ANÁLISIS DE LAS TAREAS ASOCIADAS A LA PROPORCIONALIDAD GEOMÉTRICA Y LA SEMEJANZA, PRESENTES EN LIBROS DE TEXTO DE MATEMÁTICAS

AURA LUCÍA QUINTERO POVEDA

MARÍA JUDITH MOLAVOQUE MEDINA

UNIVERSIDAD PEDAGÓGICA NACIONAL
FACULTAD DE CIENCIA Y TECNOLOGÍA
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS
MAESTRÍA EN DOCENCIA DE LA MATEMÁTICA
BOGOTÁ D.C., FEBRERO DE 2012

ANÁLISIS DE LAS TAREAS ASOCIADAS A LA PROPORCIONALIDAD GEOMÉTRICA Y LA SEMEJANZA, PRESENTES EN LIBROS DE TEXTO DE MATEMÁTICAS

AURA LUCÍA QUINTERO POVEDA
MARÍA JUDITH MOLAVOQUE MEDINA

ASESOR
EDGAR ALBERTO GUACANEME SUÁREZ

Trabajo de grado presentado para optar al título de Magister en Docencia de la Matemática

Para todos los efectos, declaramos que el presente trabajo es original y de nuestra total autoría; en aquellos casos en los cuales hemos requerido del trabajo de otros autores o investigadores, hemos dado los respectivos créditos

UNIVERSIDAD PEDAGÓGICA NACIONAL
FACULTAD DE CIENCIA Y TECNOLOGÍA
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS
MAESTRÍA EN DOCENCIA DE LA MATEMÁTICA
BOGOTÁ D.C., FEBRERO DE 2012

Resumen Analítico en Educación

Tipo de documento:	Trabajo de Grado.
Acceso al documento:	Universidad Pedagógica Nacional
Título:	Análisis de las tareas presentes en libros de texto de Matemáticas asociadas a la proporcionalidad geométrica y la semejanza
Autores:	QUINTERO POVEDA, Aura Lucía; MOLAVOQUE MEDINA, María Judith
Publicación:	Bogotá, 2011, (97 páginas).
Unidad patrocinante:	Universidad Pedagógica Nacional, Facultad de Ciencia y Tecnología, Departamento de Matemáticas, Maestría en Docencia de la Matemática.
Palabras claves:	Proporcionalidad geométrica, Semejanza, Teoría de los significados sistémicos, Análisis de textos.

Descripción: El documento presenta un análisis de un conjunto de tareas, a través de las cuales se hace un tratamiento de la proporcionalidad geométrica y la semejanza, en una colección de libros de texto escolares de matemáticas. Este análisis se hace utilizando las categorías de la Teoría de los Significados Sistémicos (TSS) y el resultado del análisis del Libro VI de *Elementos* de Euclides hecho bajo estas mismas categorías.

Fuentes: Para comprender la Teoría de los significados sistémicos se estudiaron los artículos:

Godino, J., & Batanero, C. (1994). Significado institucional y personal de los objetos matematicos. *Recherches en Didáctique des Mathemátiques , 14* (3), 325-355.

Godino, J., Batanero, C., & Font, V. (2006). The Onto-Semiotic approach to research in Mathematics Education. *Zentralblat für Didaktik der Mathematik , 38*.

En relación con el análisis del Libro VI de *Elementos* de Euclides, se usó un capítulo de un libro en prensa y una traducción al español de *Elementos*, respectivamente:

Guacaneme, E. A. (en prensa) Significados de los conceptos de razón y proporción en el Libro V de los Elementos. Universidad Distrital “Francisco José de Caldas” .

Puertas, M. L. (1994). Euclides. Elementos. Libros V-IX. 55-109.

El conjunto de tareas analizado pertenece a la colección de libros de texto de matemáticas producida por la Editorial Norma llamados Espiral.

Ardila, R., Pérez, M., Samper, C., y Serrano. (2005). Espiral 10. Bogotá: Norma.

Ardila, R. P. (2005). Espiral 7. Bogotá: Norma.

Camargo,L. y Castiblanco, A. (2007). Espiral 4. Bogotá: Norma.

Camargo, L. (2005). Espiral 5. Bogotá: Norma.

Camargo, L., Castiblanco, A., Leguizamón, C., y Samper, C. (2003). Espiral 6. Bogotá: Norma.

Castro Buitrago, R. A., Estrada García, W. F., Moreno Gutierrez, B., & Novoa Ramírez, F. (2004). *Espiral 8.* Bogotá, Colombia: Norma.

Contenido: El Capítulo 1, Generalidades del proyecto, contiene la respuesta a las preguntas sobre la justificación, el objeto, las intenciones y la metodología del estudio. El potencial impacto del libro de texto en la enseñanza de las Matemáticas (específicamente como mediador del currículo, del conocimiento del profesor y del aprendizaje del estudiante), y la necesidad de esclarecer el tratamiento de la proporcionalidad geométrica y la semejanza en el ámbito cuantitativo no numérico, son los dos *Elementos* que justifican el estudio. Este contexto de justificación lleva a plantear la pregunta ¿Cómo es el tratamiento que en los libros de texto se da a la proporcionalidad geométrica y cómo se relaciona con el concepto de semejanza?, cuya respuesta pretende esclarecer el tratamiento que se hace de la proporcionalidad geométrica y la semejanza en algunos libros de texto escolares de Matemáticas. Para intentar dar respuesta a esta pregunta se sigue una estrategia metodológica, que implica la identificación y análisis de las tareas de los libros de texto de matemáticas, desde dos perspectivas previamente estudiadas y construidas: la Teoría de los Significados Sistémicos (TSS) y el resultado del análisis del Libro VI de *Elementos* de Euclides hecho bajo estas mismas categorías.

En el Capítulo 2 se desarrolla el marco de referencia para el análisis, el cual consta tanto de la descripción general de la Teoría de los Significados Sistémicos y las categorías que la configuran, como el análisis de la teoría de la proporcionalidad geométrica expuesta en el Libro VI de *Elementos* de Euclides.

En el Capítulo 3 se reporta de manera detallada el análisis de los libros de texto. Específicamente se da cuenta del proceso de selección de los libros utilizados para el análisis y se describen de manera general algunos textos descartados y la colección de los textos escogidos. Adicionalmente se presenta el análisis de las tareas seleccionadas que hacen alusión a la proporcionalidad geométrica y a la semejanza en el ámbito cuantitativo no numérico.

En el capítulo 4 se sintetizan los resultados del análisis y se presentan las conclusiones del estudio.

Metodología: Para lograr los objetivos propuestos, para hacer este trabajo se realizaron ciertas fases que se pueden resumir como sigue:

Estudio de la Teoría de los significados sistémicos (TSS): Se estudió de la Teoría y de las categorías que ésta propone en los diferentes artículos publicados por Godino, Batanero y Font (2006).

Mirada a la proporcionalidad geométrica y a la semejanza en una teoría matemática: Para dar una respuesta a la pregunta formulada bajo la mirada de las categorías propuestas por la Teoría de los Significados Sistémicos (TSS), se realizó el estudio y posterior análisis de una teoría matemática (reconocida en la comunidad Matemática y por los historiadores) que hace un tratamiento de la proporcionalidad geométrica y de la semejanza, contenida en los Libros V y VI de *Elementos* de Euclides.

Selección y análisis de los textos escolares y las tareas: Se realizó una revisión bibliográfica de libros de texto, de diferentes años y de diferentes editoriales y se optó por seleccionar la colección de libros de texto *Espiral*, ya que en ésta se encontraron tareas pertinentes para el análisis. Además, en esta fase se realizó el análisis de las tareas de la colección citada, utilizando las categorías descritas por la Teoría de los Significados Sistémicos y los resultados del análisis del Libro VI de *Elementos* de Euclides.

Conclusiones: Las conclusiones más relevantes se encontró en este estudio son:

Al buscar las tareas relacionadas con la proporcionalidad geométrica y la semejanza en las distintas unidades, se encontró que en la mayoría de las tareas presentes en los libros de texto analizados solo se trata la proporcionalidad como la igualdad entre razones de dos cantidades numéricas; es decir que la proporcionalidad solo se trata en el campo de lo cuantitativo numérico. Sin embargo dos de las tareas encontradas corresponden a proporcionalidad geométrica, estas son las tareas 1 y 5.

En los resultados de este trabajo se permite visualizar el tratamiento que se hace de la proporcionalidad geométrica y de la semejanza en los libros de texto, al ser vista a través de una teoría matemática como lo son los Libros V y VI de *Elementos* de Euclides bajo la mirada de la Teoría de los significados sistémicos, la cual permitió identificar este tratamiento en cada una de las tareas seleccionadas.

Además se espera generar en el lector la necesidad de reconocer la historia en la enseñanza de la matemática porque permite tener otras opciones de analiazar las actividades que se proponen en el aula, esta deja ver el lenguaje, las técnicas, la notación, las diferentes demostraciones y compararlas con los conceptos que aparecen en los libros de texto, sabiendo que el análisis de las tareas de los libros de texto no puede hacerse al margen de una comparación mas sí se puede alimentar de ella.

Fecha de Elaboración Resumen: 18 de Diciembre de 2011

TABLA DE CONTENIDO

INTRODUCCIÓN

Este trabajo corresponde a una de las tareas formativas promovidas en el marco de la Maestría en Docencia de la Matemática; en este sentido, este escrito, más que el fin es el medio para desarrollar competencias investigativas en cuanto a lectura, estudio y escritura de documentos científicos en el campo de la Educación Matemática.

En la primera propuesta del proyecto se había decidido trabajar sobre el tratamiento del concepto de la proporcionalidad en los libros de texto, la fenomenología y las formas de representación de éste; en el transcurso de acotar el estudio y al estudiar sobre la proporcionalidad y hojear algunos libros de texto, nos dimos cuenta que el tratamiento de la proporcionalidad es muy escaso y que está enfocado hacia lo cuantitativo numérico, este tratamiento nos hizo reflexionar y plantear el estudio entorno al concepto de proporcionalidad en el campo de lo cuantitativo no numérico y hacer análisis de tareas expuestas en los libros de texto que aludieran a la proporcionalidad geométrica y la semejanza.

Es así que este trabajo se alimentó de muchas experiencias que contribuyeron al desarrollo de las competencias citadas. Así, inicialmente nos enfrentamos al estudio del Libro VI de *Elementos* de Euclides, el cual nos exigió un gran esfuerzo en cuanto a la lectura y comprensión del mismo, puesto que no habíamos estudiado una fuente original y no transpuesta de una obra matemática; la cual, contaba con un lenguaje retorico y no simbólico, además de una estructura hipotética deductiva.

Una segunda experiencia se dio cuando nos acercamos al estudio de la Teoría de los Significados Sistémicos, de la cual se extrajo unas categorías de análisis pertinentes para nuestro análisis, ya que no analizaban únicamente el contenido del texto, y nos permitían acercarnos al significado de proporcionalidad y de semejanza que pretendíamos encontrar en el conjunto de tareas de los libros de texto.

Una tercera experiencia la vivimos cuando revisamos los libros de texto de matemáticas y nos encontramos con la dificultad de encontrar tareas correspondientes a proporcionalidad geométrica o a semejanza, y las tareas que contaban con ellas no eran propiamente de este tema; además, encontramos que en los capítulos correspondientes a razones y proporciones se utilizaba cuantitativo numérico y no lo cuantitativo no numérico.

Es así que decidimos realizar este documento que contiene 4 capítulos, que a continuación se describirán de forma general.

El Capítulo 1, Generalidades del proyecto, contiene la respuesta a las preguntas sobre la justificación, el objeto, las intenciones y la metodología del estudio. El potencial impacto del libro de texto en la enseñanza de las Matemáticas (específicamente como mediador del currículo, del conocimiento del profesor y del aprendizaje del estudiante), y la necesidad de esclarecer el tratamiento de la proporcionalidad geométrica y la semejanza en el ámbito cuantitativo no numérico, son los dos elementos que justifican el estudio. Este contexto de justificación lleva a plantear la pregunta ¿Cómo es el tratamiento que en los libros de texto se da a la proporcionalidad geométrica y cómo se relaciona con el concepto de semejanza?, cuya respuesta pretende esclarecer el tratamiento que se hace de la proporcionalidad geométrica y la semejanza en algunos libros de texto escolares de Matemáticas. Para intentar dar respuesta a esta pregunta se sigue una estrategia metodológica, que incluye la identificación y análisis de las tareas de los libros de texto de matemáticas, desde dos perspectivas previamente estudiadas y construidas: la Teoría de los Significados Sistémicos (TSS) y el resultado del análisis del Libro VI de Elementos de Euclides hecho bajo estas mismas categorías.

En el Capítulo 2 se desarrolla el marco de referencia para el análisis, el cual consta tanto de la descripción general de la Teoría de los Significados Sistémicos y las categorías que la configuran, como el análisis de la teoría de la proporcionalidad geométrica expuesta en el Libro VI de *Elementos* de Euclides.

En el Capítulo 3 se reporta de manera detallada el análisis de los libros de texto. Específicamente se da cuenta del proceso de selección de los libros utilizados para el análisis y se describen de manera general algunos textos descartados y la colección de los textos escogidos. Adicionalmente se presenta el análisis de las tareas seleccionadas que hacen alusión a la proporcionalidad geométrica y a la semejanza en el ámbito cuantitativo no numérico.

En el capítulo 4 se sintetizan los resultados del análisis y se presentan las conclusiones del estudio.

Capítulo 1
GENERALIDADES DEL PROYECTO

Este capítulo contiene la justificación, el objeto, las intenciones y la metodología del estudio.

1.1 Justificación

El potencial impacto del libro de texto en la enseñanza de las Matemáticas (específicamente como mediador del currículo, del conocimiento del profesor y del aprendizaje del estudiante), y la necesidad de esclarecer el tratamiento de la proporcionalidad geométrica y la semejanza en el ámbito cuantitativo no numérico[1], son los dos elementos que justifican el estudio.

1.1.1 Sobre el libro de texto

En diversas investigaciones en Educación Matemática donde el objetivo principal de la investigación está centrado en los libros de texto, (Schubring (1987), González y Sierra, (2004), Ramírez (2003)), se ha encontrado que estos son un reflejo de la manipulación social, donde se decide: qué contenidos son importantes o básicos; cómo deben ser transmitidos y los diversos ejercicios y problemas planteados para el desarrollo o evaluación de los contenidos propuestos. En este sentido Schubring (1987) plantea que "Los libros de texto determinan en la práctica la enseñanza más que los decretos de los distintos gobiernos". (p. 460).

Choppin (1980, citado por González y Sierra, 2004) argumenta que el libro de texto más que ser un apoyo para el profesor, distribuye la organización de los contenidos que están

---

[1] Se desarrollo el trabajo bajo las ideas intuitivas de semejanza y proporcionalidad geométrica que se irán precisando con lo expuesto por Euclides en el Libro VI de *Elementos.* La noción de semejanza considerada inicialmente la identificamos como semejanza entre polígonos donde los lados correspondientes son proporcionales y los ángulos correspondientes son congruentes. Y la noción de proporcionalidad geométrica no la pudimos puntualizar mas optamos por tomar todo lo que es proporcionalidad no numérica.

dispuestos en el currículo y en los planes de área. Así, de igual manera en todos los cursos de un mismo nivel se enseña un mismo contenido; también, el libro de texto aparece como un diseñador de diferentes tipos de tareas y problemas mostrando algunos procedimientos y representaciones que permiten hacer clara o posiblemente obstaculizar la enseñanza y el aprendizaje del concepto a estudiar.

González y Sierra (2004) consideran al libro de texto como un elemento socio-cultural que influye en la clase al imponer una estructura de los conceptos, dejando abierto a futuras generaciones el porqué de estas organizaciones, herramientas, representaciones, y no otras. Por esto Choppin (1980, citado en González y Sierra, 2004) considera que el libro de texto es

> …a la vez apoyo del saber en tanto que impone una distribución y una jerarquía de los conocimientos y contribuye a forjar los andamios intelectuales tanto de estudiantes como de profesores; es instrumento de poder, dado que contribuye a la uniformización lingüística de la disciplina, a la nivelación cultural y a la propagación de las ideas dominantes. (pp.389 - 390)

Pero también las investigaciones en Educación Matemática con respecto a los libros de texto se han enfocado en diferentes campos como: la legibilidad; forma de presentación de los contenidos; elementos imprescindibles en los libros de texto y la última y a la cual se le dará más relevancia en el desarrollo de este trabajo, es la idea planteada por Lowe y Pimm (1986, citado por Sierra, González & López, 1999) quienes consideran que hay una tétrada asociada a los libros de texto: "*el lector, el escritor, el profesor y el mismo libro, y que las características de cada uno de ellos, así como sus interacciones determinan el uso de este material en el aula"*.

Es así que el libro de texto en la enseñanza de las matemáticas (específicamente como mediador del currículo, del conocimiento del profesor y del aprendizaje del estudiante), se ha convertido en uno de los objetos de investigación en la Educación Matemática, a tal punto que se podría afirmar que existe una línea de investigación en torno a éstos. Las investigaciones en esta línea se han desarrollado en torno a la versatilidad de los libros de texto enfocándose a "los conocimientos que privilegian, las omisiones, los valores que trasmiten, su estructura, su producción, su comercialización, el marco legal que los regula, etc." Ramírez (2003).

Por tanto se considera al libro de texto como una de las herramientas esenciales en la enseñanza- aprendizaje, sirviendo como un mediador del currículo, del docente y del aprendizaje del estudiante.

1.1.1.1 *Libro de texto como mediador del currículo*

El libro de texto es una de las herramientas más importantes en los procesos de enseñanza y aprendizaje, que no solo sirve como apoyo para los docentes y estudiantes en el aula, sino que se convierte en un organizador curricular; este rol lo asume cuando las instituciones no establecen de manera clara el currículo que deben seguir en determinada área. Es así que las editoriales han interpretado las reformas del Ministerio de Educación Nacional y han estructurado los libros de texto de acuerdo a los Lineamientos Curriculares de Matemáticas (1998) y los Estándares básicos de Competencias Matemáticas (2006), es así que:

> Existe una arraigada tendencia a que el libro de texto sea el organizador del curriculum y su plasmación real. Los docentes suelen acomodar sus programaciones, objetivos, contenidos, metodología e incluso evaluación a partir del manual elegido. De ahí que se pueda sostener que en la mayoría de los casos el curriculum no esté definido por las directrices ministeriales ni por la programación del docente, aunque ambas tengan su importancia, sino a través del libro de texto. (Grupo Eleuterio Quintanilla citado por Taboada, s.f).

1.1.1.2 *El libro de texto como mediador del docente*

Cuando se utilizan libros de texto en el aula de clase, el profesor se convierte en el principal intermediario; él decide qué libro va a utilizar como apoyo para orientar su clase, la unidad del libro de texto que se va a trabajar, las tareas a desarrollar y también es él quien planea y orienta la mediación entre el libro de texto y el estudiante. La mediación se da por la interacción que hace el estudiante con el libro en el momento de realizar las tareas propuestas por el docente; cuando el estudiante no encuentra sentido a los enunciados de las tareas plateadas en los libros, el docente entra a mediar aclarando las dudas para que continúe el desarrollo de su tarea. Es así que:

> La función de mediación de los profesores se extiende más allá de la selección de contenidos e incluye decisiones más amplias acerca de pedagogía. El profesor puede actuar también como mediador de la autoridad del libro; mediador del meta discurso del texto; mediador del lenguaje y las explicaciones del texto. Además el profesor puede ofrecer explicaciones adicionales, materiales o ejemplos. (Pepin, Haggarty, & Keynes, 2001, p. 165).

El profesor como principal mediador del libro de texto explora y decide qué de lo planteado por los autores le sirve para orientar los procesos de enseñanza y aprendizaje y las diferentes formas en que puede utilizar el libro de texto como una herramienta de apoyo en el aula.

Johnsen (citado por, Pepín, 2001) clasifica a los profesores según el uso que le dan a estos: “los que siguen al pie de la letra las secciones del libro y las tareas expuestas en éste, los que siguen el texto pero son selectivos en el uso de éste y los que no siguen de manera ordenada el libro y además añaden material complementario a sus tareas de clase”. (p. 165)

Dado lo anterior el uso que le da el docente al libro de texto puede variar en cuanto a la planeación que haya decidido para sus clases. Lo puede utilizar total o parcialmente según lo requiera y según el objetivo que ha programado para el trabajo en el aula.

1.1.1.3 *El libro de texto como mediador del aprendizaje del estudiante*

En estudios realizados en la Universidad de España, González y González-Anleo (1993), encontraron que los libros de texto para el caso de los estudiantes son beneficiosos ya que les exige un mayor esfuerzo mental a diferencia de otros medios de comunicación. En este sentido se reconoce que el libro de texto es más que un transmisor de información de un currículo.

El libro de texto es una herramienta que algunos profesores utilizan para que el estudiante amplié sus conocimientos con diversos conceptos que le ayuden a reestructurar ideas previas con nuevas ideas, esto con el fin de que el estudiante pueda interiorizar esta nueva información; para esto se requiere de algunos de los medios que ofrece el libro de texto, como son: gráficos explicativos, fotos, dibujos, ejemplos con diferentes situaciones y diferentes definiciones. Estos medios son ayudas que permiten que el estudiante transforme estas nuevas ideas en un nuevo saber.

Como lo menciona Álzate y otros, (s.f, p.3), “todos estos medios proveen un saber que es relacionado ya sea a través de medios expresivos, redacciones, tareas, en los cuales el estudiante da cuenta de la manera como organiza sus ideas, ha transformado la información en un nuevo saber”

Aunque no se puede desconocer que en la interacción del estudiante con el libro de texto se pueden presentar algunas dificultades que le impiden el aprendizaje; como se refiere Pepín (2001) esto se debe entre otras, a que hay tareas en donde el lenguaje no es familiar para el estudiante, por tanto es aquí donde debe entrar a mediar entre estos dos para facilitar y ayudar al estudiante a superar estos obstáculos y propiciar el desarrollo de actividades que ayuden a enriquecer el aprendizaje del estudiante.

1.1.2 Sobre la proporcionalidad geométrica y la semejanza en el ámbito escolar

La enseñanza de la proporcionalidad geométrica en la escuela se ha visto limitada no solo a un trabajo puramente aritmético y muchas veces descontextualizado, sino también, al corto o nulo tiempo que se le asigna en la planeación del área. Mas no se puede desconocer la importancia de la proporcionalidad en la enseñanza de las matemáticas, Fiol y Fortuni, (1990), reconocen la incidencia de ésta en la Educación básica y secundaria donde interviene en la enseñanza de los conceptos de razón, fracción, número racional, porcentajes, probabilidad, escalas, funciones trigonométricas y semejanza entre otras; incluso la proporcionalidad entre magnitudes es utilizada en conceptos de Física y Química.

También incide en los primeros años del niño y su adaptación con el entorno físico, es manipulada desde las primeras etapas de aprendizaje del niño ya que utiliza esta *categoría* para interpretar imágenes, dibujos, fotos, etc.

Al estudiar los documentos generales que orientan el área de matemáticas y de los cuales dispone el Ministerio de Educación Nacional, nos encontramos con los *Lineamientos Curriculares de Matemáticas* (1998) y los *Estándares básicos de Competencias*

Matemáticas (2006), los cuales presentan estrategias teóricas[2] y dan una pauta a los docentes para que organicen el currículo del área de forma autónoma y planteen estrategias adecuadas para la enseñanza y el aprendizaje de los conceptos[3]. Al estudiar estos documentos encontramos que: la enseñanza de la proporcionalidad geométrica no se encuentra de forma detallada; se hace un énfasis en la enseñanza de razón, proporción y proporcionalidad, y de manera fragmentada en diferentes grados de la Educación Básica, enfocando estos conceptos hacia lo aritmético; no aparece una relación entre los conceptos de semejanza, homotecia y teorema de Thales que son conceptos que están relacionados con la proporcionalidad y específicamente con la proporcionalidad geométrica.

Basado en lo anterior nuestro proyecto a realizar se centra en el estudio del libro de texto en torno a sí mismo y más específicamente a la necesidad de esclarecer el tratamiento de la proporcionalidad geométrica y la semejanza en el ámbito cuantitativo no numérico.

1.2 Planteamiento del problema

La anterior justificación nos lleva a formular la pregunta central de este estudio: ¿Cómo es el tratamiento que se da en los libros de texto a la proporcionalidad geométrica y a la semejanza, en el ámbito cuantitativo no numérico?

Ligado a esta pregunta surgen otras que la especifican, como por ejemplo:

- Que tareas contienen explícitamente a lo cuantitativo no numérico y cuales tareas contienen implícitamente a lo cuantitativo no numérico.

[2] Las estrategias pueden basarse en la resolución y planteamientos de problemas, el razonamiento, la comunicación, la modelación, la elaboración, comparación y ejercitación de procedimientos. (MEN, 1998)

[3] "Los sistemas geométricos se construyen a través de la exploración activa y modelación del espacio tanto para la situación de los objetos en reposo como para el movimiento. Esta construcción se entiende como un proceso cognitivo de interacciones, que avanza desde un espacio intuitivo o sensorio-motor (que se relaciona con la capacidad práctica de actuar en el espacio, manipulando objetos, localizando situaciones en el entorno y efectuando desplazamientos, medidas, cálculos espaciales, etc.), a un espacio conceptual o abstracto relacionado con la capacidad de representar internamente el espacio, reflexionando y razonando sobre propiedades geométricas abstractas, tomando sistemas de referencia y prediciendo los resultados de manipulaciones mentales". (MEN, 1998)

- Cómo relacionan los conceptos de semejanza y proporcionalidad geométrica.

Bajo el marco de estas preguntas se reconoce que el trabajo de grado es un ejercicio de investigación centrada en el campo de la Didáctica de la Matemática, dado que el objeto de estudio se relaciona con los conocimientos matemáticos presentados en las tareas planteadas en los libros de texto.

1.3 Objetivos

Coherente con lo anterior, establecemos que la intención general de este estudio no es otra que: Esclarecer el tratamiento que se hace de la proporcionalidad geométrica y la semejanza en libros de texto escolares de matemáticas.

De manera específica a través del estudio se propone alcanzar unos objetivos secundarios, a saber:

- Desarrollar un marco teórico con respecto al concepto de proporcionalidad geométrica y semejanza, basado en una teoría matemática como lo son los Libros V y VI de *Elementos* de Euclides para tener fundamentos teóricos en el momento de analizar las tareas presentadas en los libros de texto.
- Disponer de las categorías de análisis construidas para poder contrastar los elementos teóricos con los libros de textos.

Utilizar los resultados obtenidos en el análisis de los libros de textos para contrastarlos con los resultados del análisis del Libro VI de *Elementos* de Euclides y así poder establecer diferencias o semejanzas en el tratamiento de la proporcionalidad geométrica y la semejanza.

1.4 Metodología

Para lograr los objetivos propuestos, se divide el trabajo en las siguientes fases:

Estudio de la Teoría de los Significados Sistémicos (TSS): Se realizó un estudio de la Teoría y de las categorías que esta propone en los diferentes artículos publicados por Godino, Batanero y Font.

La Teoría de los significados sistémicos (TSS) pertenece a una de las propuestas presentadas por el modelo ontológico-semiótico de la cognición matemática la cual busca que mediante un análisis semiótico se pueda caracterizar los significados elementales y sistémicos que se encuentran en un proceso de estudio. Esta teoría cuenta con seis nociones las cuales nos permitieron realizar un análisis semiótico de un conjunto de tareas correspondientes a una colección de libros de texto matemático; estas son: situaciones problema, lenguaje, conceptos o definiciones, propiedades, procedimientos y argumentos.[4]

Mirada a la proporcionalidad geométrica y a la semejanza en una teoría matemática: Para dar una respuesta a la pregunta de investigación formulada bajo la mirada de las categorías propuestas por la Teoría de los Significados Sistémicos (TSS), se realizó el estudio y posterior análisis de una teoría matemática (reconocida en la comunidad Matemática y por los historiadores) que hace un tratamiento de la proporcionalidad geométrica y de la semejanza, contenida en los Libros V y VI de *Elementos* de Euclides.

Esta teoría matemática es reconocida en la comunidad Matemática y por los historiadores por el tratamiento que ésta hace de la proporcionalidad y en especial de la proporcionalidad geométrica.

Nos basamos en esta teoría para dar respuesta a la pregunta: ¿qué es la proporcionalidad geométrica y la semejanza y como se caracterizan?, la cual nos surgió en el inicio del desarrollo del trabajo.

Para dar respuesta a la pregunta abordamos el estudio de la teoría matemática, basados en que la pregunta está orientada hacia un objeto matemático y su significado. Para mirar esta teoría matemática nos basamos en la teoría de los significados sistémicos (TSS), la cual se basa en un enfoque onto-semiótico que establece que el significado de los objetos se encuentra en el contexto donde éste está funcionando, en el uso que se haga del objeto.

[4] Estas nociones están descritas posteriormente

Para analizar los libros de texto de matemáticas de diferentes años y grados de Educación Básica, tomamos las categorías que aborda la TSS y los resultados obtenidos de analizar los Libros V y VI de *Elementos*.

Selección y análisis de los textos escolares y las tareas: Se realizó una revisión bibliográfica de libros de texto, de diferentes años y de diferentes editoriales y se optó por seleccionar la colección de libros de texto *Espiral*, ya que en ésta se encontraron tareas pertinentes para el análisis. Además, en esta fase se realizó el análisis de las tareas de la colección citada, utilizando las categorías descritas por la Teoría de los Significados Sistémicos y los resultados del análisis del Libro VI de *Elementos* de Euclides.

Capítulo 2
MARCO REFERENCIAL

En este capítulo se desarrolla el marco de referencia para el análisis, el cual consta tanto de la descripción general de algunos elementos de la Teoría de los Significados Sistémicos y de las categorías que la configuran, como de la teoría de la proporcionalidad geométrica expuesta en el Libro VI de *Elementos* de Euclides, analizada precisamente a la luz de las categorías referidas.

2.1 Algunos elementos de la Teoría de los Significados Sistémicos

La Teoría de los Significados Sistémicos (TSS) pertenece a una de las propuestas presentadas por el modelo ontológico-semiótico de la cognición matemática, la cual busca que mediante un análisis semiótico se puedan caracterizar los significados elementales y sistémicos que se encuentran en un proceso de estudio de un concepto matemático.

El modelo teórico de este enfoque toma la *situación-problema* como una idea primaria, dado que supone que el conocimiento individual se produce como una consecuencia de la interacción entre el sujeto y la situación-problema intervenida por los contextos institucionales. Además, la TSS centra su atención en la noción de *situación-problema*, ya que ésta se considera el origen de la tarea matemática y ocupa un papel central en la práctica matemática de significación de los objetos matemáticos.

Asimismo, desde el enfoque se asume que el aprendizaje individual está ligado al aprendizaje de los objetos; es decir, si el objeto significa algo para el individuo es porque lo ha aprendido. Se reconoce entonces que el pensamiento y el lenguaje van de la mano, como lo refiere Vygotsky:

> El pensamiento no se expresa simplemente en palabras, sino que existe a través de ellas. Una palabra sin pensamiento es una cosa muerta, y un pensamiento desprovisto de palabras permanece a la sombra. (Vygotsky, 1973, pp. 160-161)

Es por eso que los significados se construyen de manera relacionada, es decir, son sistémicos (sistema de significados), y se construyen tanto de manera personal como por el colectivo, el cual se desarrolla en un ámbito social donde se construyen los significados, en él se destaca la institución y en especial el salón de clase, que a su vez cuenta con un "contrato didáctico" establecido entre el profesor y el estudiante, y no es más que el resultado de un conjunto de pactos implícitos y explícitos que regulan los comportamientos, interacciones y relaciones entre los docentes y estudiantes.

Estas interacciones y relaciones, al igual que la cultura, ocupan un papel sustancial en la TSS, ya que la inclusión del ámbito social en la constitución de significados trasciende el ámbito de lo psicológico e individual; desde la TSS se hace entonces una distinción entre las dimensiones personal e institucional, tanto para los objetos como para los significados, promoviendo la identificación de los aspectos epistemológicos, sociológicos y psicológicos en los procesos de la cognición humana, y, por tanto, de los procesos de construcción de significados en la educación en matemáticas (aprendizaje individual y aprendizaje colectivo). Así, en esta teoría si se trata de un sujeto individual (por ejemplo un estudiante resolviendo una evaluación o realizando una tarea escolar) se habla de *objetos personales*, ya que es él el portador de sus conocimientos y de sus respuestas. Por el contrario, si se trata de documentos curriculares, libros de texto, explicaciones de un profesor ante su clase o similares, se habla de *objetos institucionales*.

La distinción entre las dimensiones personal e institucional de los conocimientos matemáticos es primordial para poder describir y explicar las interacciones entre el profesor y los estudiantes en los procesos de enseñanza y aprendizaje. Con relación a los significados institucionales, Godino y Batanero (1994) proponen los siguientes tipos:

- Implementado: es el proceso de estudio que exhibe el docente.
- Evaluado: corresponde al sistema de prácticas que utiliza el docente para evaluar los aprendizajes.

- Pretendido: refiere al sistema de prácticas que incluye el plan educativo institucional en la escuela.
- Referencial: sistema de prácticas que se usa para elaborar el significado pretendido.

Con relación a los significados personales, Godino y Batanero (1994) proponen desde la TSS los siguientes tipos:

- Global: corresponde a la totalidad del sistema de prácticas personales que puede manifestar el sujeto relativas a un objeto matemático.
- Declarado: da cuenta de las prácticas efectivamente expresadas a propósito de las pruebas de evaluación propuestas, incluyendo tanto las correctas como las incorrectas desde el punto de vista institucional.
- Logrado: corresponde a las prácticas manifestadas de acuerdo a la pauta institucional establecida.

Por otra parte, la TSS presenta un sistema de categorías a través de las cuales se devela el significado de los objetos, los cuales son nombrados y descritos mediante prácticas que les dan sentido y significado y que van más allá de su mera definición. En un sentido similar Vergnaud (1990), por ejemplo, considera que el significado de un objeto matemático no se puede reducir a su definición, y pone de relieve el papel de las situaciones y los significados:

> … son las situaciones las que dan sentido a los conceptos matemáticos, pero el sentido no está en las situaciones ni en las representaciones simbólicas. Es una relación del sujeto con las situaciones y los significados. Más precisamente, son los esquemas evocados en el sujeto individual por una situación o un significante, lo que constituye el sentido de esta situación o este significante para el individuo.(Vergnaud, 1990, p. 133).

Las seis categorías referidas en la TSS son: *situación-problema*, *lenguaje*, *conceptos-definición, propiedades*, *procedimientos* y *argumentos.*

La *situación-problema* es el componente práctico que promueve la tarea matemática; incluye tareas matemáticas, ejercicios, problemas simples puramente matemáticos y problemas más complejos.

El *lenguaje matemático* es el que utilizamos como una herramienta ostensiva para la resolución de problemas, para generalizar la solución de un problema o para describir la solución a otra persona; se evidencia en y a través de símbolos, gráficos, notaciones, términos y estructuras algebraicas. .

Los *conceptos–definiciones* se introducen a partir del estudio de las definiciones y del uso en los procesos de deducción o de construcción del discurso matemático.

Las *propiedades matemáticas o atributos* son las condiciones que determinan las acciones matemáticas que se realizan, las características de las situaciones y las relaciones entre los objetos.

Los *procedimientos y procesos* son los algoritmos, cálculos, operaciones y análisis.

Los *argumentos* son los sustentos que permiten justificar la solución de un problema, conjeturar o deducir. Las acciones y los objetos están relacionados mediante los argumentos o razonamientos que son usados para explicar el porqué de la solución obtenida. Es muy común encontrar argumentos a través de un modelo deductivo.

2.2 Análisis del Libro VI de *Elementos* de Euclides

El Libro VI está compuesto por cinco definiciones, treinta y tres proposiciones, divididas entre veintitrés proposiciones por demostrar y diez problemas por resolver, (ver Anexo 1). A través del discurso contenido en éste, Euclides desarrolla una teoría de la proporcionalidad geométrica para magnitudes geométricas específicas, en contraste con el tratamiento general que ha hecho de la proporcionalidad geométrica en el Libro V. Dicha teoría, sea en su versión genérica del Libro V o en su versión específica del Libro VI, no incorpora la medida de la cantidad de las magnitudes en cuestión, aunque sí la cantidad de magnitud; en este sentido se afirma que el estudio de la proporcionalidad geométrica y la semejanza incluye un tratamiento cuantitativo, pero no numérico.

Para analizar su contenido y develar los significados de la proporcionalidad geométrica y la semejanza, siguiendo las directrices del análisis del Libro V (Guacaneme, en prensa), se usan las categorías de la Teoría de los Significados Sistémicos (TSS).

2.2.1 Situaciones problemas o tareas matemáticas

Como ya se mencionó, las proposiciones y porismas del Libro VI, se pueden dividir en dos grupos: veintitrés proposiciones por demostrar[5] y diez problemas por resolver o construcciones[6]; su identificación en la obra euclidiana se favorece por la inclusión al final de la proposición de la sigla Q.E.D. y Q.E.F, respectivamente, las cuales se pueden interpretar como "queda entonces demostrado" o "queda entonces hecho"[7]

La tarea fundamental de las primeras es, naturalmente, la elaboración de pruebas que exhiban la deducción de los enunciados de cada proposición a partir de las anteriores.

Los problemas por resolver aluden a cuestiones como la construcción de figuras rectilíneas semejantes (proposiciones 18 y 25), la construcción de segmentos que sean media, tercera o cuarta proporcional (proposiciones 11, 12, 13), quitar una parte específica de un segmento (proposición 9), dividir un segmento de manera semejante a otro segmento dividido o en extrema y media razón (proposiciones 10 y 30) o aplicar a una recta un paralelogramo (proposiciones 28 y 29). A través de esta mirada a los problemas del Libro VI se puede advertir que la construcción de figuras semejantes (proposiciones 18 y 25) ocupa un lugar secundario frente a las demás construcciones, la mayoría de las cuales se refieren a la proporcionalidad geométrica.

2.2.2 Lenguaje matemático

Para realizar el análisis del lenguaje matemático del Libro VI de los *Elementos* de Euclides, se estudian los términos y palabras, la notación y los diagramas o dibujos empleados en el discurso por Euclides.

Sin embargo, antes de hacerlo es necesario hacer una precisión sobre el lenguaje utilizado por el autor. En las proposiciones donde Euclides establece relaciones de razón y

[5] Las proposiciones por demostrar son: 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 14, 15, 16, 17, 19, 20, 21, 22, 23, 24, 26, 27, 31, 32, 33.

[6] Los problemas por resolver son: 9, 10, 11, 12, 13, 18, 25, 28, 29, 30.

[7] En Puertas (1994, p. 37) se reportan las expresiones *hóper édei deîxaí* y *hóper édei poiésaí*, relacionadas respectivamente con los textos de las siglas Q.E.D. y Q.E.F.

proporción entre objetos (figuras rectilíneas, rectas, ángulos), no se está refiriendo al objeto en sí, sino a la cantidad de magnitud (longitud, amplitud, superficie). La proposición 5 y específicamente la parte del *diorismós* donde especifica las razones y proporciones planteadas al inicio de la demostración, constituye un ámbito de ejemplificación interesante.

Proposición 5: Si dos triángulos tienen sus lados proporcionales, los triángulos serán equiángulos y tendrán iguales los ángulos a los que subtienden los lados correspondientes.(Puertas, 1994, p. 63).

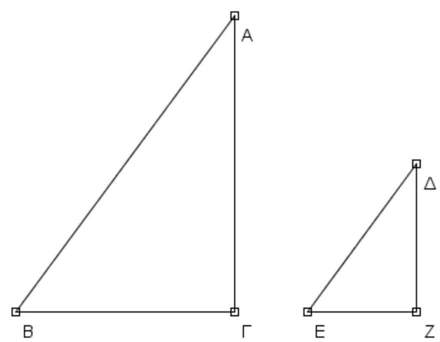


Figura 1. Parte del gráfico utilizado en la proposición 5

Diorismós Sean ΑΒΓ, ΔΕΖ dos triángulos que tienen los lados proporcionales, es decir que como AB es a ΒΓ, así ΔΕ es a ΕΖ, y como ΒΓ es a ΓΑ, así es ΕΖ a ΖΔ, y, además, como BA es a ΑΓ, así ΕΔ es a ΔΖ. (Puertas, 1994, p 63)

Las anteriores razones y proporciones están planteadas con relación a la cantidad de longitud de los lados de los triángulos y no a los lados; en otras palabras la expresión “AB” si bien alude al lado del triángulo, refiere exactamente es a la cantidad de longitud de tal lado.

2.2.2.1 *Términos o palabras*

Encontramos tres tipos de palabras, a saber: las que se refieren a los objetos geométricos (*v.g.*, triángulo, paralelogramo, figura rectilínea, ángulo, recta, recta finita, lado, altura), las que se refieren a las relaciones entre la cantidad de magnitud de los objetos o las relaciones entre éstas, (*v.g.*, razón, proporción), y las que se refieren a la relación entre dos o más objetos (*v.g.*, altura, perpendicular, paralela, semejanza). Nótese que bajo esta óptica, la semejanza y la proporcionalidad geométrica atienden a dos tipos distintos.

2.2.2.2 *Notación*

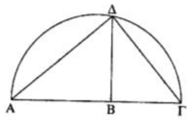
La notación que utiliza Euclides incluye el uso de las primeras letras mayúsculas del alfabeto griego $(\mathrm{A}, \mathrm{B}, \Gamma, \Delta, \mathrm{E}, \mathrm{Z}, \mathrm{H}, \Theta, \mathrm{I}, \mathrm{K}, \Lambda, \mathrm{M}, \mathrm{N}, \ldots)$. Usadas de manera individual o en parejas de letras para denotar magnitudes. Sin embargo, utiliza seguidas dos de estas letras tanto para denotar rectas (segmentos), es decir cantidad de magnitud de la recta; donde las letras parecen indicar los extremos del segmento, como para referirse a paralelogramos, es a través de una de sus diagonales. Adicionalmente, utiliza tres letras para aludir al triángulo. Por ejemplo, al inicio de la prueba de la Proposición 1, se encuentra el texto: "Sean ΑΒΓ, ΑΓΔ triángulos y ΕΓ, ΓΖ paralelogramos que tienen la misma altura." (Puertas, 1994, p.57). Entre tanto en la prueba de la Proposición 9, incluye el texto: "Sea AB la recta dada" (Puertas, 1994, p.71).

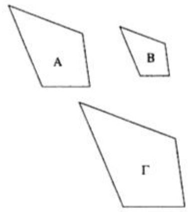
En el Libro VI, más allá de las expresiones "es a", "guarda la misma razón" o "es semejante a", no identificamos designación o notación para referirse a las proporciones o a la semejanza entre figuras rectilíneas; esta falta de notación no impide que al estudiar las proposiciones se pueda indicar cuál de estos objetos es utilizado para justificar y demostrar los pasos hechos en cada proposición.

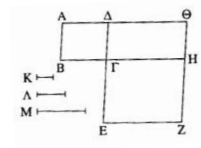
2.2.2.3 *Diagramas o dibujos*

Los diagramas o dibujos que componen el Libro VI, aparecen en cada una de las proposiciones, independientemente de si éstas son propiedades o problemas. En su gran mayoría los dibujos representan triángulos y paralelogramos; sin embargo en la construcción de las proporciones 13 (construcción de media proporcional) y 33 aparece un dibujo que contiene representaciones de un semicírculo o un círculo[8]. A modo de ejemplo se presenta en la Figura 1 algunos dibujos que emplea Euclides en las proposiciones 13, 21, 23 y 29, respectivamente (Puertas, 1994, pp. 57, 74, 89, 93, 102). (Ver Anexo 1)

[8] Debemos advertir que el trazo curvo que aparece en la figura de la proposición 27, 28 y 29 no alude de manera propia a un círculo ni a parte de él.







(a) (b) (c)

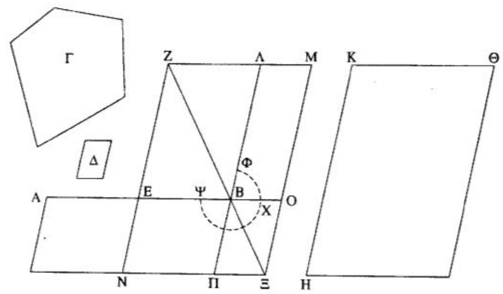


Figura 2. Dibujos empleados por Euclides en el Libro VI

Como podemos ver en los dibujos, además de las figuras, Euclides incorpora las letras griegas en mayúscula; allí se observa claramente las diferentes expresiones semánticas de una sola letra.

Por otra parte, si bien en el Libro V las magnitudes geométricas en general se representan a través de trazos rectos, en el Libro VI las representaciones son *propias*, es decir, que los gráficos no son generalizaciones; si en una proposición se hace referencia a triángulos, rectas o paralelogramos, en los gráficos correspondientes habrá triángulos rectas o paralelogramos. Igualmente, debemos señalar que si en el Libro VI se señala que las figuras son semejantes, el dibujo expresa tal semejanza, como se observa en la Figura 1(b). Adicionalmente, debemos señalar que aunque en la mayoría de las proposiciones que refieren figuras semejantes incluyen dibujos homotéticos ubicados “en la misma posición”, hay al menos una en donde las figuras semejantes no satisfacen esta condición, como en el caso de los tres triángulos semejantes de la proposición 8 (ver la Figura 2 (a)).

En cuanto a las representaciones son propias, es decir, que los gráficos no son generalizados como en el Libro V; si en una proposición se hace referencia a triángulos, en los gráficos correspondientes habrá triángulos o si menciona rectas en los gráficos correspondientes habrá rectas. Los gráficos trabajados en los Libros V y VI de los *Elementos* de Euclides son una de las diferencias que se pueden encontrar al analizar detenidamente estos libros.

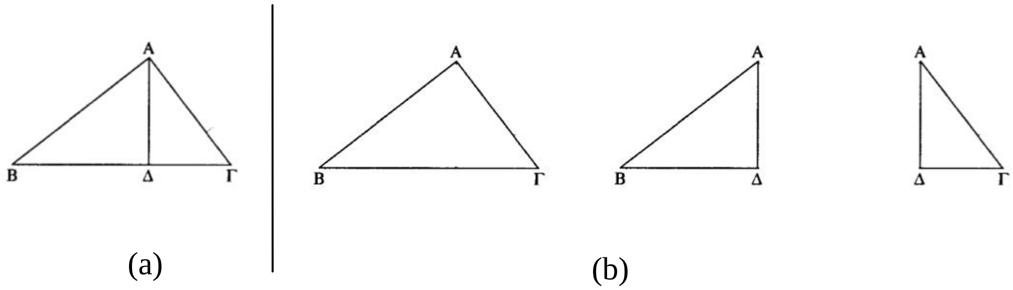


Figura 3. Tres triángulos semejantes

Como se observa en la Figura 2 (b), donde se han discriminado los triángulos de la Figura 2 (a), con una rotación el segundo triángulo se "verá" semejante al tercero, pero para el primer triángulo la rotación no es suficiente, pues habría que aplicarle una reflexión.

2.2.3 Conceptos o definiciones

Si bien en el Libro VI Euclides utiliza varios conceptos (*v.g.*, equiángulo, semejante, altura, subtiende, extrema y media razón, inversamente relacionado, semejanza), en éste define los siguientes objetos (resaltados en las definiciones):

> Definición 1. **Figuras rectilíneas semejantes** son las que tienen los ángulos iguales uno a uno y proporcionales los lados que comprenden los ángulos iguales (Puertas, 1994, p. 55).

Esta primera definición encontrada en el Libro VI nos aproxima a la idea de semejanza que utiliza el autor. Aquí nos interesa enfatizar en que Euclides establece la semejanza únicamente como una característica de dos o más figuras rectilíneas (polígonos), pero no establece semejanza entre figuras no rectilíneas; la proporcionalidad geométrica se da entre al menos tres objetos geométricos (o más precisamente, entre al menos tres cantidades de magnitudes homogéneas).

En las figuras donde se establece semejanza en el Libro VI de Euclides, se puede ver específicamente en dos casos:

Cuando una figura es semejante a otra de tal manera que sus lados y ángulos están ubicados *de la misma forma* en un lugar, en el plano, como lo muestra la Figura 4.

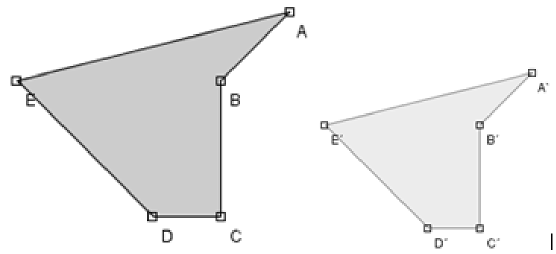


Figura 4. Figuras semejantes, situadas de igual manera

Cuando una figura es semejante a otra aunque no estén situadas *de la misma forma* en el plano (es decir, en términos modernos, a una de las figuras se le ha aplicado dos transformaciones; en el caso de la figura 2 es una reflexión y una homotecia). Ver Figura 5.

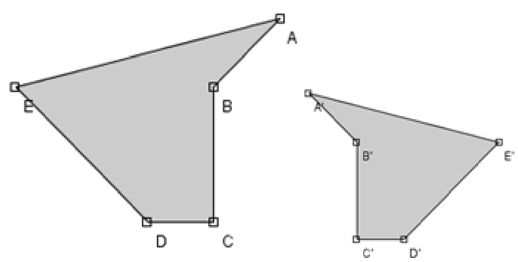


Figura 5. Figuras semejantes, situadas de forma diferente

Teniendo en cuenta las dos anteriores formas de ver la semejanza entre dos figuras, sin la segunda consideración no hubiera sido posible la demostración de la proposición VI-8, donde demuestra que dos triángulos adyacentes son semejantes. Ver Figura 6.

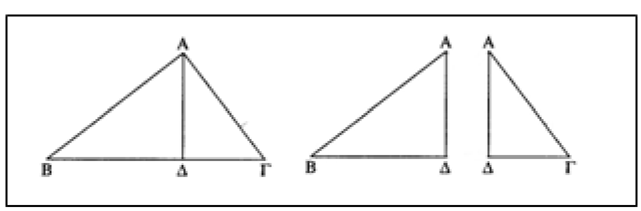


Figura 6. Dibujo utilizado por Euclides en la proposición 8

Al estudiar las proposiciones, hemos encontrado una diferencia entre semejanza y homotecia[9], la cual es que toda figura homotética es semejante, más no toda figura semejante a otra se obtiene de una homotecia. A esta conclusión llegamos después de analizar la Figura 6, donde la figura que ha sido reflejada, no se puede obtener de aplicar una homotecia a la figura inicial ya que no conserva su alineación. (Véase Figura 6).

> Definición 3. Se dice que una recta ha sido cortada en **extrema y media razón** cuando la recta entera es al segmento mayor como el (segmento) mayor es al menor (Puertas, 1994, p. 56).

Consideramos que esta definición contempla una alusión a la proporcionalidad geométrica, pero no a la semejanza; ello por cuanto, como lo señalamos antes, la semejanza se da entre figuras rectilíneas (polígonos) y no entre segmentos.

> Definición 4. En toda figura, la **altura** es la perpendicular trazada desde el vértice hasta la base. (Puertas, 1994, p. 56)

A través de ésta, se caracteriza un segmento que puede no hacer parte integral de la figura rectilínea en cuestión, sino que puede construirse como un apéndice de la figura. Esta definición no alude ni a la proporcionalidad geométrica, ni a la semejanza.

Si bien el Libro VI presenta dos definiciones más, coincidimos con la posición de Puertas (1994, pp. 55,56), según la cual la definición 2[10] y la 5[11] han sido interpoladas por autores posteriores a Euclides. Particularmente, hemos interpretado que la definición 5 no debe ser de origen euclidiano pues no sólo contempla razones entre razones (es decir no entre

---

[9] No se va a hacer un estudio de la homotecia ya que el marco teórico se centra en los *Elementos* de Euclides, pero bajo la mirada de Barreto (2010) entendemos la homotecia así:

"La homotecia es una transformación geométrica que no tiene una imagen congruente, ya que a partir de una figura dada se obtienen una o varias figuras en tamaño mayor (agrandada) o menor (reducida) de la figura dada, pero conservando sus proporciones. La homotecia conserva también ángulos y la alineación. Las dimensiones de dos figuras por homotecia son directamente proporcionales; esta proporción es fijada por la constante de homotecia la cual multiplica las longitudes por la relación de homotecia k, las áreas se multiplican por k x k etc." (Barreto J. , 2010).

[10] Definición VI-2. Dos figuras están inversamente relacionadas cuando en cada una de las figuras hay razones antecedentes y consecuentes.

[11] Definición 5. Se dice que una razón está compuesta de razones cuando los tamaños de las razones multiplicadas por sí mismas producen alguna razón.

magnitudes, como es usual en Euclides), sino que además incluye una operación entre razones (que no hace parte del discurso euclídeo, ni siquiera al hablar sobre razones compuestas).

Euclides también utiliza el término *Triángulos equiángulos* definición que corresponde a la proposición VI-4, así pues:

> "En los triángulos equiángulos, los lados que comprenden los ángulos iguales son proporcionales y los lados que subtienden los ángulos iguales son correspondientes" (Puertas, 1994, p. 62)

2.2.4 Propiedades

En este apartado se analizarán las proposiciones en dos grupos, primero las proposiciones correspondientes a proposiciones-teoremas, y segundo las proposiciones-problemas.

El análisis para cada uno de los tipos de proposición tendrá la siguiente estructura: primero se enunciará la proposición, seguido por una parte del dibujo o el dibujo completo utilizado en el Libro VI para visualizar la proposición; es decir que en algunas proposiciones se utilizara sólo la parte del dibujo que ayuda a entender lo que se plantea en el *diorismós*, dejando a un lado las construcciones auxiliares hechas para lograr la demostración. Luego se describirán las razones y proporciones utilizadas en cada una de las proposiciones y concluyendo acerca del tratamiento de la semejanza o proporcionalidad geométrica planteadas en cada una; esta descripción puede ir acompañada de una expresión simbólica para aclarar la descripción hecha.

2.2.4.1 *Proposiciones-teoremas*

Las siguientes proposiciones son teoremas;

Proposición 1: Los triángulos y los paralelogramos que tienen la misma altura son entre sí como sus bases.(Puertas, 1994, p. 56)

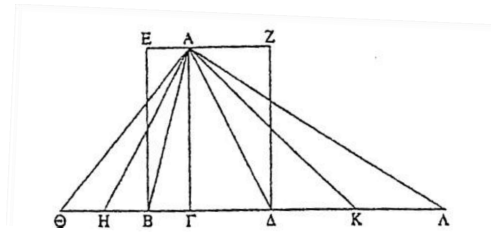


Figura 7. Parte del dibujo utilizado por Euclides en la proposición 1

En esta primera proposición se relacionan elementos como: la cantidad de longitud de las bases, la cantidad de superficie de los triángulos y la cantidad de superficie de los paralelogramos, con la condición que triángulos y paralelogramos tengan la misma altura. Euclides establece la siguientes razones: razón entre cantidad de superficie de triángulos, razón entre cantidad de superficie de paralelogramos y razón entre cantidad de longitud de las bases. Así, cuando señala que son entre sí como sus bases, establece las siguientes proporciones: $\frac{AB\Gamma}{A\Gamma\Delta} = \frac{E\Gamma}{\Gamma Z} = \frac{A\Gamma}{\Gamma\Delta}$. En éstas se identifica una proporción entre magnitudes de la misma naturaleza (superficie), que es la planteada entre las razones de cantidad de superficie de triángulos y paralelogramos, $\frac{AB\Gamma}{A\Gamma\Delta} = \frac{E\Gamma}{\Gamma Z}$ y dos de diferente naturaleza (superficie, longitud) como la planteada entre las razones de cantidad de superficie de triángulos con la cantidad de longitud de las bases $\frac{AB\Gamma}{A\Gamma\Delta} = \frac{A\Gamma}{\Gamma\Delta}$ .Y la planteada entre las de cantidad de superficie de paralelogramos con la cantidad de longitud de las bases $\frac{E\Gamma}{\Gamma Z} = \frac{A\Gamma}{\Gamma\Delta}$. Por lo anterior se da cuenta que en esta proposición Euclides expone la proporcionalidad geométrica entre magnitudes y no semejanza entre figuras. Esto se ve más claramente en el *diorismós*[12] que se acompaña de la Figura 7, el cual dice: Digo que como la base ΒΓ es a la base ΓΔ, así el triángulo ΑΒΓ es al triángulo ΑΓΔ y el paralelogramo ΕΓ al paralelogramo ΓΖ. (Puertas, 1994, p. 57)

[12] En el apartado de argumentos esto se justifica

Proposición 2: Si se traza una recta paralela a uno de los lados de un triángulo, cortará proporcionalmente los lados del triángulo. Y si se cortan proporcionalmente los lados de un triángulo, la recta que une los puntos de sección será paralela al lado restante del triángulo.(Puertas, 1994, p. 58)

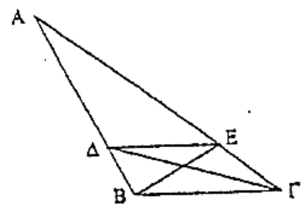


Figura 8. Parte del dibujo utilizado por Euclides en la proposición 2

En primer lugar señalemos que aquí se están planteando dos proposiciones, una recíproca de la otra. Ahora bien, observemos que se establece la proporción entre la cantidad de longitud de los segmentos de cada lado del triángulo resultantes de trazar la paralela ΔE, es decir la proporción $\frac{\mathrm{B\Delta}}{\mathrm{\Delta A}} = \frac{\mathrm{\Gamma E}}{\mathrm{EA}}$. Véase la Figura 8. Así reconocemos que se está trabajando proporcionalidad geométrica entre magnitudes de la misma naturaleza (en este caso la cantidad de longitud), y no con respecto a la semejanza.

Proposición 3: Si se divide en partes iguales un ángulo de un triángulo, y la recta que corta el ángulo corta también la base, los segmentos de la base guardarán la misma razón que los restantes lados del triángulo; y, si los segmentos de la base guardan la misma razón que los restantes lados restantes del triángulo, la recta trazada desde el vértice hasta la sección dividirá en dos partes iguales el ángulo del triángulo. (Puertas, 1994, p. 60)

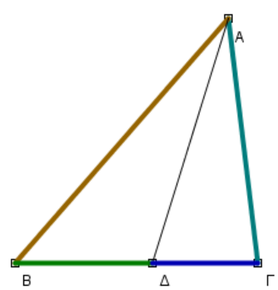


Figura 9. Parte del dibujo utilizado por Euclides en la proposición 3

Nótese que aquí también se plantea la proposición y su recíproco. En esta proposición se establece una relación de razones entre la cantidad de longitud de los lados de un triángulo $\frac{\mathrm{B\Delta}}{\mathrm{\Delta\Gamma}}$ y la cantidad de longitud de los segmentos que resultan sobre el lado opuesto al ángulo al que se le traza la bisectriz $\frac{\mathrm{BA}}{\mathrm{A\Gamma}}$. En esta proposición implícitamente se está exponiendo proporcionalidad ya que se plantea la proporción entre la cantidad de longitud de los lados del triángulo y los segmentos resultantes de prolongar la bisectriz, es decir, se plantea la siguiente relación $\frac{\mathrm{B\Delta}}{\mathrm{\Delta\Gamma}} = \frac{\mathrm{BA}}{\mathrm{A\Gamma}}$.

El recíproco de esta proposición se puede tomar como una caracterización de bisectriz, la cual establece que si se encuentra la proporción $\frac{\mathrm{B\Delta}}{\mathrm{\Delta\Gamma}} = \frac{\mathrm{BA}}{\mathrm{A\Gamma}}$ (que relaciona la razón entre la cantidad de longitud de los segmentos de un lado dividido por la recta AΔ y la razón de cantidad de longitud de los lados de un triángulo) esta recta será bisectriz del ángulo al que dividió. En esta proposición nuevamente se está exponiendo la proporcionalidad geométrica y no se alude a la semejanza.

Proposición 4: En los triángulos equiángulos, los lados que comprenden los ángulos iguales son proporcionales y los lados que subtienden los ángulos iguales son correspondientes. (Puertas, 1994, p. 62)

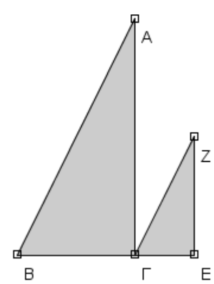


Figura 10. Parte del dibujo utilizado por Euclides en la proposición 4

En esta proposición Euclides utiliza la definición de triángulos equiángulos para plantear las siguientes proporciones entre la cantidad de longitud de los lados que comprenden los ángulos correspondientes entre los triángulos: $\frac{\mathrm{BA}}{\mathrm{A\Gamma}} = \frac{\mathrm{\Gamma Z}}{\mathrm{ZE}}$, $\frac{\mathrm{A\Gamma}}{\mathrm{\Gamma B}} = \frac{\mathrm{ZE}}{\mathrm{E\Gamma}}$, $\frac{\mathrm{\Gamma B}}{\mathrm{BA}} = \frac{\mathrm{E\Gamma}}{\mathrm{\Gamma Z}}$. En esta proposición se trabaja explícitamente proporcionalidad geométrica; sin embargo, esto implica un trabajo implícito de semejanza entre los triángulos, puesto que esta dado por el enunciado dado y se cumple la definición 1.

Proposición 5: Si dos triángulos tienen sus lados proporcionales, los triángulos serán equiángulos y tendrán iguales los ángulos a los que subtienden los lados correspondientes. (Puertas, 1994, p. 63)

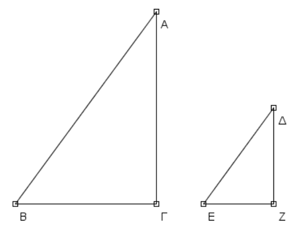


Figura 11. Parte del dibujo utilizado por Euclides en la proposición 5

Esta proposición es la recíproca de la proposición 4. Dados los triángulos ΑΒΓ y ΔΕΖ, se establecen razones entre la cantidad de longitud de los lados correspondientes que comprenden los ángulos de los triángulos; así se establecen las siguientes proporciones: $\frac{\mathrm{AB}}{\mathrm{B\Gamma}} = \frac{\Delta\mathrm{E}}{\mathrm{EZ}}$; $\frac{\mathrm{B\Gamma}}{\Gamma\mathrm{A}} = \frac{\mathrm{EZ}}{\mathrm{Z}\Delta}$; $\frac{\mathrm{BA}}{\mathrm{A\Gamma}} = \frac{\mathrm{E}\Delta}{\Delta\mathrm{Z}}$. En esta proposición Euclides establece una relación de proporcionalidad entre la cantidad de longitud de los lados correspondientes que subtienden los ángulos de los triángulos.

Concluye que los ángulos a los que subtienden los lados correspondientes son iguales, es decir que la cantidad de amplitud de éstos es la misma. Para afirmar lo anterior se basa en la definición de triángulos equiángulos. Aquí no utiliza la definición de semejanza, pero se puede concluir con lo anterior que dos triángulos equiángulos son semejantes ya que cumplen las condiciones de la definición VI-1.

Proposición 6: Si dos triángulos tiene un ángulo (del uno) igual a un ángulo (del otro) y tienen proporcionales los lados que comprenden los ángulos iguales, los triángulos serán equiángulos y tendrán iguales los ángulos a los que subtienden los lados correspondientes.(Puertas, 1994, p. 65)

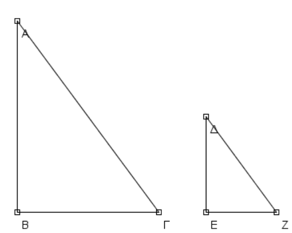


Figura 12. Parte del dibujo utilizado por Euclides en la proposición 6

Dados los triángulos ABΓ y ΔEZ, se tiene que la cantidad de amplitud del ángulo BAΓ es igual a la cantidad de amplitud del ángulo EΔZ. Luego, establece la relación de proporcionalidad geométrica entre la cantidad de longitud de los lados que comprenden los ángulos iguales. Es así que $\frac{BA}{A\Gamma} = \frac{E\Delta}{\Delta Z}$ es la proporción establecida. Por lo anterior se puede concluir que se cumple la definición de triángulos equiángulos, que para este caso correspondería al criterio de semejanza que hoy conocemos como LAL.

Proposición 7: Si dos triángulos tienen un ángulo de uno igual a un ángulo de otro y tienen proporcionales los lados que comprenden los otros ángulos, y tienen los restantes ángulos parejamente menores o no menores que un recto, los triángulos serán equiángulos y tendrán iguales los ángulos que comprenden los lados proporcionales. (Puertas, 1994, p. 66)

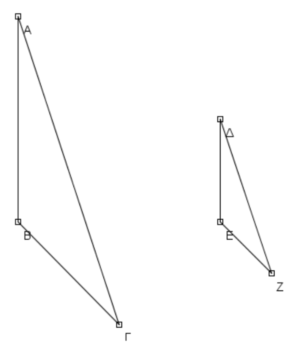


Figura 13. Parte del dibujo utilizado por Euclides en la proposición 7

Dados los triángulos ABΓ y ΔEZ, se tiene que la cantidad de amplitud de los ángulos BAΓ es igual a la cantidad de amplitud del ángulo EΔZ. Establece la relación de proporción entre la cantidad de longitud de los lados que comprenden los ángulos ABΓ Y ΔEZ, así $\frac{AB}{B\Gamma} = \frac{\Delta E}{EZ}$.

Por reducción al absurdo demuestra que los ángulos restantes tienen la misma cantidad de amplitud y que por consiguiente los triángulos son equiángulos. No hace mención a la semejanza pero implícitamente pone en juego las condiciones de la definición 1.

Proposición 8: Si en un triángulo rectángulo se traza una perpendicular desde el ángulo recto hasta la base, los triángulos adyacentes a la perpendicular son semejantes al (triángulo) entero y entre sí.(Puertas, 1994, p. 69)

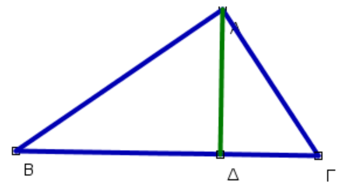


Figura 14. Dibujo utilizado por Euclides en la Proposición 8

Establece la relación de semejanza entre el triángulo ΑΒΓ y cada uno de los triángulos resultantes después de trazar la perpendicular desde el ángulo recto al lado opuesto a éste. También establece la relación de semejanza entre los dos triángulos resultantes. Esta relación la establece a partir de la definición de triángulos equiángulos, donde la cantidad de amplitud de los ángulos de cada triángulo es igual, y los lados que comprenden los ángulos iguales son proporcionales. Por lo anterior cumple la definición de semejanza establecida en la definición 1.

A partir de esta proposición se instauran los siguientes porismas:

i) Si en un triángulo rectángulo se traza una perpendicular desde el ángulo recto hasta la base, los triángulos adyacentes son semejantes al triángulo entero y entre sí. ii) Si en un triángulo rectángulo se traza una perpendicular desde el ángulo recto hasta la base, la recta trazada es la media proporcional de los segmentos de la base. (Puertas, 1994, p. 70)

Proposición 14: En los paralelogramos iguales y equiángulos entre sí, los lados que comprenden los ángulos iguales están inversamente relacionados, y aquellos paralelogramos equiángulos que tienen los lados que comprenden los ángulos iguales inversamente relacionados, son iguales.(Puertas, 1994, p. 75)

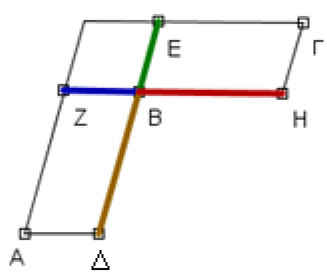


Figura 15 Dibujo utilizado por Euclides en la proposición 14.

En esta proposición se menciona la recíproca, por consiguiente hay dos proposiciones planteadas en el enunciado. Define que los paralelogramos AB y BΓ son iguales, es decir, tienen la misma cantidad de superficie y además son equiángulos, esta es la condición necesaria para que los lados que comprenden los ángulos iguales sean inversamente relacionados.

Esta es la primera proposición donde se hace alusión a figuras diferentes a triángulos y que cumplen las condiciones de ser equiángulos, además también es la primera en la que aparece "*lados inversamente relacionados*".

En esta proposición establece la relación de proporcionalidad geométrica entre la cantidad de longitud de los lados que comprenden los ángulos iguales. Es decir: $\frac{\Delta B}{BE} = \frac{HB}{BZ}$. En esta relación de proporcionalidad Euclides señala que están inversamente relacionados entre los lados que comprenden los ángulos iguales. Lo que quiere decir que la relación se da entre antecedente y consecuente y no de manera correspondiente antecedentes con antecedentes y consecuentes con consecuentes.

Proposición 15: En los triángulos iguales que tienen un ángulo (de uno) igual a un ángulo (del otro), los lados que comprenden los ángulos iguales están inversamente relacionados. Y aquellos triángulos que tienen un ángulo (de uno) igual a un ángulo (del otro) cuyos lados que comprenden los ángulos iguales están inversamente relacionados, son iguales.(Puertas, 1994, p. 77)

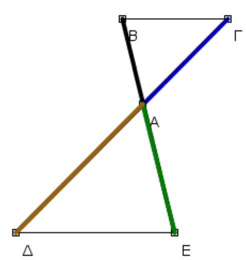


Figura 16. Parte del dibujo utilizado por Euclides en la proposición 15

Al igual que en la anterior proposición se establece una relación inversa entre lados no correspondientes, es decir, en el enunciado hay dos proposiciones, en esta proposición se tiene que hay dos triángulos iguales, ABΓ y AΔE de igual cantidad de superficie y que tienen un ángulo BAΓ y ΔAE igual, es decir, ángulos con la misma cantidad de amplitud.

En la proposición plantea la siguiente proporción $\frac{\Gamma\mathrm{A}}{\mathrm{A}\Delta}=\frac{\mathrm{EA}}{\mathrm{AB}}$, que relaciona la cantidad de longitud de los lados que comprenden los ángulos iguales, y utiliza la anterior proposición para plantear la proporción inversa entre los lados.

> Proposición16: Si cuatro rectas son proporcionales, el rectángulo comprendido por las extremas es igual al rectángulo comprendido por las medias; y si el rectángulo comprendido por las extremas es igual al rectángulo comprendido por las medias, las cuatro rectas serán proporcionales. (Puertas, 1994, p. 78)

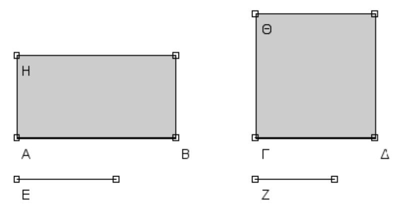


Figura 17. Parte del dibujo utilizado por Euclides en la proposición 16

En este enunciado se plantea la proposición y su recíproca. Se establece una proporción entre cuatro rectas, la cual es $\frac{\mathrm{AB}}{\Gamma\Delta}=\frac{\mathrm{E}}{\mathrm{Z}}$, también establece una relación de igualdad entre los rectángulos que se construyen a partir de las rectas proporcionales E y Z. Es la primera proposición que se refiere a media y extrema razón donde se utiliza la definición VI-3.

> Proposición 17: Si tres rectas son proporcionales, el rectángulo comprendido por las extremas es igual al cuadrado de la medida; y si el rectángulo comprendido por las extremas es igual al cuadrado de la media, las tres rectas serán proporcionales.(Puertas, 1994, p. 80)

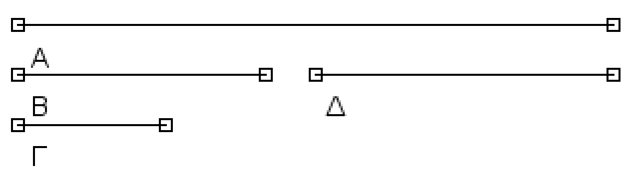


Figura 18. Dibujo utilizado por Euclides en la proposición 17

Se establece una relación de proporción entre la cantidad de longitud de las rectas A, B, Γ, la proporción establecida es: $\frac{\mathrm{A}}{\mathrm{B}}=\frac{\mathrm{B}}{\Gamma}$.

Proposición 19: Los triángulos semejantes guardan entre sí la razón duplicada de sus lados correspondientes. (Puertas, 1994, p. 83)

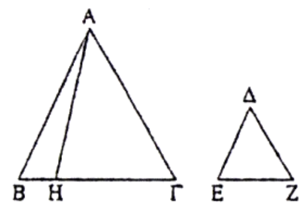


Figura 19. Dibujo utilizado por Euclides en la proposición 19

Esta proposición establece una semejanza entre los triángulos $\mathrm{AB\Gamma}$ semejante a $\Delta\mathrm{EZ}$, donde se establece la proporción entre la cantidad de longitud de los lados de los triángulos así $\frac{\mathrm{AB}}{\mathrm{B\Gamma}} = \frac{\Delta\mathrm{E}}{\mathrm{EZ}}$. Es la primera proposición que se refiere a razón duplicada que no es más que un caso particular de la razón compuesta definida en el libro de *Elementos*, donde se guarda una proporción de 2 a 1.

Proposición 20: Los polígonos semejantes se dividen en triángulos semejantes e iguales en número y homólogos a los (polígonos) enteros y un polígono guarda con el otro una razón duplicada de la que guarda el lado correspondiente con el lado correspondiente.(Puertas, 1994, p. 85)

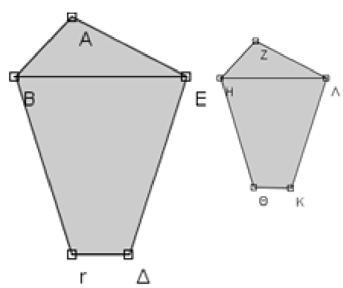


Figura 20. Parte del dibujo utilizado por Euclides en la proposición 20

En esta proposición Euclides utiliza el expresión homólogo para referirse a los términos correspondientes de la proporción $\frac{\mathrm{BA}}{\mathrm{AE}} = \frac{\mathrm{HZ}}{\mathrm{Z\Lambda}}$, y establece relaciones de semejanza entre triángulos ABE, ZH**Λ**, dado que tienen un lado igual y los lados que comprenden a éstos son proporcionales.

Proposición 21: Las figuras semejantes a una misma figura rectilínea son también semejantes entre sí.(Puertas, 1994, p. 89)

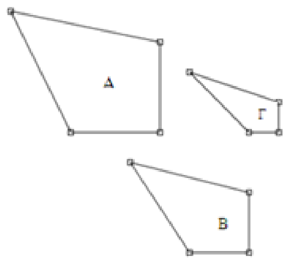


Figura 21. Dibujo utilizado por Euclides en la proposición 21

Dadas las figuras A y B semejantes a Γ, se dice que A es semejante B, porque A es semejante a Γ por definición 1, tienen sus ángulos iguales y los lados que comprenden los ángulos iguales son proporcionales, lo mismo pasa porque B es semejante a Γ. En esta proposición se refiere a semejanza, luego cumple la proporción entre la cantidad de magnitud de los lados correspondientes que comprenden los ángulos iguales por tanto las tres figuras tendrán ángulos iguales y lados proporcionales es decir las tres cumplen el criterio LAL.

Proposición 22: Si cuatro rectas son proporcionales, las figuras rectilíneas semejantes y construidas de manera semejante a partir de ella serán también proporcionales; y si las figuras semejantes y construidas de manera semejante a partir de ellas son proporcionales, las rectas serán también proporcionales.(Puertas, 1994, p. 90)

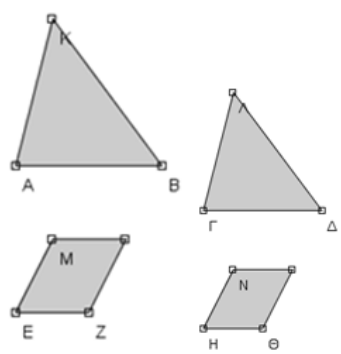


Figura 22. Dibujo utilizado por Euclides en la proposición 22

Aquí se plantea la proposición y la recíproca. Se plantea una proporción entre la cantidad de longitud de las rectas AB, RΔ, EZ Y HΘ. La proporción es la siguiente: $\frac{\mathrm{AB}}{\Gamma\Delta} = \frac{\mathrm{EZ}}{\mathrm{H\Theta}}$ Luego se construyen figuras semejantes y situadas de manera semejante a partir de las rectas proporcionales antes mencionadas KAB, ΛΓΔ, EZ, HΘ y se deduce la proporcionalidad entre la cantidad de superficie de las figuras semejantes $\frac{\mathrm{KAB}}{\Lambda\Gamma\Delta}=\frac{\mathrm{EZ}}{\mathrm{H}\Theta}$. En esta proposición se trabaja proporcionalidad geométrica y semejanza.

Proposición 23: Los paralelogramos equiángulos guardan entre sí la razón compuesta de (las razones) de sus lados.(Puertas, 1994, p. 93)

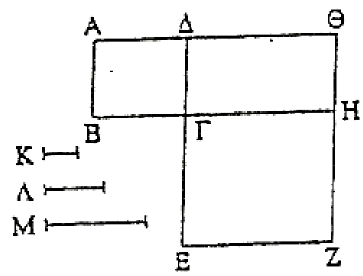


Figura 23. Dibujo utilizado por Euclides en la proposición 23

Esta proporción utiliza la razón compuesta correspondiente a la definición VI-5, donde Euclides construye las razones $\frac{\mathrm{K}}{\mathrm{M}}$ de manera que esta razón resulta de componer las razones $\frac{\mathrm{K}}{\mathrm{L}},\frac{\mathrm{L}}{\mathrm{M}}$ las cuales son iguales a las razones inversamente relacionadas entre la cantidad de magnitud de los lados de los paralelogramos equiángulos, así $\frac{\mathrm{BC}}{\mathrm{CG}}=\frac{\mathrm{DC}}{\mathrm{CE}}$. Euclides construye unas proporciones entre magnitudes diferentes (longitud, superficie) así: $\frac{K}{L}=\frac{AC}{CH}$ y $\frac{\mathrm{L}}{\mathrm{M}}=\frac{\mathrm{CH}}{\mathrm{CF}}$ de esta composición resulta $\frac{\mathrm{K}}{\mathrm{M}}=\frac{\mathrm{AC}}{\mathrm{CF}}$, por tanto la razón que existe entre los paralelogramos equiángulos es: $\frac{\mathrm{AC}}{\mathrm{CF}}=\frac{\mathrm{BC}}{\mathrm{CG}}=\frac{\mathrm{DC}}{\mathrm{CE}}$.

Proposición 24: En todo paralelogramo, los paralelogramos situados en torno a su diagonal son semejantes al (paralelogramo) entero y entre sí.(Puertas, 1994, p. 94)

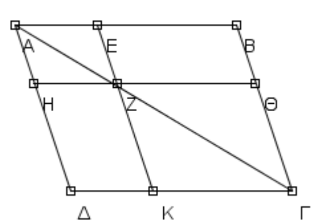


Figura 24. Parte del dibujo utilizado por Euclides en la proposición 24

En el enunciado de esta proposición se hace referencia a la semejanza entre figuras; para llegar a que estas figuras son semejantes plantea las siguientes razones y proporciones:

Dado el paralelogramo ΑΒΓΔ y trazada su diagonal ΑΓ, los paralelogramos situados en torno a la diagonal es decir ΕΗ y ΘΚ, son semejantes.

Es así, que se trazan las rectas ΕΖ paralela a ΒΓ y ΗΖ paralela a ΔΓ, lados de los triángulos resultantes de trazar la diagonal ΑΓ. Después de las siguientes construcciones se plantean las siguientes razones y proporciones entre la cantidad de longitud de los lados de los paralelogramos, $\frac{\mathrm{BE}}{\mathrm{EA}} = \frac{\Gamma\mathrm{Z}}{\mathrm{ZA}}$ y $\frac{\Gamma\mathrm{Z}}{\mathrm{ZA}} = \frac{\Delta\mathrm{H}}{\mathrm{HA}}$ pero $\frac{\Gamma\mathrm{Z}}{\mathrm{ZA}} = \frac{\mathrm{BE}}{\mathrm{EA}}$ y $\frac{\mathrm{BE}}{\mathrm{EA}} = \frac{\mathrm{AH}}{\mathrm{HA}}$, por composición $\frac{\mathrm{BA}}{\mathrm{AE}} = \frac{\Delta\mathrm{A}}{\mathrm{AH}}$ y por alternancia $\frac{\mathrm{BA}}{\mathrm{A}\Delta} = \frac{\mathrm{EA}}{\mathrm{AH}}$, con este planteamiento de razones y proporciones se llega a demostrar que los lados que comprenden el ángulo en común de los paralelogramos ΑΒΓΔ y ΕΗ, son proporcionales. Este proceso lleva a demostrar que los triángulos ΑΒΓ y ΑΕΖ son equiángulos, al igual que ΑΓΔ y ΑΖΗ.

Teniendo en cuenta que los lados de un triángulo equiángulo son proporcionales, se concluye que los paralelogramos mencionados anteriormente son semejantes.

Proposición 26: Si se quita de un paralelogramo un paralelogramo semejante y situado de manera semejante al paralelogramo entero que tenga un ángulo común con él, está en torno a la misma diagonal que el (paralelogramo) entero.(Puertas, 1994, p. 97)

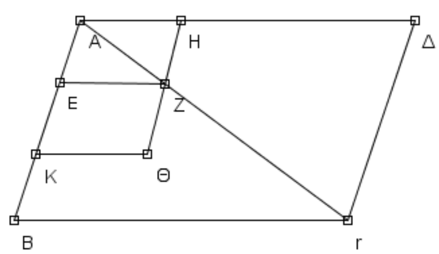


Figura 25. Parte del dibujo utilizado por Euclides en la proposición 26

En esta proposición se plantea que el paralelogramo ΑΒΓΔ es semejante al paralelogramo ΑΕΖΗ, es decir que cumplen con la definición 1, la cantidad de amplitud de los ángulos es igual y sus lados son proporcionales, es decir que se pueden plantear las siguientes razones y proporciones: $\frac{\mathrm{A}\Delta}{\mathrm{AH}} = \frac{\mathrm{AB}}{\mathrm{AE}} = \frac{\mathrm{B}\Gamma}{\mathrm{EZ}} = \frac{\Gamma\Delta}{\mathrm{ZH}}$.

También Euclides utiliza los términos “paralelogramos semejantes y situados de manera semejante”; cuando se refiere a “paralelogramos semejantes” no se trata más que de la semejanza entre éstos (VI-23), pero al hablar de “situados de manera semejante” Euclides no se refiere a éste en ninguna parte del libro pero inferimos que los lados semejantes están en rectas paralelas, como los paralelogramos.

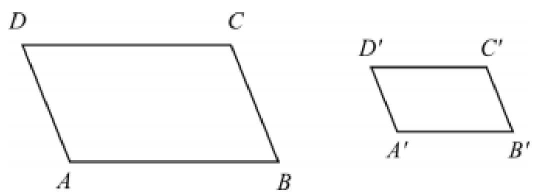


Figura 26. Paralelogramos semejantes y situados de manera semejante

En la Figura 26, se tienen los paralelogramos AC y $A'C'$ donde se tiene que

$$AB \parallel A'B' \text{ y } BC \parallel B'C'$$

Proposición 27: De todos los paralelogramos aplicados a una misma recta y deficientes en figuras paralelogramos semejantes y situadas de manera semejante al construido a partir de la mitad de la recta, el (paralelogramo) mayor es el que es aplicado a la mitad de la recta y es semejante al defecto. (Puertas, 1994, p. 98)

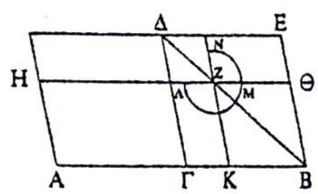


Figura 27. Dibujo utilizado por Euclides en la proposición 27

Esta proposición al igual que las proposiciones VI-28 y VI-29 es la aplicación del áreas, utilizando la semejanza entre paralelogramos, permitiendo aplicar a un segmento dado un paralelogramo igual a una figura rectilínea dada y que exceda o sea deficiente en un paralelogramo semejante a otro. Además reconoce a los paralelogramos construidos sobre la mitad de la recta como los mayores entre todos los paralelogramos deficientes cuyo defecto es semejante y situado de manera semejante a un paralelogramo dado.

Es la primera proposición que utiliza los términos “deficiente y excesivo”, como se ve en la proposición 27, a la cual nos referimos a continuación, haciendo una aclaración en cuanto a lo que se refiere paralelogramos deficientes y paralelogramos excesivos; En el paralelogramo que se encuentra al lado izquierdo se tiene que

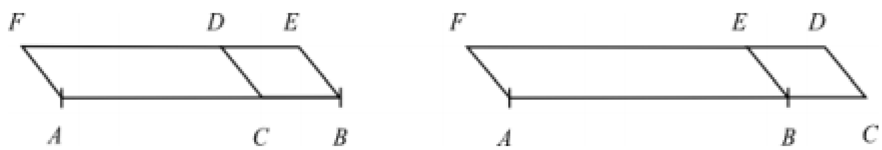


Figura 28. Paralelogramos deficientes y excesivos respecto a una recta

Existe la recta AB y un punto C que se encuentra entre la recta AB (figura de la izquierda), o puede estar en la prolongación de la recta AB (figura de la derecha) Se construye el paralelogramo CE, en el lado izquierdo y el paralelogramo AD en el lado derecho. Por tanto el paralelogramo del lado izquierdo AD es deficiente respecto a la recta AB y su defecto es el paralelogramo CE, por otra parte el paralelogramo de la figura de la derecha AD es excesivo respecto al aplicado a la recta AB, y su exceso es el paralelogramo BD.

Proposición 31: En los triángulos rectángulos, la figura (construida) a partir del lado que subtiende el ángulo recto es igual a las figuras semejantes y construidas de manera semejante a partir de los lados que comprenden el ángulo recto.(Puertas, 1994, p. 104)

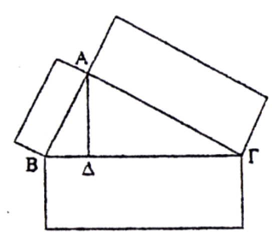


Figura 29. Dibujo utilizado por Euclides en la proposición 31

Esta proposición es la generalización del llamado Teorema de Pitágoras, tratado por Euclides en la proposición VI-47 del Libro I de *Elementos*, en esta proposición plantea que al construir figuras semejantes sobre cada uno de los lados del triángulo rectángulo ABΓ, se tiene que la cantidad de superficie de la figura construida sobre el lado BΓ es igual a la cantidad de superficie de las figuras semejantes construidas sobre los lados AB y AΓ.

Demuestra que esta relación de igualdad entre cantidad de superficie de figuras semejantes se cumple para cualquier figura que se construya sobre los lados del triángulo rectángulo.

Proposición 32: Si dos triángulos que tienen dos lados (de uno) proporcionales a dos lados (del otro) se construyen unidos por un ángulo de modo que sus lados correspondientes sean paralelos, los restantes lados de los triángulos estarán en línea recta.(Puertas, 1994, p. 106)

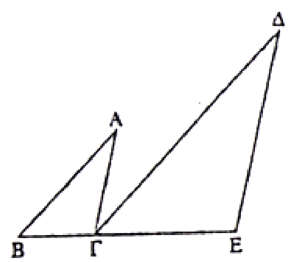


Figura 30. Dibujo utilizado por Euclides en la proposición 32

Se dan los triángulos ΑΒΓ y ΔΓΕ, donde la cantidad de longitud de dos lados es proporcional, y se plantea: $\frac{AB}{A\Gamma} = \frac{\Delta\Gamma}{\Delta E}$; y además la recta AB es paralela a ΔΓ y AΓ es paralela a ΔE. En esta proposición se expone la proporcionalidad geométrica y se hace alusión a la semejanza de manera implícita ya que se plantean relaciones que llevan a concluir que esto dos triángulos son equiángulos por tanto cumplen con la definición VI-1.

Proposición 33: En los círculos iguales, los ángulos guardan la misma razón que las circunferencias sobre las que están, tanto si están en el centro como si están en las circunferencias.(Puertas, 1994, p. 107)

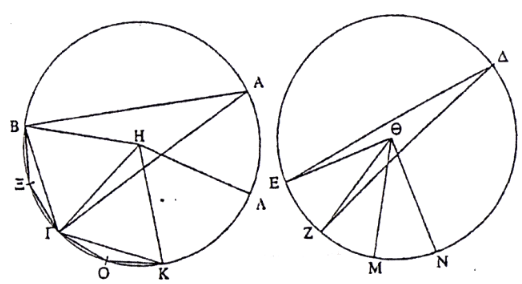


Figura 31. Dibujo utilizado por Euclides en la proposición 33

Esta proposición es diferente a todas las tratadas en este libro, puesto que incluye el trabajo con circunferencias, lo que no es mencionado por Euclides en sus anteriores definiciones y proposiciones. En esta proposición se plantean razones entre la cantidad de superficie de las circunferencias $\frac{\mathrm{B\Gamma}}{\mathrm{EZ}}$ y la cantidad de amplitud de los ángulos centrales de cada circunferencia es decir. $\frac{\mathrm{BH\Gamma}}{\mathrm{E\Theta Z}}, \frac{\mathrm{BA\Gamma}}{\mathrm{E\Delta Z}}$. Se plantea la siguiente proporción $\frac{\mathrm{B\Gamma}}{\mathrm{EZ}} = \frac{\mathrm{BH\Gamma}}{\mathrm{E\Theta Z}} = \frac{\mathrm{BA\Gamma}}{\mathrm{E\Delta Z}}$, entre cantidad de magnitud de diferente naturaleza (superficie y amplitud) $\frac{\mathrm{B\Gamma}}{\mathrm{EZ}} = \frac{\mathrm{BH\Gamma}}{\mathrm{E\Theta Z}}$ y de igual naturaleza (amplitud) $\frac{\mathrm{BH\Gamma}}{\mathrm{E\Theta Z}} = \frac{\mathrm{BA\Gamma}}{\mathrm{E\Delta Z}}$. En esta proposición se hace mención a la proporcionalidad geométrica.

2.2.4.2 *Proposiciones - problemas*

Las siguientes proposiciones están en el tipo de problemas por construcción, que se identifican porque Euclides finaliza la descripción de la construcción con la sigla Q.E.F.

Proposición 9: Quitar de una recta dada la parte que se pida.(Puertas, 1994, p. 71)

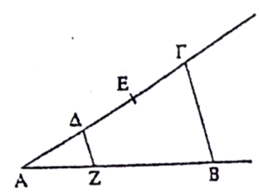


Figura 32. Dibujo utilizado por Euclides en la proposición 9

En esta proposición se plantea la proporción entre la cantidad de longitud de los segmentos resultantes de trazar dos rectas paralelas entre sí $\frac{\Gamma\Delta}{\Delta\mathrm{A}} = \frac{\mathrm{BZ}}{\mathrm{ZA}}$. También plantea que ΓA = 2ΔA por tanto BZ = 2ZA. Hay una partición (alícuota) de partes iguales. En esta proposición se expone proporcionalidad geométrica, implícitamente se trabaja semejanza ya que se forman dos triángulos que comparten un ángulo y sus lados correspondientes son proporcionales.

Proposición 10: Dividir una recta dada no dividida de manera semejante a una recta dada ya dividida.(Puertas, 1994, p. 72)

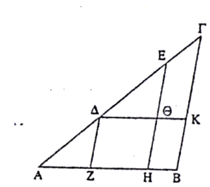


Figura 33. Dibujo utilizado por Euclides en la proposición 10

En esta proposición se establece una proporción entre la cantidad de longitud de los segmentos resultantes al trazar rectas paralelas a los lados correspondientes del triángulo ΑΓΒ, formado por las rectas dadas ΑΓ y ΑΒ. Después de hacer todas las construcciones y plantear razones y proporciones se tiene que la recta ha quedado dividida de manera semejante, entonces se tiene que: $\frac{\Gamma E}{E\Delta} = \frac{BH}{HZ}$ y $\frac{E\Delta}{\Delta A} = \frac{HZ}{ZA}$.

Proposición 11: Dadas dos rectas, hallar una tercera proporcional.(Puertas, 1994, p. 73)

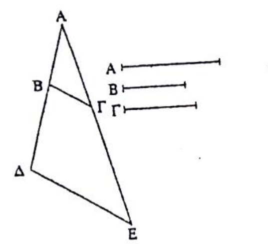


Figura 34. Dibujo[13] utilizado por Euclides en la proposición 11

Corresponde a una construcción, donde se realiza una prolongación de dos segmentos dados para hallar una tercera recta proporcional a éstas, entonces se establece la proporción entre la cantidad de longitud de los segmentos $\frac{AB}{B\Delta} = \frac{A\Gamma}{\Delta E}$ y como ΒΔ=ΑΓ, entonces se tiene la siguiente proporción $\frac{AB}{A\Gamma} = \frac{A\Gamma}{\Gamma E}$. En esta proposición se alude a proporcionalidad geométrica, también se trabaja implícitamente semejanza ya que se plantean relaciones de proporcionalidad entre ángulos iguales y lados correspondientes.

Proposición 12: Dadas tres rectas, hallar una cuarta proporcional. (Puertas, 1994, p. 74)

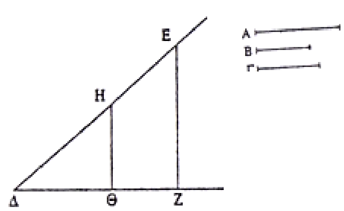


Figura 35. Dibujo utilizado por Euclides en la proposición 12

13 Las rectas que están al lado del triángulo no son utilizadas en la demostración de la proposición. Creemos que pertenecen al grafico utilizado en la proposición 12.

Corresponde a una construcción, donde a partir de tres rectas dadas iguales a otras tres (ΔH es igual a A, HE es igual a B, ΔΘ es igual a Γ), hay que hallar una cuarta recta proporcional que en esta construcción es ΘZ; entonces se establece la proporción entre la cantidad de longitud de los segmentos resultantes de trazar paralelas por ellos $\frac{\Delta H}{HE} = \frac{\Delta\Theta}{\Theta Z}$.

Proposición 13: Dadas dos rectas, hallar una media proporcional.(Puertas, 1994, p. 74)

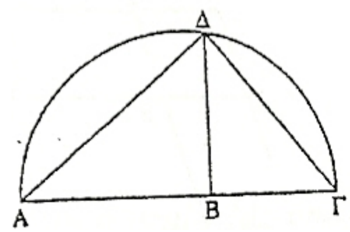


Figura 36. Dibujo utilizado por Euclides en la proposición 13

De manera similar a la proposición VI-8, se establece una proporción entre los lados que contienen los ángulos correspondientes a los triángulos formados a partir de la construcción de un semicírculo que garantiza que cualquier ángulo inscrito sobre él sea recto, por tanto el segmento que une el vértice de los triángulos sobre el semicírculo y la base de los triángulos será la media proporcional de las rectas dadas.

Proposición 18: A partir de una recta dada, construir una figura rectilínea semejante y situada de manera semejante a una figura rectilínea dada.(Puertas, 1994, p. 82)

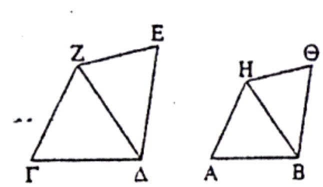


Figura 37. Dibujo utilizado por Euclides en la proposición 18

En esta proposición se da una figura EΓ y una recta AB, sobre la cual hay que construir una figura semejante a la dada.

Para construir la figura se construye un triángulo sobre AB semejante a ΓZΔ, y se establece la relación de proporcionalidad entre los lados de los triángulos equiángulos la cual es:

$\frac{Z\Delta}{HB} = \frac{Z\Gamma}{HA} = \frac{\Gamma\Delta}{AB}$, luego se construye un triángulo semejante a ZΔE sobre la recta HB y se establece la siguiente relación de proporcionalidad. $\frac{Z\Delta}{HB} = \frac{ZE}{\Theta H} = \frac{E\Delta}{\Theta B}$. Por tanto estas construcciones llevan a plantear la siguiente proporción: $\frac{Z\Delta}{HB} = \frac{Z\Gamma}{HA} = \frac{\Gamma\Delta}{AB} = \frac{ZE}{H\theta} = \frac{E\Delta}{\theta B}$, por consiguiente se establece la semejanza entre las figuras rectilíneas Aθ semejante a ΓE.

Proposición 25: Construir una misma (figura) semejante a una figura rectilínea dada, e igual a otra (figura) dada.(Puertas, 1994, p. 96)

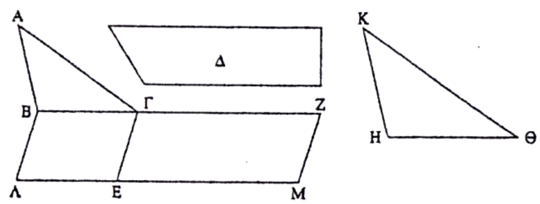


Figura 38. Dibujo utilizado por Euclides en la proposición 25

En esta proposición se quiere obtener una figura que cumpla las condiciones de ser semejante a la figura rectilínea ABΓ y que la cantidad de superficie sea igual a la figura Δ, para lo cual se utilizan las proposiciones 13, 18 y 19 para establecer las proporciones siguientes en las figuras construidas. Proporción entre rectas (segmentos): $\frac{B\Gamma}{H\theta} = \frac{H\theta}{\Gamma Z}$; proporción entre rectas y figuras del mismo tipo: $\frac{B\Gamma}{\Gamma Z} = \frac{AB\Gamma}{KH\theta}$ y $\frac{B\Gamma}{\Gamma Z} = \frac{BE}{EZ}$ y proporción entre figuras de diferente tipo: $\frac{AB\Gamma}{BE} = \frac{KH\theta}{EZ}$.

Proposición 28: Aplicar a una recta dada un paralelogramo igual una figura rectilínea dada deficiente en una figura paralelograma semejante a una dada; pero es necesario que una figura rectilínea dada no sea mayor que el paralelogramo construido a partir de la mitad y semejante al defecto.(Puertas, 1994, p. 100)

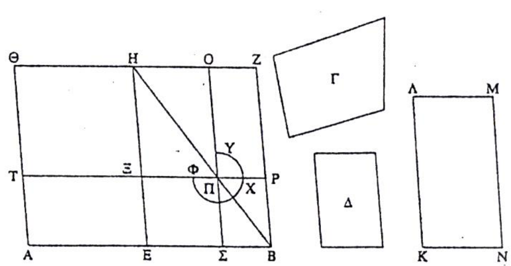


Figura 39. Dibujo utilizado por Euclides en la proposición 28

En esta proposición se establece además de igualdad entre la cantidad de superficie de los paralelogramos $\mathrm{OP} = \Xi\Sigma$, $\Xi\mathrm{B} = \mathrm{TE}$, TE = OB, la igualdad entre la cantidad de longitud de las rectas (segmentos) AE = EB y la semejanza entre los paralelogramos así, $\Delta \text{ es semejante a HB, KM es semejante a HB, H}\Pi \text{ es semejante a HB.}$

Proposición 29: Aplicar a un recta dada un paralelogramo igual a una figura rectilínea dada y que exceda en una figura paralelograma semejante dada. (Puertas, 1994, p. 102)

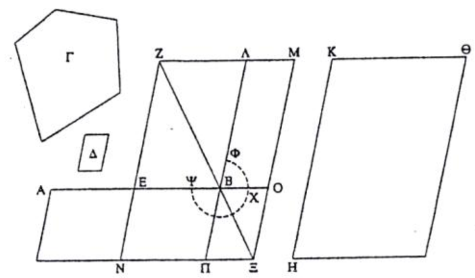


Figura 40. Dibujo utilizado por Euclides en la proposición 29

Esta proposición establece además de la igualdad entre la cantidad de superficie de los paralelogramos AN=NB, $\mathrm{H\theta} = \mathrm{E\Lambda}, \mathrm{H\theta} = \mathrm{MN}$ y entre las figuras AΞ =Γ, así como la semejanza entre los paralelogramos $\text{MN es semejante a H}\theta,\ \text{H}\theta \text{ es semejante a E}\Lambda,$ $\Pi\text{O es semejante a }\Delta, \text{O}\Pi \text{ es semejante a E}\Lambda.$

Proposición 30: Dividir una recta finita en extrema y media razón. (Puertas, 1994, p. 103)

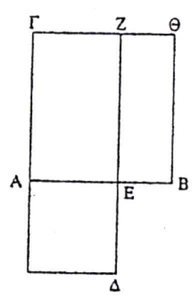


Figura 41. Dibujo utilizado por Euclides en la proposición 30

Esta proposición establece una proporción entre la cantidad de magnitud de las rectas (segmentos), así $\frac{\mathrm{ZE}}{\mathrm{E\Delta}} = \frac{\mathrm{AE}}{\mathrm{EB}}, \frac{\mathrm{BA}}{\mathrm{AE}} = \frac{\mathrm{AE}}{\mathrm{EB}}$.

2.2.5 Procedimientos

Los procedimientos en el Libro VI de Euclides se encuentran fundamentalmente en las proposiciones que son problemas y que se discutieron al final del apartado “Situaciones problemas o tareas matemáticas” de este documento.

2.2.6 Argumentos

El Libro VI de *Elementos* emplea un discurso deductivo en la prueba de las proposiciones. Para el caso de las proposiciones por demostrar, se pueden distinguir seis etapas descritas por Proklos,[14] a saber: enunciado (prótasis), exposición (ékthesis), determinación o delimitación (*diorismós*), preparación o construcción (kataskeué), demostración (apódeixis) y conclusión (sympérasma).

A continuación se presenta una proposición por demostrar en donde se identifica estas seis etapas:

Proposición 4

Prótasis “En los triángulos equiángulos, los lados que comprenden los ángulos iguales son proporcionales y los lados que subtienden los ángulos iguales son correspondientes.

Ékthesis Sean ΑΒΓ, ΔΓΕ triángulos equiángulos con el ángulo ΑΒΓ igual al ángulo ΔΓΕ, y el ángulo ΒΑΓ igual al ΓΕΔ y además el (ángulo) ΑΓΒ igual al (ángulo) ΓΕΔ.

Diorismós Digo que en los triángulos ΑΒΓ, ΔΓΕ, los lados que comprenden los ángulos iguales son proporcionales y los (lados) que subtienden los ángulos iguales son correspondientes.

[14] See R, NETZ (1999) referring to Proklos in *Primum Euclidis Elementorun Librum Commentaria Prologus* págs 203-207.

Kataskeué Póngase, pues, en línea recta ΒΓ, ΓE. Y dado que los ángulos ΑΒΓ, ΑΓΒ son menores que dos rectos [I, 17], y el (ángulo) ΑΓΒ son igual al (ángulo) ΔΕΓ, entonces los (ángulos) ΑΒΓ, ΔΕΓ son menores que dos rectos; por tanto ΒΑ, ΕΔ, prolongadas se encontraran [I, Post. 5]. Prolónguese y encuéntrese en Ζ.

Apódeixis Y puesto que el ángulo ΔΓE es igual al (ángulo) ΑΒΓ, ΒΖ es paralela a ΓΔ [I, 28]. Puesto que, a su vez, el (ángulo) ΑΓΒ es igual al (ángulo) ΔΕΓ, ΑΓ es paralela a ΖΕ [I, 28]. Por tanto ΖΑΓΔ es un paralelogramo, luego ΖΑ es igual a ΔΓ y ΑΓ a ΖΔ [I, 34]. Ahora bien, dado que ΑΓ ha sido trazada paralela a uno (de los lados), ΖΕ, del triángulo ΖΒΕ, entonces, como ΒΑ es a ΑΖ, así ΒΓ a ΓΕ, y, por alternancia, como ΑΒ es a ΒΓ, así ΔΓ a ΓΕ [V, 16]. Asimismo, puesto que ΓΔ es paralela a ΒΖ, entonces, como ΒΓ es a ΓE, así ΖΔ a ΔΕ [VI, 2]. Pero ΖΔ es igual a ΑΓ; por tanto, como ΒΓ es a ΓE, así ΑΓ a ΔΕ, y, por alternancia, como ΒΓ es a ΓΑ, asi ΓΕ a ΕΔ [V, 16]. Así pues, ya que se ha demostrado que, como ΑΒ es a ΒΓ, así ΔΓ a ΓE, y como ΒΓ es a ΓΑ, asi ΓΕ a ΕΔ, entonces, por igualdad, como ΒΑ es a ΑΓ, así ΓΔ es a ΔΕ [V, 22].

Sympérasma Por consiguiente, en los triángulos equiángulos los lados que comprenden los ángulos iguales son proporcionales y los lados que subtienden los ángulos iguales son correspondientes”. (Puertas, 1994, p.62)

La primera hace alusión al enunciado de la proposición, que en la versión de Puertas (1994) se encuentra resaltado en letra cursiva y empieza con las sílabas “Si”, “En”. La ékthesis corresponde al inicio de la demostración y aparece en el segundo párrafo de la proposición donde encontramos generalmente los términos “Sean”, “Sea” o “Pues sea”, aunque en algunas proposiciones (como en la proposición 2 y 26) se utilizan otras expresiones (“Trácese” y “Pues quítese”, respectivamente). El tercer párrafo corresponde al *diorismós*, que usualmente inicia con el término “Digo”. A continuación se encuentra la kataskeué o construcción se encuentra en el cuarto párrafo y explica las construcciones necesarias para a continuación realizar la apódeixis o demostración. Luego de la demostración se ubica la conclusión, que aparece como párrafo final (salvo el caso donde haya porisma), donde encontramos términos como “Por consiguiente”. Esta estructura es independiente de si las proposiciones se refieren a la proporcionalidad geométrica o a la semejanza, por lo cual no nos ofrece un elemento de discriminación.

Mientras que para el caso de las proposiciones por construir, encontramos que el prótasis también aparece en la versión de Puertas (1994) en letra cursiva pero empieza con los verbos “Quitar”, “Dividir”, “Dadas”, “ A partir de”, “Construir” y “Aplicar”. La ékthesis que corresponde al inicio de la construcción aparece en el segundo párrafo de la proposición y también se encuentran generalmente los términos “Sean”, “Sea” o “Pues sea”. El tercer párrafo que corresponde al *diorismós,* inicia con del término “Así pues”. En el siguiente párrafo se encuentra la kataskeué o construcción de manera similar a construcción de las proposiciones por demostrar, y a continuación y también de manera similar se encuentra la demostración donde usualmente se utilizan términos como “Puesto que”, “Entonces”. Y también de manera similar en el último párrafo se encuentra la conclusión que utiliza términos como “Por consiguiente” y “Por tanto”.

Por otra parte, hemos elaborado un mapa deductivo de las proposiciones del Libro VI (ver figura siguiente) en donde las flechas representan las conexiones lógico-deductivas entre las diferentes proposiciones; así, por ejemplo, en la figura se puede leer que la proposición 26 (P26) es utilizada en las respectivas demostraciones de las proposiciones 27 y 28, en tanto que en la demostración de la proposición 26 interviene únicamente la proposición 24.

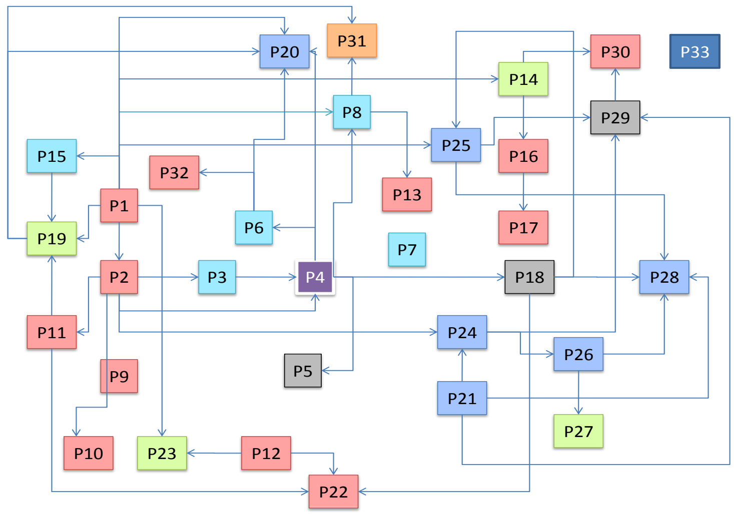


Figura 42. Mapa deductivo de las proposiciones del Libro VI

Esta representación nos ha permitido hacer una aproximación a la *complejidad lógica* de cada proposición, pues suponemos que aquellas que reciben más flechas, son más exigentes que aquellas que reciben menor número de flechas; este es el caso de las proposiciones 20 y 28. Así mismo, suponemos que aquellas de las que salen mayor número de flechas (i.e., que están involucradas en más proposiciones) son de mayor jerarquía para la teoría expuesta en el Libro VI; las proposiciones 2 y 4 tienen esta condición y se refieren a proporcionalidad geométrica. Sin embargo, a partir de esta información no hemos logrado identificar una diferencia sustancial en cuanto al tratamiento argumentativo diferenciado para la proporcionalidad geométrica y la semejanza.

2.3 Asuntos relevantes del análisis del Libro VI desde la TSS

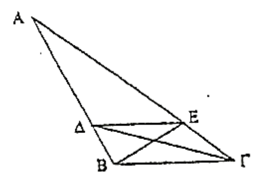
En este apartado final del capítulo, se presentan algunos asuntos relevantes obtenidos en el análisis del Libro VI de *Elementos*. No sobra advertir que de manera alguna se procura un resumen o síntesis del análisis expuesto.

2.3.1 De las situaciones problema

En el Libro VI de *Elementos*, Euclides expone dos tipos de situaciones problema, proposiciones problema o construcciones y proposiciones por demostrar.

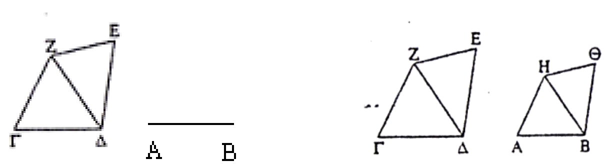
En las proposiciones por demostrar Euclides parte de un esquema básico dado y a partir de este realiza una serie de construcciones auxiliares para lograr demostrar lo pedido, por ejemplo en la Proposición 2, se da el triángulo ΑΒΓ, y las construcciones auxiliares que se trazan para llegar a la demostración de la proposición son ΔΕ paralela a ΒΓ, y se traza ΔΓ y ΒΕ, con estas construcciones logra demostrar que ΒΔ es a ΔΑ como ΓΕ a ΕΑ entonces:

Proposición 2: Si se traza una recta paralela a uno de los lados de un triángulo, cortará proporcionalmente los lados del triángulo. Y si se cortan proporcionalmente los lados de un triángulo, la recta que une los puntos de sección será paralela al lado restante del triángulo. (Puertas, 1994, p. 58)



Mientras que en las proposiciones por construir se debe realizar toda la construcción para resolverlo, por ejemplo, a partir de la figura rectilínea dada ΓΕ, se debe construir sobre la recta AB una figura semejante y de manera semejante a la figura ΓΕ, se deben trazar y construir rectas y ángulos, teniendo en cuenta las condiciones de la definición 1 para figuras semejantes.

Proposición 18: A partir de una recta dada, construir una figura rectilínea semejante y situada de manera semejante a una figura rectilínea dada. (Puertas, 1994, p. 82)



“…Así pues, hay que construir sobre la recta AB, una figura rectilínea semejante y situada de manera semejante a la figura rectilínea ΓΕ…Q.E.F”

Por otra parte, la mayoría de las situaciones contenidas en las proposiciones problema se refieren a construcciones relacionadas con la proporcionalidad geométrica más que con la semejanza de figuras; de hecho, solo dos proposiciones (18 y 25), de las diez construcciones, se refieren explícitamente a construcción de figuras semejantes. Este asunto se muestra revelador en tanto que ofrece un marco de reflexión acerca del peso relativo que tendría la construcción de figuras semejantes en relación con el peso de la construcción de magnitudes geométricas proporcionales.

2.3.2 **Del lenguaje**

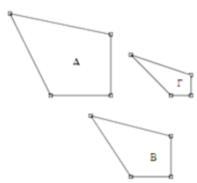
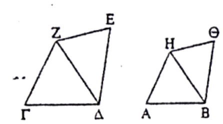
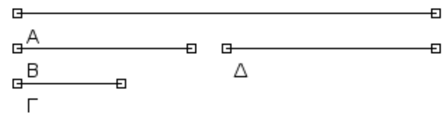
En el Libro VI de Elementos existen tres tipos de palabras, las que se refieren a los objetos geométricos, las que se refieren a la cantidad de magnitud entre los objetos y las que se refieren a la relación entre dos o más objetos. Por ejemplo en la proposición 9, se utilizan las palabras "*Quitar de una recta dada la parte que se pida*", esta se refiere al objeto geométrico recta. En la proposición 2 se encuentra la palabra "*proporcionalmente*" que se refieren a que la cantidad de magnitud de los lados de un triángulo guarda la misma razón. Y en la proposición 18, se encuentran palabras como *"…construir una figura rectilínea semejante…"*, esta corresponde a las palabras que se refieren a la relación entre dos o más objetos.

Encontramos que en el Libro VI de *Elementos* Euclides se refiere a rectas utilizando una o dos letras mayúsculas, estas rectas a las que refiere Euclides es a lo que hoy se conoce como segmento de recta[15] (Figura 45); cuando se refiere a la figura A, se está aludiendo a la cantidad de magnitud (superficie) vease (Figura 43); y cuando señala al ángulo ΓZΔ se refiere a la cantidad de amplitud del ángulo como se ve en la Figura 44.

Las figuras 43, 44 y 45, son un ejemplo de los diagramas y dibujos que utiliza Euclides en los *Elementos*, ya que a excepción de los dibujos de la proposición 13 y 33, los dibujos

[15] *"Segmento de recta. Es el conjunto de los puntos A y B, y de todos los puntos que están entre A y B. Los puntos Ay B se llaman los extremos de AB". (Moise y Down (1972), p.41)*

representan polígonos y rectas, y son considerados figuras propias ya que cuando el autor se refiere en la proposición a triángulo en el dibujo aparece un triángulo.

 **Figura 43. Dibujo de la proposición 21**	 **Figura 44.Dibujo de la proposición 18**	 **Figura 45. Dibujo de la proposición 17**

A pesar de que no exista una notación (simbólica) para las proporciones y para la semejanza, el discurso permite identificar cuando se está haciendo referencia a unas o a otra. Tanto la semejanza como la proporcionalidad geométrica son percibidas a través de la representación propia de los objetos geométricos y deducidas desde la perspectiva hipotético-deductiva.

2.3.3 De los conceptos y definiciones

Al igual que las proposiciones, las definiciones las podemos caracterizar en tres grupos; las que aluden explícitamente a la semejanza como es la Definición 1[16], donde se centra el desarrollo de nuestro trabajo, ya que de manera explícita se hace referencia a cuando dos figuras rectilíneas son semejantes, es decir se excluye toda figura no rectilínea. Las que, aluden a la proporcionalidad geométrica como la Definición 3, en tanto que se puede plantear la relación de proporción entre cantidades de magnitud que guardan la misma razón, de igual forma la Definición 4, se refiere a la caracterización de la altura de una figura, es decir no alude ni a la proporcionalidad geométrica ni a la semejanza. Finalmente

[16] Definición 1. Figuras rectilíneas semejantes, son las que tienen los ángulos iguales uno a uno y proporcionales los lados que comprenden los ángulos iguales. (Puertas, 1994, p.55).

no se alude a las Definiciones 2 y 5 ya que estas han sido incluidas por otros autores posteriores a Euclides, esto se evidencia en el Libro VI ya que no hay proposición que contemplen tales definiciones.

2.3.4 De las propiedades

Las proposiciones del Libro VI de los *Elementos* se puede discriminar atendiendo a si asumen la proporcionalidad geométrica o la semejanza como objetos central de estudio. Por ejemplo la proporcionalidad geométrica la asumen las proposiciones 4, 5,6 y 7, ya que en estas se hacen un tratamiento de razones y proporciones entre cantidades de magnitud (longitud, superficie, amplitud), es el caso de la proposición 1 donde:

Proposición 1: Los triángulos y los paralelogramos que tienen la misma altura son entre sí como sus bases. (Puertas, 1994, p. 56)

En esta primera proposición, bajo la condición de que triángulos y paralelogramos tengan la misma altura, se relacionan elementos como: la cantidad de superficie de los triángulos, la cantidad de superficie de los paralelogramos y la cantidad de longitud de las bases. En ésta, Euclides establece la razón entre la cantidad de superficie de los triángulos $\frac{\mathrm{AB\Gamma}}{\mathrm{A\Gamma\Delta}}$, la razón entre cantidad de superficie de los paralelogramos $\frac{\mathrm{E\Gamma}}{\mathrm{\Gamma Z}}$ y la razón entre cantidad de longitud de las bases $\frac{\mathrm{B\Gamma}}{\mathrm{\Gamma\Delta}}$; además, cuando señala que son entre sí como sus bases, establece tres proporciones: $\frac{\mathrm{AB\Gamma}}{\mathrm{A\Gamma\Delta}} = \frac{\mathrm{E\Gamma}}{\mathrm{\Gamma Z}} = \frac{\mathrm{B\Gamma}}{\mathrm{\Gamma\Delta}}$; una de ellas con cuatro magnitudes homogéneas (*i.e.*, cantidad de superficie) $\frac{\mathrm{AB\Gamma}}{\mathrm{A\Gamma\Delta}} = \frac{\mathrm{E\Gamma}}{\mathrm{\Gamma Z}}$y las dos restantes con parejas de magnitudes de diferente naturaleza (*i.e.*, cantidad de superficie y cantidad de longitud) $\frac{\mathrm{AB\Gamma}}{\mathrm{A\Gamma\Delta}} = \frac{\mathrm{B\Gamma}}{\mathrm{\Gamma\Delta}}$; $\frac{\mathrm{E\Gamma}}{\mathrm{\Gamma Z}} = \frac{\mathrm{B\Gamma}}{\mathrm{\Gamma\Delta}}$. Como se observa, en esta proposición hay alusión a razones y proporciones, pero no a la semejanza entre figuras rectilíneas, lo cual nos conduce a afirmar que en esta proposición Euclides trabaja proporcionalidad geométrica entre magnitudes, pero no semejanza.

Proposición 4: En los triángulos equiángulos, los lados que comprenden los ángulos iguales son proporcionales y los lados que subtienden los ángulos iguales son correspondientes. (Puertas, 1994, p. 62).

Si bien en esta proposición se deduce la proporcionalidad entre las cantidades de las longitudes de los triángulos equiángulos, y ésta puede ser hoy interpretada como un criterio de semejanza entre triángulos (conocido como ángulo-ángulo-ángulo), Euclides no menciona la semejanza entre éstos. No obstante tal falta de alusión, hay en el Libro VI al menos tres proposiciones (8, 18 y 20) que sí refieren explícitamente la semejanza entre figuras rectilíneas, en cuyas demostraciones la proposición 4 juega un papel esencial; sin embargo, las otras proposiciones (5, 6 y 7) no se vinculan a proposiciones que versen sobre la semejanza.

En el Libro VI encontramos algunas proposiciones que sí abordan el estudio de la semejanza de manera específica y explícita (proposiciones 8, 18, 19, 20, 21, 22, 24, 25, 27, 28, 29 y 31); esta última constituye una generalización del Teorema de Pitágoras (Libro I, Proposición 47) para figuras semejantes construidas sobre los lados del triángulo rectángulo[17]. De éstas, ameritan especial atención las proposiciones 21 y 22. La proposición 21[18] reviste un interés en la medida en que define una condición de transitividad para semejanza geométrica. La proposición 22, es interesante en tanto que en ella hay una interesante convergencia entre la semejanza de figuras y la proporcionalidad geométrica.

Proposición 22. Si cuatro rectas son proporcionales, las figuras rectilíneas semejantes y construidas de manera semejante a partir de ellas serán también proporcionales; y si las figuras semejantes y construidas de manera semejante a partir de ellas son proporcionales, las propias rectas serán también proporcionales.(Puertas, 1994, p. 90).

[17] Proposición 31. En los triángulos rectángulos, la figura (construida) a partir del lado que subtiende el ángulo recto es igual a las figuras semejantes y construidas de manera semejante a partir de los lados que comprenden el ángulo recto. (Puertas, 1994, p. 104).

[18] Proposición 21. Las figuras semejantes a una misma figura rectilínea son también semejantes entre sí. (Puertas, 1994, p. 89).

La primera parte de su prueba inicia planteando la proporción geométrica entre la cantidad de longitud de las rectas $\frac{\mathrm{AB}}{\Gamma\Delta} = \frac{\mathrm{EZ}}{\mathrm{H}\Theta}$. Luego se construyen figuras semejantes y situadas de manera semejante a partir de las rectas proporcionales antes mencionadas $\mathrm{KAB}, \Lambda\Gamma\Delta, \mathrm{MZ}, \mathrm{N}\Theta$ y se deduce la proporcionalidad entre la cantidad de superficie de las figuras semejantes $\frac{\mathrm{KAB}}{\Lambda\Gamma\Delta} = \frac{\mathrm{MZ}}{\mathrm{N}\Theta}$. Como se puede observar, la semejanza geométrica es una condición mediadora para establecer proporcionalidad entre las cantidades de superficie a partir de la proporcionalidad entre las cantidades de longitud, o viceversa.

A partir de lo anterior, podemos afirmar que las proposiciones del Libro VI se pueden agrupar atendiendo a si su objeto central de estudio es la proporcionalidad geométrica o la semejanza, sin que ello implique desconocer algunos nexos interesantes entre éstos (como lo ilustrado para la proposición 22).

2.3.5 De los procedimientos

Hay procedimientos para realizar construcciones de figuras semejantes y otros para construir objetos geométricos (rectas, superficies y ángulos proporciónales). Estos procedimientos se encuentran en las 10 proposiciones problema, donde se reconocen cinco grupos, a saber:

- Construcción de figuras rectilíneas semejantes
- Construcción de segmentos que sean media, tercera o cuarta proporcional
- Quitar una parte especifica de un segmento
- Dividir un segmento de manea semejante a otro segmento dividido o en extrema o en media razón
- Aplicar a una recta un paralelogramo

2.3.6 De los argumentos

En el Libro VI de Elementos de Euclides se utiliza un discurso hipotético-deductivo, y se implementa una estructura de seis etapas para cada proposición sin discriminar si son teoremas o problemas por resolver.

La complejidad lógica de cada proposición se puede ver en la Figura 42, y en la tabla del Anexo 2, así, a partir de la lectura de ésta, en la última fila de la tabla, se advierte que es muy probable que las proposiciones 19, 20 y 22 tengan un nivel de complejidad lógica mayor que el de las demás proposiciones, en tanto que en su demostración se involucran dos, tres y cuatro proposiciones, respectivamente. Mientras que la proposición 2 y la proposición 4 tienen una mayor importancia, lo cual podemos ver en la última columna de la tabla ya que estas interviene en 6 de las proposiciones (proposición 3, 4, 9, 10, 11 y 24), y 5 de las proposiciones (proposición 2, 3, 8, 18 y 20); estas dos hacen referencia a la proporcionalidad geométrica y son las que más influencia tienen en las demás proposiciones.

Mientras que las proposiciones que se refieren a semejanza entre figuras corresponden a la proposición 18, que influye en 3 de las proposiciones (proposición 22, 25 y 28) y la proposición 25 influye en 2 de las proposiciones (proposición 28 y 29).

Las proposiciones que aluden a la proporcionalidad influyen de manera importante en las demostraciones o construcciones de las demás proposiciones, es decir hay una relevancia entre la proporcionalidad geométrica y semejanza. Mientras que las proposiciones 18 y 25 intervienen tanto en proposiciones que hacen referencia explícita a la semejanza y a la proporcionalidad geométrica.

2.3.7 Conclusiones

De aquí que se pueda concluir que: (i) La semejanza alude a una relación entre dos figuras rectilíneas, en tanto que la proporcionalidad geométrica se refiere a las proporciones que se pueden establecer entre las cantidades de magnitud de objetos geométricos. (ii)Hay procedimientos para realizar construcciones de figuras semejantes y otros para construir objetos geométricos (rectas, superficies, ángulos) proporcionales. (iii)A pesar de que no exista una notación (simbólica) para las proporciones y para la semejanza, el discurso permite identificar cuándo se está haciendo referencia a unas o a otra. (iv)Tanto la semejanza como la proporcionalidad geométrica son percibidas a través de la representación propia de los objetos geométricos y deducidas desde la perspectiva hipotética deductiva. (v) Las proposiciones del Libro VI se pueden discriminar atendiendo a si asumen la proporcionalidad geométrica o la semejanza como objeto central de estudio. (v)Esta caracterización se muestra útil para el ejercicio de análisis de textos escolares, en la perspectiva de caracterizar el tratamiento que en éstos se hace de la proporcionalidad geométrica y de la semejanza.

Capítulo 3
ANÁLISIS DE TEXTOS

En este capítulo se describirá el proceso de selección utilizado para escoger los libros de texto que se analizaron en este trabajo, reseñando algunos libros que se examinaron pero en los cuales no se encontraron tareas que hicieran alusión al tratamiento de la proporcionalidad geométrica o a la semejanza; además, se describirán cada uno de los textos escogidos y se presentará el análisis de las tareas que se encontraron, las cuales tratan sobre proporcionalidad geométrica y semejanza.

Las categorías que se utilizaron para el análisis de los libros de texto son las propuestas por la Teoría de los Significados Sistémicos (TSS). Y el análisis estará apoyado por los resultados que sobresalieron luego de analizado el Libro VI de Euclides.

Antes de presentar el proceso de selección debemos reseñar que el estudio inicial de los libros de texto, fue de manera experimental y tenía como fin buscar tareas donde se pudiera reconocer la proporcionalidad sin enfocarnos aún a la proporcionalidad geométrica, reconocimos de primera mirada que el tratamiento que se hacía en estas tareas era solamente de carácter numérico, en las tareas cuyo enunciado aludía a proporcionalidad geométrica se encontró que siempre se aludía a lo numérico, a cantidades numéricas, esto nos llamó la atención desviando nuestra mirada a estudiar qué es la proporcionalidad geométrica y cómo se relaciona con la semejanza.

3.1 Selección de Los libros de Texto Escolares

La selección de los libros de texto se realizó atendiendo a la facilidad de encontrar libros de texto de matemáticas diseñados para la educación colombiana y que corresponden a diferentes periodos de publicación y grado escolares.

Los libros *Casa de las matemáticas* de los grados 3, 4 y 5 (Grande, Joya, y Cizaer (2009)) son algunos de los que se revisaron y en los cuales no se hallaron tareas que aludieran a la proporcionalidad geométrica o a la semejanza en el ámbito cuantitativo no numérico; estos libros están acompañados de unas cartillas en las cuales se aborda la parte geométrica, en donde tampoco se encontraron tareas que aludieran a los conceptos citados. Se encontraron algunas tareasrelacionadas con estos conceptos en el ámbito de lo cuantitativo numérico.

Los libros que se consultaron y en los cuales encontramos tareas que tratan la proporcionalidad geométrica y la semejanza son la colección de la serie Espiral de Norma en los que específicamente encontramos tareas pertinentes para el análisis en: Espiral 4 (Camargo, L.y Castiblanco, A. 2007); Espiral 5 (Camargo, Castiblanco, Leguizamón, y Samper, 2003), Espiral 6 (Camargo, L., Castiblanco, A., Leguizamón, C., y Samper, C. 2003); Espiral 7(Ardila, Pérez, Samper, y Serrano, 2005); Espiral 8 (Castro, R. A., Estrada, W. F., Moreno, B., & Novoa, F. 2004) y Espiral 10, (Ardila, Pérez, Samper, y Serrano, 2005).

Algunos de los anteriores corresponden a los periodos anteriores o se encuentran en el lapso de divulgación de los Lineamientos Curriculares de Matemáticas (MEN, 1998) y los Estándares Básicos de Competencias en Matemáticas (MEN, 2006).

3.2 Descripción de los Textos Escolares

3.2.1 Textos de la Serie Espiral

Los libros de texto "*Espiral*" presentan inicialmente un escrito de los autores que da cuenta de la manera de trabajo que presenta esta serie de libros y lo que en ellos se puede encontrar; luego se encuentra el contenido, en donde se describen ocho unidades, que se desarrollan con la siguiente estructura:

Inicialmente cada unidad presenta un **gráfico** correspondiente al contenido, **los estándares y los procesos o competencias** que se espera que el estudiante alcance; además presenta una **tarea preparatoria** para cada unidad. El **contenido** se desarrolla, primero exponiendo la temática, las definiciones y algunos ejemplos, y se propone a continuación un **taller de procesos** que presenta tareas acordes con la temática (las tareas se clasifican de acuerdo con el tipo de competencia que se pretende alcanzar y de acuerdo con el proceso matemático promovido: de conexión, de comunicación, de razonamiento lógico y de resolución de problemas).

Si bien el tratamiento que presenta esta serie de libros de la proporcionalidad geométrica y de la semejanza es en su mayoría cuantitativo numérico, se encontraron algunas tareas que sí abordan estos temas desde la perspectiva cuantitativa no numérica y no pertenecen a la unidad titulada Razón y Proporción; en estas se hace un tratamiento de la proporcionalidad geométrica o semejanza; por ejemplo, se encontraron tareas en los capítulos correspondientes a razones trigonométricas y a matrices.

A continuación se presentan las tareas correspondientes a la colección de libros de texto Espiral.

3.2.1.1 *Tareas de los Libros de Texto*

Se han incluido bajo el titulo de tareas: ejemplos, explicaciones y tareas, los dos primeros corresponden a los ejemplos de ampliación y reducción de dibujos, la tarea 4 que corresponde a una secuencia de pasos donde dadas dos figuras en el plano con la misma forma se aplica homotecias, y la tarea 9 que nuevamente corresponde a un ejemplo.

A continuación se presentan los ejemplos, las explicaciones y tareas que se van a analizar, además una pequeña descripción de la tarea y su ubicación en el libro de texto.

Ejemplos:

Ilustración 1

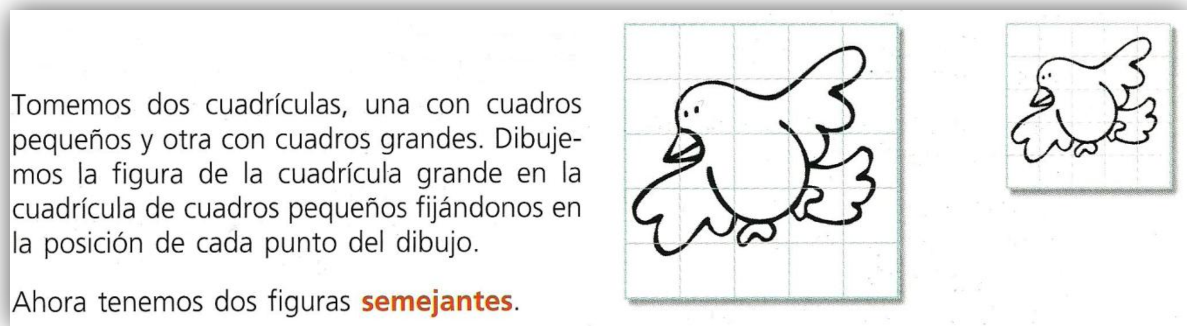


Ilustración 2

Ubicación de Ejemplos

Libro: Espiral 4
Unidad 4: Geometría
Pensamiento: Espacial
Tema: Congruencia y Semejanza
Páginas: 115, (Ilustración 1 e Ilustración 2), 116 (Ilustración 3 e Ilustración 4) y 117 (Ilustración 4) taller de procesos.

Descripción Ejemplos

Las ilustraciones 1 y 2 son ejemplos presentados, para que el estudiante de forma visual identifique las características de figuras semejantes y congruentes

Tarea 1

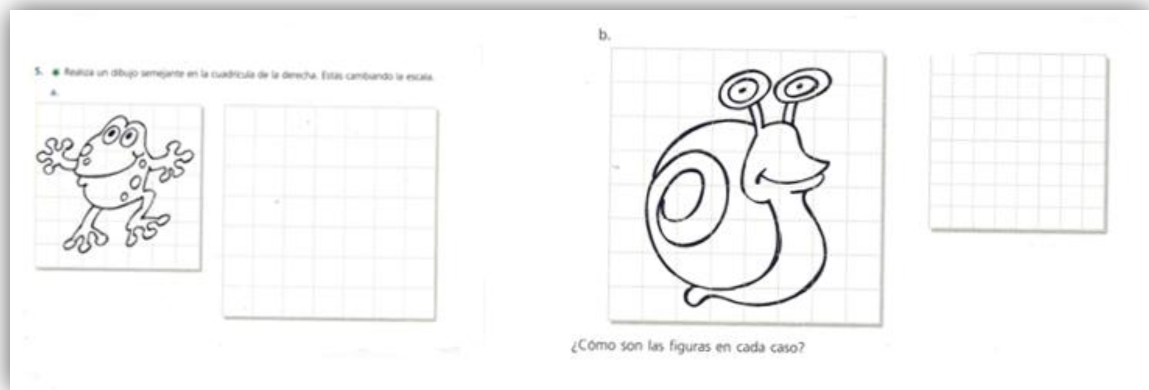


Ilustración 3

Ubicación tarea 1

Libro: Espiral 4

Unidad 4: Geometría

Pensamiento: Espacial

Tema: Taller de procesos. Congruencia y Semejanza

Página 117

Descripción de la tarea 1

En la tarea 1 se pide que el estudiante realice una figura semejante a la Ilustración 3, utilizando una cuadrícula para ampliar imagen y en la Ilustración 4 se pide que el estudiante haga una figura semejante utilizando el proceso de reducción, por medio de una cuadrícula.

Tarea 2

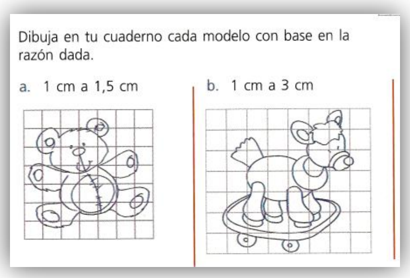


Ilustración 4

Ubicación de la tarea 2

Libro: Espiral 5

Unidad 7: Razones y Proporciones

Pensamiento: Métrico

Tema: Taller de procesos

Página 197

Descripción de la tarea 2

En esta tarea se da un modelo y se le pide al estudiante que haga una ampliación de cada una de las imágenes. Las cuadrículas tienen que ser a razón de 1,5 cm. y 3 cm.

Tarea 3

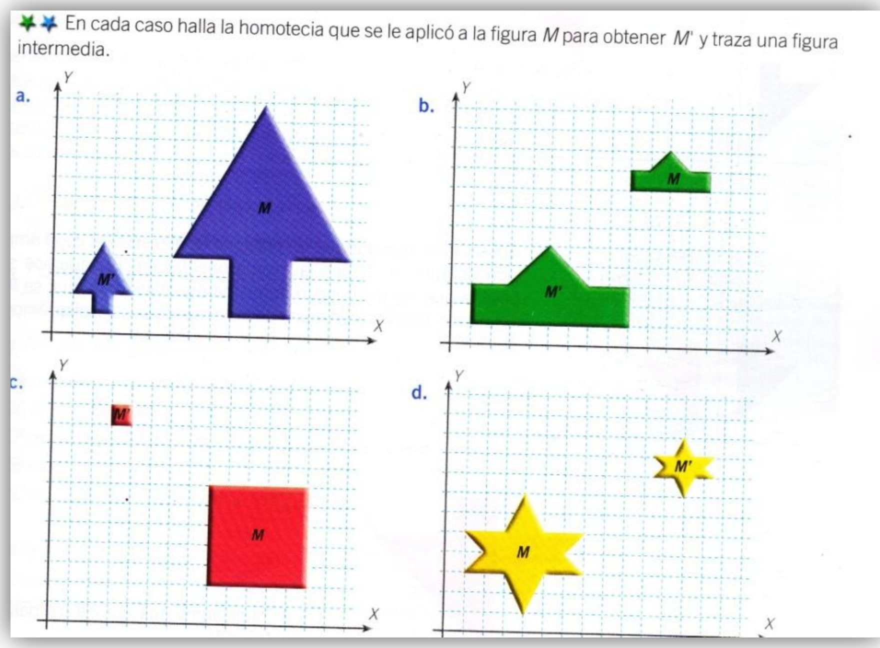


Ilustración 5

Ubicación de la tarea 3

Libro: Espiral 7

Unidad 5: Polígonos

Pensamiento: Espacial

Tema: Semejanza de polígonos, taller de procesos de ampliaciones y reducciones

Página 231

Descripción de la tarea 3

La tarea se refiere a las homotecias; en ésta se pide hallar una figura intermedia a las dos dadas

Tarea 4

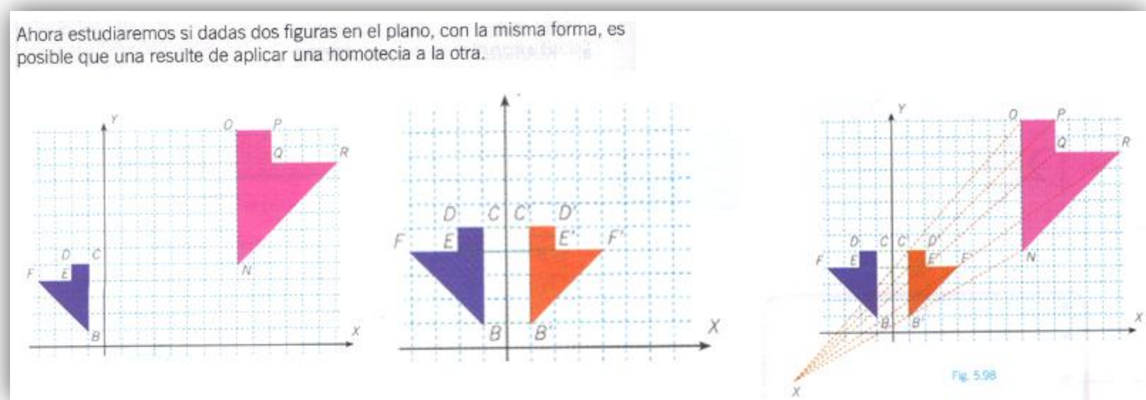


Ilustración 7

Ubicación de la tarea 4

Libro: Espiral 7

Unidad: Triángulos y trapecios

Pensamiento: Espacial

Tema: Semejanza de polígonos

Página. 232

Descripción de la tarea 4

La secuencia de actividades muestra la construcción de figuras semejantes a partir de homotecias y de la composición de algunos movimientos rígidos.

Tarea 5

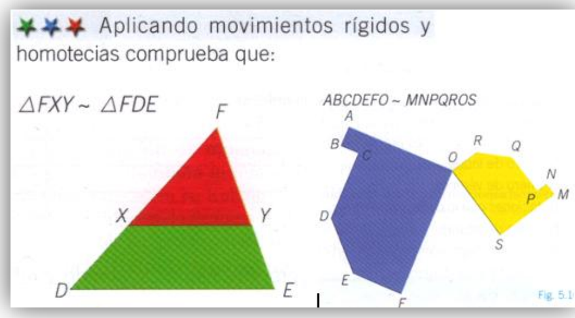


Ilustración 6

Ubicación de la tarea 5

Libro: Espiral 8

Unidad: Triángulos y trapecios

Pensamiento: Espacial

Tema: Semejanza de polígonos

Página 235, taller de procesos

Descripción de la tarea 5

Propone que el estudiante aplique movimientos rígidos y homotecias, y compruebe que cada par de figuras es semejante.

Tarea 6

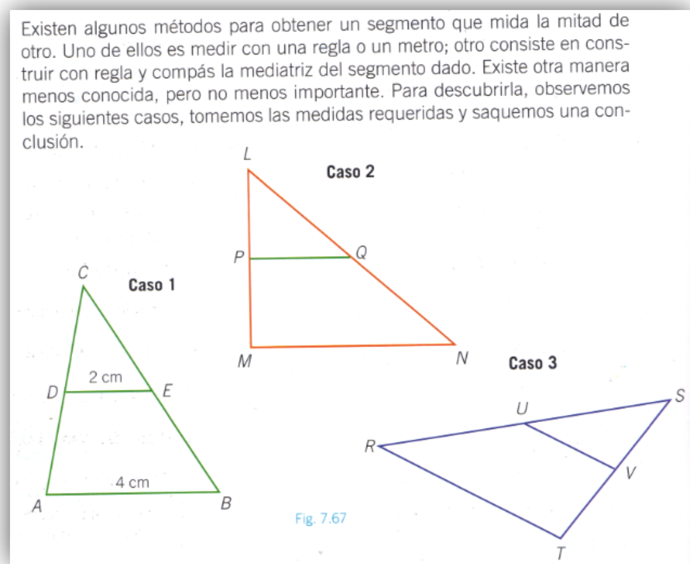

Existen algunos métodos para obtener un segmento que mida la mitad de otro. Uno de ellos es medir con una regla o un metro; otro consiste en construir con regla y compás la mediatriz del segmento dado. Existe otra manera menos conocida, pero no menos importante. Para descubrirla, observemos los siguientes casos, tomemos las medidas requeridas y saquemos una conclusión.

Ilustración 7

Ubicación de la tarea 6

Libro: Espiral 8

Unidad: Triángulos y trapecios

Pensamiento: Espacial

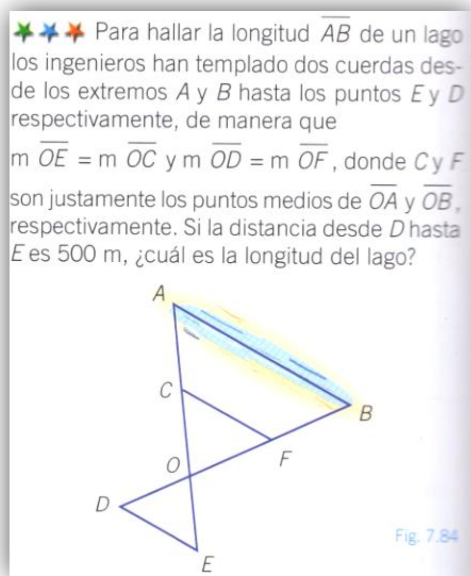
Tema: Taller de procesos.

Página. 347

Descripción de la tarea 6

La tarea es introductoria para la exploración, y conjeturación del teorema de segmentos medios para triángulos y trapecios.

Tarea 7


Para hallar la longitud $\overline{AB}$ de un lago los ingenieros han templado dos cuerdas desde los extremos A y B hasta los puntos E y D respectivamente, de manera que

m $\overline{OE}$ = m $\overline{OC}$ y m $\overline{OD}$ = m $\overline{OF}$, donde C y F son justamente los puntos medios de $\overline{OA}$ y $\overline{OB}$, respectivamente. Si la distancia desde D hasta E es 500 m, ¿cuál es la longitud del lago?

Ilustración 8

Ubicación de la tarea 7

Libro: Espiral 8

Unidad: Triángulos y trapecios

Pensamiento: Espacial

Tema: Taller de procesos

Página 348

Descripción de la tarea 7

En esta actividad se pide hallar la longitud del lago el cual corresponde a la longitud del segmento AB. Está en el enunciado utiliza lo cuantitativo numérico, en ella se establece la igualdad entre la medida de los diferentes segmentos.

Tarea 8

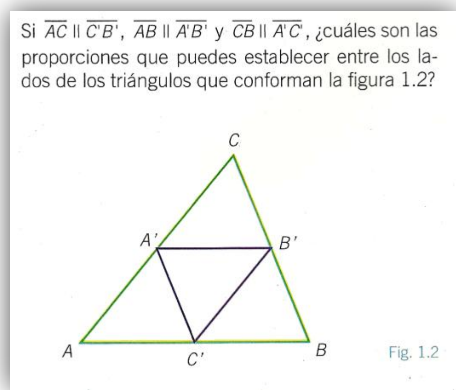

Si $\overline{AC} \parallel \overline{C'B'}$, $\overline{AB} \parallel \overline{A'B'}$ y $\overline{CB} \parallel \overline{A'C'}$, ¿cuáles son las proporciones que puedes establecer entre los lados de los triángulos que conforman la figura 1.2?

Ilustración 9

Ubicación de la tarea 8

Libro: Espiral 10

Unidad: Razones Trigonométricas

Pensamiento: Métrico

Tema: Actividades preparatorias

Página 9

Descripción de la tarea 8

Se le pide al estudiante identificar las proporciones que se pueden establecer entre los lados de los triángulos.

Tarea 9

Solución

Un triángulo rectángulo con ángulos cuyas medidas sean 30°, 60° y 90° e hipotenusa k se puede obtener de cualquier triángulo equilátero de lado k, al trazar una altura que es bisectriz de un ángulo de 60° y mediatriz de la base.

Así, las medidas de los ángulos de cada triángulo obtenido son 30°, 60° y 90° y dos de los lados de cada triángulo son k y $\frac{k}{2}$. Para determinar la medida de la longitud del tercer lado h aplicamos el teorema de Pitágoras y obtenemos $h^2 = k^2 - \left(\frac{k}{2}\right)^2$, por tanto, $h = \left(\frac{k}{2}\right)\sqrt{3}$. ■

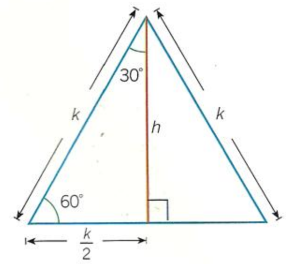


Fig. 1.24

En conclusión, cada uno de los triángulos rectángulos obtenidos al trazar la altura de un triángulo equilátero de lado k tiene como medida de sus ángulos 30°, 60° y 90° y como medida de la longitud de sus lados opuestos respectivos $\left(\frac{k}{2}, \frac{k\sqrt{3}}{2}, k\right)$.

Ilustración 10

Ubicación de la tarea 9

Libro: Espiral 10

Unidad 7: Razones y Proporciones

Pensamiento: Métrico

Tema: Triángulos Rectángulos y Razones Trigonométricas

Pagina21

Descripción de la tarea 9

Eésta tarea muestra el procedimiento que se debe seguir para plantear relaciones basadas en el Teorema de Pitágoras, y a partir de éste resolver la tarea.

Tarea 10

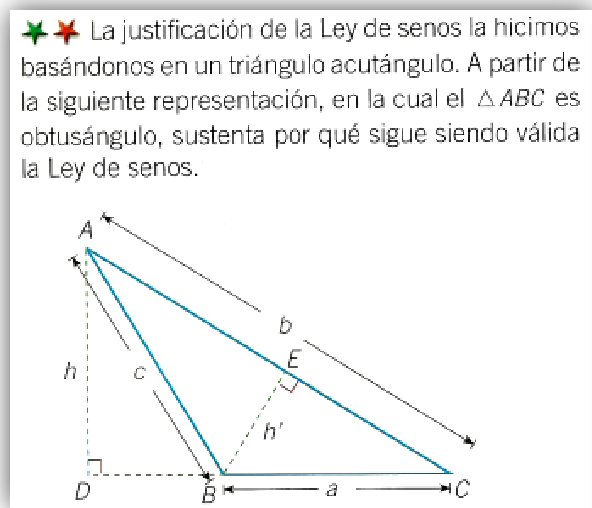

La justificación de la Ley de senos la hicimos basándonos en un triángulo acutángulo. A partir de la siguiente representación, en la cual el $\triangle ABC$ es obtusángulo, sustenta por qué sigue siendo válida la Ley de senos.

Ilustración 11

Ubicación de la tarea 10

Libro: Espiral 10

Unidad 3: Identidades y Ecuaciones

Pensamiento: Variacional y espacial

Tema: Ley de senos

Página: 115

Descripción de la tarea 10

Busca que el estudiante plantee las relaciones que la ley de los senos establece y concluya, sustente porque se cumple esta ley en los triángulos acutángulos y rectángulos

Tarea 11

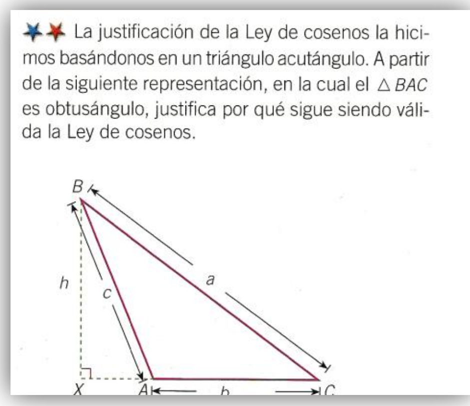

La justificación de la Ley de cosenos la hicimos basándonos en un triángulo acutángulo. A partir de la siguiente representación, en la cual el $\triangle BAC$ es obtusángulo, justifica por qué sigue siendo válida la Ley de cosenos.

Ilustración 12

Ubicación de la tarea 11

Libro: Espiral 10

Unidad 3: Identidades y Ecuaciones

Pensamiento: variacional y espacial

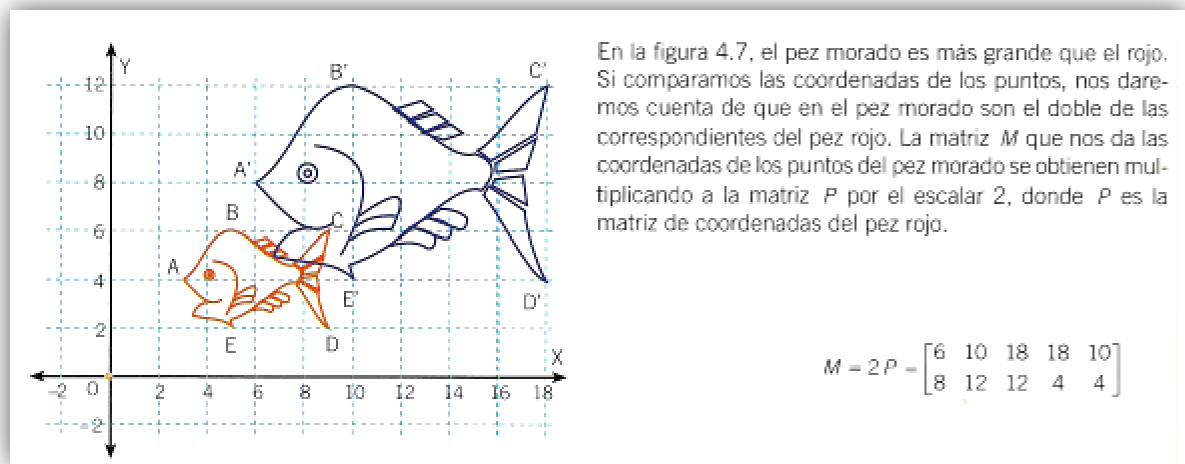
Tema: Ley de cosenos

Página: 120

Descripción de la tarea 11

Busca que a partir de las relaciones que se establecen en la ley de los cosenos que el estudiante justifique si estas relaciones se cumplen en un triángulo obtusángulo.

Tarea 12


En la figura 4.7, el pez morado es más grande que el rojo. Si comparamos las coordenadas de los puntos, nos daremos cuenta de que en el pez morado son el doble de las correspondientes del pez rojo. La matriz M que nos da las coordenadas de los puntos del pez morado se obtienen multiplicando a la matriz P por el escalar 2, donde P es la matriz de coordenadas del pez rojo.

$$M = 2P = \begin{bmatrix} 6 & 10 & 18 & 18 & 10 \\ 8 & 12 & 12 & 4 & 4 \end{bmatrix}$$

Ilustración 13

Ubicación de la tarea 12

Libro: Espiral 10

Unidad 4: Matrices y Determinantes

Pensamiento: numérico

Tema: Operaciones con matrices

Página: 140

Descripción de la tarea 12

De manera perceptiva se infiere que hay una semejanza entre las figuras que presenta el libro, donde el contenido enseñado es multiplicación de una matriz A por un escalar K, y se sabe que hay una homotecia.

3.3 Análisis de las tareas

3.3.1 Situaciones problema o tareas matemáticas

Se encuentran a través de problemas por resolver que aluden a cuestiones como la construcción de figuras semejantes no rectilíneas y a la construcción de la cuarta proporcional.

Tarea 1. Ésta pretende que a través de una serie de copias de ilustraciones ampliadas o reducidas los estudiantes sean capaces de distinguir cuándo dos figuras son congruentes y cuándo son semejantes. La tarea presenta dos ejemplos iniciales que permiten reconocer la diferencia entre dos figuras congruentes y dos figuras semejantes. (Ilustración 1 y 2). A partir de uno de estos trazamos las coordenadas de un punto *n*, así

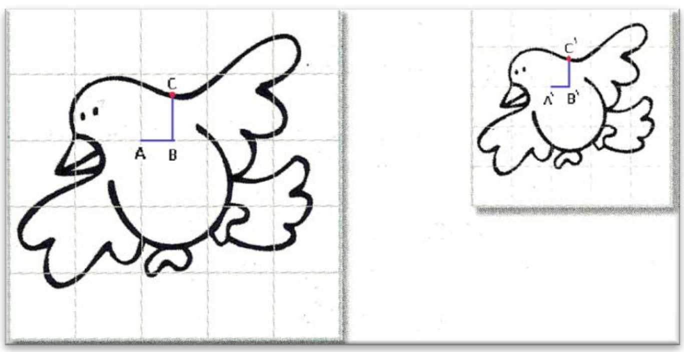


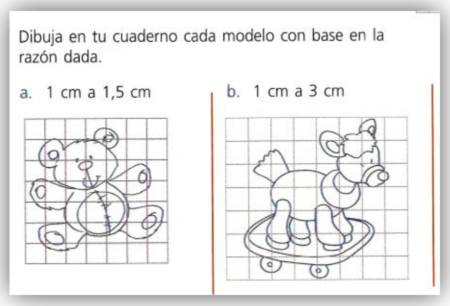
Ilustración 14 Copia de la Ilustración 2

Esta tarea implica buscar dos cuartas proporcionales, pero para un número infinito de puntos, ya que cada punto del dibujo está dado por una pareja ordenada relativa a la cuadrícula específica.

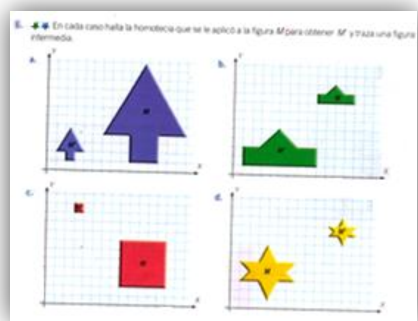
Por ejemplo en la Ilustración 16 se puede ver que para copiar el punto C del dibujo en la nueva cuadrícula como C', es necesario hallar dos cuartas proporcionales, ya que el punto C se encuentra del punto A de la cuadrícula a una longitud AB en el eje horizontal y a una longitud BC en el eje vertical. Y para construir el nuevo punto C' se tiene la proporción $\frac{AB}{A'B'} = \frac{BC}{B'C'}$

La tarea consiste en reducir un dibujo utilizando una cuadrícula, donde encontramos que no hay una diferencia sustancial entre la tarea de ampliación o de reducción ya que las dos aluden a la construcción de cuartas proporcionales.

Tarea 2. En esta tarea se encontró que al realizar la nueva cuadrícula pedida en la actividad se está utilizando una razón numérica, pero al empezar a realizar la copia del modelo estamos contando cantidad de longitud de los lados de los cuadrados; por ejemplo, cuando visualizamos el ojo del "oso" advertimos que no se encuentra en la mitad del lado del cuadrado pero tampoco a ¼ de distancia del extremo del segmento, lo que consecuentemente establecería el rango en el que debe estar la cuarta proporcional. Se está haciendo uso del pensamiento cuantitativo no numérico y de las relaciones entre longitudes que no se expresan necesariamente como un número. La tarea nuevamente es construir dos cuartas proporcionales.

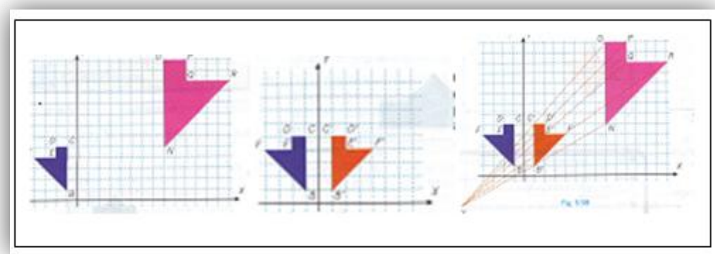


Tarea 3: La tarea se refiere a las homotecias, piden hallar una figura intermedia a las dos dadas, en los *Elementos* de Euclides no se haló propiedades que aludieran a la homotecia, pero se reconoce que las figuras homotéticas cumplen con las propiedades de semejanza de figuras.

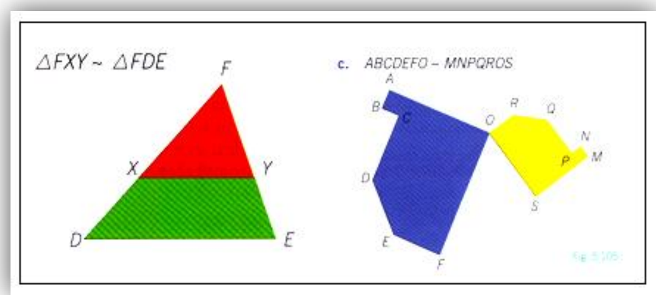


Esta tarea se puede relacionar con la proposición 21 del Libro VI de *Elementos*, que alude a la semejanza entre tres figuras; en la homotecias se da la relación de proporcionalidad entre la cantidad de longitud de los lados de las figuras y la igualdad entre la cantidad de amplitud de los ángulos lo cual expone Euclides en la definición 1, la cual alude a la semejanza.

Tarea 4: Esta tarea es muy interesante puesto que se trabaja la semejanza de figuras sin importar que estén situadas de manera diferente. En el libro de los *Elementos*, en la mayoría de las proposiciones donde se plantea la semejanza o donde se utilizan proposiciones que aluden a la semejanza se trabaja de manera que las figuras estén en la misma posición, solo hay una proposición[19] que nos deja ver, que la relación de semejanza se puede dar en figuras que no estén en la misma posición en un plano, es así que aquí se ve la semejanza entre figuras que no están ubicadas de manera semejante. Se puede evidenciar la definición de semejanza dada en el Libro VI de los *Elementos* de Euclides, esto con base en que los movimientos rígidos no alteran la cantidad de longitud de los segmentos, ni la cantidad de amplitud de los ángulos y la homotecia, aunque no conserva la misma cantidad de longitud de los lados de la figura, los aumenta o disminuye de tal forma que sean proporcionales.

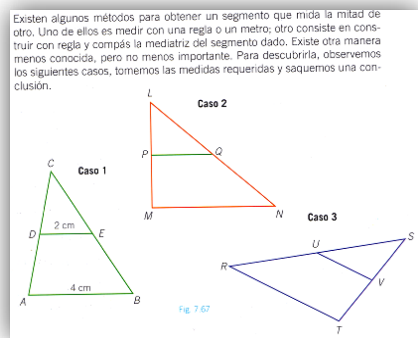


Tarea 5: En esta tarea se puede ver que se plantean figuras semejantes que comparten la misma o diferente posición; esta tarea se puede asociar con la definición de semejanza tratada en el Libro VI de *Elementos* de Euclides, aunque en la mayoría de las proposiciones que tratan la semejanza se hace con figuras que están en la misma posición.En la proposición VI – 8 se trata la semejanza entre figuras que no están en la misma posición como lo muestran las ilustraciones de esta tarea. Satisface la definición VI-1. También podemos reconocer en ésta la proposición VI-2. Dado que en la tarea se muestran dos triángulos que comparten un ángulo y cuyos lados son proporcionales. Además podemos reconocer que al igual que en los *Elementos* de Euclides la semejanza se da entre figuras (polígonos) y no solamente entre triángulos.



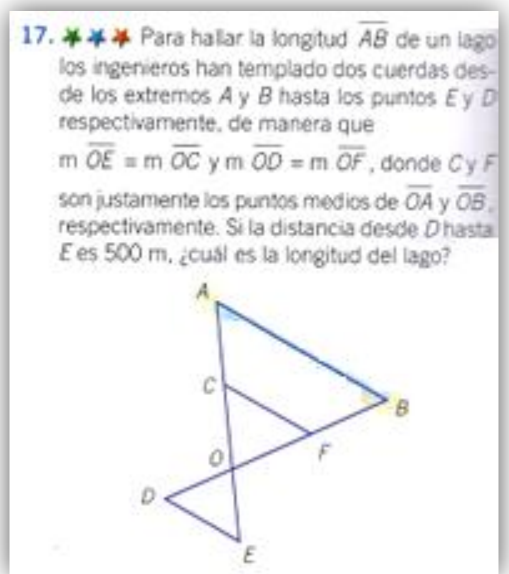
[19] Proposición 8

Tarea 6: Esta tarea, como su enunciado lo indica, lo que pretende es que los estudiantes por medio de un instrumento de medición, midan los segmentos de cada uno de los triángulos dados y obtengan una conclusión. Con esta tarea se pretende que los estudiantes lleguen a conjeturar el "*teorema del segmento medio para triángulos. El segmento que une los puntos medios de los lados de un triángulo es paralelo al tercer lado y mide la mitad de éste.*" (Castro Buitrago, y otros. 2004. *Espiral 8. p 342)*


Existen algunos métodos para obtener un segmento que mida la mitad de otro. Uno de ellos es medir con una regla o un metro; otro consiste en construir con regla y compás la mediatriz del segmento dado. Existe otra manera menos conocida, pero no menos importante. Para descubrirla, observemos los siguientes casos, tomemos las medidas requeridas y saquemos una conclusión.

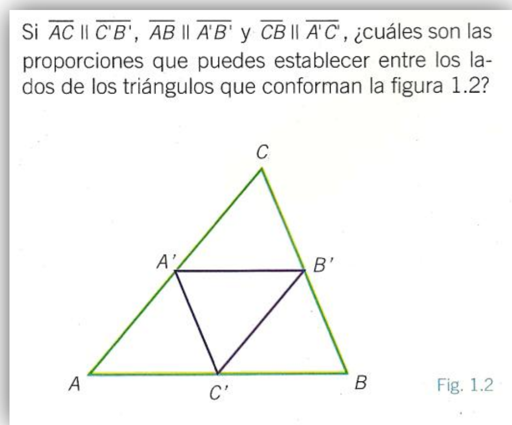
Aunque en el enunciado de esta tarea no se hace explicito el tratamiento de la semejanza o de la proporcionalidad se reconoce que al mirarla con las gafas de la proporcionalidad geométrica estudiada en Euclides se puede reconocer el tratamiento de la proporcionalidad geométrica y semejanza, en esta se pueden plantear razones entre la cantidad de longitud de los lados de los triángulos, con base en la teoría Matemática expuesta en *Euclides* podemos retomar lo expuesto en la proposición VI-2 y la definición VI-1 para concluir la semejanza de los triángulos además del teorema del segmento medio que es el objetivo de la tarea..

Tarea 7: Esta tarea implica un tratamiento cuantitativo numérico, dado que en ella se establece la igualdad entre la medida de la cantidad de magnitud de los diferentes segmentos.

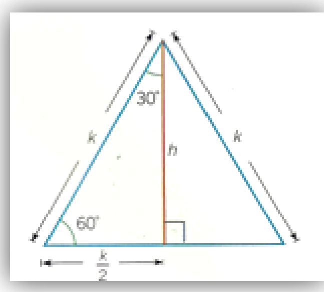

17. Para hallar la longitud $\overline{AB}$ de un lago los ingenieros han templado dos cuerdas desde los extremos A y B hasta los puntos E y D respectivamente, de manera que m $\overline{OE}$ = m $\overline{OC}$ y m $\overline{OD}$ = m $\overline{OF}$, donde C y F son justamente los puntos medios de $\overline{OA}$ y $\overline{OB}$, respectivamente. Si la distancia desde D hasta E es 500 m, ¿cuál es la longitud del lago?

Con respecto a proporcionalidad geométrica y semejanza se pueden plantear las siguientes razones y proporciones entre la cantidad de longitud de los segmentos siguientes, así $\frac{OC}{OA} = \frac{OF}{OB}$; y se pueden relacionar con la proposición VI-2, en esta tarea el gráfico muestra que los triángulos comparten un ángulo, y hay una recta paralela a uno de los lados, según esta proposición la cantidad de longitud de los segmentos resultantes serán proporcionales es así que aunque la tarea no haga énfasis en el uso de la proporcionalidad geométrica o semejanza se puede tratar sin necesidad que la tarea pierda su objetivo, en esta actividad podemos utilizar la definición VI-1 de semejanza entre figuras.

Tarea 8: La tarea pretende que a través de la figura que se encuentra en la ilustración, el estudiante sea capaz de establecer las proporciones entre los lados de los triángulos formados, sabiendo que algunos de los segmentos son paralelos entre sí. Es una tarea preparatoria para entrar al tema de razones trigonométricas. Esta tarea la podemos asociar con la propiedad VI-2; se dan los datos de tres rectas paralelas a los lados del triángulo, así AC es paralela a C'B' y AB paralela a A'B' y CB paralela a A'C, es decir que los segmentos resultantes de trazar cada una de las paralela serán proporcionales. Una de las proporciones que se puede plantear con respecto a esta proposición es $\frac{AA\prime}{A\prime C} = \frac{BB\prime}{B\prime C}$; si planteamos cada una de las proporciones tendremos triángulos semejantes ya que cumple con las condiciones de la definición VI-1

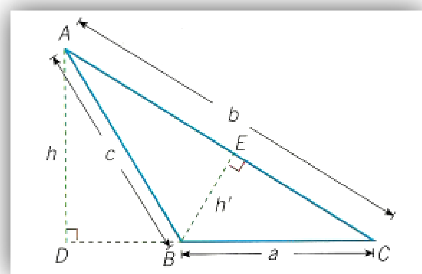


Tarea 9: Esta tarea busca que, por medio de la aplicación del teorema de Pitagóras en un triángulo equilatero de lado *k*, se obtenga la medida de sus ángulos y de sus lados de manera general; esta tarea relaciona la cantidad de longitud de los lados del triángulo y de la altura del mismo. Aunque en esta tarea se trabaja en el campo de lo cuantitativo numérico se puede asociar con la proposición VI-7 dado que tienen un ángulo igual (misma cantidad de amplirtud), en este caso tomemos el ángulo recto, los lados son proporcionales (ya que son iguales por ser triángulo equilátero) y la cantidad de amplitud de los otros ángulos es menor que la de un ángulo recto. Es decir según la proposición anterior estos triángulos serían



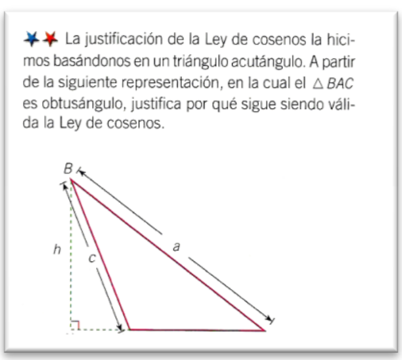
equiángulos y cumplirían con las condiciones de semejanza de la definición VI-1 de los *Elementos.*

Tarea 10: Esta tarea busca que por medio del uso de la ley de senos el estudiante justifique para un triángulo obtusángulo y uno rectángulo. Esta ley corresponde a una proporción geométrica en tanto que relaciona el seno de los ángulos con los lados opuestos a éstos. Esta tarea se puede relacionar con la proposición VI-6, se tienen dos triángulos BCE y BAD, se puede llegar a decir que estos triángulos son semejantes bajo las condiciones que esta propiedad



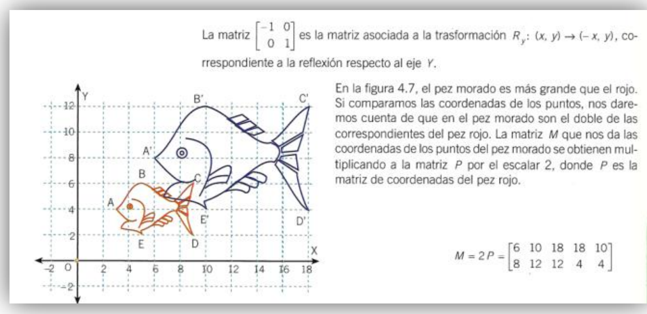
expone; también se puede demostrar la semejanza del triángulo BCE y BAD, es decir que se puede tambien relacionar con la propiedad VI-21. Y se puede aplicar la transitividad que está expuesta en esta proposición, para demostrar que los tres triángulos son semejantes

Tarea 11: Esta tarea busca que por medio del uso de la ley de cosenos el estudiante justifique que se cumple cuando se tiene un triángulo obtusángulo. En la ley de los cosenos se plantea la relación de razón entre cantidades de magnitud (longitud) y el seno de un ángulo, ese número es la cantidad de amplitud del ángulo formado entre dos lados. Se plantean tres razones correspondientes a cada uno de los lados y de los ángulos; luego se plantea una relación de igualdad entre estas razones es decir se plantea la proporción.



Saliendo de lo que plantea la tarea podemos ver que es una tarea en la que se podria trabajar la propocionalidad geométrica y la semejanza en el campo de lo cuantitativo no numerico, se pueden asociar a varias propiedades expuestas en el libro VI de *Elementos* como VI-5, 6, 7.

Tarea 12: De manera perceptiva inferimos que hay una semejanza entre las figuras que presenta el libro, donde el contenido enseñado es multiplicación de una matriz A por un escalar K, y se sabe que hay una homotecia. Esta tarea asocia el dibujo del pez rojo con una matriz M y el pez azul con 2M; esto deja ver que al multiplicar una matriz por un escalar lo que hace es aumentar cada número tantas veces como el escalar.



Esta tarea, aunque en el dibujo es muy similar a la tarea 1 aquí no se estan planteando cuartas proporcionales, se está construyendo una figura semejante a otra teniendo en cuenta que se amplía a razón de K:1.

Esta tarea no la podemos asociar a la definición de semejanza tratada en el Libro VI de *Elementos* dado que la semejanza en éste solo se establece entre figuras (póligonos).

3.3.2 Lenguaje matemático

Para examinar lo relativo a esta categoría, estudiaremos los términos o palabras, la notación y los diagramas o dibujos empleados en las tareas seleccionadas de la colección de libros de Espiral.

3.3.2.1 *Términos o palabras*

Encontramos tres tipos de palabras, a saber: las que se refieren a las relaciones explícitas e implícitas entre la cantidad de magnitud de los objetos o las relaciones entre éstas, (*v.g.*, razón, proporción, semejanza, homotecia y movimientos rígidos como rotación, traslación y reflexión, triángulo, segmento, ángulo), las que se refieren a los objetos geométricos (*v.g.*, triángulo, paralelogramo, figura rectilínea, ángulo, recta, recta finita, lado, altura), las que se refieren a la relación entre dos o más objetos (*v.g.*, escala, la misma forma, semejanza, congruencia), y las que se refieren a procesos (v.g., reducción, ampliación, superposición)[20].

[20] Ver tareas 1, 2, 3 ,4, 5, 8, 9, 10, 11

También encontramos el término *mediatriz* que refiere a un objeto geométrico (segmento) el cual está determinado por su relación con otro segmento como se ve en la tarea 6 y de manera similar en la tarea 7 se hace referencia a objetos geométricos como son los segmentos pero no se encuentran palabras que se relacionen con lo tratado sobre proporcionalidad geométrica o semejanza**,** al igual que sucede en la tarea 12.

3.3.2.2 *Notación*

No se utiliza una notación específica cuando las ilustraciones contienen figuras curvas, mientras que en las figuras rectilíneas se utilizan las primeras letras del alfabeto en mayúscula, y si utilizan las mismas letras se denotan con una comilla en la parte superior derecha (A, A').

Además utiliza dos letras mayúsculas seguidas con una línea horizontal encima para referirse a segmentos como se puede apreciar en la Ilustración 11; igualmente esta Ilustración deja ver cómo los autores para referirse a segmentos paralelos utilizan dos líneas seguidas verticales así: $Si\ \overline{\mathrm{AC}} \parallel \overline{\mathrm{C'B'}}, \overline{\mathrm{AB}} \parallel \overline{\mathrm{A'B'}}$ y $\overline{\mathrm{CB}} \parallel \overline{\mathrm{A'C'}}$.

En la Ilustración 12, se puede advertir cómo los autores denotan los lados del triángulo con letras minúsculas, y resalta el ángulo de 90º con dos rectas perpendiculares $\perp$.

En la tarea 5 utilizan el siguiente símbolo ($\sim$) para denotar la semejanza entre dos figuras. Por ejemplo: $\Delta\, FXY \sim \Delta FDE$

3.3.2.3 *Diagramas o dibujos*

Los diagramas o dibujos que componen los libros de la serie Espiral, aparecen en cada una de las tareas, independientemente de si éstas son ejemplos o problemas. En algunas tareas los dibujos representan gráficos de animales, estas ilustraciones corresponden a figuras propias. En las tareas donde se presentan polígonos se reconoce reconocemos que son figuras propias, es decir que si en el enunciado de la tarea se hace referencia a triángulos en el dibujo encontrará triángulos con las características señaladas en el enunciado. Por ejemplo en la tarea 9, 10, 11.

En la Tarea 2 al realizar la copia de la Ilustración 5, se aprecia la cantidad de longitud para hacer la gráfica, y se estima la relación entre la cantidad de magnitud. No hay argumentos para establecer que hay semejanza entre las figuras según lo expuesto por Euclides en el Libro VI, ya que son figuras curvas; además la tarea es más difícil que al realizarlo con polígonos. En la Tarea 12 encontramos que el gráfico de esta tarea es un dibujo que lo asocia a los puntos de una matriz en un plano. En este dibujo nos llamó la atención puesto que es una forma diferente de representar la multiplicación de un escalar por una matriz; en éste vimos propiedades que aludían a la semejanza ya que se tiene una relación de razón $\frac{K}{1}$.

3.3.3 Conceptos o definiciones

Si bien en los libros de Espiral se utilizan varios conceptos (*v.g.*, congruencia, semejante, razón, semejanza), en el libro Espiral 4 define los siguientes objetos (resaltados por nosotros en las definiciones):

> Dos figuras son **congruentes** cuando al superponerlas son iguales (Camargo, L. & Castiblanco, A. 2007, p. 155)

Esta definición alude a la semejanza ya que la congruencia es una de las posibilidades para que dos figuras sean semejantes. No se admite la posibilidad de tener congruencia por ejemplo en una figura y su simétrica a un eje. Luego la definición dada de congruencia excluye algunos casos de congruencia.

> Dos figuras son **semejantes** cuando son congruentes, o cuando una es una ampliación o una reducción de la otra, conservando la misma forma. (Camargo, L.& Castiblanco, A. 2007, p.155)

La definición encontrada en el libro Espiral 4, nos aproxima a la idea de semejanza que utilizan los autores, donde enfatizamos que a diferencia de Euclides quien establece la semejanza únicamente como una característica de dos o más figuras rectilíneas (polígonos), aquí se establece la semejanza como una característica de dos figuras cualesquiera que sean, desde que conserven “la misma forma”. En esta definición se incluye implícitamente la proporcionalidad geométrica; decir “la misma forma” está connotando que hay una relación entre la cantidad de longitud de los lados y la cantidad de amplitud de los ángulos y se conservan las características de la figura es decir que si la figura es un cuadrado al ampliarlo o reducirlo va a seguir siendo un cuadrado, teniendo en cuenta que la cantidad de longitud de los lados correspondientes va a ser proporcional y la cantidad de amplitud de los ángulos va a ser igual, además junto con las palabras ampliación y reducción se debe incluir la palabra rotación a través de la simetría y de rotación en el plano, lo que permitiría que la definición quede en términos semejantes a lo propuesto por Euclides.

En la tarea 4 planteada del Libro Espiral 6 se encuentra la siguiente definición de semejanza

> Dos polígonos son semejantes cuando uno es el resultado de aplicar al otro una homotecia o una composición de uno o varios movimientos rígidos con una homotecia. (Camargo, L., Castiblanco, A., Leguizamón, C., y Samper, C. 2003, p.233)

La anterior definición de semejanza está basada en las características que guardan las figuras cuando se les aplica un movimiento rígido, se asimila a la definición de semejanza dada en Euclides, dado que al aplicar movimientos rígidos a una figura esta conserva las características iniciales, es decir, que la cantidad de longitud de sus lados y la cantidad de amplitud de sus ángulos sigue siendo igual. No hace énfasis en la proporción que guardan los lados y la igualdad de amplitud de los ángulos esto teniendo en cuenta que se menciona la homotecia y que al aplicar una homotecia a una figura la cantidad de amplitud de los ángulos se conserva, pero la cantidad de longitud de los lados va a cambiar y los lados correspondientes en las figuras serán proporcionales. Esta definición de semejanza de dos figuras se basa en las características que guardan las figuras cuando se les aplica un movimiento rígido o una homotecia.

3.3.4 Propiedades

Las tareas de los libros de texto de la serie Espiral se puede discriminar atendiendo a si asumen la proporcionalidad geométrica y semejanza (tarea 1, tarea 2, tarea 3, tarea 4, tarea 7), solo la semejanza (tarea 5, tarea 9, tarea 12), solo proporcionalidad geométrica (tarea 6, tarea 8) o ninguna (tarea 10).

En las tareas se pueden reconocer la construcción de cuartas proporcionales, es decir a partir de tres proporciones halle la otra, como ocurre en las tareas 1 y 2 donde para realizar la copia de los dibujos cuadrícula a cuadrícula se tiene en cuenta la razón entre las coordenadas de cada punto del dibujo.

También se encontraron tareas donde se puede ver el tratamiento de la semejanza y la proporcionalidad entre figuras que están situadas de la misma forma en el plano; como ocurre en la tarea 3 donde al aplicar una homotecia a una figura, genera figuras semejantes y cumplen con la proposición VI-21 y con la definición VI-1, tratada en el Libro VI de los *Elementos* de Euclides. De manera similar ocurre con la tarea 5 la cual se basa en tener en cuenta las características que guardan las figuras cuando se les hace un movimiento rígido o una homotecia. Esta actividad la podemos asociar según con la definición VI-1 de los *Elementos.*

En general se encontró que las tareas seleccionadas se pueden asociar con el tratamiento de la semejanza y de la proporcionalidad geométrica, y aluden a algunas proposiciones tratadas en el Libro VI de *Elementos* de Euclides como son VI-2, VI-4, VI- 5, VI-6.

En la tarea 6, la cual es una tarea de introducción, se pide que el estudiante explore con un instrumento de medida acerca de la medida de los segmentos resultantes al trazar una recta paralela a uno de los lados de un triángulo, seguido enuncian el Teorema del segmento medio para triángulo. “El segmento que une los puntos medios de dos lados de un triángulo es paralelo al tercer lado y mide la mitad de éste” (p.342), este teorema aquí enunciado lo podemos asociar con la proposición VI-2 tratada en el Libro VI de *Elementos* de Euclides y con la definición VI-1.

En las tareas 10 y 11 utilizamos se utiliza las propiedades: razones trigonométricas, ley de senos y ley de cosenos expuestas a continuación:

Razones Trigonométricas

Una **razón trigonométrica** es el cociente entre la medida de las longitudes de dos lados de un triángulo rectángulo.

Consideremos los triángulos rectángulos semejantes $\triangle ABC$ y $\triangle AB'C'$ de la figura 1.25.

Observamos que $\frac{a}{c} = \frac{a'}{c'}$; $\frac{b}{c} = \frac{b'}{c'}$; $\frac{a}{b} = \frac{a'}{b'}$, ... Estas proporciones nos garantizan que el cociente entre dos lados de un triángulo rectángulo es independiente de la longitud de los lados y depende sólo del ángulo para el cual los lados son hipotenusa, cateto opuesto y adyacente, respectivamente.

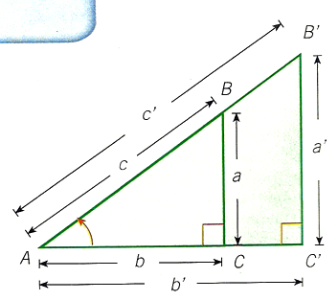


Ilustración 15

Las razones trigonométricas se definen como la relación de razón entre la cantidad de longitud de dos lados de un triángulo rectángulo; en Ilustración 17, se plantea una relación de proporción entre razones trigonométricas de dos triángulos rectángulos semejantes y con esta se establece que estás relaciones se cumplen sin importar la cantidad de longitud de los lados.

Para el $\measuredangle A$:

- La razón $\frac{a}{c}$, entre el cateto opuesto al ángulo A y la hipotenusa, se llama **seno** de A y se indica $\text{sen } A = \frac{a}{c}$.
- La razón $\frac{b}{c}$, entre el cateto adyacente al ángulo A y la hipotenusa, se llama **coseno** de A y se indica $\cos A = \frac{b}{c}$.
- La razón $\frac{a}{b}$, entre el cateto opuesto al ángulo A y el cateto adyacente al ángulo A se llama **tangente** de A y se indica $\tan A = \frac{a}{b}$.

Para el $\measuredangle B$:

- $\text{sen } B = \frac{b}{c}$ $\quad \cos B = \frac{a}{c}$ $\quad \tan B = \frac{b}{a}$

Ilustración 16

A partir de la razón trigonométrica y de un ángulo se establecen las razones seno, coseno y tangente. Por ejemplo en la Figura 43, se tiene el triángulo ACB rectángulo y se establece que, el $sen\ A = \frac{a}{c}$, lo que corresponde a la razón entre la cantidad de longitud del lado opuesto al ángulo A, y la cantidad de longitud del lado que subtiende el ángulo recto (hipotenusa). De igual manera ocurre para el ángulo B, donde $senB = \frac{b}{c}$.

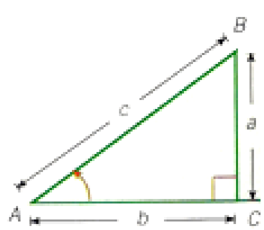


Figura 46

En la Figura 43, se tiene que el triángulo ACB rectángulo y se establece que, el $\cos A = \frac{b}{c}$; lo que corresponde a la razón entre la cantidad de longitud del lado adyacente al ángulo A, y la cantidad de longitud del lado que subtiende el ángulo recto (hipotenusa). De igual manera ocurre para el ángulo B, donde $cosB = \frac{a}{c}$.

Y en la Figura 43, se tiene que el triángulo ACB rectángulo y se establece que, $\tan A = \frac{a}{b}$, lo que corresponde a la razón entre la cantidad de longitud del lado opuesto al ángulo A y la cantidad de longitud del lado adyacente al ángulo. De igual manera ocurre para el ángulo B, donde $tanB = \frac{b}{a}$.

De donde al relacionar las razones del ángulo A con las razones del ángulo B, se tiene que: $senA = cosB = \frac{a}{c}; \cos A = senB = \frac{b}{c}\ ; tanA = \frac{1}{tanb} = \frac{a}{b}$.

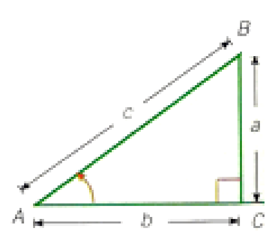
En la tarea 7 se enuncia la **Ley del seno**.

> Para cualquier $\Delta\mathbf{ABC}$, donde a, b y c son las longitudes de los lados opuestos a los ángulos con medidas A, B y C, respectivamente, se cumple: $\frac{a}{sen\ A} = \frac{\mathrm{b}}{sen\ B} = \frac{\mathrm{c}}{sen\ C}$
>
> (Ardila, R., Pérez, M., Samper, C., y Serrano, 2005, p.115);

Al enunciar esta ley se establece una relación de proporcionalidad; Establece relaciones donde el seno A (siendo A, la cantidad de amplitud de un ángulo) y *a* la cantidad de longitud de un lado, la propiedad se aplica para ángulos y lado de un triángulo cualquiera. Se considera que esta definición incluye una proporción geométrica, ya que establece que en un triángulo los lados son proporcionales a los senos de los ángulos opuestos, esta ley es una relación de igualdad entre tres razones, y que ésta relación es constante.

Esta ley se cumple en cualquier triángulo y establece una relación de proporción entre razones, donde cada una de éstas es un cociente de razones dado por la cantidad de longitud de los lados del triángulo, así:

Dado que



$sen\ A = \frac{a}{c}$; $senB = \frac{b}{c}$ y $senC = \frac{c}{c}, se\ tiene\ que$

$\frac{a}{senA} = \frac{a}{\frac{a}{c}}$; $\frac{b}{senB} = \frac{b}{\frac{b}{c}}$; $\frac{c}{senC} = \frac{c}{\frac{c}{c}}, luego, como,$

$$\frac{a}{sen\ A} = \frac{\mathrm{b}}{sen\ B} = \frac{\mathrm{c}}{sen\ C}, entonces\ se\ tienen\ la\ siguiente\ proporción\ \frac{a}{\frac{a}{c}} = \frac{b}{\frac{b}{c}} = \frac{c}{\frac{c}{c}}$$

3.3.5 Procedimientos

Las tareas generalmente se encuentran a continuación de una serie de ejemplos del tema, como se puede ver antes de la tarea 1 se encuentran dos ejemplos con los que se supone debe ser suficiente para que el estudiante la pueda desarrollar; en estas tareas que constan de cuadrículas , se puede plantear una razón entre la cantidad de longitud de cada punto de la figura inicial con respecto a un punto de referencia y el nuevo punto que se va a ubicar con respecto a otro punto de referencia que esté en la cuadricula. Este tipo de tareas corresponden a proporcionalidad geométrica y en última instancia a semejanza aunque este tratamiento no va más allá de la percepción que el niño tenga de las figuras. (Ilustración 5).

También encontramos tareas en las (tarea3, tarea 4 y 5) cuales hay que construir y justificar la semejanza entre figuras, donde el estudiante debe aplicar movimientos rígidos y homotecias a una figura dada.

Para las tareas que corresponder a medir segmentos (tarea 5 y 6)**.** El procedimiento que exige la tarea es medir los segmentos de los diferentes triángulos dados con el fin de llegar a la conjeturación de un teorema. Para el desarrollo de la tarea 7 el estudiante no necesita hacer ningún procedimiento, sólo conocer y aplicar el teorema del segmento medio para triángulos y trapecios.

También se encontró tareas en las cuales a partir de unas propiedades antes vistas (ley senos, ley de cosenos) se pide aplicarlas para justificar nuevas tareas con otras condiciones.

3.3.6 Argumentos

En el Libro VI de *Elementos* de Euclides los argumentos corresponden a la demostración de las proposiciones en donde se pueden reconocer 6 etapas las cuales muestran un orden en las construcciones y justificaciones de cada procedimiento, también las conexiones entre algunas proposiciones que son necesarias en el proceso de la demostración. En los libros de texto no se encuentra demostraciones formales de una teoría matemática pero se pueden reconocer los siguientes argumentos en las tareas seleccionadas:

Aunque en los libros de texto no se encuentra un argumento que justifique el proceso o algoritmo necesario para realizar la tarea de ampliación y reducción de imágenes, las situaciones o tareas que se les presentan a los estudiantes, como pedir que dibujen una figura de igual forma pero de mayor o menor tamaño, implica que comparen las razones de las cantidades de longitudes de todos los lados correspondientes, ya que deben conservar la misma razón, Este tipo de tareas permite que el estudiante relacione la idea de semejanza con el concepto de razón y proporción, además para que tengan un concepto intuitivo de semejanza, razón y proporción que los pueda introducir a un tipo de razonamiento donde lo que finalmente se quiere es hallar la cuarta proporcional.

Además se espera que el estudiante comience a trabajar conceptos como proporción y razón, aunque en la serie no se encuentre explicita la definición. En la definición de congruencia y semejanza expuesta en los libros de texto no se encuentra una explicación explícita de las características que debe cumplir una figura semejante, las cuales son que los lados correspondientes deben guardar la misma razón y los ángulos correspondientes deben ser congruentes, aunque esto se infiere de la definición dada en el libro En general son pocas las tareas planteadas que no exigen argumentos por parte del estudiante cuando éste se enfrenta a desarrollarlas, no se le exige la justificación de los pasos que hace cuando comienza el camino para lograr la solución. Se plantean tareas en donde se puedan aplicar las propiedades o teoremas que se han visto anteriormente. .

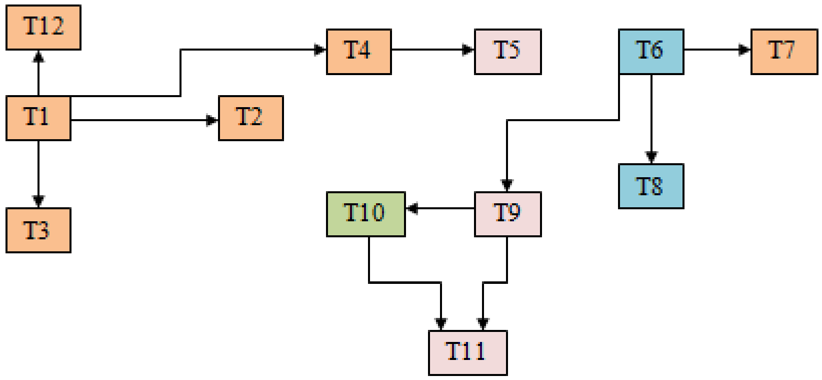


Figura 47

En la figura 47 se puede ver la complejidad de cada tarea y la importancia de la tarea 1, en el conocimiento del estudiante para que pueda desarrollar las otras tareas.

En la Figura 47, se muestra la complejidad de las tareas y sobresale la importancia de algunas sobre otras como lo son las tareas 1 y 6 de las que salen más flechas, esto quiere decir que intervienen en otras tareas; que es importante el desarrollo de tareas planteadas cuyo objetivo conlleve a aplicar conceptos de semejanza y proporcionalidad. Como se había mencionado antes las tareas 1, 2, 3, 7 y 4, aluden a proporcionalidad geométrica y semejanza; las tareas 5, 9, 11 y 12 corresponden a semejanza y las tareas 6 y 8 a proporcionalidad geométrica.

3.4 Asuntos relevantes del análisis de las tareas de los libros de texto

Utilizando las categorías de la TSS (situaciones problema, lenguaje, conceptos y definiciones, procedimientos, propiedades y argumentos) y los resultados del análisis semiótico del Libro VI de los *Elementos* de Euclides, se realizo el análisis de las tareas de los libros de texto de la serie Espiral.

3.4.1 De las Situaciones problema

En las tareas de los libros de texto se exponen tres tipos de tareas, las que refieren a demostraciones (tarea 5, tarea 6, tarea 10 y tarea 11); las que se refieren a problemas por resolver (tarea 7, tarea 8, tarea 9) y construcciones o dibujos de figuras (tarea 1, tarea 2, tarea 3, tarea 4, tarea 12).

En las tareas que se refieren a problemas por resolver se busca que construyan figuras semejantes a figuras dadas, aun si estas no son polígonos y también encontramos que se dan ejercicios donde se pide hallar figuras semejantes, la longitud de un segmento o múltiplos, y las de conjeturación a través de la exploración de casos particulares llegar a generalizar un problema. En las tareas que se refieren a demostraciones, se debe utilizar la definición de homotecia, para las leyes de seno y coseno se pide demostrar estas para los diferentes tipos de triángulos.

Por otra parte, la mayoría de las situaciones contenidas en las tareas que son problemas por resolver se refieren a construcciones relacionadas con la proporcionalidad geométrica y semejanza de figuras; a excepción de la tarea 12 que corresponde únicamente a semejanza. La tarea que corresponde a conjeturación alude únicamente a proporcionalidad geométrica. Y en las demostraciones se tiene que, la tarea 5 corresponde a semejanza, la tarea 10 no corresponde a ninguna de las dos, y la tarea 11 corresponde a proporcionalidad geométrica.

3.4.2 De el lenguaje

Encontramos tres tipos de palabras, a saber: las que se refieren a las relaciones explícitas e implícitas entre la cantidad de magnitud de los objetos o las relaciones entre éstas, las que se refieren a objetos geométricos, y las que se refieren a la relación entre dos o más objetos, y las que se refieren a procesos.

Encontramos que en la tarea que se refiere a semejanza de figuras rectilíneas se utiliza el símbolo (~), pero para la semejanza entre figuras no rectilíneas (dibujos) no se especifica. Mientras que la notación cumple una función comunicativa para identificar relaciones y en algunos casos es necesaria para realizar operaciones, además es una estrategia de discurso.

Se utilizan dos letras mayúsculas para denotar los extremos de los segmentos, se utiliza una letra mayúscula para cada vértice de los polígonos, y utilizan letras minúsculas para denotar los lados del polígono, además cuando se utiliza la misma letra en una figura se le coloca una comilla en la parte superior derecha, también se refiere a triángulo con el símbolo (Δ); y para referirse a rectas paralelas utiliza el símbolo ($\parallel$), cuando se refieren a un segmento se coloca una línea horizontal sobre las letras que denotan los extremos del segmento ($\overline{AB}$).

También se puede advertir que se resalta el ángulo de 90º con dos rectas perpendiculares así ($\perp$).

Los diagramas y dibujos que utiliza los libros de la serie Espiral, representan figuras rectilíneas (polígonos) y figuras no rectilíneas (dibujos), todas las figura encontradas en los libros de textos son figuras propias.

3.4.3 De los conceptos y definiciones

En el libro Espiral 4, resaltamos la definición de figuras congruentes y semejantes[21]. Y en libro Espiral 7, se encuentra la definición de polígonos semejantes[22]. Estas definiciones nos dejan ver que se expone en los libros definiciones de semejanza una para figuras rectilíneas (polígonos), y una definición de semejanza para figuras no rectilíneas esta la expone para realizar tareas de ampliación y reducción de dibujos, aunque no está definida la "forma".

En los libros que se revisaron no se encontró una definición explicita para proporcionalidad geométrica.

3.4.4 De las propiedades

S encontraron dos propiedades que se enuncian antes de las tareas 9, 10 y 11; están son razones trigonométricas y ley de seno.

---

[21] Dos figuras son congruentes cuando al superponerlas son iguales. (Camargo, L. y Castiblanco, A. 2007, p.155)
Dos figuras son semejantes cuando son congruentes o cuando una es una ampliación o reducción de la otra, conservando la misma forma. (Camargo, L. y Castiblanco, A. 2007, p.155)

[22] Dos polígonos son semejantes cuando uno es el resultado de aplicarle al otro una homotecia o una composición de uno o varios movimientos rígidos con una homotecia. (Ardila, J. y Samper, C. 2005. p. 233)

Todas las tareas de los libros de texto se pueden discriminar atendiendo a: si asumen la proporcionalidad geométrica y la semejanza como objeto central de estudio (tarea 1, tarea 2, tarea 3, tarea 4, tarea 7), solo la semejanza (tarea 5, tarea 9, tarea 12) y la proporcionalidad geométrica (tarea 6, tarea 8) o ninguna (tarea 10).

3.4.5 De los procedimientos

Hay procedimientos para realizar construcciones de figuras semejantes y otros para construir objetos geométricos ((rectas, superficies y ángulos proporciónales), y en lo que se aplican propiedades o teoremas.

Estos procedimientos se encuentran en:

- Construcción de figuras rectilíneas semejantes
- Construcción de figuras no rectilíneas semejantes
- Construcción de segmentos que sean media, tercera o cuarta proporcional

3.4.6 De los argumentos

En las tareas de los libros de texto Espiral no es posible implementa una estructura de seis etapas para las tareas 4, 9, y 12 donde se puede ver la secuencia de pasos para resolver la tarea.

La complejidad lógica de cada tarea se puede ver en la Figura 47, donde se advierte que es muy probable que la tarea 11 tenga un nivel de complejidad lógica mayor que el de las demás tareas, en tanto que desarrollo se involucran dos tareas. Mientras que la proposición 1 y la proposición 6 tienen una mayor importancia, lo cual podemos ver ya que de ellas se desprenden mas flechas. Estas últimas que son las que más impacto presentan frente a las otras son respectivamente de proporcionalidad geométrica y semejanza, y de proporcionalidad geométrica.

Mientras que las proposiciones que se refieren únicamente a semejanza (proposición 5, proposición 9) intervienen cero o una vez en las demás tareas.

En las tareas 1 y 2 se pueden reconocer la construcción de cuartas proporcionales, es decir a partir de tres proporciones halle la otra.

En la tareas 3, 4 y 5 se debe justificar por medio de movimientos rígidos o homotecias si cada par de figuras son semejantes; pero sólo en la tarea 4 se implementan una secuencia de pasos para obtener figuras semejantes, el argumento se encuentra al lograr el objetivo de la tarea.

En las tareas 6 y 7 se utiliza el teorema del punto de medio de triángulos, para su comprobación y aplicación.

En la tarea 8 se pide establecer proporciones entre los triángulos.

En las tareas 9, 10 y 12 se aplican los teoremas o leyes expuestos en las propiedades.

Y la tarea 12 es un ejemplo de construcción de una figura semejante con el de múltiplos de matrices.

3.4.7 Conclusiones

En el desarrollo de las tareas encontramos que el estudiante necesita manejar de manera intuitiva la proporcionalidad geométrica, ya que cuando ejecutan la tarea es porque tienen una idea intuitiva de proporcionalidad que aún no han sintetizado. Por tal motivo se considera que la teoría da una dirección para buscar cuartas proporcionales y que estas tareas requieren un aprovechamiento así sea de manera intuitiva.

De aquí que se pueda reconocer que: (i) La semejanza alude tanto a una relación entre dos figuras rectilíneas (polígonos), como a una relación de "forma" para figuras no rectilíneas, en tanto que la proporcionalidad geométrica se refiere a las proporciones que se pueden establecer entre las cantidades de magnitud de objetos geométricos. (ii)Hay procedimientos para realizar construcciones de figuras semejantes, para construir objetos geométricos, y en lo que se aplican propiedades o teoremas. (iii)Existe una notación (simbólica) para la semejanza y para las proporciones. (iv)Tanto la semejanza como la proporcionalidad geométrica son percibidas a través de la representación propia de los objetos geométricos.

(v) Las tareas de los libros de texto se pueden discriminar atendiendo a si asumen la semejanza, la proporcionalidad geométrica, las dos o ninguna.

Capítulo 4

RESULTADOS DEL ANÁLISIS Y CONCLUSIONES

4.1 Resultados del análisis

En este capítulo presentamos un contraste entre los asuntos más relevantes de los capítulos 2 y 3, y algunas reflexiones que pretender resumir algunos resultados obtenidos tras el desarrollo del estudio. Los resultados encontrados son los que consideramos más destacados; y teniendo en cuenta que en cada uno de los apartados el lector podrá encontrar más resultados.

4.1.1 Contraste entre los asuntos más relevantes de los capítulos 2 y 3

4. 1. 1.1 De las situaciones problema

Tanto en las proposiciones del Libro VI de Euclides como en las tareas de los libros de texto encontramos que se distinguen dos grupos las demostraciones y problemas por resolver.

En los problemas por resolver ambos coinciden en la construcción de figuras rectilíneas semejantes, aunque en las tareas además de la construcción de figuras rectilíneas semejantes a las que se refiere como semejanza entre polígonos, también se encuentra la relación de semejanza entre figuras (dibujos) no rectilíneas.

Aunque en los libros de texto no se desarrolla una teoría de la semejanza ni de la proporcionalidad geométrica se puede ver con base en el estudio hecho al Libro VI de *Euclides* que en estas tareas se puede tratar la proporcionalidad geométrica y la semejanza de figuras sin que en las tareas se aluda a estas, no se cambiaría el objetivo de la tarea solo se le daría otra mirada que podría ayudar a la interiorización del estos conceptos.

Hay una diferencia en tanto que en Libro VI, las proposiciones se enfocan esencialmente a construcción de cuartas proporcionales aunque hay dos que refieren a construcción de figuras semejantes; en los libros se parte de la construcción de figuras semejantes con base en diferentes definiciones, en estas se deja de lado que estas tareas de fondo son de construcción de cuartas proporcionales.

Aunque es bien sabido que en las matemáticas escolares no se usa una presentación de una teoría hipotético-deductiva, en este sentido no se debería encontrar tareas por demostrar, más si se encuentran tareas de argumentación, conjeturación o explicación. Las demostraciones en Libro VI además de utilizar las proposiciones ya demostradas se hacen construcciones auxiliares para llegar a la demostración de la proposición, en los libros de texto no se encuentran demostraciones pero si tareas de argumentación, donde se utilizan las propiedades de homotecia, ley de seno y ley de coseno para justificar, conjeturar las tareas planteadas.

4.1.1.2 Del lenguaje

De manera similar al Libro VI de *Elementos* de Euclides se encontraron los mismos grupos de palabras en las tareas, las que se refieren a objetos geométricos como las palabras triángulo, ángulo, altura; las que se refieren a las relaciones entre la cantidad de magnitud de los objetos o las relaciones entre éstas como razón y proporción, en los libros no se especifica en el campo de lo no numérico (cantidad de magnitud), solo se hace referencia a lo cuantitativo numérico (medida de la cantidad de magnitud); las que refieren a la relación entre dos o más objetos como semejanza; en los libros de texto se encontró otro tipo de palabras que se refieren a procesos (reducción, ampliación, superposición), estos procesos se hacían para construir figuras semejantes apoyada en movimientos rígidos y homotecias las cuales son parte de la teoría de las transformaciones de la cual en *Euclides* no se encuentra.

En el Libro VI Euclides no utiliza símbolos para denotar semejanza, paralelismo, perpendicularidad, y para referirse a segmento utiliza dos letras mayúsculas. En el caso de la notación, en las tareas se utiliza el símbolo (~) para referirse a figuras rectilíneas semejantes que en las tareas se reconocen como polígonos semejantes, se utiliza la línea horizontal sobre las letras que representan los extremos del segmento, esto para denotar segmentos, para rectas paralelas y perpendiculares las tareas si utilizan los símbolos $\parallel$ y $\perp$, mientras que en *Elementos* esto no ocurre.

De manera semántica de la notación se puede decir que Euclides denota a los segmentos con letras como AB, sin hacer diferencia cuando se refiere al objeto o a la cantidad de magnitud del objeto, en las tareas de los libros de texto cuando se refiere al objeto se utilizan letras mayúsculas como por ejemplo segmento $\overline{AB}$, si se hace referencia a la medida de la cantidad de magnitud o la cantidad de magnitud se utilizan letras minúsculas a.

En cuanto a los diagramas y dibujos en las tareas ocurre de manera similar a lo que ocurre en el Libro VI de *Elementos* de Euclides, ya que las figuras rectilíneas y también las no rectilíneas son figuras propias.

4.1.1.3 De los conceptos y definiciones

En los libros de texto a diferencia de los *Elementos* de Euclides, se encontró una definición para figuras semejantes no rectilíneas y una definición de congruencia entre figuras rectilíneas.

En los libros de texto se encontró una definición para figuras rectilíneas semejantes, pero esta se expone a través de la homotecia y de los movimientos rígidos más no de la proporcionalidad geométrica.

No se encontró definición de proporcionalidad geométrica en Euclides, ni en los libros de texto, dado que es un concepto tan grande que no se puede encapsular en una definición, el libro VI de los E*lementos* da criterios para caracterizarla pero sin llegar a la definición.

4.1.1.4 De las propiedades

En el Libro *VI de Elementos* se encontró que las propiedades se pueden agrupar en aquellas que aluden a proporcionalidad geométrica, semejanza o a las dos.

En los libros de texto se encontró una propiedad que aunque se establecen igualdad entre razones no es una propiedad de proporcionalidad, esta es la ley de los senos $\frac{a}{sen\ A} = \frac{\mathrm{b}}{sen\ B} = \frac{\mathrm{c}}{sen\ C}$, estas razones que se plantean se refieren a razón de razón es decir que las proporciones que se plantean son: $\frac{a}{sen\ A} = \frac{\mathrm{b}}{sen\ B} = \frac{\mathrm{c}}{sen\ C}, entonces\ se\ tienen\ la\ siguiente\ proporción\ \frac{a}{\frac{a}{c}} = \frac{b}{\frac{b}{c}} = \frac{c}{\frac{c}{c}}$ y en Euclides no se plantea la proporción como una igualdad de razones de razones.

4.1.1.5 De los procedimientos

De manera similar se encuentra tanto en Libro VI de *elementos* como en las tareas de los libros de texto que hay procedimientos tanto cuando se realizan construcciones de figuras semejantes como para construir objetos geométricos, la división de estos grupos coincide en ambos casos en dos de los procedimientos, estos son:

- Construcción de figuras rectilíneas semejantes
- Construcción de segmentos que sean media, tercera o cuarta proporcionales

En las tareas de los libros de texto además de los dos procedimientos anteriores se encuentra el que corresponde a:

- Construcción de figuras no rectilíneas semejantes

Y que en el libro VI de Elementos no se puede encontrar.

4.1.1.6 De los argumentos

Los argumentos se encuentran en Euclides a través de lo que él llama demostración, donde propone unos algoritmos en geometría que corresponden a las construcciones y que son “aplicar”, “dividir”, entre otros, y lo justifica porque esos pasos lo llevan a asegurar que así se consigue lo que se pide. En el caso de las construcciones, Euclides demuestra que el enunciado es válido a través de la demostración ya que llega efectivamente a obtener lo buscado, estos son algoritmos y su validez; mientras que en los libros de texto casi siempre se muestra el proceso pero no la validez del proceso, es decir, se muestra la técnica mas no la tecnología o se deja de lado la teoría que la sustenta.

En las tareas de los libros de texto una manera de ilustrar los procesos y argumentos se encuentra en los ejemplos, pero no se ilustra cómo se llega a tal proceso, en las tareas no se encuentra un argumento ya que ninguna pide que el estudiante argumente porque de su respuesta, pero si se puede encontrar que justifique a través de la observación.

4.1.2 En nuestra experiencia profesional

En nuestra experiencia este trabajo fortaleció las competencias en cuanto a la escritura, lectura, análisis de textos y estudio de documentos. Inicialmente no podemos desconocer la dificultad que nos causó definir y acotar el estudio que de las proporciones que íbamos a abordar, y la exigencia de los documentos que alimentaban tal estudio.

En la etapa de diseño del proyecto de investigación, escogimos la proporcionalidad geométrica y la semejanza, como los objetos matemáticos, sobre los cuales desarrollamos el estudio considerando así como la importancia e influencia que tiene este en el currículo, en el conocimiento del profesor y en el aprendizaje del estudiante. Pero luego de varios acercamientos al objeto de estudio y en una primera revisión a algunos libros de texto; nos pudimos dar cuenta que estos objetos han sido relegados a muy pocas tareas en el ámbito cuantitativo numérico. Finalmente decidimos estudiar la proporcionalidad geométrica y semejanza con base en una teoría matemática histórica alrededor de la Teoría de los significados sistémicos, para poder ver las diferentes formas de expresión de estos objetos en los libros de texto.

Al realizar el análisis del Libro VI de *Elementos* reconocemos que éste nos generó un gran esfuerzo debido principalmente a que no estamos acostumbrados a pensar geométricamente sino numéricamente; en otras palabras, reconocemos que habitualmente incorporamos un pensamiento cuantitativo numérico, incluso para el estudio de la Geometría, y que la propuesta euclidiana para ésta implica el empleo de un pensamiento cuantitativo no numérico referido a las cantidades de magnitud, y no a su medida.

4.2 A modo de conclusión

En nuestra experiencia profesional este trabajo fortaleció las competencias en cuanto a la escritura, lectura, análisis de textos y estudio de documentos. Inicialmente no podemos desconocer la dificultad que nos causó definir y acotar el estudio que de las proporciones íbamos a abordar, y la exigencia de los documentos que alimentaban tal estudio.

En la etapa de diseño del proyecto de investigación, escogimos la proporcionalidad geométrica y la semejanza, como los objetos matemáticos, sobre los cuales desarrollamos el estudio considerando su importancia e influencia que tiene este en el currículo, en el conocimiento del profesor y en el aprendizaje del estudiante. Pero luego de varios acercamientos al objeto de estudio y en una primera revisión a algunos libros de texto; nos pudimos dar cuenta que estos objetos han sido relegados a muy pocas tareas en el ámbito cuantitativo numérico. Finalmente decidimos estudiar la proporcionalidad geométrica y semejanza con base en una teoría matemática histórica como es el Libro VI de *Elementos* de Euclides, alrededor de la Teoría de los significados sistémicos, para poder ver las diferentes formas de expresión de estos objetos.

El estudio del Libro VI de *Elementos* nos permitió mejorar el nivel de conciencia que, en tanto profesores de matemáticas, teníamos frente al conocimiento matemático relacionado con la proporcionalidad geométrica y la semejanza. Este hecho revela un efecto concreto en el conocimiento del profesor de Matemáticas, generado por el estudio de la Historia de las Matemáticas. Hoy, tenemos más y mejores argumentos para diferenciar la proporcionalidad geométrica de la semejanza, pero a la vez, para reconocer sus nexos e interacciones.

Además nos dio la posibilidad de caracterizar más no de definir lo que es la proporcionalidad geométrica, donde una de las características que pudimos identificar es que la proporcionalidad geométrica estudia las proporciones entre magnitudes geométricas, es decir que estudia las proporciones entre cantidades de magnitud (longitud, amplitud, superficie) que guardan la misma razón.

En cuanto a la semejanza el estudio del Libro VI nos permitió aclarar nuestros conocimientos acerca de esta la cual también se puede caracterizar y definir de forma detallada.

Como características de la semejanza encontramos que, para que haya una relación de semejanza entre dos o más figuras no tienen que estar necesariamente situada de manera semejante, que toda figura es semejante a sí misma, que los lados correspondientes son proporcionales es decir que guardan la misma razón y los ángulos son iguales es decir que tienen la misma cantidad de amplitud, se puede establecer una relación de transitividad entre figuras semejantes esto lo advertimos en la proposición VI-21 y según Euclides la definición de semejanza está en la definición VI-1.

Las tareas que consideramos para este análisis están dispersas y se encuentran en diferentes unidades de los libros, lo que permite ver el tratamiento de la proporcionalidad geométrica y la semejanza en diferentes temas, que se pueden relacionar con éstas. Además se puede concluir que el tratamiento de la proporcionalidad geométrica y la semejanza está planteado en su mayoría en el campo de lo cuantitativo numérico.

Las tareas relacionadas con la proporcionalidad geométrica y la semejanza en las distintas unidades, nos percatamos que en la mayoría de las tareas presentes en los libros de texto analizados sólo se trata la proporción como la igualdad de razones entre dos cantidades numéricas; es decir que la proporcionalidad sólo se trata en el campo de lo cuantitativo numérico. Sin embargo dos de las tareas encontradas corresponden a proporcionalidad geométrica, éstas son las tareas 1 y 5.

Para el caso de la semejanza, los autores lo trabajan inicialmente a partir de la definición presente en el Libro 4 de Espiral, donde la condición necesaria para la semejanza entre figuras es que se conserve la misma forma, lo que implícitamente se refiere a una proporción, mientras que en el Libro 7 de Espiral se da una nueva definición para semejanza entre polígonos donde la condición necesaria es que el polígono semejante sea el resultado de aplicarle una composición de movimientos rígidos o una homotecia.

La primera definición de semejanza dada nos lleva a concluir que no se puede realizar semejanza entre figuras que estén en diferente posición lo que es evidente en los ejemplos y tareas propuestas de ampliación o reducción, donde se utilizan cuadrículas, lo que garantiza que haya una semejanza, dado que todos los cuadrados son semejantes; mientras que si se utilizara una "cuadrícula" con rectángulos, sería difícil garantizar la semejanza en la reproducción de figuras dado que todos los rectángulos no cumplen la relación de semejanza.

Las tareas que aluden a la razón y proporción se dan en el campo específicamente numérico, la semejanza entre triángulos se trabaja en los dos campos cuantitativo numérico y cuantitativo no numérico, el concepto de semejanza se trabaja en torno a los movimientos rígidos y los procesos de ampliación y reducción; la semejanza no se trata en torno a razón, proporción de lados y congruencia de ángulos, hay pocas tareas que aluden a la proporcionalidad geométrica y a la semejanza pero que para su desarrollo implican conceptos como la construcción de cuartas proporcionales, planteamiento de proporciones entre diferentes magnitudes.

Además se encontró que: (i) Se evidencia tres tipos de tareas, las que refieren a procedimientos como son las construcciones de figuras donde lo que se busca es la cuarta proporcional, las que se refieren a demostraciones que buscan que el estudiante demuestre sin un argumento previo las leyes o teoremas propuestos por el autor, las que refieren conjeturación que buscan que el estudiante concluya a partir de una serie de pasos, o las que no atienden a ninguna de estas.

(ii) Con respecto al lenguaje encontramos que en general se utilizan una notación específica para semejanza de polígonos (~), pero para la semejanza entre figuras y la proporcionalidad geométrica no se especifica. Mientras que la notación cumple una función comunicativa para especificar relaciones, ya que en algunos casos es necesaria para realizar operaciones, además es necesaria como una estrategia de discurso.

También reconocemos una distinción, entre lo que considera Euclides como figura (polígono) y lo que considera el autor como figura (dibujo).

(iii) Para el caso de las tareas que incluyen los conceptos de escala, figura y razones iguales no se encuentra una definición de estos, pero la tarea exige su implementación.

Se espera que los resultados de este trabajo permitan esclarecer el tratamiento que se hace de la proporcionalidad geométrica y de la semejanza en los libros de texto, al ser vista a través de una teoría matemática como lo son los Libros V y VI de *Elementos* de Euclides bajo la mirada de la Teoría de los significados sistémicos, la cual permitió identificar este tratamiento en cada una de las tareas seleccionadas.

Además se espera haber generado en el lector la necesidad de reconocer la historia en la enseñanza de la matemática porque permite mirar el lenguaje, las técnicas, la notación, las diferentes demostraciones y compararlas con los conceptos que aparecen en los libros de texto, sabiendo que el análisis de los libros de texto no puede hacerse al margen de una comparación mas sí se puede alimentar de ella.

Otra razón no menos importante de la necesidad de conocer la historia de la matemática y que nos hizo reflexionar mucho se encuentra en lo significativo de ésta en el conocimiento del profesor y del estudiante, para entender la matemática como una actividad cultural cambiante. Reconocemos que si se tiene una experiencia tan potente de la cual se puede reconocer que se aprende algo para su profesión, entonces tal experiencia es valiosa y se vuelve una invitación para seguir estudiando.

REFERENCIAS

Alfonso, B. G. (1999). Tendencias metodològicas en la enseñanza de la proporcionalidad derivadas del anàlisis de libros antiguos. *Revista Latinoamericana de Investigaciòn en Matemàtica Educativa , 2* (2-3).

Alzate,M; Arbelaez,M; Gomez, M; Romero, F;. Intervención, Mediación Pedagógica y los usos del texto escolar. En U. T. Pereira (Ed.). Pereira, Colombia.

Ardila, R. P. (2005). Espiral 7. Bogotá: Norma.

Ardila, R., Pérez, M., Samper, C., & Serrano. (2005). *Espiral 10.* Bogotá: Norma.

Barreto, J. C. (2010). Homotecias y su aplicación en la extensión del Teorema Pitágoras en Didáctica del Análisis Matemático. *Revista Iberoamericana de Educación Matemática.UNION*, (23), 71-91.

Barreto, J. (2010). Homotecias y su aplicaión en la extensión del Teorema de Pitágoras en Didáctica del Análisis Matemático. *UNION* (23), 71-91.

Bosch, M & Chevallard,Y. (1999). *La sensibilité de l'activité mathématique aux ostensifs. Objet d'étude et problématique. Recherches en Didactique des Mathématiques* (Vol. 19).

Camargo, L. (2005). Espiral 5. Bogotá: Norma.

Camargo, L., Castiblanco, A., Leguizamón, C., & Samper, C. (2003). *Espiral 6.* Bogotá: Norma.

Camargo,L.& Castiblanco, A. (2007). Espiral 4. Bogotá: Norma.

Campagno, L., Castillo, S., Ferrero, S. (2007). *El Lugar del Libro de Texto para la Enseñanza de las Ciencias Sociales en el Tercer Ciclo de E.G.B en Contexto Sociales Adversos.* Recuperado el 12 de Enero de 2011, de Universidad Nacional de La pampa:

http://face.uncoma.edu.ar/investigacion/4congreso/articulos/area%203/subarea%202/t205%20-%20campagno%20y%20otros%20-%20ponencia.pdf

Castro Buitrago, R. A., Estrada García, W. F., Moreno Gutierrez, B., & Novoa Ramírez, F. (2004). *Espiral 8.* Bogotá, Colombia: Norma.

Chevallard, Y. (1992). *Concepts fondamentaux de la didactique : perspectives apportées par une approche anthropologique. Recherches en Didactique des Mathématiques.* (Vol. 12).

Chopin, A. (1980). L'histoire des manuels scolaires. Un bilan bibliométrique de la recherche français. *Histoire de l'Education , 58*, 165-185.

Cobb, P. (1989). Experiential, cognitive, and anthropological perspectives in mathematics educations. *For the Learning of Mathematics , 9* (2), 32-42.

D'Amore. (2007). El papel de la Epistemología en la formación de profesores de Matemática de la escuela secundaria. *Cuadernos del Seminario en educación, n. 8. Bogotá: Universidad Nacional de Colombia.*

Fiol, M. &. (1990). Proporcionalidad directa. La forma y el número. En *Colección: Matemáticas: Cultura y aprendizaje.* (Vol. 20, pág. 118). Madrid: Sintesis S.A.

Furinghetti, F. & Somaglia, A. (1997). Storia della matematica in classe. *Leducazione matematica XVIII , 2,1*.

Gardies, J. L. (1997). *L' organization des mathèmatiques grecques de Thèètète à Archimède.* France: Librairie Philosophique.

Godino, J. (2004). *Didáctica de la Matemática para Maestros.Manual para el estudiante. Proyecto Edumat-Maestros.*

Godino, J. (2002). Un enfoque ontològico y semiòtico de la cogniciòn matemàtica. *Recherches en Didactique des Mathèmatiques , 22* (2,3).

Godino, J., & Batanero, C. (1994). Significado institucional y personal de los objetos matematicos. *Recherches en Didactique des Mathematiques , 14* (3), 325-355.

Godino, J., Batanero, C., & Font, V. (2006). The Onto-Semiotic approach to research in Mathematics Education. *Zentralblat für Didaktik der Mathematik , 38.*

Gómez, B. (2000). Los libros de texto de matemáticas. *Revista Números* , 77-80.

Gonzalez, M & Sierra, M. (2004). Metodología de análisis de libros de texto de matemáticas. Los puntos críticos en la enseñanza secundaria en España durante el siglo XX. *Departamento de Didáctica de la Matemática y de las Ciencias Experimentales. Universidad de Salamanca.Enseñanza de las ciencias , 22* (3).

Grande, X., Joya, A., & Cizaer, J. . (2009). *Casa de las matemáticas 3.*

Guacaneme, E. A. (s.f.). Significados de los conceptos de razón y proporción en el Libro V de los Elementos. *Universidad Distrital "Francisco José de Caldas"* .

Guacaneme, E. (2002). Estudio Didáctico de la proporción y la proporcionalidad: Una aproximación a los aspectos matemáticos formales y a los textos escolares de matemáticas.

Heiede, T. (1996). History of mathematics and the teacher. (págs. 231-243). Washington: Mathematical Association of America.: In R. Calinger. Vita mathematica: historical research and integration with teaching.

Heiede, T. (1992). Why Teach History of Mathematics? The Mathematical Gazette., (pág. 475).

Hostil. (1969). *Content analysis for the social sciences and humanities.* Addison Wesley.

Lemonidis, C. (1991). Analyse et réalisation d'une experience d'enseignement de l'homothétie. *Recherches en Didactique des Mathématiques , 11* (23), 295-324.

MEN. (1998). Lineamientos Curriculares de Matemáticas. Bogotá, Colombia: Ministerio de Educación Nacional.

Moise, E. &. (1972). Serie Matemática moderna. Calí, Colombia: Fondo Educativo Interamericano S. A.

Pepin, B., Haggarty, L., & Keynes, M. (2001). *Mathematics textbooks and their use in English, French and German classrooms: a way to understand teaching and learning cultures* (Vol. 33).

Piaget, J. & Inhelder, B. (1972). *De la lógica del niño a la lógica del adolescente.* Buenos Aires, Argentina: Paidos.

Puertas, M. L. (1994). Euclides. Elementos. Libros V-IX.55-109.

Ramírez, T. (2003). El texto escolar: una línea de investigación en educación. *Revista de pedagogia scielo , 24* (70).

Sierra Vazquez, Modesto; Gonzalez Astudillo, Maria; López Esteban, Carmen;. (1999). Evolucion historica del concepto de limite funcional en los libros de texto de bachillerato y curso de orientacion universitario. *Departamento de Didactica de la Matemática y de las Ciencias Experimentales , 17* (3), 463-476.

Streefland, L. (1979). Young children (6-8) - ratio and proportion. *10* (4), 403-420.

Taboada, M. B. (s.f). *Libros de texto en la enseñanza de la lengua: Recorridos críticos y construcción de identidades.*

Vergnaud, G. (1990). *La théorie des champs conceptuels. Recherches en Didactiques des Mathématiques* (Vol. 10).

Vygotsky, L. (1973). *Pensamiento y Lenguaje.* Buenos Aires: Pleyada.

ANEXO 1

Libro VI de *Elementos* Euclides

Definiciones

Definición 1. **Figuras rectilíneas semejantes** son las que tienen los ángulos iguales uno a uno y proporcionales los lados que comprenden los ángulos iguales (Puertas, 1994, p. 55)

Definición 2: (Dos) figuras están inversamente relacionadas cuando en cada una de las figuras hay razones antecedentes y consecuentes.

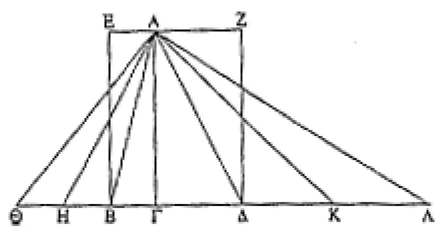
Definición 3. Se dice que una recta ha sido cortada en **extrema y media razón** cuando la recta entera es al segmento mayor como el (segmento) mayor es al menor (Puertas, 1994, p. 56)

Definición 4. En toda figura, la **altura** es la perpendicular trazada desde el vértice hasta la base. (Puertas, 1994, p. 56)

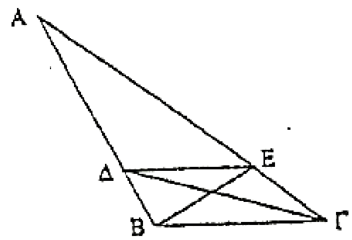
Definición 5: se dice que una razón está compuesta de razones cuando los tamaños de las razones multiplicadas por sí mismas producen una razón.

Proposiciones

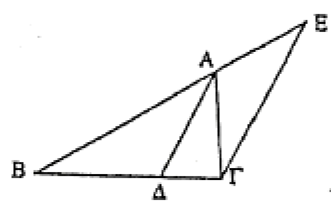
Proposición 1: Los triángulos y los paralelogramos que tienen la misma altura son entre sí como sus bases.(Puertas, 1994, p. 56)



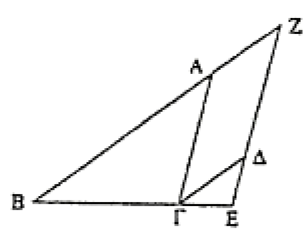
Proposición 2: Si se traza una recta paralela a uno de los lados de un triángulo, cortará proporcionalmente los lados del triángulo. Y si se cortan proporcionalmente los lados de un triángulo, la recta que une los puntos de sección será paralela al lado restante del triángulo.(Puertas, 1994, p. 58)



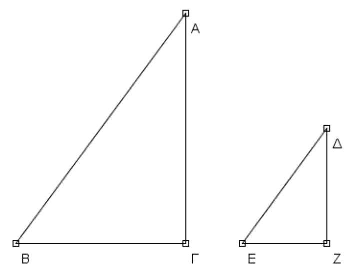
Proposición 3: Si se divide en partes iguales un ángulo de un triángulo, y la recta que corta el ángulo corta también la base, los segmentos de la base guardarán la misma razón que los restantes lados del triángulo; y, si los segmentos de la base guardan la misma razón que los restantes lados restantes del triángulo, la recta trazada desde el vértice hasta la sección dividirá en dos partes iguales el ángulo del triángulo. (Puertas, 1994, p. 60)



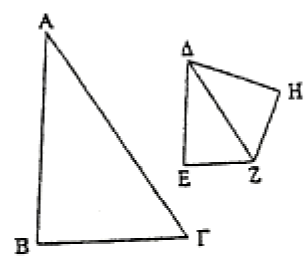
Proposición 4: En los triángulos equiángulos, los lados que comprenden los ángulos iguales son proporcionales y los lados que subtienden los ángulos iguales son correspondiente. (Puertas, 1994, p. 62)



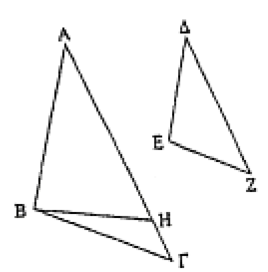
Proposición 5: Sí dos triángulos tienen sus lados proporcionales, los triángulos serán equiángulos y tendrán iguales los ángulos a los que subtienden los lados correspondientes. (Puertas, 1994, p. 63)



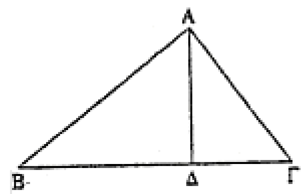
Proposición 6: Si dos triángulos tiene un ángulo (del uno) igual a un ángulo (del otro) y tienen proporcionales los lados que comprenden los ángulos iguales, los triángulos serán equiángulos y tendrán iguales los ángulos a los que subtienden los lados correspondientes.(Puertas, 1994, p. 65)



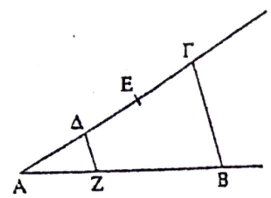
Proposición 7: Si dos triángulos tienen un ángulo de uno igual a un ángulo de otro y tienen proporcionales los lados que comprenden los otros ángulos, y tienen los restantes ángulos parejamente menores o no menores que un recto, los triángulos serán equiángulos y tendrán iguales los ángulos que comprenden los lados proporcionales. (Puertas, 1994, p. 66)



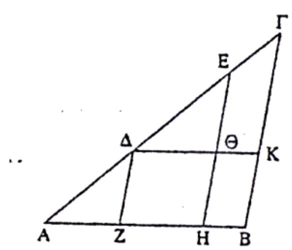
Proposición 8: Si en un triángulo rectángulo se traza una perpendicular desde el ángulo recto hasta la base, los triángulos adyacentes a la perpendicular son semejantes al (triángulo) entero y entre sí.(Puertas, 1994, p. 69)



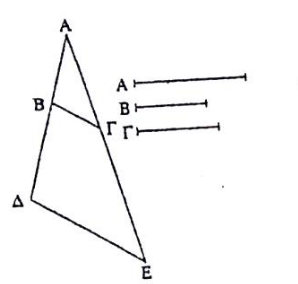
Proposición 9: Quitar de una recta dada la parte que se pida.(Puertas, 1994, p. 71)



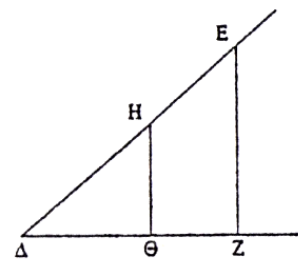
Proposición 10: Dividir una recta dada no dividida de manera semejante a una recta dada ya dividida.(Puertas, 1994, p. 72)



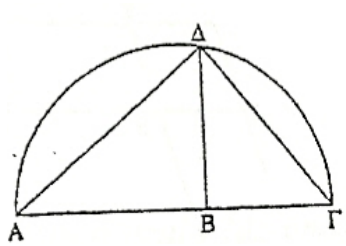
Proposición 11: Dadas dos rectas, hallar una tercera proporcional.(Puertas, 1994, p. 73)



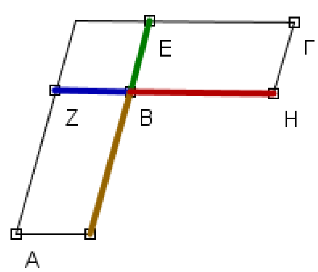
Proposición 12: Dadas tres rectas, hallar una cuarta proporcional. (Puertas, 1994, p. 74)



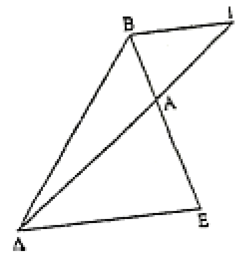
Proposición 13: Dadas dos rectas, hallar una media proporcional.(Puertas, 1994, p. 74)



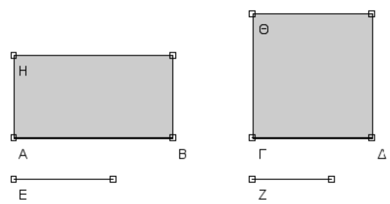
Proposición 14: En los paralelogramos iguales y equiángulos entre sí, los lados que comprenden los ángulos iguales están inversamente relacionados, y aquellos paralelogramos equiángulos que tienen los lados que comprenden los ángulos iguales inversamente relacionados, son iguales.(Puertas, 1994, p. 75)



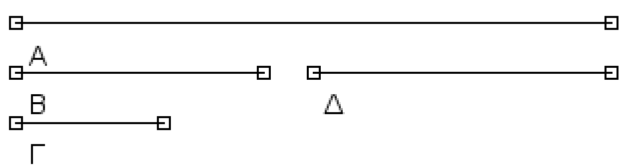
Proposición 15: En los triángulos iguales que tienen un ángulo (de uno) igual a un ángulo (del otro), los lados que comprenden los ángulos iguales están inversamente relacionados. Y aquellos triángulos que tienen un ángulo (de uno) igual a un ángulo (del otro) cuyos lados que comprenden los ángulos iguales están inversamente relacionados, son iguales.(Puertas, 1994, p. 77)



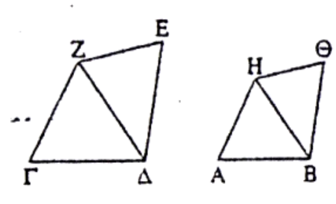
Proposición16: Si cuatro rectas son proporcionales, el rectángulo comprendido por las extremas es igual al rectángulo comprendido por las medianas; y si el rectángulo comprendido por las extremas es igual al rectángulo comprendido por las medianas, las cuatro rectas serán proporcionales. (Puertas, 1994, p. 78)



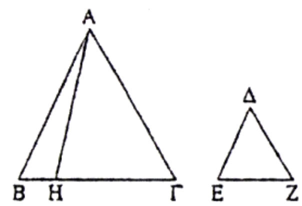
Proposición 17: Si tres rectas son proporcionales, el rectángulo comprendido por las extremas es igual al cuadrado de la medida; y si el rectángulo comprendido por las extremas es igual al cuadrado de la media, las tres rectas serán proporcionales.(Puertas, 1994, p. 80)



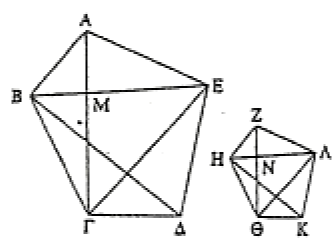
Proposición 18: A partir de una recta dada, construir una figura rectilínea semejante y situada de manera semejante a una figura rectilínea dada.(Puertas, 1994, p. 82)



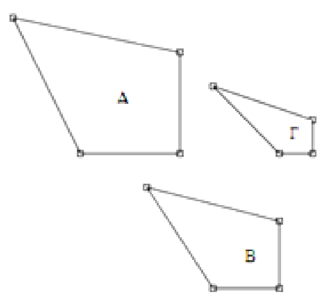
Proposición 19: Los triángulos semejantes guardan en sí la razón duplicada de sus lados correspondientes. (Puertas, 1994, p. 83)



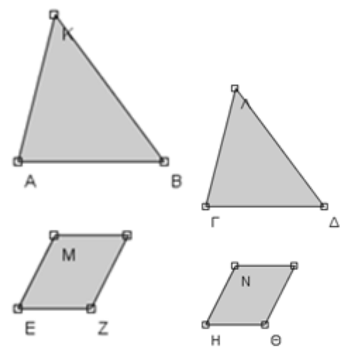
Proposición 20: Los polígonos semejantes se dividen en triángulos semejantes e iguales en número y homólogos a los (polígonos) enteros y un polígono guarda con el otro una razón duplicada de la que guarda el lado correspondiente con el lado correspondiente.(Puertas, 1994, p. 85)



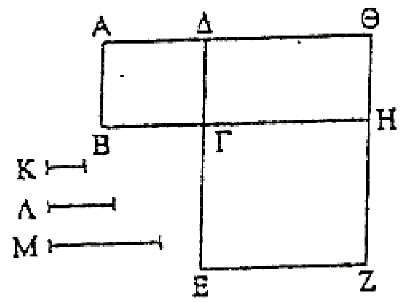
Proposición 21: Las figuras semejantes a una misma figura rectilínea son también semejantes entre sí.(Puertas, 1994, p. 89)



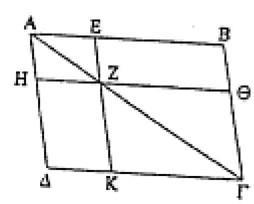
Proposición 22: si cuatro rectas son proporcionales, las figuras rectilíneas semejantes y construidas de manera semejante a partir de ella serán también proporcionales; y si las figuras semejantes y construidas de manera semejante a partir de ellas son proporcionales, las rectas serán también proporcionales.(Puertas, 1994, p. 90)



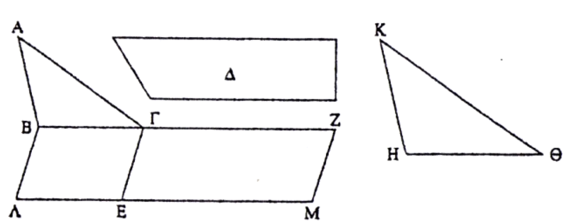
Proposición 23: Los paralelogramos equiángulos guardan entre sí la razón compuesta de (las razones) de sus lados.(Puertas, 1994, p. 93)



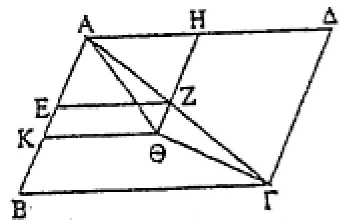
Proposición 24: En todo paralelogramo, los paralelogramos situados en torno a su diagonal son semejantes al (paralelogramo) entero y entre sí.(Puertas, 1994, p. 94)



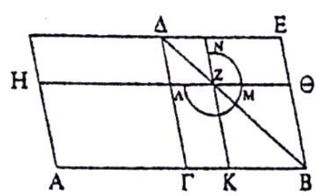
Proposición 25: construir una misma (figura) semejante a una figura rectilínea dada, e igual a otra (figura) dada.(Puertas, 1994, p. 96)



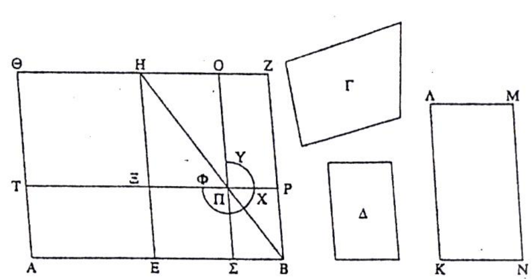
Proposición 26: Si se quita de un paralelogramo un paralelogramo semejante y situado de manera semejante al paralelogramo entero que tenga un ángulo común con él, está en torno a la misma diagonal que el (paralelogramo) entero.(Puertas, 1994, p. 97)



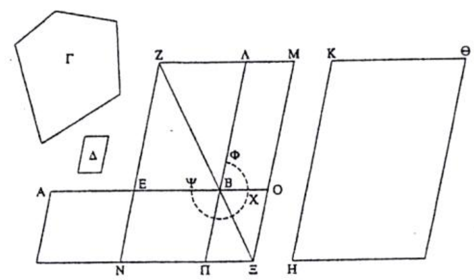
Proposición 27: De todos los paralelogramos aplicados a una misma recta y deficientes en figuras paralelogramos semejantes y situadas de manera semejante al construido a partir de la mitad de la recta, el (paralelogramo) mayor es el que es aplicado a la mitad de la recta y es semejante al defecto. (Puertas, 1994, p. 98)



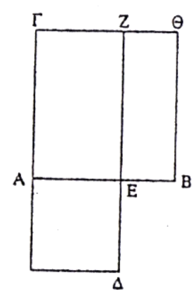
Proposición 28: Aplicar a una recta dada un paralelogramo igual una figura rectilínea dada deficiente en una figura paralelograma semejante a una dada; pero es necesario que una figura rectilínea dada no sea mayor que el paralelogramo construido a partir de la mitad y semejante al defecto.(Puertas, 1994, p. 100).



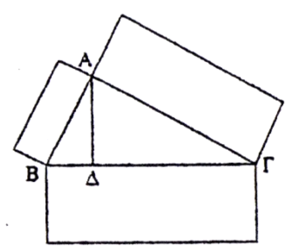
Proposición 29: Aplicar a un recta dada un paralelogramo igual a una figura rectilínea dada y que exceda en una figura paralelograma semejante dada.(Puertas, 1994, p. 102)



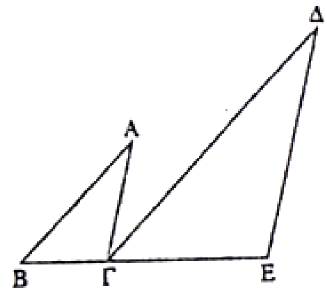
Proposición 30: Dividir una recta finita en extrema y media razón.(Puertas, 1994, p. 103)



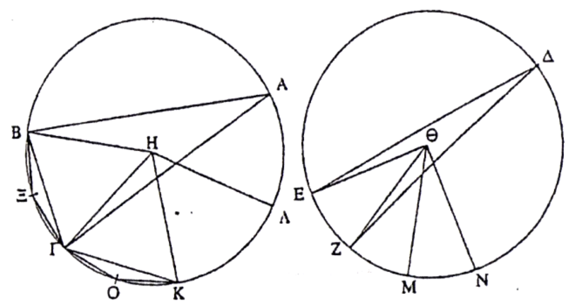
Proposición 31: En los triángulos rectángulos, la figura (construida) a partir del lado que subtiende el ángulo recto es igual a las figuras semejantes y construidas de manera semejante a partir de los lados que comprenden el ángulo recto.(Puertas, 1994, p. 104)



Proposición 32: Sí dos triángulos que tienen dos lados (de uno) proporcionales a dos lados (del otro) se construyen unidos por un ángulo de modo que sus lados correspondientes sean paralelos, los restantes lados de los triángulos estarán en línea recta.(Puertas, 1994, p. 106)



Proposición 33: En los círculos iguales, los ángulos guardan la misma razón que las circunferencias sobre las que están, tanto si están en el centro como si están en las circunferencias.(Puertas, 1994, p. 107)



ANEXO 2

	P1	P2	P3	P4	P5	P6	P7	P8	P9	P10	P11	P12	P13	P14	P15	P16	P17	P18	P19	P20	P21	P22	P23	P24	P25	P26	P27	P28	P29	P30	P31	P32	P33	
P1		X																	X				X											3
P2			X	X					X	X	X													X										6
P3				X																														1
P4					X	X		X										X		X														5
P5																																		0
P6																				X														1
P7													X																		X			2
P8																																		0
P9																																		0
P10																																		0
P11																			X			X												2
P12																						X	X											2
P13																																		0
P14																X														X				2
P15																			X	X														2
P16																	X																	1
P17																																		0
P18																						X			X									2
P19																				X											X			2
P20	x			x		x																	x											4
P21																																		0
P22														x	x							X												3
P23	X														x																			2
P24		X																																1
P25	x																	x																2
P26																								x										1
P27																										x								1
P28																		x			x				x	x								4
P29																					x			x	X									3
P30														X															x					2
P31								x											x															2
P32					x																													1
P33																																		0
	3	2	1	3	2	2	0	2	1	1	1	0	1	2	2	1	1	3	4	4	2	4	3	3	3	2	0	0	1	1	2	0		

Así, a partir de la lectura de la última fila de la tabla, se advierte que es muy probable que las proposiciones 19, 20 y 22 tengan un nivel de complejidad lógica mayor que el de las demás proposiciones, en tanto que en su demostración se involucran dos, tres y cuatro proposiciones, respectivamente.