la cardinalización con cero de ciertas colecciones vacías de *alguna manera* representadas.

Se recuerda al lector que, las concepciones que se presentan a continuación, son fruto de la clasificación de las respuestas de los estudiantes en la fase manipulativa de la situación 2 y la manera como se definieron las sub-categorías de análisis basados en estas. Dicho lo anterior, y basados en las categorías y sub-categorías de análisis presentadas con anterioridad, se afirma que existen cuatro concepciones del cero cardinal a saber:

1º Concepción por omisión visual:

Son aquellos estudiantes que no reconocen la existencia de colecciones vacías y por ende no determinan su cardinal correspondiente.

2º Concepción por compresión sin cardinalización:

Son aquellos estudiantes que, reconocen por compresión la existencia de colecciones vacías, pero asocian su cardinal, no con cero, sino con expresiones del lenguaje habitual como **nada** o **ninguno**.

3º Concepción completa:

Son aquellos estudiantes que, determinan el cardinal de cualquier cole6cción vacía con el número cero, e inversamente, interpretan al número cero como el cardinal de toda colección vacía.

4º Concepción mixta:

Son aquellos estudiantes que son esporádicos al determinar el cardinal de colecciones vacías. Así, en algunas ocasiones utilizan el cardinal cero, en otras expresiones como nada o ninguno, u**,** omiten la existencia de la colección tanto cualitativa como cuantitativamente.

El análisis de datos recolectados en esta investigación muestra que:

- Cinco estudiantes E_3, E_4, E_5, E_7 y E_{12} (el 41,6 % de la muestra) demuestran una concepción por omisión visual del cero cardinal. Estos niños basan la tarea de cardinalización de una colección en la percepción visual de los elementos la que definen; por lo tanto cuando esta es vacía ni siquiera reconocen la existencia colección alguna. Tres de ellos (E_3, E_7 y E_{12}) necesitaron de una definición por compresión para proceder a determinar el cardinal de algo que no se observaba; y uno más (E_4), mostró una actuación mixta entre la cardinalización completa y la omisión.

  Llama particularmente la atención la actuación del estudiante E_5, el cual no determina el cardinal de las colecciones vacías ni siquiera cuando estas se le definen por compresión. Se considera este caso como atípico, ya que aunque este niño no realiza una cardinalización de lo representado, si representa lo determinado por una cardinal dado; demostrando así, por lo menos de manera parcial, un conocimiento social de la función del cero cardinal.

- Un estudiante (E_2) demuestra tener una concepción por compresión y sin cardinalización del cero cardinal. Es posible que este niño logre relacionar, por ejemplo que, el hecho de que "*no tener ningún lápiz*" es equivalente al de tener "*cero lápices*"; asociando de esta manera que el tener *nada de algo* o *ninguno de un algo* significa tener *cero de ese algo*.

- Tres de los estudiantes (E_8, E_9 y E_{11}), correspondientes al 25 % de la segunda muestra, demuestran una concepción completa al efectuar la cardinalización de las colecciones vacías, mostrándose competentes en a cardinalización de lo representado, tanto de manera manipulativa como de manera escrita.

- Finalmente, tres estudiantes (E_1, E_6 y E_{10}) demuestran una concepción mixta de cero. Uno de ellos (E_{10}) en la fase manipulativa procede por omisión y cardinalización completa; mientras que, en la parte escrita procede únicamente por cardinalización completa. El video muestra que, cuando de la parte visual se trata, el niño actúa influenciado por su parte perceptual, lo cual lo lleva a realizar la omisión. Mientras que, los otros dos niños (E_1 y E_6) que en la fase manipulativa proceden por compresión sin cardinalización (como lo hace el estudiante E_2) y cardinalización completa; proceden únicamente por cardinalización completa durante la fase de registro.

4.2 Análisis de Resultados. Situaciones de Cero en un Sistema Posicional

La información recolectada en el momento de registro y su posterior clasificación en la tipología de respuestas predeterminadas, llevó a encontrar otro tipo de respuesta, la cual consistía en dibujar una pera en la columna de las cajas, esta respuesta se categorizó como tipo V y se nombró como "*solución cardinal no posicional*" en la cual se enmarcaron cuatro de los estudiantes de la población, lo que muestra una respuesta que se debe tener en consideración.

Al realizar la selección de la muestra de los 13 estudiantes cuyas respuestas se presentan en la figura 18 y cuya descripción por cantidad de estudiantes y tipo de respuesta se muestra en la tabla 16, se ve una tendencia de respuestas de tipo I, III y IV y una omisión de respuesta de tipo II identificando un porcentaje bajo en el tipo de respuesta I y un gran porcentaje en referencia a la población en los tipos de respuesta III, IV y V.

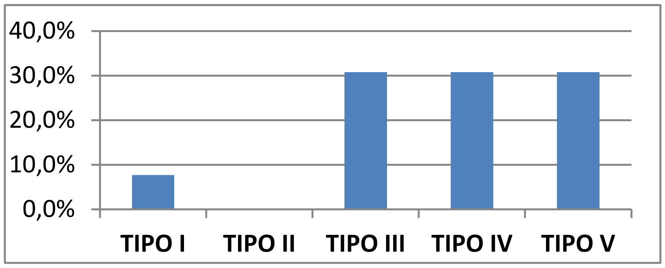


Figura 18. Porcentaje de las respuestas de los estudiantes por tipo.

Tabla 16

Tipo de respuesta y cantidad de estudiantes.

Tipo de respuesta	Cantidad de estudiantes
TIPO I. Solución por descomposición de la unidad de orden superior	1
TIPO II. Solución por agrupamiento total	0
TIPO III. Solución por agrupamiento no evidente	4
TIPO IV: Solución por agrupamiento no consecuente	4
TIPO V. Diseño de una pera en la columna de las cajas.	4

El porcentaje bajo de estudiantes corresponden a los estudiantes que tratan de completar de manera general la tabla de registro, caso contrario el porcentaje de estudiantes que realizan dibujos incompletos o hasta únicamente un dibujo. La descripción detallada de los tipos respuestas dadas en los registros y la caracterización del cero encontrados y observados en cada uno de ellas, se describirán a continuación:

4.2.1 TIPO I. Solución por descomposición de la unidad de orden superior

La manera en que el estudiante realiza la descomposición de cada uno de los órdenes[19] (ver figura 19), muestra que tiene clara la relación de equivalencia en base tres, de igual forma se puede observar, que aunque existe el cero en las columnas de las peras y las bolsas, el estudiante realiza dibujos en ellos, estos indicios nos lleva a indagar a través de las entrevistas si el niño comprende el *valor de posición* del cero.

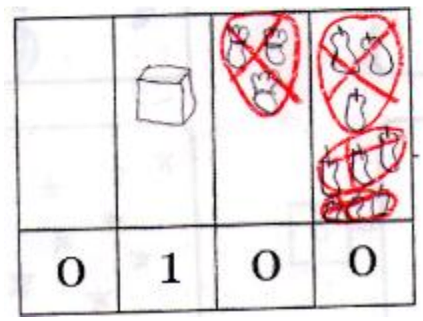


Figura 19. Solución por descomposición de la unidad de orden superior.

Entrevista

A través de la entrevista realizada y de la transcripción del registro de video se encuentra que el estudiante cuya respuesta fue de TIPO I, es un estudiante que tiene la comprensión *global* del cero en un sistema posicional, ya que, al argumentar los ceros encontramos las siguientes respuestas:

El estudiante E_{11} argumenta la existencia del cero en la columna de las peras, en primer lugar reconociendo el valor de posición de esta cifra a través de la justificación de las agrupaciones, para luego determinar que el cero corresponde al cardinal del conjunto complemento de orden uno como se describe a continuación:

[E_{11}]: *"Porque acá* (indicando los dibujos) *he dibujado 9 peras que debía cambiar y está el cero porque se han cambiado para hacer las bolsas".*

[19] Los órdenes en este caso del sistema en base tres están dados por el nombre de cada una de las columnas, peras (primer orden), bolsas (segundo orden), cajas (tercer orden) y carretillas (cuarto orden)

De igual forma, el estudiante E_{11} realiza su argumentación explicando la composición y descomposición de las unidades en cada orden:

[$\mathbf{E_{11}}$]: ***“****Porque de las peras...cada tres peras se cambian por una bolsa y de nueve peras se pueden hacer tres cambios y cada cambio se hace una bolsa y las bolsas se cambiaron por una caja”.*

En estos argumentos se puede observar de manera clara que el estudiante realiza una composición y descomposición de cada una de las unidades utilizando, para tal fin, la *equivalencia*[20] entre las cantidades, de igual manera justifica la obtención de los ceros haciendo referencia a los agrupamientos, reconociendo la existencia de los mismos después de realizar los grupos necesarios y suficientes

En un segundo momento se indaga en relación con el cero de las carretillas, el cual corresponde simplemente al cardinal del conjunto vacío de carretillas, lo que conlleva al no uso de los procesos de composiciones y descomposiciones para justificar su existencia como lo indica el estudiante:

[$\mathbf{E_{11}}$]: ***“****Que no he llegado a las carretillas entonces no hay carretillas” “Como no he llegado a tres cajas no puedo tener una carretilla”.*

Por último, se indaga en relación con la diferencia entre los ceros de las peras y las bolsas y el cero de las carretillas, encontrando:

[$\mathbf{E_{11}}$]: ***“****Que acá* (indicando los dibujos y la columna de las bolsas) *significa que son el cero de las bolsas cambiadas, pero este cero* (indicando el cero de las carretillas) *me dice que no he llegado a nada”***.**

Por tal motivo el estudiante hace énfasis en la diferencia entre los ceros, usando para ello, la composición y equivalencia entre las unidades, mostrando una diferencia marcada entre los ceros como cifra en el número 100 en base tres y los ceros que no son resultado de agrupamientos.

---

[20] Se hace referencia a la relación entre las unidades en un sistema posicional, es decir, 20 unidades corresponden a 2 decenas y viceversa.

En conclusión, se puede afirmar que los estudiantes con respuesta TIPO I tienen una comprensión *global* del cero en un sistema posicional, ya que tiene presente su *valor de posición*, argumentos basados en el uso y explicación verbal de los procesos de composición y descomposición, herramientas indispensables para dar sentido a una cifra en un sistema posicional y cumplir *el principio de valor relativo.*

4.2.2 TIPO III. Solución por agrupamiento no evidente

El estudiante no hace explicitas, de manera gráfica, las descomposiciones o composiciones de los órdenes, sin embargo, el tipo de respuesta registrada posiblemente deja entrever una concepción *parcial* del cero posicional, ya que no realizaron ningún dibujo en las columnas donde existen ceros, sin embargo el registro gráfico (ver figura 20) no da información suficiente para asegurar si lo que se presupone con respecto a la concepción es verdad, por tal motivo es necesario realizar la entrevista para concluir si los estudiantes tienen una concepción *global* o *parcial* del cero posicional.

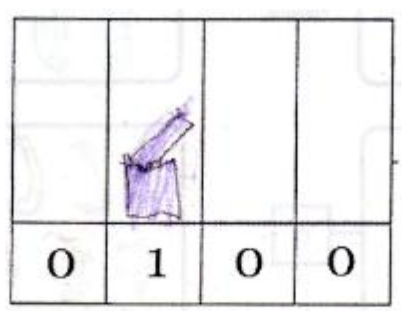


Figura 20. Solución por agrupación no evidente.

Entrevista

Si observamos a simple vista el registro realizado por estos niños encontramos que no han dibujado ningún elemento en la posición de las peras y las bolsas, lo que hace suponer que los estudiantes comprenden, en este caso, cada cero como el cardinal de un posible conjunto, cuya naturaleza se busca conocer a través de la entrevista.

Al realizar la entrevista encontramos que las respuestas, por el valor de cero en esas posiciones, son argumentadas a través del uso de palabras como vacío o al nada, palabras con una estrecha relación con el cero cardinal. Sin embargo, al ahondar en dichas respuestas encontramos que estos estudiantes, en efecto tienen una concepción de cero como el cardinal de un conjunto vacío y no como el cardinal del *conjunto complemento*, ya que al observar el cero en cada una de las casillas ellos deciden no realizar dibujo alguno y lo afirma con la justificación dada a la pregunta ***¿Pero por qué no has dibujado peras ni bolsas?***

[E_{12}]: *"Porque había un cero... porque había un cero y no podía dibujar nada".*

[E_{13}]: *"Porque hay un cero".*

Ahora bien, al preguntarles sobre el significado del cero de la columna de las carretillas y el cero de las bolsas o las peras, las respuestas tienden a diferenciar los ceros en relación con la naturaleza de los objetos, es decir, tratan de determinar la diferencia argumentando que son elementos que representan el cardinal de dos colecciones diferentes, como lo permite ver el argumento realizado por el estudiante **E_{12}**.

[E_{12}]: *Si, que esto* (indicando la columna de las carretillas) *es de las carretillas y esto* (indicando la columna de las peras) *es de las piñas".* [el niño dice piña haciendo referencia a las peras]

De igual forma el estudiante sigue basando su justificación de la diferencia de los ceros en la cada posición.

Sin embargo, algunos estudiantes realizan la justificación de las diferencia de los ceros considerando una simple verbalización de las reglas dadas, sin darle relevancia a la composición y descomposición de las unidades como lo declara el estudiante **E_{13}**:

[E_{13}]: *“Si la diferencia es que... este cero* (indicando el cero de las bolsas) *de la columna de las bolsas se han cambiado y este* (indicando el cero de las carretillas) *no hay nada no se ha hecho un cambio”.*

En conclusión, se puede afirmar que los estudiantes cuya respuesta fue de TIPO III, tienen una concepción *parcial* de cero posicional, ya que, aunque no identifican y ven necesario el uso de los procesos de composición y descomposición para la justificación de la existencia de los ceros y además, no reconocen a los ceros como cardinales de los *conjuntos complementos*, logran diferenciar la naturaleza de cada una de las posiciones (peras, bolsas, cajas, etc) de los ceros.

4.2.3 TIPO IV. Solución por agrupamiento no consecuente

La información arrojada por este tipo de respuesta muestra que los estudiantes tienen presente el *principio de valor relativo,* ya que desarrollan descomposición de las unidades de cada orden, como se ve en la figura 21, sin embargo la descomposición que se muestra de la unidad de orden uno no responde a una relación de equivalencia adecuada para la base que se está trabajando, ya que, para los estudiantes, para obtener tres bolsas es únicamente necesario tener tres peras. Ahora bien en referencia a los ceros presentes en las columnas, los estudiantes posiblemente muestran un significado del cero como cardinal del *conjunto complemento*, sin embargo el registro escrito no es suficiente para sustentar esta afirmación, de esta manera, el registro no brinda una certeza en la información y se procede a realizar las entrevistas, las cuales se analizan a continuación:

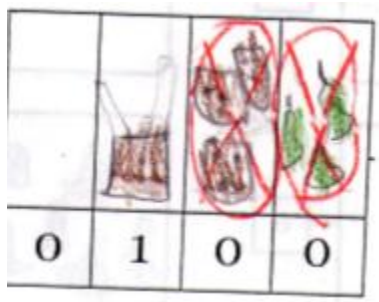


Figura 21. Solución por agrupación no consecuente.

Entrevista

Se realizó la entrevista a tres estudiantes encontrando lo siguiente:

Los tres estudiantes coinciden y reconocen las reglas declaradas de la actividad y justifican de manera explícita las agrupaciones realizadas para obtener la caja a través de argumentos como el siguiente:

> **[E_8]:** *"Porque para hacer una caja se debe hacer tres bolsas y tres bolsas se cambian por una caja…"*

Identifican que todos los cambios se realizan al tener grupos de tres unidades en cada orden (peras, bolsas, cajas, carretillas), lo que brinda una información suficiente para declarar que reconocen el *principio del valor relativo* y de la misma manera reconocen que la obtención de los ceros es causa de las agrupaciones realizadas en cada orden, como se destaca en la respuesta del estudiante **[E_9]** y **[E_8].**

> **[E_8]:** ***"****Porque las reglas dicen que cambio por tres... por ejemplo tres cajas ... y por ejemplo como acá* [indicando la casilla de las peras el cero] *dice cero no puedo dibujar cuatro porque reagrupo tres y me queda una, por eso he hecho tres peras"*.

> **[E_9]:** ***"****... es lo mismo que con las peras... si nosotros hacemos diez bolsas y tú haces grupos de tres, te sobran. Entonces si tú haces tres, te quedan cero porque las reglas dicen que cambio por tres".*

De acuerdo con lo expuesto hasta el momento, los estudiantes que presentaron respuestas tipo IV tienden a comprenden la existencia de los ceros como el cardinal del *conjunto complemento.*

De igual forma los estudiantes comprenden la necesidad de los procesos de composición y descomposición para la justificación de los ceros en la columna de las bolsas y las peras como lo afirma el estudiante **[E_7]**

> **[E_7]:** ***"****Porque las reglas dicen que cambio por tres... por ejemplo tres cajas ... y por ejemplo como acá* (indicando la casilla de las peras el cero) *dice cero no puedo dibujar cuatro porque reagrupo tres y me queda una, por eso he hecho tres peras".*

A partir de lo observado y a pesar que los estudiantes de respuesta de tipo IV tienen una relación de equivalencia errada de las bolsas y las peras, los niños cuya respuesta son de este tipo, logran identificar la importancia del *principio del valor relativo* para la justificación de la existencia de los ceros en la columna de las peras y las bolsas, lo que conlleva a que el estudiante comprenda que estos ceros representan el cardinal de un conjunto especial que es el *conjunto complemento*. En conclusión, se puede afirmar que los estudiantes con el tipo de respuesta IV tienen una concepción del cero posicional *global,* ya que identifican las dos características principales del mismo.

4.2.4 TIPO V: Solución cardinal no posicional

El registro proporcionado por los estudiantes del tipo de respuesta V, muestra que en ningún momento se hace explícito de manera gráfica *el principio de valor relativo*, es decir, no se realiza algún tipo de agrupación o al menos un intento del mismo, lo que a su vez conlleva a la ausencia de los procesos de composición y descomposición para la justificación de cada uno de los ceros presentes en la actividad. Ahora bien, a través del registro se podría suponer que los estudiantes tienden simplemente a *representar lo cardinado* (ver figura 22) sin tener en consideración la naturaleza de cada una de las posiciones hasta el punto de solamente diseñar una pera en la posición de las cajas, sin embargo, para obtener una mayor certeza de lo afirmado se realizó el análisis a las entrevistas de los estudiantes seleccionados.

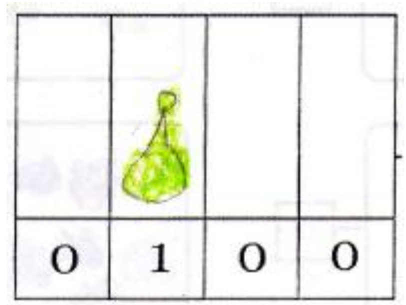


Figura 22. Solución cardinal no posicional.

Entrevista

En la realización de la entrevista se observó que los niños no identificaron la naturaleza de cada posición, sin embargo se quiso indagar sobre las concepciones de cada uno de los ceros presentes en el número dado, a partir de preguntas como:

[I]: *Aquí está escrito cero* **(**indicando la columna de las peras*) y aquí* (mostrando el espacio para e dibujo**)** *no hay nada. ¿Por qué?*

Los estudiantes respondieron:

[E$_2$]: "*Porque este cero* (indicando e cero de la columna de las peras) *dice que no existe...que Mario no ha recogido.... ¿Me puedo inventar una fruta? No ha recogido los...los... mangos". (*Dándole otro nombre a la columna de las peras)

[I]:*¿Qué debo dibujar en la columna de los mangos?*

[E$_2$]: *"No debes dibujar nada porque Mario no ha recogido mangos solo ha recogido una pera, Mario no ha recogido nada más".*

Es de esta manera que los estudiantes relacionan la existencia de los ceros con el concepto de *nada,* el reconocer en un primer momento que cada uno de los ceros de la actividad indica la ausencia de elementos, por esta razón los niños solamente realizan un dibujo en el lugar donde encuentran el número 1, ya qu,e consideran que Mario ha recogido solamente una pera.

Ahora bien indagando sobre la diferencia de los ceros de las carretillas y los ceros de las peras y las bolsas, este grupo de estudiantes no encuentran diferencia alguna, argumentando de la siguiente manera:

[I]: *¿Hay alguna diferencia entre este cero* (mostrando el cero de la columna de las carretillas) *y este cero* (Mostrando el cero de la columna de las bolsas)?

[E$_3$]: *"No"* **"***Porque... ¿son iguales?* (Indicando los dos ceros)*"***.**

[E$_4$]: *"Este cero* (mostrando el cero de la columna de las peras) *significa... que no...emmm...no...emmm no...que no pudo dibujar nada acà* (Mostrando el espacio para el dibujo en la columna de las peras)*"*

[E$_4$]: "*Que no se puede dibujar nada acá* (Mostrando de nuevo el espacio de dibujo en la columna de las bolsas)"

[E$_4$]: *"Que.. umm.. también no se puede hacer nada acá* (Indicando el espacio de dibujo de la columna de las carretillas)*."*

En conclusión, el grupo de estudiantes que consideraron la respuesta de tipo V, no encuentran diferencia alguna entre la naturaleza de los ceros en la actividad y consideran que sin importar la posición, los ceros representan el mismo conjunto vacío, esto conlleva a la dificultad de reconocer que los ceros presentes en las columnas de las bolsas y las peras representan el cardinal del *conjunto complemento* de las unidades en cada posición. Es de esta manera se puede afirmar que los estudiantes cuya respuesta es de tipo V tiene una concepción *nula* del cero posicional.

A manera de conclusión, se puede establecer que la concepción que tienen los estudiantes del cero en un sistema posicional, está determinada por la comprensión de la existencia de *conjuntos complementos*, correspondientes a la naturaleza de los elementos de cada una de las posiciones, cuya obtención se determina a partir de los procesos de composición y descomposición de unidades en cada orden

De esta forma, la tabla 17, resume y relaciona el tipo de respuesta dada por los estudiantes con la concepción caracterizada del cero posicional.

Tabla 17

Tipo de respuesta y concepción caracterizada del cero posicional

Tipo de respuesta I	Realiza composición y descomposición	Diferencia los ceros a partir de la naturaleza de los elementos.	Concepción global
Tipo de respuesta III	No realiza composición y descomposición	Diferencia los ceros a partir de la naturaleza de los elementos.	Concepción parcial
Tipo de respuesta IV	Realiza composición y descomposición	Diferencia los ceros a partir de la naturaleza de los elementos.	Concepción global
Tipo de respuesta V	No realiza composición y descomposición	No encuentra diferencia alguna entre los ceros y determina que representan el cardinal del mismo conjunto vacío.	Concepción nula

5. CONCLUSIONES

Se reportan en este último capítulo las conclusiones generales acerca de la caracterización de las concepciones del cero cardinal y el cero posicional de los estudiantes de primero y segundo elementare del colegio italiano Leonardo da Vinci como resultado de la labor investigativa desarrollada.

5.1. Conclusiones acerca de las concepciones de los estudiantes acerca del cero cardinal.

Durante el desarrollo de esta investigación se ha establecido que un niño alcanza una concepción completa de cero en su aspecto cardinal: *(i)* si determina que cero es el número cardinal correspondiente a cualquier colección vacía; y si de manera inversa establece que, *(ii)* si se ha utilizado a cero como el cardinal de una cierta colección a esta no pertenece elemento alguno.

Como demuestran investigaciones anteriores y se reafirma en esta, existe un conocimiento social de los niños de la representación **0,** del cero cardinal. Así, desde temprana edad los niños son capaces de interpretar, usar y asociar a cero con la acción de *no hacer nada,* o con hechos como el *no tener nada* o el *no tener ninguno*. Sin embargo, es importante tener en cuenta que expresiones sociales tales como **nada** o **ninguno,** y que hacen referencia a cero desde un contexto social, son carentes de significado si no existe claridad en la definición por compresión de la colección que se afirma es vacío.

En otros términos, se afirma que, cuando se trata de reconocer a cero como el representante de la clase de equivalencia de algún conjunto equipotente a vacío *(ii),* el camino se encuentra ya recorrido, siempre y cuando el niño establezca una clara definición por compresión del conjunto vacío al cual hace referencia.

Por otro lado, se sostiene que el énfasis en lograr que un niño tenga una concepción completa del cero cardinal debe centrarse en el proceso de entender que 0 es el representante de la clase de equivalencia de toda colección vacía. Pero para el desarrollo de este proceso es importante tener en cuenta que, determinar el cardinal de una colección vacía:

- Depende en gran parte de la claridad que se tenga acerca de la definición por compresión de esta y del contexto a la que pertenezca.

  En efecto, cuando un niño debe determinar el cardinal de una colección cuyos elementos observa está infiriendo, por la extensión, la manera en que este se encuentra definido. Nótese que no es posible proceder de igual manera cuando se trata de la cardinalización una colección vacía, donde la única vía en la definición de la colección es la compresión de los elementos que la conforman.

- Está influenciada por índices perceptivos, específicamente por índices visuales.

  La información recolectada y analizada muestra que algunos niños están gobernados por la visión. Estos niños, no reconocen la existencia de una colección vacía ante la usencia de elemento alguno que la defina por extensión, lo cual los lleva a considerar que no hay alguna colección de la cual se deba determinar su cardinal.

- Implica una transición: asociar un número a vocablos comunes socialmente establecidos.

  En el contexto de lo cotidiano basta con utilizar palabras del vocabulario común como *nada* o *ninguno* para referirse al cardinal de una colección vacía. Así, hay niños que son capaces de reconocer la existencia de una colección ante la ausencia de sus elementos; sin embargo, no hacen uso explícito del número cero para referirse a su cardinal y a cambio utilizaran palabras socialmente equivalentes como *nada* o *ninguno*.

  De estos niños se esperaría que logren relacionar que, el hecho de que "*no tener ninguna pera*" es equivalente al de tener "*cero peras*"; asociando de esta manera que el tener *nada de algo* o *ninguno de un algo* significa tener *cero de ese algo*.

Los resultados obtenidos muestran además que, efectivamente hay un grupo de niños que logran superar los obstáculos visuales y las asociaciones con vocablos comunes, para lograr determinar la función que tiene el cero cardinal como el número natural que describe la cantidad total de elementos de una colección vacía bien definida de objetos discretos.

Por último, se tiene que algunos niños muestran estar en la intersección de lo visual, lo social y lo matemáticamente establecido para determinar el cardinal de colecciones vacías. Así, estos niños ante la tarea de cardinalización de una colección vacía de objetos discretos bien definidos, algunas veces omitirán la cardinación ante la ausencia visual de sus elementos, otras veces utilizaran palabras socialmente equivalentes como *nada* o *ninguno* y en otras ocasiones harán uso del número cero. La elección en el proceder de estos niños estará mediada por la especificidad del contexto y forma en la que la tarea se les se propuesta.

Hasta este momento se han presentado las conclusiones *prácticas* acerca de las concepciones de los niños objeto de estudio en cuanto a los instrumentos implementados, los datos recolectados y el análisis desarrollado. Sin embargo, para finalizar este apartado de las conclusiones, se considera relevante presentar dos conclusiones más, emergentes de una reflexión sistemática de dos de los elementos que sustentan teóricamente la investigación desarrollada:

- Aunque, matemáticamente, todas las colecciones vacías sean cardinables con el número 0 y el principio de abstracción de Gelman y Gallistel sostenga que, "*contar una colección supone interesarse solo por el aspecto cuantitativo de la misma, dejando de lado las características físicas de los objetos contados*"(Ver apartado 2.1.2.1.2); se considera que la introducción de un contexto específico de utilización del número y el de hecho explicitar por compresión la colección cuyo cardinal se desea escribir, (es decir, *interesarse por el aspecto cualitativo del colección*), son elementos conceptualmente necesarios para los niños en la tarea de comprender y hacer uso del cero como el cardinal de una colección vacía.

Finalmente se llama la atención sobre la aparente diferencia entre los resultados de investigaciones como las de D'Amore (2007) y Sheffield y Cruikshank (2001). Los resultados de la investigación aquí desarrolla muestra que, los resultados de estas investigaciones no son contradictorias sino que son distintos, en cuanto cada uno de estos autores se enfoca en un proceso distinto del uso e interpretación del cero como cardinal. Mientras que D'Amore se interesa en investigar la manera en que los niños definen colecciones vacías cuyo cardinal dado es 0 (entre otro aspectos), Sheffield y Cruikshank (2001) centran su atención en la manera en que los niños efectúan la tarea de cardinalización con cero de colecciones vacías ya definidas. Este resultado cambiará seguramente, las perspectivas en las consideraciones didácticas a tener en cuenta en estudios posteriores, que tengan como objeto de estudio al cero cardinal; Sumando una diferenciación teórica importante, que evitará confusiones innecesarias al interpretar los resultados de las investigaciones en el campo.

5.2 Conclusiones acerca de las concepciones de los estudiantes acerca del cero posicional.

- El cero en un sistema posicional tiene dos características: Es el resultado de un número de agrupaciones suficientes y corresponde al cardinal de un *conjunto vacío complemento* en una posición dada, características que para algunos estudiantes no son naturales, ya que consideran que el cero es la simple representación de un conjunto vacío, lo que conlleva a no identificar diferencia alguna entre los ceros en cada una de las posiciones dadas en un numeral.

- A través de las situaciones se observó, que los estudiantes que no comprenden la importancia de los procesos de composición y descomposición para la justificación del cero en un sistema posicional encuentran dificultad para entender que el cero representa el cardinal de un *conjunto complemento* y de la misma forma reconocer que el cero posicional es un número que puede representar algo y nada al mismo tiempo.

- El ser más natural para los estudiantes el proceso de *representar lo determinado por un cardinal dado*, con lleva a no reconocer que la existencia del cero en cada uno de los órdenes es producto de la agrupación de unidades inferiores, es decir, presentan dificultad para justificar a partir del *principio del valor relativo*, característica propia de los sistemas de numeración posicionales, la existencia de cada uno de los ceros.

- Las situaciones aplicadas, muestran una tendencia de los estudiantes a representar simplemente el cardinal observado, proceso propio de las actividades de cardinación.

- La aceptación de comprender al cero como **"nada"** o **"ninguno"**, propicia en los estudiantes dificultades en reconocer diferencias de este elemento en actividades de numerales en un sistema posicional, es decir, para el estudiante será difícil encontrar una diferencia entre el cero de las decenas y el cero de las unidades, ya que, simplemente representan lo mismo **"nada".**

BIBLIOGRAFIA

Angeli, A., & Leone, T. (2012). *Io, tu e Pilú.* Firenze: Giunti scuola.

Anthony, G., Whashaw, M. (2004). *Zero: A "none" number?.* En: Teaching Children Mathematics, v.11 n.1 p.38 - 50. Agosto.

Bassedas, M., & Sellares, R. (1982). *La construcción individual del sistema de numeración convencional.* Revista infancia y aprendizaje, 75-88.

Chamorro, M. d., Belmonte, J., Ruiz, M., & Rubio, F. (2005). *Didáctica de las matemáticas.* Madrid: Pearson Pentice Hall.

D´amore, B. (2007). Zero, da ostacolo epistemologico ad ostacolo didattico. *La matematica e la sua didattica* , 425-454.

D´Amore, B., & Fandiño, M. (2009). *Zero. Aspetti concettuali e didattici.* Italia: Erickson.

Godino, J., & Batanero, C. (2003). *Sistemas numéricos y su didactica para maestros.* proyecto EDUMAT. Granada.

Gutierres, A. (1991). Las investigaciones en didactica de las matemáticas. In A. Gutierres, *Las investigaciones en didactica de las matemáticas.* Madrid: Sintesis.

Kaplan, Robert (1999). *Zero. Storia di una cifra*. Milano:Bur.

Luque, C., Jimenez, H., & Ange, J. (2009). *Actividades de matemáticas para el desarrollo de procesos lógicos. Representar estructuras algebráicas y numéricas.* Bogotá: UPN.

MEN. (1999). *Lineamientos curriculares de matemáticas.* Bogotá: MEN.

Orozco, M., & Bedoya, E. (1991). El niño y el sistema de numeraciòn decimal. *Comunicaciòn, Lenguaje y Educación* , 55 - 62.

Orozco, M. (1994). *Los niños y sus dificultades en el sistema e numeración base diez*. *Comunicaciòn, Lenguaje y Educación* , 34 - 56.

Rico, L., & Castro, E. (2004). *Números y operaciones. Fundamentos para una aritmética escolar.* Malaga: Dykison.

Terigi, F., Wolman, S. (2007). *Sistemas de numeración: consideraciones acerca de su enseñanza.*Revista iberoamericana de educación, 59 - 83.

Torres, J., & Mora, L. (2004). *Concepciones de estudiantes de licenciatura sobre números reales.* Bogotá: UPN.