¿EXISTEN SITUACIONES COTIDIANAS CUYO MODELO MATEMÁTICO CORRESPONDE A LAS FUNCIONES DE PROPORCIONALIDAD DIRECTA O LINEAL? UN RETO COMPLEJO DE DISEÑO CURRICULAR

JULIÁN ESTEBAN TRIVIÑO MEJÍA

UNIVERSIDAD PEDAGÓGICA NACIONAL
FACULTAD DE CIENCIA Y TECNOLOGÍA
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS
BOGOTÁ D. C.
2012

¿EXISTEN SITUACIONES COTIDIANAS CUYO MODELO MATEMÁTICO CORRESPONDE A LAS FUNCIONES DE PROPORCIONALIDAD DIRECTA O LINEAL? Un reto complejo de diseño curricular

JULIÁN ESTEBAN TRIVIÑO MEJÍA

Trabajo de grado para optar al título de Magíster en Docencia de la Matemática

Para todos los efectos, declaro que el presente trabajo es original y de mi total autoría; en aquellos casos en los cuales he requerido del trabajo de otros autores o investigadores, he dado los respectivos créditos.

Asesor
Édgar Alberto Guacaneme Suárez
Profesor Universidad Pedagógica Nacional

UNIVERSIDAD PEDAGÓGICA NACIONAL
FACULTAD DE CIENCIA Y TECNOLOGÍA
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS
BOGOTÁ D. C.
2012

RESUMEN ANALÍTICO EN EDUCACIÓN

Tipo de documento:	Trabajo de Grado
Acceso al documento:	Universidad Pedagógica Nacional
Título del documento:	**S**ituaciones cotidianas que favorecen el aprendizaje de las funciones de proporcionalidad y lineal
Autor:	TRIVIÑO MEJÍA, Julián Esteban
Publicación:	Bogotá, D. C., 2011, 95
Unidad patrocinante:	Universidad Pedagógica Nacional
Palabras claves.	Modelación, función de proporcionalidad, función lineal, situaciones cotidianas

Descripción: Este documento contiene el reporte del trabajo de grado realizado en el marco de la Maestría en Docencia de la Matemática, el cual, centra su interés y su objeto de estudio en la idenficación de situaciones cotidianas que puedan ser modeladas por las funciones de proporcionalidad o lineal. Para tal efecto, el documento se ha organizado en cinco capítulos. En el primer capítulo denominado descripción del área problemática, como su nombre lo indica se hace una descripción de los asuntos que se han idenficado como problemáticos y para los cuáles se quieren plantear algunas ideas que podrían ayudar en la solución a los mismos, se hace la justificación de la realización del presente estudio y se establecen los objetivos del mismo. En el segundo capítulo denominado marco conceptual o referencial, se hace alusión a los referentes teóricos que se consideran fundamentales en la realización del presente estudio, dentro de estos está lo relacionado con la modelación en educación matemática y también lo que tiene que ver con las funciones de proporcionalidad y lineal. En el tecer capítulo denominado descripción de acciones investigativas, se establecen por un lado el conjunto de datos, en este caso un total de diecinueve situaciones cotidianas y se plantea la manera como se realizará el análisis de cada una con el fin de determinar si pueden ser modeladas a través de las funciones de proporcionalidad o lineal.

En el cuarto capítulo denominado análisis de resultados se presentan tres tablas que sintetizan el análisis realizado a cada una de las situaciones presentadas en el capítulo tres y se configuran algunas ideas como resultado de dicho análisis. Finalmente, en el quinto capítulo denominado conclusiones se proponen algunas cuestiones que se consideran fundamentales desde dos perspectivas la que tiene que ver con el objeto de estudio en sí y la que tiene que ver con los aspectos personales relacionados con el aprendizaje y las competencias investigativas de quien realiza el presente trabajo de grado.

Fuentes: En esencia se utilizan tres documentos, dos de ellos permiten establecer las perspectivas de modelación en educación matemática y uno que permite establecer lo que se entiende por funciones de proporcionalidad y lineal.Estos son:

Borromeo, R. (2006). Theoretical and empirical differentiations of phases in the modelling process.*ZDM, 38*(2), 86-95.

Bosch, M., García, F., Gascón, J., & Ruíz, L. (2006). La modelización matemática y el problema de la matemática escolar. Una propuesta desde la teoría antropológica de lo didáctico. *Educación matemática, 18*(002), 37-54.

Guacaneme, E. A. (2001). *Estudio Didáctico de la proporción y la proporcionalidad: Una aproximación a los aspectos matemáticos formales y a los textos escolares de matemáticas.*Tesis de maestría no publicada, Universidad del Valle, Cali Colombia.

Contenidos: En el primer capítulo, el propósito es hacer una presentación de la problemática que se desea abordar. Para ello se plantea la justificación, donde se explican las razones por las cuales interesa hacer el presente trabajo de grado; seguidamente se hace una descripción del asunto que se desea abordar, aquí se explicita lo relacionado con el contexto local y el contexto escolar de los estudiantes involucrados en el presente estudio,finalmente se plantean los objetivos que se persiguen en el presente trabajo dentro de los cuales el principal surge del interés por indagar en la cotidianidad de los estudiantes acerca de situaciones que involucren las funciones de proporcionalidad o lineal como modelo matemático. En el segundo capítulo se pretende interpretar algunos enfoques acerca de la modelación matemática. Interesa conocer lo que al respecto reportan Biembengut y Hein (1997), es pertinente también conocer la conceptualización que plantea Blum (2005) a través del reporte que hacen Bosch, García, Gascón y Ruiz (2006) y aunque su intención es conceptualizar dicha noción en la Teoría Antropológica de lo Didáctico (TAD), importa en este estudio únicamente la mirada general que hacen del concepto de modelación. Desde estas dos miradas se han podido establecer al menos tres enfoques diferentes pero complementarios relacionados con la modelación matemática.Es importante también, establecer lo relacionado con la función de proporcionalidad directa y lineal, ya que son las nociones matemáticas que se espera emerjan como modelos matemáticos a la hora de realizar el proceso de modelación. En el tercer capítulo interesa describir el contexto dentro del cual se realiza el presente estudio y realizar el análisis de 19 situaciones que posiblemente se puedan modelar a través de las funciones de proporcionalidad o lineal. Para hacer dicho análisis, las situaciones se clasifican en tres grupos teniendo en cuenta el tipo de magnitudes que involucran, sim embargo, en todas se tiene en cuenta las fases del ciclo de modelación propuesto por Blum (2005) citado en (Bosch, et al., 2006) y el ciclo de modelación modificado propuesto por el autor del presente trabajo. En el cuarto capítulo el propósito es mostrar los resultados que se obtienen del análisis de las situaciones cotidianas presentes en la vida de los estudiantes. Para ello primero se presentan tres tablas en las que se sintetiza las características de cada una de las situaciones analizadas y segundo, con base en esta información se comentan los resultados que se consideran relevantes en este conjunto de situaciones. Estos resultados tienen que ver tanto con el modelo matemático que se obtiene al analizar las situaciones a través del ciclo de modelación de Blum como con el modelo matemático que se obtiene al analizar las situaciones a través del ciclo de modelación modificado. En el quinto y último capítulo el propósito es plantear algunas ideas a manera de conclusiones que se consideran importantes en el marco de la realización del trabajo innovativo e investigativo, por un lado en lo relacionado con el conocimiento puesto en juego en el trabajo de grado y por otro en lo relacionado con el ejercicio formativo es decir, los aspectos personales tanto del aprendizaje como de las competencias investigativas de quien realiza dicho estudio, por tanto, algunas de estas últimas serán escritas en la primera persona del singular.

Metodología: Interesa describir el contexto local en el que viven los estudiantes de grado noveno de la Institución Educativa *Las Toldas* del municipio de *La Argentina* (Huila) y desde allí analizar algunas situaciones cotidianas de los estudiantes que posiblemente se puedan modelar a través de la función de proporcionalidad directa o lineal. El análisis de las situaciones se ha organizado teniendo en cuenta que algunas de estas involucran la magnitud dinero, otras involucran magnitudes discretas y otras involucran magnitudes continuas. Dicho análisis se hará teniendo en cuenta los siguientes pasos: Estudio de la situación a través del ciclo de modelación de Blum (2005) citado en (Bosch, et al., 2006), para lo cual, se tendrán en cuenta los siguientes proceso y fases: *la descripción de la situación real, el proceso de matematización y modelo matemático, y los resultados matemáticos y resultados reales*; donde puede ocurrir que el modelo matemático sea la función de proporcionalidad directa o lineal o por el contrario que el modelo matemático corresponda a otro tipo de función; si el modelo matemático es la función de proporcionalidad o lineal entonces la situación real se puede formular como situación seudorreal en el ciclo de modelación modificado y los resultados en cada fase del ciclo coinciden con los obtenidos en la modelación de la situación real; si el modelo matemático de la situación real es diferente de la función de proporcionalidad directa y lineal entonces se seguirán los siguientes procesos y fases del ciclo de modelación modificado: contextualización y situación seudorreal, matematización y modelo matemático, y resultados matemáticos y resultados reales; de tal forma que a través del proceso de contextualización se trate de obtener una situación seudorreal que permita obtener como modelo matemático la función de proporcionalidad directa y lineal.

Conclusiones: En este capítulo el propósito es plantear algunas ideas que se consideran importantes en el marco de la realización del trabajo innovativo e investigativo; por un lado, en lo relacionado con el conocimiento puesto en juego en el trabajo de grado y, por otro, en lo relacionado con el ejercicio formativo es decir, los aspectos personales tanto del aprendizaje como de las competencias investigativas de quien realiza dicho estudio; por tanto, algunas de estas últimas serán escritas en la primera persona del singular. Vale la pena entonces mencionar dos de dichas ideas. El ciclo de modelación modificado es una potente herramienta que permite transformar una situación real en una situación seudorreal a través del proceso de contextualización, auque en este trabajo ha sido útil para estudiar las funciones de proporcionalidad y lineal, también puede ser de gran utilidad para estudiar otro tipo de nociones matemáticas. Además permite que el docente o diseñador de currículo tome conciencia o reflexione acerca de lo que sucede en la realidad o en la cotidianidad de los estudiantes y lo que se propone en la clase de matemáticas. Por ejemplo si un docente quiere proponer en la clase una situación como la que tiene que ver con la venta de minutos, el proceso de contextualización en el análisis de la situación a través del ciclo de modelación modificado le permite establcer condiciones o convenciones tales como que sólo se pueden hablar cantidades de minutos que sean múltiplos de 1 minuto, lo cual, es una condición de cierta manera exagerada que le quita significado a la situación, pero necesaria para que el modelo matemático inmerso sea la función de proporcionalidad. En el caso de la situación acerca de los tamales y el arroz, el docente o diseñador de currículo en el proceso de contextualización debe tener en cuenta que aunque la masa de arroz es una magnitud continua y absoluta en la realidad se consigue y los estudiantes la pueden cuantificar en cantidades múltiplos de la unidad mínima comercial correspondiente a 1 (lb). De modo que, el ciclo de modelación modificado y particularmente el proceso de contextualización es de suma importancia porque permite tomar conciencia acerca de las condiciones o convenciones que se deben establecer para obtener el modelo matemático que se quiere estudiar, aunque eso signifique de alguna manera desvirtuar o depurar la situación real. Aunque el trabajo de grado parece el fin último, el propósito mismo del trabajo investigativo en la Maestría en Docencia de la Matemática, cuando se mira el programa curricular de la misma uno puede advertir que el trabajo de grado es tan solo medio para logran el fin, el cual, tiene que ver con el desarrollo de competencias en innovación e investigación en educación matemática, es decir, el trabajo de grado es la tarea que se realiza pero detrás de ésta hay unas intenciones de fondo. Hacer la tarea es parte del proceso pero reflexionar un poco acerca de lo que se aprende con esa tarea es otro punto central en el ejercicio formativo.

Fecha de elaboración del resumen: 08/12/2011

CONTENIDO

LISTA DE TABLAS

TABLA DE FIGURAS

INTRODUCCIÓN

Antes de iniciar con la presentación del documento es necesario aclarar que el título inicial con el que fue aprobado el anteproyecto en el Consejo de Posgrados del Departamento de Matemáticas era "Situaciones cotidianas, escolares e históricas que favorecen el aprendizaje de las funciones de proporcionalidad y lineales", sin embargo, por tratarse de una trabajo de grado en la modalidad de profundización, el tiempo de estudio sólo permitió tener en cuenta las situaciones cotidianas, de modo que las situaciones escolares e históricas no alcanzaron a ser consideradas en el presente trabajo. Además, estudiar dichas situaciones a la luz de la modelación matemática se convirtió en un desafío que mereció concentrar todos los esfuerzos y dejar para estudios posteriores lo relacionado con el proceso de aprendizaje de dichas nociones dada también su complejidad e importancia.

Este documento contiene el reporte del trabajo de grado realizado en el marco de la Maestría en Docenciad de la Matemática, el cual, centra su interés y su objeto de estudio en la idenficación de situaciones cotidianas que puedan ser modeladas por las funciones de proporcionalidad o lineal. Para tal efecto, el documento se ha organizado en cinco capítulos, en el primer capítulo denominado descripción del área problemática, como su nombre lo indica se hace una descripción de los asuntos que se han idenficado como problemáticos y para los cuáles se quieren plantear algunas ideas que podrían ayudar en la solución a los mismos, se hace la justificación de la realización del presente estudio y se establecen los objetivos del mismo; en el segundo capítulo denominado marco conceptual o referencial, se hace alusión a los referentes teóricos que se consideran fundamentales en la realización del presente estudio, dentro de estos está lo relacionado con la modelación en educación matemática y también lo que tiene que ver con las funciones de proporcionalidad y lineal; en el tecer capítulo denominado descripción de acciones investigativas, se establecen por un lado el conjunto de datos, en este caso un total de diecinueve situaciones cotidianas y se plantea la manera como se realizará el análisis de cada una con el fin de determinar si pueden ser modeladas a través de las funciones de proporcionalidad o lineal; en el cuarto capítulo denominado análisis de resultados se presentan tres tablas que sintetizan el análisis realizado a cada una de las situaciones en el capítulo tres y se configuran algunas ideas como resultado de dicho análisis; y en el quinto capítulo denominado conclusiones se proponen algunas cuestiones que se consideran fundamentales desde dos perspectivas la que tiene que ver con el desarrollo del documento en sí y lo que tiene que ver con los aspectos personales relacionados con el aprendizaje y las competencias investigativas de quien realiza el presente trabajo de grado.

1. PRESENTACIÓN DEL ÁREA PROBLEMÁTICA

1.1 INTRODUCCIÓN

El propósito de este apartado es hacer una presentación de la problemática que se desea abordar. Para ello se plantea la justificación, donde se explican las razones por las cuales interesa hacer el presente trabajo de grado; seguidamente se hace una descripción del asunto que se desea abordar, aquí se explicita lo relacionado con el contexto local y el contexto escolar de los estudiantes involucrados en el presente estudio. A continuación se plantean los objetivos que se persiguen en el presente trabajo de grado y finalmente se presentan las fuentes consultadas las cuales sirven de referente teórico para poder realizar dicho estudio.

1.2 JUSTIFICACIÓN

El presente estudio se realiza con el propósito de intentar establecer un acercamiento entre las matemáticas, particularmente las funciones de proporcionalidad y lineal, y la cotidianidad de los estudiantes del grado noveno de la Institución Educativa *Las Toldas* del municipio de *La Argentina* (Huila).

Si se aceptan ideas como las que propone Skovsmose (2000), donde se plantea que es necesario moverse del paradima del ejericio hacia el paradigma de investigación a través de contextos como las matemáticas puras, la semirrealidad y la realidad de los estudiantes para tansformar el desarrollo de la clase de matemáticas, se puede decir que en la actualidad la clase de matemáticas en dicho grado escolar puede situarse en el paradigma del ejercicio donde el libro de texto es la autoridad alrededor del cual funciona la clase, de modo que es necesario movilizar intenciones por parte del docente hacia el paradigma de investigación teniendo en cuenta la semirrealidad y la realidad de los estudiantes a fin de favorecer el proceso de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas.

Es pertinente entonces en este trabajo, realizar un estudio de situaciones cotidianas o fenómenos reales presentes en la vida de los estudiantes que posiblemente puedan ser modeladas a través de las funciones de proporcionalidad y lineal de modo que se generen ideas y aportes que posteriormente sirvan como punto de partida para constuir situaciones problema alrededor de cuestiones vivenciadas por los estudiantes.

1.3 DESCRIPCIÓN DEL ASUNTO QUE SE DESEA ABORDAR

Una forma de abordar los procesos de enseñanza y aprendizaje de nociones matemáticas como las funciones de proporcionalidad y lineal, puede ser desde la modelación de situaciones cotidianas o fenómenos presentes en la vida real de los estudiantes. Por tanto, es necesario revisar dicha cotidianidad, a fin de obtener si las hay, situaciones que sean susceptibles de ser modeladas a través de dichas funciones.

Para los profesores de matemáticas, la primera década del siglo XXI estvo marcada por profundos retos que han puesto de relieve la inmensa complejidad de la profesión docente y la alta exigencia de conocimientos y saberes que la actividad docente impone. Algunos de tales retos son herencia y consecuencia de la intención de construcción de una nueva sociedad colombiana, promovida ya en 1991 a partir de la Constitución Política de Colombia, particularizada —para el ámbito educativo— en la Ley 115 de 1994 (o Ley General de Educación), y concretada —para el caso del currículo escolar de matemáticas— en los Lineamientos Curriculares de Matemáticas, en el año 1998.

Precisamente en este último documento(M.E.N., 1998), y en contraste con propuestas curriculares anteriores (M.E.N., 1975)—y paradójicamente vigentes hoy en día en muchas aulas—, se reconocen transformaciones sustantivas que retan profundamente y que se refieren a, entre otros aspectos: (i) la necesidad de asumir el conocimiento matemático (léase preferiblemente, los temas matemáticos) no como el fin de la educación en matemáticas, sino como el medio para promover el pensamiento matemático; (ii) la inclusión y protagonismo de procesos matemáticos (v.g., resolución de problemas, argumentación, modelación, comunicación) más cercanos a la naturaleza de las matemáticas que los habituales procesos algorítmicos; (iii) la intención de reconocer contextos donde los objetos matemáticos viven —o han vivido— y en los cuales éstos encuentran marcos de referencia y significación, así como la intención de identificar y utilizar las situaciones problemáticas de tales contextos (v.g., dela vida cotidiana, de las otras ciencias y de la misma matemática) para darle sentido y utilidad al estudio de dichos objetos; (iv) la incorporación a la enseñanza y al aprendizaje de las matemáticas de nuevos artefactos tecnológicos que modifican la actividad matemática en el aula y fuera de ella.

Tales trasformaciones prescriptivas han impulsado en la última docena de años reflexiones y acciones docentes de muy diverso orden; algunas valoradas altamente, otras polemizadas y hasta censuradas por la comunidad de educadores matemáticos. Justamente, en este documento se quieren exponer brevemente algunas reflexiones y acciones que se llevan a cabo en relación con la interacción entre las funciones de proporcionalidad directa o lineal (como tema matemático escolar), la actividad de modelación (como proceso matemático) y los contextos cotidianos donde la proporcionalidad vive naturalmente (¿o se hace vivir?).

El presente estudio tiene como contexto escolar la Institución Educativa las Toldas, la cual, está ubicada en la vereda las Toldas del municipio de la Argentina Huila. En dicha Institución, se ha programado el aprendizaje de las funciones de proporcionalidad y lineales en el grado noveno de la educación básica, dicho grado cuenta actualmente con 20 estudiantes, 12 de los cuales son mujeres y 8 hombres, provenientes de familias que se encuentran en los estratos socioeconómicos 1 y 2. Las principales actividades económicas de estas familias son la agricultura del café y productos de pancoger[1]; la producción de frutas como la granadilla, el lulo, el tomate de árbol entre otros; la ganadería extensiva, la producción de especies menores y los oficios domésticos.

Los estudiantes en su mayoría tienen apatía hacia las matemáticas, muestran más interés por realizar actividades físicas que mentales, lo cual, dificulta la actividad docente, y si a eso se le agrega que los temas matemáticos se dan muchas veces utilizando el contexto que ofrecen los libros de texto, los cuales generalmente son ajenos a la realidad de los estudiantes, pues eso hace la clase aun más compleja y tortuosa. Transformar las condiciones y el ambiente en la clase de matemáticas implica entonces aceptar como lo proponen (Blum & Borromeo, 2009) que los modelos y la modelación permiten a los

[1] Productos de pancoger hace referencia a productos como frijol, maíz, yuca, plátano etc, que se cultivan en pequeñas parcelas.

estudiantes encontrar explicaciones al mundo que los rodea, mejorar el desarrollo de competencias matemáticas, ciudadanas, además de generar una imagen adecuada de las matemáticas. Por tanto, importa en este estudio revisar la cotidianidad de los estudiantes en busca de situaciones que puedan ser modeladas a través de las funciones de proporcionalidad o lineal con la intención de favorecer los procesos de enseñanza y aprendizaje de estas nociones que propuestas desde su realidad intenten mover sus intereses hacia el estudio de las mismas.

Es pertinente por tanto, tener algunos referentes acerca de la modelación, que permitan posteriormente analizar las situaciones para las cuales las funciones de proporcionalidad o lineal posiblemente se ajustan como modelo matemático.

1.4 OBJETIVOS

1.4.1 Objetivo General

La intención principal de este estudio es identificar situaciones cotidianas presentes en la vida de los estudiantes o en su entorno, cuyo modelo matemático corresponda a las funciones de proporcionalidad directa o lineal.

1.4.2 Objetivos Específicos

Establecer una descripción sistemática dentro del proceso de modelación que permita determinar algunas caraterísticas de las situaciones cotidianas presentes en la vida de los estudiantes.

Establecer con claridad lo que se entiende acerca de las funciones de proporcionalidad y lineal, ya que son las nociones matemáticas que se espera emerjan como modelo matemático al realizar el análisis de las situaciones cotidianas de los estudiantes.

Conocer la cotidianidad de los estudiantes para dimensionar el potencial que desde la modelación tendría en los procesos de enseñanza y aprendizaje de las funciones de proporcionalidad y lineal e incluso de otro tipo de funciones.

Ganar experiencia en los campos de la innovación y la investigación, pues para el docente de matemáticas es gracias a este tipo de estudios de maestría que se tiene la oportunidad de incursionar y participar activamente en ellos.

2. MARCO CONCEPTUAL O REFERENCIAL

2.1 INTRODUCCIÓN

En el presente apartado se pretende interpretar algunos enfoques acerca de la modelación matemática. Interesa conocer lo que al respecto reportan Biembengut y Hein (1997), es pertinente también conocer la conceptualización que hacen Bosch, García, Gascón y Ruiz (2006) y aunque su intención es conceptualizar dicha noción en la Teoría Antropológica de lo Didáctico (TAD), importa en este estudio únicamente la mirada general que hacen del concepto de modelación. Desde estas dos miradas se han podido establecer al menos tres enfoques diferentes pero complementarios relacionados con la modelación matemática. Vale la pena decir que actualmente existen diversos enfoques o tendencias en los relacionado con la modelación, una mirada al respecto se presenta en (Kaiser & Sriraman, 2006).

Es importante también, establecer lo relacionado al conocimiento de la función de proporcionalidad directa y lineal, ya que son las nociones matemáticas que se espera emerjan como modelos matemáticos a la hora de realizar el proceso de modelación.

2.2 PERSPECTIVAS ACERCA DE LA MODELACIÓN EN EDUCACIÓN MATEMÁTICA

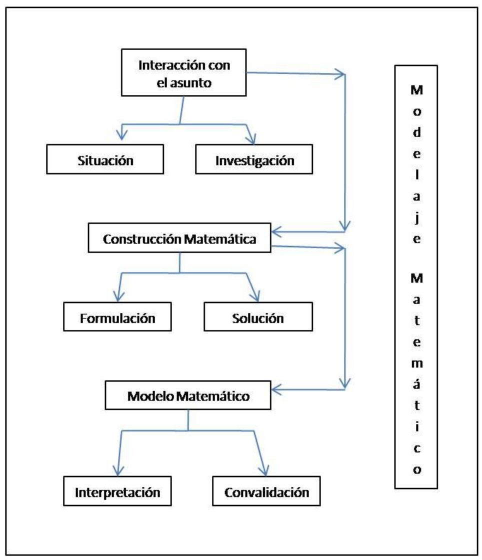
2.2.1 La modelación matemática desde el enfoque de Biembengut y Hein

Desde el enfoque de Biembengut y Hein (2004), la modelación es utilizada como método de enseñanza ya que permite al estudiante aprender nociones matemáticas y su relación con situaciones de otras ciencias (como la física, química, biología las ciencias sociales, entre otras) y además potencia en el estudiante habilidades para leer, interpretar, comprender y explicar situaciones problema

2.2.1.1 *Fases o etapas del modelo matemático*

De un modo general, la modelación es un proceso a través del cual se obtiene un modelo matemático. En coherencia con esta mirada, (Biembengut & Hein, 2004) consideran un modelo matemático como un conjunto de símbolos y relaciones matemáticas mediante el cual se puede representar un fenómeno o situación problema. El modelo permite entonces dar solución a la situación problema y también puede servir de soporte para nuevos modelos. En el proceso de modelación existe una serie de etapas bien definidas y son: reconocimiento de la situación problema (delimitación del problema), familiarización con el tema que va a ser modelado (referencial teórico), formulación del problema, (hipótesis), formulación de un modelo matemático (desarrollo), resolución del problema a partir del modelo (aplicación), interpretación de la solución y validación del modelo (evaluación). En la figura 1, se presenta un esquema de este enfoque.

Figura 1. Esquema del proceso de modelación (Biembengut & Hein, 1997)



En este estudio se espera que emerjan dos tipos de modelos matemáticos a partir del análisis de situaciones cotidianas y son las funciones de proporcionalidad o lineal, las cuales pueden ser representadas a través de una expresión simbólica o de un diagrama cartesiano.

2.2.1.2 *Descripción de la modelación como metodología de enseñanza*

La modelación como metodología de enseñanza y de acuerdo con lo que plantea Villa-Ochoa (2010) puede tener al menos dos maneras de ser abordada: La primera mirada plantea que se parte de un tema que es propuesto por el docente, acerca del cual se plantean unas cuestiones o preguntas que pueden ser respondidas haciendo uso de herramientas matemáticas y de la investigación sobre dicho tema. Es de tener en cuenta que el currículo, el horario de clases, la cantidad de estudiantes por aula, el tiempo que requiere el profesor para apoyar el estudio de los estudiantes, dificultan este método de enseñanza. La modelación matemática permite que el docente desarrolle el contenido programático a través del estudio de temas extra matemáticos y que oriente el trabajo de modelaje de los estudiantes. El tema puede ser único para todas las clases pero debe contener los conceptos matemáticos programados para el periodo lectivo. Pero también es posible que a través de varios temas o situaciones problemas se promueva la enseñanza de los diferentes conceptos matemáticos. El docente puede seleccionar un tema y elaborar el modelo matemático adaptándolo a la enseñanza o también puede seleccionar un modelo matemático ya establecido de algún área específica (física, química, etc.) y adaptarlo al desarrollo del contenido programático.

La segunda mirada tiene en cuenta aspectos que destaca a favor de los estudiantes, los cuales tienen la posibilidad de seleccionar temas de su interés para ser estudiados; esto los involucra y compromete con el proceso de aprendizaje haciendo más interesante y activa la clase. Se logra también que los estudiantes encuentren significado a los conocimientos matemáticos que aprenden ya que éstos tienen que ver con temas de otras áreas del conocimiento. También plantea que la modelación matemática favorece en los estudiantes los siguientes aspectos

- Integración de las matemáticas con otras áreas del conocimiento.
- Interés por las matemáticas frente a su aplicabilidad.
- Mejoría de la aprehensión de los conceptos matemáticos.
- Capacidad para leer, interpretar, formular y resolver situaciones-problema.
- Estimular la creatividad en la formulación y resolución de problemas.
- Habilidad en el uso de la tecnología (manejo de calculadoras y programas computacionales).
- Capacidad para actuar en grupo.
- Orientación para la realización de la investigación.
- Capacidad para la realización de esa investigación.(Biembengut & Hein, 2004)

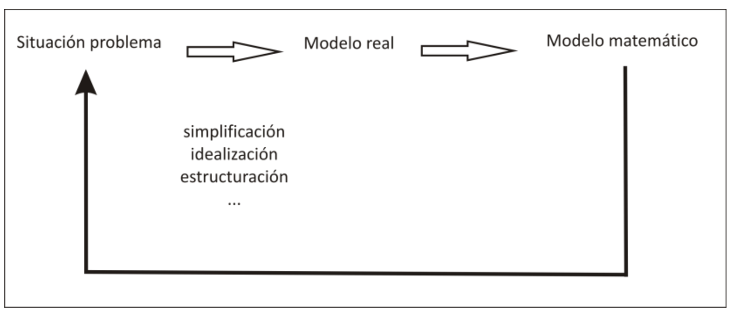
Es de notar que en este enfoque importan tanto los temas, ya sean matemáticos o extra matemáticos que involucren en su estudio un modelo matemático, como la enseñanza de nociones matemáticas, por tanto, comporta cierta similitud con la perspectiva de Blum y Borromeo (2009) de la cual se dará cuenta mas adelante.

2.2.2 La modelación desde la perspectiva de Blum y Niss

A continuación se pretende reportar el estado de la modelación en general que presentan Bosch y sus colegas (2006), y que posteriormente utilizan para vincularla a la Teoría Antropológica de lo Didáctico. Sin embargo es importante aclarar que es del interés propio de este estudio únicamente la visión que presentan acerca de las ideas que propone Blum y Niss (1991) citado en (Bosch, et al., 2006)en lo que se refiere a la noción de modelación matemática.

Inicialmente, la modelación desde la matemática sabia se ha desarrollado entendiéndola como un proceso a través del cual se puede comprender, explicar, predecir, etc. un fenómeno haciendo uso de nociones matemáticas. Por tanto, surge como resultado de aplicar un conocimiento matemático en una situación real. Este proceso tiene diferentes interpretaciones, una de estas se esquematiza en la figura 2, denominado el ciclo de modelación propuesto por (Blum y Niss, 1991) citado en (Bosch, et al., 2006).

Figura 2. Ciclo de modelación (Blum y Niss, 1991) citado en (Bosch, et al., 2006)



Como lo señala Bosch y sus colegas(2006), se estudia la modelación matemática entendiéndola desde dos enfoques; la primera permite estudiar la modelación como herramienta a través de la cual los estudiantes aprenden nociones matemáticas, y la segunda plantea que la modelación matemática es en sí misma una noción matemática que debe ser incorporada explícitamente a los procesos de enseñanza y aprendizaje. Esto dos enfoques se pueden estudiar por separado aunque en el aula de clase se entrelazan y potencian mutuamente.

La modelación matemática **como herramienta para aprender matemáticas**es el estudio de las nociones matemáticas que están presentes cuando se modela matemáticamente una situación real. Por tanto, existen objetos matemáticos que modelan fenómenos reales. En esta perspectiva se trata es de usar los modelos para estudiar las nociones matemáticas implicadas en los mismos.

Uno de los objetivos de este estudio sobre la modelación matemática es identificar fenómenos que son susceptibles de ser modelados matemáticamente por objetos matemáticos como por ejemplo la función que posteriormente permitan ser incorporados a la clase de matemáticas.

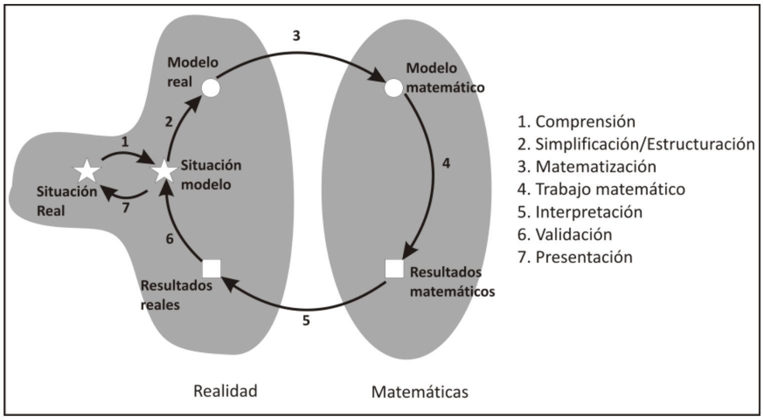
La modelación,**como noción matemática explícita en el aula,**es en sí misma una noción que debe ser incorporada alos procesos de enseñanza y aprendizaje, es decir, el estudiante debe aprender a modelar; por tanto, interesan las estrategias y los procesos de pensamiento del estudiante para adquirir competencias sobre el proceso de modelación.

Es así que, bajo estos dos enfoques, la investigación en Educación Matemática se preocupa por estudiar los siguientes aspectos:

- **Epistemológicos**,inmersos en las características didácticas que poseen las situaciones reales y sus modelos matemáticos asociados, es decir, desde esta perspectiva el enfoque epistemológico configura una aproximación a la modelación como medio para aprender matemáticas.
- **Cognitivos**, presentes en la comprensión y los procesos cognitivos del estudiante relacionados con la modelación de una situación real. Esta perspectiva intenta realizar una aproximación a la modelación como objeto matemático en sí mismo.

Es en este sentido que la modelación se ha convertido en un medio para estudiar nociones matemáticas y también en objeto matemático de estudio, es decir, se le han incorporado nuevos valores didácticos al proceso de modelación. Es por esto que el modelo delproceso de modelación se transforma y evoluciona integrándose a él nuevas fases y procesos entre fases figura 3 (Blum, 2005) citado en(Bosch, et al., 2006).

Figura 3. Ciclo de modelación (Blum 2005) citado en (Bosch, et al., 2006)



En la figura 3 hay una idea o un reconocimiento a la actividad de los matemáticos, es decir, si se observa la actividad de los matemáticos en cuanto a la modelación se puede encontrar este esquema y posiblemente se puede aplicar en el aula, pero según Bosch y sus colegas (2006), este asunto no es tan sencillo, no se trata simplemente de incorporar este modelo directamente al aula porque en la actividad matemática el modelo se ha usado es para dar cuenta del fenómeno, para poder comprender el fenómeno que está siendo modelado por el objeto matemático y en la escuela aparecen otras intenciones, por ejemplo interesa el objeto matemático y las nociones que le son consustanciales y también el proceso de modelación del estudiante.

En resumen, en las matemáticas la modelación ha sido esencialmente un proceso para comprender un fenómeno, es decir, las matemáticas están al servicio de otras disciplinas, pero además de este, hay por lo menos dos enfoques adicionales, la modelación como herramienta para aprender nociones matemáticas y como objeto matemático de aprendizaje.

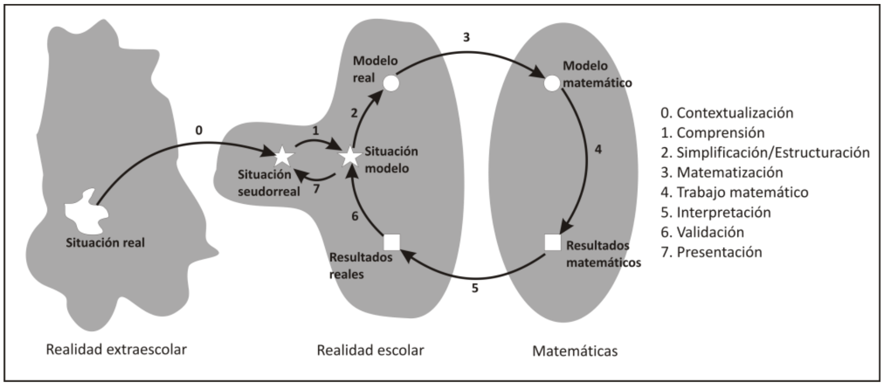
2.2.3 Descripción del ciclo de modelación de Blum

El ciclo de modelación como se observa en la figura 3, cuenta con seis fases y siete procesos entre fases, en teoría, un estudiante cuando se enfrenta a una tarea de modelación parte de una situación real, la cual es una situación problema propuesta por el profesor; el estudiante realiza un proceso de comprensión de la tarea de modo que logre idealizar y entender de qué se trata la situación real. A continuación, el estudiante realiza el proceso de simplificación y estructuración de la tarea, es decir, descarta datos e información que no considera relevante y con los datos e información que considera pertinente manifiesta a través de un escrito o de un dibujo aspectos vinculados con la matemática que conducirán a la solución del problema; aquí juega un papel muy importante el conocimiento extra matemático que debe tener el estudiante con relación a la situación real, esto es lo que se denomina el modelo real. A partir de aquí, el estudiante a través del proceso de matematización transforma el modelo real en un modelo matemático, este proceso requiere que el estudiante utilice su conocimiento matemático para asociar aspectos extra matemáticos propios del modelo real con cuestiones propias de la matemática. Una vez en el campo de las matemáticas y con el modelo matemático establecido, el estudiante hace uso de éste al realizar el proceso del trabajo matemático, es decir, hacer cálculos, construir tablas, hacer representaciones cartesianas etc., con lo cual, avanza a la fase de los resultados matemáticos. Estos resultados matemáticos requieren ser interpretados y comparados con resultados reales con la intención de que se valide el estudio realizado a partir de la situación modelo. Por último los resultados deben ser presentados de nuevo en la situación real.Sin embargo como afirma Borromeo (2006), los estudiantes realizan tareas de modelación siguiendo rutas diferentes, no necesariamente como se ilustra en la teoría.

Es necesario hacer claridad que desde el ciclo de modelación, la situación real tiene que ver es con la situación problema propuesta al estudiante, por tanto hace parte es de una seudorrealidad, pues es producto de una transformación de la realidad llevada a la escuela, es decir, es una situación escolar pensada para la clase de matemáticas.

Uno de los retos para el docente o diseñador de currículo es entonces, detectar fenómenos reales que viven los estudiantes fuera de la escuela y contextualizarlos para determinar el tipo de situación escolar que se puede proponer en el aula. Esto quiere decir que es necesario hacer una modificación al ciclo de modelación de Blum (2005) por parte del autor de este documento, donde es fundamental agregar un proceso previo al proceso de *comprensión de la tarea* (ver figura 4.), que se puede denominar proceso de *contextualización*, mediante el cual, las situaciones que el docente detecta en las vivencias extraescolares de los estudiantes puedan ser estudiadas previamente por éste, para determinar tanto la situación escolar o seudorreal como el *modelo matemático* asociado a su estudio. Es importante aclarar que esta nueva fase es una ampliación del ciclo de modelación de Blum (2005) propuesta por el autor

Figura 4. Ciclo de modelación modificado



Para el interés particular de este estudio se considera fundamental estudiar la modelación desde el enfoque epistemológico, es decir, lo que se quiere es problematizar el potencial que las situaciones reales pueden tener en relación con el estudio de la proporcionalidad o de manera más general de las funciones lineales. Importa por tanto, estudiar los procesos del ciclo de modelación (Figura 4.) propuesto por Blum (2005) citado en (Borromeo, 2006) como medio para entender la situación contextualizadaque ahora podría denominarse *situación seudorreal* y cómo podría ser representada en un modelo matemático para que eventualmente sobre esa situación se puedan plantear problemas y preguntas y los estudiantes tengan la posibilidad de modelar. Dicho de otra manera, lo que se quiere es determinar si las situaciones reales, luego de ser *contextualizadas,* tienen o no potencial para ser modeladas a través de funciones lineales o de proporcionalidad directa, para eso lo que sepretende es apropiarse del esquema de modelación propuesto por Blum (2005) citado en (Borromeo, 2006), usardicho ciclo para ver si la situación que se está considerando en efecto conduce a un modelo matemático que puede describirse como una función de proporcionalidad o lineal. En este sentido el ciclo de modelación es tan solo el medio que permite revisar si las situaciones seudorreales satisfacen o no la condición mencionada anteriormente.

2.2.4 La modelación desde la Teoría Antropológica de lo Didáctico

Desde el enfoque de la Teoría Antropológica de lo Didáctico (TAD) se sostiene que “la modelación no es solo una dimensión de la actividad matemática, sino que la actividad matemática es, en esencia, una actividad de modelación” (Bosch, et al., 2006, p. 49). Es decir, le da a la modelación una característica mucho más amplia, pues considera que además de la solución de problemas que involucran contextos y conocimientos extramatemáticos, también es importante en el estudio de cuestiones dentro de la matemática misma, en este sentido, la modelación debe ocupar un lugar importante dentro de la actividad matemática en general.

Esta perspectiva estudia la modelación en una dirección un poco diferente a las persptivas anteriores y no se centrará el presente estudio en sus ideas, sin embargo es de resaltar que hacen aportes valiosos en torno a la discusión acerca de la modelación en educación matemática.

2.3 FUNCIÓN DE PROPORCIONALIDAD DIRECTA Y LINEAL

En este apartado, conviene hacer claridad acerca de lo que se entiende por función de proporcionalidad directa y por función lineal además de su representación simbólica y cartesiana ya que son los modelos matemáticos que interesan dentro de este trabajo de indagación.

2.3.1 Las funciones de proporcionalidad directa y lineal y su representación simbólica

De acuerdo con el estudio hecho por Guacaneme (2001), se reconoce la proporcionalidad en las matemáticas sabias desde los siguientes criterios:

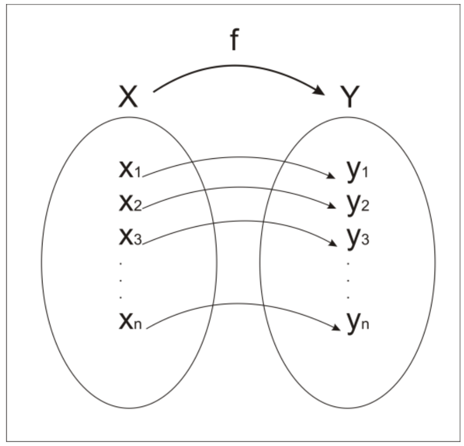
Dos magnitudes escalares[2] tienen una relación uno a uno de variación proporcional si sus cantidades de magnitud se corresponden ordenadamente en la igualdad y en la suma.

---

[2] Una magnitud se llama escalar si los elementos de m se pueden ordenar linealmente (De Trocóniz y Belda citado en (Guacaneme, 2001, p. 78)

Supóngase entonces que se tienen dos magnitudes X y Y, cada una con algunas cantidades de magnitud $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n$ y $y_1, y_2, y_3, \ldots, y_n$; de modo que cuando la magnitud X tiene una cantidad de magnitud x_1 entonces a la magnitud Y le corresponde una cantidad de magnitud y_1 y así sucesivamente tal como se muestra en la figura 5.

Figura 5. Función de proporcionalidad



La correspondencia en el orden implica que si $x_1<x_2<x_3$ entonces $y_1<y_2< y_3$ ó $y_1>y_2>y_3$. De este modo se tiene que la correspondencia en el orden puede ser de dos maneras creciente o decreciente.

La correspondencia en la igualdad implica que si $x_1 = x_2$ entonces $y_1 = y_2$.

Finalmente la correspondencia en la suma requiere que se debe cumplir que si $x_3= x_1+x_2$ entonces $y_3= y_1 + y_2$.

Esta definición de proporcionalidad permite relacionar magnitudes con cantidad de magnitud cuantitativa que puede ser numérica o no numérica, sin embargo, para el presente estudio importan las situaciones de proporcionalidad que se puedan estudiar entre magnitudes cuya cantidad de magnitud sea cuantitativa numérica; será un reto posterior profundizar en el estudio de situaciones que involucren la proporcionalidad entre magnitudes cuya cantidad de magnitud sea cuantitativa no numérica ya que parece un campo poco explorado. Otro asunto importante es que esta definición de proporcionalidad igualmente permite relacionar magnitudes escalares continuas o discretas, absolutas[3] o relativas.

De este modo se debe tener en cuenta que la representación cartesiana de la proporcionalidad entre dos magnitudes discretas no podrá ser una línea recta sino más bien puntos alineados. Solamente se podrá tener una línea recta cuando la proporcionalidad sea entre magnitudes continuas y relativas o continuas y absolutas.

La función lineal es un caso particular de la proporcionalidad, pues esta ocurre cuando se relacionan dos magnitudes continuas y relativas o absolutas, ya que en este caso la medida de la cantidad de magnitud de dichas magnitudes está asociada a los números reales y es gracias a estos que en la representación cartesiana se pueden trazar líneas rectas continuas.

Por tanto desde la notación funcional se podría tener una definición como la siguiente:

$$f(x) = y = \alpha x, x \epsilon R$$

Donde $f(x)$ *o* y, representan como variable dependiente a la medida de la cantidad de magnitud de la magnitud Y, la cual cambia si la cantidad de magnitud de la magnitud X, cambia, α representa un número real denominado constante de proporcionalidad que puede ser adimensional si las magnitudes X y Y son homogéneas o dimensional si dichas magnitudes son no homogéneas, y x representa como variable independiente a la medida de la cantidad de magnitud de la magnitud X.

Desde la perspectiva de las funciones, la proporcionalidad permite estudiar la covariación, entendiendo ésta como una manera de caracterizar y distinguir las funciones, es decir, una función cuadrática se diferencia de una función afín en tanto que su covariación es diferente. Es de notar que la función de proporcionalidad varía como las funciones afines porque a variaciones constantes de x corresponden variaciones constantes de $f(x)$ sim embargo, las funciones lineales tienen dos características adicionales que las diferencian de las funciones afines y es precisamente el cumplimento de la propiedad de aditividad

[3]Según De Trocóniz y Belda (1959) citado en Guacaneme (2001, p. 79)Si $\forall A, B \in \varphi$se verifica que $A \leq A + B$ la magnitud escalar se denomina absoluta; si algunas veces se satisface $A > A + B$ la magnitud escalar se denomina relativa.

$f(x_1 + x_2) = f(x_1) + f(x_2)$ y la propiedad de homogeneidad, es decir, $f(kx) = kf(x)$ donde k es cualquier número real diferente de cero.

2.3.2 La funciones de proporcionalidad directa y lineal y su representación cartesiana

Un conjunto de puntos alineados en el diagrama cartesiano representan muy bien la función de proporcionalidad entre dos magnitudes discretas porque pueden identificarse claramente las tres condiciones que la caracterizan: la correspondencia en la igualdad, la correspondencia en el orden y la carrespondencia en la suma.

La correspondencia en la igualdad es evidente ya que a cada punto del eje de coordenadas le corresponde un único número real.

Representa bien la correspondencia en el orden porque si se toman tres puntos cualquiera (x_1,y_1), (x_2,y_2) y (x_3,y_3) que estén contenidos en la recta de modo que $x_1<x_2<x_3$, en efecto se tendrá que $y_1<y_2<y_3$ ó $y_1>y_2>y_3$.

La correspondencia en la suma puede evidenciarse al tomar un x_3 que sea el resultado de sumar x_1 con x_2 y comprobar que y_3 es el resultado de sumar los correspondientes y_1 y y_2.

De igual forma, la línea recta en un diagrama cartesiano representa muy bien la función lineal entre dos magnitudes continuas ya que al suponerse continua captura también la continuidad de las magnitudes, además en ella pueden identificarse claramente las dos condiciones que la caracterizan: la aditividad y la homogeneidad.

La aditividad se puede verificar si se idntifica la ordenada que le corresponde a la suma de dos abscisas cualquiera $x_1 \, y \, x_2$ y se comprueba que dicha ordenada es equivalente a la suma de las ordenadas correspondientes a cada una de las absicisas.

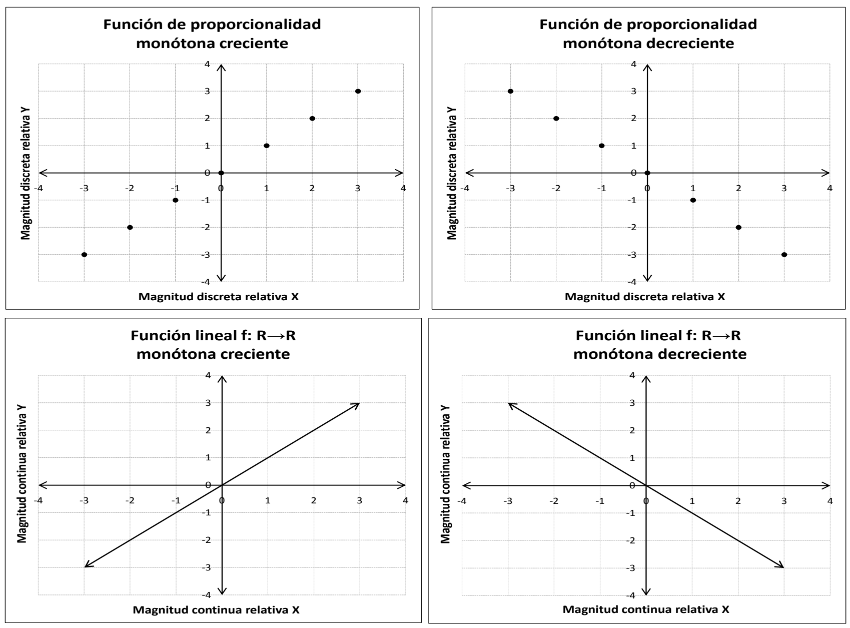
La homogeneidad se verifica al tomar un punto (x_1 , y_1) que pertenezca a la gráfica, si k es cualquier número real distinto de cero, entonces los infinitos puntos (kx_1 , ky_1) también pertenecen a la gráfica. Lo absoluto o lo relativo de las magnitudes determina los cuadrantes del plano cartesiano donde tendrá lugar la gráfica, las magnitudes absolutas estarán en el primer o cuarto cuadrante y las relativas en el primero y en el tercero o en el segundo y el cuarto dependiendo de si la función es monótona y creciente o monótona y decreciente.

Una característica importante de las funciones de proporcionalidad y lineal es que si se toman las razones entre cualquier par de elementos x_i, x_j que pertenezcan a la magnitud Xy sus correspondientes y_i, y_j que pertenezcan a la magnitud Y, estas forman una proporción es decir $\frac{x_i}{x_j} = \frac{y_i}{y_j}$, lo cual, es una consecuencia que surge al considerar las condiciones de proporcionalidad.

Para el caso de las magnitudes presentes en la realidad, estas son modeladas en las matemáticas generalmente por los conjuntos numéricos que se pueden asociar con la medida de la cantidad de dicha magnitud, por tanto, los números naturales pueden modelar cierto tipo de magnitudes y lo mismo sucede con las números enteros, los números racionales, los números reales entre otros. Por ejemplo el tiempo, que es una magnitud continua física puede modelarse matemáticamente con los números reales ya que estos permiten tener en cuenta la continuidad, sin embargo, el tiempo también puede considerarse una magnitud discreta cuando su medida se asocia con el número de días, en este caso el modelo matemático asociado será el de los números naturales. Por tanto, el conjunto numérico a través del cual se establece la función permite modelar la magnitud. Es importante aclarar que como se mencionó anteriormente, si lo que se tiene es una relación entre dos magnitudes continuas, la representación cartesiana de esta relación será una línea recta, pero si al menos una no es continua entonces la representación cartesiana que se obtiene será un conjunto alineado de puntos. En la figura 6, se muestra la gama de posibilidades que se tiene al realizar la representación cartesiana.

Se puede decir entonces que en los procesos de modelación de un fenómeno de covariación el conjunto a través del cual se modela es importante porque le puede poner o quitar elementos a la magnitud que se está modelando, por ejemplo, si tenemos la magnitud longitud está claro que los números reales son un buen conjunto para representar matemáticamente porque mantienen su continuidad, igual para la superficie, el volumen, los ángulos y en general para las magnitudes geométricas, el tiempo puede ser modelado por los reales, los racionales, los enteros o los naturales, de modo que se puede afirmar que el conjunto numérico representa la magnitud, por ejemplo, cuando se tiene un fenómeno de variación o un fenómeno en el mundo real se tienen magnitudes implicadas que están cambiando y por supuesto que están relacionadas en ese fenómeno de covariación, por tanto, es necesario buscar la función en sentido de buscar la regla de correspondencia que relaciona los valores de una y otra magnitud, pero previo a eso hay que modelar las magnitudes y éstas normalmente se modelan con conjuntos numéricos.

Figura 6. Representaciones cartesianas de la función de proporcionalidad y lineal



En resumen, las magnitudes están implicadas en el proceso de modelación y el conjunto numérico que se utilice para definir la función permitirá *matematizar* la situación real a estudiar, es decir, se pueden tener funciones de proporcionalidad entre magnitudes modeladas por conjuntos numéricos como los naturales, los enteros y los racionales, y se pueden tener funciones lineales entre magnitudes modeladas por el cojunto de los números reales.

3. DESCRIPCIÓN DE ACCIONES INVESTIGATIVAS

3.1 INTRODUCCIÓN

En este capítulo interesa describir el contexto local en el que viven los estudiantes de grado noveno de la Institución Educativa Las Toldas del municipio de La Argentina Huila y desde allí analizar algunas situaciones cotidianas tanto de los estudiantes como de la comunidad en general que se puedan modelar a través de las funciones de proporcionalidad directa o lineal. El análisis de las situaciones se ha organizado teniendo en cuenta que algunas de estas involucran la magnitud dinero[4], otras involucran magnitudes discretas y otras involucran magnitudes continuas.

Vale la pena aclarar que la selección de las situaciones que son objeto de estudio en el presente capítulo han sido extraidas de la cotidianidad de los estudiantes a criterio propio del autor del presente trabajo de grado y en coherencia con una de las maneras de implementar la modelación en la clase de matemáticas como lo propone Villa-Ochoa (2010).

Dicho análisis se hará teniendo en cuenta los siguientes pasos:

- Estudio de la situación a través del ciclo de modelación de Blum (2005) citado en (Bosch, et al., 2006), para lo cual, se tendrán en cuenta los siguientes procesos y fases: la descripción de la situación real, el proceso de matematización y modelo matemático, y los resultados matemáticos y resultados reales; donde puede ocurrir que el modelo matemático sea la función de proporcionalidad directa o lineal o por el contrario que el modelo matemático corresponda a otro tipo de función. Vale la pena aclarar que se tienen en cuenta estas fases en razón a que el interés se centra en determinar si la situación real se puede modelar directamente por las funciones de proporcionalidad o lineal de manera que el diseñador de currículo pueda validar la relación existente entre la situación cotidiana y las funciones de proporcionalidad o

[4] Se discrimina la magnitud dinero por su complejidad para caractirizarse incluso como magnitud, y luego como discreta o continua dado sus formas usuales en la sociedad.

lineal. Son las fases anteriormente mencionadas las que en principio proporcinan información relevante al diseñador de currículo y con ésta puede establecer si efectivamente la situación puede ser modelada por las funciones de proporcionalidad o lineal o si por el contrario el modelo matemático que mejor se ajusta es otro tipo de función o de expresión matemática.

- Si el modelo matemático es la función de proporcionalidad o lineal entonces la situación real se puede formular como situación seudorreal en el ciclo de modelación modificado y los resultados en cada fase del ciclo coinciden con los obtenidos en la modelación de la situación real.

- Si el modelo matemático de la situación real es diferente de la función de proporcionalidad directa y lineal entonces se seguirán los siguientes procesos y fases del ciclo de modelación modificado: contextualización y situación seudorreal, matematización y modelo matemático, y resultados matemáticos y resultados reales; de tal forma que a través del proceso de contextualización se trate de obtener una situación seudorreal que permita obtener como modelo matemático la función de proporcionalidad directa y lineal.

Es importante reiterar que no se trata de hacer el análisis de las situaciones con cada una de las fases del ciclo de modelación de Blum (2005) porque ello implica hacer un trabajo experimental con estudiantes para ver cómo se comportan en cada una de estas. Lo que interesa es el uso que puede hacer del ciclo de modelación el diseñador de currículo de manera que permita validar la relación existente entre una situación contidiana y las funciones de proporcionalidad o lineal.

Sería interesante en trabajos posteriores estudiar las situaciones que se analizan en este documento pero desde la óptica de la comprensión de los estudiantes de manera que se puedan analizar cada una de las fases del ciclo de modelación en la clase de matemáticas específicamente.

3.2 DESCRIPCIÓN DEL CONTEXTO LOCAL

Los estudiantes del grado noveno de la Institución Educativa *Las Toldas*, viven en la zona rural del municipio de *La Argentina* (Huila), en veredas como *Las Águilas*, *El Blanquecino*, *Las Toldas, Bajo Pensil*, *Mirador*, *El Sinaí*, *Buenos Aires, Lourdes*, *Las Minas*, *La Esperanza* y *El Rosario*, en total son once veredas, las cuales están ubicadas entre los 1600 y 1900 metros sobre el nivel del mar, de modo que es zona cafetera, agrícola y ganadera. Los estudiantes como miembros del núcleo familiar respectivo ayudan con las labores domésticas y agrícolas en sus fincas, es decir están involucrados en actividades como la ceba o cría de ganado, el cultivo de café, la producción de helados, hacer el jugo del almuerzo, ente otras. En el colegio deben colaborar sobre todo con las actividades que se realizan para recolectar fondos económicos para el paseo de fin de año, por ejemplo, la producción de tamales, empanadas, chorizos y la venta de rifas y bingos. Es así que de este conjunto de actividades, de las cuales, algunas son cotidianas para los estudiantes, otras son cotidianas para los integrantes de la comunidad como padres de familia etc. Otras pueden no ser tan cotidianas pero se tiene en cuenta por que se considera que pueden ser importantes cuando se intente proponer actividades de clase a los estudiantes, se han detectado algunas que posiblemente se puedan modelar a través de las funciones de proporcionalidad o lineal, éstas se describen y analizan en la siguiente sección de este capítulo.

3.3 ANÁLISIS DE SITUACIONES QUE INVOLUCRAN MAGNITUDES DISCRETAS

En esta sección se pretende analizar situaciones donde se relacionan magnitudes discretas y que posiblemente compartan la función de proporcionalidad como modelo matemático, pero con la característica que la magnitud dinero no está involucrada en ninguna de estas situaciones.

3.3.1 Análisis de la situación acerca de la relación entre la cantidad de tamales y la cantidad de hojas de plátano

3.3.1.1 *Descripción de la situación real*

Una de las actividades que realizan los estudiantes con el propósito de recolectar fondos económicos para el paseo de fin de año es la producción de tamales. El proceso de elaboración de tamales requiere el uso de hojas de plátano con las cuales se envuelve el contenido de cada tamal, de modo que, para producir 50 tamales se requieren 15 hojas de plátano. Es importante aclarar que las hojas de plátano se consiguen por atados de 15 hojas en las fincas donde cultivan plátano y es por eso que la relación involucra dicha cantidad. Se debe tener en cuenta también que, dicha relación se cumple si todas las hojas son de igual tamaño y de igual calidad. En lo que tiene que ver con el tamaño de las hojas vale la pena decir que existe gran variedad de medidas, unas pueden ser muy cortas con medidas alrededor de 1 metro y otras muy largas con medidas alrededor de 2.20 metros. De modo que un atado de 15 hojas debe tener un promedio de 1.50 metros para que la relación antes mencionada se cumpla. La calidad de las hojas puede afectar la relación si algunas de éstas tienen pedazos defectuosos, aunque de ser así la hoja es remplazada por otra que esté en mejor estado, así que generalmente los atados están conformados por hojas frescas y en buen estado. Otro aspecto importante es que la producción de tamales se hace a partir de 50 unidades, pues por razones de tipo logístico y económico entre otros no es viable producir menos de esta cantidad.

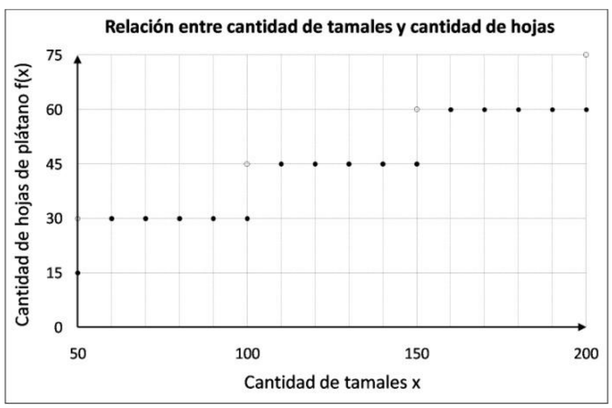
3.3.1.2 *Proceso de matematización y modelo matemático*

En esta situación se puede asumir que tanto la cantidad de tamales como la cantidad de hojas de plátano son magnitudes discretas cuyas cantidades de magnitud se puede modelar a través de los números naturales. Aunque la relación parece en principio de proporcionalidad de directa, pues se puede pensar que a 50 tamales corresponden 15 hojas de plátano, a 100 tamales corresponden 30 hojas de plátano y así sucesivamente, se tiene que hay otras relaciones que desvirtúan la proporcionalidad, ya que, si se planean producir por ejemplo 60 tamales es necesario conseguir 30 hojas de plátano, si se planean producir 70 tamales es necesario conseguir de nuevo 30 hojas de plátano, si se planean producir 80 tamales es necesario conseguir las mismas 30 hojas de plátano; es decir, si se planean producir entre 51 y 100 tamales es necesario conseguir 30 hojas de plátano, entre 101 y 150 tamales es necesario conseguir 45 hojas de plátano ya que estas se pueden adquirir por atados de 15 hojas. Es importante aclarar que la relación entre la cantidad de tamales y la cantidad de hojas de plátano tiene sentido a partir de 50 tamales. Otro aspecto importante es que primero se planea cuántos tamales se van a producir y luego se determina cuántas hojas de plátano son necesarias, de modo que se puede asumir la cantidad de tamales como variable independiente x y la cantidad de hojas de plátano como variable dependiente $f(x)$. Así que el *modelo matemático*inmerso en esta situación es la función cuya variable dependiente se puede calcular a partir de la fórmula algebraica:

$$f(x) = \begin{cases} [\![x \div 50]\!] \times 15, \text{si residuo } (x \div 15) = 0 \\ ([\![x \div 50]\!] + 1) \times 15, \text{si residuo } (x \div 15) \neq 0 \end{cases}; x \in N \,\Lambda\, x \geq 50$$

La representación cartesiana para algunos valores de la función se muestra en la figura 7.

Figura 7. Representación cartesiana de la relación entre cantidad de tamales y cantidad de hojas de plátano



3.3.1.3 *Resultados matemáticos y resultados reales*

Como se puede observar, este modelo matemático permite obtener resultados matemáticos coherentes con los que se obtienen en la situación real, por ejemplo, si se planean producir 120 tamales es necesario conseguir 45 hojas de plátano para su elaboración y esto es lo realmente sucedería en la situación real.

Es evidente entonces que esta situación no tiene como modelo matemático la función de proporcionalidad directa o lineal, por lo tanto, es pertinente hacer uso del ciclo de modelación modificado para tratar de establecer una situación seudorreal que involucre la función de proporcionalidad directa como modelo matemático.

3.3.1.4 *Proceso de contextualización y situación seudorreal*

La situación real puede ser transformada en una situación *suedorreal* en la que se asuma que sólo se pueden producir cantidades de tamales que sean múltiplos de 50 a partir de cero, con lo que se tendrá que para producir 50 tamales es necesario conseguir 15 hojas de plátano, para producir 100 tamales es necesario conseguir 30 hojas de plátano y así sucesivamente.

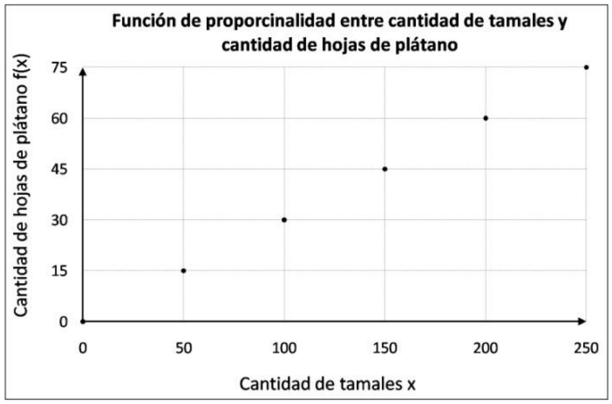
3.3.1.5 *Proceso de matematización y modelo matemático*

Si se tienen en cuenta las consideraciones anteriores, se puede asumir que tanto la cantidad de tamales como la cantidad de hojas de plátano son magnitudes discretas cuyas cantidades de magnitud se pueden modelar a través de los números naturales. Además, la cantidad de hojas de plátano depende de la cantidad de tamales que se vayan a producir, de modo que, a 50 tamales corresponden 15 hojas de plátano, a 100 tamales corresponden 30 hojas de plátano etc. Esto permite establecer que la cantidad de tamales puede asociarse con la variable independiente *x*y la cantidad de hojas de plátano puede asociarse con la variable dependiente *f(x)*y lo que se tiene es una relación de correlación directa entre las dos magnitudes. El modelo matemático para esta situación seudorreal corresponde con la función de proporcionalidad directa cuya expresión algebraica es:

$$f(x) = \frac{15}{50}x, x \in N \wedge x \text{ es múltiplo de } 50$$

La representación cartesiana se muestra en la figura 8.

Figura 8. Representación cartesiana de la función de proporcionalidad entre la cantidad de tamales y la cantidad de hojas de plátano



3.3.1.6 *Resultados matemáticos y resultados reales*

Este nuevo modelo matemático, permite obtener algunos resultados matemáticos coherentes con algunos resultados reales, sin embargo, deja de lado una gran cantidad de ellos a causa de favorecer la función de proporcionalidad.

3.3.2 Análisis de la situación acerca de la relación entre la cantidad de tamales y la cantidad de arroz

3.3.2.1 *Descripción de la situación real*

En este caso, el contexto al igual que la situación anterior tiene que ver con la producción de tamales, los estudiantes saben que se requiere una libra (1 lb) de arroz por cada 7 tamales. Es importente aclarar que en la realidad sólo tiene sentido producir cantidades de tamales mayores o iguales a 50 unidades por varias razones entre otras, por cuestiones económicas y de logística. Esto quiere decir que para 56 tamales se requiere 8 lb de arroz, para 63 tamales se requieren 9 lb de arroz y así sucesivamente, como se puede ver, si la cantidad de tamales es múltiplo de 7, la cantidad de arroz en libras es un número natural, sin embargo, si la cantidad de tamales no es múltiplo de 7, entonces la persona que se encarga de dirigir la producción de los tamales ajusta la cantidad de arroz necesario al múltiplo de 7 más cercano por exceso o por defecto, por ejemplo si se van a producir 65 tamales, al dividir 65 entre 7 el resultado es 9 ya que 9 x 7 = 63 y como 65 está más cerca de 63 que de 70 que sería el siguiente múltiplo de 7 más cercano entonces la cantidad de arroz necesaria es de 9 lb. Es importante aclarar que en las tiendas de abarrotes, en los supermercados o en los lugares donde expenden arroz, éste se consigue por cantidades múltiplos de la unidad mínima comercial, la cual es de 1 lb.

3.3.2.2 *Proceso de matematización y modelo matemático*

Es claro que se tiene una relación entre dos magnitudes, por un lado se tiene la magnitud discreta cantidad de tamales cuya cantidad de magnitud puede modelarse a través de los números naturales y por otro lado se tiene la magnitud continua masa[5] de arroz cuya cantidad de magnitud puede modelarse a través de los números reales, además, primero se planea cuántos tamales se van a producir y con esta información se determina la cantidad de arroz necesaria, de modo que la cantidad de arroz depende de la cantidad de tamales que se vayan a producir, así que se puede asociar la variable independiente xa la cantidad de tamales y la variable dependiente $f(x)$ a la cantidad de de arroz. Para calcular la cantidad de arroz necesaria se debe tomar la parte entera de la división entre la cantidad de tamales y 7 y tener en cuenta dos casos: si el residuo es mayor o igual que cero y menor que 4 entonces la cantidad de arroz corresponde a la parte entera de la división, sino, entonces la cantidad de arroz necesaria corresponde a la parte entera de la división aumentada en 1. de tal forma que el modelo matemático que permite relacionar dichas magnitudes es la función donde la variable dependiente se puede calcular a través de la fórmula algebraica:

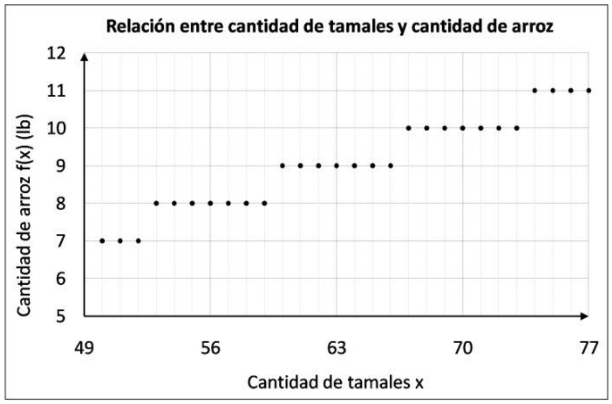
$$f(x) = \begin{cases} [\![x \div 7]\!], si\ 0 \leq \text{residuo de}(x \div 7) < 4 \\ [\![x \div 7]\!] + 1, \text{si residuo de}(x \div 7) \geq 4 \end{cases}; x \in N \wedge x \geq 50$$

La representación cartesiana de dicho modelo se muestra en la figura 9.

---

[5] Los instrumetos que se utilizan para medir la cantidad de masa de una sustancia, lo hacen en forma indirecta ya que lo que miden es el peso, el cual es una magnitud vectrial, pero con este se puede calcular la masa de dicha sustancia.

Figura 9. Representación cartesiana de la relación entre la cantidad de tamales y la cantidad de arroz



3.3.2.3 *Resultados matemáticos y resultados reales*

Como se puede observar, este modelo matemático si bien no corresponde a una función de proporcionalidad, permite obtener resultados matemáticos coherentes con los resultados reales, por ejemplo, a partir de la representación cartesiana se puede determinar que el punto de coordenadas (75,11) significa que a 75 tamales le corresponde 11 lb de arroz y esto es lo que ocurre en la situación real. Es pertinente entonces analizar la situación real con la ayuda del ciclo de modelación modificado y tratar de obtener una situación seudorreal que involucre la función de proporcionalidad como modelo matemático.

3.3.2.4 *Proceso de contextualización y situación seudorreal*

A partir de la situación real, se pude asumir que sólo se pueden producir cantidades de tamales que sean múltiplos de 7, y que la cantidad mínima de tamales que se puede producir es cero (0) y por tanto, se necesitan cero (0) libras de arroz, para producir 7 tamales, se requiere 1 lb de arroz, para producir 14 tamales, se requieren 2 lb de arroz para producir 14 tamales y así sucesivamente. Esta consideración permite transformar la situación real en una seudorreal con el fin de involucrar la función de proporcionalidad directa como modelo matemático.

3.3.2.5 *Proceso de matematización y modelo matemático*

Al igual que en el proceso de matematización de la situación real, la cantidad de tamales se puede pensar como una magnitud discreta cuya cantidad de magnitud se puede modelar a través de los números naturales, y con respecto al arroz lo que importa es su masa, la cual es una magnitud física continua cuya cantidad de magnitud se puede modelar a través de los números reales, así que se puede asociar la variable independiente x a la cantidad de tamales y la variable dependiente $f(x)$ a la cantidad de arroz, ya que primero se establece la cantidad de tamales que se van a producir y con esta información se debe determinar la cantidad de arroz necesaria para producirlos. Con estas consideraciones es posible obtener como modelo matemático la función de proporcionalidad cuya variable dependiente $f(x)$ se puede calcular a partir de la fórmula algebraica:

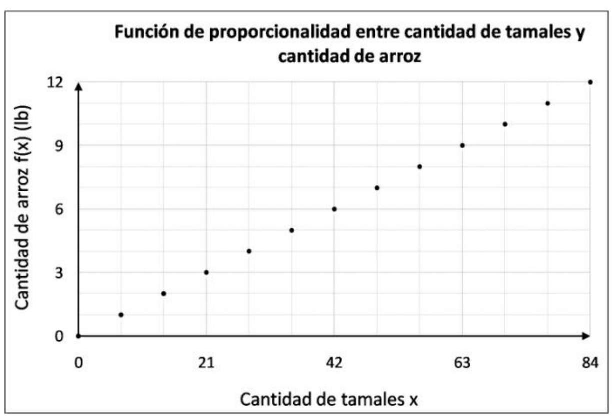
$$f(x)=\frac{1}{7}x,\ \ x\in N \wedge x \text{ es múltiplode } 7$$

La representación cartesiana de este nuevo modelo matemático se muestra en la figura 10.

3.3.2.6 *Resultados matemáticos y resultados reales*

Como se observa en la representación cartesiana, los resultados matemáticos coinciden con los resultados reales que se dan en la situación seudorreal, pero no tiene en cuenta muchos otros que caracterizan la situación real e incluye algunos que carecen de significado en la situación real, ya que en ésta no tiene sentido producir cantidades inferiores a 50 tamales.

Figura 10. Representación cartesiana de la función de proporcionalidad entre la cantidad de tamales y la cantidad de arroz



3.3.3 Análisis de la situación acerca de la relación entre la cantidad de tamales y la cantidad de huevos

3.3.3.1 *Descripción de la situación real*

Esta situación hace parte del mismo contexto en el cual se encuentran las dos situaciones anteriores, en este caso, uno de los ingredientes indispensables para la producción de tamales es el huevo de gallina, el cual debe ser sometido a un proceso de cocción para luego incorporalos a los tamales. Para la elaboración de los tamales es necesario incluir un 1 huevo cocido en cada tamal, de tal manera que para producir 50 tamales son necesarios 50 huevos, para producir 51 tamales son necesarios 51 huevos y así sucesivamente.

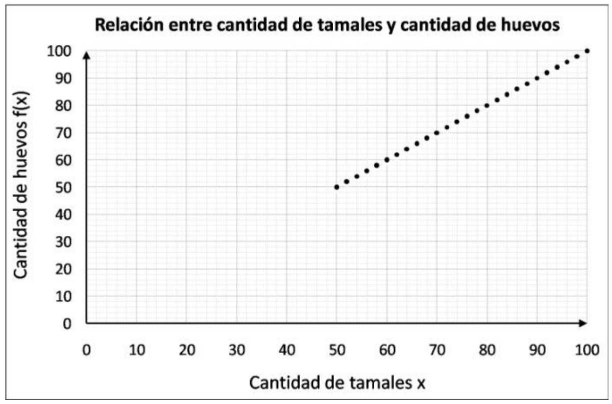
3.3.3.2 *Proceso de matematización y modelo matemático*

Con la información que se tiene de la situación, se puede asumir que tanto la cantidad de tamales como la cantidad de huevos son magnitudes discretas cuya cantidad de magnitud se puede modelar a través de los números naturales. La cantidad de huevos necesarios depende de la cantidad de tamales que se van a producir, por ejemplo, a 50 tamales corresponden 50 huevos, a 51 tamales corresponden 51 huevos y así sucesivamente, lo cual, permite inferir que existe una relación de correlación directa entre las dos magnitudes. Todo esto permite asociar la cantidad de tamales con la variable independiente *x* y la cantidad de huevos con la variable dependiente *f(x)* de tal forma que el *modelo matemático* corresponde a una función y la fórmula algebraica que permite calcular *f(x)* es:

$$f(x) = x, x \in N \ \wedge x \geq 50$$

La representación cartesiana de dicha función se muestra en la figura 11.

Figura 11. Representación cartesiana de la relación entre la cantidad de tamales y la cantidad de huevos



3.3.3.3 *Resultados matemáticos y resultados reales*

Como se puede observar en la representación cartesiana este modelo matemático se parece a una función de proporcionalidad, sin embargo hay dificultades en el intervalo [0,49] ya que en este no hay puntos que pertenezcan a la función porque no es viable logísticamente ni económicamente producir menos de 50 tamales. Los puntos que pertenecen a la función coinciden con los resultados que se obtienen en la situación real por ejemplo el punto de coordenadas (60,60) significa que para producir 60 tamales se necesitan 60 huevos.

Vale la pena comentar que, en otras regiones, por ejemplo en Bogotá o en Neiva, se puede tener que a cada tamal le incorporen medio huevo o un tercio de huevo e incluso hasta un cuarto de huevo, con lo cual, se tendría para cada una de estas relaciones una función similar al modelo matemático anterior, salvo que se considere que las fracciones de huevo aluden es a la masa de huevo.

Es pertinente entonces, analizar de nuevo esta situación pero ahora haciendo uso del ciclo de modelación modificado de manera que a través del proceso de contextualización se pueda obtener una situación seudorreal que implique el uso de la función de proporcionalidad como modelo matemático.

3.3.3.4 *Proceso de contextualización y situación seudorreal*

Lo único que hace falta para que el modelo matemático anterior corresponda a una función de proporcionalidad es que se suponga que la cantidad mínima de tamales que se pueden producir es cero (0), de modo que a partir de allí para producir un 1 tamal es necesario agregar un 1 huevo, para producir 2 tamales es necesario agregar 2 huevos y así sucesivamente.

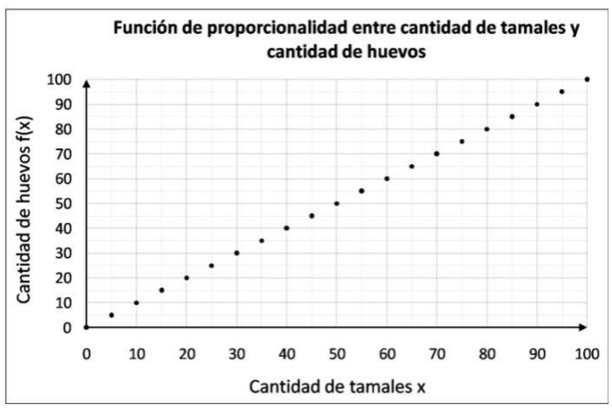
3.3.3.5 *Matematización y modelo matemático*

Con las condiciones mencionadas anteriormente es posible pensar que se tiene una relación de correlación directa entre la magnitud cantidad de tamales y la magnitud cantidad de huevos, pues a 0 tamales corresponden 0 huevos, a 1 tamal corresponde 1 huevo, a 2 tamales corresponden 2 huevos etc. Por tanto el modelo matemático corresponde a una función de proporcionalidad donde la expresión algebraica que permite calcular la variable dependiente es:

$$f(x) = x, x \in N$$

La representación cartesiana de dicha función se muestra en la figura 12.

Figura 12. Representación cartesiana de la función de proporcionalidad entre la cantidad de tamales y la cantidad de huevos



3.3.3.6 *Resultados matemáticos y resultados reales*

Este modelo matemático permite obtener resultados matemáticos que coinciden con los resultados reales que se tienen en la situación seudorreal y sólo tienen significado en la misma, pues en la situación real no tiene sentido producir cantidades inferiores a 50 tamales.

3.3.4 Análisis de la situación acerca de la cantidad de estudiantes y la cantidad de raciones de carne

3.3.4.1 *Descripción de la situación real*

Esta situación tiene que ver con el contexto en el cual los 296 estudiantes de la sede Las Toldas tienen un espacio dentro de la jornada escolar para almorzar en el restaurante escolar. Al inicio de la jornada el docente encargado de la disciplina debe pasar de salón en salón y anotar la cantidad de estudiantes que asisten e informar a las manipuladoras quienes son las encargadas de hacer el almuerzo, el total de estudiantes que almuerzan.Es claro que máximo puede ser de 296 estudiantes. Al medio día, cada estudiante debe desplazarse hasta la cocina y recibir su almuerzo, el cual, está conformado entre otros alimentos por una ración de carne.

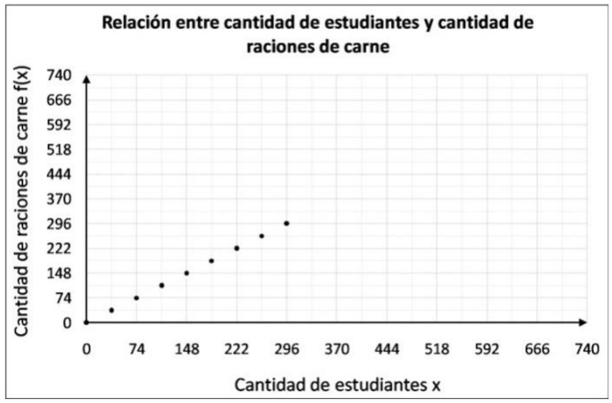
3.3.4.2 *Proceso de matematización y modelo matemático*

De acuerdo con la descripción anterior, se puede asumir que tanto la cantidad de estudiantes como la cantidad de raciones de carne son magnitudes discretas cuya cantidad de magnitud se puede modelar a través de los números naturales; además, a un estudiante le corresponde una ración de carne, a 2 estudiantes le corresponden 2 raciones de carne y así sucesivamente, sin embargo como máximo pueden haber 296 estudiantes, esta es la cantidad máxima de raciones de carne que se pueden dar en el alumerzo. La cantidad de raciones de carne depende de la cantidad de estudiantes que almuerzan, de modo que se puede asociar la cantidad de estudiantes con la variable independiente xy la cantidad de raciones de carne con la variable dependiente*f(x)* y obtener el modelo matemático a través de una función donde la expresión algebraica que permite calcular *f(x)* es:

$$f(x) = x, x \in N \ \wedge 0 \leq x \leq 296$$

La representación cartesiana de dicho modelo matemático se muestra en la figura 13.

Figura 13. Representación cartesiana de la relación entre la cantidad de personas y la cantidad de raciones



3.3.4.3 *Resultados matemáticos y resultados reales*

Como se observa en la representación cartesiana, mientras x tome valores en el intervalo [0,296] la función tiene un comportamiento proporcional y los resultados coinciden con los resultados reales, pero esta función no es de proporcionalidad en el conjunto de los números naturales ya que si x toma valores a partir de 297 entonces la función no está difinida, pues no tienen ningún significado en la situación real. Esto implica que es pertinente analizar la situación a través del ciclo de modelación modificado para tratar de obtener una situación seudorreal que involucre la función de proporcionalidad como modelo.

3.3.4.4 *Proceso de contextualización y sitación seudorreal*

La situación real anteriormente descrita puede transformarse en una situación seudorreal si se asume que la cantidad de estudiantes es infinita, pues es lo único que hace falta para obtener una función de prorporcionalidad como modelo matemático.

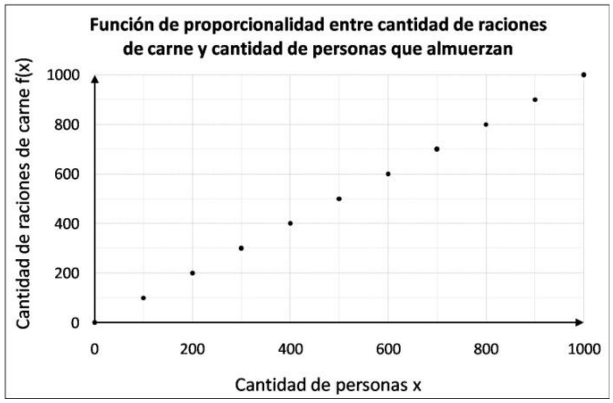
3.3.4.5 *Proceso de matematización y modelo matemático*

Si la cantidad de estudiantes es infinita entonces la variable independiente x puede tomar todos los valores en el conjunto de los números naturales y el modelo matemático se ajusta a una función de proporcionalidad donde la variable dependiente puede calcularse a través de la expresión algebraica:

$$f(x) = x, x \in N$$

La representación cartesiana de algunos valores de la función se muestran en la figura 14.

Figura 14. Representación cartesiana de la función de proporcionalidad entre la cantidad de personas y la cantidad de raciones de carne



3.3.4.6 *Resultados matemáticos y resultados reales*

Como se puede observar en la representación cartesiana, el punto de coordenadas (500,500) significa que para 500 estudiantes se deben agregar 500 raciones de carne a cada almuerzo, lo cual es cierto en los resultados matemáticos de la situación seudorreal pero carentes de significado en la situación real.

3.3.5 Análisis de la situación acerca de la relación entre la cantidad de guayaba y la cantidad de helados

3.3.5.1 *Descripción de la situación real*

Una de las actividades realizadas por los estudiantes para recolectar fondos económicos es la producción y comercialización de helados, los cuales se pueden hacer de diferentes tipos de frutas, una de las más utilizadas es la guayaba por su bajo costo, pues se pueden conseguir sin ningún costo en las fincas de los estudiantes, y por su alto valor nutricional. Aunque las guayabas tienen diferentes tamaños, en forma general se puede decir que con 1 guayaba se pueden hacer 5 helados. Los helados son fabricados en moldes los cuales no siempre tienen la misma forma y por tanto la misma capacidad, lo cual, puede afectar un poco la relación entre la cantidad de guayabas y la cantidad de helados. En esta situación importa analizar la relación entre la cantidad de guayaba y la cantidad de helados a lo largo de un año lectivo.

3.3.5.2 *Proceso de matematización y modelo matemático*

En esta situación es complejo tratar de determinar el modelo matemático que genere los resultados matemáticos mas coherentes con los resultados reales debido a que el tamaño de la guayaba afecta drásticamente la relación entre la cantidad de guayaba y la cantidad de helados, pues al cosechar la guayaba en las fincas, éstas se pueden conseguir en tamaños pequeños con radios de alrededor de 1 cm aunque no son completamente esféricas y también se consiguen guayabas grandes con radios de alrededor de 4 cm. Esto implica que con una guayaba pequeña se pueden hacer aproximadamente 3 helados y con una guayaba grande se pueden hacer alrededor de 7 helados, si los tamaños de las guayabas son intermedios entonces las cantidades de helados también serán intermedias. Por tanto es conveniente analizar esta situación a través del ciclo de modelación modificado para tratar de establecer una situación seudorreal que involucre la función de proporcionalidad como modelo matemático.

3.3.5.3 *Proceso de contextualización y situación seudorreal*

La situación anterior puede transformase en una situación seudorreal si se asume que todas las guayabas son de igual tamaño, que todos los moldes son de la misma forma y tienen la misma capacidad de modo que con 1 guayaba se pueden fabricar 5 helados. Además, primero se establece la cantidad de helados que se van a producir y con esta información se determina la cantidad de guayaba necesaria para producirlos.

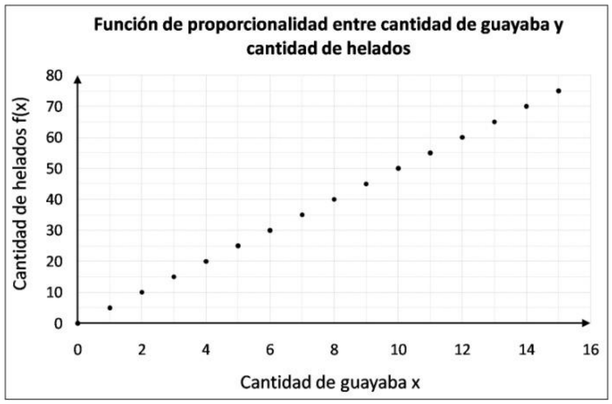
3.3.5.4 *Proceso de matematización y modelos matemático*

Con estas condiciones puede pensarse que, tanto la cantidad de guayaba como la cantidad de helados son magnitudes discretas cuya cantidad de magnitud puede modelarse a través de los números naturales. Además, como la cantidad de heladosque se van a producir depende de la cantidad de guayaba, se puede asociar la cantidad de guayaba a la variable independiente x y la cantidad de helados a la variable dependiente $f(x)$ por tanto, a 1 guayaba corresponden 5 helados, a 2 guayabas corresponden 10 helados y así sucesivamente. Con estas consideraciones se tiene una relación de correlación directa donde el modelo matemático es la función de proporcionalidad cuya fórmula algebraica para calcualar $f(x)$ es:

$$f(x) = 5x, x \in N$$

La representación cartesiana de dicha función se muestra en la figura 15.

Figura 15. Representación cartesiana de la función de proporcionalidad entre la cantidad de guayaba y la cantidad de helados



3.3.5.5 *Resultados matemáticos y resultados reales*

Este modelo matemático permite obtener resultados matemáticos que coinciden con los resultados reales de la situación seudorreal, sin embargo es complejo validar estos resultados en la situación real debido a que para ésta no se tiene un modelo matemático general donde se puedan confrontar dichos resultados. Además, debe tenerse en cuenta que se asume un tamaño de la guayaba uniforme, lo cual en la realidad no ocurre ya que existen diferencias importantes entre los tamaños de éstas y también que los moldes que le dan la forma a los helados son iguales, lo cual, algunas veces tampoco ocurre ya que se pueden tener tamaños y formas diferentes.

3.3.6 Análisis de la relación entre la cantidad de helados y la cantidad de leche

3.3.6.1 *Descripción de la situación real*

Esta situación hace parte del mismo contexto de la situación anterior, los estudiantes saben que para producir 50 helados se necesita una botella de leche (1 bot). Es de aclarar que en la zona rural donde viven los estudiantes, la leche aun se comercializa mediante el “jarreo”, es decir, las personas van hasta la finca donde tienen vacas productoras de leche y la compran en cantidades múltiplos de la unidad mínima comercial equivalente a una botella (1 bot). Sin embargo, vale la pena aclarar que aunque sólo se puedan comprar cantidades múltiplos de 1 bot, a la hora de producir los helados no es necesario utilizar toda la leche que se compró, por ejemplo, si se van a producir 25 helados entonces aunque se compre1 bot de leche sólo se utiliza media botella para producirlos. Vale la pena decir que los estudiantes pueden fraccionar una botella de leche en cantidades proximas a media botella e incluso hasta un cuarto de botella.

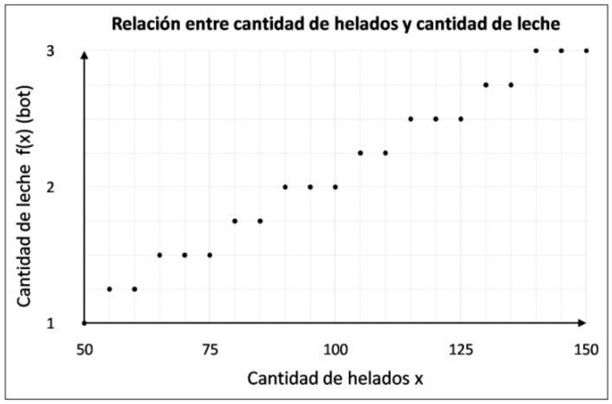
3.3.6.2 *Proceso de matematización y modelo matemático*

Si se analiza más de cerca la realidad, lo que ocurre es que una vez se tiene la cantidad de helados que se planean producir se divide dicha cantidad entre 50, si el cociente no es exacto, entonces se tienen en cuenta las siguientes consideraciones para determinar la cantidad de leche necesaria: si el residuo es menor o igual que 12 el cociente se aumenta en $\frac{1}{4}$, si el residuo está entre 12 y 25 el cociente se aumenta en $\frac{1}{2}$, si el residuo está entre 25 y 37, el cociente se aumenta en $\frac{3}{4}$, y si el residuo es mayor o igual que 37 el cociente se aumenta en 1, esto sucede porque, si bien la leche se puede comprar en cantidades múltiplos de 1 botella, cuando se producen los helados las personas pueden dividir dicha cantidad en cantidades muy aproximadas a $\frac{1}{2}\text{bot}$ y a $\frac{1}{4}\text{bot}$, de modo que la cantidad de magnitud volumen de leche puede ser modelada a través de los números reales. La cantidad de leche depende de la cantidad de helados, por tanto se puede asociar la variable independiente *x* a la cantidad de helados y la variable dependiente *f(x)* a la cantidad de leche. Con estas consideraciones, el modelo matemático inmerso en esta situación es una función, donde la variable dependiente *f(x)* puede calcularse a través de la siguiente expresión algebraica:

$$f(x) = \begin{cases} [\![x \div 50]\!] \text{ si residuo de} (x \div 50) = 0 \\ [\![x \div 50]\!] + \frac{1}{4}, \text{si } 0 < \text{residuo de } (x \div 50) \leq 12 \\ [\![x \div 50]\!] + \frac{1}{2}, \text{si } 12 < \text{residuo de } (x \div 50) \leq 25; x \in N \\ [\![x \div 50]\!] + \frac{3}{4}, \text{si } 25 < \text{residuo de } (x \div 50) \leq 37 \\ [\![x \div 50]\!] + 1, \text{si } 37 < \text{residuo de } (x \div 50) \leq 49 \end{cases}$$

La representación cartesiana de dicha función se muestra en la figura 16.

Figura 16. Representación cartesiana del modelo matemático acerca de la relación entre la cantidad de helados y la cantidad de leche



3.3.6.3 *Resultados matemáticos y resultados reales*

Como se puede observar en la representación cartesiana del modelo matemático es posible obtener resultados matemáticos que coinciden con los resultados reales, por ejemplo, el punto de coordenadas $\left(75\,,1\frac{1}{2}\right)$ significa que para hacer 75 helados se requiere una botella y media de leche (en teoría) para su elaboración, lo cual, sucede en la situación real, sin embargo vale la pena aclarar que cuando el estudiante agrega una botella y media de leche a los ingredientes con los que se elaboran los helados realmente es imposible medir esta cantidad en forma exacta, más bien es una cantidad próxima a la teórica y se acepta como tal. Es necesario entonces hacer algunos ajustes a través del ciclo de modelación modificado para tratar de obtener una situación seudorreal que involucre una función de proporcionalidad como modelo matemático.

3.3.6.4 *Proceso de contextualización y situación seudorreal*

En esta situación conviene considerar que sólo se pueden elaborar cantidades de helados múltiplos de 50 unidades y que todos los moldes que se utilizan para darle forma a los helados son iguales.

3.3.6.5 *Proceso de matematización y modelo matemático*

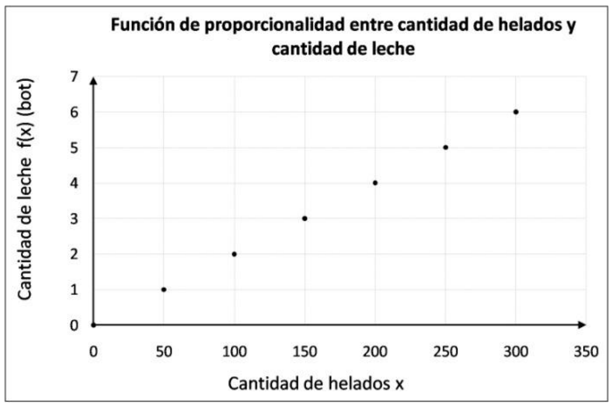
Con estas consideraciones se tiene una relación de correlación directa pues a 50 helados corresponde 1 botella de leche, a 100 helados corresponden 2 botellas de leche y así sucesivamente, además, se supone que se pueden fabricar tantos helados como se deseen.

El modelo matemático para esta situación es una función de proporcionalidad donde la expresión algebraica que permite calcular la variable dependiente *f(x)* es:

$$f(x) = \frac{1}{50}x, x \in N$$

En la figura 17, se muestra la representación cartesiana del modelo matemático.

Figura 17. Representación cartesiana de la función de proporcionalidad entre la cantidad de helados y la cantidad de leche



3.3.6.6 *Resultados reales y resultados matemáticos*

Como se puede observar en la representación cartesiana, los resultados matemáticos coinciden con los resultados reales que se generan el la situación seudorreal, sin embargo dejan de lado una gran cantidad de resultados presentes en la situación real.

3.3.7 Análisis de la situación acerca de la relación entre la cantidad de naranjas y la cantidad de vasos de jugo

3.3.7.1 *Descripción de la situación real*

Esta situción tiene como contexto la vida familiar de los estudiantes, pues en sus casas les corresponde colaborar entre otras cosas con el oficio doméstico, una de estas actividades es la elaboración del jugo del almuerzo. Es común hacer jugo de naranja debido a que es una fruta que se consigue en la mayoría de las fincas de la región. Sin embargo es complejo establecer una relación entre la cantidad de naranjas y la cantidad de vasos de jugos que se pueden obtener ya que las naranjas son de diferente tamaño, y pueden contener mayor o menor cantidad de jugo, sin embargo, los estudiantes saben que generalmente con 6 naranjas se puede obtener 1 vaso de jugo.

3.3.7.2 *Proceso de matematización y modelo matemático*

Para esta situación real es complejo tratar de construir un modelo matemático que genere resultados matemáticos coherentes con los resultados reales que se dan en la situación real, pues, las naranjas tiene diferente tamaño y diferene contenido de jugo, de modo que, la relación 6 naranjas para 1 vaso de jugo no es exacta y puede cambiar. Es pertinente entonces analizar esta situación real a través del ciclo de modelación modificado para tratar de obtener un situación seudorreal que involucre la función de proporcionalidad como modelo matemático.

3.3.7.3 *Proces de contextualización y situación seudorreal*

Dada la situación real anterior, es necesario considerar que todas las naranjas tienen el mismo tamaño y la misma cantidad de jugo, de tal manera que con 6 naranjas se puede obtener 1 vaso de jugo todos de la misma capacidad y que se pueden obtener tantos vasos de jugo como naranjas disponibles.

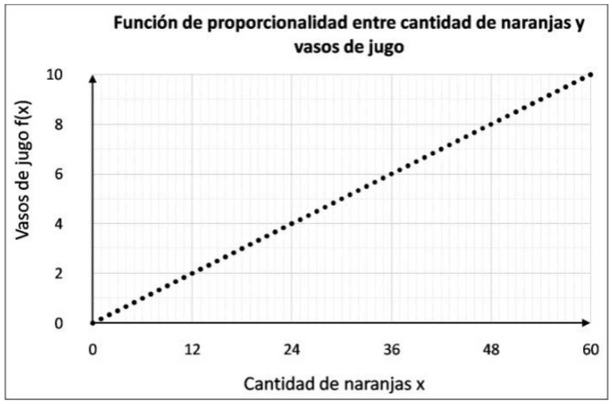
3.3.7.4 *Proceso de matematización y modelo matemático*

En esta situación se puede pensar que la cantidad de naranjas es una magnitud discreta cuya cantidad de magnitud se puede modelar a través de los números naturales y que la cantidad de vasos de jugo también es una magnitud discreta cuya cantidad de magnitud se puede modelar a través de los números racionales. Los vasos de jugo dependen de la cantidad de naranjas disponibles, por tanto es conveniente asociar la cantidad de naranjas con la variable independiente *x* y la cantidad de vasos de jugo con la variable dependiente *f(x)*. Se tiene entonces que a 0 naranjas corresponden 0 vasos de jugo, a 1 naranja corresponde $\frac{1}{6}$ de vaso de jugo, a 2 narnajas corresponden $\frac{1}{3}$ de vaso de jugo y así sucesivamente. Es dicir a partir de la cantidad de naranjas se obtienen cantidades de vasos de jugo que son múltiplos de $\frac{1}{6}$ de vaso de jugo. Con estas consideraciones se puede obtener una función de proporcionalidad como modelo matemático donde la fórmula algebraica que permite calcular la variable dependiente *f(x)* es:

$$f(x) = \frac{1}{6}x, x \in N$$

La representación cartesiana de este modelo matemático se muestra en la figura 18.

Figura 18. Representación cartesiana de la función de proporcionalidad entre la cantidad de naranjas y la cantidad de vasos de jugo



3.3.7.5 *Resultados matemáticos y resultados reales*

Como se puede observar en la representación cartesiana los resultados matemáticos coinciden con los resultados reales que se obtienen de la situación seudorreal, por ejemplo, el punto de coordenadas (36 , 6) significa que a 36 naranjas corresponden 6 vasos de jugo. Sin embargo dificilmente esto ocurre en la situación real.

3.3.8 Análisis de la situación acerca de las páginas impresas por minuto de una fotocopiadora

3.3.8.1 *Descripción de la situación real*

En esta situación, el contexto tienen que ver con la fotocopiadora que hay disponible en el centro educativo, donde los estudiantes tienen la posibilidad de solicitar fotocopias para el uso académico, las especificaciones de ésta dicen que tiene la capacidad de generar 30 fotocopias cada minuto.

3.3.8.2 *Proceso de matematización y modelo matemático*

Se debe tener en cuenta en este caso que la relación 30 fotocopias cada minuto es teórica y en la realidad es difícil que ocurra ya que se asume que muchos aspectos garantizan tal relación por ejemplo que la fotocopiadora funciona normalmente, tiene la cantidad de tinta necesaria, la alimentación es automática, el nivel de color es el adecuado entre otros. Por tanto, la relación entre la cantidad de fotocopias y el tiempo de impresión en la realidad tiene diferentes expresiones muchas de las cuales son complejas de definir tanto algebraica como gráficamente.Conviene entonces analizar la situación a través del ciclo de modelación modificado para tratar de obtener una situación seudorreal que involucre la función de proporcionalidad como modelo matemático.

3.3.8.3 *Proceso de contextualización y situación seudorreal*

En este caso si se asume que la fotocopiadora funciona en condiciones ideales, de tal manera que imprime 30 hojas cada minuto, se puede favorecer el uso de la función de proporcionalidad. Sin embargo es necesario considerar el tiempo se puede expresar en múltiplos de una unidad mínima la cual corresponde a 1 minuto.

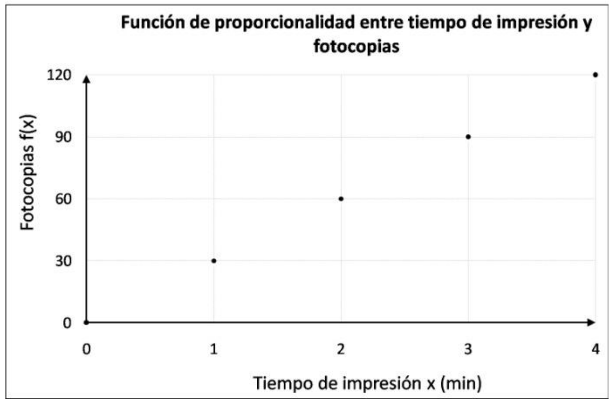
3.3.8.4 *Proceso de matematización y modelo matemático*

Si se asume que la cantidad de fotocopias es una magnitud discreta cuya cantidad de magnitud se puede modelar a través de los números naturales y el tiempo es una magnitud continua aunque en este caso se puede asumir como discreta cuya cantidad de magnitud se puede modelar a través de los números naturales con la cantidad de magnitud 1 minuto como la unidad mínima de tiempo. Entonces se tiene una relación de correlación directa entre el tiempo y la cantidad de fotocopias, donde la cantidad de fotocopias depende de el tiempo que emplea la fotocopiadora para producirlas. Estas consideraciones permiten establecer que se puede asociar el tiempo con la variable independiente x y la cantidad de fotocopias con la variable dependiente *f(x)*de modo que a 1 minuto corresponden 30 fotocopias, a 2 minutos corresponden 60 fotocopias y así sucesivamente, de modo que el modelo matemático para esta situación seudorreal es una función de proporcionalidad donde la expresión algebraica que permite calcular la variable dependiente es:

$$f(x) = 30x, x \in N$$

La representación cartesiana del modelo matemático se muestra en la figura 19.

Figura 19. Representación cartesiana de la función de proporcionalidad entre el tiempo de impresión y la cantidad de fotocopias



3.3.8.5 *Resultados matemáticos y resultados reales*

Este modelo matemático permite obtener resultados matemáticos que coinciden con los resultados reales que se generan en la situación seudorreal, pero seguramente carecen de validez si se comparan con los resultados reales que se generan en la situación real.

3.3.9 Análisis de la situación acerca de la relación entre el área de un terreno y la cantidad de árboles de café

3.3.9.1 *Descripción de la situación real*

En esta situación, el contexto tiene que ver con las fincas donde viven los estudiantes, allí, el cultivo del café es uno de los más comunes de la región, los estudiantes saben que en una hectárea de tierra (1 ha) se pueden sembrar 4500 árboles de café. Es común en esta región asignar una cantidad de área a un determinado terreno haciendo uso de la estimación, es decir, las personas tienen la capacidad de observar un terreno y estimar su cantidad de superficie debido a que lo comparan mentalmente con un terreno que tiene una superficie de 1 (ha), de esta manera pueden asignar cantidades de superficie que son fracciones de 1 (ha), por ejemplo pueden asignar a un terreno una cantidad de superficie de media hectárea si creen que es la mitad de la hectárea que tienen en la imagnación y así pueden estimar cantidades de superficie incluso hasta de un cuarto de hectárea.

3.3.9.2 *Proceso de matematización y modelo matemático*

Si se asume la cantidad de árboles de café como una magnitud discreta, se tiene una relación entre una magnitud continua como es el área y una magnitud discreta como son los árboles de café, Como la cantidad de área se obtiene por estimación, es posible que se asignen cantidades de área iguales a terrenos diferentes, por ejemplo, dos terrenos pueden tener áreas muy parecidas pero en todo caso diferentes, un estudiante puede por estimación asignarle a los dos terrenos una cantidad de área de $\frac{1}{4}$ de hectárea y con esta información determinar que se deben sembar 1125 árboles de café en cada uno. Esto quiere decir que debido al error que se comete al asignar una cantidad de área por estimación lo que se tiene es que terrenos con diferente área requieren que se siembre la misma cantidad de árboles de café. Es complejo determinar un intervalo de cantidades de área a las cuales un estudiante le asigne una cantidad de área específica, por tanto sería muy arriesgado tratar de encontrar un modelo matemático que permita obtener resultados matemáticos coherentes con resultados reales.

3.3.9.3 *Proceso de contextualización*

La situación real se puede transformar en una situación seudorreal si se tiene en cuenta que a la hora de sembrar los árboles, la cantidad de estos ayudará a precisar la respectiva cantidad de área del terreno, es decir, a 4500 arboles de café le corresponde 1 (ha) de tierra, a 2250 árboles de café le corresponde $\frac{1}{2}$ (ha) de tierra y así sucesivamente.

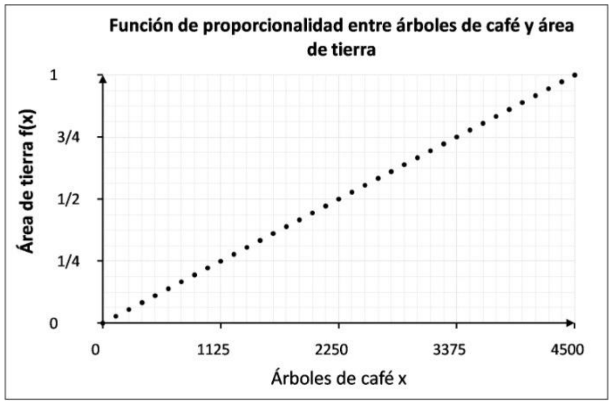
3.3.9.4 *Proceso de matematización y modelo matemático*

Por tanto se puede considerar que la magnitud cantidad de árboles de café es la variable independiente *x* y la cantidad de área de tierra es la variable dependiente *f(x)*. de modo que se puede construir una función de proporcionalidad como *modelo matemático* cuya fórmula algebraica es:

$$f(x) = \frac{1}{4500}x, x \in N$$

la representación cartesiana se presenta en la figura 20.

Figura 20. Representación cartesiana la función de proporcionalidad entre la cantidad de árboles de café y la cantidad de área de tierra



3.3.9.5 *Resultados matemáticos y resultados reales*

Este modelo matemático permite obtener resultados matemáticos coherentes con los resultados reales, por ejemplo, el punto de coordenadas $\left(1125\,,\frac{1}{4}\right)$ significa a 1125 árboles de café corresponde $\frac{1}{4}$de hectárea de tierra para su siembra. Vale la pena decir que es posible que un estudiante estime que un terreno tiene por ejemplo $\frac{3}{4}$ de hectárea, por tanto deberá conseguir 3375 árboles de café, sin embargo cuando los siembra es posible que le sobren 75 árboles porque no le caben en el terreno, esto quiere decir que su estimación falló y que en realidad el terreno tiene una cantidad de área menor que los $\frac{3}{4}$ de hectárea que el estimó. Si ahora se aplica el proceso inverso es decir, si usamos el modelo matemático a partir de la expresión algebraica se tiene que *x=3370* y al evaluar la fórmula algebraica se obtiene que $f(3370) = \frac{1}{4500} * 3370 = \frac{337}{450}$ entonces el área del terreno realmente es de $\frac{337}{450}$ (ha). Este *modelo matemático* permite construir una mejor correspondencia entre la cantidad de área de tierra correspondiente a determinada cantidad de árboles de café, es decir, permite calcularla cantidad de área de una manera más precisa en función de la cantidad de árboles que se siembran.

3.3.10 Análisis de la situación acerca de la relación entre cantidad de ganado vacuno y cantidad de sal

3.3.10.1 *Descripción de la situación real*

Esta situación viene del contexto en el cual, los estudiantes tienen que ayudar con la "ceba" de ganado vacuno, es decir, la producción de carne de res, al cual, periódicamente hay que suministrarle sal par su sana alimentación, los estudiantes saben que por cada 5 cabezas de ganado o reses se requieren 3 libras de sal. Esta relación no es del todo estricta, pues si son 6 reses igualmente se le suministran las 3 libras de sal, incluso si son 7, ya a partir de 8 y hasta 12 reses se les suministra 6 libras de sal.

3.3.10.2 *Proceso de matematización y modelo matemático*

De acuerdo con la descripción anterior, se puede asumir que la cantidad de reses es una magnitud discreta cuya cantidad de magnitud se puede modelar a través de los números naturales y la cantidad de sal es una magnitud continua ya que hace referencia a la masa de sal, por tanto su cantidad de magnitud se puede modelar a través de los números reales. La cantidad de sal depende de la cantidad de reses, por tanto se puede asociar la variable independiente *x* a la cantidad de reses y la variable dependiente *f(x)* a la cantidad de sal. La cantidad de sal respectiva se obtiene teniendo en cuenta las siguientes condiciones: si el residuo de la división entre la cantidad de reses y 5 es menor o igual que 2 entonces la parte entera de esta división se multiplica por 3; sino entonces la parte entera de esta división se aumenta en 1 y luego se multiplica por 3. Es decir el modelo matemático corresponde a una función donde la variable dependiente *f(x)* puede calcularse a partir de la expresión algebraica:

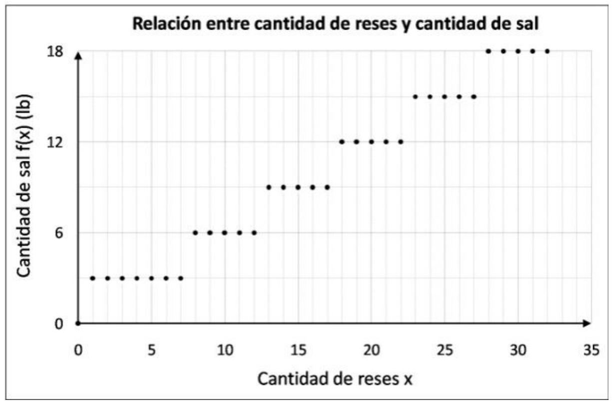
$$f(x) = \begin{cases} [\![x \div 5]\!] \times 3, si\ residuo\ de\ (x \div 3) \leq 2 \\ ([\![x \div 5]\!] + 1) \times 3, si\ residuo\ de\ (x \div 3) \geq 3 \end{cases}; x \in N$$

La representación cartesiana de este modelo matemático se presenta en la figura 21.

3.3.10.3 *Resultados matemáticos y resultados reales*

Como se puede observar en la representación cartesiana, este modelo matemático permite calcular resultados matemáticos coherentes con los que se generan en la situación real. Es pertinente entonces analizar esta situación a través del ciclo de modelación modificado para tratar de obtener una situación seudorreal que involucre una función de proporcionalidad como modelo matemático.

Figura 21. Representación cartesiana del modelo matemático acerca de la relación entre la cantidad de reses y la cantidad de sal



3.3.10.4 *Proceso de contextualización y situación seudorreal*

Esta situación puede transformarse en una situación seudorreal si se asume que sólo se pueden cebar cantidades de reses que sean múltiplos de 5 de tal forma que para 5 reses se requieren 3 libras de sal, para 10 reses se requieren 6 liras de sal y así sucesivamente.

3.3.10.5 *Proceso de matematización y modelo matemático*

Con esta consideración, se tiene una relación de correlación directa entre la magnitud cantidad de reses y la magnitud cantidad de sal respectiva, de modo que la primera se puede asociar con la variable independiente *x* y la segunda con la variable dependiente *f(x)*. Así que se tiene una función de proporcionalidad directa como modelo matemático cuya expresión algebraica es:

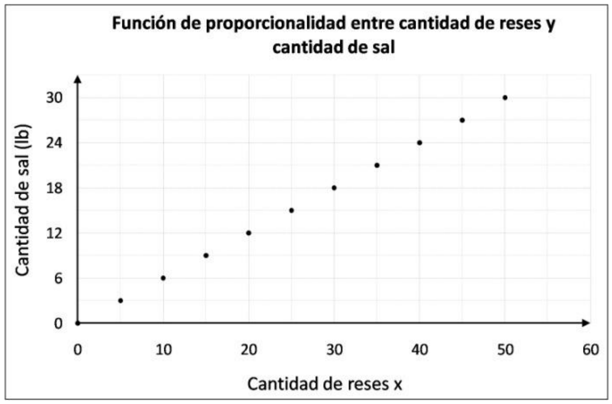
$$f(x) = \frac{1}{5}x, x \in N$$

La representación cartesiana de esta función se muestra en la figura 22.

3.3.10.6 *Resultados matemáticos y resultados reales*

Este modelo matemático genera resultados matemáticos que coinciden con los resultados reales que genera la situación seudorreal, pero pierde mucho significado debido a que no genera una gran cantidad de resultados reales que se dan en la situación real.

Figura 22. Representación cartesiana de la función de proporcionalidad entre la cantidad de reses y la cantidad de sal



3.3.11 Análisis de la situación acerca de la relación entre la cantidad de cerdos y la cantidad de purina

3.3.11.1 *Descripción de la situación real*

El contexto de esta situación tiene que ver con la cría de cerdos, la cual, es una de las actividades realizadas por los estudiantes en sus lugares de residencia, ellos saben que una vez que el cerdo termina su periodo de lactancia, por cada cerdo son necesarios dos kilogramos de purina para su alimentación diaria, esta relación se mantiene hasta que el cerdo llega a su peso ideal para su comercialización.

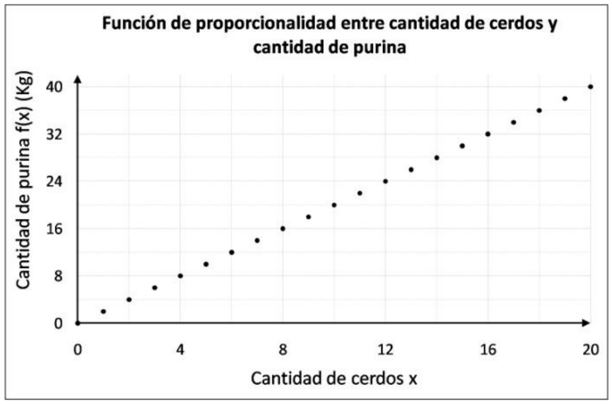
3.3.11.2 *Proceso de matematización y modelo matemático*

Se puede asumir que la cantidad de cerdos es una magnitud discreta cuya cantidad de magnitud se puede modelar a través de los números naturales y la cantidad de purina es una magnitud continua cuya cantidad de magnitud se puede modelar a travésde los números reales; la cantidad de purina depende de la cantidad de cerdos por tanto se puede asociar la cantidad de cerdos con la variable independiente x y la cantidad de purina con la variable dependiente *f(x)*. Con estas consideraciones se tiene que para 1 cerdo corresponden 2 kilogramos de purina, para 2 cerdos corresponden 4 kilogramos de purina y así sucesivamente. Esto permite establecer como modelo matemático la función de proporcionalidad cuya fórmula algebraica es:

$$f(x) = 2x, x \in N$$

La representación cartesiana se muestra en la figura 23.

Figura 23. Representación cartesiana de la función de proporcionalidad entre la cantidad de cerdos y la cantidad de purina



3.3.11.3 *Resultados matemáticos y resultados reales*

En este caso, el *modelo matemático* permite generar *resultados matemáticos*coherentes con los *resultados reales* que se tienen en la *situación real*, ya que es recomendable suministrar los 2 kilogramos de purina diarios bien medidos para garantizar tanto la óptima cría de los cerdos como la rentabilidad del negocio.

3.4 SITUACIONES QUE INVOLUCRAN LA MAGNITUD DINERO

Se ha organizado un grupo de situaciones que involucran la magnitud dinero debido a que ésta puede verse como una magnitud discreta en la que dependiendo del contexto pueden considerarse al menos dos cantidades de magnitud, una que puede ser modelada a través de los números naturales y otra que puede ser modelada a través de los números racionales, por ejemplo, los bancos en los extractos bancarios reportan valores monetarios haciendo uso de números racionales con dos cifras decimales, en este caso la cantidad de magnitud se modela a través de los números racionales, sin embargo, vemos que en el uso físico del dinero para el caso de este país Colombia, existe una unidad mínima monetaria en circulación, la cual, es de 50 pesos y sólo pueden utilizarse valores múltiplos de este en las transacciones físicas, en este caso la cantidad de magnitud se modela a través de los números naturales.

3.4.1 Análisis de la situación cantidad de bombones y precio

3.4.1.1 *Descripción de la situación real*

En esta situación el contexto tiene que ver con las tiendas donde venden artículos para la canasta familiar, los estudinates acostumbran a comprar dulces, galletas, gaseosas etc. Importa en este caso la relación que existe entre la cantidad de bombones que se pueden comprar y el precio teniendo en cuenta que un bombón cuesta 250 pesos. Sin embargo, vale la pena comentar que en general los bombones vienen en bolsas de 24 o de 48 unidades y con frecuencia las fábricas de estos bombones acostumbran a hacer promociones donde la bolsa trae 2 o 3 bombones adicionales por el mismo costo de los 24 o de los 48 bombones, de tal manera que un estudiante puede comprar una bolsa de 24 bombones en una tienda y ésta en realidad ñuede tener 26 unidades. También es posible que si un estudiante compra cantidades superiores a 15 bombones le hagan descuentos de 100 ó 200 pesos.

Es importante aclarar que, se puede generar una gran cantidad de situaciones semejantes a esta debido a la gran variedad de artículos y por tanto de precios existentes.

3.4.1.2 *Proceso de matematización y modelo matemático*

Es complejo tratar de encontrar una modelo matemático que arroje resultados matemáticos coherentes con los resultados reales que se obtienen en la situación real, ya que es posible que en la compra apliquen descuentos o rebajas dependiente de la cantidad de bombones que se compren etc. Por tanto es pertinente analizar la situación a través del ciclo de modelació modificado y tratar de oberner una situación seudorreal que involucre la función de proporcionalidad como modelo matemático.

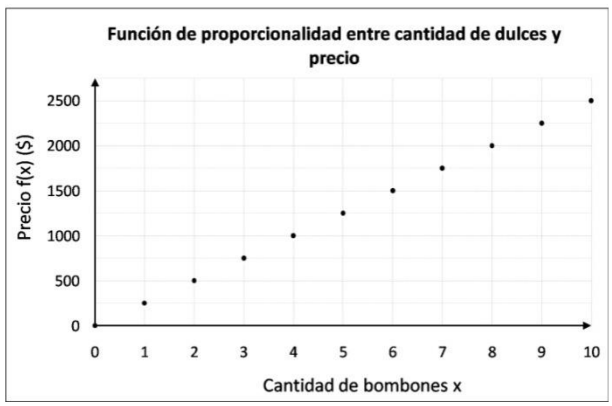
3.4.1.3 *Proceso de contextualización y situación seudorreal*

Esta situación puede ser transformada en una situación seudorreal si se supone que las tiendas no hacen descuentos ni promociones, de manera que se debe pagar estrictamente la cantidad de bombones que se soliciten. El dinero se puede pensar como una magnitud discreta cuya cantidad de magnitud se puede modelar a través de los números naturales ya que tiene que ver con el uso físico del dinero donde la unidad monetaria mínima en circulación es de 50 pesos. La cantidad de bombones también se puede pensar como una magnitud discreta cuya cantidad de magnitud se puede modelar a través de los números naturales. Además, un bombon cuesta 250 pesos, 2 bombones cuestan 500 pesos y así sucesivamente. De modo que, la cantidad de dinero depende de la cantidad de dulces que se vayan a comprar, esto permite asociar la cantidad de dulces con la variable independiente *x* y la cantidad de dinero con la variable dependiente *f(x)*. Con estas consideraciones se obtiene como modelo matemático una función de proporcionalidad donde la expresión algebraica que permite calcular la variable dependiente *f(x)* es:

$$f(x) = 250x, x \in N$$

La representación cartesiana se muestra en la figura 24.

Figura 24. Representación cartesiana de la función de proporcionalidad entre la cantidad de dulces y el precio



3.4.1.4 *Resultados matemáticos y resultados reales*

Este modelo matemático permite obtener resultados matemáticos que coinciden con los resultados reales que se obtienen en la situación seudorreal y es posible que genere una buena parte de los resultados que se obitienen en la situación real, pero deja de lado muchos otros que también suceden en la realidad.

3.4.2 Análisis de la situación cantidad de agua y precio

3.4.2.1 *Descripción de la situación real*

En este caso, el contexto tiene que ver con la factura del acueducto, la cual llega mensualmente a cada uno de los hogares de los estudiantes, dicha factura muestra que la empresa de acueducto registra el volumen de agua utilizado, el cual es medido en metros cúbicos con un instrumento denominado contador, cada metro cúbico de agua que se utiliza tiene un precio de 329 pesos. Vale la pena aclarar que, el precio de la cantidad de agua utilizada es uno de los rubros al igual que el cargo fijo y el subsidio con los que se configura el valor total a pagar de la factura. En esta situación sólo interesa la relación entre cantidad de agua utilizada y el precio correspondiente.

3.4.2.2 *Proceso de matematización y modelo matemático*

En esta situación se tiene una relación entre la magnitud volumen de agua utilizada, la cual, es una magnitud continua, sin embargo, la empresa pública encargada de generar la factura sólo hace uso de los números naturales para reportar la cantidad de volumen de agua utilizada, esto hace que dicha magnitud se pueda considerar como discreta, y por tanto, su cantidad de magnitud se puede modelar a través de los números naturales. En el caso del precio del volumen de agua utilizado, éste se puede considerar como una magnitud discreta cuya cantidad de magnitud se puede modelar a través de los números naturales. El precio depende del volumen de agua utilizado, de modo que se puede asociar la magnitud volumen de agua utilizado con la variable independiente x y el precio con la variable dependiente $f(x)$, de modo que a 1 metro cúbico corresponden 329 pesos, a 2 metros cúbicos corresponden 658 pesos y así sucesivamente. Con estas consideraciones se tiene como modelo matemático una función de proporcionalidad cuya variable dependiente se puede expresar a través de la fórmula algebraica:

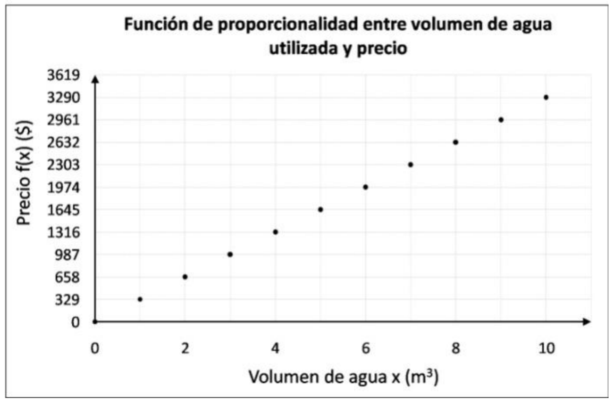
$$f(x) = 329x, x \in N$$

La representación cartesiana se muestra en la figura 25.

3.4.2.3 *Resultados matemáticos y resultados reales*

Como se puede observar, este modelo matemático genera resultados matemáticos que son coherentes con los resultados reales de la situación real.

Figura 25. Representación cartesiana de la función de proorcionalidad entre el volumen de agua y el precio



3.4.2.4 *Proceso de contextualización y situación seudorreal*

En este caso la situación seudorreal coincide con la situación real, por tanto el modelo matemático y los resultados reales son los mismos.

3.4.3 Análisis de la situación cantidad de kilovatios hora y precio

3.4.3.1 *Descripción de la situación real*

En esta situación, el contexto es similar al anterior, la factura que entrega la empresa de energía eléctrica reporta que un kilovatio hora (kWh) cuesta 386.08 pesos, para el estrato 2. Vale la pena aclarar que, el precio del kWh es uno de los rubros al igual que el cargo fijo, subsidio, alumbrado público entre otros con los cuales se establece el valor total a pagar de la factura.

3.4.3.2 *Proceso de matematización y modelo matemático*

En esta situación, aunque la cantidad de kWh es una magnitud continua porque se refiere a la potencia eléctrica, se puede considerar como una magnitud discreta donde la cantidad de magnitud se puede modelar a través de los números naturales porque en la factura se registran cantidades de kWh múltiplos de la unidad mínima correspondiente a 1 kWh; y el precio del kWh como una magnitud discreta cuya cantidad de magnitud se puede modelar a través de los números racionales. El precio del kWh depende de la cantidad de kWh que reporte la factura, por tanto se puede asociar la cantidad de kWh con la variable independiente x y el precio respectivo con la variable dependiente $f(x)$. Así que si el consumo es de 1 kWh el precio correspondiente es de 386.08 pesos, si el consumo es de 2 kWh el precio correspondiente es de 772.16 pesos y así sucesivamente. Con estas consideraciones se obtiene una función de proporcionalidad como modelo matemático donde la variable dependiente puede calcularse a partir de la expresión algebraica:

$$f(x) = 386.08x, x \in N$$

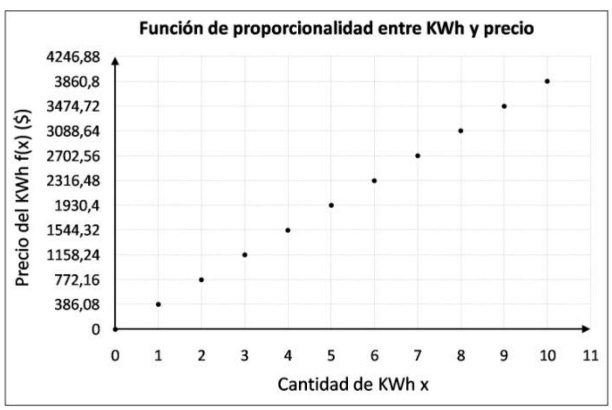
La representación cartesiana de este modelo matemático se muestra en la figura 26.

3.4.3.3 *Resultados matemáticos y resultados reales*

Este modelo matemático permite obtener resultados matemáticos coherentes con los resultdos reales que se obtienen en la situación real.

Además si se tiene en cuenta la resolución nacional que obliga a las empresas que utilizan cantidades de dinero modeladas por los números racionales a realizar un ajuste a la decena mediante una aproximación por redondeo entonces si bien a 1 kWh corresponde un precio de \$386,08 realizando la aproximación se tendría que le correspondería \$390 y para 2 kWh correspondería \$770 con lo que se ve que la relación ya no es de proporcionalidad.

Figura 26. Representación cartesiana de la función de proporcionalidad entre la cantidad de kilovatios hora y el precio



3.4.4 Análisis de la situación cantidad de días y mesada para el colegio

3.4.4.1 *Descripción de la situación real*

Esta situación tiene que ver con la mesada que reciben los estudiantes por parte de sus padres con el fin de que compren algo de alimento a la hora del recreo. Esta mesada en algunos casos corresponde a 500 pesos, pero no existe un valor fijo y estricto para todos los estudiantes, incluso el primer día de la semana suelen llevar mas dinero que el último dia de la semana ya que el fin de semana se aprovecha para vender en el caso urbano los productos de la finca cómo café, plátano, granadilla etc.

3.4.4.2 *Proceso de matematización y modelo matemático*

En esta situación es complejo tratar de obtener un modelo matemático que genere resultados matemáticos que sean coherentes con los resultados reales ya que no hay una relación estricta en la mesada diaria que reciben los estudiantes. Es pertinente entonces analizar la situación a través del ciclo de modelación modificado para tratar de obtener una situación seudorreal que involucre la función de proporcinalidad como modelo matemático.

3.4.4.3 *Proceso de contextualización y situación sudorreal*

Esta situación puede transformarse en una situación seudorreal si se asume que los estudiantes reciben una mesada estricta de 500 pesos diarios durante todo el año.

3.4.4.4 *Proceso de matematización y modelo matemático*

En este caso, el dinero se puede considerar como una magnitud discreta donde su cantidad de magnitud se puede modelar a través de los números naturales que son múltiplos de la unidad monetaria mínima en circulación, la cual es de 50 pesos, la cantidad de días de estudio se puede considerar como una magnitud discreta con su cantidad de magnitud modelada por los números naturales. La mesada depende de los días de estudio, por tanto, se puede asociar los días de estudio con la variable independiente x y la mesada correspondiente con la variable dependiente $f(x)$. Se tiene entonces que a 1 día corresponden 500 pesos, a 2 días corresponden 1000 pesos y así sucesivamente. Con estas consideraciones el modelo matemático corresponde a una función de proporcionalidad, donde la fórmula algebraica que permite calcular la variable dependiente es:

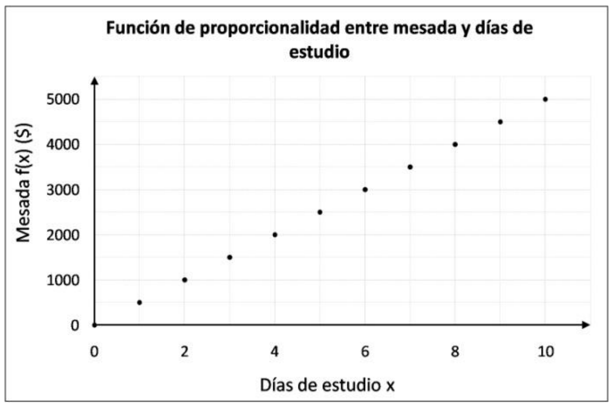
$$f(x) = 500x, x \in N$$

La representación cartesiana de este modelo se muestra en la figura 27.

3.4.4.5 *Resultados matemáticos y resultados reales*

Este modelo matemático permite obtener resultados matemáticos que son coherentes con los resultados reales que se obtienen en la situación seudorreal, por ejemplo, el punto de coordenadas (4 , 2000) significa que a 4 días de estudio corresponde una mesada de 2000 pesos.

Figura 27. Representación cartesiana de la función de proporcionalidad entre la mesada y los días de estudio



3.4.5 Análisis de la situación cantidad de minutos a celular y precio

3.4.5.1 *Descripción de la situación real*

Esta situación está inmersa en el contexto de la venta de minutos a celular. Los estudiantes saben que cada minuto a celular tiene un costo de 150 pesos. Es importante tener en cuenta que para establecer el costo de la llamada, el tiempo es aproximado por exceso al minuto siguiente ya que se tienen en cuenta además de los minutos, los segundos.

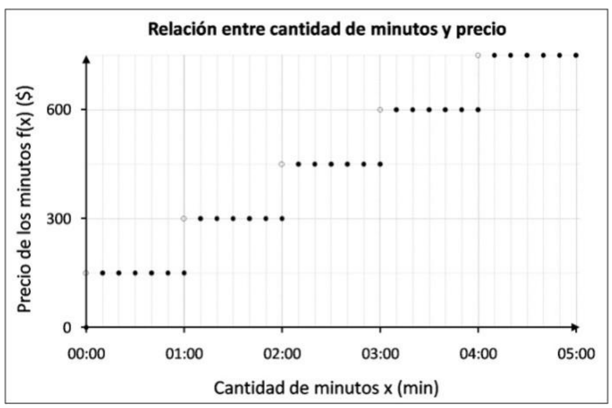
3.4.5.2 *Proceso de matematización y modelo matemático*

En este caso, se tiene que entre 1 y 60 segundos se aproximan a 1 minuto y el costo es de 150 pesos, entre 1 minuto 1 segundo y 2 minutos el precio es de 300 peso y así sucesivamente. Se tiene entonces una relación entre el tiempo de la llamada, el cual se puede considerar como una magntud discreta cuya cantidad de magnitud se puede modelar a través de los números en base sesenta o sexagesimal y el precio de la misma, el cual, se puede considerar como una magnitud discreta cuya cantidad de magnitud se puede modelar a través de los números naturales, asdemás, primero se aproxima por exceso al minuto siguiente y este resultado se multiplica por 150 pesos. El precio de la llamada depende del tiempo en el cual ésta se realiza, de modo que se puede asociar el tiempo que dura la llamada con la variable independiente x y el precio correspondiente con la variable dependiente *f(x)*. El modelo matemático en este caso corresponde a una función cuya expresión algebraica es:

$$f(x) = [\![x]\!] + 00{:}01{:}00, x \text{ escrito en horas, minutos y segundos}$$

Es importante tener en cuenta también que, lo usual es expresar la cantidad de magnitud tiempo con cantidades numéricas en el sistema sexagesimal, por tanto para un estudiante tiene más sentido la expresión 00:01:15 minutos que 1,25 minutos aunque signifiquen lo mismo. La representación cartesiana del modelo matemático en el cual se hace uso de esta forma usual de expresar la cantidad de tiempo se muestra en la figura 28.

Figura 28. Representación cartesiana del modelo matemático acerca de la relación entre la cantidad de minutos y el precio



3.4.5.3 *Resultados matemáticos y resultados reales*

Como se puede observar en la representación cartesiana de este modelo matemático, los resultados matemáticos coinciden con los resultados reales, por ejemplo el punto de coordenadas (01:20 , 300) significa que una llamada que tiene una duración de 1 minuto y 20 segundos tiene un costo de 300 pesos y esto es lo que realmente sucede en la situación real. Es pertinente entonces analizar dicha situación a través del ciclo de modelación modificado para tratar de obtener una situación seudorreal que involucre una función de proporcionalidad como modelo matemático.

3.4.5.4 *Proceso de contextualización y situación seudorreal*

En esta situación es pertinente asumir que el tiempo de la llamada es estrictamente medido en cantidades múltiplos de 1 minuto, de modo que 1 minuto cuesta 150 pesos, 2 minutos cuestan 300 pesos y así sucesivamente.

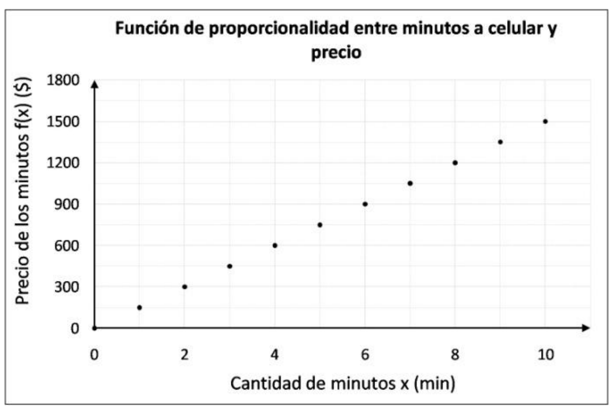
3.4.5.5 *Proceso de matematización y modelo matemático*

Si se tiene en cuenta la consideración anterior se tiene una relación de correlación directa entre la duración de la llamada y el precio respectivo. Además, la cantidad de tiempo puede modelarse a través de los números naturales y deja de lado la consideración de los números escritos en base sesenta para expresar el tiempo de la llamada. Se obtiene entonces como modelo matemático una función de proporcionalidad donde la variable dependiente puede calcularse a través de la expresión algebraica:

$$f(x) = 150x, x \in N$$

La representación cartesiana de este modelo matemático se muestra en la figura 29.

Figura 29. Representación cartesiana de la función de proporcionalidad entre la cantidad de minutos y el precio



3.4.5.6 *Resultados matemáticos y resultados reales*

Este modelo matemático permite obtener resultados matemáticos que coinciden con los resultados reales que se obtienen de la situación seudorreal, por ejemplo el punto de coordenadas (6, 900) significa que 6 minutos tienen un costo de 600 pesos.

3.5 SITUACIONES QUE INVOLUCRAN MAGNITUDES CONTINUAS

En esta sección se analizan tres situaciones, las cuales relacionan magnitudes continuas y se tratará de establecer si son modeladas por la función lineal o si se requiere hacer un análisis a través del ciclo de modelación modificado para obtener una situación seudorreal que la involucre.

3.5.1 Análisis de la situación acerca de la relación entre la cantidad de pintura y la cantidad de agua

3.5.1.1 *Descripción de la situación real*

Esta situación tiene como contexto la actividad de pintar las paredes de los salones por parte de los estudiantes al iniciar el año lectivo o en cualquier otra época del año, los estudiantes saben que 5 galones de pintura deben ser diluidos en 5 galones de agua para luego si proceder a pintar las paredes. Es importante aclarar que la relación 5 galones de agua para 5 galones de pintura es un caso particular, pues ésta puede cambiar dependiendo del tipo de pintura que se utilice, algunas vienen mas concentradas que otras lo que implica utilizar mayor o menor cantidad de agua para diluir. Además es posible que a la hora de agregar el agua ésta no sea medida rigurosamente ya que generalmente se hace uso de la estimación y esto puede afectar un poco la relación. Es posible también que intencionalmente se agregue un poco mas de agua para pintar paredes que estén en buenas condiciones y se agregue menos agua para pintar paredes que estén muy deterioradas. Vale la pena decir que la pintura se consigue en los lugares que la expenden en cantidades que son múltiplos de la unidad mínima comercial, la cual, corresponde a $\frac{1}{32}$ de galón.

3.5.1.2 *Preceso de matematización y modelo matemático*

En este caso, se puede pensar que aunque el volumen de pintura como el volumen de agua para diluir son magnitudes continuas y absolutas donde la cantidad de magnitud de cada una puede ser modelada a través de los números reales, en la realidad, es más usual cuantificar la pintura en cantidades múltiplos de $\frac{1}{32}$ de galón por ser la unidad mínina comercial, esto hace que el volumen de pintura se suponga como una magnitud discreta, pues no tiene sentido por ejemplo la expresión $\sqrt{2}$ galones de pintura, de modo que, su cantidad de magnitud puede entonces ser modelada por los números racionales. Otro hecho importante es que los estudiantes cuando van a diluir el agua y la pintura pueden aumentar o disminuir la cantidad de agua para diluir, lo cual, afecta la relación que se da entre estas dos magnitudes. De modo que, es complejo tratar de obtener un modelo matemático que genere resultados coherentes con los resultados reales ya que existen algunos aspectos o variables difíciles de controlar o de cuantificar. Es pertienente entonces analizar la situación a través del ciclo de modelación modificado para tratar de establecer una situación seudorreal que involucre la función lineal.

3.5.1.3 *Proceso de contextualización y situación seudorreal*

Esta situación real se puede transformar en una seudorreal, para ello, es necesario asumir que es posible diluir cualquier cantidad de pintura con cualquier cantidad de agua teniendo en cuenta que para 5 galones de pintura son necesarios 5 galones de agua y que los estudiantes tienen la capacidad de medir exactamente cualquier cantidad de volumen tanto de agua como de pintura.

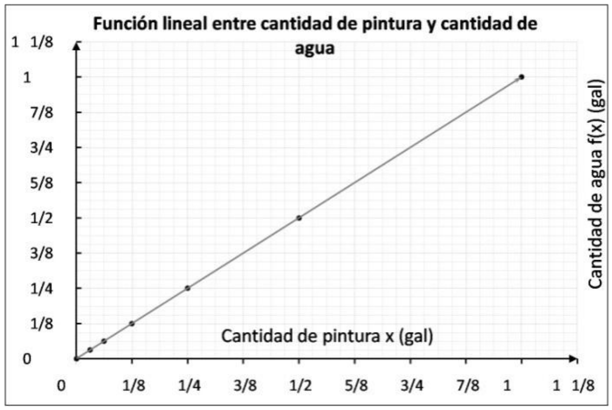
3.5.1.4 *Proceso de matematización y modelo matemático*

Con estas consideraciones es puede establecer una relación de correlación directa entre estas dos magnitudes continuas y absolutas cuya cantidad de magnitud se puede modelar a través de los números reales positivos, donde la cantidad de agua depende de la cantidad de pintura; de modo que se puede asociar la cantidad de pintura con la variable independiente x y la cantidad de agua con la variable dependiente $f(x)$. Así que, a 1 galón de pintura le corresponde 1 galón de agua, a 2 galones de pintura le corresponden 2 galones de agua etc. Es claro que El modelo matemático es entonces una función lineal donde la fórmula algebraica que permite calcular la variable dependiente es:

$$f(x) = x, x \in R^{+}$$

La representación cartesiana se presenta en la figura 30.

Figura 30. Representación cartesiana de la función lineal entre la cantidad de pintura y la cantidad de agua



3.5.1.5 *Resultados matemáticos y resultados reales*

Como se puede observar en la representación cartesiana, este modelo matemático permite obtener resultados matemáticos que coinciden con los resultados reales que se obtienen en la situación seudorreal, sin embargo, muchos de estos puede que no sucedan en la situación real.

3.5.2 Análisis de la situación acerca de el área de la pared y la cantidad de pintura

3.5.2.1 *Descripción de la situación real*

Esta situación tiene el mismo contexto de la situación anterior sólo que ahora se quiere estudiar la relación entre el área de pared a pintar y la cantidad de pintura necesaria, los estudiantes saben que 5 galones de pintura diluida alcanzan para pintar 50 metros cuadrados de pared. Sin embargo, en la práctica se desperdicia pintura tanto en las herramientas que se utilizan para pintar como brochas, rodillos, aerógrafos entre otros, como en la que se pierde por goteo. Además la acción de pintar una pared implica que en las zonas mas sucias o manchadas se debe aplicar más pintura y en las zonas limpias se debe aplicar menos pintura, es decir la pintura no se distribuye uniformemente sobre la pared.

3.5.2.2 *Proceso de matematización y modelo matemático*

En esta situación se tiene que tanto el volumen de pintura como el área de la pared son magnitudes continuas absolutas cuya cantidad de magnitud puede modelars a través de los números reales positivos. Sin embargo, es complejo tratar de construir un modelo matemático que permita obtener resultados matemáticos coherentes con los resultados reales que se obtienen en la situación real porque existen varios factores que afectan la relación 5 galones de pintura para pintar 50 metros cuadrados de pared. Es pertienente entonces analizar la situación real através del ciclo de modelación modificado para tratar de obtener una situación seudorreal que involucre una función lineal como modelo matemático.

3.5.2.3 *Proceso de contextualización y situación seudorreal*

Esta situación se puede transformar en una situación seudorreal si se supone que la pintura se distribuye de manera uniforme sobre toda la pared y que no se desperdicia pintura mietras se pinta la pared.

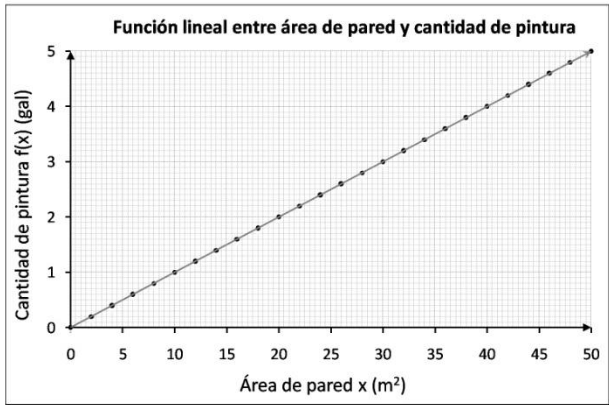
3.5.2.4 *Proceso de matematización y modelo matemático*

Se tiene entonces una relación de correlación directa entre dos magnitudes continuas y absolutas, donde la cantidad de pintura depende de la cantidad de pared que se necesita pintar, de modo que, se puede asociar la variable independiente *x* con la cantidad de pared y la cantidad de pintura con la variable dependiente *f(x)*. Es claro entonces que a 50 metros cuadrados de pared le corresponden 5 galones de pintura, a 10 metros cuadrados de pared le corresonden 1 galón de pintura, a 5 metros cuadrados de pared le corresponde $\frac{1}{2}$ galón de pintura y así sucesivamente. Con estas consideraciones se puede establecer una función lineal como modelo matemático donde la fórmula algebraica que permite calcular la variable dependiente es:

$$f(x) = \frac{1}{10}x, x \in \ R^{+}$$

La representación cartesiana de este modelo matemático se muestra en la figura 31.

Figura 31. Representación cartesiana de la función lineal entre el área de pared y la cantidad de pintura



3.5.2.5 *Resultados matemáticos y resultados reales*

Como se puede observar en la representación cartesiana el modelo matemático permite obtener resultados matemáticos que coinciden con los resultados reales que se obtienen en la situación seudorreal, por ejemplo, el punto de coordenadas (20 , 2) significa que para pintar 20 metros cuadrados de pintura se necesitan 2 galones de pintura. Sin embargo, muchos de estos resultados no son coherentes con los resultados que se obtienen en la situación real.

3.5.3 Análisis de la situación acerca de la relación entre las vueltas de una llanta y la posición sobre la carretera

3.5.3.1 *Descripción de la situación real*

En esta situación, el contexto tiene que ver con los carros que prestan el servicio de transporte escolar, importa en este caso estudiar la relación que existe entre el número de vueltas que da una llanta del vehículo y su posición sobre la carretera, donde en cada vuelta completa de la llanta cambia su posición aproximadamente en 3.67 metros.

3.5.3.2 *Proceso de matematización y modelo matemático*

Para este caso se tiene que la posición de una llanta en la carretera está directamente relacionada con su giro. La llanta al girar sobre su eje se desplaza sobre la carretera, cuando la llanta hace un giro completo se desplaza una distancia igual a su perímetro, el cual es aproximadamente de 3.67 metros. La cantidad de vueltas que da la llanta se puede pensar como una magnitud continua y relativa ya que si el vehículo marcha hacia adelante la llanta gira en sentido positivo, pero si el vehículo marcha hacia atrás la llanta gira en sentido negativo. La posición de la llanta sobre la carretera es una magnitud vectorial y hasta el momento sólo se ha definido la relación de proporcionalidad o lineal para magnitudes escalares, de modo que no se puede construir un modelo matemático que permita obtener resultados matemáticos coherentes con los resultados reales que se obtienen en esta situación real. Es pertienente entonces analizar la situación a través del ciclo de modelación modificado y tratar de construir una situación seudorreal que involucre la función lineal como modelo matemático.

3.5.3.3 *Proceso de contextualización y situación seudorreal*

Es posible transformar esta situación real en una seudorreal si se supone que el vehículo se puede desplazar unicamente sobre una carreta recta, donde no tiene la posibilidad de patinar, es decir, la fuerza de rozamiento entre la llanta y la carretera es infinita y que parte de una posición inicial correspondiente a 0 giros y por tanto a 0 metros de posición sobre la carretera.

3.5.3.4 *Proceso de matematización y modelo matemático*

Como el desplazamiento del vehículo es sobre una recta, se tiene que la posición de la llanta es una magnitud vectorial en una demensión, es decir, en una dirección y en ambos sentidos, por tanto, la suma de vectores es la suma usual de números reales y el producto de un escalar por un vector es el producto usual de números reales. La cantidad de vueltas que da llanta sobre su eje se puede asumir como una magnitud continua y relativa cuya cantidad de magnitud se puede modelar a través de los números reales. Se tiene entonces que para 1 vuelta hacia adelante corresponden 3.67 metros de posición sobre la carretera, para 2 vueltas hacia adelante corresponden 7.34 metros de posoción sobre la carretera. Si por el contrario la llanta gira hacia atrás por ejemplo, si gira -1 vuelta la posición correspondiente sera de -3.67 metros, si gira -2 vueltas la posición correspondinte será de -7.34 metros y así sucesivamente. Como la posición de la llanta depende de la cantidad de vuelta entonces se puede asociar la cantidad de vueltas con la variable independiente x y la posición sobre la carretera con la variable dependiente $f(x)$.Con estas consideracione se puede construir una función lineal como modelo matemático donde la fórmula algebraica que permite expresarla es:

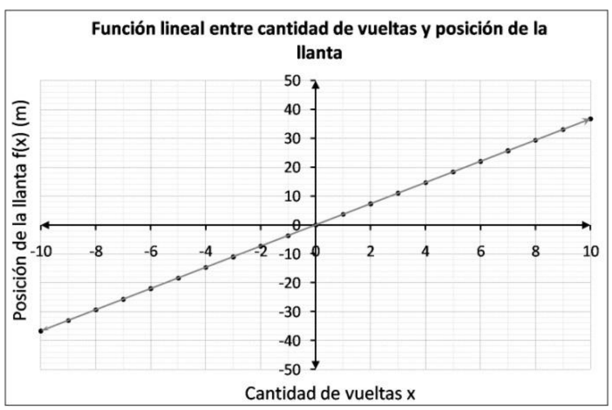
$$f(x) = 3.67x, x \in R$$

La representación cartesiana de este modelo matemático se muestra en la figura 32.

3.5.3.5 *Resultados matemáticos y resultados reales*

Como se puede observar en la representación cartesiana el modelo matemático permite calcular resultados matemáticos aproximados a los que se producen en la situación seudorreal ya que se ha considerado que la llanta es circular lo cual sólo puede ser cierto teoricamente, además esto implica calcular el perímetro de una circunferencia de radio 23 pulgadas y se sabe que la relación entre pulgadas y metros involucra el uso de números irracionales, lo cual , afecta de nuevo los resultados y finalmente hay que considerar el número irracional *pi* en forma aproximada para poder hacer los cálculos respectivos.

Figura 32. Representación cartesiana de la función lineal entre la cantidad de vueltas y la posición de la llanta



4. ANÁLISIS DE RESULTADOS

4.1 INTRODUCCIÓN

En este apartado el propósito es mostrar los resultados que se obtienen del análisis de las situaciones cotidianas presentes en la vida de los estudiantes. Para ello primero se presentan tres tablas en las que se sintetiza las características de cada una de las situaciones analizadas y segundo, con base en esta información se comentan los resultados que se consideran relevantes en este conjunto de situaciones.

Estos resultados tienen que ver tanto con el modelo matemático que se obtiene al analizar las situaciones a través del ciclo de modelación de Blum (2005) como con el modelo matemático que se obtiene al analizar las situaciones a través del ciclo de modelación modificado.

Tabla 1. Síntesis de siutaciones que involucran magnitudes discretas

No.	Situación	Ciclo de modelación de Blum	Ciclo de modelación modificado
1	Tamales - Hojas de Plátano	***Situación real:***Se producen a partir de 50 tamales. 50 Tamales requieren 15 hojas de plátano. Las hojas se consiguen por atados de 15 hojas. Las hojas son de diferente tamaño y calidad. ***Matematización y modelo matemático:*** Función escalonada $f(x) = \begin{cases} \llbracket x \div 50 \rrbracket \times 15, \text{si residuo}(x \div 15) = 0 \\ (\llbracket x \div 50 \rrbracket + 1) \times 15, \text{si residuo}(x \div 15) \neq 0 \end{cases}$ $x \in N \wedge x \geq 50$ *x* es cantidad de tamales; *f(x)* escantidad de hojas de plátano. ***Resultados matemáticos y resultados reales:*** Los resultados matemáticos coinciden con los resultados reales.	***Contextualización y situación seudorreal:***Se pueden producir tamales a partir de 0.Sólo se pueden producir cantidades de tamales múltiplos de 50.Todas las hojas son de igual tamaño y calidad. ***Matematización y modelo matemático:*** $f(x) = \frac{15}{50}x, x \in N \wedge x$es múltiplo de 50 ***Resultados matemáticos y resultados reales:*** Los resultados matemáticos coinciden con los resultados de la situación seudorreal. Dejan de lado muchos resultados reales de la situación real.
2	Tamales - Arroz	***Situación real:***Se producen a partir de 50 tamales.Se requiere 1 (lb) de arroz por cada 7 tamales.Si la cantidad de tamales no es múltiplo de 7, la cantidad de arroz se obtiene con el múltiplo de 7 más cercano por exceso o por defecto. El arroz se consigue en cantidades que son múltiplos de la unidad mínima comercial 1 (lb). ***Matematización y modelo matemático:***función escalonada $f(x) = \begin{cases} \llbracket x \div 7 \rrbracket, si\ 0 \leq \text{residuo de}(x \div 7) < 4 \\ \llbracket x \div 7 \rrbracket + 1, \text{si residuo de}(x \div 7) \geq 4 \end{cases}; x \in N \wedge x \geq 50$ *x* es cantidad de tamales; *f(x)* escantidad de arroz. ***Resultados matemáticos y resultados reales:*** Los resultados matemáticos coinciden con los resultados reales.	***Contextualización y situación seudorreal:*** Se pueden producir cantidades de tamales a partir de 0.Sólo se pueden producir cantidades de tamales múltiplos de 7. ***Matematización y modelo matemático:*** $f(x)=\frac{1}{7}x,\ x \in N \wedge x$ es múltiplode 7 ***Resultados matemáticos y resultados reales:*** Los resultados matemáticos coinciden con los resultados de la situación seudorreal. Dejan de lado muchos resultados reales de la situación real.
3	Tamales - Huevos	***Situación real:***Se producen a partir de 50 tamales.Cada tamal debe contener un huevo cocido. ***Matematización y modelo matemático:*** $f(x) = x, x \in N \wedge x \geq 50$ *x* es cantidad de tamales; *f(x)* escantidad de huevos. ***Resultados matemáticos y resultados reales:*** Los resultados matemáticos coinciden con los resultados reales.	***Contextualización y situación seudorreal:*** Se pueden producir cantidades de tamales a partir de 0. ***Matematización y modelo matemático:*** $f(x) = x, x \in N$ ***Resultados matemáticos y resultados reales:*** Los resultados matemáticos coinciden con los resultados de la situación seudorreal. Produce muchos otros que no son resultados reales de la situación real.

No.	Situación	Ciclo de modelación de Blum	Ciclo de modelación modificado
4	Estudiantes - Raciones	***Situación real:*** Hay que contar los estudiantes para saber cuántos almuerzos se hacen. En total hay 296 estudiantes pero no todos van diariamente. Una ración de carne para cada estudiante. ***Matematización y modelo matemático:*** $f(x) = x, x \in N \wedge 0 \leq x \leq 296$ *x* es cantidad de estudiantes; *f(x)* escantidad de raciones. ***Resultados matemáticos y resultados reales:*** Los resultados matemáticos coinciden con los resultados reales.	***Contextualización y situación seudorreal:***Pueden almorzar cualquier cantidad de estudiantes. ***Matematización y modelo matemático:*** $f(x) = x, x \in N$ ***Resultados matemáticos y resultados reales:*** Los resultados matemáticos coinciden con los resultados de la situación seudorreal. Produce muchos otros que no son resultados reales de la situación real.
5	Guayaba-Helados	***Situación real:*** 1 guayaba para 5 helados.Los moldes no son iguales. Las guayabas no son del mismo tamaño y calidad. ***Matematización y modelo matemático:***No se puede obtener modelo matemático. ***Resultados matemáticos y resultados reales:*** No hay resultados matemáticos.	***Contextualización y situación seudorreal:***Se asume que las guayabas son de igual tamaño y calidad. Se asume que los moldes son iguales. ***Matematización y modelo matemático:*** $f(x) = 5x, x \in N$ *x* es cantidad de guayaba; *f(x)* escantidad de helados. ***Resultados matemáticos y resultados reales:*** Los resultados matemáticos coinciden con los resultados de la situación seudorreal.
6	Helados - Leche	***Situación real:*** 50 helados requieren 1 bot leche. La leche se consigue por cantidades que son múltiplos de la unidad mínima comercial 1 (bot). 1 (bot) de leche se puede fraccionar en octavos por estimación. ***Matematización y modelo matemático:*** Función escalonada $f(x) = \begin{cases} [\![x \div 50]\!] \text{si residuo de} (x \div 50) = 0 \\ [\![x \div 50]\!] + \frac{1}{4}, \text{si } 0 < \text{residuo de } (x \div 50) \leq 12 \\ [\![x \div 50]\!] + \frac{1}{2}, \text{si } 12 < \text{residuo de } (x \div 50) \leq 25; x \in N \\ [\![x \div 50]\!] + \frac{3}{4}, \text{si } 25 < \text{residuo de } (x \div 50) \leq 37 \\ [\![x \div 50]\!] + 1, \text{si } 37 < \text{residuo de } (x \div 50) \leq 49 \end{cases}$ *x* es cantidad de leche; *f(x)* escantidad de helados. ***Resultados matemáticos y resultados reales:*** Los resultados reales son aproximados a los que se obtienen en la situación real.	***Contextualización y situación seudorreal:***Sólo se pueden hacer cantidades de helados múltiplos de 50 unidades. ***Matematización y modelo matemático:*** Se obtiene una función de proporcionalidad. $f(x) = \frac{1}{50}x, x \in N$ ***Resultados matemáticos y resultados reales:*** Los resultados matemáticos coinciden con los resultados de la situación seudorreal.
7	Naranjas - Jugo	***Situación real:*** 6 naranjas para 1 vaso de jugo. Las naranjas son de diferente tamaño y calidad. ***Matematización y modelo matemático:***No se puede establecer modelo matemático.	***Contextualización y situación seudorreal:***Se asume que las naranjas son de igual tamaño y calidad. Los vasos son iguales. ***Matematización y modelo matemático:***

No.	Situación	Ciclo de modelación de Blum	Ciclo de modelación modificado
		x es cantidad de naranjas; *f(x)* escantidad de vasos de jugo. ***Resultados matemáticos y resultados reales:*** No hay resultados matemáticos.	$$f(x) = \frac{1}{6}x, x \in N$$ ***Resultados matemáticos y resultados reales:*** Los resultados matemáticos coinciden con los resultados de la situación seudorreal.
8	Fotocopias - minutos	***Situación real:***30 fotocopias por minuto. En realidad el tiempo de fotocopiado depende muchos factores como tipo de alimentación de las hojas, nivel de tinta, etc. ***Matematización y modelo matemático:*** No se puede establecer modelo matemático. *x* es cantidad de minutos; *f(x)* escantidad de fotocopias. ***Resultados matemáticos y resultados reales:*** No hay resultados matemáticos.	***Contextualización y situación seudorreal:***Se asume que la fotocopiadora funciona en condiciones ideales. ***Matematización y modelo matemático:*** $$f(x) = 30x, x \in N$$ ***Resultados matemáticos y resultados reales:*** Los resultados matemáticos coinciden con los resultados de la situación seudorreal.
9	Área - Café	***Situación real:***4500 árboles para 1 (ha) de tierra. La cantidad de área se obtiene por estimación. Se pueden estimar cantidades múltiplos de un octavo de (ha). a terrenos parecidos se les puede asignar la misma cantidad de área. ***Matematización y modelo matemático:***A Terrenos similares se les pueden asignar la misma cantidad de área y a todos les corresponde la misma cantidad de árboles de café. Aunque el áreaes una magnitud continua en este caso se asume como discreta ya que solo se pueden estimar cantidades múltiplos de $\frac{1}{8}$ (ha) y se asocia con variable independiente *x*.Cantidad de árboles de café se asume como magnitud discreta y se asocia con la variable dependiente *f(x)*.Como la estimación es subjetiva es complejo tratar de obtener un modelo matemático. ***Resultados matemáticos y resultados reales:*** No hay resultados matemáticos.	***Contextualización y situación seudorreal:***Se asume que con la cantidad de árboles se obtiene la cantidad de área, de modo que a 0 árboles le corresponden 0 (ha), a 4500 árboles le corresponde 1 (ha), a 2250 árboles le corresponde $\frac{1}{2}$ (ha) y así sucesivamente. ***Matematización y modelo matemático:*** Con esta consideraciones Cantidad de árboles de café se asume como magnitud discreta y se asocia con la variable independiente*x*.El áreaes una magnitud continua cuya cantidad de magnitud en hectáeas (ha) se puede modelar a través de los números reales y se asocia con variable dependiente.*f(x)*.Se obtiene una función de proporcionalidad. $$f(x) = \frac{1}{4500}x, x \in N$$ ***Resultados matemáticos y resultados reales:*** Los resultados matemáticos coinciden con los resultados de la situación seudorreal.
10	Ganado - Sal	***Situación real:*** Para 5 reses se requieren 3 (lb) de sal. Esta relación no es estricta. Para obtener la cantidad de sal respectiva, los estudiantes obtienen la cantidad de sal requerida por aproximación al múltiplo de 5 mas cercano por exceso o por defecto ya que la sal se consigue en cantidades múltiplos de la unidad mínima comercial 1 (lb). ***Matematización y modelo matemático:***Función escalonada	***Contextualización y situación seudorreal:***Se asume sólo se pueden alimentar cantidades de reses múltiplos de 5. ***Matematización y modelo matemático:*** $$f(x) = \frac{1}{5}x, x \in N$$

No.	Situación	Ciclo de modelación de Blum	Ciclo de modelación modificado
		$$f(x) = \begin{cases} [\![x \div 5]\!] \times 3, si\ residuo\ de\ (x \div 3) \leq 2 \\ ([\![x \div 5]\!] + 1) \times 3, si\ residuo\ de\ (x \div 3) \geq 3 \end{cases}$$ *x* es cantidad de reses; *f(x)* escantidad de sal. ***Resultados matemáticos y resultados reales:*** Los resultados matemáticos coinciden con los resultados reales.	***Resultados matemáticos y resultados reales:*** Los resultados matemáticos coinciden con los resultados de la situación seudorreal. Deja de lado muchos otros que se dan en la situación real.
11	Cerdos - Purina	***Situación real:***Por cada cerdo son necesarios 2 (kg) de purina. Esta relación es estricta ya que si no se cumple se afecta la rentabilidad del negocio. ***Matematización y modelo matemático:***Se obtiene una función de proporcionalidad. $$f(x) = 2x, x \in N$$ *x* es cantidad de cerdos; *f(x)* escantidad de purina. ***Resultados matemáticos y resultados reales:*** Los resultados matemáticos coinciden con los resultados reales.	***Contextualización y situación seudorreal:*** No se requiere análisis a través del ciclo de modelación modificado porque el modelo matemático que se obtiene en la situación real corresponde a una función de proporcionalidad.

Tabla 2. Síntesis de situaciones que involucran la magnitud dinero

No.	Situación	Ciclo de modelación de Blum	Ciclo de modelación modificado
12	Bombones - Precio	***Situación real:*** Un bombón cuesta 250 pesos. Es posible que hayan promociones o descuentos dependiendo de la cantidad de bombones que se compren. ***Matematización y modelo matemático:*** No se puede establecer un modelo matemático. *x* es cantidad de bombones; *f(x)* esprecio. ***Resultados matemáticos y resultados reales:*** No hay resultados matemáticos.	***Contextualización y situación seudorreal:***No se tienen en cuenta promociones ni descuentos. ***Matematización y modelo matemático:*** $$f(x) = 250x, x \in N$$ ***Resultados matemáticos y resultados reales:*** Los resultados matemáticos coinciden con los resultados de la situación seudorreal. Deja de lado muchos otros que se pueden dar en la situación real.
13	Agua-Precio	***Situación real:*** 1 metro cúbico de agua tiene un precio de 329 pesos. En la factura se registra la cantidad de agua en cantidades múltiplos de 1 metro cúbico. ***Matematización y modelo matemático:***Se obtiene una función de proporcionalidad.	***Contextualización y situación seudorreal:*** No se requiere análisis a través del ciclo de modelación modificado porque el modelo matemático que se obtiene en la situación real corresponde a una función de proporcionalidad.

No.	Situación	Ciclo de modelación de Blum	Ciclo de modelación modificado
		$$f(x) = 329x, x \in N$$ *x* es cantidad de agua; *f(x)* esprecio. ***Resultados matemáticos y resultados reales:*** Los resultados matemáticos coinciden con los resultados reales. El precio de la cantidad de agua no coincide con el valor a pagar de la factura, pero si es uno de los rubros que se tiene en cuenta para establecerlo.	
14	kWh - Precio	***Situación real:*** 1 kWh tiene un precio de 386.08 pesos. En la factura se registra la cantidad de kWh en cantidades múltiplos de 1 kWh. ***Matematización y modelo matemático:***Cantidad de kWh aunque es una magnitud continua porque se refiere a la potencia eléctrica, se asume como discreta y se asocia con la variable independiente*x*, el precio se asume como una magnitud discreta cuya cantidad de magnitud se puede modelar a través de los números racionales y se asocia con la variable dependiente *f(x)*.Se obtiene una función de proporcionalidad. $$f(x) = 386.08x, x \in N$$ ***Resultados matemáticos y resultados reales:*** Los resultados matemáticos coinciden con los resultados reales. El precio de la cantidad de kWh no coincide con el valor a pagar de la factura, pero si es uno de los rubros que se tiene en cuenta para establecerlo.	***Contextualización y situación seudorreal:*** No se requiere análisis a través del ciclo de modelación modificado porque el modelo matemático que se obtiene en la situación real corresponde a una función de proporcionalidad.
15	Días - Mesada	***Situación real:*** A cada estudiante le corresponden 500 pesos de mesada diaria. Esta relación no es estricta, es posible que algunos días la mesada sea mayor, menor e incluso nula. ***Matematización y modelo matemático:***No se puede establecer un modelo matemático porque la relación no es estricta para todos los días. *x* es cantidad de días; *f(x)* esmesada. ***Resultados matemáticos y resultados reales:*** No hay resultados matemáticos.	***Contextualización y situación seudorreal:***Se supone que la relación es estricta para todos los días. ***Matematización y modelo matemático:*** $$f(x) = 500x, x \in N$$ ***Resultados matemáticos y resultados reales:*** Los resultados matemáticos coinciden con los resultados de la situación seudorreal. Deja de lado muchos otros que se pueden dar en la situación real.
16	Minutos a celular - Precio	***Situación real:*** Cada minuto tiene un precio de 150 pesos. Si el tiempo de la llamada no corresponde a una cantidad múltiplo de 1 (min) se aproxima al minuto siguiente y luego se obtiene el precio. ***Matematización y modelo matemático:***Cantidad de minutos se asume como magnitud discreta cuya cantidad de magnitud se puede	***Contextualización y situación seudorreal:***Se supone que la duración de una llamada corresponde a cantidades que son múltiplos de la cantidad mínima correspondiente a 1 (min). La cantidad de minutos se deben expresar haciendo uso de los números naturales. ***Matematización y modelo matemático:*** Se obtiene una función de

No.	Situación	Ciclo de modelación de Blum	Ciclo de modelación modificado
		modelar a través de los números escritos en base sesenta con el segundo como unidad mínima posible y se asocia con la variable independiente*x*, el precio se asume como una magnitud discreta y se asocia con la variable dependiente *f(x)*. Función escalonada $$f(x) = [\![x]\!] + 01{:}00, x \text{escrito en minutos y segundos}$$ ***Resultados matemáticos y resultados reales:*** Los resultados matemáticos coinciden con los resultados reales.	proporcionalidad. $$f(x) = 150x, x \in N$$ ***Resultados matemáticos y resultados reales:*** Los resultados matemáticos coinciden con los resultados de la situación seudorreal. Deja de lado muchos otros que se pueden dar en la situación real.

Tabla 3. Síntesis de situaciones que involucran magnitudes continuas

No.	Situación	Ciclo de modelación de Blum	Ciclo de modelación modificado
17	Pintura - Agua	***Situación real:*** A 5 (gal) de pintura corresponden 5 (gal) de agua para diluir. Esta relación no es estricta, es posible que se agregue mas o menos por parte del estudiante. La unidad mínima de pintura corresponde a $\frac{1}{32}$ (gal). ***Matematización y modelo matemático:***Cantidad de pintura se asume como magnitud discreta cuya cantidad de magnitud se puede modelar a través de los números racionales múltiplos de $\frac{1}{32}$ y se asocia con la variable independiente*x*, la cantidad de agua se asume como una magnitud discreta y se asocia con la variable dependiente *f(x)*. No se puede establecer un modelo matemático. ***Resultados matemáticos y resultados reales:*** No se obtienen resultados matemáticos.	***Contextualización y situación seudorreal:***Se supone que la cantidad de pintura es una magnitud continua y absoluta cuya cantidad de magnitud se pude modelar a través de los números reales positivos. La cantidad de agua se asume que también es una magnitud continua y absoluta. ***Matematización y modelo matemático:*** Se obtiene una función lineal. $$f(x) = x, x \in R^+$$ ***Resultados matemáticos y resultados reales:*** Los resultados matemáticos coinciden con los resultados de la situación seudorreal. Deja de lado muchos otros que se pueden dar en la situación real.
18	Área - Pintura	***Situación real:*** Para pintar 50 (m^2) se requieren 5 (gal) de pintura. Se desperdicia pintura en los instrumentos y en el goteo lo cual hace que la relación no sea estricta sino aproximada. ***Matematización y modelo matemático:*** El área de la pared es una magnitud continua y absoluta cuya cantidad de magnitud se pude modelar a través de los números reales. La volumen de pintura es una magnitud continua y absoluta cuya cantidad de magnitud se pude modelar a través de los números reales positivos. de pared tiene que ver con el área de se pintura se asume como magnitud	***Contextualización y situación seudorreal:***Se supone que la cantidad de agua es una magnitud continua y absoluta. La cantidad de pintura es una magnitud continua y absoluta cuya cantidad de magnitud se pude modelar a través de los números reales positivos. ***Matematización y modelo matemático:*** Se obtiene una función lineal. $$f(x) = \frac{1}{10}x, x \in R^+$$

No.	Situación	Ciclo de modelación de Blum	Ciclo de modelación modificado
		discreta cuya cantidad de magnitud se puede modelar a través de los números racionales múltiplos de $\frac{1}{32}$ y se asocia con la variable independiente*x*, la cantidad de agua se asume como una magnitud discreta y se asocia con la variable dependiente *f(x)*. No se puede establecer un modelo matemático. ***Resultados matemáticos y resultados reales:*** No se obtienen resultados matemáticos.	***Resultados matemáticos y resultados reales:*** Los resultados matemáticos coinciden con los resultados de la situación seudorreal. Deja de lado muchos otros que se pueden dar en la situación real.
19	Vueltas - Posición	***Situación real:***Una vuleta completa cambia la posición sobre la carretera aproximadamente 3.67 metros. La carretera no es recta, el perímetro de la llanta es aproximada pues involucra el número pi. ***Matematización y modelo matemático:***La posición es una magnitud vectorial. No se puede obtener modelo matemático. ***Resultados matemáticos y resultados reales:*** No se obtienen resultados matemáticos.	***Contextualización y situación seudorreal:***Se supone que la llanta sólo se puede desplazar sobre una carretera recta. La fuerza de rozamiento es infinita. Parte de una posición inicial. ***Matematización y modelo matemático:*** La posición aunque es una magnitud vectorial, por ser en una dimensión se puede asumir como una magnitud continua y relativa. La cantidad de vueltas también es una magnitud continua y relativa donde su cantidad de magnitud se puede modelar por los números reales. Se obtiene una función lineal. $f(x) = 3.67x, x \in R$ *x* es cantidad de vueltas; *f(x)* esposición. ***Resultados matemáticos y resultados reales:*** Los resultados matemáticos coinciden con los resultados de la situación seudorreal. Deja de lado muchos otros que se pueden dar en la situación real.

4.2 RESULTADOS OBTENIDOS

La mayoría de las situaciones reales analizadas a la luz del ciclo de modelación de Blum (2005) no tienen como modelo matemático las funciones de prorpocionalidad o lineal, pues en la realidad de los estudiantes existen muchos factores o variables que las afectan o modifican continuamente. Es necesario entonces realizar dicho análisis a través del ciclo de modelación modificado para establecer condiciones, hacer convenciones acerca de dichos factores o variables a fin de que el modelo matemático inmerso sean las funciones de proporcionalidad o lineal. Sin embargo, al establecer condiciones o hacer convenciones se modifican en muchos casos aspectos esenciales de la situación real, generando pérdida de significados que pueden ser importantes cuando se le propongan actividades a los estudiantes.

De las 16 situaciones reales que involucran magnitudes discretas solo 3 tienen como modelo matemático la función de proporcionalidad, las demás deben ser analizadas a través del ciclo de modelación modificado para que a través del proceso de contextualización se obtenga una situación seudorreal que involucre dicha función como modelo matemático. Igualmente 5 tienen como modelo matemático la función escalonada. Parece que hay cierta afinidad entre la función de proporcionalidad y la función escalonada, es decir, aunque el propósito ha sido detectar las funciones de proporcionalidad o lineal en situaciones reales, se ha podido reconocer aquí un importante campo en el cual se pueden encontrar funciones escalonadas que se ajustan de mejor manera a dichas situaciones.

De las 3 situaciones que involucran magnitudes continuas, ninguna tiene como modelo matemático la función lineal, es necesario analizarlas a través del ciclo de modelación modificado para que a través del proceso de contextualización se obtenga una situación seudorreal que involucre la función lineal como modelo matemático.

Una de las situaciones reales analizadas, implica el uso del sistema numérico en base sesenta para su análisis a través del ciclo de modelación de Blum (2005), este asunto no se ha considerado en el marco teórico ya que en éste solo se tienen en cuenta los sistemas numéricos en base diez. Será importante entoces en un trabajo posterior tener en cuenta que la proporcionalidad puede involucrar el uso de sistemas numéricos diferentes a los que se conocen en base diez.

4.3 PERSPECTIVA CRÍTICA DE LOS RESULTADOS OBTENIDOS

Una limitación que se puede identificar en este estudio, es que las situaciones analizadas son particulares de la región donde viven los estudiantes de la Institución Educativa *Las Toldas*, seguramente estas situaciones no serán significativas , ni útiles para estudiantes que vivan en otras zonas, por ejemplo en Bogotá, porque la cotidianidad de ellos es otra.

Algunas de los aportes que se pueden identificar en este estudio son los siguientes:

Conocer el modelo matemático que mejor se ajusta a una situación seudorreal le permite al docente incorporarle a la clase significados asociados a las nociones matemáticas, lo cual, le da un valor agregado al proceso de aprendizaje del estudiante. Además, le permite también determinar el tiempo en el cual dichas nociones deben ser abordadas, por ejemplo, es conveniente tratar situaciones donde se relacionen magnitudes discretas en grados séptimo u octavo donde se estudien por ejemplo los números enteros o los racionales y dejar para cursos posteriores el tratamiento de situaciones que involucren magnitudes continuas ya que se requiere de los números reales para tal estudio.

Conocer de antemano el proceso de modelación de una situción seudorreal, le permite al docente detectar falencias o errores en el proceso que realiza el estudiante, de manera que pueda intervenir oportunamente en su aprendizaje, por ejemplo, es posible que algunos estudiantes tengan dificultades en el proceso de matematización, entonces el docente una vez detecta esta dicultad podrá actuar oportunamente ya que conoce el preceso de antemano, cosa que no ocurrirá si el docente no conoce el proceso de modelación de la situación seudorreal puesta en juego.

El análisis de situaciones cotidianas a través del ciclo de modelación modificado genera un ambiente para el diseño curricular en el que se pueden asociar significados cercanos para los estudiantes, con lo cual, se pueden ofrecer clases que les sean mas interesantes.

Es posible que las situaciones seudorreales que se pueden modelar a través de la función de proporcionalidad, propicien ambientes de aprendizaje acerca de esta noción en grados inferiores, por ejemplo sexto, séptimo u octavo de la educación básica, ya que tienen que ver con el conocimiento de los números naturales, enteros y racionales. Esto implicaría modificar el currículo ya que actualmente dicha noción se propone a partir del grado noveno. Además, si bien el aprendizaje de la noción de función se hace con el uso de los números reales porque posteriormente interesa estudiar nociones como la continuidad de funciones, los límites de funciones, etc. Puede ser más fructífero si dicha noción se empieza a tratar en grados inferiores.

5. CONCLUSIONES

5.1 INTRODUCCIÓN

En este apartado el propósito es plantear algunas ideas que se consideran importantes en el marco de la realización del trabajo innovativo e investigativo, por un lado en lo relacionado con el conocimiento puesto en juego en el trabajo de grado y por otro en lo relacionado con el ejercicio formativo es decir, los aspectos personales tanto del aprendizaje como de las competencias investigativas de quien realiza dicho estudio, por tanto, algunas de estas últimas serán escritas en la primera persona del singular.

5.2 REFLEXIONES ACERCA DE LA MODELACIÓN DE SITUACIONES COTIDIANAS

a) Es importante conocer la cotidianidad de los estudianes

Conocer aspectos de la cotidianidad de los estudiantes le permite al docente diseñar clases que modifiquen las formas usuales de la clase de matemáticas en un sentido semejante la planteamiento de Skovsmose (2000) a través del cual se pretende que los escenarios de investigación sean los que remplacen a los escenarios convencionales pasando del paradigma del ejercicio al paradigma de la investigación.. Por ejemplo, en la situación acerca de la relación entre el área del terreno y la cantidad de árboles de café, es posible proponer activades significativas para los estudiantes de modo que encuentren en las matemáticas una valiosa herramienta para reflexionar y tomar decisiones; en la situación acerca de la relación entre la cantidad de helados y la cantidad de leche, se ve que, aunque en teoría la cantidad de lehce hace referencia al volumen de líquido, el cual, es una magnitud continua, en la realidad es cuantificada por cantidades múlitplos de 1 (bot), esto permite pensar en la complejidad que se tiene a la hora de reflexionar acerca de los números reales, si bien en principio pareciera que por ser una mganitud continua implícitamente están implicados los números reales es claro que en la realidad no son tan visibles y triviales.

b) Las situaciones que en principio son modeladas por funciones de proporcionalidad pueden ser modeladas por funciones escalodanas

La modelación de algunas situaciones que en principio dan indicios de ser de proporcionalidad directa pueden favorecer también la construcción de funciones escalonadas como modelo matemático. Es decir, es posbible que el modelo matemático que mejores resultados matemáticos generesea la función escalonada, sin embargo, al analizarlas en en ciclo de modelación modificado específicamente en el proceso de contextualización se pueden hacer las consideraciones o las convenciones necesarias para que el modelo matemático inmerso sea la función de proporcionalidad. Por ejemplo, en la situación acerca de los tamales y la cantidad de arroz puede ser un buen escenario para estudiar la función escalonada, ya que es el modelo matemático que mejor se ajusta a la situación real, sin embargo, al hacer las consideraciones o convenciones respectivas en el proceso de contextualización se puede obtener una situación seudorreal que involucre la función de proporcionalidad como modelo matemático. Por tanto esta situación favorece de mejor manera el estudio de la función escalonada en lugar de la función de proporcionalidad, ya que los resultados matemáticos que se generan son más coherentes con los resultados reales.

c) El ciclo de modelación modificado es una potente herramienta para el docente o el diseñador de currículo

El ciclo de modelación modificado es una potente herramienta que permite transformar una situación real en una situación seudorreal a través del proceso de contextualización, auque en este trabajo ha sido útil para estudiar las funciones de proporcionalidad y lineal, también puede ser de gran utilidad para estudiar otro tipo de nociones matemáticas. Además permite que el docente o diseñador de currículo tome conciencia o reflexione acerca de lo que sucede en la realidad o en la cotidianidad de los estudiantes y lo que se propone en la clase de matemáticas. Por ejemplo si un docente quiere proponer en la clase una situación como la que tiene que ver con la venta de minutos, el proceso de contextualización en el análisis de la situación a través del ciclo de modelación modificado le permite establcer condiciones o convenciones,una de estas es el hecho de que sólo se pueden hablar cantidades de minutos que sean múltiplos de 1 minuto, lo cual, es una condición de cierta manera exagerada que le quita significado a la situación, pero necesaria para que el modelo matemático inmerso sea la función de proporcionalidad. En el caso de la situación acerca de los tamales y el arroz, el docente o diseñador de currículo en el proceso de contextualización debe tener en cuenta que aunque la masa de arroz es una magnitud continua y absoluta en la realidad los estudiantes la pueden cuantificar en cantidades múltiplos de la unidad mínima comercial correspondiente a 1 (lb). De modo que, el ciclo de modelación modificado y particularmente el proceso de contextualización es de suma importancia porque permite tomar conciencia acerca de las condiciones o convenciones que se deben establecer para obtener el modelo matemático que se quiere estudiar, aunque eso signifique de alguna manera desvirtuar o depurar la situación real.

d) La transposición didáctica no se da sólo desde el saber sabio al saber escolar

Este tipo de análisis de situaciones reales le da una mirada complementaria a la transposición didáctica, pues, ésta se puede ver también como el proceso que se debe realizar desde la cotidianidad de los estudiantes, de modo que se puedan identificar nociones matemáticas inmersas allí y a través del ciclo de modelación modificado contextualizarla para que se puedan proponer en la escuela. Vale la pena decir que este tipo de acciones por parte del docente o del diseñador de currículo permite vincular de una manera más visible las matemáticas escolares con la cotidianidad de los estudiantes. Por ejemplo, en el caso de la situación acerca de la factura de la energía eléctrica o la que tiene que ver con la factura del acueducto, la transposición didáctica vista de esta manera permite estudiar las matemáticas escolares pero desde un contexto real, que tiene sentido y significado para el estudiante. Sin embargo, en esta nueva mirada de la modelación matemática como una forma de transposición didáctica se debe tener en cuenta da su complejidad como lo menciona Villa-Ochoa (2007) aspectos como la determinación de los tipos de magnitud involucrados en una situación real, el análisis de las relaciones entre las magnitudes inmersar en una situación, la generalidad que pueden tener los resultados frente a la particularidad de la situación etc.

e) La función de proporcionalidad puede ser un modelo matemático para conjuntos numéricos que no estén escritos en base diez

Es necesario tener en cuenta que se pueden tener relaciones de proporcionalidad entre magnitudes cuya cantidad de magnitud se puede modelar a través de los sistemas numéricos en base diez, lo cual, ha sido considerado en el marco teórico, pero al analizar las situaciones se ve que es importante considerar cantidades de magnitud que se puedan modelar a través de sistemas numéricos en otras bases. Por ejemplo,en la situación acerca de la venta de minutos, se encontró que es pertinente modelar la magnitud tiempo haciendo uso de los números escritos en base sesenta para poder expresar cantidades como 1 minuto y 20 segundos (00:01:20) en lugar de *1.333*…(min) ó $1.\overline{3}$ (min)ya que el cronómetro de los celulares utiliza este tipo de escritura para el tiempo de la llamada. De modo que para un estudiante es más significativo si la representación cartesiana incorpora este tipo de escritura en lugar de convertirla a la forma decimal.

5.3 REFLEXIONES ACERCA DEL EJERCICIO FORMATIVO

Aunque el trabajo de grado parece el fin último, el propósito mismo del trabajo innovativo e investigativo en la Maestría en Docencia de la Matemática, cuando se mira el programa curricular de la misma se puede advertir que el trabajo de grado es tan solo el medio para logran un fin, el cual, tiene que ver con el desarrollo de competencias en innovación e investigación en educación matemática, es decir, el trabajo de grado es la tarea que se realiza pero detrás de esta hay unas intenciones de fondo. Hacer la tarea es parte del proceso, pero reflexionar un poco acerca de lo que se aprende con esa tarea es otro punto central en el ejercicio formativo. Las siguientes son algunas apreciciones al respecto.

f) Desarrollar un proceso de escritura sistemático

Dentro de las competencias en innovación e investigación vale la pena destacar la relacionada con el desarrollo del proceso de escritura sistemático, el cual, es un ejercicio que implica cuidado en la escritura, que implica atender a detalles de forma pero también de fondo, que implica pensar en que hay un lector que va a leer lo que se escribe, que se le va a comunicar al lector algunas ideas que se piensan, para lo cual hay que construir frases muy claras, detalladas e incluso reiterativas. En resumen, este ejercicio formativo permite desarrollar habilidades para comunicar las ideas desde el punto de vista de lo escrito. Al respecto, en un momento inicial del desarrollo del trabajo de grado se hizo un ejercicio importante al presentar un documento escrito para el boletín Redma de la Universidad del Valle, el cual está en proceso de publicación.

g) Desarrollar habilidades comunicativas orales

En el estudio de la Maestría también he tenido la posibilidad de desarrollar habilidades comunicativas orales y de participación en la comunidad de la educación matemática, pues se hizo un ejercicio muy interesante en el 12 Encuentro Colombiano de Matemática Educativa organizado por la Asociación Colombiana de Matemática Educativa ASOCOLME en la ciudad de Armenia. Allí tuve la oportunidad de realizar una ponencia a propósito de lo realizado hasta el momento en el presente trabajo de grado. Este ha sido uno de los momentos mas intensos en mi labor como docente y como estudiante ya que hasta el momento es la primera y única vez que me expongo plantando algunas ideas ante la comunidad de educación matemática.

h) Desarrollar habilidades para sintetizar ideas

Otro aspecto importante es la necesidad de hacer un ejercicio de síntesis del trabajo de grado para el momentode la sustentación. Presentar de manera sintética es otra de las tareas que nos implica el desarrollo de ciertas compentencias relacionadas con la síntesis de un trabajo, pues allí no se podrá presentar la totalidad del trabajo, será necesario entonces identificar los asuntos más relevantes, los ejemplos más importantes, lo cual exige el desarrollo de habilidades relacionadas con las compentencias en innovación e investigación.

i) Cambiar el estatus implica mayor responsabilidad social

Me parece relevante también comentar que este estudio ha generado sobre mis compañeros de trabajo y sobre mis superiores nuevas expectativas acerca de mi labor como docente de matemáticas. La comunidad empieza a depositar en mi cierta confianza, lo cual, me da un estatus diferente con la responsabilidad social que ello implica. Aparecen entonces nuevos retos, por ejemplo colaborar en la configuración del currículo de matemáticas en mi Institución educativa y en el municipio, liderar la construcción e implementación de experiencias pedagógicas significativas, participar activamente en el comité de área especificamente en lo relacionado con las matemáticas, ayudar en la elaboración del sistema institucional de evaluación entre otros.

j) Cambiar la visión frente a las matemáticas

Un asunto importante también es que he cambiado mi postura frente a la clase de matemáticas, pues, los objetos matemáticos que inicialmente pensé como triviales y absolutos ahora veo que son complejosy con variedad de significados, que no sólo viven en las matemáticas, sino que también están presentes en la cotidianidad de los estudiantes y es allí donde tenemos posibilidades de transformar la matemática escolar con la ayuda de herramientas como la modelación matemática que permita entrelazarlas.

k) Realizar este estudio ha sido un gran logro personal

Quiero resaltar también que este estudio ha sido muy importante para mi vida, particularmente en lo profesional,pues una vez identifiqué que ser docente de matemáticas era mi vocación, me dí a la tarea de mejorar mis conocimientos y mis habilidades para ejercer tan importante labor aunque ello implicara dedicar tiempo extralaboral para poder estudiar. Para ello me ví en la necesidad de incorporarme a la comunidad de educación matemática a través de la Maestría en Docencia de la Matemática, para lo cual, tuve que viajar durante tres semestres académicos, cada fin de semana desde mi lugar de residencia en en el municipio de La Argentina departamento del Huila hacia la ciudad de Bogotá, viaje que tenía aproximadamente una duración de 12 horas por vía terrestre. Ahora, considero que este esfuerzo, el empeño con que he afrontado este estudio, el currículo propuesto y logrado, el profesionalismo que he identificado en mis profesores, cumple mis expectativas iniciales y me deja perplejo ante el océano de conocimiento en el que ahora debo navegar.

6. BIBLIOGRAFÍA

Biembengut, M., & Hein, N. (1997). Modelo, modelación y modelaje: Métodos de enseñanza - aprendizaje de matemáticas. *Revista Epsilon: Revista de la Sociedad Andaluza de Educación Matemática "Thales"*(38), 209-222.

Biembengut, M., & Hein, N. (2004). Modelación matemática y los desafíos para enseñar matemática. *Educación matemática, 16*(002), 105-125.

Blum, W., & Borromeo, R. (2009). Mathematical modelling: Can it be taught and learnt? *Journal of mathematical modelling and application, 1*(1), 45-58.

Borromeo, R. (2006). Theoretical and empirical differentiations of phases in the modelling process. *ZDM, 38*(2), 86-95.

Bosch, M., García, F., Gascón, J., & Ruíz, L. (2006). La modelización matemática y el problema de la matemática escolar. Una propuesta desde la teoría antropológica de lo didáctico. *Educación matemática, 18*(002), 37-54.

Guacaneme, E. A. (2001). *Estudio Didáctico de la proporción y la proporcionalidad: Una aproximación a los aspectos matemáticos formales y a los textos escolares de matemáticas.* Unpublished No publicada, Universidad del Valle, Cali Colombia.

Kaiser, G., & Sriraman, B. (2006). A global survey of international perspectives on modelling in mathematics education. *ZDM, 38*(3).

M.E.N., C. (1975). *Resolución 277 de 1975*. Bogotá: Ministerio de Educación.

M.E.N., C. (1998). *Matemáticas. Lineamientos curriculares*. Bogotá: Ministerio de Educación Nacional.

Skovsmose, O. (2000). Escenarios de investigación. *Revista EMA, 6*(1), 3-26.

Villa-Ochoa, J. A. (2007). La modelación como proceso en el aula de matemáticas. Un marco de referencia y un ejemplo. *Tecno Lógicas*, 63-85.

Villa-Ochoa, J. A. (2010). La Modelación Matemática en el currículo. Elementos para la discusión. *Memoria 11 Encuentro colombiano de matemática educativa*, 167-171.