

**RAZONAMIENTO ESTADÍSTICO EN ESCENARIOS DE
SITUACIONES DE CONJUNTOS DE DATOS CON ESTUDIANTES
DE GRADO SEXTO DE LA ENSD MARIA MONTESSORI**

YENY MARCELA BEJARANO PRIETO

**UNIVERSIDAD PEDAGÓGICA NACIONAL
FACULTAD DE CIENCIA Y TECNOLOGÍA
MAESTRIA EN DOCENCIA DE LAS MATEMÁTICAS
BOGOTÁ, D.C.,
2012**

**RAZONAMIENTO ESTADÍSTICO EN ESCENARIOS DE
SITUACIONES DE CONJUNTOS DE DATOS CON ESTUDIANTES
DE GRADO SEXTO DE LA ENSD MARIA MONTESSORI**

YENNY MARCELA BEJARANO PRIETO

**Trabajo de grado presentado como requisito para optar al título de
Magíster en Docencia de las Matemáticas**

ASESOR

Felipe Fernández



**UNIVERSIDAD PEDAGÓGICA NACIONAL
FACULTAD DE CIENCIA Y TECNOLOGÍA
LICENCIATURA EN MATEMÁTICAS**

BOGOTÁ, D.C.,

2012



UNIVERSIDAD PEDAGOGICA
NACIONAL

Educadora de educadores

FACULTAD DE CIENCIA Y TECNOLOGÍA
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS

ACTA DE EVALUACION DE TESIS DE GRADO

Escuchada la sustentación del Trabajo de Grado titulado "*Razonamiento estadístico en escenarios de situaciones de conjuntos de datos con estudiantes de grado sexto de la ENSD MARIA MONTESSORI*" Presentado por la estudiante:

Yenny Marcela Bejarano Prieto- 2010185003

Como requisito parcial para optar al título de **Magíster en Docencia de la Matemática**, analizado el proceso seguido por la estudiante en la elaboración del Trabajo y evaluada la calidad del escrito final, se le asigna la calificación de **Aprobado** con *cuarenta* puntos. (40)

Observaciones:

En constancia se firma a los 04 días del mes de junio de 2012.

JURADOS

Director(a) del Trabajo: Profesor(a)

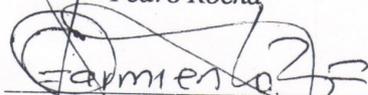

Felipe Fernandez

Jurados:

Profesor(a)


Pedro Rocha

Profesor (a)


Benjamín Sarmiento



**LICENCIA DE SU USO A FAVOR DE LA BIBLIOTECA CENTRAL DE LA
UNIVERSIDAD PEDAGÓGICA NACIONAL**

Bogotá, D.C., 08/06/2012

Señores
Biblioteca Central
Universidad Pedagógica Nacional
Ciudad

Los suscritos:

Yenny Marcela Bejarano Prieto, con C.C. No 1121830891

En mi (nuestra) calidad de autor (es) exclusivo (s) de la obra titulada:
RAZONAMIENTO ESTADÍSTICO EN ESCENARIOS DE SITUACIONES DE CONJUNTOS DE
DATOS CON ESTUDIANTES DE GRADO SEXTO DE LA ESCUELA NORMAL SUPERIOR
DISTRITAL MARIA MONTESSORI

(por favor señalen con una "x" las opciones que apliquen) tesis trabajo de grado x
presentado en el año 2012, por medio del presente escrito autorizo (autorizamos) a la
Biblioteca Central de la Universidad Pedagógica Nacional para que, en desarrollo de la presente
licencia de uso parcial, pueda ejercer sobre mi (nuestra) obra las atribuciones que se indican a
continuación, teniendo en cuenta que en cualquier caso, la finalidad perseguida será facilitar,
difundir y promover el aprendizaje, la enseñanza y la investigación.

En consecuencia, las atribuciones de usos temporales y parciales que por virtud de la presente
licencia se autorizan a la Universidad Pedagógica Nacional, a los usuarios de la Biblioteca
Central, así como a los usuarios de las redes, bases de datos y demás sitios web con los que la
Universidad tenga perfeccionado un convenio, son:

AUTORIZO (AUTORIZAMOS)	SI	NO
1. La conservación de los ejemplares necesarios en la Biblioteca.	X	
2. La consulta física o electrónica según corresponda	X	
3. La reproducción por cualquier formato conocido o por conocer	X	
4. La comunicación pública por cualquier procedimiento o medio físico o electrónico, así como su puesta a disposición en Internet	X	
5. La inclusión en bases de datos y en sitios web sean éstos onerosos o gratuitos, existiendo con ellos previo convenio perfeccionado con la Biblioteca Central de la Universidad Pedagógica Nacional para efectos de satisfacer los fines previstos. En este evento, tales sitios y sus usuarios tendrán las mismas facultades que las aquí concedidas con las mismas limitaciones y condiciones	X	
6. La inclusión en el repositorio digital de la Biblioteca Central de la Universidad Pedagógica Nacional	X	

De acuerdo con la naturaleza del uso concedido, la presente licencia parcial se otorga a título gratuito por el máximo tiempo legal colombiano, con el propósito de que en dicho lapso mi (nuestra) obra sea explotada en las condiciones aquí estipuladas y para los fines indicados, respetando siempre la titularidad de los derechos patrimoniales y morales correspondientes, de

acuerdo con los usos honrados, de manera proporcional y justificada a la finalidad perseguida, sin ánimo de lucro ni de comercialización.

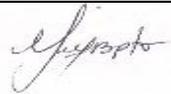
De manera complementaria, garantizo (garantizamos) en mi (nuestra) calidad de estudiante (s) y por ende autor (es) exclusivo (s), que la Tesis o Trabajo de Grado en cuestión, es producto de mi (nuestra) plena autoría, de mi (nuestro) esfuerzo personal intelectual, como consecuencia de mi (nuestra) creación original particular y, por tanto, soy (somos) el (los) único (s) titular (es) de la misma. Además, aseguro (aseguramos) que no contiene citas, ni transcripciones de otras obras protegidas, por fuera de los límites autorizados por la ley, según los usos honrados, y en proporción a los fines previstos; ni tampoco contempla declaraciones difamatorias contra terceros; respetando el derecho a la imagen, intimidad, buen nombre y demás derechos constitucionales. Adicionalmente, manifiesto (manifestamos) que no se incluyeron expresiones contrarias al orden público ni a las buenas costumbres. En consecuencia, la responsabilidad directa en la elaboración, presentación, investigación y, en general, contenidos de la Tesis o Trabajo de Grado es de mí (nuestro) competencia exclusiva, eximiendo de toda responsabilidad a la Universidad Pedagógica Nacional.

Sin perjuicio de los usos y atribuciones otorgadas en virtud de este documento, continuaré (continuaremos) conservando los correspondientes derechos patrimoniales sin modificación o restricción alguna, puesto que de acuerdo con la legislación colombiana aplicable, el presente es un acuerdo jurídico que en ningún caso conlleva la enajenación de los derechos patrimoniales derivados del régimen del Derecho de Autor.

De conformidad con lo establecido en el artículo 30 de la Ley 23 de 1982 y el artículo 11 de la Decisión Andina 351 de 1993, "Los derechos morales sobre el trabajo son propiedad de los autores", los cuales son irrenunciables, imprescriptibles, inembargables e inalienables. En consecuencia, la Universidad Pedagógica Nacional está en la obligación de RESPETARLOS Y HACERLOS RESPETAR, para lo cual tomará las medidas correspondientes para garantizar su observancia.

NOTA: Información Confidencial:

Esta Tesis o Trabajo de Grado contiene información privilegiada, estratégica, secreta, confidencial y demás similar, o hace parte de una investigación que se adelanta y cuyos resultados finales no se han publicado. Si ____ No X. En caso afirmativo expresamente indicaré (indicaremos), en carta adjunta, tal situación con el fin de que se mantenga la restricción de acceso.

NOMBRE COMPLETO	No. del documento de identidad	FIRMA
YENNY MARCELA BEJARANO PRIETO	1121830891	

RESUMEN ANALÍTICO- RAE

TIPO DE DOCUMENTO: Tesis de Maestría.

ACCESO AL DOCUMENTO: Universidad Pedagógica Nacional

TÍTULO: Razonamiento estadístico en escenarios de situaciones de conjuntos de datos con estudiantes de grado sexto de la ENSD María Montessori

AUTOR: Yeny Marcela Bejarano Prieto

PUBLICACIÓN: Bogotá. D. C., Universidad Pedagógica Nacional. 2011

PALABRAS CLAVE: Educación estadística, procesos estadísticos (alfabetización y razonamiento), escenarios para la enseñanza (situaciones de conjuntos de datos), experimentos de enseñanza.

DESCRIPCIÓN: Se implementaron dos secuencias de tareas, pertenecientes al experimento de enseñanza de situaciones de conjuntos de datos propuestos en el proyecto de la línea de investigación en el cual se enmarca esta propuesta. El primero de estos, titulado: “El gasto de Ana en celular”, ya había sido trabajado en otro contexto (otra institución), mientras que el segundo denominado: “venta de minutos de celular”, nunca se había puesto en práctica. El primero tiene como objetivo de aprendizaje ampliar y consolidar ideas en torno a las medidas de tendencia central como posibles representantes adecuados de una distribución de datos. De esta secuencia hacen parte cinco tareas, las primeras tres apuntan a que los estudiantes observen que la media no siempre es una medida de tendencia central que representa adecuadamente la distribución de datos, que cuando hay valores extremos la mediana podría ser la medida que mejor representa la distribución por no verse afectada por aquéllos, o que eventualmente la media es apropiada cuando no se consideran los valores atípicos, dependiendo de si en la situación esto tiene sentido. En la cuarta se busca que el estudiante se aproxime a la media como una medida donde se compensan los excesos de los valores con los defectos con respecto a la media misma. En la tarea cinco se intenta que los estudiantes observen que un valor extremo menor también incide en el valor de la media y por lo tanto no siempre es una medida de tendencia central que representa adecuadamente una distribución de datos.

La segunda secuencia tiene como objetivo de aprendizaje que los estudiantes observen como la dispersión de los datos de una distribución con frecuencias mayores que uno, afecta los valores de las medidas de tendencia central, y por tanto su utilidad como representantes adecuadas. Esta secuencia está formada por seis tareas, cuyas intenciones son: las dos primeras pretenden que el estudiante descubra cómo construir tablas de frecuencias y las construya.

Las dos siguientes apuntan a que los estudiantes se den cuenta de que cuando hay frecuencias mayores que uno para calcular la media se requiere emplear el promedio ponderado; también se espera que con base en el trabajo de los talleres anteriores puedan elegir la medida que mejor representa la distribución de datos de manera justificada, contemplando los datos extremos. Las últimas llevan a los estudiantes a hacer procesos de interpretación y traducción entre la representación tabular y gráfica de una distribución de datos, reconociendo los elementos de una representación en la otra.

FUENTES: Se consultaron diversos documentos entre libros, reportes de investigación y artículos de revistas relacionados con experimentos de enseñanza, y procesos estadísticos.

CONTENIDOS: Se inicia presentando un planteamiento del estudio el cual incluye diversos elementos que permiten contextualizar la propuesta, se presenta el marco conceptual y metodológico, los cuales dan a conocer la postura con la cual se encuentra asociado este estudio, recordando su relación con el proyecto *Experimentos de enseñanza para el desarrollo de razonamiento estadístico con estudiantes de secundaria*, del grupo de investigación en Educación Estadística del Departamento de Matemáticas de la Universidad Pedagógica Nacional.

Se dan a conocer las secuencias de tareas implementadas y las trayectorias hipotéticas de cada una de estas, posteriormente se mencionan los resultados y las conclusiones. Finalmente se reportan las referencias bibliográficas y se muestran en forma de anexos, los escritos de los estudiantes.

METODOLOGÍA: el trabajo de investigación está basado en los experimentos de enseñanza, de ahí, que se planteara la implementación de una secuencia de instrucción conformada por dos secuencias de tareas, cada una con su respectivo objetivo de aprendizaje, proceso hipotético, intencionalidades de tareas e ideas para socialización. Sin embargo se considera que aunque se tuvo en cuenta los lineamientos planteados por los diversos autores, solo se asumieron de manera general, por lo que no se puede decir con firmeza que se ha realizado un experimento de enseñanza tal cual se define en el marco metodológico. Se considera prioritario que en un nuevo intento se tengan en cuenta todos los factores externos que pueden afectar el trabajo en el aula y por ende dificultar el desarrollo correcto y completo de las secuencias de tareas, además de incluir todos los elementos que un verdadero experimento de enseñanza requiere, por nombrar algunos, un testigo de los episodios y disponibilidad de un tiempo suficiente.

CONCLUSIONES: En los distintos momentos de aplicación de las secuencias se evidenciaron diversas dificultades, las cuales se pueden relacionar con: *La actitud de los estudiantes*, vinculado principalmente a la convivencia en el aula. *El trabajo en grupo*, pues desde la versión de los estudiantes es más sencillo “repartir el trabajo” que concretar soluciones a través de las ideas de todos sus integrantes;

se aclara que los grupos fueron conformados máximo de tres estudiantes. *El lenguaje* o los términos empleados en algunas preguntas fueron complejos, ya que no era claro expresiones como “estimar”, “representante”, entre otros. *La lectura* de los enunciados fue un obstáculo, al parecer la mayoría de los estudiantes están acostumbrados a enunciados cortos con una solución numérica, además, se les dificulta culminar la lectura, por lo que en la mayoría de casos no comprenden lo que se les está indagando. Finalmente sus respuestas no referencian argumentos sólidos e incluso se notó apatía a la dinámica de socialización.

Se establece de manera hipotética que las dificultades mencionadas se presentan en un gran porcentaje debido a la “cultura matemática” arraigada en nuestras instituciones. De forma adicional se considera que estas dificultades deben ser vistas como oportunidades, para iniciar nuevos proyectos que conlleven a iniciar transformaciones en el aula, y que logren generar otra cultura en los estudiantes desde grados iniciales.

De otra parte, se encontró que las tareas 1,2,5,6 propuestas en la secuencia “Venta de minutos de celular” fueron más sencillas de responder que las tareas 3 y 4, las cuales requerían de un mayor análisis. La mayoría de los estudiantes en la tarea 3 no culminaron la lectura del enunciado, y a cambio indagaron a la docente por lo que debían hacer o responder en esta.

En cuanto a las secuencias se considera que son una potente herramienta de trabajo cuando la intención es que los estudiantes construyan el conocimiento. Además, se considera que al aumentar esfuerzos por desarrollar trabajo en el aula que indague a los estudiantes se logra que estos sean más propositivos y argumentativos, en cierta forma más analíticos, que procedimentales, sin considerar que esto no sea importante.

Finalmente queda la impresión de que al continuar con secuencias de tareas como metodología de clase se logra que los estudiantes desarrollen mas habilidades de razonamiento, ya que estas permiten indagar por los conceptos que se están trabajando y sustituyen la idea de que los conceptos vienen dados tal cual se exponen en los libros de texto.

FECHA DE ELABORACIÓN DEL RESUMEN ANALÍTICO: 17/04/2012

Para todos los efectos, declaramos que el presente trabajo es original y de mi autoría; en aquellos casos en los cuales hemos requerido del trabajo de otros autores o investigadores, hemos dado los respectivos créditos

CONTENIDO

INTRODUCCION	9
1. PLANTEAMIENTO DEL ESTUDIO	11
1.1 JUSTIFICACIÓN	11
1.2 ANTECEDENTES.....	12
Antecedente 1: Fernández, Andrade y Sarmiento (2010)	12
Antecedente 2: Grahan, Nisbet, Perry y Putt (2001)	18
Antecedente 3: Groth. R. (2003).....	22
1.3 CONTEXTO INSTITUCIONAL.....	24
1.4 PROBLEMA.....	26
1.5 OBJETIVOS.....	28
1.5.1 Objetivo general	28
1.5.2 Objetivos específicos	28
2. MARCO CONCEPTUAL	29
2.1 ALFABETIZACIÓN ESTADÍSTICA.....	29
2.2 RAZONAMIENTO ESTADÍSTICO.....	33
2.3 PENSAMIENTO ESTADÍSTICO	35
2.4 ESCENARIOS PARA LA ENSEÑANZA.....	40
2.4.1 Indicadores para situaciones de conjuntos de datos.....	42
2.5 PERSPECTIVA CURRICULAR.....	44
3. MARCO METODOLOGICO.....	47
3.1 LA CONJETURA EN UN EXPERIMENTO DE ENSEÑANZA.....	48
3.2 LA ORIENTACIÓN TEÓRICA EN UN EXPERIMENTO DE ENSEÑANZA.....	50
3.3 RECOLECCIÓN DE DATOS	51

4. SITUACIONES DE CONJUNTOS DE DATOS.....	52
4.1 SECUENCIA 1: EL GASTO DE ANA EN CELULAR.....	53
4.1.1 Objetivo de aprendizaje.....	53
4.1.2 Proceso hipotético de aprendizaje.....	53
4.1.3 Intención de las tareas	53
4.1.4 Ideas para las socializaciones	53
4.1.5 Secuencia de Tareas	54
4.2 SECUENCIA 2: VENTA DE MINUTOS DE CELULAR.	55
4.2.2 Proceso hipotético de aprendizaje.....	55
4.2.3 Intención de las tareas	55
4.2.5 Secuencia de tareas	56
5. ANALISIS Y PRESENTACION DE RESULTADOS.....	60
7. CONCLUSIONES.....	78
REFERENCIAS	83
ANEXOS.....	86

A mi hijo Alejandro y sobrino Juan Andrés,
para que vean en este trabajo un ejemplo de persistencia.

A mi esposo y familia, por ser mi punto de
apoyo.

INTRODUCCION

Este estudio se enmarca dentro de un proyecto de investigación denominado *Experimentos de enseñanza para el desarrollo de razonamiento estadístico con estudiantes de secundaria*, el cual fue propuesto y desarrollado por la línea de investigación en Educación Estadística del Departamento de Matemáticas de la Universidad Pedagógica Nacional en Bogotá, Colombia, durante los años 2008 y 2009. De manera más precisa, en este estudio se utilizan y acogen algunas de las secuencias de tareas sugeridas por los autores de la investigación anterior relativas a las llamadas ‘situaciones de conjuntos de datos’ (ver Fernández, Andrade y Sarmiento (2010, pp. 28-30)) desde la postura conceptual y metodológica asumida por ellos, para adaptarlas, implementarlas y reportar los resultados de su aplicación en un contexto de enseñanza con características diferentes al reportado por los investigadores citados antes.

El interés por desarrollar este estudio radica principalmente en aportar articulaciones investigativas, funcionales para la construcción, implementación y continuo análisis de estrategias de mejoramiento con relación a la educación estadística en la ENSD María Montessori. De manera adicional se considera que los resultados reportados dan pautas para retroalimentar las secuencias de instrucción que sirvan como base para desarrollar el experimento de enseñanza en otros grupos, validando además otros escenarios interdisciplinarios; se espera así, que con este estudio se motive el desarrollo de nuevas investigaciones encaminadas a capturar el razonamiento de los estudiantes y de esta forma promover nuevas estrategias de enseñanza.

En particular, este estudio reporta los resultados y reflexiones obtenidos en un nuevo contexto, atendiendo y revisando los indicadores que hacen operativos y le dan significado a los conceptos de alfabetización, razonamiento y pensamiento estadístico en la muestra de estudiantes que participaron en este estudio, al desarrollar la secuencia de tareas propuesta.

El trabajo se divide en seis capítulos, el primero presenta un planteamiento del estudio que describe el interés y la motivación que guiaron su desarrollo. Además, se presenta la problemática y la contextualizando del estudio.

En el segundo capítulo se expone el marco conceptual que se hereda y adapta del proyecto de la línea de investigación en Educación Estadística ya citado. Específicamente, se detalla la postura conceptual alrededor de los procesos de alfabetización, razonamiento y pensamiento estadístico y el escenario

de enseñanza de situaciones de conjuntos de datos en el que se desarrolló el estudio.

En el tercer capítulo se da a conocer el marco metodológico, en donde se reconoce la metodología de experimentos de enseñanza, como una forma de acercar la investigación a la práctica docente. Sin embargo, se aclara que la utilización de la misma es tan solo aproximada ya que aunque se tienen en cuenta los lineamientos generales que la describen, no se puede satisfacer todos los requisitos que la caracterizan. La experiencia y los resultados de este estudio no se consideran como un auténtico experimento de enseñanza.

En el cuarto capítulo se presenta las secuencias de tareas propuestas a los estudiantes. Dichas tareas hacen parte de las trayectorias hipotéticas de aprendizaje (objetivo de aprendizaje, proceso hipotético de aprendizaje, intención de las tareas, ideas para las socializaciones, y tareas propuestas) de cada una de estas.

En el quinto capítulo se describen los resultados. Inicialmente, se hace un recuento de lo acontecido durante las diferentes sesiones. Posteriormente, se organiza en una tabla los resultados encontrados de una manera más sistemática; en dicha tabla se presentan los indicadores evidenciados como respuesta a cada una de las tareas propuestas, así como comentarios relativos a las respuestas que aclaran o complementan aspectos que fueron observados durante la implementación. La tabla incluye ejemplos de respuestas de los estudiantes y la cantidad de grupos que expresan de manera semejante la idea ilustrada en el ejemplo, es decir la frecuencia de respuestas similares. En tercer lugar, después de los resultados presentados en la tabla descrita antes, se exponen algunas observaciones adicionales y por último, se concluye con otra tabla que sintetiza los indicadores evidenciados y permite identificar las tareas en las que éstos se hicieron visibles.

Para terminar, en el sexto capítulo se exponen las conclusiones del estudio realizado.

1. PLANTEAMIENTO DEL ESTUDIO

1.1 JUSTIFICACIÓN

En nuestro ejercicio docente es común encontrar estudiantes que indagan por la aplicación de los conceptos matemáticos trabajados en el aula de clase, por lo que fácilmente se observa como las instituciones asumen esta inquietud como un reto e intentan dirigir esfuerzos por estrategias que permitan cambiar la visión al parecer estática y abstracta de las matemáticas, una de estas y quizás más común es el desarrollo de proyectos interdisciplinarios y/o transversales, ya que estos permiten al estudiante reconocer el papel de las matemáticas en las diversas áreas de conocimiento. En esta estrategia ha jugado un papel importante la estadística, ya que esta se ha convertido en un campo efectivo para describir con exactitud valores de datos económicos, políticos, sociales, psicológicos, biológicos y físicos, y sirve como herramienta para relacionar y analizar dichos datos (MEN, 2004).

La Estadística juega un papel importante en la formación de un ciudadano de manera general, ya que además de ser útil para la vida futura, el trabajo y el tiempo libre; contribuye al desarrollo personal, fomentando el desarrollo de las capacidades intelectuales y generales, y ayuda a comprender otros temas del currículo, por las posibilidades que brindan de interrelacionar diferentes temas o materias. (Blanco, M; 2003)

Reconociendo tal importancia de la educación estadística en nuestra vida cotidiana, se indaga por los diferentes aspectos que allí se involucran, encontrando prioritariamente a los procesos estadísticos, los cuales se estructuran a partir de componentes que se fundamentan en la recolección, procesamiento, representación e interpretación de grupos de datos, los que interrelacionados permiten inferencias de problemas y situaciones de la vida del escolar (Blanco, M; 2003). Los procesos estadísticos que aquí se asumen están relacionados con la alfabetización, razonamiento y pensamiento, los cuales se precisaran en el marco conceptual. De manera adicional, es necesario indicar que aunque estos procesos no sean mencionados de manera clasificatoria, si se mencionan de manera general en los lineamientos curriculares, los cuales plantean como propósito central de la educación matemática para los niveles de básica y media, contribuir al desarrollo del pensamiento matemático a partir del trabajo con situaciones problemáticas provenientes del contexto sociocultural, de otras ciencias o de las mismas matemáticas, haciendo alusión que para ello es necesario fomentar el desarrollo de diferentes tipos de pensamiento, dentro de los cuales se encuentra el "Pensamiento aleatorio y los sistemas de datos" (MEN, 2004).

Asumiendo la estadística como parte fundamental en la formación de todo ciudadano y reconociendo la importancia que tiene la escuela en este proceso, se

plantea la necesidad de indagar por las formas como está siendo impartida la educación estadística en las instituciones, sin embargo se deja dicha cuestión a otras investigaciones cuyos recursos sean mayores y sus intenciones más profundas. Se considera que los resultados aquí encontrados podrán servir de base para avanzar hacia dichas investigaciones.

De otra parte, esta propuesta asume la metodología de experimentos de enseñanza, pues se considera que éstos juegan un papel importante para mejorar o profundizar los procesos estadísticos en los estudiantes, ya que estos permiten observar de una manera más detallada la manera como estos asimilan los conceptos y permiten realizar un seguimiento a los procesos que están involucrados en el desarrollo de ciertas actividades, lo cual, permite de cierta manera, asumir o retomar estrategias que permitan desarrollar una educación estadística.

Finalmente, al reconocer la importancia de aumentar esfuerzos por mejorar los procesos estadísticos al interior de las aulas de clase y al identificar en los experimentos de enseñanza una metodología pertinente, este estudio tiene la intención de identificar elementos del razonamiento estadístico que se promueven en los estudiantes, al desarrollar ciertas situaciones de conjuntos de datos, las cuales hacen parte de los experimentos planteados en el proyecto dentro del cual se enmarca este.

1.2 ANTECEDENTES

Día tras día se hace más evidente la necesidad de desarrollar diferentes procesos estadísticos ya que este mundo cambiante exige el estudio, trato de información y toma de decisiones que son relevantes para la sociedad. En cierta forma el ciudadano común puede requerir en algún momento de su vida de un razonamiento estadístico que le ayude a leer, interpretar gráficos y tomar decisiones. Este hecho conlleva al aumento de esfuerzos por desarrollar estos procesos en el aula, para lo cual se requiere de estudios e investigaciones que den pautas acerca de la manera como se pueden conceptualizar a nivel educativo; sin embargo, es escasa la investigación en educación estadística respecto al tema puntual aquí tratado, motivo por el cual se presenta como antecedente principal el proyecto de investigación dentro del cual se encuentra enmarcado este estudio, que incorpora la idea de considerar tres tipos de procesos: la alfabetización, el razonamiento y el pensamiento estadístico (Fernández, Andrade y Sarmiento, 2010). Por otra parte, para complementar la revisión del estado del arte respecto a la caracterización de procesos estadísticos, se tuvieron en cuenta dos estudios (Graham, Nisbet, Perry, y Putt (2001) y Groth. (2003)) que abordan experimentos de enseñanza con propósitos similares a los explicitados en Fernández, Andrade y Sarmiento (2010)

Antecedente 1: Fernández, Andrade y Sarmiento (2010)

Este estudio se propuso con el objeto de diseñar, desarrollar y evaluar un conjunto de experimentos de enseñanza relacionados con temas del currículo escolar de

estadística para promover el razonamiento estadístico de un grupo de estudiantes de secundaria. En tres escenarios determinados por situaciones de conjuntos de datos, situaciones de muestreo y situaciones de probabilidad, se considera la distinción hecha por la investigación reciente entre alfabetización, razonamiento y pensamiento estadístico, como procesos que permiten aproximarse a una comprensión más profunda de la enseñanza y aprendizaje de la estadística.

En el estudio se adopta la metodología de los experimentos de enseñanza sugerida en Steffe y Thompson (2000), Lesh y Kelly (2000) y Cobb (2000), por razón, entre otras, de la necesidad de relacionar más directamente el trabajo de los docentes de matemáticas con el de los investigadores en educación matemática, y de contar con herramientas que permitieran un diseño de actividades de clase que se transformara dinámicamente dependiendo del aprendizaje ocurrido. La implementación de las secuencias de instrucción construidas en los experimentos de enseñanza se llevó a cabo en un colegio privado de Bogotá con estudiantes de grado sexto, noveno, décimo y once durante el segundo semestre del año 2008 y el primer semestre de 2009. Debido a diferentes circunstancias no fue posible la participación de los docentes del colegio en el proyecto, motivo por el cual fueron tanto los monitores como los practicantes que colaboraron en el proyecto, los que asumieron el papel de profesores en las clases.

Como productos del estudio vale la pena destacar en primer lugar, el conjunto de indicadores elaborado para darle significado a los procesos de alfabetización, razonamiento y pensamiento estadístico, en el contexto de los tres escenarios ya enumerados; en segundo lugar, las trayectorias hipotéticas de aprendizaje, fundamentadas en esos indicadores, que explicitan hipótesis acerca de la manera como puede evolucionar el aprendizaje de los estudiantes; y finalmente las secuencias de instrucción con las cuales se gestionan las clases, cuyas tareas también se formularon con base en los indicadores y se fueron modificando y afinando durante el desarrollo del proyecto.

El análisis del trabajo de los estudiantes, cimentado igualmente en los indicadores definidos, muestra alguna evolución desde la alfabetización estadística al razonamiento, pero hay solo pocos indicios de pensamiento. Quizás en parte debido a que las tareas propuestas, no estaban deliberadamente dirigidas a esto. En especial, los estudiantes fueron capaces de explicar el efecto de la dispersión de los datos en las medidas de tendencia central en términos de la situación trabajada, hablan de la conveniencia de una muestra para una población particular dependiendo no sólo de su tamaño sino de la manera en que es tomada, en particular hay alguna aceptación del muestreo aleatorio como método apropiado, y reconocen cómo una probabilidad frecuencial converge a la probabilidad clásica a medida que el tamaño de la muestra se incrementa.

Postura Conceptual:

Este estudio se posiciona en un marco conceptual en donde la educación estadística se constituye en su foco central de trabajo. La necesidad de atender tanto a los requerimientos de una práctica pedagógica reflexiva como a los resultados y recomendaciones que aportan disciplinas como la Educación Matemática y la Educación Estadística, nos obliga a revisar conceptualizaciones y desarrollos acerca de lo que significa formarse como un ciudadano competente desde el punto de vista estadístico. En este sentido se hace indispensable examinar la investigación reportada en la literatura de los últimos años, que ha contribuido a darle sentido a las llamados procesos cognitivos de “alfabetización, razonamiento y pensamiento estadístico”, o “statistical literacy, reasoning and thinking” como se reconoce en la literatura en inglés, para referirse a la educación que debe tener un individuo sobre lo estocástico.

La distinción entre estos procesos de alfabetización, razonamiento y pensamiento estadístico, evidencia el esfuerzo de la comunidad de educadores estadísticos por abordar modelos de enseñanza centrados en la comprensión de conceptos estadísticos, para superar enfoques tradicionales donde aun predomina el énfasis en el desarrollo de habilidades, procedimientos y computaciones numéricas, que no favorecen en los estudiantes las acciones de “razonar” o “pensar” de un modo estadístico.

Los conceptos de alfabetización, razonamiento y pensamiento estadístico tenidos en cuenta en esta investigación son los mismos que los adaptados en el marco conceptual del presente estudio.

Consideraciones metodológicas:

Este estudio acoge la propuesta de Canada (2004) de considerar tres escenarios de la estadística para aproximarse a la variación, situaciones de conjuntos de datos, situaciones de muestreo y situaciones de probabilidad, en este estudio se planeó un experimento de enseñanza para cada uno de estos escenarios en un grado escolar diferente de un mismo colegio de Bogotá. Para las situaciones de conjuntos de datos se llevó a cabo un experimento de enseñanza inicial, pero quizás por ser la primera vez que el grupo de investigación usaba la metodología, se presentaron innumerables dificultades en la implementación y por lo tanto, en esta experiencia no se hizo un análisis retrospectivo con el cuidado requerido; se decidió entonces asumirla como una vivencia que contribuyó a la planeación y desarrollo de los siguientes experimentos de enseñanza, y cuyos aportes a mejorar el diseño de la secuencia de instrucción, de la enseñanza, de las socializaciones y de las intervenciones del profesor en clase, fueron fundamentales para el estudio.

Este estudio comenzó con la definición de los objetivos de aprendizaje para cada escenario e inicialmente con el fin de concretar conjeturas que guiaran los experimentos de enseñanza, se precisaron dificultades y resultados reportados en la literatura y confirmados por la experiencia, tales como: las medidas de

tendencia central y de dispersión se trabajan en la escuela básicamente desde una perspectiva de uso de la fórmula, es decir de sustitución de valores y cálculos; el estudio de la dispersión de los datos contribuye a que los estudiantes le den más sentido no sólo a las medidas en sí mismas y a los procesos, sino a la pertinencia de su empleo en distintas situaciones; muchas veces tales tablas de frecuencias y las gráficas se interpretan como representantes de relaciones o funciones entre dos variables; asociar las tablas de frecuencias o gráficas con la representación numérica en forma de lista de los datos, ayuda a la comprensión de la noción de frecuencia y por ende, del promedio ponderado. Empero, ninguna de estas ideas fue lo suficientemente robusta como para tomarla como conjetura y se optó por trabajar con las trayectorias hipotéticas de aprendizaje como guías de los experimentos de enseñanza, en donde las predicciones hechas de cierta manera pueden verse como conjeturas. Así mismo estas trayectorias sufrieron modificaciones a los largo del proyecto con base en lo que se iba encontrando con respecto al aprendizaje.

Se hicieron entonces predicciones sobre las posibles rutas que el aprendizaje debería seguir en las clases y acerca de la evolución del pensamiento de los estudiantes para alcanzar tales objetivos, las cuales se concretaron en una primera versión de los procesos hipotéticos de aprendizaje, y se fueron afinando durante el desarrollo de los experimentos. Adicionalmente, se puntualizaron las intenciones específicas de cada tarea, se determinaron aspectos relacionados con la gestión de clase, en especial con consideraciones relativas a la manera de llevar a cabo la interacción y las socializaciones en clase, y las ideas que se deberían poner en juego en ella.

Así para los tres escenarios contemplados en el estudio, las trayectorias hipotéticas de aprendizaje elaboradas, abarcan los componentes establecidos por Simon (1995), es decir, los objetivos de aprendizaje, las tareas para clase consignadas en talleres y los procesos hipotéticos de aprendizaje. Estas trayectorias se presentan más adelante en este reporte, organizadas por escenario y junto con cada taller.

Desarrollo del estudio

Los experimentos de enseñanza en este estudio se planearon para varias semanas de clase. Infortunadamente hacia el final del periodo escolar se presentaron obligaciones del colegio que impidieron desarrollar las secuencias de instrucción completas. Para el escenario de conjuntos de datos se llevaron a cabo cinco sesiones de clase, durante las cuales solo se alcanzaron a trabajar los dos primeros talleres, y los dos restantes quedaron sin implementar. En las situaciones de muestreo durante las cinco sesiones realizadas se trabajaron, igualmente, dos talleres. Para el escenario de probabilidad se pusieron en juego los tres talleres elaborados, cada uno en una sesión.

Los monitores y practicantes, miembros del equipo de investigación, ejercieron el papel de profesores, pues por diversos motivos no se contó con la

participación de los docentes del colegio en el proyecto. Siguiendo las recomendaciones de Cobb (2000), siempre un investigador estuvo presente en todas las clases de los experimentos de enseñanza junto con varios de los monitores y practicantes, además del que ejercía como profesor; todos participaron en la planeación de las sesiones de clase y de la actuación durante las intervenciones en clase, y en el análisis preliminar, simultáneo y final de los datos. Se realizaron las reuniones cortas con los asistentes a la clase, inmediatamente después de ésta, sugeridas por Cobb (2000), para recoger las impresiones de lo ocurrido y tomar decisiones para la siguiente clase, así como las reuniones semanales con todos los miembros del equipo de investigación para interpretar lo que estaba sucediendo en clase, para discutir y redefinir de manera constante estas interpretaciones y los planes.

Siguiendo las direcciones de (Cobb, 2000), lo sucedido en clase y las actividades que componen las secuencias de instrucción, se revisaron y analizaron continuamente con base en los indicadores que constituyeron el marco interpretativo de trabajo, para informar y afinar las trayectorias hipotéticas de aprendizaje y, en especial, las actividades instruccionales siguientes; es decir, en todo momento se tuvo la disposición a modificar las secuencias ante observaciones no esperadas, tal y como lo sugieren Confrey (2006, citado en Molina, 2006) y Steffe y Thompson (2000).

De acuerdo con Cobb (2000) el proceso de conducir un experimento de enseñanza puede ser caracterizado por el ciclo de desarrollo de una investigación, el cual ocurre en dos niveles distintos, relacionados entre sí; el primero donde, en el proyecto se hizo el ejercicio de pensamiento anticipatorio y de planeación, así como de implementación y revisión de la instrucción día a día, guiados por una teoría envolvente. El segundo nivel más amplio, en el estudio se centró en el examen de la secuencia de instrucción completa; este ciclo abarcó además, el análisis retrospectivo de los datos recogidos en el curso del experimento de enseñanza guiado por el marco interpretativo de trabajo.

Estos dos ciclos coinciden con los dos tipos de análisis sobre los datos recogidos que se llevaron a cabo en el estudio y que son descritos por Confrey y Lachance (2000) y Cobb (2000):

- Análisis preliminar y continuo, que se hace después de cada intervención para diseñar los futuros planes y en el cual las actividades de instrucción son reflexionadas, revisadas y modificadas.
- Análisis final que se realiza al final de la investigación, cuando las clases han terminado y permite construir una historia coherente de la evolución de la conjetura y del pensamiento de los estudiantes. Es un análisis retrospectivo que contempla todo el conjunto de datos recolectado en el curso del experimento de enseñanza; es más lento y consume más tiempo. Según Molina (2006) es una parte crítica de la investigación que persigue detectar los

cambios considerados como aprendizaje o desarrollo de los estudiantes a lo largo del experimento de enseñanza.

Resultados y Conclusiones

Se presenta por cada uno de los escenarios: en primer lugar, se presentan tablas para cada taller implementado, o en el caso de las situaciones de probabilidad, para cada sesión de clase realizada, que reflejan el análisis que se llevó a cabo. Las tablas incluyen los indicadores que conciernen al trabajo propuesto, la interpretación de las respuestas de los estudiantes, ejemplos textuales de tales respuestas y el número de estudiantes, o parejas de estudiantes, que contestaron de manera similar. Se usan convenciones de notación para indicar la pregunta del taller (P1, P2, P3,...) o el video (V1, V2, V3,...) al que corresponden las respuestas. No se exponen en detalle, para ello ir a la fuente principal.

Los resultados de este estudio deben ser comprendidos en las circunstancias particulares que los generan. En especial es importante recalcar que la gestión de la enseñanza fue asumida por estudiantes para profesor de matemáticas que tenían a lo más un año de experiencia docente en otras instituciones escolares y uno o dos semestres de participación en el grupo de investigación en educación estadística, y que aunque las sesiones de clase en donde se desarrolló la experiencia, hicieron parte de los espacios regulares destinados para las clases de matemáticas, a dichos estudiantes no les fueron asignadas calificaciones.

En el escenario de las situaciones de conjuntos de datos, en general cabe destacar algunos de los resultados reportados, que van en concordancia tanto con los objetivos propuestos como con la intención de desarrollar razonamiento estadístico en los estudiantes. En primer lugar, los estudiantes consiguieron dejar a un lado las ideas ya formadas acerca de la media como la medida adecuada siempre y no hacer uso inmediato de ella. En segundo lugar, los ajustes que se van dando en las respuestas de los estudiantes acerca de la utilidad y la representatividad de la media y la mediana, dependiendo de alguna manera de la dispersión de los datos de la distribución. Como síntesis, la evolución de algunos estudiantes a través de los procesos identificados como alfabetización, al razonamiento estadístico, que puede verse en las explicaciones y justificaciones dadas para la selección de las medidas de tendencia central, en las cuales atienden a la situación trabajada pero cada vez más a la estadística, dando cuenta del efecto de la dispersión de los datos en tales medidas.

En cuanto al escenario de las situaciones de muestreo, concepciones de los estudiantes como que los métodos azarosos no son los apropiados para recolectar información fueron cuestionadas. Aunque los logros al respecto, desde el punto de vista del aprendizaje muestran que no todos los estudiantes alcanzan el objetivo de un reconocimiento de la bondad de las muestras aleatorias, si hubo algunos estudiantes que en las sesiones finales de los talleres aportaron evidencias de cambio en este sentido. La experiencia además aportó un mayor conocimiento acerca del pensamiento de los estudiantes sobre temas de muestreo que poco se

abordan en la escolaridad, específicamente en torno a la idea de los estudiantes sobre el azar como totalmente errático sin posibilidad de comportamiento de acuerdo a algún patrón. Hay igualmente indicios de alguna evolución de los estudiantes hacia el razonamiento estadístico que puede verse en términos de las explicaciones y justificaciones que dan para la elección de muestras dependiendo del método y del tamaño.

En el escenario de las situaciones de probabilidad, se resalta como a través del trabajo de los estudiantes se va dando el alcance del objetivo propuesto, con la identificación de dos tipos de asignación de probabilidades y de la relación entre éstas, en el sentido de notar cómo una probabilidad frecuencial converge a la probabilidad clásica a medida que el tamaño de la muestra se incrementa.

Del enfoque conceptual adoptado que pone como telón de fondo los procesos de alfabetización, razonamiento y pensamiento estadístico, emerge un reconocimiento de la utilidad y pertinencia de asumir el reto de desarrollar pensamiento estadístico como el principal propósito de la educación estadística, aun conociendo que implica laboriosos esfuerzos en el diseño e implementación curriculares. Esta aproximación junto con la concreción que se hizo de estos procesos mediante indicadores, hace posible identificar diferentes niveles de complejidad que gradualmente dirigen el desarrollo de la educación estadística. En especial, los resultados muestran que se requiere ahondar en los indicadores que precisan el desarrollo de pensamiento, que no fue fuerte en el proyecto, para también contribuir así a que las secuencias de instrucción lo propicien.

Este proyecto constituye el modelo base del presente estudio, ya que es a partir de este que se plantearon las trayectorias hipotéticas a considerar y se adaptaron según el contexto de la institución; además, se retomo el marco de referencia por considerarse pertinente y coherente con las intenciones de este estudio.

Antecedente 2: Grahan, Nisbet, Perry y Putt (2001)

Información general

En respuesta a la función decisiva que desempeña la información en nuestra sociedad tecnológica, se han hecho llamamientos internacionales para la reforma de la educación estadística en todos los grados. Estas llamadas para la reforma han abogado por un enfoque más generalizado en el estudio de las estadísticas, uno que incluye la descripción, la organización, lo que representa, e interpretar los datos. Esta perspectiva se ha ampliado creando la necesidad de una mayor investigación sobre el aprendizaje y la enseñanza de la estadística, especialmente en los grados de primaria, donde la instrucción se ha centrado casi exclusivamente en gráficos y no en temas más amplios de la entrega de datos (Shaughnessy, Garfield, y Greer, 1996).

A pesar de estos llamados a la reforma, ha habido relativamente poca investigación sobre el pensamiento estadístico de los niños y la investigación aún menos sobre la eficacia de los programas de instrucción en la exploración de datos. Aunque algunos aspectos de pensamiento estadístico de los niños y el

aprendizaje han sido investigados (Cobb, 1999; Curcio, 1987; Curcio y Artz, 1997; De Lange et al, 1993; Gal y Garfield, 1997; Mokros y Russell, 1995), la investigación sobre pensamiento de los estudiantes en estadística es emergente y no bien establecida. La investigación existente sobre pensamiento de los niños ciertamente no se ha desarrollado. En este trabajo, vamos a discutir cómo nuestra investigación ha desarrollado y utilizado un modelo para apoyar la instrucción en la exploración de datos.

Objetivos

(a) examinar la formulación y validación de un marco que describe el pensamiento estadístico de los estudiantes en cuatro procesos

(b) describir y analizar las experiencias pedagógicas con los grados 1 y 2 niños que utilizaron el marco de la instrucción.

Marco de Referencia

En la generación del marco se identificó cuatro procesos estadísticos claves:

1. Describir los datos
2. Organización y reducción de datos
3. Representación de datos
4. Análisis e interpretación de datos

Estos procesos que se describen a continuación fueron modificaciones de los procesos similares identificadas por Shaughnessy et al. (1996). Sobre la base de nuestro trabajo anterior con el sentido de los números (Jones, Thornton, & Putt, 1994) y la probabilidad (Jones, Langrall, Thornton, y Mogill, 1997), el marco también fue formulado en el supuesto de que en los niños de primaria se presentan cuatro niveles de estadística pensar de acuerdo con Biggs y Collis (1991) el modelo de desarrollo general, la estructura de los resultados de aprendizaje observada (SOLO). Estos niveles de pensamiento estadístico se describieron como idiosincrásico, transicional, cuantitativo y analítico, y en un posterior estudio de validación con 20 alumnos destinatarios, 4 de cada uno de los grados 1 a 5, que confirmó la existencia de estos cuatro niveles y refinado de los descriptores de los niños pensando en el Marco.

La descripción de datos incorpora lo que Curcio (1987, Curcio y Artz, 1997) llama "la lectura de los datos". Curcio establece que la lectura de los datos significa la extracción de información explícita en la pantalla, el reconocimiento de las convenciones gráficas y de hacer las conexiones entre el contexto y datos. Con base en esta definición y la investigación anterior (Beaton et al, 1996;. Pereira-Mendoza y Mellor, 1991) se generaron las tareas para evaluar el pensamiento de los niños en este proceso. La organización y la reducción de datos, incorpora las acciones mentales, tales como ordenar, agrupar y resumir datos (Moore, 1997). También implica la reducción de los datos utilizando las

nociones de centro y la dispersión. Algunas de las tareas utilizadas para evaluar este proceso han sido adaptadas de la investigación previa (Strauss y Bichler, 1988; Mokros y Russell, 1995). El tercer proceso, representación de los datos, incorpora la construcción de representaciones visuales que a veces requieren las diferentes organizaciones de los datos.

Varios estudios (Beaton et al., Zawojewski y Heckman, 1997) fueron útiles en la construcción de las tareas de evaluación. Incorpora lo que Curcio (1987) se refiere como "la lectura entre los datos" y "la lectura más allá de los datos." El primero implica el uso de operaciones matemáticas para combinar e integrar los datos, mientras que el segundo requiere que los estudiantes realicen predicciones a partir de los datos pulsando la existente información que no esté expresamente especificado en los datos. La investigación de Curcio (Curcio, 1987; Curcio y Artz, 1996) fue útil para identificar las preguntas de evaluación para este proceso.

Los experimentos de enseñanza

Un experimento de enseñanza se ha definido como una metodología que tiene como objetivo capturar y documentar pensamiento de los estudiantes a través del tiempo (Steffe y Thompson, en prensa). Durante un experimento de enseñanza, los investigadores a desarrollar secuencias de actividades educativas o trayectorias de aprendizaje (Simon, 1995) y analizar el aprendizaje matemático de los estudiantes, como ocurre en la situación social de una clase o un grupo pequeño (Cobb, 1999). En nuestros experimentos de enseñanza, las trayectorias de aprendizaje (objetivos, tareas, y la secuencia esperada de aprendizaje) se basan en el Marco, que también fue utilizado para rastrear cambios en el aprendizaje de los estudiantes durante la intervención. El experimento de enseñanza en el grado 2 compuesto por 9 sesiones de 40 minutos cada uno, y se utilizaron los datos categóricos y numéricos del Proyecto de la clase de Jardín de Mariposas en el contexto de cada sesión. El experimento de enseñanza en el grado 1 consta de 4 sesiones de 40 minutos cada uno y las tareas se basan en un conjunto de datos generados por el "número de dientes de" perdida por los niños de la clase. Todos los niños de ambas clases fueron evaluados antes e inmediatamente después de los experimentos pedagógicos que utilizan el mismo protocolo que se había utilizado para validar el marco.

Análisis y Resultados

Efecto de la experiencia docente: Análisis Cuantitativo. Para el grado 2 de clase, un Wilcoxin Firmado Ocupa el lugar de ensayo (Siegel & Castellan, 1988) reveló un crecimiento significativo entre los niveles de intervención pre y post de los 19 estudiantes en cada uno de los cuatro procesos de pensamiento estadístico: los datos que describen ($p < .001$); la organización y la reducción de datos de datos ($p < .001$), datos que representan ($p < .002$), y el análisis e interpretación de datos ($p < 0,004$). Para el grado 1 clase de 18 niños, la prueba Firmado Ocupa el lugar revelaron un crecimiento significativo en dos de los cuatro procesos estadísticos:

los datos que describen ($P < .01$) y la organización y la reducción de los datos ($p < .02$); los otros dos procesos no producen diferencias significativas.

Efecto de la experiencia pedagógica: el análisis cualitativo. Varios patrones de aprendizaje surgió a partir del análisis de la instrucción y, en particular, un detallado estudio de caso de análisis de 4 estudiantes de destino en cada uno de los grados 1 y 2 clases. Estos patrones de aprendizaje son descritos por proceso estadístico. Con respecto a la descripción de los datos, los niños traen diversos grados de conocimiento previo acerca de los significados y las convenciones asociadas a las pantallas de datos contextuales. Las experiencias con diferentes tipos de datos durante la instrucción parecían centrar su pensamiento y producir descripciones menos idiosincrásicas. Los datos categóricos era más problemático que los datos numéricos. A pesar de que eran reacios a usar papel y lápiz para reorganizar los datos (especialmente datos categóricos), la tecnología resultó ser muy útil para estimular sus estrategias de organización. La dificultad para el profesor es la hora de decidir cómo y cuándo utilizar diferentes representaciones de los niños del centro. Conocimiento de los niños antes de la representación de los datos parece estar limitado por el acceso limitado a la clasificación generalizada y esquemas de organización. Sin embargo, la instrucción de que la tecnología incorporada o el uso de gráficos sin terminar mostraron potencial para estimular el esquema de clasificación de los niños e, ipso facto su capacidad para la construcción de las representaciones. Con respecto al análisis e interpretación de los datos, el pensamiento de los niños, antes de la intervención, fue más normativo sobre las tareas que implicaba la lectura entre los datos que en las tareas que implicaron la lectura más allá de los datos. La intervención permitió detectar algunos problemas inesperados con las tareas que se centraron en la lectura entre los datos y también se puso de relieve la importancia del contexto en relación con las tareas que implicaron la lectura más allá de los datos.

Conclusión

Teniendo en cuenta el conocimiento previo y el crecimiento que los niños se manifestaron en los cuatro procesos estadísticos, no hay evidencia de que pueden acomodar a un enfoque más amplio de exploración de datos. Sin embargo, si la instrucción en la exploración de datos es para alcanzar su pleno potencial en la escuela primaria, hay una necesidad de mayor investigación para construir trayectorias de aprendizaje que unen los diferentes niveles de pensamiento de los niños identificados en el Marco.

Este proyecto permitió visualizar un ejemplo de un experimento de enseñanza relacionado a la misma temática pero en un contexto diferente al de este estudio, lo que de cierta manera amplió la visión alrededor de la forma como se debe ejecutar y desarrollar tareas bajo este modelo metodológico.

Antecedente 3: Groth. R. (2003).

El estudio trata de describir el pensamiento estadístico de los estudiantes de secundaria. Las dos preguntas de investigación que guían el estudio fueron: (i) ¿Cuáles son las características que definen los diferentes patrones de pensamiento de los estudiantes de secundaria estadística dentro de los procesos de describir, organizar y reducir, lo que representa, el análisis y la recopilación de datos? (ii) qué niveles de pensamiento estadístico puede estar asociado con cada uno de los patrones. Con el fin de responder a las preguntas de la investigación dos, estudiantes de secundaria de varios niveles de grado y antecedentes matemáticos y recién graduados de escuela secundaria se les pidió resolver las tareas estadísticas de pensamiento durante las sesiones de entrevista clínica. El modelo cognitivo descrito por Biggs y Collis (1982, 1991) se aplicó en la diferenciación entre los modelos de sofisticación en las respuestas de los estudiantes a las tareas de la entrevista. El estudio ha identificado y caracterizado los niveles de pensamiento que constituyen la base de un marco útil para asesorar a la instrucción, el desarrollo curricular, y una mayor investigación en el área de las estadísticas de la escuela secundaria.

Diseño de la investigación y metodología

El objetivo de este estudio fue el de construir un marco para describir el pensamiento estadístico de los estudiantes de secundaria. Con el fin de lograr ese objetivo se construyó un conjunto de tareas de pensamiento estadístico la cual fue administrada a estudiantes de secundaria y recién graduados de escuela secundaria durante sesiones individuales de una entrevista clínica. Se analizaron los datos de las sesiones de entrevistas clínicas con el fin de identificar y describir los patrones de respuesta. Los diferentes patrones de respuesta se examinaron entonces a la luz de la Biggs y Collis (1982, 1991) marco cognoscitivo.

Diseño del estudio: Un diseño cualitativo fue elegido para el estudio por dos razones principales. En primer lugar, el propósito del estudio fue describir los procesos estadísticos de pensamiento. Un diseño cualitativo se adapta bien a este propósito, ya que los diseños cualitativos permiten investigar los procesos complejos en lugar de sólo los productos finales. En segundo lugar, como lo demuestra la revisión de la literatura, existe poca investigación que se centra específicamente en el pensamiento estadístico de los estudiantes de secundaria.

Resultados y conclusiones

El protocolo de la entrevista que sirvió como instrumento de recolección de datos primarios para el estudio fue diseñado para obtener diferentes grados de sofisticación en los patrones de respuesta a las preguntas que implican describir, organizar y reducir, lo que representa, el análisis y la recopilación de datos. Los patrones de respuesta a las tareas de pensamiento estadístico

Los patrones de respuesta de los diversos grados de complejidad fueron evidentes dentro de cada uno de los cinco procesos de pensamiento estadístico investi

gados. El análisis de los datos de entrevistas conducido a la identificación de tres patrones de dichos productos en el proceso de describir los datos y cuatro patrones tales dentro de la representación de datos. Dentro de cada uno de los procesos de la organización y la reducción, el análisis y la recopilación de datos, hubo varios subprocesos. Cada subproceso tiene su propio conjunto de patrones de respuesta. Por ejemplo, el subproceso de "usar medidas de tendencia central" se encuentra dentro del amplio proceso de organización y la reducción de datos, y cuatro patrones distintos de respuesta fueron identificados por el subproceso. Los procesos el análisis de datos y la recolección están igualmente divididos en subprocesos

En manera de conclusiones el autor expone: los estudiantes desarrollan la capacidad de elegir formas de describir centro y la dispersión que son adecuados para un determinado conjunto de datos, y desarrollan la capacidad de cuantificar el efecto de la transformación de datos tiene en el centro y la dispersión de un conjunto de datos. Los estudiantes desarrollan la capacidad de organizar conjuntos de datos sin formato a lo largo de varias dimensiones relevantes. En lo que respecta a la representación de datos, desarrollan la capacidad de construir representaciones para diferentes tipos de datos, y en un nivel superior de pensamiento construir representaciones múltiples para diferentes tipos de datos. Se desarrollan conceptos de sonido sobre la toma de muestras, mientras que comienzan a ver los conjuntos de datos en forma de agregados en lugar de gráficos de puntos. Conceptos de recolección de datos comienzan a desarrollar dentro del modo, así como los estudiantes comienzan a reconocer la necesidad de llevar a cabo experimentos, empezar a pensar en la importancia de muestras representativas, y comenzar a estudios de crítica a lo largo de las dimensiones concretas.

La transición hacia el modo formal de pensamiento se caracteriza por saltos significativos en el pensamiento abstracto e hipotético. Algunos atisbos de pensar el modo de estadística formal parecen haber sido proporcionada por este estudio. Dentro del proceso de organización y la reducción de datos, algunos estudiantes fueron capaces de aplicar los métodos formales abstractos y válidos para la búsqueda de centros de juegos asimétricos de datos a través de diferentes contextos. Dentro del proceso de análisis de datos, algunos estudiantes utilizan abstractos procedimientos formales para identificar los puntos atípicos en diferentes conjuntos de datos. Algunos utilizan una línea hipotética de mejor ajuste con el fin de ayudar en el proceso de interpolación y la extrapolación de datos de dos variables. Algunos también fueron capaces de hipótesis sobre las variables que intervienen no declarados que podrían influir en la relación entre dos variables que se muestran en un diagrama de dispersión. Dentro del proceso de recopilación de datos, algunos fueron capaces de dar pasos hacia la incorporación de procedimientos formales pertinentes en el diseño de encuestas y experimentos. Todavía queda mucho trabajo para los futuros investigadores a seguir para identificar y caracterizar el pensamiento estadístico en este modo de desarrollo.

Este documento permitió reconocer la existencia de varios modelos para analizar el pensamiento estadístico de los estudiantes con situaciones relacionadas a conjuntos de datos. De alguna forma se considero como sustento para validar el modelo de los indicadores empleados en este estudio.

1.3 CONTEXTO INSTITUCIONAL

La Escuela Normal Superior Distrital María Montessori es una institución de carácter oficial, de calendario A, jornada completa, con un género de población mixto y con sede en el Municipio de Bogotá.

La institución cuenta con dos sedes para su labor educativa, ambas ubicadas en el suroriente de Bogotá, y con una población de preescolar, básica primaria, básica secundaria y media; y el ciclo de formación complementario. La Institución otorga el título de Bachiller con énfasis en Pedagogía y el de Maestro Normalista.

Este estudio es coherente con los objetivos de la institución, ya que dentro de estos se encuentra la formación académica de excelencia de todos los estudiantes en todos los campos de conocimiento, con el fin de que su práctica futura sea realizada con los más altos índices de calidad, colaborando así, a una mejor sociedad.

La institución considera de vital importancia promover la formación integral del estudiante, estableciendo dimensiones de formación, dentro de las cuales las matemáticas están presentes. En la dimensión comunicativa se espera que nuestros jóvenes logren comunicarse utilizando apropiadamente el lenguaje matemático y en la dimensión cognitiva que empleen las matemáticas en la construcción de modelos de mundo. Intenciones que se ven reflejadas en el plan de estudio del área, teniendo como antelación los referentes educativos propuestos por los lineamientos curriculares del MEN, priorizando los cinco pensamientos: numérico, espacial, métrico, aleatorio y variacional.

La planeación para pensamiento aleatorio y sistemas de datos propuesto para la institución es el siguiente:

PRIMERO	SEGUNDO	TERCERO
<ol style="list-style-type: none"> 1. Clasifica objetos de acuerdo a cualidades y atributos. 2. Lee y usa información numérica relacionada con eventos familiares, presentada en tablas y pictogramas. 3. Organiza información numérica relativa a objetos reales o 	<ol style="list-style-type: none"> 1. Lee y usa en la solución de problemas aditivos información numérica relacionada con eventos familiares, presentada en tablas, pictogramas y diagramas de barras 2. Clasifica y organiza información numérica relativa a objetos, 	<ol style="list-style-type: none"> 1. Recoge, organiza y representa (con pictogramas o diagramas de barras) información numérica relativa a eventos escolares o familiares. 2. Resuelve preguntas simples que requieren para su solución recoger y organizar datos del

eventos escolares, (elabora tablas, pictogramas simples).	<p>figuras geométricas o eventos escolares o familiares y la representa usando tablas, pictogramas y diagramas de barras simples.</p> <p>3. Describe situaciones o eventos a partir de un conjunto de datos presentados en una lista o tabla.</p> <p>4. Reconoce posibilidad o imposibilidad de ocurrencia de un evento (en contextos cotidianos o de juego)</p>	<p>entorno próximo. (deporte o comida preferida, programa favorito, número de alumnos, número de hermanos).</p> <p>3. Describe situaciones o eventos a partir de un conjunto de datos presentados en un pictograma o diagrama de barras.</p> <p>4. Compara posibilidad de ocurrencia de eventos (en contextos cotidianos o de juego. (Usando conteo (frecuencia) más o menos posible)</p>
CUARTO	QUINTO	SEXTO
<p>1. Lee y describe información presentada en tablas y gráficos estadísticos (pictogramas, diagrama de barras simples).</p> <p>2. Recoge datos de situaciones cotidianas, los organiza en una tabla y los representa con un diagrama de barras.</p> <p>3. Plantea y resuelve problemas que requieren para su solución recoger y organizar datos del entorno próximo. (deporte o comida preferida, programa favorito, número de alumnos, número de hermanos) o usar información presentada en una tabla o gráfica de barras.</p> <p>4. Identifica moda (dato de mayor frecuencia) de datos relativos a hechos cotidianos.</p> <p>5. Compara posibilidad de ocurrencia de eventos aleatorios (en contextos cotidianos o de juego, utilizando expresiones numéricas (como: tiene el doble de posibilidad, la mitad, la cuarta parte...) según frecuencia dada en una tabla.</p>	<p>1. Lee y describe información presentada en tablas y gráficos estadísticos (pictogramas, diagrama de barras, y diagramas circulares).</p> <p>2. Recoge datos a partir de experimentos aleatorios simples (lanzamiento de una moneda, de un dado, escogencia de un objeto al azar...) y los representa con un diagrama de barras o un diagrama circular.</p> <p>3. Determina moda y promedio de datos relativos a hechos cotidianos presentados en un pictograma, tabla o gráfica de barras.</p> <p>4.</p> <p>5. Resuelve problemas o preguntas que requieren identificar la moda de un conjunto de datos.</p> <p>6. Compara posibilidad de ocurrencia de eventos aleatorios (en contextos cotidianos o de juego, utilizando fracciones simples como $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{4}$... según frecuencia dada en enunciados verbales o en tablas.</p>	<p>1. Reconoce y representa datos obtenidos de distintos medios (encuestas cortas, prensa o recibos de servicios)</p> <p>2. Relaciona conjuntos de datos con su representación y traduce entre diferentes representaciones (diagrama de barras-diagrama de barras-tabla)</p> <p>3. Plantea y resuelve problemas que requieren determinar la moda, la mediana o la media, de conjuntos de datos (discretos) presentados en listas, tablas o gráficas de barras.</p> <p>4. Compara posibilidad de ocurrencia de eventos aleatorios (en contextos cotidianos o de juego, utilizando fracciones según frecuencia dada en enunciados verbales, tablas o gráficas de barras.</p> <p>5. Propone distintas soluciones en situaciones de conteo condicionado (arreglos y combinaciones simples) (domino, dados y barajas)</p>
SEPTIMO	OCTAVO	NOVENO
<p>1. Identifica y relaciona datos obtenidos de distintos medios (encuestas cortas, prensa o recibos de servicios) usando una o varias representaciones adecuadas (acordes al tipo de datos).</p> <p>2. Relaciona conjuntos de datos con su representación y traduce entre diferentes representaciones (diagrama de barras-diagrama de</p>	<p>1. Lee y describe información estadística proveniente de diversas fuentes (prensa, televisión, entrevistas...), presentada en tablas, graficas de barras, diagramas de puntos o líneas o diagramas circulares.</p> <p>2. Relaciona conjuntos de datos de un contexto con formas de representación y reconoce la más adecuada, conforme al tipo de</p>	<p>1. Interpreta analíticamente información estadística proveniente de diversas fuentes (prensa, televisión, entrevistas, experimentos, consultas.), presentada en tablas, graficas de barras, diagramas de puntos, líneas o diagramas circulares.</p> <p>2. Plantea y resuelve problemas que requieren interpretar y diferenciar la moda, la mediana o</p>

<p>barras-tabla, diagrama de barras-diagrama circular.).</p> <p>3. Plantea y resuelve problemas que requieren determinar la moda, la mediana o la media, de conjuntos de datos (discretos o continuos) presentados en listas, tablas, gráficas de barras o diagramas circulares.</p> <p>4. Da significado a la fracción como razón en contextos aleatorios simples (seleccionar al azar un tipo de objeto, seleccionar al azar un individuo de una población...)</p> <p>5. Propone conjeturas sobre eventos aleatorios que requieren conteo condicionado (arreglos y combinaciones simples) usando nociones básicas de probabilidad simple (razón: casos favorables/casos posibles)</p>	<p>datos.</p> <p>3. Plantea y resuelve problemas que requieren seleccionar información relevante de un conjunto de datos dado.</p> <p>4. Plantea y resuelve problemas que requieren determinar la moda, la mediana o la media, de conjuntos de datos, (discretos o continuos) presentados en listas, tablas, gráficas de barras o diagramas circulares, e interpreta el significado de cada una de las medidas en el contexto.</p> <p>5. Compara resultados de experimentos aleatorios simples (secuencia de: lanzamientos de una moneda o dado, elección al azar de un objeto de una urna...) con probabilidad esperada. (casos favorables/casos posibles)</p> <p>6. Calcula probabilidad de eventos simples usando listados, diagramas de árbol, técnicas informales de conteo</p>	<p>la media en distribuciones de distinta dispersión.</p> <p>3. Reconoce tendencias en conjuntos de variables relacionadas (variación precios, monto de importaciones o exportaciones, índices...) presentadas en forma tabular o gráfica.</p> <p>4. Calcula probabilidad de eventos simples o compuestos usando diagramas de árbol o técnicas de conteo (permutaciones, combinaciones).</p> <p>5. Plantea y resuelve problemas que requieren usar conceptos básicos de probabilidad (reconocimiento de espacio muestral, eventos equiprobables y no equiprobables, independencia)</p>
-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------	--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------	----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------

1.4 PROBLEMA

En la actualidad muchas instituciones como la Organización de Naciones Unidas (ONU) y la Organización para la Cooperación y el Desarrollo Económico (OCDE) sienten la necesidad de medir el progreso en la sociedad actual con indicadores estadísticos y ponen a disposición de los ciudadanos toda clase de datos, con la intención de informarles y hacerles partícipes de las decisiones. Sin embargo, existe una dificultad con relación a la comunicación entre estas instituciones y el público a quien se dirigen debido a la falta de la capacidad de las personas de valorar acertadamente la información dada, lo que conlleva a considerar la necesidad de aumentar esfuerzos por formar ciudadanos estadísticamente cultos (Ridgway, Nicholson y McCusker, 2008, tomado de Batanero, Arteaga, Contreras, 2011)

Dada la importancia de la formación estadística de cualquier ciudadano se hizo necesario plantear, desde los lineamientos curriculares a nivel nacional, el desarrollo de pensamiento aleatorio y sistema de datos, dentro de los cuales se pretende que los estudiantes exploren e interpreten los datos, los relacionen con otros, realicen conjeturas, busquen configuraciones cualitativas, tendencias, oscilaciones, tipos de crecimiento, y correlaciones; distinguan correlación de causalidad, las calculen y comprendan su significado; propongan inferencias cualitativas, pruebas de hipótesis, reinterpreten los datos, lean entre líneas, hagan simulaciones, y reconozcan que hay riesgos en las decisiones basadas en inferencias (MEN, 2000).

Es así como en el Distrito Capital en coherencia con los propósitos nacionales, se realizan diversos esfuerzos por involucrar cada vez más la formación estadística en los centros educativos de todo nivel. Sin embargo, aun es común encontrar algunas instituciones en donde los intentos no han dado los frutos suficientes. Este es el caso de la ENSD María Montessori, ya que al hacer un recorrido histórico de la educación estadística impartida en esta institución, se encontró que apenas hace unos años la educación estadística de manera general se ha constituido como un tema de interés, aun así, su formulación en el plan de estudio se desplaza para finales de cada periodo o fin de año, lo que ocasiona que su desarrollo en ocasiones sea mínimo o incluso nulo, teniendo en cuenta que la institución cumple un papel social que produce que se intercambien espacios académicos por otros culturales.

Al hacer una revisión de la planeación del área de matemáticas de esta institución se encontró que uno de los temas al que se le da prioridad con relación a la estadística es precisamente el análisis de datos y las medidas estadísticas, sin embargo al iniciar el trabajo con los estudiantes es evidente dificultades que van desde los cálculos hasta la comprensión de los conceptos de media, moda y mediana, haciéndose más visible la dificultad con respecto a esta última. Teniendo en cuenta que los datos y específicamente las medidas de tendencia central constituyen uno de los principales objeto de estudio, ya que se propone en todos los ciclos, se indago sobre la forma como los estudiantes de esta institución aprenden estos temas, encontrándose que su desarrollo no va más allá de la mecanización del método algorítmico de solución, dadas situaciones siempre similares. Lo anterior no permite que los estudiantes desarrollen habilidades de lectura, interpretación, análisis de información, y mucho menos hagan uso con significado de las medidas de tendencia central. Hecho que conlleva a que el proceso de razonamiento estadístico de los estudiantes sea bajo.

Debido a esta situación y en coherencia con el documento curricular de la institución, el cual menciona que la memorización árida de hechos y destrezas debe dar paso, como lo proponen los lineamientos, al planteamiento y resolución de verdaderos problemas que no se limiten a simples ejercicios de reconocimiento o manipulación algorítmica, sino que propongan contextos abiertos que promuevan mayores y mejores procesos en los estudiantes. Se considera pertinente el cambio en la dinámica de clase, permitiendo que nuevas metodologías logren desarrollar estas habilidades que permitirán a nuestros estudiantes interactuar de manera más sencilla con el mundo que los rodea.

Teniendo en cuenta los aspectos mencionados, se busca que con una metodología de clase diferente, surjan cambios que permitan mejorar la formación estadística en dicha institución, por lo que se propone el trabajo con experimentos de enseñanza. Para ello se aplicaran dos secuencias de tareas con situaciones de datos, relacionadas con las medidas de tendencia central y las cuales ya arrojaron resultados en otros contextos.

De esta manera la pregunta de interés que surge es la siguiente:

¿Qué indicios de razonamiento estadístico se evidencian al aplicar una secuencia de tareas relativa a situaciones de conjuntos de datos que pretenden promover la comprensión de medidas de tendencia central en la Escuela Normal Superior Distrital María Montessori?

1.5 OBJETIVOS

1.5.1 Objetivo general

Reconocer indicadores de razonamiento estadístico que se evidencian en los estudiantes de grado sexto de la ENSD María Montessori al desarrollar situaciones de conjuntos de datos con medidas de tendencia central.

1.5.2 Objetivos específicos

- Revisar conceptualizaciones acerca de la idea de razonamiento estadístico y de experimentos de enseñanza.
- Establecer indicadores para analizar procesos de razonamiento estadísticos en escenarios de situaciones de conjuntos de datos.
- Adaptar y aplicar dos secuencia de tareas con base en los experimentos de enseñanza desarrollados en el proyecto (*Fernández, Andrade y Sarmiento, 2010*)
- Estudiar los indicadores que se hicieron notorios en el desarrollo de las secuencias de tareas.
- Analizar las ventajas de la aplicación de las secuencias de tareas para mejorar el proceso de razonamiento de los estudiantes.
- Aportar a nuevos trabajos de investigación que buscan un fin similar al de este estudio.

2. MARCO CONCEPTUAL

Al hacer una revisión de algunos programas de estudio de instituciones educativas tanto públicas como privadas, se puede observar que la estadística forma parte fundamental de la planeación anual, sin embargo en algunas de estas se encuentran al finalizar cada periodo académico y en otras se resume para fin de año, lo que con la cantidad de actividades culturales, lúdicas y otras que normalmente se realizan en una institución, se hace en ocasiones imposible el desarrollo de las temáticas propuestas; se adiciona a esto la falta de preparación e incluso temor e indiferencia de los docentes de matemáticas a enseñar esta área, dificultades mencionadas por los mismos docentes. Por lo que uno de los intereses de desarrollar esta propuesta es precisamente colaborar a los docentes en mirar nuevas formas de trabajo en el aula, o simplemente dejando cierta inquietud que permita desarrollar nuevas investigaciones en búsqueda de estrategias didácticas que permitan desarrollar en nuestros estudiantes procesos importantes como la alfabetización, razonamiento y pensamiento estadístico. Esto, en coherencia con los estándares mínimos de calidad, los cuales buscan que las instituciones formen a los estudiantes en unos mínimos requeridos para que estos después de su formación media salgan ya sea a continuar sus estudios o a desempeñarse en lo laboral, y puedan hacerlo sin tener mayor dificultad. Aunque la pretensión de este estudio es la de incidir en los tres procesos mencionados, la dimensión del trabajo implicado obliga a delimitar la observación los procesos de alfabetización y razonamiento de los estudiantes. Se considera que el análisis del proceso de pensamiento es más pertinente y relevante en niveles de formación más avanzados.

En este capítulo se mostrará la postura asumida sobre los procesos estadísticos mencionados, los experimentos de enseñanza y las situaciones de conjuntos de datos.

Ante la necesidad de precisar el significado de las ideas de alfabetización, razonamiento y pensamiento para la educación estadística, en las siguientes secciones se bosqueja, con base en la revisión de literatura disponible, puntos de vista que caracterizan tales procesos.

2.1 ALFABETIZACIÓN ESTADÍSTICA

[Batenero \(2002\)](#) sitúa la alfabetización estadística como componente de una enseñanza básica de lo que llama “cultura estadística” al afirmar que en los últimos años se ha venido forjando el término “statistical literacy”, para reconocer

el papel del conocimiento estadístico en la formación elemental. Dice Batanero, citando a [Gal \(2002, pp. 2-3\)](#), que la cultura estadística se refiere a dos aspectos interrelacionados: uno, la capacidad para interpretar y evaluar críticamente la información estadística, los argumentos apoyados en datos o los fenómenos estocásticos que las personas pueden encontrar en diversos contextos, incluyendo los medios de comunicación pero no limitándose a ellos; y el otro, la capacidad para discutir o comunicar sus opiniones respecto a tales informaciones estadísticas cuando sea relevante.

Otros autores proponen caracterizar la “alfabetización estadística” como:

- la “habilidad de la gente para interpretar y evaluar críticamente con argumentos basados en datos, información estadística que aparece en diversos medios, así como para discutir sus opiniones al mirar cuidadosamente dicha información” ([Gal, 2000](#));
- la “comprensión del lenguaje estadístico (palabras, términos, símbolos) y capacidad de interpretar gráficos y tablas y de leer y determinar el significado estadístico dado en los medios de comunicación a noticias, encuestas de opinión, indicadores económicos” ([Garfield, 1999](#));
- la “habilidad para comprender conceptos estadísticos y para razonar en el nivel más básico”. ([Snell, 1999](#));
- la “comprensión del texto y del significado e implicaciones de la información estadística del mismo, en el contexto del tema al cual pertenece” ([Watson, 1997](#)).

Aunque estas definiciones proveen un acercamiento a lo que se quiere significar al referirse a la alfabetización estadística, [Rumsey \(2002\)](#) señala que esta idea tiene una significación amplia y no siempre bien definida. En particular, ella distingue un nivel esencial de alfabetización que se refiere al conocimiento básico que subyace al “pensamiento” y “razonamiento” estadístico, que lo ubica en lo que denomina “competencia estadística”, definida como la capacidad para ser usuario de la información que se recibe diariamente, en el sentido de pensar críticamente acerca de ésta y tomar buenas decisiones basado en dicha información; reserva la expresión “ciudadanía estadística” para aludir al logro más importante de la educación estadística: desarrollar habilidades para desempeñarse como una persona estadísticamente culta, y prepararse para acceder a un razonamiento y pensamiento estadístico de más alto nivel, poner en juego la habilidad científica de indagación, para identificar preguntas, recolectar evidencia en forma de datos, descubrir y aplicar herramientas para interpretar datos y comunicar e intercambiar resultados. Para [Gal \(2000\)](#), el primer nivel está asociado al propósito de llegar a ser un buen “consumidor de información”, mientras que el segundo está relacionado con llegar a ser un buen “productor de información”.

En contraste, [Moore \(1998\)](#) sostiene que la alfabetización estadística está ligada a las ideas estadísticas que deben ser foco de atención en la educación de personas que no requieran ser especialistas, mientras que la competencia estadística debe responder al cuestionamiento sobre qué conceptos y habilidades específicas se necesitan en el contexto de un trabajo específico.

Por su parte, [Watson \(1997\)](#) concibe como metas finales de una alfabetización estadística, tres estadios de desarrollo: el primero, la comprensión básica de la terminología estadística; el segundo, la comprensión del lenguaje estadístico y de los conceptos subyacentes al interior de un contexto amplio de discusión social; y el tercero el desarrollo de una actitud de cuestionamiento con base en la cual se puedan aplicar conceptos más sofisticados para contradecir afirmaciones que son hechas sin un apropiado fundamento estadístico.

En conclusión, en cualquiera de las posturas antes descritas es común la proposición de metas generales para la educación estadística y la sugerencia de establecer niveles de desarrollo, en donde se reconozcan diferencias, tanto en habilidades y conocimientos, como en los contextos en donde pueda tener sentido la utilización de la estadística. Para cerrar esta sección y siguiendo a [Rumsey \(2002\)](#), se describirá un conjunto de componentes relevantes para la alfabetización estadística, advirtiendo de antemano que en algunos casos estos componentes tienen aspectos en común con características que también se le atribuyen al razonamiento y el pensamiento estadístico.

Conciencia acerca de los datos. La conciencia acerca de la importancia de los datos proporciona una motivación para los estudiantes que quieren aprender estadística. Este tipo de conocimiento debe considerar las implicaciones, para la educación, de los siguientes hechos: los datos son parte de la vida diaria y son una componente relevante de todos los aspectos de cualquier trabajo laboral; con frecuencia los datos se utilizan mal y llevan a informaciones erradas; las decisiones que son hechas basadas en datos pueden tener un impacto notorio en nuestras vidas.

Comprensión de lo básico. Aparte de la cuestión sobre cuáles deben ser las nociones y habilidades básicas que se debe considerar en la educación estadística, la discusión de ¿qué significa comprender una idea estadística? y ¿cómo el estudiante debe mostrar comprensión? son preguntas relevantes. La comprensión de una idea estadística implica tener la capacidad de: relacionar el concepto dentro de un área o materia no estadística, explicar que significa el concepto, usar el concepto en una oración o dentro de un problema más general y responder preguntas acerca del mismo. En cuanto al cómo evidenciar la comprensión de un estudiante, se debe procurar la revisión de concepciones erradas que parecen estar presentes en la práctica docente de la estadística; algunos ejemplos de éstas son : 1) la habilidad para realizar cálculos correctos por parte de un estudiante evidencia la comprensión de una idea estadística; 2) el conocimiento y la memorización de fórmulas ayuda a que los estudiantes

comprendan una idea estadística; 3) los estudiantes que pueden explicar cosas en lenguaje estadístico demuestran su comprensión de una idea estadística.

Producción de datos y resultados. Este tipo de conocimiento se refleja en la capacidad de los estudiantes para producir sus propios datos y extraer de ellos resultados. Algunos de los aspectos que pueden caracterizar esta componente son la habilidad para: formular preguntas propias de indagación estadística y ser capaz de responderse las; descubrir o identificar métodos o técnicas de análisis estadístico por sí mismo; e incluso de determinar a partir de las grandes ideas que fundamentan una técnica general de análisis estadístico, la aplicabilidad de un método más particular de análisis en situaciones nuevas. Por otra parte, promover la competencia de los estudiantes acerca de estos aspectos se justifica en términos de las motivaciones e intereses que estas acciones pueden generar en ellos. Por ejemplo, si al estudiante se le da la oportunidad de definir sus propias preguntas de investigación aumentará su motivación para “hacer algo de estadística”, que lo ayude y conduzca a responder sus preguntas. En general, es recomendable considerar problemas y tareas dentro de contextos o situaciones reales o potencialmente reales.

Habilidades básicas de interpretación. La educación estadística debe favorecer la utilización de problemas basados en contextos reales en los que la realización de procedimientos estadísticos no solamente se vea como medio de aprendizaje de técnicas de análisis de datos, sino que implique el desarrollo de habilidades para interpretar información estadística y para extraer conclusiones sobre el problema. Un ejemplo que suele presentarse en la práctica, para ilustrar este asunto, es en el marco de la utilización de las medidas de tendencia central. En los problemas que aparecen en textos escolares frecuentemente sólo le pide al estudiante que determine los valores de la media, la mediana y la moda de unos datos. Sin embargo, los problemas reales exigen una habilidad que va más allá de los meros cálculos o de simples interpretaciones de un resultado estadístico. Los problemas reales de la estadística usualmente implican por parte de quien resuelve el problema, analizar el significado de los resultados y evaluar las posibles consecuencias de una decisión respecto al mismo. Al respecto se sugiere considerar acciones como dar a los estudiantes la oportunidad de interpretar sus propios resultados utilizando sus propios datos, o proporcionar situaciones en las que grupos de estudiantes trabajen en diferentes aspectos de un gran problema dentro de un contexto común. En general, cuando los estudiantes producen resultados estadísticos por sí mismos desarrollan una mejor comprensión de cómo interpretar los resultados.

Habilidades básicas de comunicación. La habilidad estadística básica de comunicación involucra leer, escribir, demostrar e intercambiar información estadística. Esta habilidad se diferencia de la habilidad de interpretación, ya que mientras que ésta última simplemente refleja la propia comprensión de una idea estadística, la comunicación implica pasar la información a otra persona de

manera que la pueda comprender. La clave para desarrollar una buena habilidad de comunicación en nuestros estudiantes, como lo sugiere [Rumsey \(2002\)](#), es exponerlos a diferentes estilos de comunicación, en donde se entiende por “estilos” las diferentes notaciones, lenguajes y/o palabras que se utilizan para comunicar una idea estadística; algunos ejemplos son: escribir una carta al editor de una revista en donde se explique porque en una gráfica que muestra el número de homicidios para 2006 versus 1996 debe también incluir el tamaño de la población para cada año; organizar y conducir un debate acerca de si el presupuesto de una ciudad se debe o no gastar en seguridad pública; y encontrar a alguien que nunca haya tomado un curso de estadística y explicarle el concepto de dispersión.

2.2 RAZONAMIENTO ESTADÍSTICO

En términos generales, el razonamiento estadístico se puede definir como la forma en que la gente razona con ideas estadísticas y le da sentido a la información estadística ([Garfield, 2002](#)). Esto incluye interpretaciones basadas en conjuntos de datos, representaciones gráficas y resúmenes estadísticos. El razonamiento estadístico combina ideas acerca de datos y probabilidades, que conducen a inferencias e interpretaciones de resultados estadísticos. Detrás del razonamiento estadístico subyace la comprensión conceptual de ideas estadísticas importantes como: distribución, centralidad, dispersión, asociación, incertidumbre, aleatoriedad y muestreo.

La utilización y el estudio del razonamiento estadístico no son exclusivos del estadístico o el matemático. En profesiones como psicología, medicina, periodismo o ciencia política, se requiere del razonamiento estadístico. Por ejemplo, los psicólogos han estudiado como la gente hace juicios o toma decisiones ante situaciones de incertidumbre que se basan en información estadística; los médicos requieren de este tipo de razonamiento para analizar los riesgos y posibilidades de una intervención quirúrgica o para interpretar los resultados de una prueba clínica, entre otros ejemplos.

A pesar del uso extendido que tiene la expresión “razonamiento estadístico”¹, autores como [Garfield \(2002\)](#), [Chance \(2002\)](#) y [delMas \(2002\)](#), señalan que esta expresión se intercambia con frecuencia con la de “pensamiento estadístico” para significar o referirse a objetivos terminales de cursos de estadística que no siempre tenían los mismos enfoques metodológicos o énfasis en temas o conceptos particulares. En parte, como respuesta a esta falta de consenso acerca del significado de estos procesos y sobre como desarrollar la educación estadística, [Ben-Zvi y Garfield \(2004\)](#) promovieron y editaron la

¹. Por ejemplo, una búsqueda en Google utilizando las palabras “razonamiento estadístico”, arroja 387.000 páginas relacionadas. Si la búsqueda se hace con las palabras “statistical reasoning” los resultados muestran 722.000 páginas.

publicación de una colección muy interesante de artículos consignados bajo el título *The challenge of developing statistical literacy, reasoning and thinking*.

Para Chervaney et al. (1977 y 1980; citado por ([Garfield, 2002](#)) el razonamiento estadístico es entendido como lo que una persona es capaz de hacer con el contenido estadístico —como recordar, reconocer y discriminar entre conceptos estadísticos— y las habilidades que demuestra tener en la utilización de conceptos estadísticos en la resolución de problemas.

La mayoría de los resultados encontrados sugieren que los profesores de estadística no enseñan de manera específica cómo utilizar y aplicar tipos de razonamientos ([Garfield, 1999](#) y [Sedlmeler, 1999](#)), Más bien, la mayoría de profesores tienden a enseñar conceptos y procedimientos proporcionándoles a los estudiantes oportunidades para trabajar con datos y software estadístico, pero esperando que el razonamiento se desarrolle espontáneamente por razón de ese tipo de trabajo. No obstante, hasta el momento lo que es posible identificar es una buena variedad de sesgos y formas erradas de pensamiento estocástico. Igualmente, autores como [Hope y Kelly \(1983\)](#) han puesto en evidencia la existencia de errores sistemáticos y conductas recurrentes en la forma de decisiones por parte de las personas ante situaciones de tipo estocástico. Es importante señalar que algunos de estos errores son de tipo psicológico, y una estricta exposición de las leyes teóricas de la probabilidad puede no ser suficiente para superarlos. Dos de las estrategias erróneas más conocidas en la educación estadística, son las denominadas como representatividad y disponibilidad. Para [Godino, Batanero y Cañizares \(1987\)](#), “la persistencia de estos errores proporciona una razón crucial para la temprana introducción del pensamiento probabilístico en la matemática básica.” Un breve recuento de estas formas erradas de pensamiento también se puede encontrar en [Fernández, Sarmiento y Soler \(en prensa\)](#).

A pesar de la falta de consenso sobre cómo ayudar a los estudiantes a potenciar su razonamiento estadístico o sobre cómo determinar el nivel y lo correcto de sus razonamientos, en realidad son varios, los investigadores que han diseñado materiales y actividades orientadas a desarrollar habilidades de razonamiento respecto a los datos, representaciones de datos, medidas estadísticas, incertidumbre, muestras y correlaciones o asociaciones, tal y como las describe [Garfield \(2002\)](#):

Datos. Incluye el reconocimiento y caracterización de datos de tipo cualitativo o cuantitativo, de tipo discreto o continuo; el conocimiento de porqué un tipo particular de datos conduce a una clase particular de tabla, gráfica o medida estadística.

Representaciones de datos. Incluye la comprensión de la forma en que una gráfica está representando a una muestra, el conocimiento de cómo se podría modificar una gráfica para representar de mejor manera un conjunto de datos o la capacidad

para reconocer, más allá de las características de una distribución aleatoria de datos, características generales como la forma, el centro y la dispersión.

Medidas estadísticas. Considera la comprensión de porqué las medidas de tendencia central, posición y dispersión, indican diferentes cosas acerca de un conjunto de datos e incluye el conocimiento de cuáles son las medidas más apropiadas a utilizar de acuerdo a las diferentes condiciones dadas en una situación o porque una medida particular representa o no a un conjunto de datos. Asimismo, comprende el conocimiento de porqué la utilización de medidas de resumen estadístico para hacer predicciones es más confiable para muestras grandes que para muestras pequeñas. Además, es esencial el conocimiento de porqué un buen resumen de datos debe incluir tanto una medida de tendencia central como una de dispersión, y la razón de porqué los resúmenes de centro y dispersión pueden ser útiles para comparar conjuntos de datos.

Incertidumbre. Incluye el uso correcto de las ideas de aleatoriedad, posibilidad y probabilidad para hacer juicios acerca de eventos inciertos. También comprende conocimientos como: porqué los resultados asociados a una situación estocástica pueden ser o no igualmente probables o porqué la probabilidad de diferentes eventos podría ser determinada utilizando diferentes métodos tales como los diagramas de árbol o las simulaciones utilizando objetos físicos como una moneda o un programa de computador.

Muestras. Considera el conocimiento de cómo las muestras se relacionan con la población de las que se toman o de qué se podría inferir con base en una muestra. Así mismo incluye el conocimiento de porqué una muestra bien seleccionada representará de manera más segura una población, mientras que hay maneras de seleccionar muestras que generan sesgos que hacen que no sean representativas de una población. También incluye el conocimiento para ser escéptico respecto a inferencias que se basan en muestras pequeñas o sesgadas.

Correlaciones y asociaciones. Considera el conocimiento de cómo juzgar e interpretar una relación entre dos variables o de como examinar e interpretar una tabla de doble entrada o de un diagrama de dispersión cuando se considera una relación bivariada. En particular, es importante conocer porqué una correlación intensa no necesariamente implica una relación de causa efecto.

2.3 PENSAMIENTO ESTADÍSTICO

[Garfield \(2002\)](#) y [Rumsey \(2002\)](#) señalan la existencia de numerosos textos y artículos que utilizan la expresión “pensamiento estadístico” a pesar de que no dan una definición de lo que significa. Es quizás en [Wild y Pfannkuch \(1999\)](#) donde se consolida una propuesta que profundiza en diversos aspectos del pensamiento estadístico. Buena parte de su trabajo se basa en preguntas que les hicieron a estadísticos practicantes y a estudiantes que trabajaban en proyectos de estadística, acerca de qué es lo que ellos hacen cuando están en la tarea de

identificar elementos claves en la resolución de un problema. Los resultados de su trabajo los llevaron a desarrollar un modelo que considera cuatro dimensiones del pensamiento estadístico ante una indagación empírica: el ciclo investigativo, los tipos de pensamiento, el ciclo interrogativo y las disposiciones (p.19). [Wild y Pfannkuch \(1999\)](#) sostienen que para comprender y ver como se integran los patrones de pensamiento y las estrategias utilizadas por estadísticos y usuarios de la estadística para resolver problemas, se tiene que impulsar la verdadera necesidad para resolver problemas y mejorar las habilidades de pensamiento de los estudiantes. Por un lado ellos destacan, al señalar la naturaleza contextual de los problemas de estadística como elemento esencial, que es en el proceso de relacionar los modelos con el contexto, en donde se hace patente el pensamiento estadístico; y por otro lado, afirman que muchas de las disposiciones deseables en los pensadores estadísticos tales como la incredulidad y el escepticismo son adquiridas a través de la experiencia.

Como respuesta al trabajo de estos autores, [Moore \(1997\)](#) señala que “los estudiantes principiantes necesitan una introducción más selectiva al pensamiento estadístico”. Puntualiza por ejemplo, que la estructura “Datos, Análisis, Conclusiones” de un ciclo de investigación se debe detallar en acciones como:

Cuando usted examina un conjunto de datos, (1) comience por graficar los datos e interprete lo que ve; (2) busque patrones generales y desviaciones sobresalientes a esos patrones, y encuentre explicaciones en el contexto del problema; (3) con base en el examen de los datos, seleccione descripciones numéricas apropiadas de aspectos específicos; (4) si el patrón general es suficientemente regular, encuentre un modelo matemático compacto para ese patrón.

[Pfannkuch y Wild \(2004\)](#) apuntan que una buena definición de “pensamiento estadístico” debería incluir las tareas que hace un estadístico y que involucran mucho más que el resumen de los datos, la solución de un problema particular, el razonamiento acerca de un procedimiento y las explicaciones y conclusiones. Como lo sugiere [Chance \(2002, p. 4\)](#), es propio del pensamiento estadístico, más allá del razonamiento y la alfabetización, la habilidad para ver el proceso como un todo, para preguntarse y responderse el porqué del mismo, para comprender la relación y significado de la variación en este proceso, para tener la pericia para explorar datos en formas que vayan más allá de las que son prescritas en los textos y para generar nuevas preguntas que vayan más allá que las que se hacen inicialmente en una investigación. En otras palabras, mientras que la alfabetización podría apenas ser vista como la comprensión e interpretación de la información estadística, presentada por ejemplo en los medios de comunicación, y el razonamiento podría apenas ser visto como trabajar con base en las herramientas y conceptos aprendidos en un curso, el pensador estadístico es capaz de moverse más allá de lo que es enseñado en un curso, para de manera espontánea preguntarse e investigar los asuntos y datos de un contexto específico.

En las secciones anteriores las propuestas los diversos exponentes sugieren definiciones para sus respectivos resultados de interés. Sin embargo, con frecuencia se observa que las definiciones de un enfoque incorporan aspectos de otros, por ejemplo, [Garfield \(2002\)](#) identifica muchos casos en los que los términos “razonamiento” y “pensamiento” son intercambiados en sentidos similares en la literatura. No es común encontrar un planteamiento que contraste de manera simultánea, y por consiguiente diferencie, los procesos “alfabetización estadística”, “competencia estadística”, “razonamiento estadístico” y “pensamiento estadístico”, de manera que sea posible distinguirse los aspectos que propios de cada uno y los que comparten.

No obstante, el trabajo de [delMas \(2002 y 2004\)](#), entre otros, abarca la conceptualización de los procesos “alfabetización, razonamiento y pensamiento estadístico” de manera paralela, cada uno como un conjunto de habilidades que deben desarrollarse pero que no necesariamente son independientes unas de otras. Para [delMas \(2002\)](#), de la conjunción de los trabajos de [Rumsey \(2002\)](#), [Garfield \(2002\)](#) y [Chance \(2002\)](#) se derivan al menos dos posturas sobre cómo se pueden relacionar los resultados que sería deseable obtener con estos procesos. Desde una primera postura se puede concebir la alfabetización estadística como el desarrollo tanto de las habilidades básicas como del conocimiento esencial que se requiere para luego desarrollar razonamiento y pensamiento estadístico. La Figura 1 ilustra el tipo de relaciones sugeridas entre los tres procesos, donde cada uno tiene un contenido que es independiente del de los otros dos, pero se aceptan algunos puntos en común.

En esta postura hay la posibilidad de desarrollar algunos aspectos de uno de los procesos independientemente de los otros, y de proponer actividades de instrucción que permitan el desarrollo de comprensión de aspectos de uno o de todos los procesos.

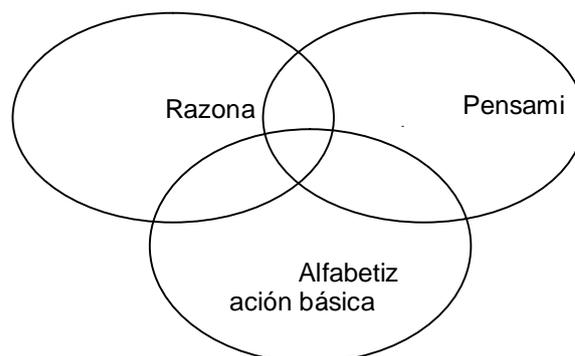


Figura 1. Postura de que los procesos son independientes con algunos aspectos en común (tomado de [delMas \(2002\)](#)).

La segunda postura propone el tratamiento de la alfabetización estadística como si ésta fuera una meta coordinada de instrucción en donde el razonamiento y el pensamiento estadístico no tienen contenidos más amplios e independientes que los de la alfabetización estadística. Bajo esta postura (Figura 2) los resultados de aprendizaje de los procesos de razonamiento y pensamiento estadístico llegan a verse como parte de metas particulares de la alfabetización estadística.

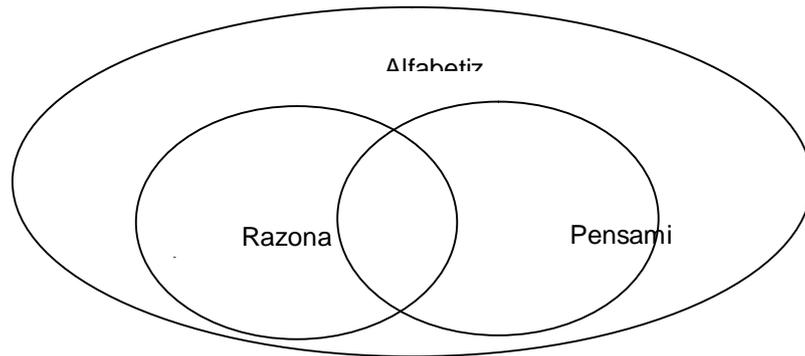


Figura 2. Postura de que el razonamiento y el pensamiento están contemplados dentro de la alfabetización (tomado de [delMas \(2002\)](#)).

Desde ambas posturas se puede dar cuenta de los puntos en común que se perciben en los tres procesos, aunque quizás, la segunda postura los recoge de mejor manera. Empero, en esta postura vemos como inconveniente el que la alfabetización estadística comprenda a las otras dos, pues al considerar las aproximaciones de la mayor parte de los autores consultados a la alfabetización estadística, ésta se percibe como el conjunto de habilidades y conocimientos básicos que cualquier ciudadano debería tener. En consecuencia parece razonable que sea el pensamiento estadístico el que comprenda la alfabetización y el razonamiento estadístico, y se fundamente en ellos.

Ahora bien, gracias a estas reflexiones realizadas desde el proyecto dentro del cual se adhiere esta propuesta, se está de acuerdo con basar este estudio en los planteamientos que [delMas \(2002\)](#) esboza en la Tabla 1, en donde aparece una lista de habilidades que se requieren del estudiante para que demuestre o desarrolle cada uno de estos procesos, los cuales están relacionados por la segunda postura reflejada en la Figura 2.

Tabla 1. Tareas que podrían distinguir las tres perspectivas de instrucción

Alfabetizaci	Razonamie	Pensamiento
--------------	-----------	-------------

Alfabetización básica	Razonamiento estadístico	
Identificar	¿Por qué?	Aplicar
Describir	¿Cómo?	Criticar
Refrasear	Explicar	Evaluar
Traducir	(Los procesos)	Generalizar
Interpretar		
Leer		

De la tabla anterior, se ve que por ejemplo, si una meta de la instrucción es desarrollar la alfabetización estadística básica, entonces los profesores deberían procurar que los estudiantes realicen acciones como: identificar ejemplos de un término o concepto; describir gráficas, distribuciones o relaciones entre variables; refrasear, traducir o interpretar los resultados de un procedimiento estadístico, etc. Si, por otra parte, se le pide al estudiante explicar porqué o cómo los resultados de un proceso particular fueron producidos —por ejemplo, explicar el proceso que produce la distribución muestral de un estadístico, o por qué la mediana es resistente a valores atípicos, o por qué una muestra aleatoria tiende a producir muestras representativas— o por qué una conclusión dada es justificable, se está promoviendo el desarrollo de razonamiento estadístico. Finalmente, y dadas las características que [Chance \(2002\)](#) le impone al pensamiento estadístico, se distingue este proceso de los otros dos en el sentido de que a los estudiantes se les incita a aplicar su competencia de alfabetización básica y de razonamiento estadístico en contextos específicos. En otras palabras, el pensamiento estadístico es promovido cuando en la enseñanza se reta a los estudiantes a aplicar su comprensión a problemas reales, a cuestionar, criticar y evaluar el diseño y las conclusiones de estudios realizados, o a generalizar el conocimiento derivado de ejemplos presentados en el salón de clase a situaciones nuevas o novedosas para el estudiante.

[delMas \(2002 y 2004\)](#) y [Ben-Zvi y Garfield \(2004\)](#), señalan otras cuestiones que se destacan como aspectos en común de cada enfoque y que pueden considerarse como importantes para la enseñanza estadística enfocada en tales procesos. La primera es la preocupación de recomendar la preparación y coordinación cuidadosas de los objetivos propuestos para la instrucción, con los métodos y recursos a utilizar en la enseñanza, y con los esquemas y propuestas de evaluación a considerar.

En segundo lugar, la idea de que la interpretación de información estadística es dependiente del contexto, y que por ello como postulado de la enseñanza en estadística, se predica que si un procedimiento es enseñado, los estudiantes también deben aprender los contextos en los cuales es aplicable. Por ejemplo, si un objetivo de enseñanza fuera que los estudiantes comprendan el

término “media aritmética” dentro del contexto de la estadística, las actividades de enseñanza se deben diseñar orientadas a ayudar a que los estudiantes descubran porque la media aritmética es un tipo de medida de tendencia central, contrastar esta medida con otras medidas de tendencia central y mostrar cuando y donde no utilizar la media aritmética.

Como tercera cuestión se menciona el interés y la recomendación de considerar de manera más decidida los asuntos de la evaluación de los estudiantes. [delMas \(2002\)](#) afirma que el tema de la evaluación frecuentemente no recibe la misma atención que el de la instrucción aunque debería tener igual importancia. Una falla frecuente de la instrucción consiste en presentar y utilizar actividades o materiales relacionados con los objetivos del curso pero no evaluar los resultados de aprendizaje de su implementación. En palabras de [delMas \(2002\)](#), “un objetivo que no es evaluado, realmente no es un objetivo del curso”. Sin embargo, una de las mayores dificultades al diseñar evaluaciones es la de conocer o establecer indicadores que realmente den cuenta del objetivo a evaluar.

2.4 ESCENARIOS PARA LA ENSEÑANZA

[Canada \(2004\)](#) pone a consideración tres escenarios de la estadística para aproximarse al estudio de la variación en lo estocástico: situaciones de conjuntos de datos, situaciones de muestreo y situaciones de probabilidad. Sin embargo en esta propuesta solo se desarrolla secuencias de tareas relacionadas con situaciones de conjuntos de datos debido a la profundidad con la que se pretendía realizar el estudio. En esta parte del capítulo se concreta el escenario de conjuntos de datos mediante algunos resultados de investigación, que junto con las acciones planteadas por [delMas \(2002\)](#), fundamentan la elaboración de los indicadores o marco interpretativo del proyecto. Estos indicadores atienden a las distinciones que sugieren los diferentes autores reportados, para la alfabetización, el razonamiento y el pensamiento estadístico, precisan el conjunto de habilidades y acciones que caracterizan cada uno de estos procesos, y se constituyen en guías para la construcción de las trayectorias hipotéticas de aprendizaje y para el análisis de la información recogida.

[Jones et al. \(2001\)](#) asegura que para exhibir conocimiento estadístico, en sus diferentes perspectivas de desarrollo (alfabetización, razonamiento o pensamiento estadístico), se necesita comprender conceptos de manejo de datos que son multifacéticos y se desarrollan sobre el tiempo. El manejo de datos incorpora “organizar, describir, representar y analizar datos con el apoyo de despliegues visuales”; en síntesis, implica la reducción de los datos preservando sus características esenciales, y por lo tanto, el análisis conlleva prestar atención no sólo al promedio sino a la dispersión. Dicen Friel et al. (1997, Citados en [Canada, 2004](#)) que el proceso de reducción de datos y la estructura de la gráfica influyen el conocimiento gráfico. Diferentes tipos de gráficas enfatizan diversos

grados de reducción de datos. En este contexto gráfico de reducción de datos los estudiantes necesitan consciencia de la importancia tanto de las medidas de tendencia central como de las de dispersión de los datos.

La mirada a los datos está ligada al concepto de distribución. [Mellissinos et al. \(1997\)](#) centran el trabajo en torno al promedio en la comprensión de distribución. La noción de media de [Mokros y Russell \(1995\)](#) se ve como una medida representativa que involucra capturar un rango y una distribución de un conjunto de datos, pero es necesario distinguir entre distribución y conjunto de datos para establecer e interpretar la representatividad. De acuerdo con [Mellissinos et al. \(1997\)](#) “un conjunto de datos es una colección de medidas de una o más características de objetos o personas y una distribución es un atributo del conjunto de datos que comunica cómo las medidas en el conjunto de datos están distribuidas a lo largo de un rango de valores”; sin una idea clara de distribución es difícil hacer inferencias sobre las nociones de representatividad de los estudiantes. Estos autores también investigan las nociones de forma de la distribución, centro e interacción de la dispersión y reiteran que el concepto de distribución descansa fuertemente en la noción de variabilidad o dispersión y en consecuencia, las nociones de distribución, centro y dispersión interactúan entre sí; el desarrollo de conocimiento estadístico está ligado al de las concepciones de gráficas, centro y dispersión a través del tema común unificador de distribución. [Shaughnessy y Pfannkuch \(2002\)](#) aseveran que en una investigación, los estudiantes que atienden a la variabilidad en los datos son más capaces de predecir el rango de resultados en un intervalo que los que hacen predicciones basados en las medidas de tendencia central descartando la variabilidad en la distribución. El punto fundamental en estas investigaciones es cómo las preguntas sobre conjuntos de datos pueden moldearse para explorar y promover el desarrollo de conocimiento estadístico, ya que se reconoce la importancia de mezclar la idea de dispersión con conceptos estadísticos como distribuciones, promedios y gráficas.

[Rumsey \(2002\)](#) sugiere que el discernimiento acerca de cómo los datos son utilizados para tomar una decisión muestra el conocimiento de la persona sobre los datos, y por tanto, un nivel de alfabetización estadística. Además, el conocimiento de cómo utilizar los datos implica una comprensión de los contextos en los que diferentes tipos de datos son útiles y de las decisiones implicadas. Cuando esto se da, el conocimiento de cómo los datos son utilizados parece ajustarse bien con la definición de pensamiento estadístico que propone [Chance \(2002\)](#), en el sentido de que se conoce como comportarse como un profesional de la estadística. Asimismo, se puede afirmar que una persona que demuestra su conocimiento sobre los datos, demuestra razonamiento estadístico porque está razonando con ideas estadísticas y dando significado a la información estadística.

2.4.1 Indicadores para situaciones de conjuntos de datos

Alfabetización básica	Razonamiento	Pensamiento
<p>A1: Reconocer la población y muestra (c1)</p> <p>A2: Notar características medibles en la población (c2)</p> <p>A3: Reconocer las características como las variables a trabajar</p> <p>A4: Distinguir tipos de variables</p> <p>A5: Leer datos como un conjunto con características de una distribución</p> <p>A6: Ordenar datos</p> <p>A7: Organizar datos en categorías o clases</p> <p>A8: Transformar información numérica a arreglos tabulares de datos</p> <p>A9: Recolectar datos</p> <p>A10: Reconocer medidas de tendencia central</p> <p>A11: Reconocer la utilidad de las medidas de tendencia central</p> <p>A12: Resumir información presentada en números, arreglos tabulares o gráficos en valores correspondientes a medidas de tendencia central</p> <p>A13: Reconocer que</p>	<p>R1: Dar razones para catalogar las variables como de cierto tipo (d2.2)</p> <p>R2: Dar razones para la pertinencia de una medida estadística dependiendo del tipo de variable (d2.1)</p> <p>R3: Justificar desde la estadística la selección de medidas de tendencia central para representar una distribución de datos</p> <p>R4: Interpretar la media como el valor que compensa las desviaciones de los datos a dicho valor</p> <p>R5: Explicar por qué una determinada medida de tendencia central no siempre es la mejor representante</p> <p>R6: Dar cuenta en una distribución cuando la media, mediana y moda son iguales</p> <p>R7: Explicar la relación de la media con dispersión</p> <p>R8: Explicar por qué la mediana es una medida de centro resistente a la presencia de valores atípicos</p> <p>R9: Seleccionar</p>	<p>P1: En problemas reales o contextos específicos reconocer y dar cuenta del proceso completo para realizar un estudio estadístico y obtener conclusiones</p> <p>P2: En problemas reales o contextos específicos, utilizar diferentes tipos de herramientas estadísticas para describir, resumir y representar las características particulares de una distribución de datos</p> <p>P3: Evaluar investigaciones estadísticas en términos de la solución seguida y de los resultados obtenidos</p> <p>P4: Explicar por qué una conclusión dada acerca de una distribución de datos puede o no tener un fundamento estadístico</p> <p>P5: Construir distribuciones donde los datos cumplan ciertas condiciones</p> <p>P6: En problemas reales o</p>

Alfabetización básica	Razonamiento	Pensamiento
<p>los valores nulos se consideran al momento de calcular las medidas de tendencia central</p> <p>A14: Reconocer que el valor obtenido para las medidas de tendencia central puede no ser parte de los datos</p> <p>A15: Identificar aspectos que informan acerca de la dispersión de una distribución de datos</p> <p>A16: Reconocer diferentes resúmenes estadísticos acerca de la dispersión de una distribución de datos</p> <p>A17: Interpretar la dispersión de los datos representada en diferentes tipos de gráficas</p> <p>A18: Traducir información presentada en números o arreglos tabulares a gráficas</p> <p>A19: Evaluar la efectividad de gráficas</p> <p>A20: Reconocer relaciones aditivas y multiplicativas entre los datos de distribuciones</p> <p>A21: Reconocer la igualdad o diferencia de las medidas de resumen estadístico al comparar gráficas de distribuciones</p> <p>A22: Reconocer que al comparar dos distribuciones de datos las</p>	<p>medidas de dispersión que sean relevantes para resumir estadísticamente la variabilidad de una distribución</p> <p>R10: Dar las respuestas y explicaciones estadísticas en términos del contexto de la situación</p> <p>R11: Explicar por qué no es suficiente tratar de cuantificar y resumir la variabilidad con base en solo una medida estadística de resumen</p> <p>R12: Explicar por qué diferentes representaciones gráficas o tabulares reflejan diferentes aspectos de los datos</p> <p>R13: Explicar los procedimientos realizados para la elaboración de gráficos, arreglos tabulares y cálculos de resúmenes estadísticos</p> <p>R14: Explicar por qué es conveniente hacer un manejo apropiado de las escalas de medición cuando se hacen comparaciones de distribuciones</p> <p>R15: Explicar por qué al comparar distribuciones es necesario utilizar resúmenes estadísticos de centro y dispersión en vez de comparar datos</p>	<p>contextos específicos, utilizar diferentes tipos de herramientas estadísticas (resúmenes estadísticos y gráficos) para comparar dos o más distribuciones de datos</p> <p>P7: Construir distribuciones de datos relacionadas entre sí</p> <p>P8: Explicar por qué una conclusión dada al comparar distribuciones de datos puede o no tener un fundamento estadístico</p> <p>P9: Hacer predicciones estadísticas acerca de las medidas de resumen estadístico en distribuciones de datos relacionadas</p> <p>P10: Construir distribuciones a partir de predicciones sobre las medidas de resumen estadístico</p>

Alfabetización básica	Razonamiento	Pensamiento
medidas de tendencia central pueden no ser suficientes como distintivos de las distribuciones A23: Reconocer tendencias de datos	individuales o partes de una gráfica R16: Describir la forma gráfica de la distribución con base en la variabilidad de los datos R17: Leer entre los datos (razonamiento interpolativo para integrar y combinar datos) R18: Leer más allá de los datos (razonamiento extrapolativo valiéndose de esquemas de conocimiento)	

2.5 PERSPECTIVA CURRICULAR

Dado que en esta propuesta se pretende abordar aspectos relacionados con el razonamiento estadístico en escenarios de situaciones de conjuntos de datos con estudiantes de secundaria, en este apartado se hace una revisión, desde la perspectiva de los lineamientos curriculares (MEN, 1998), a la forma como se concibe el proceso de razonamiento estadístico y el concepto de situaciones de conjuntos de datos. ”

Se justifica la importancia de hacer esta revisión, en tanto da la posibilidad de realizar una comparación entre lo que se ha pensado trabajar en la propuesta, y lo que se propone en este documento oficial, como esencial para nuestros estudiantes. Recordemos que este documento es relevante ya que es uno de los elementos orientadores del currículo, al brindarle pautas que van desde la función que deben tener las matemáticas escolares hasta mostrar nuevos enfoques para comprenderlas y enseñarlas.

Buena parte de la motivación que condujo a la formulación de la propuesta, tiene que ver con el papel que juega el análisis de datos en la vida diaria en donde se tiene contacto con diversas situaciones que obligan a un ciudadano a tomar decisiones, tales como el hacer compras, ventas, o cualquier tipo de negocio. Para estas actividades cotidianas, se requiere analizar ciertas condiciones, que comúnmente están dadas a través de datos. Por eso, se considera importante la enseñanza de un área, como la estadística, que permita a los estudiantes, sin importar su profesión futura, aprender a emplear los datos que

surgen o se asocian a contextos sociales. De cierta manera, se considera como esencial en la vida de cualquier persona, el tener conocimiento básico sobre la estadística, que le permita entender cualquier información dada a través de diversos medios. En este sentido, es pertinente el llamado a los docentes para que consideren la apertura de más espacios significativos para la enseñanza de la estadística.

En consonancia con lo expresado anteriormente, los lineamientos presentan una nueva visión de las matemáticas en la escuela, en la que se plasma que la estadística tiene un carácter globalizante, en donde se posiciona la idea de pensamiento aleatorio como un aporte a la comprensión de fenómenos de la vida cotidiana y de las ciencias. Además, plantean que este carácter globalizante se asume cuando el énfasis se hace en el tratamiento de situaciones no deterministas, en donde la recolección, la organización y la representación de los datos obedecen a una intencionalidad que les dé sentido, que guíe su interpretación para la toma de decisiones y posteriores predicciones.

En particular en los lineamientos curriculares, al referirse al pensamiento aleatorio y los sistemas de datos, se destaca que:

- La búsqueda de respuestas a preguntas que sobre el mundo físico se hacen los niños resulta ser una actividad rica y llena de sentido si se hace a través de recolección y análisis de datos. Decidir la pertinencia de la información necesaria, la forma de recogerla, de representarla y de interpretarla para obtener las respuestas lleva a nuevas hipótesis y a exploraciones muy enriquecedoras para los estudiantes. Estas actividades permiten además encontrar relaciones con otras áreas del currículo y poner en práctica conocimientos sobre los números, las mediciones, la estimación y estrategias de resolución de problemas.
- En la tarea de buscar y recoger datos es importante mantener claros los objetivos, las actitudes, los intereses que la indujeron, prever qué tipos de respuestas se pueden encontrar, las dificultades que podrían presentarse, las distintas fuentes como consultas, entrevistas, encuestas, observaciones, la evaluación de su veracidad, distorsiones, sesgos, lagunas, omisiones y la evaluación de la actitud ética de quien recoge los datos y su responsabilidad social.
- Cuando se habla de datos, es importante una reflexión sobre su naturaleza. Ellos no serían comprensibles sin considerar que tienen un mínimo de estructura, el formato y seguramente un orden, por ejemplo el estar unos a continuación de otros, el orden alfabético si son palabras, el orden aditivo si se trata de números. En este sentido podría considerarse que no hay datos sino sistemas de datos.

Por tanto, podemos concluir de una parte, que el razonamiento estadístico no es abarcado con exclusividad, sino que se concibe como parte del razonamiento matemático, el cual es un proceso general, relacionado con la

acción de organizar las ideas para llegar a una conclusión, en donde la persona debe dar cuenta del cómo y del porqué de los procesos que se siguen para llegar a estas conclusiones, justifique las estrategias y los procedimientos puestos en acción en el tratamiento de problemas, formule hipótesis, encuentre contraejemplos, y patrones, entre otros. De otra parte, y tal como lo propone el MEN, las situaciones presentadas a los estudiantes deben ser llamativas por lo que se requieren que se muestren en un contexto conocido, lo que se tuvo en cuenta en el momento de aceptar las situaciones de conjuntos de datos tratadas en nuestro experimento de enseñanza.

Para finalizar, se considera enriquecedor el empleo de los experimentos de enseñanza, ya que de acuerdo con este documento oficial, los docentes, además de considerar situaciones de aplicación reales para introducir los conceptos aleatorios, deben preparar y utilizar situaciones de enseñanza abiertas, orientadas hacia proyectos y experiencias en el marco aleatorio y estadístico, susceptibles de cambios y de resultados inesperados e imprevisibles. Los proyectos y experiencias en estadística que resultan interesantes y motivadores para los estudiantes generalmente consideran temas externos a las matemáticas lo cual favorece procesos interdisciplinarios de gran riqueza.

3. MARCO METODOLOGICO

Para [Cobb \(2000\)](#) la investigación educativa reciente refleja un cambio en cuanto a la relación que ha existido entre la teoría y la práctica. Describe este autor que en las aproximaciones tradicionales como la epistemología positivista, la práctica está subordinada a la teoría, la cual es considerada superior, y en consecuencia los profesores se ven como consumidores de los resultados de investigaciones realizadas fuera del contexto de sus clases; en la misma dirección, [Steffe y Thompson \(2000\)](#) mencionan la gran brecha existente entre la práctica de la investigación y la práctica de la enseñanza en el diseño experimental de corte positivista, ampliamente utilizado en la investigación. En contraste, la visión que está surgiendo hace énfasis en la relación reflexiva entre las dos, pues la teoría emerge de la práctica y la realimenta para guiarla. Esta variación de la perspectiva ha precipitado el desarrollo de un amplio rango de metodologías de investigación cuya característica principal, según [Lesh y Kelly \(2000\)](#) y [Steffe y Thompson \(2000\)](#), es posibilitar una ampliación de los papeles del investigador, al ser un observador directo del trabajo de los estudiantes, y del profesor, al colaborar en la creación de las estrategias que la investigación propone para su clase; es así, como unas veces el investigador actúa como profesor o como estudiante y el docente aporta con perspectivas, interpretaciones y datos críticos y relevantes.

Dentro de esta nueva perspectiva los experimentos de enseñanza se presentan como una metodología, cuyo principal propósito no es evaluar la efectividad del diseño de instrucción que se formuló con anterioridad, sino mejorar tal diseño al probar y modificar conjeturas hechas sobre el aprendizaje de los estudiantes en la clase. Los experimentos de enseñanza están orientados a investigar nuevas estrategias de enseñanza con el propósito de mirar y analizar el aprendizaje de los estudiantes de forma cercana y constante, y se llevan a cabo en colaboración con un profesor también miembro del equipo de investigación. En un experimento de enseñanza los investigadores implementan secuencias de actividades de instrucción y analizan el aprendizaje matemático de los estudiantes a medida que ocurre en la situación social de la clase o de grupos pequeños (Cobb, 1999, citado en [Jones et al., 2001](#)).

Según [Steffe y Thompson \(2000\)](#) un experimento de enseñanza puede definirse como una metodología encaminada a capturar y documentar el pensamiento de los estudiantes en un período de tiempo dado, pues se crea la oportunidad para que los investigadores tengan una experiencia de primera mano con respecto al aprendizaje y razonamiento matemático de los estudiantes. [Confrey y Lachance \(2000\)](#) ven el experimento de enseñanza como una intervención planificada de clase que ocurre en un período de tiempo significativo, donde se sigue un curso continuo de instrucción y es suficientemente agresiva

como para superar la perspectiva tradicional. Por esto dice [Cobb \(2000\)](#), que los experimentos de enseñanza proveen una manera de explorar los prospectos y las posibilidades de reformas al nivel de clase.

Un experimento de enseñanza contempla un “ciclo de investigación” en tres fases:

Fase 1: Diseño y planificación de la instrucción que comprende:

- 1 La definición de los objetivos de aprendizaje que delimitan las metas a alcanzar.
- 2 El diseño de tareas.
- 3 La explicitación de la trayectoria hipotética de aprendizaje.

Fase 2: Experimentación en el aula o en un entorno virtual de las tareas diseñadas.

Fase 3: Análisis retrospectivo.

En los experimentos de enseñanza planeados e implementados, el equipo docente e investigador observa y analiza la experiencia, apoyando los análisis desde las referencias teóricas que fundamentan la trayectoria hipotética de aprendizaje. En esta fase se trata de investigar si los materiales docentes diseñados permiten generar la actividad esperada en los estudiantes, y si la actividad cognitiva y social desarrollada por los estudiantes se corresponde o no con lo que habíamos previsto en la primera fase.

En general un experimento de enseñanza involucra una secuencia de episodios de enseñanza en los que participan un investigador-docente, uno o más alumnos y un investigador-observador, que aportará interpretaciones alternativas a las del investigador-docente (Steffe y Thompson, 2000). En estos estudios se ha de recoger información de todo lo que ocurre en el aula para lo que se realizan grabaciones de video y/o toma de notas. El tiempo de duración puede ser variable, de unas horas a un año académico. El ambiente a observar puede ser desde pequeñas habitaciones laboratorio para entrevistas, a clases completas o incluso ambientes de aprendizajes más grandes. Y el centro de interés puede ser tanto el desarrollo de los alumnos, como el de los docentes o de unas ideas o actividades de enseñanza determinadas (Kelly y Lesh, 2000).

3.1 LA CONJETURA EN UN EXPERIMENTO DE ENSEÑANZA

Durante un experimento de enseñanza se generan conjeturas relativas a asuntos prácticos, que sirven como guías y normalmente surgen de una falta de satisfacción con los resultados de las prácticas habituales. Las conjeturas se pueden formular al inicio o en el transcurso del experimento; en ocasiones es necesario reformularlas o abandonarlas para plantear unas nuevas. De acuerdo

con [Confrey y Lachance \(2000\)](#) una investigación guiada por una conjetura busca revisar y elaborar la conjetura mientras la investigación está en progreso; esta conjetura es una inferencia basada en pruebas incompletas o no concluyentes, es una afirmación que se elabora a lo largo de toda la investigación y espera ser probada o desaprobada; la diferencia con una investigación guiada por una hipótesis es que ésta apenas intenta descubrir si una intervención dada funcionó o no, o si una teoría particular puede ser soportada o no; además mientras la hipótesis permanece estática a lo largo del experimento, la conjetura evoluciona constantemente a medida que la investigación progresa.

Estos autores enfatizan que es importante que todo el equipo comprenda bien la conjetura ya que gran parte del diseño del experimento depende de ella; alegan que es un medio para reconceptualizar las maneras en que se abordan tanto el contenido como la pedagogía de los objetos matemáticos, pues en el curso del experimento de enseñanza una conjetura robusta debe modificar la perspectiva propia y destacar nuevos eventos que previamente se habían considerado insignificantes o dudosos; la conjetura debe evolucionar y debe verse como un gran esquema que empieza a emerger de muchas piezas, haciéndolas cohesivas.

Además dicen [Confrey y Lachance \(2000\)](#), que en una conjetura se distinguen dos dimensiones: una de contenido matemático que responde a la pregunta ¿Qué debe enseñarse?, y una de contenido pedagógico que apunta al interrogante ¿Cómo debe enseñarse este contenido? Esta segunda dimensión guía la organización de la clase para la enseñanza, el tipo de actividades, las herramientas y recursos convenientes, y tiene en cuenta los componentes de instrucción o intervención en el aula, a saber: el currículo, la interacción en el aula, la enseñanza y la evaluación; así, un experimento de enseñanza involucra una relación dialéctica entre la conjetura y los componentes de instrucción.

El refinamiento progresivo de la conjetura antes descrito, es un proceso que se da al experimentar en el aula y allegar datos en forma permanente, los cuales confirman o rechazan la conjetura inicial para reconstruirla y sugerir nuevas formas de experimentación ([Molina, 2006](#)).

De acuerdo con [Cobb \(2000\)](#) un experimento de enseñanza típicamente empieza con la clarificación de las metas de aprendizaje y con la definición clara de la conjetura; de manera paralela debe hacerse un ejercicio de pensamiento para visualizar cómo debe realizarse el proceso de enseñanza y aprendizaje en la clase, es decir, la formulación de una ‘trayectoria hipotética de aprendizaje’, noción planteada por [Simon \(1995\)](#) que se refiere a la predicción del profesor acerca del camino que el aprendizaje debe seguir en la clase; es hipotética porque la trayectoria real que se va a dar no se conoce con anterioridad, y entonces solo se intenta caracterizar lo que se espera. Para [Simon \(1995\)](#) detrás de la formulación de una trayectoria tal, están los supuestos de que en el aprendizaje de un individuo puede verse cierta regularidad, en la clase la actividad matemática ocurre con frecuencia de formas previsibles, y en una misma clase varios

estudiantes pueden beneficiarse de la misma tarea matemática; con esta trayectoria se resalta la importancia de tener metas claras y fundamentos para las decisiones del profesor.

3.2 LA ORIENTACIÓN TEÓRICA EN UN EXPERIMENTO DE ENSEÑANZA

Para distintos autores los experimentos de enseñanza evolucionaron directamente de los experimentos constructivistas y su auge se debe primordialmente a la necesidad de investigar acerca de concepciones y creencias matemáticas indeseables que con frecuencia los estudiantes desarrollan en el contexto de la instrucción tradicional [Cobb \(2000\)](#). La perspectiva ideológica que subyace a un experimento de enseñanza es, por lo tanto, el constructivismo como teoría del conocimiento y del aprendizaje.

Además [Cobb \(2000\)](#) indica, que se requiere de un teoría de la enseñanza, así sea tentativa, con el fin de dirigir el diseño y desarrollo de la secuencia de instrucción y dar pie a posibles conjeturas sobre la actividad matemática de los estudiantes. [Confrey y Lachance \(2000\)](#) corroboran esto al señalar que una conjetura debe estar necesariamente situada en una teoría, o de lo contrario no puede ser interpretada; además la teoría sirve para relacionar la conjetura con otros aspectos de la educación o de las matemáticas, para estructurar las actividades y metodologías en el experimento de enseñanza y para entrelazar las dimensiones de contenido y didáctica de la conjetura. En sus investigaciones [Cobb \(2000\)](#) ha empleado los lineamientos para la enseñanza propuestos por la teoría RME (Realistic Mathematics Education) desarrollada en el Instituto Freudenthal. En otras investigaciones se han usado teorías como la teoría de desarrollo intelectual, la teoría social organizacional, la teoría cognitiva, y las redefiniciones de la enseñanza de las matemáticas que se han hecho con base en la perspectiva constructivista.

El enfoque adoptado para el aprendizaje cabe dentro de los lineamientos del constructivismo, que plantean que el individuo construye su conocimiento más que asimilarlo y atribuyen a la persona un papel primordial en la construcción del conocimiento, la cual tiene lugar en la interacción del individuo con su medio, físico o social, es decir en la experiencia del individuo. Las secuencias de instrucción propician así, la construcción del conocimiento mediante la exploración y el descubrimiento por parte de los estudiantes a partir de ideas intuitivas, y la confrontación de éstas para llegar a ideas más elaboradas y aceptadas por comunidades académicas. Además las clases se concibieron para que el trabajo fuera desarrollado en grupos con espacios para compartir e interactuar a nivel de todo el curso.

La planeación y desarrollo de las secuencias de instrucción se enmarcó también en las pautas para la enseñanza derivadas del constructivismo, y destacadas por [Simon \(1995\)](#), como las definidas por el [NCTM \(1991\)](#): establecer

metas y proporcionar tareas matemáticas que ayuden a los estudiantes a alcanzar dichas metas; estimular y manejar el discurso de clase para que haya claridad sobre lo que se está aprendiendo; crear un ambiente de clase que apoye la enseñanza y el aprendizaje de matemáticas; analizar de forma permanente el aprendizaje de los estudiantes, las tareas matemáticas y el ambiente con el fin de tomar decisiones instruccionales. Se atendió así a la necesidad que señala [\(Cobb, 2000\)](#), de guiar la enseñanza por una teoría envolvente.

Adicionalmente, anota [Cobb \(2000\)](#) que es necesario construir un marco interpretativo que emerge del trabajo en el experimento y guía las actividades de los investigadores para dar sentido a lo que ocurre en la clase; dicho marco es de importancia central e influencia lo que se puede aprender en el curso del experimento de enseñanza. Para analizar la actividad en clase este autor utiliza un marco interpretativo en clase basado en constructos teóricos: normas sociales, normas sociomatemáticas y prácticas matemáticas, que han emergido de su trabajo en varios proyectos de investigación. [Jones et al. \(2001\)](#) declaran que en su investigación, el experimento de enseñanza es realimentado por un marco cognitivo que permite caracterizar el pensamiento de los estudiantes a través de varios niveles. En el transcurso de este estudio nos fuimos percatando de que sin que deliberadamente lo propusiéramos, la distinción entre los procesos cognitivos de alfabetización, razonamiento y pensamiento estadístico, que se elaboró a través de precisar indicadores de cada uno, surge como un marco interpretativo que aportó a la formulación de las secuencias de instrucción y permitió el análisis e interpretación de lo ocurrido en clase.

3.3 RECOLECCIÓN DE DATOS

[Confrey y Lachance \(2000\)](#) sugieren que para la recolección de datos en un experimento de enseñanza, en el proyecto haya gran cantidad de información con el ánimo de describir con precisión la evolución del pensamiento de los estudiantes. Para esto se aconseja emplear múltiples métodos de recolección de datos: grabación de clase en videos, toma de notas, desarrollos escritos de los estudiantes, tareas específicas, e información sobre la participación de los investigadores y docentes; pues así el aprendizaje puede observarse en distintos momentos, de acuerdo a lo señalado por [Steffe y Thompson \(2000\)](#). Sin embargo en esta propuesta aunque la intención principal era hacer uso exacto de tales recomendaciones solo fue posible recoger información escrita, y algunas grabaciones e imágenes.

4. SITUACIONES DE CONJUNTOS DE DATOS

La decisión de tomar las situaciones de conjuntos de datos como escenario de indagación en este proyecto radica en dos cualidades de estas. La primera es su importancia histórica, ya que desde tiempos inmemorables los datos han constituido un tema principal desde dirigentes hasta estudiosos y científicos, recordando que los antiguos reyes y emperadores se preocupaban por tener abundantes datos sobre sus posesiones, los gobernadores requerían de censos poblacionales y los científicos de organizar sus observaciones. En cierta forma sin la recolección, organización y análisis de datos no hubiese sido posible la evolución o el desarrollo de diversos campos de trabajo del ser humano.

La segunda cualidad está relacionada con el interés desde un sistema educativo nacional que busca que todos los estudiantes en su educación básica reciban formación en estadística, evidenciado en los lineamientos curriculares y en planes de estudio.

Teniendo en cuenta que si se habla de situaciones de conjuntos de datos en general podría abarcar una serie muy amplia, es necesario aclarar que las situaciones tratadas, son de tal naturaleza que para su análisis y desarrollo, se requería de un conocimiento sobre las medidas de tendencia central. Lo cual fue pertinente, ya que la población con la cual se desarrollo el proyecto había recibido formación en los últimos tres cursos anteriores formación en este tema.

La secuencia de instrucción está compuesta por dos secuencias de tareas, que hacen parte del proyecto dentro del cual se encuentra enmarcada esta propuesta. Estas tienen como objetivo general de aprendizaje que los estudiantes vean cómo la dispersión de los valores de un conjunto de datos afecta los valores de las medidas de tendencia central.

Aunque la intención inicial consistía en el análisis posterior a la aplicación de las secuencias tal cual se planteaban en el proyecto; se consideró conveniente, luego de aplicarse la primera secuencia a dos de los grupos, asumirlas como pruebas pilotos, para que a partir de los resultados arrojados se realizaran algunas modificaciones, que lograran suplir los inconvenientes encontrados, pero sin perder el esquema general ni la intencionalidad de cada secuencia; de ahí que las presentadas a continuación muestren algunas diferencias con respecto a las originales.

4.1 SECUENCIA 1: EL GASTO DE ANA EN CELULAR.

4.1.1 Objetivo de aprendizaje

Ampliar y consolidar las ideas en torno a las medidas de tendencia central como posibles representantes adecuados de una distribución de datos, dependiendo de la dispersión de los datos.

4.1.2 Proceso hipotético de aprendizaje

Se trabaja con conjuntos de pocos datos en un contexto familiar de los estudiantes: el gasto de dinero en minutos de celular de una persona. Se establece un valor atípico, que aunque no esté lejos del resto de datos, los estudiantes visualizaren e intuyan una implicación relacionada con la inclusión de este valor en la distribución de datos. Los estudiantes reconocerán que la media no tiene que ser igual a uno de los datos, y puede ser un dato distinto y que puede no ser entero, el cual dependiendo del contexto tiene sentido o no. Además se aproximarán a la media como una medida de centro donde se compensan los excesos de los valores con los defectos con respecto a la media misma, es decir, ven que la suma de las distancias o desviaciones de los valores a la media es cero. Construyen los conjuntos de datos de acuerdo a las condiciones que se indican y reconocen características comunes en las distribuciones de datos que conllevan a una selección de la media o de la mediana como la medida de tendencia central que mejor estima un valor representativo de los datos. De manera adicional se espera que los estudiantes establezcan una conexión coherente entre las tareas que le permitan consolidar las ideas de medida de tendencia central en este caso y en otros, los cuales pueden tener más de un valor atípico y con una diferencia más notable con respecto a la media.

4.1.3 Intención de las tareas

De esta secuencia hacen parte cinco tareas, las primeras tres apuntan a que los estudiantes observen que la media no siempre es una medida de tendencia central que representa adecuadamente la distribución de datos, que cuando hay valores extremos la mediana podría ser la medida que mejor representa la distribución por no verse afectada por aquéllos, o que eventualmente la media es apropiada cuando no se consideran los valores atípicos, dependiendo de si en la situación esto tiene sentido. Mientras en la cuarta se busca que el estudiante se aproxime a la media como una medida donde se compensan los excesos de los valores con los defectos con respecto a la media misma. Y en la tarea cinco se espera que los estudiantes observen que un valor extremo incide en el valor de la media y por lo tanto no siempre es una medida de tendencia central que representa adecuadamente una distribución de datos.

4.1.4 Ideas para las socializaciones

Se realizará una primera socialización después de desarrollado la tarea 1 y 2, y la segunda socialización finalizada la secuencia, esto con el fin de que los estudiantes por sí solos logren conectar de manera coherente sus respuestas y logren argumentar o justificar con claridad.

Para la socialización 1 se pretende retomar las explicaciones y justificaciones que los estudiantes dan para usar la media o la mediana, con el fin de conducirlos a que ellos mismos las comparen, reconozcan características comunes de las distribuciones de datos y establezcan de manera general cuándo en una distribución es apropiado usar una medida u otra. Igualmente es importante discutir cómo la mediana no se afecta con los datos extremos.

Respecto a la socialización 2 se resaltarán como a lo largo de las tareas se percibe la posibilidad de múltiples respuestas válidas en estadística dependiendo de la argumentación dada y recapitular la idea general de cuándo es la media la representante adecuada y cuándo es la mediana.

4.1.5 Secuencia de Tareas



ESCUELA NORMAL SUPERIOR DISTRITAL MARIA MONTESSORI

MATEMÁTICAS GRADO SEXTO

ACTIVIDAD 1: MEDIDAS DE TENDENCIA CENTRAL

Estudiantes: _____ **Grado 60**_____

El gasto de Ana en celular

1. *El dinero gastado por Ana en minutos de celular de un plan pos-pago durante los meses de enero a septiembre fue: \$24.600, \$24.800, \$25.450, \$24.900, \$25.500, \$24.700, \$24.550, \$70.000 y \$25.500, respectivamente. Si Ana se ha comprometido a gastar máximo \$25.000 por mes, ¿se puede decir que Ana cumplió con su compromiso?*
2. *Si se considera el valor de \$30.000 como un valor aproximado de su gasto mensual, se observa que Ana no está cumpliendo con su compromiso. Sin embargo Ana manifiesta que este valor no representa su verdadero gasto.*
 - a) *¿Cómo se calculó ese valor?*
 - b) *¿Por qué crees que Ana dice que \$30.000 no representa su verdadero gasto?*
 - c) *¿Estás de acuerdo con ella? Justifica tu respuesta.*

3. *Ana dice que el valor que mejor estima el dinero gastado mensualmente es \$24.900, o si acaso el valor de \$25.000. Explica cómo se calculó cada uno de estos valores y a qué medidas estadísticas corresponden cada uno de esos valores.*

4. *¿Cuál es el valor que tú crees que estima mejor el gasto mensual de Ana? Justifica tu respuesta.*

5. *Teniendo en cuenta el dinero gastado por Ana durante los meses de enero a septiembre, ¿cuál debería ser el dinero gastado en el mes de agosto para el que la media del dinero gastado sea \$25.000? Explique el proceso realizado.*

4.2 SECUENCIA 2: VENTA DE MINUTOS DE CELULAR.

4.2.1 Objetivo de aprendizaje: Ver como la dispersión de los datos de una distribución con frecuencias mayores que uno afecta los valores de las medidas de tendencia central, y por tanto su utilidad como representantes adecuadas.

4.2.2 Proceso hipotético de aprendizaje

Se trabaja con conjuntos grandes de datos que tienen frecuencia mayor que uno (1). Con el apoyo de los datos extendidos y de una tabla parcialmente construida que ilustra cómo agrupar los datos; los estudiantes fácilmente deducen cómo se construye una tabla de frecuencias absolutas, donde las categorías son los valores de los datos. Para hacer esta agrupación es suficiente con contar los datos repetidos. Además, tendrán en cuenta los valores atípicos para elegir de forma justificada, la medida de tendencia central que mejor representa las distribuciones presentadas. Se pone en juego el uso de manera flexible de la fórmula y el algoritmo para el cálculo de la media y mediana. Se incluye un valor resultante de un procedimiento que no tiene en cuenta las frecuencias, para que ellos noten el error y cuestionen las circunstancias en donde se emplea el promedio ponderado. Finalmente, interpretarán la gráfica de la distribución de datos en forma de líneas verticales de puntos, y posteriormente elaborarán una grafica solicitada sin mayor inconveniente.

4.2.3 Intención de las tareas

Esta secuencia está formada por seis tareas, cuyas intenciones son las siguientes:

Las tareas 1 y 2 pretenden que el estudiante descubra cómo construir tablas de frecuencias y las construya. Los estudiantes hacen procesos de transformación en la representación tabular.

Las tareas 3 y 4 apuntan a que los estudiantes se den cuenta de que cuando hay frecuencias mayores que uno (1) para calcular la media se requiere emplear el promedio ponderado; también se espera que con base en el trabajo de los talleres anteriores pueden elegir la medida que mejor representa la distribución de datos de manera justificada, contemplando los datos extremos.

Las tareas 5 y 6 llevan a los estudiantes a hacer procesos de interpretación primero y luego de traducción entre la representación tabular y gráfica de una distribución de datos, reconociendo los elementos de una representación en la otra.

4.2.4 Ideas para las socializaciones

Teniendo en cuenta las intencionalidades de las tareas, se harán tres socializaciones: la primera, finalizada las tareas 1 y 2; la segunda, realizadas las tareas 3 y 4; y por último, una tercera socialización culminada toda la secuencia.

Para la socialización 1 se preguntará por las ventajas de usar tablas de frecuencia para organizar y presentar los datos; hacer referencia al significado y nombre de las frecuencias relativas, acumuladas y absolutas; y discutir cómo se hacen las categorías como valores o como intervalos de variables cuantitativas discretas y continuas, y cuántas se deben considerar.

Para la socialización 2 se retomará los procedimientos para el cálculo de las medidas de tendencia central y preguntar por las diferencias entre media y promedio ponderado, para ello se cuestionará sobre las diferencias entre la forma como se presento los datos en la primera secuencia con respecto a lo presentado en la segunda; y se indagará por el cómo se calcula le mediana: de qué categoría se toma, por qué, si se contempla el número de datos, si es par o impar, etc.

En la socialización 3, se indagará por la interpretación de la gráfica, por los elementos de la gráfica y su relación con los elementos de la tabla, por las ventajas de este sistema de representación, y por las diferencias entre las diferentes representaciones gráficas.

4.2.5 Secuencia de tareas



ESCUELA NORMAL SUPERIOR DISTRICTAL MARIA MONTESSORI

MATEMÁTICAS GRADO SEXTO

ACTIVIDAD 2: MEDIDAS DE TENDENCIA CENTRAL

Estudiantes: _____

_____ **Grado 60** _____

Venta de minutos de celular

En los siguientes cuadros se presenta el dinero ganado diariamente por la venta de minutos de celular, por dos vendedores callejeros llamados LUCIA Y JAVIER, durante un mes.

LUCIA									
6.900	6.900	5.215	.725	.725	.725	1.650	1.650	1.650	1.650
1.650	1.650	1.650	1.650	.725	.725	.725	.725	1.650	1.650
.725	.725	1.650	1.650	3.800	3.800	3.800	3.800	3.800	6.900

JAVIER									
.500	.500	.500	.500	.500	.500	.500	.500	.500	.500
.000	.000	0.500	0.500	0.500	0.500	0.500	0.500	0.200	00.000
.500	.500	.500	.000	.000	.000	.000	.000	.000	.000

1. La siguiente tabla resume los datos presentados en el cuadro anterior que corresponde a LUCIA.. Teniendo en cuenta el dinero ganado por LUCIA, completa la tabla.

Dinero ganado (Pesos)	Frecuencia (Número de días)
	9
11.650	
13.800	
	3
25.215	1
TOTAL	30

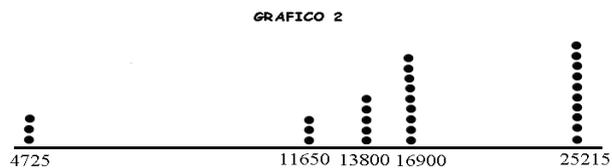
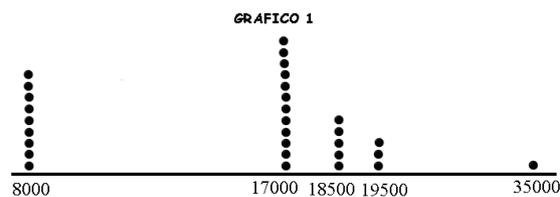
Tabla 1. Tabla de frecuencias correspondiente

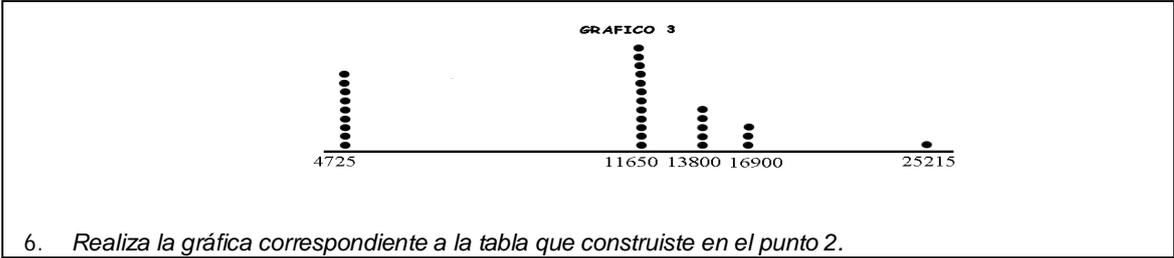
al dinero el dinero ganado por LUCIA

2. Construye la tabla de frecuencias correspondiente al dinero ganado por JAVIER.
3. Se le pide a tres estudiantes determinar el valor numérico que mejor estima el dinero ganado diariamente por LUCIA.

Teniendo en cuenta la Tabla 1, las estudiantes respondieron de la siguiente manera:

- Ⓜ **Karina** dice que un cálculo apropiado del dinero diario ganado por LUCIA es \$14.458.
 - Ⓜ **Claudia** afirma no estar de acuerdo con Karina porque ella no está teniendo en cuenta que son 30 días, y por lo tanto asevera que un mejor cálculo del dinero diario ganado por LUCIA es \$10.908.
 - Ⓜ **Lorena** por su parte, dice que para ella el valor que mejor representa el dinero diario ganado por LUCIA es \$11.650.
- a. Averigua cuál fue el procedimiento seguido por cada una de las tres estudiantes para dar su respuesta e indica si corresponden a una medida estadística de tendencia central.
 - b. Explica con cuál de las tres estudiantes estás de acuerdo, o indica si consideras que hay otro valor que mejor representa el dinero diario ganado por Lucía. Justifica tu respuesta.
4. A las mismas estudiantes se les pregunta ahora por el valor que mejor representa el dinero ganado diariamente Javier; en este caso sus respuestas fueron:
 - Ⓜ **Karina** dice que aproximadamente es \$36.783.
 - Ⓜ **Claudia** afirma que es \$8.000.
 - Ⓜ **Lorena** alega que es \$13.290.
 - a. Verifica si los procedimientos empleados por las estudiantes para hallar estos valores fueron los mismos que cada una usó en el caso anterior.
 - b. Explica en este caso con cuál de las tres estás de acuerdo, o indica si consideras que hay otro valor que mejor representa el dinero diario ganado por Javier. Justifica tu respuesta.
5. ¿Cuál de las siguientes gráficas corresponde a los valores de la Tabla 1? Justifica tu elección.





5. ANALISIS Y PRESENTACION DE RESULTADOS

La implementación de la secuencia de tareas propuestas, se llevo a cabo con estudiantes de grado sexto de la Escuela Normal Superior Distrital María Montessori. La elección del nivel de escolaridad de los estudiantes atendió tanto a las sugerencias curriculares establecidas por la Institución como a los propósitos del proyecto de investigación en el que se establece un marco conceptual que explicita la necesidad de impulsar el desarrollo de procesos de alfabetización y razonamiento estadístico, entre otros.

Teniendo en cuenta la carga académica de la docente investigadora, se seleccionaron inicialmente cuatro grupos: el grupo 1, que corresponde al grado 603, el cual está conformado por 40 estudiantes, todos repitentes. Y los grupos 2, 3 y 4, correspondientes a los grados 606, 607 y 608, conformados por 42 estudiantes cada uno, que incluyen estudiantes antiguos tanto de la jornada de la mañana como de la tarde.

La propuesta inicial consistía en desarrollar dos de las secuencias de tareas de situaciones de conjuntos de datos: *el gasto de Ana en celular (Anexo 1)* y *el gasto de una compañía en celular (Anexo 2)* con los cuatro grupos mencionados. Sin embargo, al implementar la primera secuencia con los grupos 1 y 2, se observó una serie de dificultades comunes, principalmente relacionadas con la convivencia en el aula y la actitud de los estudiantes, que conlleva a limitar posteriormente el grupo de estudiantes con los que se desarrollo el estudio. Con referencia a las dificultades con estos primeros grupos, se considera que el hecho de que las tareas presentadas les exijan un nivel de análisis más elaborado y diferente al de simples respuestas basadas en cálculos, genera dinámicas de clase diferentes, a las cuales no están acostumbrados; lo que imposibilitó la culminación de la secuencia. Estos hechos obligaron a realizar una reflexión acerca de la posibilidad de que los comportamientos de los estudiantes se relacionaran directamente con la presentación de la actividad. Ya que teniendo en cuenta comentarios de los mismos estudiantes, se concluye que:

- El lenguaje y la estructura de las tareas eran bastante complejos, de manera que no comprendían rápidamente lo que se les solicitaba, situación que produjo un desinterés masivo.
- Los enunciados son bastantes "largos" y lo que se propone de tarea o por lo que se indaga, no es comprensible por los estudiantes, además de intentar abarcar varias cuestiones en una sola.
- En los datos presentados se emplean números con cifras decimales, lo que genera confusión, ya que estos no han sido trabajados por los estudiantes.

- La actividad propone demasiadas tareas, lo que requiere de varias sesiones que hacen que los estudiantes se desmotiven y en palabras de ellos *“otra vez vamos a ver lo mismo”*

Con el fin de suprimir o por lo menos disminuir estas dificultades, se realizó una serie de modificaciones, proponiéndose una secuencia corregida, la cual se implementa en los dos grupos faltantes: grupo 3 y 4. En estos casos, aunque los resultados fueron más alentadores, no fue posible culminar la actividad en el grupo 4, por asuntos de algunos estudiantes que intervinieron de manera conflictiva en el proceso de socialización. Mientras que en el grupo 3, aunque si la desarrollaron de manera completa, se hizo más evidente otras dificultades, relacionadas con:

- Existe una cultura de clase, que limita seriamente el trabajo; ya que por una parte, al plantearse situaciones en donde se requiere reflexionar sobre el proceso a realizar y al no proponerse el desarrollo de algoritmos, se muestra una desmotivación masiva y en cierta forma la convivencia se torna más difícil. Y de otra parte, debido a que los estudiantes no están acostumbrados a procesos de socialización son pocas las intervenciones realizadas o muy sintetizadas.
- Los estudiantes muestran apatía al proceso de lectoescritura, pues en la mayoría de casos en la que se acercan a la docente, indagan por lo que se debe hacer, y cuando esta les solicita que le comenten lo que comprendieron a través del enunciado, la respuesta mayoritaria era: *“ ¿toca leer?”*; en un tono desinteresado. Además preguntaban: *“ Es necesario escribir”*.
- Es evidente que los estudiantes están acostumbrados a que los problemas propuestos en clase, siempre se realizan bajo el mismo esquema del presentado como ejemplo y responden al tema recién visto. Por lo que al presentarles una situación en donde se articula varios conceptos trabajados en diferentes momentos, genera confusión y desmotivación.
- Para ellos el trabajo en grupo significa división de obligaciones, pues a pesar de la recomendación que la docente realiza, sobre la necesidad de que cada tarea sea desarrollada con las ideas en conjunto, se observó que o todas las tareas recaen en un solo estudiante, o cada estudiante se responsabilizaba de una de estas.

En esta etapa del estudio, se realiza una pausa, con el fin de tomar decisiones que permitan dar respuesta a la problemática planteada. Por lo que en vista de que el único grupo que permitió dar evidencias de un proceso realizado fue el grupo 3, se consideró conveniente la implementación de la segunda secuencia solo con este grupo, y con base en lo realizado por ellos, se reflexiona sobre los indicadores de razonamiento estadístico que se hacen evidentes. Cabe agregar que antes de implementar la segunda secuencia en este grupo, se realizaron algunas modificaciones considerando las dificultades ya vividas en la experiencia con la primera secuencia.

La sistematización de los resultados obtenidos por el grupo 3 en el desarrollo de las secuencias de tareas, se presentarán a continuación. El arreglo tabular constan de cuatro columnas, la primera hace referencia a la tarea propuesta, para lo cual se emplea abreviaturas tales como:

- **T1, T2, T3, ... Tn:** indican las tareas 1, 2, 3,... y la tarea n; respectivamente.
- En algunas tareas existen varios literales por lo que se emplea junto al numero la letra que indica el literal, ejemplo **T2A:** Tarea 2, literal o pregunta A.

En la segunda columna, se presentan ejemplos de respuestas dadas por los estudiantes; cuando estas son muy similares, sólo se muestra un ejemplo típico de ellas. En la tercera columna, se presenta la frecuencia del tipo de respuesta que sirve de ilustración, es decir se da cuenta de la cantidad de subgrupos que responden igual o de manera muy similar al ejemplo de respuestas presentadas. En la cuarta columna, se registran los indicadores que se evidencian en las respuestas presentadas. Y finalmente, luego del registro de ejemplos de respuestas, frecuencias e indicadores evidenciados, se presenta un comentario que pretende interpretar y complementar lo presentado en las cuatro columnas.

SECUENCIA DE TAREAS: EL GASTO DE ANA EN CELULAR

Tareas	Ejemplos de respuestas	Frecuencia	Indicadores evidenciados
T1:	<i>Ana no cumplió con su compromiso</i>	14	R10: Dar las respuestas y explicaciones estadísticas en términos del contexto de la situación
	<i>No cumplió porque cada mes debía gastar \$25000.</i> <i>No cumplió con los \$25000</i>	1	
	<i>Entre enero y septiembre porque pagó \$270000 y debía pagar \$225000, \$270000 dividido en 9 da \$30000 por cada mes y se paso \$5000 cada mes.</i>	1	

	<i>Ana no cumple con lo prometido porque gasta más, el resultado de lo que gasto fue aproximado 31764.</i>	1	
<p>Comentario. La mayoría de estudiantes estuvieron de acuerdo con la aseveración de que Ana no había cumplido su compromiso porque no tuvo el gasto de \$25000 cada mes y no agregaron más explicaciones. Una de las pocas razones en las que se extendieron con más detalle, se justifica en términos de lo que debía ser el gasto total en los 9 meses para que fuera proporcional al gasto mensual. No se identifican casos en los que se aluda a la mediana para dar explicaciones.</p>			
T2A:	<i>Sumando todos los datos y dividiendo por el total de ellos.</i>	11	<p>R13: Explicar los procedimientos realizados para la elaboración de gráficos, arreglos tabulares y cálculos de resúmenes estadísticos.</p> <p>A10: Reconocer medidas de tendencia central</p>
	<i>Haciendo la media aritmética</i>	5	
	<i>Haciendo una mediana aritmética</i>	1	
	<i>Para calcular el mayor promedio por mes se hace la siguiente operación:</i> <i>270000 dividido en 9</i>	1	
<p>Comentario: Utilizaron el término media aritmética y describieron el procedimiento para calcularla. En la segunda respuesta se evidencia que recuerdan el nombre de la media aritmética, aunque en la tercera respuesta se refieren a la media como mediana. En suma, en la mayoría de respuestas se</p>			

verifica el conocimiento del algoritmo correspondiente a la media aritmética.			
T2B:	<i>Porque no comprende el concepto de medida estadística</i>	1	<p>A11: Reconocer la utilidad de las medidas de tendencia central</p> <p>A14: Reconocer que el valor obtenido para las medidas de tendencia central puede no ser parte de los datos</p> <p>R5: Explicar por qué una determinada medida de tendencia central no siempre es la mejor representante</p>
	<i>Porque ella no hizo la operación correcta</i>	2	
	<i>Porque pudo hacer mal la media aritmética</i>	1	
	<i>Porque Ana no calculó ninguna medida estadística.</i>	1	
	<i>No porque no cumplió el concepto de la moda.</i>		
	<i>Porque hay gastos menores de 30000</i>	1	
	<i>Porque Ana no gastó lo suficiente para 30000</i>	1	
	<i>Porque ningún precio llega hasta allá (excepto agosto)</i>	1	
	<i>Porque ella pagaba su recibo cada mes sin darse cuenta de su verdadero valor que representaba una falta para su compromiso.</i>	2	
<p>Comentario: De los primeros cinco ejemplos de respuesta se infiere que lo que les importa es que los cálculos estén bien hechos y no valoran ni observan la relevancia misma de justificar la representatividad de la media aritmética en el contexto de la situación. El resto de respuestas se centra en la comparación general del valor de \$30000 con los demás datos dados explicando que estos son</p>			

menores, pero no se repara en ninguna respuesta la presencia del valor atípico que está en los datos.

T2C:	<i>No, porque ella no cumplió con las cuentas correctas.</i>	1	<p>R10: Dar las respuestas y explicaciones estadísticas en términos del contexto de la situación</p> <p>A10: Reconocer medidas de tendencia central</p> <p>A11: Reconocer la utilidad de las medidas de tendencia central</p>
	<i>No, porque al hacer la media aritmética da aproximadamente 30000.</i>	1	
	<i>No, porque ella piensa que por tener un valor aproximado si cumplió su compromiso.</i>		
	<i>No, porque gastó más de 25000</i>	4	
	<i>No estamos de acuerdo con ella porque ella no quiere pagar lo que le corresponde verdaderamente.</i>	5	
	<i>No estoy de acuerdo porque en agosto gasto 70000.</i>	1	
	<i>Si estoy de acuerdo porque gastó lo prometido.</i>	1	

Comentario: Durante la socialización los estudiantes manifestaron su desacuerdo con Ana, y diversas justificaciones fueron alrededor de los 30000 calculados. Un subgrupo estuvo de acuerdo con Ana, ya que según ellos casi todos los valores eran de aproximadamente \$ 25000. Y solo en la penúltima respuesta los estudiantes ponen en consideración el valor atípico. De manera adicional, se quiere destacar que varios estudiantes demostraron haberse

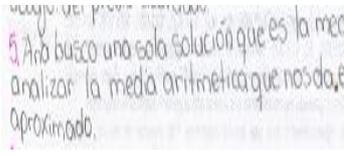
apropiado de la situación, ya que por ejemplo en la respuesta 3, los estudiantes están considerando lo que ellos mismos pensarían en caso de estar en la situación.

T3:	<i>El valor de 24900 se calculó por medio de la mediana</i>	13	A10: Reconocer medidas de tendencia central
------------	-------------------------------------------------------------	----	-------------------------------------------------------

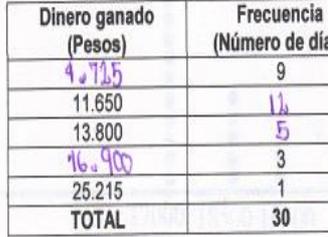
Comentario: La mayoría logró determinar que a través de la mediana se obtenía el valor de \$24900, sin embargo nadie pensó en un algoritmo diferente a los de las medidas vistas para la obtención del otro valor, de lo cual se infiere que no se puso en consideración el valor atípico. Y aunque continuamente se acercaron a la docente con el fin de que ella les diera la respuesta, esta solo intentó dar indicaciones para que ellos mismos lo descubrieran, hecho que generó molestia por parte de ellos hasta el punto de abandonar la tarea y continuar en la siguiente.

T4:	<i>30000</i>	9	R10: Dar las respuestas y explicaciones estadísticas en términos del contexto de la situación A10: Reconocer medidas de tendencia central
	<i>Entre 24600 y 25500 a excepción de agosto</i>	3	
	<i>70000 porque es el número más grande de todos los meses.</i>	1	

Comentario: los estudiantes manifestaron que el valor de 30000 era el que mejor representa el gasto, porque la operación de la media aritmética les había arrojado ese número. Sin embargo algunos consideraron un rango dentro del cual se podría validar el verdadero gasto, en términos de ellos, este rango se obtiene al observar en la lista el primer valor y el último. Por último, un grupo considera el valor atípico como el verdadero valor y no argumenta tal escogencia.

T5:		1	A10: Reconocer medidas de tendencia central
<p>Comentario: Cuando se les indagó al grupo por la respuesta dada, ellos contestaron que no importaba lo de agosto. Por lo que se les comentó que lo que se les pedía era suponer un valor que reemplazaran lo gastado realmente en agosto, para que Ana cumpliera con su compromiso, sin embargo manifestaron no entender, ni saber lo que debían hacer para dar respuesta.</p>			

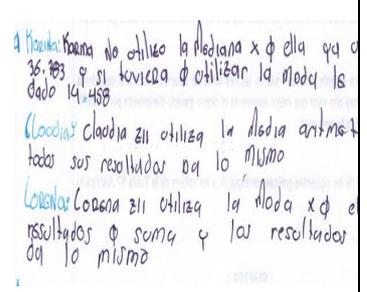
SECUENCIA DE TAREAS: VENTA DE MINUTOS DE CELULAR

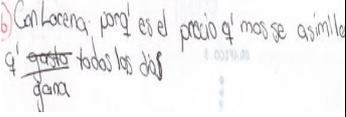
Tareas	Ejemplos de respuestas	Frecuencia	Indicadores evidenciados														
T1	 <table border="1" style="margin-left: auto; margin-right: auto;"> <thead> <tr> <th>Dinero ganado (Pesos)</th> <th>Frecuencia (Número de días)</th> </tr> </thead> <tbody> <tr> <td>4.725</td> <td>9</td> </tr> <tr> <td>11.650</td> <td>11</td> </tr> <tr> <td>13.800</td> <td>5</td> </tr> <tr> <td>16.900</td> <td>3</td> </tr> <tr> <td>25.215</td> <td>1</td> </tr> <tr> <td>TOTAL</td> <td>30</td> </tr> </tbody> </table>	Dinero ganado (Pesos)	Frecuencia (Número de días)	4.725	9	11.650	11	13.800	5	16.900	3	25.215	1	TOTAL	30	20	A6: Ordenar datos A7: Organizar datos en categorías o clases A8: Transformar información numérica a arreglos tabulares de datos
Dinero ganado (Pesos)	Frecuencia (Número de días)																
4.725	9																
11.650	11																
13.800	5																
16.900	3																
25.215	1																
TOTAL	30																
<p>Comentario: La mayoría de grupos comprendieron lo que debían realizar, solo algunos estudiantes se dirigieron a la docente a preguntar: ¿Qué hay que hacer?, pero los mismos compañeros les respondían.</p>																	

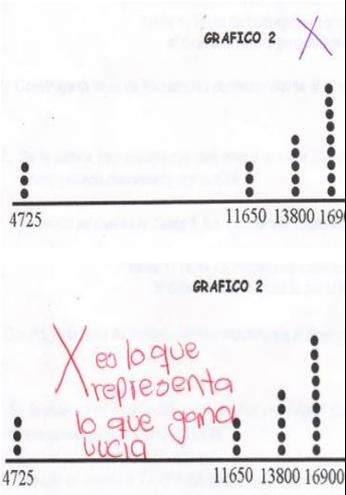
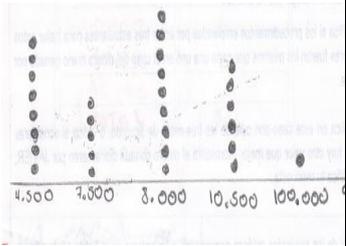
T2	<table border="1"> <thead> <tr> <th>Dinero ganado (pesos)</th> <th>frecuencia (dejas)</th> </tr> </thead> <tbody> <tr><td>4500</td><td>8</td></tr> <tr><td>7500</td><td>5</td></tr> <tr><td>8000</td><td>9</td></tr> <tr><td>10500</td><td>6</td></tr> <tr><td>90200</td><td>1</td></tr> <tr><td>100000</td><td>1</td></tr> <tr><td>TOTAL</td><td>30</td></tr> </tbody> </table>	Dinero ganado (pesos)	frecuencia (dejas)	4500	8	7500	5	8000	9	10500	6	90200	1	100000	1	TOTAL	30	19	<p>A6: Ordenar datos</p> <p>A7: Organizar datos en categorías o clases</p> <p>A8: Transformar información numérica a arreglos tabulares de datos</p>
	Dinero ganado (pesos)	frecuencia (dejas)																	
4500	8																		
7500	5																		
8000	9																		
10500	6																		
90200	1																		
100000	1																		
TOTAL	30																		
<table border="1"> <thead> <tr> <th>Jabón</th> </tr> </thead> <tbody> <tr><td>45000</td></tr> <tr><td>8000</td></tr> <tr><td>7500</td></tr> <tr><td>10.500</td></tr> <tr><td>9.200</td></tr> <tr><td>10.000</td></tr> <tr><td>total</td></tr> </tbody> </table>	Jabón	45000	8000	7500	10.500	9.200	10.000	total	1										
Jabón																			
45000																			
8000																			
7500																			
10.500																			
9.200																			
10.000																			
total																			
<p>Comentario: La mayoría de grupos preguntó a la docente si lo que debían realizar era lo mismo que habían hecho en el primer punto, a lo cual la docente les respondía: ¿Qué les están solicitando? ¿Cómo creen que es la forma correcta de realizarlo?</p> <p>un grupo no le dio importancia al orden de los datos</p>																			
T3A	<p><i>Karina no hizo nada, Claudia utilizo la media aritmética y Lorena utilizo la moda.</i></p>	3	<p>A10: Reconocer medidas de tendencia central</p> <p>A11: Reconocer la utilidad de las medidas de tendencia central</p> <p>A12: Resumir información presentada en números, arreglos tabulares</p>																
	<p><i>Karina no hizo nada, Claudia utilizo la media aritmética y Lorena utilizo la mediana.</i></p>	6																	
	<p><i>Karina no hizo nada, Claudia utilizo la media aritmética y Lorena utilizo la moda y la mediana.</i></p>	10																	

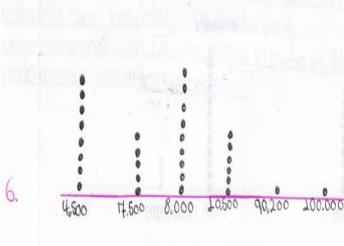
	<p>3 teniendo en cuenta la tabla las estudiantes reconocieron de la siguiente manera:</p> <p>Karina: como hizo mal el procedimiento de la suma de la tabla porque le tendió mal que del 72240 y a ella le dio 14.458 pero se le acuerdo mal.</p> <p>Claudia: claudia piensa también mal porque ella dice que los 30 días son diarios, pero no porque tenía habeses como más i habeses como menos.</p> <p>Lorena: lorena también piensa mal porque lo era el diario de ella es habeses en las semanas más bajo y en otra semana más alta.</p>	1	<p>o gráficos en valores correspondientes a medidas de tendencia central</p> <p>R3: Justificar desde la estadística la selección de medidas de tendencia central para representar una distribución de datos</p>
<p>Comentario: Muchos estudiantes manifestaron no comprender la tarea, por lo que fue necesario hacer una lectura ante todo el curso, haciendo caer en cuenta que existe un contexto que es necesario leer y que estaban omitiendo. Después de esta intervención todos los estudiantes trabajaron en la tarea sin dificultad.</p>			
T3B	<p><i>Estamos de acuerdo con Claudia, porque ella tiene la razón.</i></p>	1	<p>R10: Dar las respuestas y explicaciones estadísticas en términos del contexto de la situación</p>
	<p><i>Estamos de acuerdo con Claudia, porque representa mejor el resultado.</i></p>	1	
	<p><i>Estamos de acuerdo con Claudia, porque es mejor calcular un promedio que los demás.</i></p>	1	
	<p><i>Estamos de acuerdo con Claudia, porque la media es la más apropiada operación para estos casos.</i></p>	1	

	<i>Estamos de acuerdo con Claudia, porque hizo la media aritmética que nos dio el promedio.</i>	1	
	<i>Estamos de acuerdo con Claudia, porque el resultado es más apropiado, porque nos aproxima el resultado de todos.</i>	1	
	<i>Estamos de acuerdo con Lorena porque tenía dos medidas de la tabla</i>	3	
	<i>Estamos de acuerdo con Lorena porque tiene una opción muy buena</i>	1	
	<i>Estamos de acuerdo con Lorena porque se acerco mas al valor correspondiente</i>	1	
	<i>Estamos de acuerdo con Lorena porque tiene el valor que está en lo que gano lucía.</i>	1	
<p>Comentario: Al socializar se obtuvo de cierta manera una mejor argumentación por parte de los grupos que estuvieron de acuerdo con Claudia. Solo hubo un grupo que apoyando la opinión de Lorena comento que era la mejor medida porque el valor debía estar dentro de la tabla y el único de esos tres valores era el de 11650.</p>			
T4A	<i>Karina no realizo ninguna operación, Claudia la mediana y la moda, y Lorena la media aritmética.</i>	3	A10: Reconocer medidas de tendencia central

	<p><i>Lorena utilizo la media aritmética, Claudia utilizo la mediana y Karina utilizo la moda</i></p>	1	<p>A11: Reconocer la utilidad de las medidas de tendencia central</p> <p>A12: Resumir información presentada en números, arreglos tabulares o gráficos en valores correspondientes a medidas de tendencia central</p> <p>R3: Justificar desde la estadística la selección de medidas de tendencia central para representar una distribución de datos.</p>
	 <p><i>1 Karina: Karina no utilizo la mediana x q ella ya c 36.883 q si tuviera q utilizar la moda la dado 14.458</i></p> <p><i>Claudia: Claudia en utilizo la media aritmética todos sus resultados de lo mismo</i></p> <p><i>Lorena: Lorena en utilizo la moda x q e resultados q suma q los resultados de lo mismo</i></p>	1	
<p>Comentario: Existió dificultad para realizar esta tarea, ya que muchos estudiantes preguntaban " Que hay que hacer", para lo cual la docente les solicitaba una nueva lectura y relacionaran con el punto anterior, sin embargo muchos estudiantes manifestaron apatía a esta tarea ya que según ellos no tenía sentido volver hacer lo mismo.</p> <p>Los grupos que trabajaron se dedicaron a realizar los procedimientos y ninguno mencionó si se trataban o no de los mismos empleados por estas estudiantes en el caso de Lucia. Solo cuando se estaba socializando algunos estudiantes manifestaron que no se trataban de los mismos procedimientos.</p>			
T4B	<p><i>Estamos de acuerdo con Lorena porque dice el verdadero valor.</i></p>	1	<p>R10: Dar las respuestas y explicaciones</p>

	<i>Estamos de acuerdo con Lorena porque utilizo la media aritmética, que es el procedimiento más adecuado.</i>	1	estadísticas en términos del contexto de la situación
	<i>Estamos de acuerdo con Lorena porque es lo más razonable.</i>	1	
	<i>Estamos de acuerdo con Lorena porque ella realizo la media aritmética y nos da el promedio aproximado.</i>	1	
		1	
Comentario: Varios grupos no realizaron esta tarea, y prefirieron continuar con las tareas 5 y 6, según ellos era más divertido.			
T5	<i>La grafica tres porque si comparamos la tabla 1 y la grafica verán que los datos son iguales.</i>	1	A18: Traducir información presentada en números o arreglos tabulares a gráficas A19: Evaluar la efectividad de gráficas R13: Explicar los procedimientos realizados para la elaboración de gráficos, arreglos tabulares y cálculos de
	<i>La grafica tres porque los datos están en aquella grafica.</i>	1	
	<i>La grafica tres porque tiene los datos organizados de la misma forma.</i>	3	
	<i>La grafica tres porque tienen los mismos valores de la tabla.</i>	6	

	<p>5. Elegimos el grafico 3 porque representa lo los valores ganados en minutos de celular</p>	1	resúmenes estadísticos
	 <p>5. Ninguna por que no da el mismo número.</p>	1	
<p>Comentario: La mayoría de grupos comprendió sin dificultad la tarea, y solo algunos estudiantes se dirigieron a la docente solicitando explicación.</p>			
T6		1	<p>A18: Traducir información presentada en números o arreglos tabulares a gráficas</p> <p>A19: Evaluar la efectividad de gráficas</p> <p>R13: Explicar los procedimientos realizados para la</p>

		15	elaboración de gráficos, arreglos tabulares y cálculos de resúmenes estadísticos
<p>COMENTARIO:</p> <p>No existió mayor dificultad en el desarrollo de la tarea, sin embargo los mismos estudiantes generaron discusión alrededor de si era importante o no el orden de los valores (dinero ganado).</p>			

Durante la observación, se encontró que la primera secuencia genero mayor dificultad en los estudiantes que la segunda, quizás porque a través del desarrollo de la primera, los estudiantes adquirieron cierta destreza. Además, el hecho de que se presentaban diversos sistemas de representación, hizo de cierta manera más llamativa la secuencia. De manera adicional se observó que:

En la primera secuencia, los estudiantes manifestaron estar confundidos con respecto a lo que se les indagaba, por lo que la docente realizaba diversas intervenciones para encaminar el trabajo, sin embargo, varios mostraron apatía a esta metodología, pues según ellos la docente debía explicar exactamente lo que tenían que realizar. En la tarea 1, fue necesario varios llamados a la argumentación, pues al iniciar, se vio que bastantes grupos estaban contestando sí o no, sin dar una justificación a ello. En la tarea 2, algunos grupos, la entendió inicialmente como la búsqueda de la respuesta correcta entre a, b o c, por lo que la intervención de la docente, fue dirigida a aclarar que estas no son opciones de respuestas sino preguntas independientes. En la tarea 3, los intentos no fueron más allá de los algoritmos tal cual se los habían aprendido, no vieron otras posibilidades de cálculos como el de excluir el valor atípico y dividir esta suma por un dato menos. En la cuarta tarea, al parecer los estudiantes la resolvieron en su mayoría relacionándola con el valor obtenido en la primera tarea, y solo algunos tomaron una postura diferente, a pesar de que ellos también habían obtenido el valor de \$30000 con anterioridad. Y con respecto a la quinta tarea, se presento una masiva incomprensión frente a lo solicitado, ya que a pesar de dar indicaciones como ¿si borran el valor dado para agosto, es decir si quitan el \$70000, que número colocarían para que el promedio sea \$25000?, los estudiantes o no lograban entender aun, o lo intentaban calcular por ensayo y error, lo que requería de muchos intentos, lo que tal como lo mencionaron ellos, agotaba y aburría. Algunos grupos se contradecían constantemente, pues

afirmaban con terquedad que Ana no cumplió su compromiso porque había gastado 30000, y sin embargo estaban de acuerdo con ella en que lo que había gastado realmente era 24900 o si acaso 25000, y que Ana tenía razón en que 30000 no representaba su verdadero gasto.

Con relación a la segunda secuencia, se evidenció que la primera tarea no generó mayor confusión y solo pocos estudiantes indagaron por lo que debía hacerse. De manera similar se desarrolló la segunda tarea, la pregunta más común en este caso, fue: ¿toca hacer lo mismo que en la primera? En las tareas 3 y 4, se observó más dificultad, por lo que fue necesario reiteradas intervenciones de la docente, haciendo alusión a la necesidad de leer de manera completa y correcta cada enunciado, pues los estudiantes que preguntaban, no mostraban haber leído; sin embargo se considera que después de los llamados de atención se logró encaminar a que la mayoría de estudiantes comprendieran. Algo interesante que surgió al escuchar varios grupos es que según muchos de ellos en las tareas tres y cuatro, las tres opiniones, la de Lorena, Claudia y Karina, debían corresponder a las tres medidas de tendencia central trabajadas, para algunos era obligatorio hacer corresponder a cada una de las estudiantes, una única medida de tendencia central, mientras que para otros grupos aunque no fuera necesario estrictamente esta correspondencia si era ineludible incluir de alguna manera las tres medidas. Finalmente las tareas 5 y 6, lograron un nivel de atención y motivación en los estudiantes, que hizo que un alto porcentaje no tuviera inconvenientes en resolverlas.

Respecto a los indicadores, es claro que la alfabetización es el proceso más evidente en los estudiantes y que está en el trabajo en el aula, el avance del proceso de razonamiento. En el caso de pensamiento estadístico, sería necesario analizar en otro momento, quizás cuando los estudiantes hayan completado cierta trayectoria de su formación, con el fin de hacer una aproximación más apropiada. Indicadores como A10, A11 y R10, se hacen presentes de manera similar en las dos secuencias, lo que hace considerar que los estudiantes reconocen en la mayoría de los casos, la relación de los enunciados con las medidas estadísticas de media, moda y mediana, y además, sus justificaciones intentan hacerlas en términos de estas y coherente con el contexto de la situación, aunque en algunas ocasiones no son precisas.

En ambas secuencias muy pocos grupos dieron cuenta de cuál era la medida adecuada para representar los datos y el porqué, sin embargo se considera significativo el intento, ya que en la tarea 3 de la primera secuencia algunos estudiantes mencionan la necesidad de que Ana hubiese calculado adecuadamente las medidas estadística, infiriéndose que si ella hubiese hecho esto se podría dar cuenta si había cumplido o no con su compromiso; en esta parte se hace evidente para estos estudiantes el indicador R5. En la tarea 4 de la segunda secuencia, se evidencia el indicador R3, ya que en este caso una cantidad más notable de estudiantes, intentan justificar a partir de las medidas

estadísticas la escogencia de estas por cada uno de los personajes de la situación. De manera adicional en la primera secuencia, se hace presente los indicadores R13 y A14, el primero se evidencia en el desarrollo de la tarea dos literal A, ya que al cuestionárseles por la forma como se obtuvo el valor de \$30000, ellos acudieron a una explicación escrita de la operación y en algunos casos la mostraron matemáticamente, es decir que están dando la explicación de los procedimientos para el cálculo del resumen estadístico que se presenta al proponerles el valor de \$30000. El segundo, en el desarrollo de la tarea dos literal B, aunque para este caso no se podría afirmar con certeza que realmente estén viendo que el valor de una medida no siempre está dentro de los datos, por lo que al parecer este indicador es visible pero en forma opuesta, pues se pone más a consideración el hecho de que para algunos estudiantes el valor de \$30000 no es válido porque no se encuentra en los datos dados.

En la segunda secuencia, se hacen presentes otros indicadores como A6, A7, A8, A18, A19 y R13; los primeros tres indicadores se evidencian en las dos primeras tareas, pues los estudiantes requerían de ordenar datos, organizarlos por categorías y transformar información numérica a arreglos tabulares, lo cual fue desarrollado por la mayoría de los estudiantes sin dificultad. Para el caso de los otros tres indicadores, las dos últimas tareas (5 y 6) muestran que los estudiantes tienen la habilidad de que a partir de la información presentada en números u organizados por ellos en tablas, seleccionen la grafica correspondiente, lo que al mismo tiempo requería de evaluar las opciones presentadas o la propuesta por ellos, además, debían explicar el procedimiento seguido para validar la grafica escogida en el caso de Lucia y proponer de manera coherente la grafica de Javier.

En resumen se obtiene

INDICADOR	SECUENCIA 1	SECUENCIA 2
A6		T1,T2
A7		T1,T2
A8		T1,T2
A10	T2A, T2C, T3, T4, T5	T3A, T4A
A11	T2B, T2C	T3A, T4A
A12		T3A, T4A

A14	T2B	
A18		T5, T6
A19		T5, T6
R3		T3A, T4A
R5	T2B	
R10	T1, T2C, T4	T3B, T4B
R13	T2A	T5, T6

7. CONCLUSIONES

Las conclusiones aquí presentadas, se clasifican en cinco apartados teniendo en cuenta los aspectos trabajados, así, el primero hace referencia a las reflexiones realizadas alrededor de las trayectorias hipotéticas en términos del desarrollo de las secuencias de tareas y el proceso de socialización. El segundo presenta una síntesis de las dificultades halladas en el estudio, relacionadas con el trabajo en el aula; el tercero expone las conclusiones respecto a las situaciones de conjunto de datos, mencionando su incidencia en los estudiantes. El cuarto menciona aspectos generales de las secuencias como parte de un experimento de enseñanza y por ende se considera como una aproximación a esta metodología. Finalmente, en el quinto apartado se hace alusión explícita de los indicadores que se evidenciaron en los estudiantes.

Acerca de las trayectorias hipotéticas

Con respecto a las trayectorias hipotéticas de aprendizaje planteadas se pueden mencionar los siguientes asuntos:

- En la primera secuencia algunos estudiantes intuyen que el valor de 70000 como valor atípico debe afectar en la distribución, sin que den cuenta del cómo y el porqué. A diferencia de lo que se pretendía, la mayoría de los estudiantes no reconocen que la media no tiene que ser igual a uno de los datos, es decir, que puede ser un dato distinto a los de los datos dados y no necesariamente entero. De otra parte, algunos estudiantes si se aproximan a la idea de media como una medida de centro donde se compensan los excesos de los valores con los defectos con respecto al valor de la media; además, no fue tan evidente que los estudiantes por sí mismos lograran construir los conjuntos de datos a partir de las indicaciones dadas; la mayoría no reconoce características comunes en las distribuciones de datos que conllevan a una selección de la media o de la mediana como una medida de tendencia central que mejor estima un valor representativo de los datos. Por último, aunque se esperaba que los estudiantes hicieran una conexión coherente entre las tareas de manera que les permitiera consolidar sus conocimientos sobre las medidas de tendencia central en este caso y en otros, existió evidencia de que a algunos grupos se les dificultó.
- En la segunda secuencia, tal como se había planteado hipotéticamente los estudiantes lograron sin mayor dificultad construir las tablas de frecuencia absolutas, teniendo los datos extendidos y una tabla parcialmente construida; sin embargo al igual que en la primera secuencia no hay evidencia clara que permita afirmar que los estudiantes tuvieron en cuenta los valores atípicos para

elegir de forma justificada, la medida de tendencia central que mejor representa las distribuciones presentadas. Y aunque la fórmula y el algoritmo para el cálculo de la media y mediana, no produce confusión, no reconocen el error para el caso en donde se incluye un valor resultante de un procedimiento que no tiene en cuenta las frecuencias; y finalmente, la mayoría comprende la gráfica de la distribución de datos en forma de líneas verticales de puntos, y elaboran la gráfica solicitada sin mayor inconveniente.

- Respecto a las ideas para la socialización, se concluye que son una buena herramienta en el momento de realizar el trabajo real, ya que aunque no se puede predecir con certeza lo que va acontecer, si permite abrir posibilidades de manejo cuando aparecen justificaciones o dudas que no se habían contemplado en un inicio. Además, se considera que las socializaciones constituyeron un excelente espacio tanto para el estudiante como para la docente, ya que permite que el estudiante se ubique y reconozca sus necesidades en relación con su conocimiento respecto al tema, y permite a la docente analizar sobre lo que se ha realizado en el aula y lo que se debe mejorar.

Acerca de las dificultades encontradas

Las siguientes consideraciones están directamente ligadas a las dificultades halladas durante la implementación de las secuencias y comentadas de manera general en los resultados, las cuales son analizadas no solo a través de las respuestas escritas sino por medio de lo observado por la docente investigadora durante las sesiones empleadas. Las cuales se resumen así:

- Es necesario generar un cambio en las creencias de los estudiantes sobre la clase de matemáticas, para ello, es necesario generar en ellos dinámicas de trabajo diferentes, pues a través del ejercicio repetitivo bajo ciertas condiciones, los estudiantes se acostumbran a unas normas de trabajo y comportamiento que son difíciles de modificar. Esto se pone a consideración, ya que de manera clara se evidenció un choque entre la manera como se desarrollo las secuencias a como consideraban era correcto realizar una clase. Además, en un inicio manifestaron inconformidad al tener que proponer respuestas de manera argumentada. Pues, están convencidos que los conocimientos matemáticos no se pueden combinar y los ejercicios deben ser exclusivos y ligados únicamente al tema recién visto. Cuando se solicita algo adicional, la respuesta por parte de ellos es "usted no nos explicó esto". Por todo esto, se considera conveniente continuar con actividades que vayan más allá de los ejercicios numéricos o problemas matemáticos y de esta manera cambiar tal perspectiva.
- Existe una clara dificultad no solo por la falta de comprensión al leer, sino por la pereza que da este ejercicio, sumado al de escritura; la cual produce una apatía mayor. De lo observado se infiere que existe aun en nuestra población

la creencia de que la matemática es exclusivamente numérica y que procesos como el de lectoescritura no deben incluirse.

- Se observó un disgusto masivo por las continuas indagaciones del docente, que pretendía no solo reconocer indicadores de razonamiento de los estudiantes, sino que a través de las respuestas ellos mismos reconocieran la coherencia de estas.
- Es necesario aumentar esfuerzo por que el denominado trabajo en equipo, se transforme en trabajo colaborativo; pues aun se les dificulta resolver una situación con participación del otro, pues en la mayoría de grupos las decisiones las tomaba una sola persona, o simplemente se repartían el trabajo.

Acerca de las situaciones de conjuntos de datos

Tal como se planteo en el problema, las medidas de tendencia central son trabajadas desde lo algorítmico, sin comprender su significado. Esta dificultad se hizo notoria no solo en los escritos de los estudiantes sino en los diferentes momentos de interacción; sin embargo, se considera que las situaciones propuestas, permitieron que los estudiantes reflexionaran sobre la comprensión real de un determinado tema, es decir que de cierta manera, entendieron que el conocimiento va más allá de la mecanización de un procedimiento.

Las situaciones propuestas cumplieron un papel diferente al de evaluación, se convirtieron en un medio para que los estudiantes comprendieran la existencia de otros contextos de aplicación diferente a los problemas y ejercicios rutinarios. Además, parece importante el hecho de que las situaciones presentaran un entorno conocido para ellos, pues muchos estudiantes se apoderaron cómo si ellos fueron los protagonistas.

Finalmente se considera, que aunque las situaciones de conjuntos de datos que hacían parte de las secuencias de tareas, requieren de algunas modificaciones, sobretodo con relación a la redacción, se considera que la estructura de cada una de estas y de todas en conjunto, cumplieron con el objetivo enriquecedor de permitir a los estudiantes avanzar, además de ampliarles el campo de acción de las medidas estudiadas.

Acerca de la aproximación a los experimentos de enseñanza

Se considera que en cuanto a los experimentos aplicados, es conveniente reestructurar algunas aspectos, que aporten no a evidenciar las dificultades sino a superarla, modificando términos y la presentación de cada secuencia, de manera que sea más llamativo y más comprensible para los estudiantes, obviamente sin modificar su intencionalidad. De otra parte y a pesar del rechazo inicial por este tipo de dinámicas en el aula, se considera que los experimentos abren una ventana para que los estudiantes comprendan que los espacios académicos no se

deben restringir por una sola forma de actuar ni del docente ni de ellos mismos. Es decir, que en cierta forma estos dan pie para que ellos modifiquen la cultura de la clase de matemáticas que ha sido dispuesta en grados inferiores. Adicional, se considera que al incluir otros aspectos que hagan de las secuencias un verdadero experimento de enseñanza, conllevaría a potenciar la reflexión de los docentes acerca de su propia práctica y por consiguiente traería consigo progresos esperados en los estudiantes, y que a través de la continua evaluación de estos se podrá lograr promover los indicadores suficientes para lograr que nuestros estudiantes desarrollen los procesos estadísticos de alfabetización, razonamiento y pensamiento.

De otra parte, se considera prioritario que en un nuevo intento se tengan en cuenta todos los factores externos que pueden afectar el trabajo en el aula y por ende dificultar el desarrollo correcto y completo de las secuencias de tareas, además de incluir todos los aspectos que un verdadero experimento de enseñanza requiere; por nombrar algunos, testigo de episodios y disponibilidad de tiempo suficiente.

Acerca del razonamiento de los estudiantes

Los indicadores muestran que los estudiantes hacen más uso de las habilidades de alfabetización que de razonamiento, ya que como se indicó en los resultados, mientras en el desarrollo de las secuencias se hicieron evidentes 9 indicadores de alfabetización, tan solo fueron 4 los de razonamiento. Además, al comparar las dos secuencias de tareas se ve claramente que en el desarrollo de la segunda, estos indicadores se hicieron más notorios, lo que conlleva a pensar que los estudiantes avanzaron en su proceso de aprendizaje, logrando comprender más, no solo en lo que se les solicitaba sino en la manera como debían intervenir en esta.

Lo anterior se ve reflejado en el hecho de que los estudiantes comprenden elementos básicos con relación al análisis de datos, pues son capaces de recolectar datos, ordenarlos, y organizarlos en categorías sencillas. Además, reconocen la necesidad de las medidas de tendencia central, aunque no establecen con claridad cuál es el mejor representante según la situación. Mientras que, las representaciones en tablas y gráficos, parece corresponder a los indicadores más trabajados y desarrollados por los estudiantes, ya que se les facilitó la transformación de información numérica a arreglos tabulares de datos, resumir información presentada en números, arreglos tabulares o gráficos; la traducción de información presentada en números o arreglos tabulares a gráficas, y la efectividad de estos.

De otra parte, los indicadores de razonamiento que se desarrollaron están relacionados con las explicaciones dadas tanto en términos estadísticos como del contexto, sobre la selección de cierta medida o acerca de la realización de una representación ya sea gráfica o tabular de un conjunto de datos.

Por último, se considera que aunque estos indicadores de razonamiento que se desarrollaron, marcan una pauta importante en este proceso, es necesario continuar en busca de un mejoramiento, ya que existen evidentes dificultades de comprensión, que solo serán posible superar cuando se logren desarrollar todas las habilidades que permitan un mejor razonamiento. Como ejemplo de esta necesidad se menciona el hecho de que existían tareas específicas que buscaban que los estudiantes reconocieran la implicación de valores atípicos en una distribución de datos, sin embargo los estudiantes omitieron esta condición.

REFERENCIAS

- Batanero, C. (2002). Los retos de la cultura estadística. *Jornadas Interamericanas de Enseñanza de la Estadística*, Buenos Aires. Conferencia inaugural.
- Batanero, C; Arteaga, P. y Contreras, M. (2011). El currículo de estadística en la enseñanza obligatoria. *Revista de educación matemática y tecnología iberoamericana*, (2).
- Blanco, M. (2003) Desarrollo del pensamiento estadístico en escolares primarios
- Ben-Zvi, D. y Garfield, J. (2004). Statistical literacy, reasoning and thinking: Goals, definitions and challenges. In D. Ben-Zvi y J. Garfield (Eds.), *The challenge of developing statistical literacy, reasoning and thinking*. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.
- Canada, D. (2004). *Elementary preservice teachers' conceptions of variation* (Tesis doctoral). Portland: Portland State University.
- Chance, B. (2002). Components of statistical thinking and implications for instruction, and assessment. *Journal of Statistics Education*, 10 (3).
- Cobb, P. (2000). Conducting teaching experiments in collaboration with teachers. En A. Kelly y R. Lesh (Eds.), *Handbook of research design in mathematics and science education* (pp. 307–333). Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum Associates, Publishers.
- Confrey, J. y Lachance, A. (2000). Transformative teaching experiments through conjecture driven research design. En A. Kelly y R. Lesh (Eds.), *Handbook of research design in mathematics and science education* (pp. 231–265). Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum Associates, Publishers.
- delMas, R. (2002). Statistical Literacy, Reasoning, and Learning: A Commentary. *Journal of Statistics Education*, 10 (3).
- Fernández, F., Andrade, L. y Sarmiento, B. (2010) Experimentos de enseñanza para el desarrollo de razonamiento estadístico con estudiantes de secundaria.
- Fernández, F., Sarmiento, B. y Soler, N. (en prensa). *Estadística y probabilidad en la escuela secundaria*. Bogotá: Universidad Pedagógica Nacional.
- Grahan, J, Nisbet, S, Perry, B. Putt, I. (2001) Assessing and Fostering Children's Statistical Thinking.
- Gal, I. (2002). Adult's statistical literacy: Meaning, components, responsibilities. *International Statistics Review*, 70, 1-52.

- Gal, I. (2000). *Adult numeracy development: Theory, research, practice*. Cresskill, NJ: Hampton Press.
- Garfield, J. (2002). The challenge of developing statistical reasoning. *The American Statistical Reasoning Journal or Statistics Education*, 10 (3).
- Garfield, J. (1999). Thinking about statistical reasoning, thinking, and literacy. Paper presented at First Annual Roundtable on Statistical Thinking, Reasoning and Literacy (STRL-1).
- Godino, J.D., Batanero, C. y Cañizares, M. (1987). *Azar y probabilidad. Fundamentos didácticos y propuestas curriculares*. Madrid: Síntesis.
- Jones, G., Thornton, C., Langrall, C., Mooney, E., Wares, A., Jones, M.R., Perry, B., Putt, I.J. y Nisbet, S. (2001). Using students' statistical thinking to inform instruction. *Journal of Mathematical Behavior*, 20, 109–144.
- Lesh, R. y Kelly, A. (2000). Multitiered teaching experiments. En A. Kelly y R. Lesh (Eds.), *Handbook of research design mathematics and science education* (pp. 197-230). Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum Associates, Publishers.
- Ministerio de Educación Nacional (2003). *La revolución educativa. Estándares básicos de matemáticas y lenguaje para la Educación básica y media*.
- Ministerio de Educación Nacional (1998). *Lineamientos curriculares en matemáticas*. Bogotá: Ministerio de Educación Nacional.
- Ministerio de Educación Nacional (2000). *Estándares curriculares en matemáticas*. Bogotá: Ministerio de Educación Nacional.
- Molina, M. (2006). Desarrollo de pensamiento relacional y comprensión del signo igual por alumnos de tercero de educación primaria (pp. 261-290). (Tesis doctoral). Departamento de Didáctica de la Matemática, Universidad de Granada, España.
- Moore, D. (1998). Discussion: What shall we teach beginners? *International Statistical Review*, 67, 250-252.
- Mokros, J. y Russell, S. (1995). Children's concepts of average and representativeness. *Journal for Research in Mathematics Education*, 26 (1), 20-39.
- NCTM (2000). *Principles and standards for school mathematics*. Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.
- Rumsey, D. (2002). Statistical literacy as a goal for introductory statistics courses. *Journal of Statistics Education*, 10 (3). The Ohio State University.
- Sedlmeier, P. (1999). *Improving statistical reasoning. Theoretical models and practical implication*. Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum Associates, Publishers.

- Shaughnessy, J., y Pfannkuch, M. (2002). How faithful is Old Faithful? Statistical thinking: A story of variation and prediction. *Mathematics Teacher*, 95 (4), 252-270
- Steffe, L.P. y Thompson, P.W. (2000). Teaching experiments methodology: Underlying principles and essential elements. En A. Kelly y R. Lesh (Eds.), *Handbook of research design in mathematics and science education* (pp. 267–306). Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum Associates, Publishers.
- Simon, M. (1995). Reconstructing mathematics pedagogy from a constructivist perspective. *Journal for Research in Mathematics Education*, 2 (26), 114-145.
- Snell, L. (1999). Using chance media to promote statistical literacy. Joint Statistical Meetings
- Watson, J. (1997). Assessing statistical thinking using the media. En I. Gal y J. Garfield (Eds.), *The Assessment Challenge in Statistics Education* (pp. 107-121). Amsterdam: IOS Press and International Statistical Institute.
- Wild, C.J. y Pfannkuch, M. (1999). Statistical thinking in empirical enquiry, *International Statistical Review*, 67, 223 –265. (Traducción de Román Hernández Martínez).

ANEXOS

Anexo 1: Secuencia de tareas "El gasto de Ana en celular".

Anexo 2: Secuencia de tareas "El gasto de una compañía de celular"

Anexo 3: Escritos de los estudiantes.

Anexo 1

El gasto de Ana en celular

1. El dinero gastado por Ana en minutos de celular de un plan pos-pago durante los meses de enero a septiembre fue: \$24.600, \$24.800, \$25.450, \$24.900, \$25.500, \$24.700, \$24.550, \$69.900 y \$25.600, respectivamente. Si Ana se ha comprometido a gastar máximo \$25.000 por mes, al considerar el valor de \$30.000 como representante de su gasto mensual, se observa que Ana no está cumpliendo con su compromiso. Ana manifiesta que este valor no estima su verdadero gasto. ¿Cómo se calculó ese valor y cuál crees que podría ser la razón para hacer su afirmación?
2. Ana dice que el valor que mejor estima el dinero gastado mensualmente es \$24.900, o si acaso el valor de \$25.012,50. Explica cómo se calculó cada uno de estos valores y a qué medidas estadísticas corresponden cada uno de esos valores.
3. ¿Cuál es el valor que tú crees que estima mejor el gasto mensual de Ana? Justifica tu respuesta.
4. Teniendo en cuenta el dinero gastado por Ana durante los meses de enero a septiembre, ¿cuál debería ser el dinero gastado en el mes de agosto para el que la media del dinero gastado sea \$25.000? Explique el proceso realizado.

Socialización 1

5. Además, Ana alega que si se toma la misma medida estadística considerada en el punto 1 para estimar el dinero gastado mensualmente en minutos de celular durante el año anterior, ella gastó \$21.000 al mes, menos dinero del que se había comprometido para ese año, \$23.000. El dinero gastado por Ana en nueve meses del año pasado fue: \$23.600, \$23.800, \$24.400, \$23.000, \$23.100, \$24.000, \$23.800, \$0, \$23.300. Teniendo en cuenta los argumentos de los puntos 1 y 2, ¿cuál es tu posición con respecto a la medida estadística que mejor estima el dinero gastado mensualmente por Ana el año anterior? Justifica tu respuesta.
6. Si mensualmente Ana usa aproximadamente 130 minutos de celular, sugiere cuáles podrían ser los minutos de celular que utilizó durante seis meses, para que la media y la mediana de los minutos empleados sean muy distintos, y la mediana sea el valor que mejor estima los minutos utilizados mensualmente.
7. La media del dinero gastado en minutos de celular al mes, durante seis meses, por el hermano de Ana es \$23.000, la cual coincide con el valor de la mediana. Si se sabe que gastó \$17.000 el segundo mes, ¿cuál pudo haber sido el gasto del hermano en los otros cinco meses?

Socialización 2

Anexo 2

El gasto de una compañía en celular

En los siguientes cuadros se presenta el dinero gastado diariamente en minutos de celular, por una compañía afiliada a dos empresas de telefonía celular.

COMCEL									
6.900	6.900	5.215	.725	.725	.725	1.650	1.650	1.650	1.650
1.650	1.650	1.650	1.650	.725	.725	.725	.725	1.650	1.650
.725	.725	1.650	1.650	3.800	3.800	3.800	3.800	3.800	6.900

MOVISTAR									
.500	.500	.500	.500	.500	.500	.500	.500	.500	.500
.000	.000	0.500	0.500	0.500	0.500	0.500	0.500	0.200	00.000
.500	.500	.500	.000	.000	.000	.000	.000	.000	.000

8. La siguiente tabla resume los datos presentados en el cuadro anterior que corresponde a Comcel. Teniendo en cuenta el gasto de la compañía en minutos de Comcel, completa la tabla.

Gasto diario (Pesos)	Frecuencia (Número de días)
-------------------------	--------------------------------

		9
	11.650	
	13.800	
		3
	25.215	1
	TOTAL	30

Tabla 1. Tabla de frecuencias correspondiente al dinero gastado por la compañía en minutos de Comcel

9. Construye la tabla de frecuencias correspondiente al dinero gastado por la compañía en minutos de Movistar.

Socialización 1

10. Se le pide a tres estudiantes determinar el valor numérico que mejor estima el dinero gastado diariamente por la compañía en minutos de Comcel. Teniendo en cuenta la Tabla 1, las estudiantes respondieron de la siguiente manera:
- ☉ **Karina** dice que el valor numérico que estima el dinero diario gastado por la compañía en minutos de Comcel es \$14.458.
 - ☉ **Claudia** afirma no estar de acuerdo con Karina porque ella no está teniendo en cuenta que son 30 días, y por lo tanto asevera que el valor que mejor estima el dinero gastado diariamente por la compañía en minutos de Comcel es \$10.908.
 - ☉ **Lorena** por su parte, dice que para ella el valor que mejor estima el dinero diario gastado por la compañía en minutos de Comcel es \$11.650.
- a. Averigua cuál fue el procedimiento seguido por cada una de las tres estudiantes para dar su respuesta e indica si corresponden a una medida estadística de tendencia central. Explica con cuál de las tres estudiantes estás de acuerdo, o indica si consideras que hay otro valor que estima mejor el dinero gastado diariamente por la compañía en minutos de celular de Comcel. Justifica tu respuesta.
11. A las mismas estudiantes se les pregunta ahora por el valor que mejor estima el dinero gastado diariamente por la compañía en minutos de Movistar; en este caso sus respuestas fueron:
- ☉ **Karina dice que es \$36.783,3**
 - ☉ **Claudia afirma que es \$8.000.**

📍 Lorena alega que es \$13.290.

- Verifica si los procedimientos empleados por las estudiantes para hallar estos valores fueron los mismos que cada una usó en el caso anterior.
- Explica en este caso con cuál de las tres estás de acuerdo, o indica si consideras que hay otro valor que estima mejor el dinero gastado diariamente por la compañía en minutos de celular de Movistar. Justifica tu respuesta.

Socialización 2

12. ¿Cuál de las siguientes gráficas corresponde a los valores de la Tabla 1? Justifica tu elección.

