# ANÁLISIS DE UNA PRÁCTICA DOCENTE. INTERACCIONES QUE SE GESTAN EN LA ACTIVIDAD DEMOSTRATIVA.

MARÍA DEL PILAR CUBILLOS DÍAZ
2008185009
SANDRA CAROLINA SÁNCHEZ SUESCA
2008185022

UNIVERSIDAD PEDAGÓGICA NACIONAL
FACULTAD DE CIENCIA Y TECNOLOGÍA
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS
Bogotá D.C., JUNIO
2010

**ANÁLISIS DE UNA PRÁCTICA DOCENTE. INTERACCIONES QUE SE GESTAN EN LA ACTIVIDAD DEMOSTRATIVA.**

MARÍA DEL PILAR CUBILLOS DÍAZ
2008185009
SANDRA CAROLINA SÁNCHEZ SUESCA
2008185022

Tesis de grado para optar el título de

Magister en Docencia de las Matemáticas

Asesora

LEONOR CAMARGO URIBE

Profesora titular Dpto. de Matemáticas

__________________________________

UNIVERSIDAD PEDAGÓGICA NACIONAL
FACULTAD DE CIENCIA Y TECNOLOGÍA
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS
Bogotá D.C., JUNIO
2010

## TABLA DE CONTENIDO


RESUMEN ANALÍTICO EDUCATIVO (R.A.E) ..... 4

INTRODUCCIÓN ..... 11

CAPÍTULO 1. DEFINICIÓN DEL PROBLEMA ..... 13

1.1 JUSTIFICACIÓN ..... 13

1.2 OBJETIVOS ..... 15

1.3 ESTADO DEL ARTE ..... 16

1.4 SÍNTESIS DEL DISEÑO INVESTIGATIVO ..... 27

CAPÍTULO 2. MARCO TEÓRICO ..... 29

2.1 CONOCIMIENTO PROFESIONAL DEL PROFESOR DE MATEMÁTICAS ..... 29

2.2 LA PRÁCTICA DEL PROFESOR ..... 30

2.3 ACTIVIDAD ..... 33

CAPÍTULO 3. DISEÑO INVESTIGATIVO ..... 38

3.1 DESCRIPCIÓN DEL CONTEXTO Y FUENTES DE INFORMACIÓN ..... 38

3.2 DESCRIPCIÓN METODOLÓGICA ..... 40

CAPÍTULO 4. ANÁLISIS DE LOS DATOS ..... 54

4.1 CATEGORÍA DEMOSTRAR ..... 55

4.2 CATEGORÍA CONJETURAR ..... 66

4.3 CATEGORÍA USAR DEFINICIONES ..... 75

4.4 CATEGORÍA GESTIÓN COMUNICATIVA ..... 84

4.5 SÍNTESIS DEL ANÁLISIS DE DATOS ..... 93

CAPÍTULO 5. RESULTADOS ..... 95

5.1 INFORMES DESCRIPTIVO-INTERPRETATIVOS ..... 95

5.2 VIDEO - CLIPS ..... 106

CAPÍTULO 6. CONCLUSIONES ..... 109

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS ..... 113

ANEXOS ..... 116

ANEXO I. INFORMES DESCRIPTIVO-INTERPRETATIVOS ..... 116

ANEXO II. TRANSCRIPCIONES ..... 184

## LISTA DE ESQUEMAS

Esquema 1. Ruta metodológica…...……………………………………………………..28

Esquema 2. Conocimiento profesional del profesor de matemáticas……………………....30

Esquema 3. Sistemas de actividad que articula la enseñanza de las matemáticas como una práctica……………….………………………………………………………..31

Esquema 4: Interacciones relacionadas con la práctica del profesor………………………33

Esquema 5: Procesos relacionados con la actividad demostrativa………………………...36

Esquema 6: Ciclo de análisis de la investigación……………………………………….37

**LISTA DE TABLAS**

Tabla 1. Acciones de la actividad demostrativa……………………………………………20

Tabla 2. Ejemplo de la selección de Episodios…………………………………………….42

Tabla 3. Clasificación del razonamiento deductivo……………………………………….44

Tabla 4. Episodios seleccionados para cada proceso……………………………………...46

Tabla 5. Códigos del proceso de demostrar………………………………………………..47

Tabla 6. Códigos del proceso de usar definiciones………………………………………..48

Tabla 7. Códigos del proceso de conjeturar………………………………………………..48

Tabla 8. Ejemplo de la tabla de correspondencia entre el fragmento y el código…………49

Tabla 9. Codificación final………………………………………………………………...50

Tabla 10. Relación episodio con documento primario…………………………………….55

## RESUMEN ANALÍTICO EDUCATIVO (R.A.E)

**Título de la investigación:** ANÁLISIS DE UNA PRÁCTICA DOCENTE. INTERACCIONES QUE SE GESTAN EN LA ACTIVIDAD DEMOSTRATIVA.

**Autores:** CUBILLOS DÍAZ, María del Pilar.

SÁNCHEZ-SUESCA, Sandra Carolina.

**Fecha de elaboración:** Junio de 2010.

**Resumen de la investigación:** Teniendo en cuenta que dos de los focos de interés en el campo investigativo de la educación matemática han sido la práctica y el aprendizaje del profesor de matemáticas, y que una de las sugerencias de este campo es desarrollar aproximaciones a la formación docentes que preparen a los futuros profesores a aprender desde la práctica profesional, esta investigación se centra en caracterizar las interacciones entre una profesora y sus estudiantes, que suceden durante una clase de geometría, cuando se favorece la actividad demostrativa, en especial los procesos de conjeturar, usar definiciones y demostrar, como una manera de relacionar la formación inicial con el desarrollo profesional de los profesores de matemáticas en ejercicio; ya que dicha caracterización se constituye en insumo para la reflexión y análisis en la formación inicial de profesores.

**Palabras claves:** Conocimiento profesional del profesor, práctica profesional del profesor, formación inicial de docentes, interacciones, actividad demostrativa.

**Problema que aborda la investigación:** El problema que aborda la investigación es la carencia o escasez de vías de acercamiento a la práctica del profesor con las cuales poder iniciar una reflexión situada sobre el aprendizaje de la demostración en los primeros cursos de la Licenciatura en Matemáticas de la Universidad Pedagógica Nacional.

**Objetivo general de la investigación:** Caracterizar las interacciones que se gestan en la práctica de un profesor de matemáticas en el aula de geometría con el fin de producir un material didáctico que apoye el curso "Enseñanza y Aprendizaje de la Geometría" de la Licenciatura en Matemáticas de la Universidad Pedagógica Nacional.

**Contenidos:** El documento de la investigación se presenta en seis capítulos y una sección de anexos. En el capítulo uno se define y presenta el problema de investigación, el capítulo dos provee el marco conceptual, en el capítulo tres se describe el diseño investigativo, el capítulo cuatro presenta el análisis de los datos, el capítulo cinco corresponde a los resultados y en el capítulo seis las conclusiones. La sección de anexos se conforma de las transcripciones de los nueve episodios de clase analizados y de ocho informes descriptivo-interpretativos, diseñados como resultado de la investigación, el otro informe descriptivo-interpretativo se presenta en el capítulo de resultados.

**Metodología de la investigación:** El análisis realizado en la investigación, es de tipo cualitativo, centrado en la descripción - interpretación de las interacciones que se llevan a cabo en la práctica de un profesor de matemáticas, cuando intenta favorecer la actividad demostrativa en geometría. Para abordar el trabajo se tomaron como unidades de análisis episodios de una clase de geometría plana (I semestre del año 2007) de la Universidad Pedagógica Nacional. La clase consistió de 47 sesiones y a ellas asistieron 21 estudiantes. El proceso de análisis y elaboración del material, resultado de la presente investigación, se llevó a cabo en siete fases, las cuales no se desarrollaron de forma secuencial, ya que a medida que se iba avanzando en el trabajo, se adelantaban dos o tres fases al mismo tiempo. Las siete fases son: selección del material, primer ejercicio de codificación, reducción del material, segundo ejercicio de codificación, codificación final, elaboración de los informes descriptivo-interpretativos, edición de videos.

**Conclusiones de la investigación:**

Al hacer un análisis retrospectivo de la descripción general de la clase de geometría plana presentada en Echeverry, Molina, Perry y Samper (2009) y Camargo, Echeverry, Molina, Perry & Samper (2008), observamos que las acciones que los autores mencionan como acciones que comprometen a los estudiantes con la actividad demostrativa, asociadas con la gestión que hace el profesor, están directamente relacionados con los patrones de interacción identificados y descritos en el Capítulo 3 y 4, la mayoría de los patrones de interacciones que identificamos se entrevén, y en algunas oportunidades se describen en los artículos ya mencionados, pero sin que los autores les dieran relevancia a los mismos. Ampliando aquí una descripción de cada uno de los patrones y ejemplificándolos desde la la práctica de una profesora centrada en la actividad demostrativa.

Algunos de los aspectos de interacción que son susceptibles de reflexión y análisis por parte de docentes en formación inicial como aporte a su formación en geometría, son los patrones de interacción relacionados con los procesos: demostrar, usar definiciones y conjeturar que hemos identificado y presentado en el Capítulo 4. A partir de la reflexión sobre la práctica de una profesora en el estudio colectivo de la actividad demostrativa, los futuros docentes pueden confrontar sus creencias y concepciones sobre la práctica de enseñar matemáticas y su conocimiento sobre la enseñanza de la demostración en geometría, así van consolidando su conocimiento profesional. Cabe aclarar que nuestra intención no es que los estudiantes copien o repitan los patrones de interacción que se identificaron, sino que analicen sobre ellos.

Toda actividad se rige por unos patrones de interacción, que en todos los casos no son los mismos, pues como se observó en el Capítulo 3 y 4, el estudio de los procesos demostrar, usar definiciones y conjeturar de la actividad demostrativa no se rigen por unas mismas pautas de interacción, aunque existen unos generales que son los encontrados en la categoría de gestión comunicativa, cada uno de los procesos tiene unos patrones propios que lo caracterizan en el aula.

Algunos aspectos que influyen en la práctica del profesor y que están directamente relacionados con el conocimiento profesional son: la experiencia del profesor en la enseñanza de la actividad matemática que favorece en clase con sus estudiantes, la reflexión de la práctica y la evaluación y reestructuración de las tareas y problemas que se proponen en la clase. Como se observó en el estado del arte, las tareas que se proponen en la clase de geometría son objeto de evaluación y reestructuración, por parte de los integrantes de la línea de investigación “Aprendizaje y Enseñanza de la Geometría”, de la cual hace parte la profesora que guía la clase geometría plana aproximadamente diez años atrás y cuya metodología de la clase ha sido modificada desde el año 2004. Observamos que la experiencia que tiene la profesora sobre la enseñanza de la demostración y los estudios que ha realizado de la actividad demostrativa permiten estructurar y guiar las interacciones que surgen en la clase, pues desde el inicio ella sabe cuál es la meta a alcanzar y los caminos que conllevan o no a alcanzar dicha meta.

Las categorías de interacción que emergieron de la práctica de la profesora y el análisis que realizamos a dicha práctica aportan a la educación matemática, en especial a la educación en geometría y al conocimiento sobre la enseñanza de los docentes en formación inicial, al convertirse en el marco teórico desde el que observar la práctica profesional de un profesor. Dicho marco teórico junto con los resultados obtenidos de la investigación se convierten en piezas claves para el diseño y desarrollo de entornos favorables para la reflexión y análisis de la práctica de enseñar matemáticas.

Gracias a la práctica de la profesora y a las condiciones de la clase fue posible producir el material didáctico obtenido como resultado, ya que dicha práctica permitió caracterizar interacciones entre la profesora y los estudiantes, y dar un ejemplo de la práctica docente en relación a la actividad demostrativa. Dichas categorías emergieron de los procesos de la actividad demostrativa trabajados en cada episodio de clase, y en particular del conocimiento matemático o geométrico puesto en juego en cada uno de los procesos.

Con el material que hemos obtenido respondemos a una de las necesidades investigativas tanto a nivel nacional como internacional y tratamos de suplir, en parte, la necesidad de tener material didáctico para la formación docente, siendo conscientes que éste no es el único tipo de material que se puede usar en los programas de formación inicial. Consideramos que el material acercará a los futuros profesores a la práctica de aula, y permitirá que ellos conozcan y reflexionen sobre ella, ganando conocimiento acerca de la enseñanza de las matemáticas.

En relación a los aportes en términos del estudio de las interacciones que se describen a lo largo del documento, se amplía el panorama de los patrones de interacción que se dan en el aula de matemáticas, ya que la mayoría de las investigaciones consultadas al referirse a interacciones caracterizan acciones propias de la profesora y de los estudiantes, pero muy pocas se centran en caracterizar fragmentos de diálogos que se encadenan en medio de una actividad matemática y que están directamente relacionados con esas acciones. Logrando así, con nuestra investigación caracterizar interacciones a partir de cadenas conversacionales, que intentan favorecer el aprendizaje de una actividad matemática, y en las cuales están inmersas las acciones identificadas en algunos de los proyectos de investigación leídos.

En el mismo sentido, un aporte importante es la caracterización de interacciones en una actividad matemática propia, ya que fue posible darnos cuenta que éstas varían de acuerdo a la actividad matemática que se desarrolla en el aula, aunque no se desconoce que existen unas generales. Además, también logramos identificar que los patrones de interacción también varían de acuerdo a los procesos que se desarrollen, ya que la gestión que realiza la profesora para lograr los propósitos que se establece para las clases, es variable de acuerdo al proceso trabajado. Por lo anterior, aunque describimos 4 categorías de análisis estas pueden no observarse al analizar otro de los procesos de la actividad demostrativa, emergiendo así otras categorías de análisis, ya que las categorías emergieron a medida que se analizaban los fragmentos de clase de los procesos: formular conjeturas, usar definiciones y demostrar formalmente. Logrando así una caracterización propia de las interacciones que se gestan en la práctica de una profesora de geometría cuando favorece el aprendizaje de la actividad demostrativa.

La elaboración de esta investigación nos volvió sensibles frente a las interacciones que se gestan en el aula, y nos lleva a mirar cuáles de estos patrones se dan en nuestras aulas, frente a los procesos que aquí trabajamos. Además, nos reafirma el gusto por la geometría, en especial por todos aquellos procesos que se involucran en su aprendizaje, quedándonos la expectativa de seguir investigando aspectos relacionados con este tema.

**Algunas preguntas para abordar en otras investigaciones:** Al terminar esta investigación surgen varias preguntas:

¿Cómo son los patrones de interacción en la actividad demostrativa en otra rama de las matemáticas? ¿En qué otra actividad matemática se evidenciarán los patrones de interacción identificados? ¿Qué otros patrones de interacción se identifican en otra actividad matemática? ¿Qué tipo reflexión y análisis se logrará de los futuros docentes con los que se trabaje el material resultado de esta investigación? ¿Cómo guiar el desarrollo del curso Enseñanza y Aprendizaje de la geometría, en el que se usen los resultados de esta investigación, para promover la reflexión y el análisis de la práctica docente?, que esperamos puedan ser resueltas en futuros proyectos.

**Referencias bibliográficas:** Para la realización de la investigación se usaron veintitrés referencias bibliográficas. Algunas de las más relevantes son:

Callejo, M., Llinares, S., & Valls, J. (2007 (b)). E*l uso de videoclips para una práctica reflexiva.* Comunicación en las XIII Jornadas de Aprendizaje y enseñanza de las Matemáticas. Granada.

Camargo L., Perry P., Rojas, C., & Samper C. (2006). *Actividad demostrativa en la formación inicial del profesor de matemáticas.* Bogotá

Camargo L., Echeverry A., Molina O., Perry P., & Samper C. (2009). *Estudio del cuadrilátero de Saccheri como pretexto para la construcción de un sistema axiomático local.* Artículo sometido a consideración de la Revista *Matemáticas: Enseñanza Universitaria.* Bogotá.

Gavilán, J., García, M., & Llinares., S (2007 (a)). *Una perspectiva para el análisis de la práctica del profesor de matemáticas. Implicaciones metodológicas.* En: Enseñanza de las ciencias. 25 (2). 157 – 170.

Llinares, S. (2000) *Intentando comprender la práctica del profesor de matemáticas*. En: DA PONTE, J.P. y SERRAZINA, L. (org.). Educação matemática em Portugal, Espanha e Itália: actas. [Lisboa] : Secção de Educação Matemática da Sociedade Portuguesa de Ciências da Educação, 2000. Pp. 109-132.

Llinares, S. (2007 (a)). *Conocimiento profesional del profesor de matemáticas: Conocimiento, Creencias y Contexto en relación a la noción de función.*

Llinares, S. (2007 (b)) *Formación de profesores de matemáticas. Desarrollando entornos de aprendizaje para relacionar la formación inicial y el desarrollo profesional.* Conferencia invitada en la XIII Jornadas de Aprendizaje y Enseñanza de las Matemáticas. JAEM. Granada. Julio

# INTRODUCCIÓN

Este trabajo surge por la inclinación de las autoras por el estudio de la geometría, a partir de los cursos tomados en la Licenciatura en Matemáticas y la participación en algunas de las actividades realizadas por los docentes responsables de la línea de investigación Aprendizaje y Enseñanza de la Geometría, el interés de aportar al estudio de la educación en geometría y de apoyar la formación inicial de profesores. En esta investigación se analiza la práctica de una profesora en relación a las interacciones que surgen a partir de su gestión, centrada en la actividad demostrativa, en una clase de geometría plana del programa de formación inicial de profesores de matemáticas de la Universidad Pedagógica Nacional, durante el primer semestre del año 2007. Se pretende dar respuesta a una pregunta sobre los aspectos de la práctica del profesor que al ser analizados aportan a la formación en didáctica de la geometría a profesores en formación inicial. Para realizar dicho análisis se observaron los videos correspondientes a todas las secciones de clase del curso en mención y se estudiaron nueve episodios a profundidad.

La presentación de esta investigación está organizada en seis capítulos y una sección de anexos.

El Capítulo 1 está dedicado a la definición y presentación del problema de investigación. En él se incluye la justificación del estudio, la problemática que se quiso abordar, los objetivos planteados, el estado del arte que se elaboró considerando resultados investigativos directamente relacionados con la demostración, la actividad demostrativa, la práctica del profesor de matemáticas y la formación inicial de profesores; finalmente, se presenta una síntesis del diseño investigativo.

El Capítulo 2 provee el marco conceptual, sobre el cual se basa el análisis de la práctica de la profesora. En este capítulo además de definir la práctica del profesor y la actividad demostrativa, se especifican y definen términos como conocimiento profesional del profesor de matemáticas, interacción, actividad, actividad matemática y actividad demostrativa.

En el Capítulo 3, correspondiente al diseño investigativo, se describe el contexto de las clases del curso de Geometría Plana, sobre las cuales se realizó la investigación y las fuentes de investigación; además, las fases que se dieron en el proceso de la investigación y en la obtención de resultados.

En el Capítulo 4 se analiza la práctica de la profesora que guía las clases observadas cuando busca favorecer el aprendizaje de la demostración. Dicho análisis tiene el propósito de presentar y caracterizar patrones de interacción relacionados con la actividad demostrativa, específicos de los procesos: demostrar, definir y conjeturar. Dichos patrones de interacción son definidos, ejemplificados y analizados.

El Capítulo 5 da a conocer los resultados de la investigación, relacionados con el material que servirá de apoyo al curso "Enseñanza y Aprendizaje de la Geometría" y se presenta un informe descriptivo-interpretativo, uno de los materiales construidos y obtenidos como resultado.

El Capítulo 6 se dedica a la presentación de las conclusiones del estudio realizado. Para complementar y sustentar la información que se presenta en los Capítulos 4 y 5, al final de la investigación, después de las referencias bibliográficas, se presenta una sección de anexos, la cual se conforma de las transcripciones de los nueve episodios de clase analizados y de los otros ocho informes descriptivo-interpretativos, diseñados como resultado de la investigación.

Este trabajo es sólo una pequeña fracción del análisis que se puede realizar sobre la práctica del profesor, en particular de un profesor de matemáticas. Se espera que el material resultado de esta investigación no solo sirva de apoyo para el curso "Aprendizaje y Enseñanza de la Geometría" sino para cualquier otro espacio que se interese por analizar la práctica docente de un profesor de matemáticas.

# CAPITULO 1. DEFINICIÓN DEL PROBLEMA

## 1.1 JUSTIFICACIÓN

Dos de los focos de interés en el campo investigativo de la educación matemática, desde hace algunos años, han sido la práctica y el aprendizaje del profesor de matemáticas, puesto que proporcionan información de interés a los programas de formación de profesores, útil en la toma de decisiones sobre el diseño curricular. Una de las sugerencias que han surgido desde este campo investigativo, es la pertinencia de *"desarrollar aproximaciones a la formación de profesores que preparen a los estudiantes para profesor a aprender desde la práctica de enseñar matemáticas"* (Llinares, 2007(b)). Buscando como relacionar la formación inicial con el desarrollo profesional de los profesores de matemáticas en ejercicio, surge éste proyecto de investigación, el cual se centra en caracterizar las interacciones entre una profesora y sus estudiantes, que suceden durante una clase de geometría. Éstas se constituyen en insumo para la reflexión y análisis en la formación inicial de profesores; presuponemos que dicha reflexión y análisis aporta elementos importantes a la formación didáctica y al desarrollo del conocimiento de los futuros maestros, necesarios para desempeñarse en su campo profesional. Como lo señala Llinares (2008), es importante que los estudiantes para profesor construyan su comprensión personal de los componentes del conocimiento profesional a través del análisis de casos de enseñanza. Al relacionar lo que ocurre en el proceso de enseñanza de las matemáticas con un conocimiento teórico de la didáctica, los futuros profesores pueden interpretar y explicar diferentes aspectos de una clase de matemáticas, lo cual puede ser el germen de su conocimiento profesional.

En el plan de estudios de la Licenciatura en Matemáticas de la Universidad Pedagógica Nacional, el cual fue objeto de algunos ajustes en el primer semestre del 2008, se propone un nuevo espacio académico "Enseñanza y Aprendizaje de la Geometría", a cargo del grupo de profesores responsables de la línea de investigación Aprendizaje y Enseñanza de la Geometría $\mathcal{Æ} \cdot \mathcal{G}$, curso que apunta a la formación teórico – práctica en didáctica de la geometría. Para este espacio académico no hay, hasta el momento, suficientes materiales de apoyo que permitan acercar a los estudiantes a la práctica real de la enseñanza de la geometría y a la reflexión teórica sobre dicha práctica. Este hecho se constituye en un problema para el grupo de investigación, teniendo en cuenta que en el momento en que los estudiantes de la licenciatura cursan el espacio académico no han comenzado aún sus prácticas pedagógicas, salvo algunas actividades de práctica inicial limitadas muchas veces a una o dos visitas a una institución educativa. Pero la producción de un material que permita el acercamiento, la reflexión y el análisis de una práctica real requiere de un estudio detallado de la misma, pues no es suficiente con mostrar a los docentes en formación un fragmento de una clase de matemáticas, sino que necesario seleccionar fragmentos de clase identificando los aspectos a observar y determinando el marco teórico desde el cual observar (Callejo, Llinares y Valls, 2007 (b)). La determinación de dicho marco implica hacer un análisis que muestre la complejidad de la práctica real, en la que están inmersos aspectos didácticos interesantes como las interacciones que caracterizan dicha práctica.

Por las razones antes expuestas, en la presente investigación, se llevó a cabo un análisis de la práctica de una profesora, a partir del cual se elaboró un material didáctico de apoyo para el espacio académico "Enseñanza y Aprendizaje de la Geometría" con el cual se espera apoyar procesos de estudio en relación con la enseñanza y el aprendizaje de la geometría. Creemos que la preparación de este material apunta a una de las necesidades sugeridas por Godino (2002), de desarrollar trabajos de investigación centrados en el diseño de material dirigido a la formación didáctica de los maestros; en nuestro caso, en la formación en didáctica de la geometría.

Nuestro estudio se centró en las interacciones relacionadas con la intención de la profesora de favorecer la actividad demostrativa. El factor principal por el cual nos centramos en dicha actividad, es que ésta es el centro de interés de la línea de investigación Aprendizaje y Enseñanza de la Geometría $\mathcal{Æ} \cdot \mathcal{G}$. Además porque, respecto al aprendizaje de la demostración, según Schoenfeld (citado por Godino y Recio, 2001) la demostración hace parte de la actividad matemática y por tanto es importante incorporarla en los currículos, como esencia del hacer, comunicar y registrar matemáticas; contribuye al desarrollo de competencias mentales, tales como abstraer, generalizar, comparar, sintetizar, particularizar y generalizar (Ortiz y Jimenez, 2006). Godino y Recio (2001), señalan que la comprensión y la suficiencia argumentativa que se necesita al realizar una demostración requiere del dominio de una racionalidad y un estado específico de los conocimientos. Es por ello que consideramos importante aportar unos registros de una práctica docente en los que se pueda analizar las interacciones que subyacen a la actividad demostrativa en un curso de Geometría Plana. Este material puede ser usado en el curso "Enseñanza y Aprendizaje de la Geometría" para que los futuros profesores de matemáticas ganen herramientas didácticas que permitan integrar en su desempeño profesional, la demostración como elemento importante del estudio de la geometría.

En síntesis, el problema que se aborda en la presente investigación, es la carencia o escasez de vías de acercamiento a la práctica del profesor con las cuales poder iniciar una reflexión situada sobre el aprendizaje de la demostración en los primeros cursos de la licenciatura. La formulación de este problema nos lleva a plantear la siguiente pregunta de investigación:

> *¿Qué aspectos de la interacción que se gesta en la práctica del profesor de matemáticas son susceptibles de reflexión y análisis por parte de profesores en formación inicial, de la Licenciatura en Matemáticas de la Universidad Pedagógica Nacional, como aporte a su formación en didáctica de la geometría, a partir de la observación y análisis de una práctica real obtenida de clases de Geometría Plana?*

## 1.2 OBJETIVOS

### 1.2.1 Objetivo General

Caracterizar las interacciones que se gestan en la práctica de un profesor de matemáticas en el aula de geometría con el fin de producir un material didáctico que apoye el curso "Enseñanza y Aprendizaje de la Geometría".

### 1.2.2 Objetivos Específicos

- Categorizar y describir la interacción que se gesta en la práctica del profesor de matemáticas, desde el análisis de las clases.
- Realizar video-clips en los que se evidencien los elementos que caracterizan la práctica del profesor de la clase de geometría.
- Diseñar un informe en el que se evidencie el análisis realizado a cada uno de los video-clips.

## 1.3 ESTADO DEL ARTE

El problema planteado nos llevó a enfocar nuestra investigación en buscar cómo caracterizar la práctica profesional de un profesor de geometría, dentro de una microcultura del aula cuya actividad matemática es la demostrativa. Por ello, nos ubicamos en uno de los centros de interés de la investigación en Educación Matemática, durante las últimas décadas, que busca comprender la práctica del profesor de matemáticas en el aula, para obtener información que contribuya en la toma de decisiones de los programas de formación de docentes (Llinares, 2007 (b), Gavilán, García, Llinares, 2007(b)). En este sentido, el recorrido bibliográfico realizado se centra en investigaciones relacionadas con la búsqueda de formas de caracterizar la práctica del profesor de matemáticas, particularmente cuando ésta se dirige a la actividad demostrativa en el aula.

Dividimos la bibliografía consultada en dos grupos. Inicialmente nos referimos a uno de los trabajos de Godino y Recio (2001) en el que caracterizan la demostración, así como a algunos de los trabajos realizados por Camargo, Perry y Samper (2005), Camargo, Perry, Rojas y Samper (2006) y Camargo, Echeverry, Molina, Perry y Samper (2008 y 2009), relacionados con la actividad demostrativa y aspectos de una clase que la favorecen. El segundo grupo lo constituyen los trabajos realizados por Llinares (2000, 2007(a), 2007(b) y 2008), Callejo, Llinares y Valls (2006, 2007(a), 2007(b), 2008), Gavilán, García y Llinares (2007 (a) y 2007(b)) y Llinares, Roig y Valls (2008), relacionados con la práctica del profesor de matemáticas y la formación inicial de docentes, el trabajo de Dindyal, Martin, Soucy y Wallace (2005), relacionado con las acciones de los estudiantes y los profesores en la enseñanza y el aprendizaje de la demostración y el trabajo de Sinclair (2003) que menciona algunas categorías para analizar la gestión del profesor.

### 1.3.1 Demostración, actividad demostrativa y aspectos de una clase que favorecen la actividad demostrativa

La bibliografía consultada proviene principalmente de investigaciones y reportes de investigación del grupo de investigación Aprendizaje y Enseñanza de la Geometría $\mathcal{Æ}\cdot\mathcal{G}$ de la Universidad Pedagógica Nacional a la cual está inscrito nuestro proyecto. Sin embargo, inicialmente hacemos un recuento de diferentes acepciones de la demostración presentadas por Godino y Recio (2001).

En una investigación relacionada con el aprendizaje de la demostración, Godino y Recio (2001) exponen como problemática el bajo nivel de los estudiantes en la comprensión y elaboración de demostraciones en el contexto español, a pesar del papel central que en diversas oportunidades se le ha otorgado a la enseñanza y el aprendizaje de la demostración en el aula. Señalan la importancia de hacer una revisión teórica y estudios sistémicos de los diferentes significados de la demostración desde diferentes contextos institucionales para establecer un acercamiento a la demostración, desde la comunidad de educadores en matemáticas. Consideran que esta revisión teórica aporta interpretaciones para los diferentes problemas de la enseñanza y aprendizaje de la demostración en el aula y da espacio a la elaboración de propuestas de intervención didáctica.

En su investigación, Godino y Recio (2001) exponen diferentes acepciones de la demostración a partir de diversos contextos. Los autores citan a Wider (1998), para exponer que los elementos que constituyen una demostración, varían de una cultura a otra y también varían de una época a otra. Mencionan que la demostración adquiere diversos significados según el contexto institucional. Por ejemplo, en el contexto de la lógica y de los fundamentos de la matemática, la demostración es un proceso en el que se parte de reglas lógicas para lograr la validez de un teorema; dicho teorema aparece como una consecuencia lógica de una premisa dada; desde éste significado, la práctica de donde emerge la demostración es la *práctica argumentativa analítica formal.*

En el contexto de la comunidad de educación matemática, la demostración se define por comparación con términos como explicación, argumentación y prueba. Por ejemplo, para Balacheff (citado por Godino y Recio, 2001) la explicación y la prueba tienen significados diferentes: la primera, es un discurso que pretende dar a entender el carácter de verdad, adquirido por una persona, de una proposición o de un resultado, mientras que la segunda, se refiere, a las explicaciones aceptadas por una comunidad en un momento dado. Duval difiere del uso que le da a la explicación Balacheff, ya que para él, en la explicación los enunciados tienen una intensión descriptiva de un fenómeno, resultado o comportamiento. Ambos autores adoptan un significado similar del término demostración, el cual hace referencia a una secuencia de enunciados según reglas determinadas y cuyo objeto, para Duval, es determinar la verdad, obedeciendo a criterios de validez. Godino y Recio (2001) por su parte, adoptan el término demostración, para referirse al objeto que emerge de un sistema de argumentos aceptados en una comunidad o por una persona para justificar o validar el carácter verdadero de un enunciado, su consistencia o la eficacia de una acción.

En el contexto de la enseñanza primaria y secundaria, la demostración está asociada a argumentaciones que establecen enunciados verdaderos y con frecuencia no son deductivas. Por lo que en este contexto la demostración se asocia principalmente con los términos explicación y argumentación.

Godino y Recio (2001) identifican algunos rasgos comunes en las diferentes ideas de demostración que se dan en los contextos estudiados, lo que permite hablar de una idea de demostración en general, como el proceso de validación de proposiciones matemáticas. Teniendo en cuenta que la demostración hace parte del quehacer matemático, es importante que la enseñanza lleve a los estudiantes al control y dominio de las diferentes prácticas argumentativas, por lo que puede incorporarse en los currículos de todos los niveles; esfuerzo que llevaría a los estudiantes a adquirir competencias para hacer, comunicar y registrar las matemáticas.

Nosotras nos posicionamos en un contexto universitario donde se trabaja una porción de un sistema axiomático y se espera que se hagan demostraciones deductivas, cuyo papel no es exclusivamente encontrar la validez de enunciados, sino el de inmiscuirse en un proceso de carácter organizativo, como una manera de aprender a demostrar al interior de un sistema axiomático deductivo.

Los proyectos de investigación del grupo $\mathcal{Æ} \cdot \mathcal{G}$ se han centrado en un contexto universitario en el que se busca que los estudiantes aprendan a hacer demostraciones deductivas, enmarcadas en un sistema axiomático local.

En Camargo, Perry, Rojas y Samper (2006) se presenta un panorama sobre la actividad demostrativa, señalando que en los currículos escolares casi que ha desaparecido. Desde la perspectiva de las matemáticas, el grupo considera que eliminar la actividad de demostración implica desconocer una actividad fundamental o característica esencial de las matemáticas. Desde la perspectiva de la didáctica de las matemáticas, esta eliminación implica desconocer un aspecto de la formación matemática de un individuo, que tiene que ver con la forma como se validan las ideas. Las autoras exponen que la actividad demostrativa en la educación matemática tiene dos propósitos: proporcionar comprensión y conocimiento, y ser un recurso para la validación. Señalan que esta actividad se desarrolla a partir de dos procesos. El primer proceso involucra acciones como visualizar, explorar, analizar, conjeturar y verificar, las cuales llevan a conclusiones que se mantienen como tentativas hasta que son justificadas; su realización tiene como doble propósito, generar la necesidad de justificar y proveer elementos para satisfacer dicha necesidad; el segundo proceso involucra acciones propias de la práctica de justificar como explicar, probar y demostrar formalmente; subyacente a estos procesos está inmersa la argumentación.
En la *Tabla 1* se define cada una de las acciones señaladas por las autoras. De dichas acciones, asumimos en el marco teórico de esta investigación las definiciones de formular conjeturas o conjeturación y de demostrar formalmente como son presentadas por las autoras, las cuales asumiremos como procesos.

| | | |
|---|---|---|
| *Proceso que conlleva a una conjetura* | Visualizar | Mirar, detectar, percibir o evocar propiedades geométricas de una representación gráfica. |
| | Explorar | Investigar sobre una representación gráfica, en la que se descubren propiedades o relaciones y se genera comprensión sobre la situación relacionada con el problema. |
| | Formular conjeturas | Establecer enunciados, de los que se tiene seguridad, expresados en forma de condicional. |
| | Verificar | Poner a prueba una conjetura establecida, mediante acciones visibles sobre una representación. |
| *Proceso que conlleva a una justificación* | Explicar | Justificar empíricamente, basado en una representación gráfica, para mostrar lo que en ella se ve. |
| | Probar | Justificar parcialmente en la que se explicita afirmaciones y razones, referidas a propiedades geométricas generales. |
| | Demostrar formalmente | Justificar deductivamente, explicitando afirmaciones y sus respectivas razones, desde un sistema axiomático. Encadenar proposiciones desde la información dada, hasta aquella que se desea demostrar; tiene como propósito incorporar un hecho matemático al sistema axiomático. |

Tabla 1. *Acciones de la actividad demostrativa*

En Camargo, Perry, Rojas y Samper (2006) y en Camargo, Echeverry, Molina, Perry y Samper (2009), los autores reportan que lograr que un estudiante demuestre formalmente no es una tarea inmediata ni espontánea, sino que se requiere de un proceso mediado por el profesor que incluye experiencias empíricas que comprometan a los estudiantes con la búsqueda de la verdad y con la formulación de conjeturas. Ellos explican que para comprometer a los estudiantes con la actividad demostrativa, desde el inicio de un tema se les involucra en la resolución de problemas geométricos, buscando que ellos exploren, descubran, conjeturen y realicen justificaciones informales, apoyados por la geometría dinámica, con la finalidad de que puedan participar activamente en la introducción de nuevos elementos al sistema axiomático que se ha construido hasta ese momento en la clase. Además de referirse a las acciones propias de la actividad demostrativa identifican otras acciones que comprometen a los estudiantes con dicha actividad, asociadas con la gestión que hace el profesor. Entre ellas están: pedir a los estudiantes que presenten sus producciones ante la comunidad de clase para revisarlas en comunidad y concretarlas en ideas que van a ser objeto de estudio para formar el sistema axiomático, responder preguntas que buscan ganar comprensión sobre los objetos geométricos involucrados, validar o rechazar conjeturas, pedir o proponer contraejemplos cuando se rechaza una conjetura, institucionalizar la definición de un término, comparar enunciados de conjeturas para determinar si se refieren a un mismo objeto geométrico, entre otras. Como miembro experimentado de la clase encamina dichas acciones a través de diversas estrategias de gestión. Una de ellas es una discusión en forma de diálogo que permite la construcción conjunta de significados, denominada por los autores como conversación instruccional.

En Camargo, Echeverry, Molina, Perry & Samper (2008) se reportan otras estrategias de gestión[1] que se dan en la clase de geometría, con una caracterización de las mismas desde el cumplimento de normas sociales y normas socio-matemáticas; las primeras están relacionadas con la participación de los estudiantes en la actividad matemática, y las segundas están relacionadas con la validación del conocimiento matemático que tiene lugar en la clase. La estrategia de gestión "Trabajo de los estudiantes" se asocia con la acción y el proceso general del desarrollo de la clase cuando se plantea una tarea y la clase se involucra en la solución de dichas tareas (e.g., el abordar las tareas ya sea de manera individual o en grupo disponiendo de la geometría dinámica, la recolección de información de los resultados a los que van llegando los estudiantes, por parte de la profesora, para animarlos a exponer públicamente sus conjeturas o propuestas, la producción grupal de una construcción conjunta a través del diálogo para resolver una situación problema). La estrategia de gestión Discusión matemática se relaciona con la socialización de las

[1] Los autores denominan a éstas estrategias con el término "interacciones"; nosotras lo llamamos estrategias de gestión de la clase para evitar confusión en la terminología.

producciones de los estudiantes para guiar a la comunidad a la construcción de significados compartidos y a la organización colectiva de ideas obtenidas del trabajo de los estudiantes para producir demostraciones. En esta estrategia de gestión el papel del profesor de la clase es clave en la gestión de la socialización y en la determinación de la secuencia en que se revisan las conjeturas. En la revisión de las conjeturas, por ejemplo, el profesor tiene en cuenta dos criterios: "el examen de una conjetura no debe quitarle sentido al examen de otra, y tal examen debe respetar la organización teórica que permite construir sobre unos elementos para obtener otros" (Camargo, Echeverry, Molina, Perry y Samper, 2008).

Aunque en Camargo, Echeverry, Molina, Perry y Samper (2008) se define la discusión matemática, en Camargo, Echeverry Molina, Perry y Samper (2009) se avanza en su caracterización, explicitando que es un diálogo, que hay un tema matemático, que se enfoca en la presentación de propuestas. Sin embargo las definiciones no expresan lo suficiente para caracterizar la interacción en sí y los autores no explicitan cómo es la interacción que se gesta en la clase de geometría plana al favorecer el aprendizaje de la actividad demostrativa. Así mismo, aunque el papel del profesor en el intercambio conversacional se considera fundamental, no se describe cuál es específicamente el papel del profesor que permite que los estudiantes tengan un rol activo e importante, ya que estos aspectos no han sido objeto de un estudio detallado. Por ello, los profesores responsables de la línea de investigación $\mathcal{Æ} \cdot \mathcal{G}$ están interesados en que se profundice específicamente en la caracterización de interacciones, trabajo que requiere determinar cuál es la práctica del profesor que efectivamente conlleva al ambiente de la clase de geometría plana, en la que se favorece el aprendizaje de la demostración. Para caracterizar la práctica, revisamos otros referentes, asociados con la práctica del profesor de matemáticas como se muestra a continuación.

### 1.3.2 Práctica del profesor de matemáticas y formación inicial de profesores

La revisión de la literatura para la producción de esta sección del estado del arte, proviene principalmente de los trabajos e investigaciones realizados por Llinares, Gavilán, García, Callejo, Roig y Valls quienes han buscado describir, comprender e interpretar la práctica del profesor estudiando el conocimiento profesional del profesor de matemáticas, la práctica profesional del profesor de matemáticas y la formación inicial del profesor de matemáticas. Uno de los motivos por el cual se centran en la caracterización de la práctica del profesor, es que para ellos la práctica del profesor tiene reflejo en el aprendizaje de los estudiantes (Gavilán, García & Llinares, 2007 (a)) y por tanto, aporta información importante para la toma de decisiones en los programas de formación inicial (Llinares, 2007(b)).

El conocimiento profesional se ha estudiado desde dos enfoques: cognitivo, centrado en las creencias, concepciones y conocimientos individuales, matemáticos, pedagógicos, psicológicos o didácticos del profesor (Llinares, 2000, 2007(a)) y sociocultural, centrado en la práctica del profesor, la cual se compone de la gestión de los procesos de enseñanza y de aprendizaje, los instrumentos empleados por el profesor, las representaciones, y las interacciones que emergen en el aula. En nuestra investigación nos centraremos en esta última, ya que es el aspecto que se destaca en los datos experimentales. En particular, la práctica es determinada por las condiciones del medio a través del cual el estudiante tiene la oportunidad de aprender (Gavilán, García & Llinares, 2007 (a)).

Llinares (2000), Callejo, Llinares, Valls (2008), Llinares, Roig y Valls (2008) conciben la práctica como el conjunto de actividades que se generan al realizar diferentes tareas que definen la enseñanza de las matemáticas junto con las justificaciones dadas por el profesor. Según los autores, dichas tareas que realiza el profesor y componen el conjunto de actividades o sistemas de actividad están asociadas con: (i) seleccionar y diseñar tareas matemáticas adecuadas, (ii) interpretar y analizar el pensamiento matemático de los estudiantes e (iii) iniciar y guiar el discurso matemático y gestionar las interacciones matemáticas en el aula. La práctica también se concibe como el uso que el profesor le da a su conocimiento en la resolución de situaciones problémicas generadas en su actividad profesional (Callejo, Llinares y Valls, 2008). Esta última concepción de la práctica docente la asumimos en nuestra investigación para definir la práctica del profesor y por lo que nos centramos en la actividad *Iniciar y guiar el discurso matemático y gestionar las interacciones matemáticas en el aula*, como una manera de dar cuenta de la práctica docente.

Como ya se dijo, en esta investigación nos centramos en la práctica, ya que como señalan Llinares (2008), Callejo, Llinares y Valls (2007 (b)), ésta se debe comprender, aprender, analizar y reflexionar entre profesores, como un medio de construcción del conocimiento profesional y de desarrollo profesional, y para que el estudiante para profesor desarrolle competencias en: (*i*) seleccionar y diseñar tareas adecuadas, (*ii*) interpretar y analizar el pensamiento matemático de los estudiantes e (*iii*) iniciar y guiar el discurso matemático y (*iv*) gestionar las interacciones matemáticas en el aula. Estos cuatro aspectos constituyen los sistemas de actividades que articulan la enseñanza de las matemáticas como una práctica.

Una propuesta metodológica para analizar la práctica es sugerida por Callejo, Llinares y Valls (2007 (b)), quienes proponen cuatro etapas que determinan un ciclo de reflexión. La primera etapa se centra en identificar un foco de atención, el cual puede ser la gestión del profesor en la resolución de uno o varios problemas planteados y una pregunta; la segunda etapa, se asocia con la planificación del desarrollo de la clase que va a ser objeto de observación. La tercera etapa, es denominada "Observación", en ella se seleccionan los fragmentos de clase que mejor ilustren el foco al cual se quiere dirigir la atención y se determina el marco teórico desde el cual se va a hacer la observación. La cuarta etapa es denominada *Debate,* la cual consiste en una discusión formal sobre el fragmento de clase observada. En el diseño de nuestro proyecto de investigación, nos centramos en la tercera etapa, como se observa en el diseño investigativo.

Usualmente, de la etapa tres se obtienen video-clips, los cuales, al ser evidencias de la práctica real, que recoge momentos de enseñanza de las matemáticas, permiten la reflexión y caracterización de los procesos de enseñanza y de aprendizaje, como un paso para mejorar las prácticas (Llinares, 2007(b)). Estos materiales, permiten desarrollar, en los profesores en formación, las siguientes acciones (Llinares, 2007(b)): observar, analizar, predecir, y generar críticas en relación a la sección de clase.

Teniendo en cuenta que el estudio de la práctica del profesor pretende comprenderla, analizarla y describirla, Gavilán, García y Llinares (2007 (a)) introducen el concepto de viñeta, como un informe descriptivo de la práctica de enseñar matemáticas, realizado por el investigador, que se obtiene a partir de los datos relacionados con dicha práctica vinculando la evidencia empírica con la interpretación realizada. Estos autores, asumen que "las viñetas" posibilitan la integración de aspectos socioculturales y cognitivos y permiten considerar conjuntamente la enseñanza y el aprendizaje. En la presente investigación tomamos la idea de viñeta para diseñar los informes descriptivo-interpretativos; sin embargo, estos informes no los llamamos viñetas, ya que éstas son obtenidas de datos que provienen de diversas fuentes y fases de la práctica del profesor, como la de planificación de la lección, la gestión desarrollada en el aula y la reflexión posterior, y los informes que presentamos sólo son obtenidos de datos de la fase de gestión, a partir de las siguientes fuentes: los videos de clase, las transcripciones de los mismos y la descripción de los segmentos de enseñanza. Los video-clips y los informes descriptivo-interpretativos se constituyen en resultados que se ofrecen para el estudio de la práctica del profesor.

Además de los trabajos que recogen el análisis de la práctica hecho por Llinares y sus colaboradores, las dos investigaciones que presentamos a continuación, nos dieron luces para determinar la codificación que permitió el análisis y la caracterización de la práctica del profesor, en relación a las interacciones que se gestan alrededor de la actividad demostrativa, ya que ambas presentan y describen acciones relacionadas con la gestión del profesor; además, en una de éstas investigaciones se relacionan dichas acciones con las del estudiante.

Sinclair (2003) categoriza estrategias de intervención por parte del profesor, entre las que están: gestionar, revisar, reforzar, invitar, dar pistas, enculturar, modelar, anticipar, elogiar, arrastrar, entre otras. Con base en estas acciones Sinclair identifica tres estilos de enseñanza: (i) mostrar y decir, (ii) liderar o conducir y (iii) guiar o pastorear. Estos tres estilos los asocia con tres definiciones que propone Towers (1999, citada en Sinclair 2003) en relación a las intervenciones del profesor en el aula: pastorear - guiar, invitar y arrastrar. Pastoreo, se describe como las intervenciones que llevan a los estudiantes a la comprensión a través de un impulso y de la formulación de preguntas sutiles; invitar, es la sugerencia de un camino potencial y fructífero de exploración, más amplio que dar pistas. Y arrastrar, es encaminar la atención de los estudiantes a algo que los confunde, obligándolos a reevaluar lo que están haciendo.

Aunque Sinclair (2003) y Towers (1999) dan luces de cómo son la intervenciones del profesor en el aula, las categorías que proponen principalmente dan cuenta de la gestión del profesor y no de las interacciones que emergen de la práctica del profesor; además observamos que las estrategias de intervención que los autores proponen son muy generales, pues éstas se adaptan a cualquier clase de matemáticas o inclusive a una clase de otra área.

Como otra manera de dar cuenta de la práctica del profesor, Martin, Soucy, Wallace y Dindyal (2005), estudiaron las intervenciones que se dan en el aula de matemáticas, en relación a la demostración. Para ello analizaron las acciones del profesor y de los estudiantes, resaltando el discurso predominante para identificar sobre qué eventos se da el aprendizaje de la demostración. Como acciones del profesor identifican: seleccionar preguntas (planear actividades o dirigir actividades), parafrasear (repetir o decir de otro modo los comentarios o preguntas de los estudiantes), pedir explicación y razonamiento (dirigirse a los estudiantes para ellos propicien una respuesta explicativa o una información), modelar demostraciones y relatar técnicas, evaluar las respuestas de los estudiantes (analizar implícita o explícitamente el razonamiento del estudiante) y valorar ideas de los estudiantes (escuchar y seguir las ideas del estudiante). Como acciones de los estudiantes se identifican: hacer conjeturas (hacer preguntas sobre relaciones), proporcionar respuestas, conclusiones (responder al requerimiento de información por parte del profesor), proporcionar justificaciones (justificar o proveer argumentos para otras relaciones), usar diagramas (representar para identificar relaciones e identificar razonamientos), evaluar argumentos (evaluar su propio argumento o el de otros).

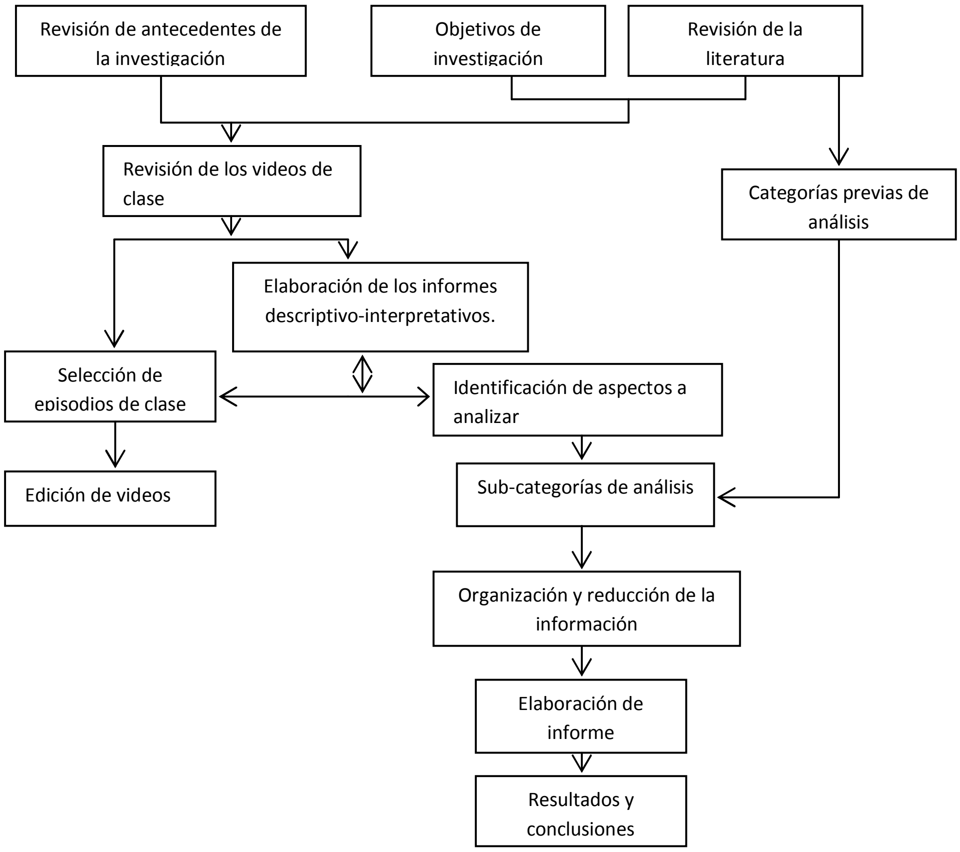
Aunque Martin, Soucy, Dindyal y Wallace (2005) identifican que las acciones de los estudiantes están relacionadas con la práctica del profesor, ellos no muestran cómo es dicha relación, ni cómo o cuáles son las interacciones que conllevan a que las acciones del profesor incidan en las de los estudiantes; además, las acciones que ellos proponen tanto del profesor, como de los estudiantes, siguen siendo muy generales, pues la mayoría están en términos de la gestión que se puede evidenciar en otras clases, que no son específicas de las matemáticas. Sin embargo, el estudio realizado por Martin, Soucy, Wallace y Dindyal (2005) nos dio luces para describir las interacciones que hemos categorizado *gestión comunicativa*.

A partir de la revisión de la literatura observamos que aún falta estudiar la práctica del profesor en términos de las interacciones que se gestan entre profesor y estudiantes, en un contexto específico, cuando se favorece el aprendizaje de la actividad demostrativa.

## 1.4 SÍNTESIS DEL DISEÑO INVESTIGATIVO

El análisis realizado en la investigación, es de tipo cualitativo, centrado en la descripción - interpretación de las interacciones que se llevan a cabo en la práctica de un profesor de matemáticas, cuando intenta favorecer la actividad demostrativa en geometría. Para abordar el trabajo se tomaron como unidades de análisis episodios de una clase de geometría plana (I semestre del año 2007) de la Universidad Pedagógica Nacional. La clase consistió de 47 sesiones y a ellas asistieron 21 estudiantes. El proceso de análisis y elaboración del material, resultado de la presente investigación, se llevó a cabo en siete fases, las cuales no se desarrollaron de forma secuencial, ya que a medida que se iba avanzando en el trabajo, se adelantaban dos o tres fases al mismo tiempo. Las siete fases que se describen en el capítulo del diseño investigativo son: selección del material, primer ejercicio de codificación, reducción del material, segundo ejercicio de codificación, codificación final, elaboración de los informes descriptivo-interpretativos, edición de videos.

La ruta metodológica que se siguió en el desarrollo de esta investigación es presentada en el *Esquema 1*, en la cual se observa que partimos de unos antecedentes de investigación, unos objetivos y de la revisión de la literatura, para seleccionar episodios de clase e identificar aspectos a analizar de la práctica del profesor. Se construyeron unas sub-categorías de análisis, se organizó y redujo la información, elaborar el documento de investigación, escribir los resultados y conclusiones, editar videos y elaborar los informes descriptivo-interpretativos.




Esquema1. *Ruta metodológica*

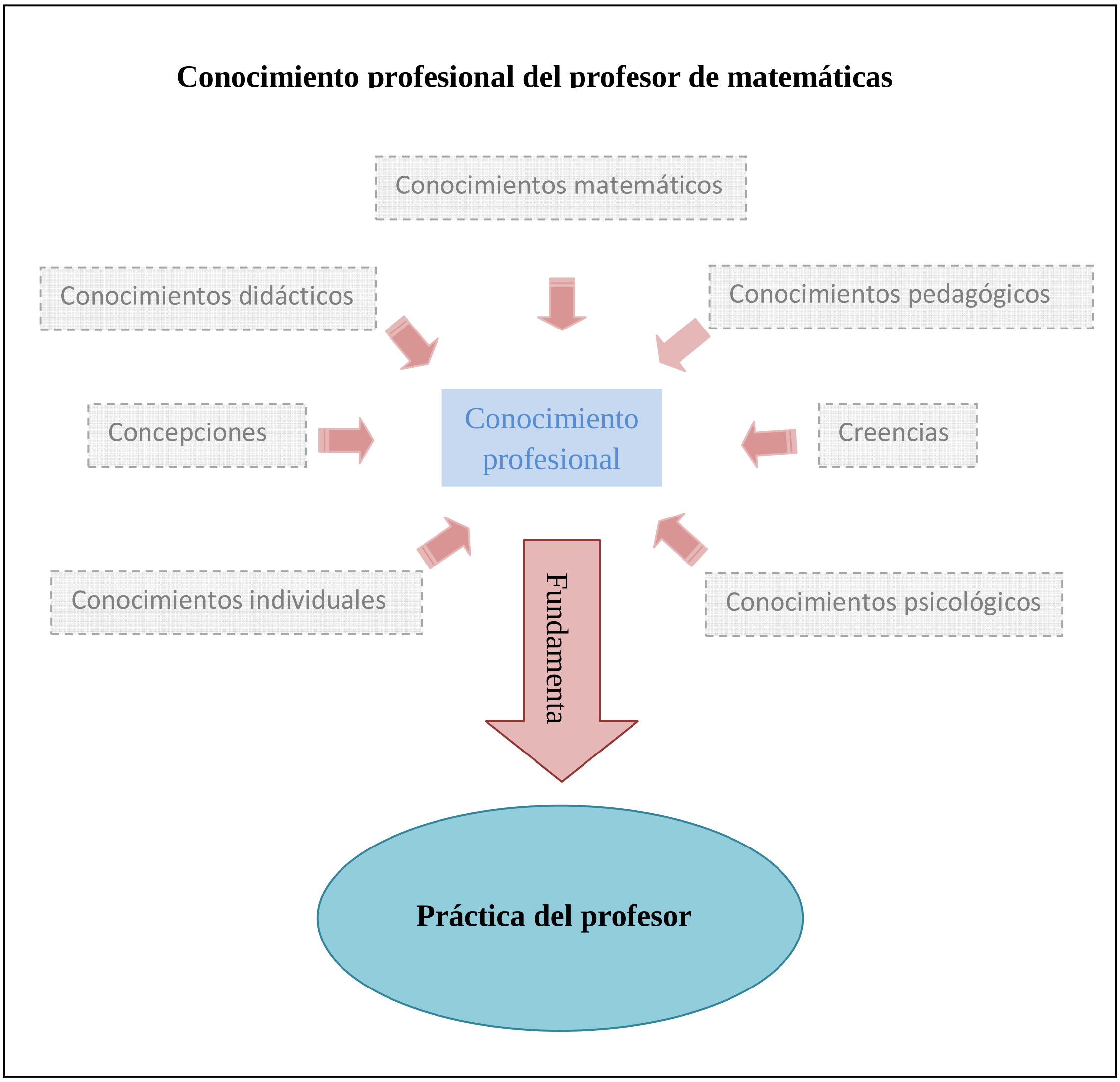
# CAPÍTULO 2. MARCO TEÓRICO

El realizar una investigación que busca acercar a los docentes en formación inicial a la práctica profesional del profesor de matemáticas desde la reflexión y el análisis que ellos puedan hacer de dicha práctica, nos ubica en el campo del conocimiento profesional, y nos lleva a definir la práctica del profesor y a reconocer qué aspectos caracterizan dicha práctica, para determinar en cuál de ellos centrarnos. Seleccionamos para nuestro análisis, las interacciones que se gestan en el aula en una actividad matemática específica. A continuación se presenta el marco conceptual, en el cual se basa el análisis que se realiza en la presente investigación.

## 2.1 CONOCIMIENTO PROFESIONAL DEL PROFESOR DE MATEMÁTICAS

El conocimiento del profesor se compone de creencias, concepciones y conocimientos individuales, matemáticos, pedagógicos, psicológicos o didácticos del profesor (Llinares, 2000, 2007(a)) y fundamenta las decisiones del profesor en situaciones de enseñanza de nociones matemáticas (García, 1997 referenciado en Llinares, 2000). Aunque el conocimiento del profesor es estudiado desde dos perspectivas, cognitiva y sociocultural, la práctica del profesor se estudia desde la perspectiva sociocultural; ya que el profesor participa en la práctica social de enseñar matemáticas y esta perspectiva permite estudiar las regularidades y la naturaleza de las interacciones que se generan en el proceso de enseñanza – aprendizaje y como dichas interacciones permiten organizar el contenido matemático; como una manera de dar cuenta de la gestión del profesor en relación al proceso de enseñanza – aprendizaje (Llinares, 2000).

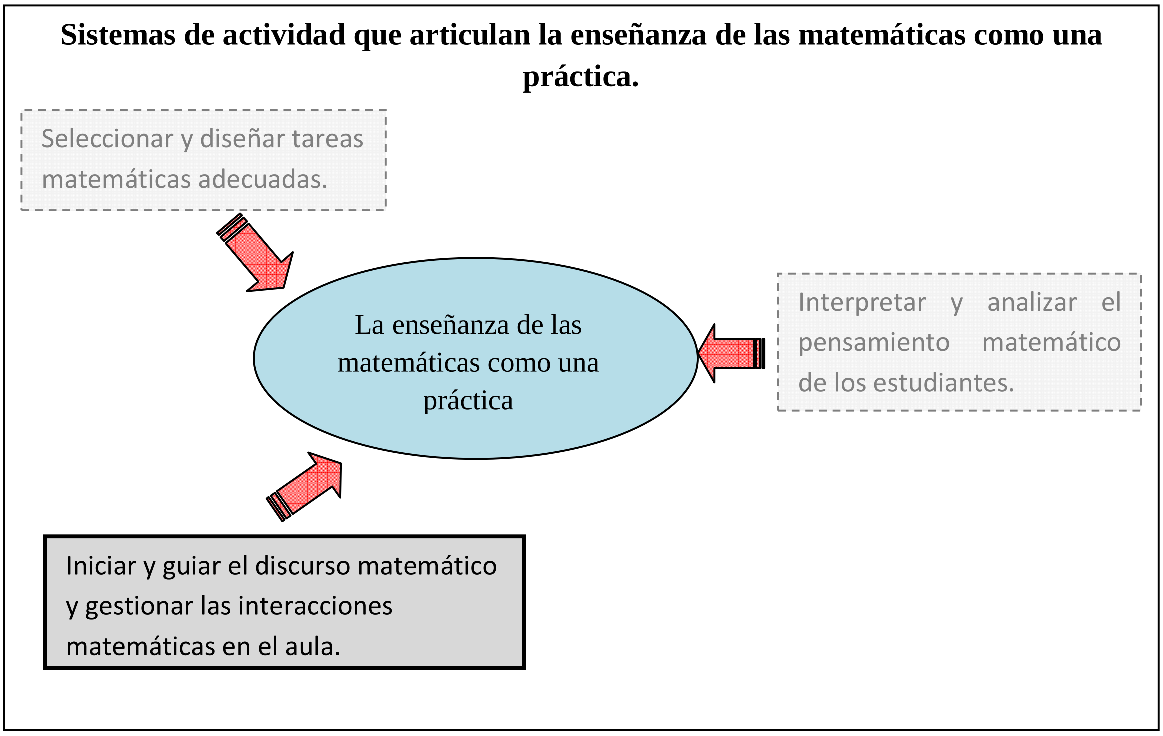
El Esquema 2 presenta el conocimiento del profesor como el conjunto de elementos teóricos y empíricos que fundamentan la práctica del profesor.




Esquema 2. *Conocimiento profesional del profesor de matemáticas*

## 2.2 LA PRÁCTICA DEL PROFESOR

En concordancia con Llinares, Callejo, y Valls (2008) definimos la práctica del profesor como "lo que el profesor hace con lo que conoce; es decir, el uso del conocimiento en la resolución de las situaciones problémicas generadas en su actividad profesional**"** de la cual se generan sistemas de actividades relacionadas con las diferentes tareas de enseñanza de las matemáticas en el aula y las justificaciones que el profesor realiza. De los sistemas de actividad mencionados por los autores citados, y por Llinares, Roig y Valls (2008); descritos en el estado del arte, centramos nuestra investigación en el sistema de actividad denominado *Iniciar y guiar el discurso matemático y gestionar las interacciones matemáticas en el aula* (ver Esquema 3), el cual aporta al conocimiento sobre la enseñanza de los docentes en formación inicial, puesto que uno de los objetivos de este sistema de actividad es que los estudiantes para profesor aprendan a desarrollar procesos interpretativos, en los que adquieran la capacidad de identificar aspectos y conductas en el aula que influyen en el desarrollo de una competencia matemática, y porque consideramos que el desarrollo del pensamiento matemático se media por la comunicación y las interacciones que se logran en el aula, en relación a la actividad matemática que se genera; esta decisión no significa que demos menos importancia a las otras actividades relacionadas con la práctica docente, ya que todas en conjunto articulan la enseñanza de las matemáticas como una práctica.




Esquema 3[2]. *Sistemas de actividad que articula la enseñanza de las matemáticas como una práctica.*

[2] Este esquema es presentado por Llinares, Callejo, Valls (2008) y por Llinares, Roig, Valls (2008).

Gavilán, García, y Llinares (2007 (b)) indican que el análisis de la práctica del profesor debe considerar la manera en la que parece potenciar la construcción de conocimiento matemático en sus estudiantes y precisamente una de las maneras de potenciar dicho conocimiento es a través de las interacciones que se generan en el aula. La complejidad de un análisis de tal naturaleza nos obliga a restringirnos a este ámbito de indagación.

El medio por excelencia para analizar la práctica del profesor es el aula de matemáticas, entendida como una microcultura en la que los significados se generan a través de la interacción entre las actividades que comparten profesor y estudiantes y una tarea matemática; en el aula, se puede observar la acción del profesor en relación con la tarea o el problema propuesto y la dirección de las actividades de los estudiantes en el contexto de aula; esta relación es denominada *gestión del proceso de enseñanza*. En la gestión del proceso de enseñanza unas tareas del profesor son generales y otras específicas del contenido matemático.

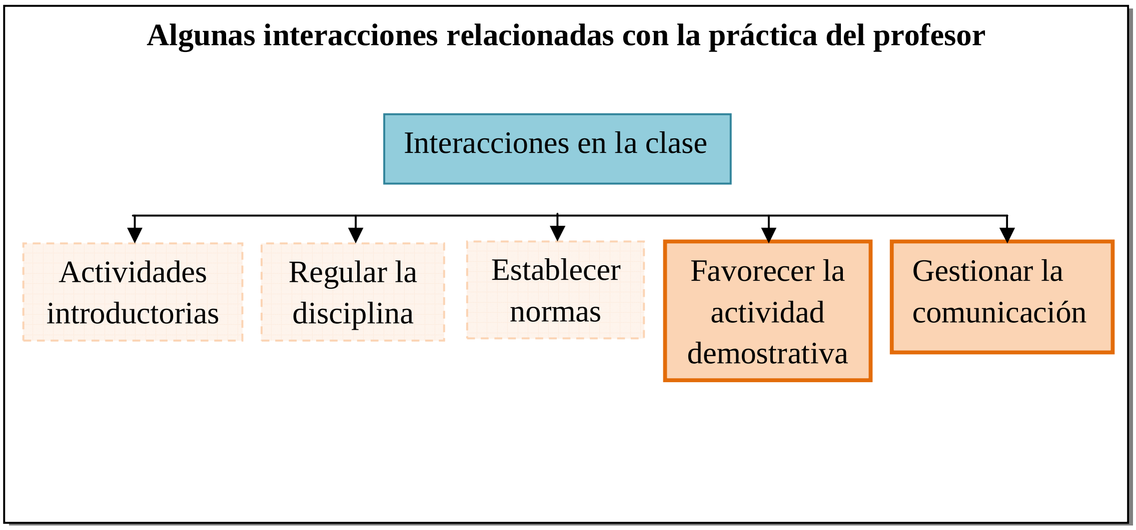
### 2.2.1 Interacción

Al identificar aspectos de la práctica del profesor que pueden tener relevancia teórica debido a su capacidad explicativa, tratar de dar cuenta de lo que sucede en el aula como un espacio socio-cultural e identificar el papel del profesor en el desarrollo de dicha práctica matemática, decidimos observar las regularidades y la naturaleza de las interacciones que gestiona el docente. Con base en la definición de Llinares, Callejo y Valls (2000, 2007) y revisando otras definiciones de diccionario[3], entendemos la interacción, como la acción comunicativa que se ejerce de forma recíproca entre dos o más personas; su importancia es justificada desde las ideas teóricas que consideran que el desarrollo del pensamiento está mediado por el discurso social.

En concordancia con Llinares (2000), las diferentes interacciones que se generan durante el proceso de enseñanza aprendizaje permiten estudiar el papel del profesor en la constitución de unas determinadas prácticas matemáticas en el aula. Entre ellas están: actividades introductorias, regular la disciplina, establecer normas, favorecer la actividad demostrativa,

[3] Diccionario de la Real Academia Española.

gestionar la comunicación (ver Esquema 4). En nuestra investigación, priorizamos interacciones que surgen en la clase de geometría plana y son guiadas, gestionadas y muchas veces iniciadas por la profesora, en las que se comunican ideas y, se evalúan y producen argumentos matemáticos. En otras palabras, decidimos enfocarnos en aquellas interacciones que se pueden relacionar de manera específica con la intención de favorecer la actividad demostrativa. Para poder investigar estas interacciones, dentro de los episodios de clase, es necesario mirar el discurso que se genera (Tami et al, 2005), ya que es el que nos permite evidenciar las diferentes interacciones que se dan. Teniendo en cuenta que nuestro foco de análisis de la práctica del profesor son las interacciones que se gestan en dicha práctica, relacionadas con favorecer la actividad demostrativa, debemos comenzar por definir lo que entendemos por actividad.




Esquema 4. *Interacciones relacionadas con la práctica del profesor.*

## 2.3 ACTIVIDAD

Asumimos la actividad como el conjunto de acciones o procesos intelectuales conscientes y de comportamientos, estimulada por un motivo y subordinada a una meta o a una expectativa (Leont'ev, 1981, referenciado en Cobb, Goldin, Greer, Nessher y Steffe, 1996). La actividad se sitúa en un contexto determinado, regido por unas pautas de interacción con el entorno y los otros individuos. La actividad parte de unas necesidades, motivos y tareas, que conllevan a realizar unas acciones y operaciones para alcanzar una meta. Cuando la meta se refiere a asuntos relacionados con el conocimiento matemático nos referimos a actividad matemática.

### 2.3.1 Actividad Matemática

Aceptamos que la actividad matemática es un medio para resolver problemas en diferentes contextos, tanto cotidianos como matemáticos, en la que se debe crear, aplicar métodos y usar herramientas. En esta actividad la meta es resolver problemas, por lo que la tarea es el problema y las necesidades y motivos se relacionan con dar solución a dicha tarea. Esta delimitación configura un proceso que se caracteriza por transitar por el planteamiento y contrastación de conjeturas, el control y verificación de resultados, la adquisición de conceptos, propiedades, teoremas, métodos, técnicas y de vocabulario formal.

#### 2.3.1.1 Actividad demostrativa

Como el trabajo de investigación se centra en las clases de un curso de geometría plana, en las que los problemas y tareas que se proponen están ligados a la finalidad de que los estudiantes aprendan a demostrar, la actividad matemática bajo la cual se realiza el análisis de la práctica del profesor, es la demostrativa.

En concordancia con Camargo, Perry y Samper (2005, 2006) la actividad demostrativa se entiende como el conjunto de procesos que conllevan a una conjetura y a su justificación[4]. Aunque todos los procesos incluidos en la caracterización son importantes dentro de la actividad demostrativa (ver p.20), hemos seleccionado el proceso de conjeturar y el proceso de demostrar para la realización de nuestro trabajo, ya que luego de una primera observación de los videos de las clases, encontramos mayor riqueza en las interacciones relacionadas con estos procesos.

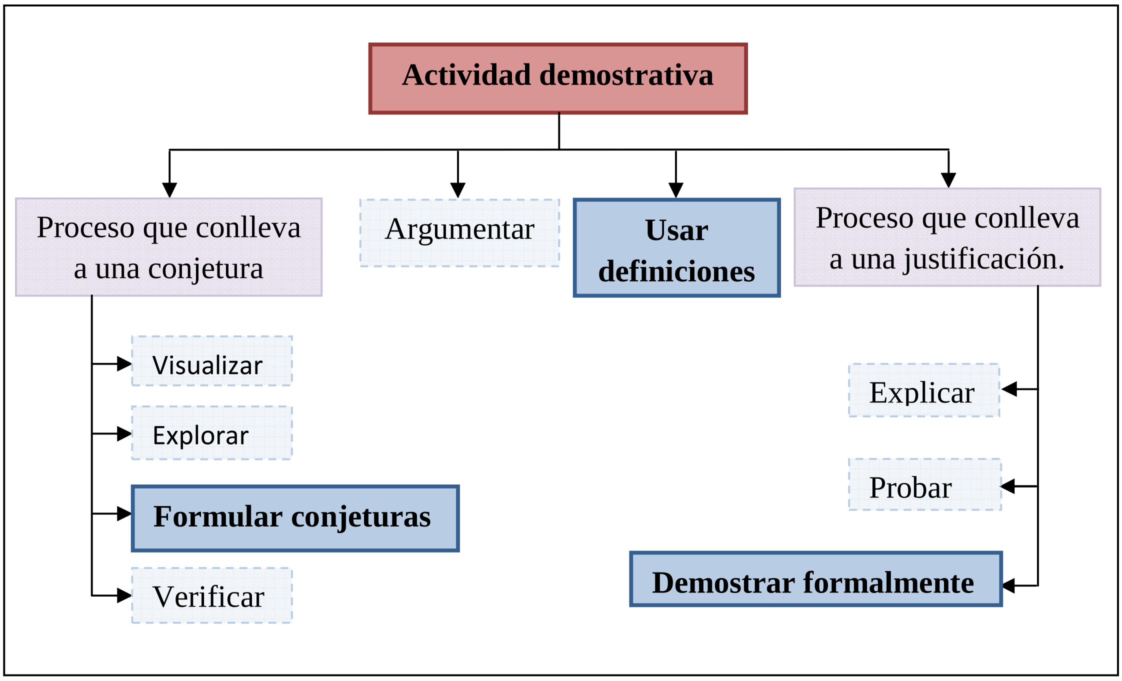
El proceso de conjeturar se logra cuando, luego de la exploración de varios casos particulares, se establece un enunciado geométrico de algunos hechos de los que se tienen seguridad; en la mayoría de casos este enunciado se escribe en forma de condicional, lo

[4] Al ser la actividad demostrativa una actividad matemática, en ambas actividades se plantean y contrastan conjeturas, las cuales son revisadas y verificadas, que en caso de ser aceptada por una comunidad se constituye en teorema, que desde la actividad demostrativa debe ser justificado mediante una demostración y desde la actividad matemática la demostración no es el fin principal.

cual se puede observar en los tres episodios de clase que se analizan bajo esta acción o proceso. El análisis de las interacciones que se gestan bajo este proceso está centrado en el momento en el que se realiza un estudio entre profesora y estudiantes de las conjeturas propuestas por los estudiantes a través de la conversación instruccional o la conversación matemática. En el proceso de demostrar se hace una argumentación, de carácter deductivo, explicitando afirmaciones y razones desde una información conocida; permite validar conjeturas e introducir un hecho matemático al sistema axiomático. En este trabajo nos centramos en algunas demostraciones que se realizan colectivamente, en las que se evidencian interacciones de la profesora y de los estudiantes.

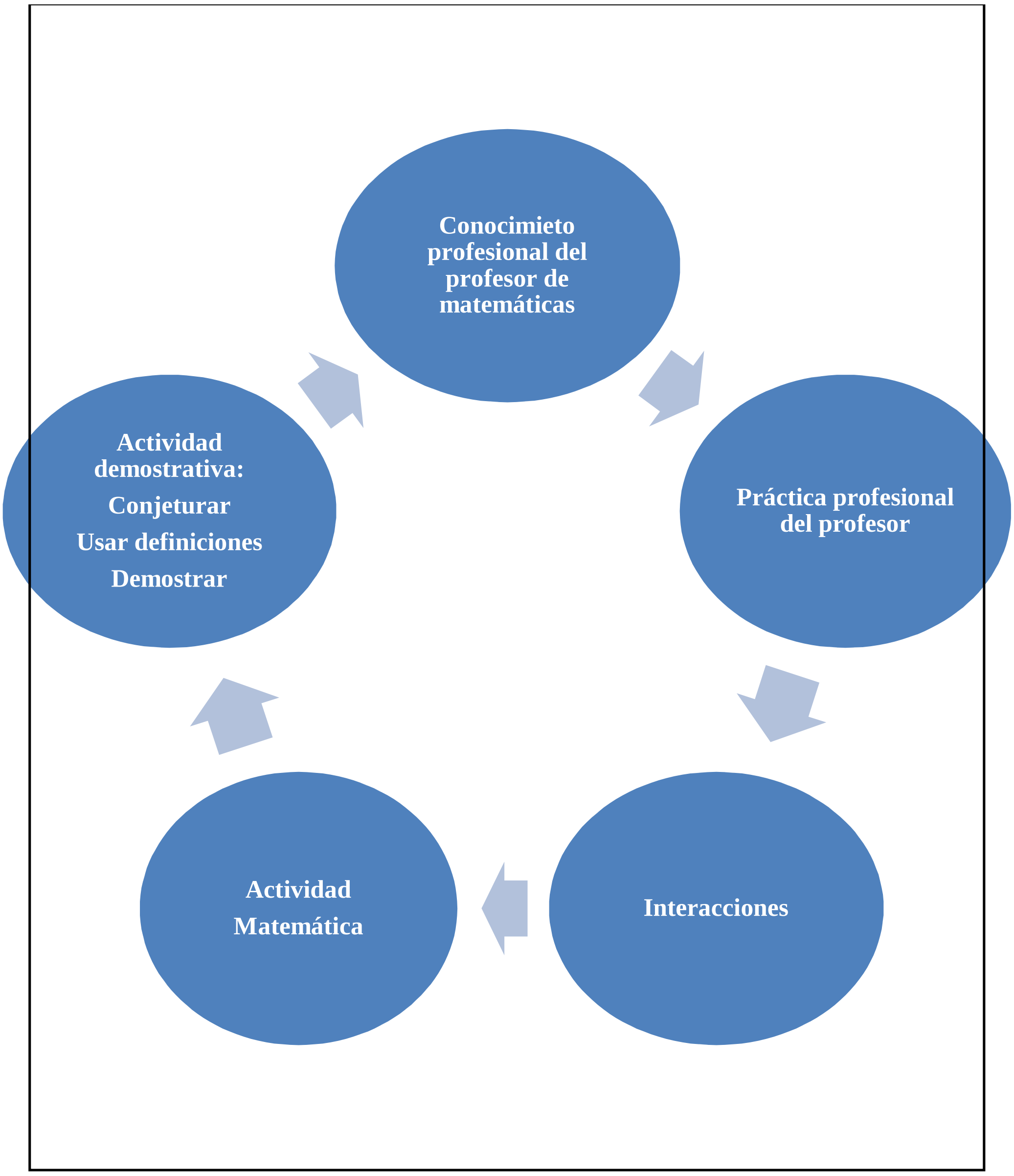
Al revisar los datos de la investigación, observamos que algunas acciones relacionadas con el proceso de usar definiciones están estrechamente relacionadas con la actividad demostrativa. Por ello decidimos analizar las interacciones relacionadas con acciones que permiten introducir elementos al sistema axiomático, los cuales son objeto de estudio para ser caracterizados a partir de sus propiedades geométricas, luego de ser definidos. Así el proceso de usar definiciones consiste en caracterizar un objeto geométrico, usando las propiedades que lo identifican de los demás objetos y utilizarlas como eslabones en la cadena deductiva. En algunas oportunidades, en las definiciones sobran características del objeto geométrico, por lo que es importante identificar las características que sobran y usar el mínimo de ellas para facilitar las demostraciones a realizar; estas definiciones se denominan definiciones económicas. Con relación a este proceso, nos centramos en la construcción y estudio colectivo de definiciones.

En el Esquema 5 presentamos los procesos y acciones relacionados con la actividad demostrativa, y que se relacionan entre sí, de la cual nos centramos en los procesos: formular conjeturas, usar definiciones y demostrar formalmente.



Esquema 5. *Procesos relacionados con la actividad demostrativa.*

En el esquema 6 relacionamos cada uno de los referentes teóricos que constituyen el marco conceptual presentado anteriormente y resaltamos los constructos teóricos en los que se centra la investigación. La relación que establecemos entre los referentes, la planteamos cíclicamente, ya que el intentar aportar un material que apoye el curso "Enseñanza y Aprendizaje de la Geometría" para reflexionar y analizar sobre la práctica de un profesor de geometría conlleva a reconocer que el conocimiento del profesor fundamenta su práctica, la cual está relacionada con las interacciones, entre profesor y los estudiantes, que subyacen del estudio de una actividad matemática, la actividad demostrativa. Y que la reflexión y el análisis sobre dichos aspectos por parte de los profesores en formación inicial, les aportará elementos didácticos relacionados con la enseñanza de la geometría, que luego constituirán su conocimiento profesional que fundamentará su práctica.




Esquema 6. *Ciclo de análisis de la investigación.*

# CAPITULO 3. DISEÑO INVESTIGATIVO

La presentación del diseño investigativo la hemos dividido en dos apartados. En el primero, se describe el contexto del curso sobre el cual se realizó la investigación, y las fuentes de información que se tomaron. En el segundo apartado, se muestran las diferentes fases que se dieron en el proceso de la investigación y las de elaboración de los resultados.

## 3.1 DESCRIPCIÓN DEL CONTEXTO Y FUENTES DE INFORMACIÓN

En este apartado se describe el contexto de la clase, en la cual se realizó la presente investigación, y las fuentes de información.

### 3.1.1 Contexto

Las sesiones de clase que se describen y analizan se desarrollaron con un grupo de 21 estudiantes en un curso de geometría plana, del programa de formación inicial de profesores de matemáticas de la Universidad Pedagógica Nacional, cuya finalidad es aprender a demostrar, participando colectivamente en la construcción de un sistema axiomático. El curso se desarrolló en 47 sesiones, en las que los estudiantes trabajaron en parejas[5], y luego socializaron los resultados obtenidos, haciendo un análisis de ellos, el cual era guiado por la profesora. Cada grupo tenía a su disposición calculadoras Voyage 200 o computadores, que tenían instalado el software Cabri, el programa de geometría dinámica, que se usó para explorar, buscando dar respuesta a las tareas propuestas por la profesora, que llevaban a descubrir relaciones o propiedades de los objetos geométricos en estudio. En ocasiones se usó un view screen, que permitía que cada grupo presentara, a la comunidad, las construcciones que realizaron los estudiantes en Cabri; también se disponía de un retro-proyector, para mostrar al grupo las conjeturas propuestas, al momento de leerlas y analizarlas. El proceso de análisis de las diferentes conjeturas propuestas culminaba en el momento de hacer la demostración formal de aquellas que eran aceptadas por el grupo.

[5] Como al curso asistían veintiún estudiantes, ellos se organizaron en nueve parejas y un trío.

El reconocer la complejidad del proceso que permite la producción de demostraciones formales, conlleva a Camargo, Perry & Samper (2005) a identificar tres necesidades que forman parte de un entorno favorable para aprender a demostrar: una de las necesidades son las *normas de la clase*, entre las que están valorar y fomentar el cuestionamiento de las argumentaciones como mecanismo para enriquecer la comprensión del contenido estudiado, usar la demostración matemática para el desarrollo de contenidos, apoyada por la preparación previa, y establecer la demostración formal como mecanismo para aceptar e incluir un resultado en el sistema axiomático que se construiría en el curso. Otra necesidad, es la utilización de calculadoras con el software de geometría dinámica Cabri Gèométre como recurso para deducir o comprobar hechos geométricos; y la otra necesidad son las tareas y situaciones planteadas a los estudiantes, con el fin de revisar, consolidar y aplicar los contenidos en juego y la geometría dinámica en el proceso de la actividad demostrativa. Respecto a las tareas que se proponen a los estudiantes, las autoras resaltan que éstas favorecen la interacción, pues conllevan a diversas actuaciones por parte de los estudiantes en la búsqueda de su solución y cuando las soluciones obtenidas por los estudiantes son presentadas a la comunidad, suscitan discusiones entre los estudiantes y el profesor en las que se cuestiona el camino seguido por uno u otro miembro, para determinar cuál o cuáles de las soluciones son válidas para la tarea propuesta.  Además, las autoras consideran que la formulación de las tareas favorece la actividad demostrativa cuando el estudiante pone en juego sus comprensiones, la forma de abordar un problema y cómo justificarlo. En relación a las normas de clase y las interacciones que se dan, resaltan que éstas pueden estimular o no la justificación o la demostración formal, dependiendo si en una clase es suficiente o no con llegar a la respuesta de una tarea sin llegar a observar los criterios de su veracidad, o que en la clase una de las normas sea que toda respuesta debe estar mediada por una justificación y por ende por una demostración formal, o no.

El segundo aspecto se evidencia en el curso, ya que la geometría dinámica jugó un papel importante en el momento de descubrir y conjeturar hechos geométricos que, en algunos casos, dieron lugar al estudio de elementos teóricos en el proceso de construcción del sistema axiomático. El uso de la geometría dinámica permitió a los estudiantes una exploración de los objetos geométricos involucrados en la búsqueda de la solución a un problema. Dicha exploración los llevó a descubrir relaciones invariantes en las representaciones construidas y en algunas ocasiones se constituyó en un medio para revisar la validez de aquellas propiedades identificadas visualmente en las construcciones. Los problemas propuestos por la profesora a los estudiantes, eran situaciones abiertas que permitían diversas interpretaciones llevándolos a diferentes construcciones. Por ende, las conjeturas propuestas eran de diferente naturaleza y llevaron al estudio de varios teoremas y definiciones que constituyeron elementos del sistema axiomático que se constituyó en la clase. Entre las definiciones contempladas están las de ángulo recto, rectángulo y altura de un triángulo. Tales elementos aportaron a dicha construcción del sistema axiomático, en la medida en que eran aceptados colectivamente, como es el caso de las conjeturas que al ser aceptadas llevaban a realizar una demostración colectiva de ellas, para institucionalizarlas e introducirlas como teoremas del sistema axiomático en construcción.

### 3.1.2 Fuentes

Las principales fuentes de información para el análisis de las interacciones son las grabaciones de video de las sesiones de clase y las trascripciones de las mismas. Las grabaciones de video y una primera versión de las trascripciones estuvieron a cargo de una persona del grupo Aprendizaje y Enseñanza de la Geometría. Dichas transcripciones se realizaron inmediatamente después de la clase, de forma literal, y sin incluir apreciaciones del transcriptor, ya que este material es usado con diferentes fines dentro del grupo de investigación. Para nuestra investigación se trabajó inicialmente con las trascripciones hechas por el grupo, pero a medida que se avanzó en el estudio éstas se fueron corrigiendo y perfeccionando, buscando que fueran fieles a cada una de las intervenciones, asegurando así, que los fragmentos de transcripción que se muestran en el análisis, sean copia fiel de las intervenciones de la profesora y de los estudiantes.

## 3.2 DESCRIPCIÓN METODOLÓGICA

El análisis realizado en la investigación, es de tipo cualitativo, centrado en la descripción e interpretación de las interacciones que se gestan en la práctica de una profesora de matemáticas, cuando intenta favorecer la actividad demostrativa en geometría. Para abordar el estudio se tomó como unidad de análisis episodios de la clase de geometría plana, en donde se puede observar las interacciones analizadas. El proceso de análisis y elaboración del material, resultado de la presente investigación, se llevó a cabo en 7 fases, las cuales no se desarrollaron de forma secuencial, ya que a medida que se iba avanzando en el trabajo, se trabajaba en dos o tres fases al mismo tiempo. A continuación describimos cada una de las fases.

### 3.2.1 Fase I: Selección del material

La primera selección del material se realizó a partir de los videos de las 47 sesiones de clase. Estos se revisaron uno a uno identificando los episodios en los que se observaran interacciones entre la profesora y el grupo de estudiantes, descartando así todos aquellos episodios en los que los estudiantes discutían en parejas a partir de un problema propuesto y aquellos en los que se observaban monólogos de la profesora haciendo aclaraciones o corrigiendo evaluaciones en el tablero. Los episodios seleccionados se clasificaron a partir de cuatro procesos relacionados con la actividad demostrativa, de los cuales tres fueron sugeridos por el grupo de investigación Aprendizaje y Enseñanza de la Geometría, que son: conjeturar, demostrar, y hacer construcciones auxiliares; y un cuarto se incluyó al observar que el uso de definiciones influía notoriamente en la actividad demostrativa. La selección de estos procesos nos llevó descartar aquellos episodios que no eran específicos de los procesos mencionados. A medida que se iban seleccionando los episodios se elaboró una tabla (ejemplificada en la Tabla 2) que facilitó localizar el episodio de clase entre los diferentes videos (codificando el DVD, la fecha y el episodio de clase). En la tabla establecimos el proceso de la actividad demostrativa abordado en el episodio y una descripción de éste. Por ejemplo, en el episodio "Demostración *Si un cuadrilátero es paralelogramo entonces sus diagonales se bisecan*", después de encontrar los datos del video se estableció el proceso "Demostrar" como aquel que caracteriza el episodio y se describió de forma general los sucesos que se desarrollan en el episodio de acuerdo con el proceso abordada.

| Episodio | N. de CD | Fecha | Segmento | Proceso | Descripción |
|---|---|---|---|---|---|
| Teorema de la charnela | 50 | Mayo 4 | V1–V2- V3 7:44 | Demostrar y hacer construcciones auxiliares | Se demuestra el teorema de la Charnela recurriendo a la construcción de rayos, bisectrices, localización de puntos, construcción de ángulos. |
| Demostración *Si un cuadrilátero es paralelogramo entonces sus diagonales de bisecan.* | 60 | Mayo 28 | V2 00:30 – V3 05:32 | Demostrar | Dada la conjetura "*Si un cuadrilátero es paralelogramo entonces sus diagonales de bisecan.*" se procede a la demostración luego de ser aceptada por el grupo. |

Tabla 2. *Ejemplo de la selección de Episodios*

### 3.2.2 Fase II: Primer ejercicio de codificación

Un primer ejercicio de análisis y codificación, se llevó a cabo con el Episodio "Demostración: *Si un cuadrilátero es paralelogramo entonces sus diagonales se bisecan*", descrito en la Tabla 2, del proceso de demostrar. Este episodio se seleccionó al observar que se podía obtener un rico análisis de las interacciones que se daban en el aula y que evidenciaba el trabajo que lleva la producción colectiva de una demostración. Para esta primera codificación se usó la primera corrección de la transcripción inicial del episodio[6], que fue confrontada con el video. La codificación sobre dicha transcripción se realizó línea a línea identificando principalmente aspectos de la gestión del profesor, ya que inicialmente se pensaba analizar la interacción y la gestión que permitía esta interacción; para ello, nos basamos en los códigos *reforzar, invitar, dar pistas, modelar, parafrasear, pedir explicación, modelar demostraciones y evaluar ideas,* propuestos por Towers (Citado por Sinclair, 2003) y Dindyl, Martin, Soucy, y Wallace (2005). Sin embargo, como estos códigos no encerraban todas las acciones de gestión que observamos, surgieron nuevas

[6] Entendemos por episodio el grueso de la clase en el que se aborda una situación particular y por fragmento, un trozo de episodio en el que se observa una interacción particular.

acciones como: *buscar justificación, complementar ideas, razonamiento deductivo, justificar e impulsar ideas.*

Como herramienta de apoyo en el proceso de la codificación usamos el programa Atlas Ti[7]. La transcripción del episodio "Demostración: *Si un cuadrilátero es paralelogramo entonces sus diagonales de bisecan"*, se constituyó en el primer documento primario del programa, y se alimentó con el conjunto de códigos, mencionado anteriormente. En la Imagen 1 se observa la primera codificación hecha por medio del programa Atlas Ti. En la pantalla central se encuentra la transcripción del fragmento analizado, con la numeración de cada una de las líneas o intervenciones; en la parte derecha se muestran los códigos que se asignaron a cada una de las intervenciones realizadas por la profesora, el cual relaciona con un corchete la intervención y el código.

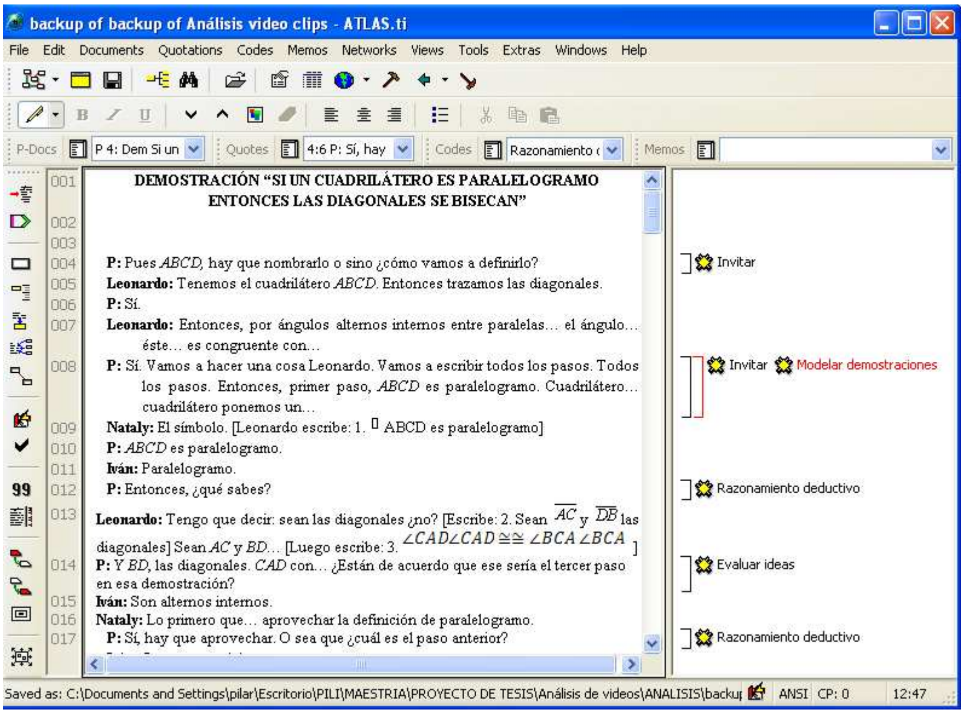



Imagen 1. *Codificación en Atlas Ti*

[7] Atlas Ti es un programa para investigación cualitativa o de análisis cualitativo de datos, en donde a partir de una base de datos documentales, sin importar la extensión de los mismos, se puede caracterizar y clasificar segmentos de texto a analizar, y tejer relaciones entre ellos. Cada documento que se introduce a esta base de datos, se denomina documento primario, los cuales toman una numeración dependiendo el orden en que se introducen.

A partir de sucesivas revisiones de la codificación observamos que al centrarnos en la identificación de acciones que ejemplificaban la gestión de la profesora no estábamos dando cuenta de la interacción que surgía a partir de ella, por lo que no dejaban ver un panorama amplio de la práctica del profesor en el que estuviera involucrado el estudiante, sujeto importante en el desarrollo de la clase. Esta situación nos llevó a reformular los códigos dando más relevancia a rutinas de interacción que a la gestión por sí misma. Surgieron los siguientes códigos: *estudiante pregunta – profesor cuestiona, estudiante pregunta – profesor responde,* y *regulación del lenguaje.* Pero estos códigos describían acciones de interacción de cualquier clase de matemáticas, e incluso de una clase de cualquier área. Por ejemplo *estudiante pregunta – profesora responde,* es un patrón que se puede observar en diversas clases, sin importar la asignatura. Agrupamos estos códigos bajo una categoría que se denominó *gestión comunicativa* y nos concentramos en buscar la manera de sacar a relucir aspectos específicos de la producción de una demostración, pues aunque ya existía un código asociado a ella (Razonamiento deductivo), éste era bastante amplio, y encerraba casi todo lo relacionado con el proceso de demostrar. Este código se eliminó, y generamos tres nuevos códigos con los que caracterizamos el tipo de interacción que se realizaba entre profesora y estudiantes dentro de esta actividad, dependiendo del razonamiento que se hace. Dicha codificación se describen en la Tabla 3.

| CÓDIGO | DESCRIPCIÓN |
|---|---|
| **Técnica I razonamiento deductivo** | A partir de una afirmación que ha hecho un estudiante o la profesora, en medio de una demostración, se indaga sobre las conclusiones que se pueden derivar de ahí, o por un paso a seguir. |
| **Técnica II razonamiento deductivo** | Cuando al reconocer una conclusión, que es paso clave en el desarrollo de la demostración, la profesora indaga sobre elementos axiomáticos que permiten llegar a la conclusión; y así logra la participación de los estudiantes. O cuando al justificar un paso que se ha introducido en una demostración se evoca el paso o pasos, que permitieron deducir esta conclusión. |
| **Técnica III razonamiento deductivo** | A partir de una afirmación dada, la profesora u otro estudiante indaga o corrige, pues no se cuenta con los elementos necesarios para concluir la afirmación. |

Tabla 3. *Clasificación del razonamiento deductivo.*

### 3.2.3 Fase III: Reducción del material

Luego del primer ejercicio de codificación, seleccionamos dos episodios más del proceso de demostrar bajo los mismos parámetros con que se seleccionó el primer episodio. Como el primer episodio correspondía a una clase de final de semestre, escogimos uno de inicio del semestre y otro intermedio pues inicialmente pensamos en mostrar la evolución de las interacciones. Sin embargo, este análisis se descartó al revisar los videos de la clase y ver que no había indicios de un cambio notorio del tipo de interacción que se gestaban a través del tiempo.

Por otro lado, la evaluación del primer ejercicio de codificación nos mostró que el tiempo que debíamos dedicar al análisis de cada uno de los episodios de clase era extenso, por lo que decidimos trabajar solo en tres de los cuatro procesos de la actividad demostrativa que habíamos seleccionado. Descartamos los episodios relacionados con el proceso de hacer construcciones auxiliares, por ser el proceso que menos riqueza presentaba en las interacciones relacionadas con la actividad demostrativa.

Luego de tener seleccionados los tres episodios correspondientes al proceso de demostrar, escogimos episodios correspondientes al proceso de usar definiciones. De los nueve episodios de este proceso, que habíamos observado en la selección del material (Fase I), empezamos a descartar aquellos en los había menos intervenciones de los estudiantes. Quedaron así cinco episodios, de los cuales seleccionamos los tres que consideramos más significativos en términos de las interacciones que se presentaban. Un proceso similar seguimos para la selección de los episodios a analizar del proceso de conjeturar. Quedaron así nueve episodios de clase[8] (Tabla 4) a analizar, siendo éstos representativos de las interacciones asociadas a los tres procesos, a lo largo del curso.

| Demostrar | Definir | Conjeturar |
|---|---|---|
| Dos ángulos opuestos por el vértice son congruentes. | Rectángulo | Triángulo Isósceles |

[8] Los nombres que se le dieron a cada uno de los episodios, surgieron a partir del objeto geométrico trabajado, para el caso de usar definiciones y conjeturar. Para el de demostrar, se cita el teorema demostrado.

| | | |
|---|---|---|
| Si un cuadrilátero es paralelogramo entonces sus diagonales de bisecan. | Ángulo recto | Bisectriz |
| Un segmento tiene más de dos puntos. | Altura de un triángulo | Suma mínima |

Tabla 4. *Episodios seleccionados para cada proceso.*

### 3.2.4 Fase IV: Segundo ejercicio de codificación

Al tiempo que se realizaba el análisis de cada uno de los episodios seleccionados y se escribía el informe descriptivo-interpretativo correspondiente (proceso que se describirá en la siguiente fase), fuimos modificando la codificación con la idea de buscar códigos propios de la interacción en el aula caracterizados por la actividad demostrativa, específicamente de los procesos: demostrar, usar definiciones y conjeturar.

Luego de la primera codificación del primer episodio del proceso de demostrar y al mirar los otros dos episodios de clase surgieron nuevos códigos propios de ésta. Además, separamos en dos el código *Técnica II de razonamiento deductivo,* quedando así un total de seis códigos para este proceso. Los nombres de los otros dos códigos (Técnica I y III de razonamiento deductivo) del proceso de usar demostraciones, que habían surgido en el primer ejercicio de codificación, se modificaron buscando que éstos estuvieran asociados a su descripción y con las interacciones que representaban, parámetro que se trazó para determinar nuevos códigos; se revisó la redacción de todos, buscando mayor claridad en la descripción de la interacción. Así, el código *Técnica I de razonamiento deductivo* se remplazó por *Pasos a seguir; Técnica II de razonamiento deductivo* se reemplazó por *Búsqueda de antecedente posible* y *Pasos soporte de justificación,* y *Técnica III de razonamiento deductivo* por *Requerimiento incompletos de justificación.* Los seis códigos del proceso de usar demostraciones quedaron definidos así:

| CÓDIGO | DEFINICIÓN |
|---|---|
| Requerimiento de justificación | En el desarrollo de una demostración, ante una afirmación dada por un estudiante, la profesora u otro estudiante, pide la justificación correspondiente, avanzando en el discurso deductivo. |

| | |
|---|---|
| Búsqueda de justificación | En el desarrollo de una demostración, el no tener justificación (ni profesora, ni estudiantes), dentro del sistema axiomático construido, a una afirmación que se considera relevante, conlleva a la introducción de un nuevo elemento al sistema axiomático. La profesora propicia una genuina construcción colectiva de la demostración. |
| Pasos a seguir | Cuando en el desarrollo de la demostración, se interactúa, buscando que paso sigue a partir de lo que se tiene. |
| Búsqueda de antecedentes posibles | Luego de prever o anticipar una conclusión, que es paso clave en el desarrollo de la demostración, se identifican elementos del sistema axiomático, que aun no están presentes en la demostración, que podrían llevar a la conclusión. |
| Pasos soporte de justificación | Al justificar un paso que se ha introducido en una demostración, se menciona el paso o pasos anteriores, que permitieron deducir la conclusión, para hacer explícitos aspectos de la estructura deductiva. |
| Requerimientos incompletos de justificación | Cuando se concluye con base en una justificación de la que no se tiene todas las condiciones del antecedente de ésta, se discute por los requisitos faltantes. |

Tabla 5. *Códigos del proceso de usar demostraciones*

En el momento en que se inició el análisis de los episodios seleccionados para el proceso de usar definiciones, buscamos interacciones que se pudieran clasificar bajo los códigos ya descritos; esto no fue del todo posible, ya que sólo se pudieron clasificar algunas interacciones bajo los códigos generales de la gestión comunicativa. Como estos códigos no daban cuenta de todas las interacciones, pues había interacciones propias del proceso de usar definiciones, definimos códigos específicos para este proceso, quedando seis códigos, los cuales se definen en la Tabla 6.

| **CÓDIGO** | **DEFINICIÓN** |
|---|---|
| Búsqueda de propiedades-definición | La profesora pide a los estudiantes que enuncien una definición y se genera una conversación que lleva a explicitar las propiedades que deben incluirse en su formulación. |
| Institucionalización | La profesora permite e impulsa la participación de los estudiantes en la institucionalización de un enunciado. |
| Búsqueda de definición económica | Luego de haber analizado la equivalencia entre definiciones, la profesora y los estudiantes estudian qué exige cada una de las definiciones para escoger la menos exigente y conveniente para el sistema axiomático. |

| | |
|---|---|
| Implicaciones entre definiciones | Dada una definición se revisan las condiciones que permitieron llegar a ella, estableciendo una nueva definición, con la finalidad de determinar informalmente si las dos son definiciones del mismo objeto o si definen diferentes objetos (si una definición implica la otra). |
| Reconocimiento de los componentes de una definición | En el proceso de demostrar la equivalencia entre dos definiciones, la profesora guía la demostración con el fin de que los estudiantes reconozcan de una definición, los objetos geométricos presentes en la definición y las relaciones que establece entre ellos. |
| Proponer definición | La profesora pide a los estudiantes enunciar una definición y se genera una conversación que lleva a estudiar relaciones de implicación entre ellas. |

Tabla 6. *Códigos del proceso de usar definiciones*

Una situación similar ocurrió en el análisis del proceso de conjeturar, en la que luego de aceptar que no todas las interacciones se podían ubicar bajo los mismos códigos, fuimos proponiendo nuevos códigos, a medida que hacíamos el análisis. En total, en esta categoría, quedaron cinco códigos definidos como se presenta en la Tabla 7.

| CÓDIGO | DEFINICIÓN |
|---|---|
| Representación y conjetura | La profesora y los estudiantes estudian la conjetura a la luz de la construcción, para determinar si la representación obtenida es un ejemplo claro de la conjetura que se formula. |
| Correspondencia conjetura – construcción | Se estudia si el antecedente corresponde a las características con las que se realiza la construcción, o las que se obligan por arrastre, y si el consecuente corresponde a las características geométricas encontradas. |
| Revisión de enunciado | La profesora impulsa la revisión de las propiedades que están presentes en una conjetura, con la finalidad de identificar y explicitar si sobran propiedades o si se deben en caso de que hagan falta. |
| Validación de conjeturas | La profesora o algún estudiante promueven la búsqueda de pasos básicos de la demostración que permite establecer la validez de la conjetura. |
| Conjeturas implicación | La profesora presenta las conjeturas de los estudiantes de acuerdo con los requerimientos o características (que ha llevado y clasificado previamente para que una conjetura no desmerite el estudio de otras, sino valorarlas todas) conllevando al estudio de las mismas en términos de las implicaciones entre ellas y su validez. |

Tabla 7. *Códigos del proceso de conjeturar*

### 3.2.5 Fase V: Codificación final

Dos aspectos nos inquietaban en el proceso de la codificación: que los códigos fueran reflejo de la interacción que se estaba analizando y que efectivamente dieran cuenta de una interacción y no de una acción individual de la profesora o del algún estudiante. Por esto, recurrimos a diseñar una tabla de dos columnas: en la primera ubicamos la transcripción de los fragmentos que constituían cada episodio, y la segunda, cada uno de los códigos que le habíamos asignado. Si no veíamos suficiente correspondencia entre el fragmento y el código, corregíamos y mejorábamos la definición del código y el nombre, de tal manera que el código diera cuenta de la interacción que se describía. A continuación ejemplificamos parte de la tabla de análisis que realizamos para el episodio *Definición de ángulo recto* (Tabla 8). En ella se presenta un fragmento del episodio con su respectivo código.

| | | |
|---|---|---|
| Profesora: | Entonces… Entonces, Germán, ¿cuál es la definición de ángulo recto? | **Equivalencia entre definiciones:** Dada una definición se revisan las condiciones que permitieron llegar a ella, estableciendo una nueva definición, con la finalidad de determinar informalmente si las dos son definiciones del mismo objeto o si definen diferentes objetos (si una definición implica la otra). |
| Varios: | Un ángulo es recto… | |
| Profesora: | […] | |
| Germán: | Un ángulo es recto…Un ángulo es recto si su medida es 90 [la profesora escribe eso y le antepone D1] | |
| Profesora: | Bueno. ¿Sí? Pero miren que cuando nos dio al fin ese noventa, ¿qué condiciones teníamos? Que los rayos. | |
| Ignacio: | ¿Qué condiciones? | |
| Profesora: | Que los rayos pertenezcan a la misma recta. | |
| Ignacio: | Tiene… Son dos ángulos que forman par lineal, y que son… | |
| Profesora: | Congruentes. | |
| Varios: | Si. Forman par lineal **y** son congruentes. Entonces, ¿podría yo definir esto así? Un ángulo | |
| Profesora: | [escribe eso como D2] es recto si forma par lineal con otro ángulo congruente a él. ¿Podría yo definir ángulo recto así? Son dos posibilidades… Una que ustedes conocen desde tiempos *a*… ¿sí? Y otra que estoy inventándome usando lo que hizo Darío con la tarea que yo le puse. Pero, no sé si son la misma. Si sí estoy definiendo… Si son dos definiciones para el mismo objeto, o si estoy definiendo cosas distintas. | |
| | O sea…necesariamente… O sea… las definiciones son… no son iguales. Una se hace mención a un ángulo y en la otra hace mención a un par lineal. […] | |
| | Si yo quiero tener estas dos definiciones, tendría que mostrar que son equivalentes. Es decir, | |
| Germán: | que dada una, se puede demostrar la otra y viceversa. | |

Tabla 8. *Ejemplo de la tabla de correspondencia entre el fragmento y el código*

Luego de redactar de nuevo la definición de cada código y cambiar los nombres que consideramos necesarios, obtuvimos un conjunto de códigos que agrupamos bajo cuatro categorías, tres de ellas asociadas a la actividad demostrativa, y una propia de la gestión comunicativa. Esta última se puede observar en otras clases de matemáticas, que no estén vinculadas directamente con esta actividad matemática. En la Tabla 9 presentamos cada una de las categorías con sus correspondientes códigos, los cuales se definen y ejemplifican en el capítulo de análisis.

| **Categoría gestión comunicativa** | **Categoría demostración** | **Categoría usar definiciones** | **Categorías conjeturación** |
| --- | --- | --- | --- |
| Estudiante pregunta - profesor cuestiona.<br>Estudiante pregunta – profesor responde.<br>Dar pistas.<br>Impulsar ideas.<br>Estudiante da ideas – profesora traduce.<br>Regulación del lenguaje.<br>Complemento de ideas. | Requerimiento de justificación.<br>Búsqueda de justificación.<br>Pasos a seguir.<br>Búsqueda de antecedentes posibles.<br>Pasos soporte de justificación.<br>Requisitos incompletos de justificación. | Búsqueda de propiedades – definición.<br>Institucionalización.<br>Búsqueda de definición económica.<br>Equivalencia entre definiciones.<br>Reconocimiento de los componentes de una definición.<br>Proponer definición. | Correspondencia conjetura – construcción.<br>Presentación de conjeturas.<br>Revisión del enunciado.<br>Validación de conjeturas.<br>Verificación geométrica de conjeturas. |

Tabla 9. *Codificación final*

### 3.2.6 Fase VI: Elaboración de los informes descriptivo-interpretativos

Para la síntesis de los episodios de clase y la elaboración del material de apoyo para el curso “Enseñanza y Aprendizaje de la Geometría” tomamos ideas de la técnica de “viñetas” y diseñamos un informe que hemos denominado “informe descriptivo-interpretativo”, en el que el investigador reconstruye la clase e interpreta lo que sucede en el aula, relacionado con aspectos de la práctica del profesor. El informe descriptivo-interpretativo se compone de información general obtenida de datos de la gestión del profesor, tales como transcripciones de las secciones de clase con su respectivo análisis, los videos de las clases y la descripción de los segmentos de enseñanza.

Un primer intento de elaboración de informes descriptivo-interpretativos se llevó a cabo con el episodio: “Demostración *Si un cuadrilátero es paralelogramo entonces sus diagonales de bisecan”*. Para la elaboración de ésta se realizó una descripción o contextualización general de la clase, una descripción de lo que el lector encontraría en el informe descriptivo-interpretativo, y se citó cada uno de los códigos usados en el episodio. Se describió el fragmento que ejemplificaba cada código, se puso la trascripción del fragmento, y por último se interpretó cada fragmento de acuerdo con su respectivo código. Al leer y revisar este primer informe descriptivo-interpretativo, observamos que escrito de esta forma se perdía el orden cronológico y por tanto la idea global de la clase analizada. Por esta razón, decidimos reescribir el informe descriptivo-interpretativo en orden cronológico, ya no separado por los códigos que caracterizaban el episodio, sino por cada uno de los fragmentos, que aunque no eran consecutivos, permitían observar la idea global de la clase. Quedó así un nuevo informe descriptivo-interpretativo con la descripción de la clase, los fragmentos numerados uno a uno, su descripción, trascripción, interpretación y análisis bajo el código o códigos, que se ejemplificaban. Este informe descriptivo-interpretativo fue objeto de varias modificaciones por la recodificación y el tipo de análisis que se hacía, a partir de cada codificación.

La reelaboración y lectura del primer informe descriptivo-interpretativo nos llevó a identificar la estructura de los informes descriptivo-interpretativos a elaborar y el contenido que debía incluirse en cada uno de éstos. Continuamos después con la elaboración de los otros dos informes descriptivo-interpretativos del proceso de demostrar. Luego de establecer la definición de cada uno de los códigos para cada categoría, se procedió a diseñar los otros seis informes descriptivo-interpretativos, correspondientes a las acciones de definir y conjeturar, siguiendo la estructura de los informes descriptivo-interpretativos ya elaborados. Estos informes descriptivo-interpretativos fueron corregidos en varias oportunidades, ampliando la introducción de los fragmentos que constituían el episodio y mejorando el análisis correspondiente. En el reporte de investigación presentamos el informe descriptivo-interpretativo “Demostración del teorema: *Si un cuadrilátero es paralelogramo, entonces las diagonales se bisecan*”, los demás informes constituyen el anexo 1.

### 3.2.7 Fase VII: Edición de videos-clips

Al tener como finalidad una reflexión sobre la práctica, se editaron video-clips, que son pequeños fragmentos de clase, en los que se evidencia la práctica de un profesor de matemáticas, puntualizando en fragmentos de videos en los que se observa las interacciones que se gestan en la clase. Para ello, luego de seleccionar los segmentos de clase a analizar, y corregir sus respectivas transcripciones, se recurrió al programa Movie Maker. Para la edición de cada video se cortaron los segmentos que harían parte de los video-clips, y se quitaron trozos que no aportaban información para los análisis. Luego de tener seleccionada la sección de clase que constituye el episodio a analizar, dimos un título a cada video-clip, dependiendo la actividad demostrativa que deseábamos mostrar y el objeto matemático de estudio para la sesión. Por ejemplo "*Definición altura de un triángulo*" (ver Imagen 2).


Imagen 2. *Presentación de video-clip*

En el momento de revisar el material editado, observamos que el audio, en algunas partes de los video-clips, no era el más óptimo por lo que se decidió sub-titular cada video-clip, a partir de las transcripciones realizadas, buscando que la información que se presenta en cada uno fuera clara y precisa.

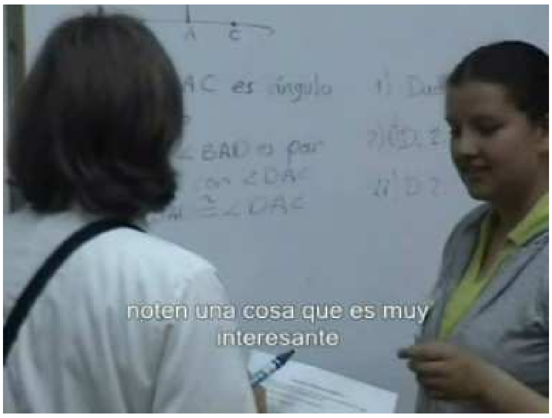



Imagen 3. *Ejemplo de sub-títulos*

Por último, al tener los nueve video-clips editados se procedió a organizar el CD de la presentación, en donde los videos se agruparon dependiendo el proceso de la actividad demostrativa mostrada.

En resumen, el proceso de análisis de las interacciones que se gestan en la práctica de la profesora y síntesis de éste, dio como resultado nueve video-clips y nueve informes descriptivo-interpretativos, que apoyarán el curso "Enseñanza y Aprendizaje de la Geometría".

## CAPÍTULO 4. ANÁLISIS DE LOS DATOS

En este capítulo se describen cada uno de los códigos que surgieron al tratar de caracterizar los diferentes patrones de interacción de los nueve episodios de clase seleccionados, y que fueron recurrentes durante el curso de geometría plana; además, se ejemplifica cada código por medio de un fragmento que va acompañado de su respectivo análisis.

Hemos agrupado los patrones en cuatro categorías denominadas: *demostrar, usar definiciones, conjeturar* y *gestión comunicativa;* los tres primeros corresponden a procesos de la actividad demostrativa. En la categoría *demostrar* hemos agrupado seis códigos de interacciones, asociados a la acción de producir colectivamente una demostración; dichos códigos son: *requerimiento de justificación, búsqueda de justificación, pasos a seguir, búsqueda de antecedentes posibles, pasos soporte de justificación* y *requisitos incompletos de justificación.* La categoría *usar definiciones* incluye seis códigos relacionados con la institucionalización de enunciados, que permiten incluir al sistema axiomático un objeto geométrico; éstos son: *búsqueda de propiedades – definición, institucionalización, búsqueda de definición económica, implicación entre definiciones, reconocimiento de los componentes de una definición, proponer definición.* La categoría *conjeturar*; incluye los códigos asociados al estudio de enunciados propuestos por los estudiantes, que se han obtenido a partir de la exploración de casos particulares que surgen al tratar de dar solución a un problema planteado por la profesora; dichos códigos son: *correspondencia conjetura – construcción, presentación de conjeturas, revisión del enunciado, validación de conjeturas, verificación geométrica de conjeturas.* Finalmente, la categoría denominada *gestión comunicativa* la conforman códigos que dan cuenta de interacciones no específicas de la actividad demostrativa, dichos códigos son: *complemento de ideas, dar pistas, estudiante da ideas – profesora traduce, estudiante pregunta – profesor cuestiona, estudiante pregunta – profesor responde, impulsa ideas, regulación del lenguaje.*

La codificación se llevó a cabo sobre las transcripciones de las clases donde extrajimos los fragmentos que ejemplifican las interacciones que se caracterizan con los códigos. Para ubicación del lector se presenta la Tabla 10, que relaciona la transcripción de cada episodio de clase con el número que se le ha asignado al documento en el programa Atlas Ti. Éste permite identificar a qué episodio corresponde cada fragmento con el que se ejemplifica el código.

| **Episodio** | **Numeración de la transcripción** |
|---|---|
| Si un cuadrilátero es paralelogramo entonces las diagonales se bisecan | **P1** |
| Si dos ángulos son opuestos por el vértice, entonces son congruentes | **P2** |
| Un segmento tiene más de dos puntos | **P3** |
| Ángulo recto | **P4** |
| Rectángulo | **P5** |
| Altura de un triángulo | **P6** |
| Bisectriz | **P7** |
| Triángulo isósceles | **P8** |
| Suma Mínima | **P9** |

Tabla 10. *Relación episodio con documento primario*

## 4.1 CATEGORÍA DEMOSTRAR

A continuación hacemos una descripción de los códigos usados para analizar las interacciones que integran la categoría demostrar, que acompañamos con ejemplos. Es importante aclarar, que aunque solamente ejemplificamos cada código con un fragmento de clase, las interacciones son recurrentes en el proceso de demostrar; en algunos episodios de clase el uso de un código se puede observar más de una vez.

***Búsqueda de antecedentes posibles:*** Este código recoge aquellas interacciones en las que luego de prever o anticipar una conclusión, que es paso clave en el desarrollo de una demostración, la profesora y los estudiantes identifican enunciados del sistema axiomático, que aun no están presentes en la demostración, y que podrían llevar a la conclusión. Esta interacción es importante en el proceso de realizar una demostración, ya que para llegar a una conclusión se requiere poder determinar qué definiciones, teoremas, postulados u objetos geométricos se deben incluir y encadenar.

**Ejemplo**

En el proceso de demostrar que un segmento tiene más de dos puntos, se lleva a cabo una lluvia de ideas acerca de posibles justificaciones que determinen una ruta que permitan dicha demostración.

| | | |
|---|---|---|
| 39 | P: | […] Tú [Daniel] me tienes que decir que existe r entre…, tú tienes que convencerme que existe un r [número] real. |
| 40 | Ignacio: | Entre los dos… puntos A, B. |
| 41 | P: | Sí. Tal que x menor que r menor que y ¿Eso es lo que queremos? |
| 42 | Daniel: | Sí. |
| 43 | P: | Ahorita. |
| 44 | Aníbal: | A lo que tenemos que llegar. |
| 45 | P: | ¿Y ustedes saben de alguno que podamos asegurar que está entre los otros dos? |
| 46 | Ignacio: | Por eso, punto medio. |
| 47 | María: | Sí, x más y sobre dos. |
| 48 | P: | ¿Punto medio? Punto medio es un objeto geométrico… ¡y yo estoy hablando de números! |
| 49 | María: | x más y sobre dos. |
| 50 | Germán: | Ah… bueno, pues entonces x más y sobre dos. |
| 51 | P: | x más y sobre dos. |
| 52 | Ignacio: | La coordenada del punto medio. |
| 53 | P: | Entonces sabemos que x es menor que x más y medios, menor que y [escribe: $x < (x + y)/2 < y$]. Ésto es una… lo podemos demostrar, un teorema de los reales, […] |

**[P3 39 – 53]**

En la primera parte de este fragmento se observa una discusión colectiva entre la profesora y los estudiantes, en la que de común acuerdo determinan que la conclusión a la que deben llegar en uno de los pasos claves para demostrar que un segmento tiene más de dos puntos, es que existe un número real *r* entre otros dos números reales *x* e *y* [39 – 44]. Esta discusión es dirigida por la profesora, cuando le dice a Daniel que la tiene que convencer de que existe un número real *r*, es complementada por Ignacio, quien reconoce que el número debe estar entre las coordenadas de dos puntos (aunque solo mencione los puntos), y se discute cuando la profesora pregunta *¿Eso es lo que queremos?* [41] y Aníbal confirma que esa es la conclusión a la que deben llegar [44]. Estas discusiones, son fundamentales en el proceso de demostrar y usualmente son dirigidas por la profesora, quien apoya el proceso de aprender a demostrar, cuando implícitamente guía la mirada de los estudiantes y traza el camino que deben recorrer para lograr dicha meta.

Después de que se ha identificado el consecuente, lo que queda es determinar el antecedente o los antecedentes que permiten obtener dicho consecuente; en otras palabras, se debe determinar el camino a recorrer para alcanzar la meta propuesta y poder concluir. En el ejemplo que hemos propuesto, la profesora propicia la discusión sobre el antecedente, con la intervención que realiza en la línea 45. De la discusión generada, en la que participan varios estudiantes y la profesora, se concluye que el número que está entre *x* e *y* es $(x+y)/2$, número que es justificado desde un teorema de los números reales. La decisión de usar ese número es un paso clave de la demostración que se está desarrollando, y contribuye en la determinación de que en una recta existen más de dos puntos.

En general, en las interacciones, que se caracterizan por la búsqueda de antecedentes posibles, la profesora usa expresiones como "*necesito conseguir… y entonces ¿qué ingredientes necesito?*" "*¿…eso es lo que queremos?...¿y saben qué me lo puede asegurar?*", como una manera de abrir la discusión para determinar el antecedente que conlleva a la conclusión prevista.

***Pasos a seguir**:* Este código recoge aquellas intervenciones en las que dos o más miembros de la comunidad interactúan buscando el paso que sigue en una demostración, con la finalidad de reconocer y concatenar las justificaciones y razones que hasta ese momento se han incluido en la demostración, con el paso siguiente, que contribuirá con el desarrollo de la demostración. En el proceso de demostración es frecuente que se pregunte una y otra vez por el paso o pasos a seguir.

**Ejemplo**

Para demostrar que las diagonales de un paralelogramo se bisecan, la profesora responsabiliza a Leopoldo de estructurar la demostración. Él inicia la demostración escribiendo tres afirmaciones que considera son las que constituyen los tres primeros pasos, sin tener en cuenta la información que se puede deducir de la primera afirmación, por lo que surge la siguiente interacción.

| | | |
|---|---|---|
| 05 | P: | […] Entonces, primer paso, ABCD es paralelogramo. Cuadrilátero… cuadrilátero ponemos un… |
| 06 | Nancy: | El símbolo. [Leopoldo escribe: 1. □ ABCD es paralelogramo] |
| 07 | P: | ABCD es paralelogramo. |
| 08 | Ignacio: | Paralelogramo. |
| 09 | P: | Entonces, ¿qué sabes? |
| 10 | Leopoldo: | Tengo que decir: sean las diagonales ¿no? [Escribe: 2. Sean $\overline{AC}$ y $\overline{DB}$ las diagonales] Sean AC y BD… [Luego escribe: 3. $\angle CAD \cong \angle BCA$] |
| 11 | P: | Y BD, las diagonales. CAD con… ¿Están de acuerdo que ese sería el tercer paso en esa demostración? |
| 12 | Ignacio: | Son alternos internos. |
| 13 | Nancy: | Lo primero que… aprovechar la definición de paralelogramo. |
| 14 | P: | Sí, hay que aprovechar. O sea que ¿cuál es el paso anterior? |
| 15 | Ignacio: | Que son paralelas. |
| 16 | P: | Que A… |
| 17 | Ignacio: | Que AB y CD son paralelos. |
| 18 | P: | ¿Quiénes son las paralelas? |
| 19 | Ignacio: | AB y DC [Leopoldo cambia el paso 3 por: 3. $\overline{AB} \parallel \overline{CD}$ y $\overline{BC} \parallel \overline{AD}$ ]. |

**[P1 5 - 19]**

En este fragmento, como en los otros que dan cuenta del mismo tipo de interacción, observamos que hay un conjunto de afirmaciones y razones que dan inicio a una demostración o que estructuran una primera parte de una demostración, y que son la base para la determinación de los pasos a seguir. A partir de lo que se tiene y de lo que se va a demostrar se buscan una serie de afirmaciones y razones que se encadenan en pasos, para concluir la demostración. En la búsqueda de pasos se llevan a cabo conversaciones mediadas por la profesora en las que los estudiantes discuten sobre los pasos que se deben incluir en la demostración y la secuencia de los mismos, para acordar con exactitud la afirmación que va a constituir el paso a incluirse de tal forma que siga a los que ya se han incluido. En el ejemplo que proponemos, se cuenta con el primer paso de la demostración [6], que se refiere a parte de la afirmación dada, *un cuadrilátero es paralelogramo,* del teorema a demostrar, *si un cuadrilátero es paralelogramo entonces las diagonales se bisecan*. La intervención de la profesora "*entonces, ¿qué sabes?*" lleva a una afirmación por parte de Leopoldo, que ha de incluirse en la demostración, pero que no se deriva directamente de los pasos 1 y 2, por lo que la profesora media [11] para que los miembros de la comunidad participen activamente en el desarrollo de la demostración. Acuerdan, que el paso 3 no corresponde a la congruencia de ángulos, sino que en éste paso se debe explicitar el paralelismo entre los segmentos opuestos de un paralelogramo, para hacer uso de la definición de paralelogramo. A partir de ahí se puede determinar la congruencia de los ángulos que había nombrado Leopoldo.

***Requerimiento de justificación:*** Este código se usa para interacciones típicas en el desarrollo de una demostración, en las cuales se ha incluido un paso escrito en forma de afirmación, pero no se ha recurrido a una definición, postulado o teorema para justificar dicha afirmación. Esta interacción se basa en una comunicación, principalmente entre profesora y estudiantes, donde usualmente la profesora pide a los estudiantes la justificación correspondiente a la afirmación dada, la cual es brindada por los estudiantes, avanzando en el discurso deductivo. Cada vez que se pide o se requiere una justificación, ya sea por parte de la profesora o de algún estudiante, se reafirma la norma de justificar toda afirmación que se dé en el desarrollo de una demostración, desde el sistema axiomático construido.

**Ejemplo**

En el proceso de demostrar que las diagonales de un paralelogramo se bisecan, surge la necesidad de demostrar que los lados de un paralelogramo son congruentes, por lo que se recurre a la congruencia de triángulos, surgiendo la siguiente interacción:

| | | |
|---|---|---|
| 22 | P: | […] O sea que ángulo, triángulo DAC congruente con BCA, ¿De acuerdo? |
| 23 | Estudiantes: | Sí. |
| 24 | P: | ¿Por? |
| 25 | Estudiante: | Lado – ángulo… |
| 26 | Leopoldo: | Ángulo - lado - ángulo. [Escribe: 8. $\overline{AB} \cong \overline{CD}$ y $\overline{BC} \cong \overline{AD}$] |
| 27 | P: | Ángulo-lado-ángulo. Aja. […] |

**[P1 22-27]**

En el ejemplo se observa la expresión *"¿por?"*, que generalmente es usada por la profesora cuando requiere una justificación. Entre otras expresiones usadas con el mismo fin están *"y ¿qué me lo permite?"* y *"¿… qué me lo asegura?".* Aunque en muchas ocasiones la profesora no parafrasea la afirmación que es objeto de justificación, los estudiantes reconocen la intención de la profesora, asociada a la norma de justificar y ante dichos cuestionamientos ellos mencionan la definición, teorema o postulado que condujo a la afirmación encadenada en la demostración. Como se observa en el ejemplo, la afirmación que debe ser justificada es la congruencia entre dos triángulos, con la que los estudiantes están de acuerdo [22, 23], y que es justificada a partir de uno de los teoremas que establece congruencia entre triángulos [26, 27].

***Pasos soporte de justificación:*** Luego de introducir una afirmación y su respectiva justificación en el proceso de demostrar, se menciona el paso o los pasos que se han incluido previamente en la demostración y que permiten deducir la afirmación o conclusión establecida. El mencionar dichos pasos permite explicitar aspectos de la estructura deductiva y encadenar las nuevas afirmaciones, con aquellas que ya se tienen en la demostración.

**Ejemplo**

Al realizar la demostración *un segmento tiene más de dos puntos,* los estudiantes dan varias afirmaciones sin justificarlas, por lo que la profesora requiere la justificación de las mismas, las cuales son dadas por los estudiantes y los pasos son soportados desde los pasos incluidos en la demostración.

59 Ignacio: El punto C. La coordenada de x, la coordenada de x más y sobre dos es la coordenada del punto C.

60 Germán: Eso. Sí, entonces decimos sea x más y sobre dos…

61 P: ¿Y qué me lo permite?

62 Ignacio: El postulado de puntos…

63 P: Entonces digo [sigue escribiendo la demostración], sea…

64 Ignacio: Sea C…

65 P: C el punto [varios le dictan].

66 Ignacio: Coordenadas.

67 María: Con coordenadas.

68 P: El punto.

69 Ignacio: Con coordenadas.

70 P: Con coordenada.

71 Ignacio: x más y sobre dos.

72 P: x más y medios [ (x + y)/2], ¿y eso, qué me lo asegura?

73 Germán: Eso me lo asegura el postula… a cada número real le corresponde un único punto.

74 Juan: El postulado puntos-recta, el cuatro y el…

75 P: A todo número real

76 Juan: El cuatro y el dos.

77 Germán: Le corresponde un único punto.

78 P: Le corresponde [copia] un punto de la recta, ¿ahí estoy usando qué?

79 Juan: El cuatro y el dos [se refiere a los pasos de la demostración],

80 P: El dos y el cuatro, aunque aquí en el cuatro me faltó decir una cosa… que éste era, este número es un real [(x + y)/2] ¿no? Entonces, dos y cuatro. […]

**[P3 59 - 80]**

En este fragmento tanto la profesora como los estudiantes mencionan los pasos dos y cuatro, como pasos que conllevan a afirmar que existe un punto con coordenadas *"x más y medios"* [72, 79 y 80]. La mención de los pasos usados es provocada por la profesora al preguntar *¿y eso, qué me lo asegura?, ¿ahí estoy usando qué?*. Gracias a la última pregunta los estudiantes reconocen que la profesora no pretende que ellos recurran a los elementos del sistema axiomático construido para justificar la afirmación, sino que mencionen los pasos previos que les permiten deducir dicha afirmación; ella generalmente usa esta pregunta como una manera de que los estudiantes evoquen pasos de la demostración.

El ejemplo que hemos propuesto no solo ejemplifica el código *pasos soporte de justificación*, sino que también ejemplifica el código *requerimiento de justificación*, ya que se observa una interacción en la que los estudiantes y la profesora acuerdan el paso a seguir en la demostración [75 - 72] cuya afirmación incluida en dicho paso es objeto de justificación, cuando la profesora requiere o pide la misma [72]. Los estudiantes justifican la inclusión del paso a partir del postulado correspondencia puntos-recta que pertenece al sistema axiomático construido hasta ese momento por la clase, que establece una correspondencia entre los puntos de una recta y los números reales [73 - 77].

***Requisitos incompletos de justificación:*** A este código corresponden aquellas interacciones que se producen en el desarrollo de una demostración, cuando se da una afirmación o conclusión con base en una justificación de la que no se tiene todas las condiciones del antecedente de ésta, generando una discusión sobre los requisitos faltantes en los antecedentes. Estas interacciones, al igual que las anteriores, buscan que el tipo de justificación que se dé acerca de un hecho matemático que va a ser introducido al sistema axiomático sea de carácter deductivo, por lo que se analiza si efectivamente en la demostración se han incluido todos los requerimientos de un teorema, postulado o definición, para ser usados.

**Ejemplo**

Luego de encontrar un número que está entre otros dos, surge una interacción en la que se busca la correspondencia entre el número y un punto de la recta.

| | | |
|---|---|---|
| 53 | P: | Entonces sabemos que $x$ es menor que $x$ más $y$ medios, menor que $y$ [escribe: $x < (x + y)/2 < y$]. Ésto es una… lo podemos demostrar, un teorema de los reales, bueno, ¿y entonces? |
| 54 | Daniel: | Por el teorema de ahorita [risas]. |

55 Ignacio: El teorema que acabamos de demostrar.

56 Daniel: Ahora tenemos la coordenada. O sea…

57 P: Pero aquí no hay tres puntos y allá yo comenzaba con tres puntos.

58 Germán: No. Pues entonces ahora otra vez aplicamos el...

59 Ignacio: El punto C. La coordenada de $x$, la coordenada de $x$ más $y$ sobre dos es la coordenada del punto C.

60 Germán: Eso. Sí, entonces decimos sea $x$ más $y$ sobre dos…

61 P: ¿Y qué me lo permite?

62 Ignacio: El postulado de puntos…

63 P: Entonces digo [sigue escribiendo la demostración], sea…

64 Ignacio: Sea C…

65 P: C el punto [varios le dictan].

66 Ignacio: Coordenadas.

67 María: Con coordenadas.

68 P: El punto.

69 Ignacio: Con coordenadas.

70 P: Con coordenada.

71 Ignacio: $x$ más $y$ sobre dos.

72 P: $x$ más $y$ medios [ $(x + y)/2$], […]

**[P3 53 - 72]**

En este fragmento la profesora llama la atención a Daniel e Ignacio, cuando intentan justificar el paso a seguir con base en un teorema que requiere la existencia de tres puntos colineales [57], pues en los pasos incluidos en la demostración, únicamente han asegurado la existencia dos puntos. Se produce una conversación en la que se busca justificar la existencia de otro punto en la recta; dicho punto es garantizado a partir de la correspondencia con el número real $x$ más $y$ medios; es decir, es el punto con coordenada $x$ más $y$ medios [59 - 72].

***Búsqueda de justificación:*** Al igual que los tres códigos anteriores, éste surge ante la norma de justificar; sin embargo a este código se asocian aquellas interacciones en las que no hay un elemento del sistema axiomático construido para justificar una afirmación que se considera relevante para el desarrollo de la demostración. Por eso se introduce un nuevo elemento al sistema axiomático, a partir de una genuina construcción colectiva de la demostración.

**Ejemplo**

En el proceso de demostrar que las diagonales de un paralelogramo se bisecan, surge la necesidad de demostrar que las diagonales de un paralelogramo se intersecan, ya que no hay un teorema que permita justificar esta afirmación.

| | | |
|---|---|---|
| 37 | P: | Sí, estás tratando de mostrar que las diagonales [de un cuadrilátero] se bisecan. Estás tratando de demostrar que si el cuadrilátero es un paralelogramo, las diagonales se bisecan. |
| 38 | Ignacio: | Por eso. |
| 39 | Leopoldo: | Sí, pero es que no sé como… ¿yo cómo sé que las diagonales se intersecan? |
| 40 | P: | ¡Ah! Una pregunta muy buena ¿Cómo sabemos que las diagonales en un paralelogramo se cortan? |
| 41 | Estudiante: | Porque el interior del cuadrilátero es convexo. |
| 42 | P: | ¿Por qué el cuadrilátero es convexo? |
| | […] | |
| 50 | Leopoldo: | Profe, tenemos que demostrar que un paralelogramo es un cuadrilátero convexo ¿no? |
| 51 | P: | Tendríamos que demostrar que es un cuadrilátero convexo si queremos usar eso. [Varios hablan al tiempo sobre el asunto, pero son se comprende lo que dicen] |
| 52 | Germán: | Pero es que… O sea, yo tengo una pregunta: ¿Simplemente no digo que E sea el punto de intersección o que E sea el punto de corte de las diagonales? Yo asumo… O no asumo, sino que no… simplemente no tomo esa característica, sino que hablo por ejemplo de los otros dos ángulos y hago la congruencia entre los triángulos. Entonces, simplemente como necesito saber que se bisecan, entonces demuestro eso. ¡Ah! pero después si debo demostrar la intersección de las diagonales. [Todos se ríen] |
| 53 | P: | No pues sí. Pero hemos asumido, hemos asumido en todo ésto que las diagonales del paralelogramo… |
| 54 | Germán: | Si se cortan. |
| 55 | P: | O del cuadrilátero se están cortando. Pero es una pregunta muy importante, ¿será que si se cortan? ¿Tenemos una forma de demostrar que realmente se cortan? Es otra cosa que voy |

a dejar en el aire, ¿sí?

56 Ignacio: Profe, si se puede.

57 P: ¿Cómo demostrar que las diagonales se cortan?.

58 Ignacio: Por eso dije que… Por eso yo me atreví a decir que el interior del paralelogramo es convexo. Sí, porque… y después sería decir que el segmento BD, exceptuando los puntos B y D está en el interior de ese paralelogramo. Y lo mismo con el segmento AC, entonces… como todo está en el interior del… del… como todos los segmentos están en el interior del paralelogramo, entonces la interse… entonces la intersección también estaría ahí, pero no sé cómo…

59 P: Pero es que, ¿quién dijo que se tienen que cortar?

60 Germán: Pues es que…

61 Estudiante: En el paralelogramo pues da, pero al hablar de…

62 P: Si se cortan… sí. Pero, ¿si no? Yo puedo tener dos segmentos en el interior que no se corten.

63 Germán: En el interior de…

64 P: Sí, estamos tratando de mostrar.

65 Ignacio: Únicamente en el secante, pero no hay necesidad de que se corten.

66 P: […] Entonces nos queda esa gran interrogante. Y muy bueno que me la hayas recordado. Vamos a suponer que si, por ahora. Pero nos queda por demostrar eso, porque todo depende de eso. Es otra cosa que tenemos que ir pensando. […]

**[P1 37 - 66]**

En este fragmento, Leopoldo se ve limitado para continuar con el desarrollo de la demostración al no tener cómo justificar que las diagonales de un cuadrilátero se intersecan [39], por lo que la profesora le da relevancia a esta pregunta al observar que no se ha incluido al sistema axiomático un teorema que establezca dicha relación, y da espacio para que los estudiantes den ideas de justificación, con la pregunta *¿Cómo sabemos que las diagonales en un paralelogramo se cortan?* [40]; varios estudiantes intervienen en un intento de justificar la intersección, y aunque en algún momento la profesora dice que deben asumir dicha relación [66], los estudiantes insisten en justificarla hasta lograrlo. Este tipo de interacciones se dan con frecuencia en la clase, ya que en la construcción del sistema axiomático, se presenta siempre la necesidad de justificar aspectos que nos permitan desarrollar dicha construcción.

## 4.2 CATEGORÍA CONJETURAR

A esta categoría pertenecen las interacciones que se basan en el estudio colectivo de enunciados geométricos planteados por los estudiantes, que mencionan hechos de los que se tiene seguridad, a partir de la exploración asociada a un problema que la profesora ha propuesto en la clase.

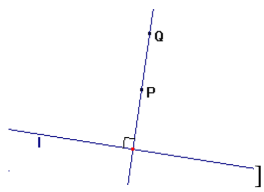
***Presentación de conjeturas:*** En el proceso de estudiar las conjeturas que proponen los estudiantes, la profesora promueve la presentación de las mismas, ya sea por parte de los estudiantes o de ella, de acuerdo con los requerimientos o características de cada una, abriendo paso al estudio de las conjeturas propuestas por los estudiantes.

### Ejemplo

Luego de que los estudiantes han tratado de dar solución al problema "*Se da una recta, dos puntos P y Q en el mismo semiplano determinado por la recta l, determine el punto R [de la recta l] para el cual la suma de las distancias [PR y QR] es la menor*", plantean conjeturas que son expuestas al grupo.

01 P: […][9] Un caso que consideraron ustedes fue ¿cuál?

02 María: […][10] . Pusimos a P y a Q, y después animamos a Q sobre… o sea que quedaran colineales… Q y P sobre la perpendicular. [por P a *l*] [Representa algo así:




03 P: Y ahí… les da… en ese caso.

[9] La profesora le indica a María cuál caso presentar, de los que ella y su compañero propusieron.
[10] María repite las condiciones dadas en el problema.

04 María: Sí.

05 P: O sea, un caso era que Q y P estuvieran sobre la perpendicular de P a la recta.

06 María: Sí.

07 P: Y entonces en ese caso R es…

08 María: R es…

09 P: el punto de de intersección. ¿Sí?

10 María: el punto de de intersección.

11 P: Bueno, gracias. Ese es un caso, ¿sí? Otro caso; el caso de ustedes fue ¿cuál?

[...]

19 P: Otro caso ¿sí?, otro caso especial. ¿Sí? Gracias. Entonces R. Esto es muy importante. Esto que estoy mostrándoles es muy importante. Cuando uno tiene que resolver un problema y a veces como que el problema no sabe como por dónde comenzar a… a resolverlo, uno simplifica las condiciones y empiezan entonces a surgir otras ideas. Entonces una [forma] es: bueno, imaginémonos que Q está en la misma recta perpendicular desde P a la recta *l*, y entonces R sería "fulanito". Otro caso es: imaginémonos que P y Q están a la misma distancia de la recta *l*. Y entonces R es… "fulanito". Otra posibilidad Henry es… ¿qué?

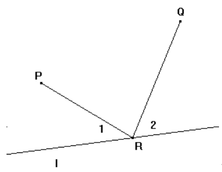
20 Henry: [Pasa Henry al tablero] Tengo la recta *l* y tengo el segmento digamos… PQ

21 P: Los puntos P y Q.

22 Henry: los puntos P y Q. Entonces, pues… ubico cualquier… tengo que ubicar un punto… ubico el punto R…

23 P: Un punto R.

24 Henry: un punto R, tal que… trazo este segmento [PR] y éste [segmento QR]. Entonces si… cumplo que el ángulo... que este ángulo es congruente con éste [Hace una representación y señala los ángulos




]

25 P: 1 y 2… ángulos 1 y 2

26 Henry: el ángulo 1 y [el ángulo] 2 son congruentes, entonces la suma de las distancias va a ser la menor.

27 P: Y… Gracias. O sea, él dice: busco a R para que el ángulo 1 y [el ángulo] 2 sean congruentes. Y entonces me da ¿Sí? […][11] Pero, el problema con la de ellos es que es una conjetura dinámica. Es decir, no puedo encontrar a R sino con el computador. Pero, ¿qué hago cuando estoy con papel y lápiz? ¿Cómo hago yo para estar sabiendo exactamente en qué momento me va a dar que

[11] Se presenta a la comunidad una construcción similar a la propuesta por Henry y su compañero, que requiere de la geometría dinámica.

esos dos ángulos son congruentes? […][12] Pero se fijaron en los ángulos, lo cual es algo muy interesante; excepto que como les digo con papel y lápiz, ¿cómo hago? […][13] Darío y Leopoldo tienen otra propuesta. [Extiende su mano con el marcador para que Darío pase al tablero].

**[P9 1 - 27]**

En este fragmento observamos que la profesora promueve la presentación de conjeturas por parte de los estudiantes, cuando se dirige a algunos de ellos para que pasen al tablero [1, 11, 19, 27]. No en todos los episodios que ejemplifican esta acción, se cuenta con la participación directa de los estudiantes, ya que en muchas ocasiones la profesora es quien realiza la presentación de las conjeturas. Sin embargo, la profesora siempre favorece la presentación de todas las conjeturas procurando que la exposición de una no le quite sentido a la exposición de la otra. Como se observa en el ejemplo, primero pide presentar la conjetura propuesta por María y su compañero, quienes condicionaron los puntos P y Q, al ubicarlos en una misma recta. Otra conjetura presentada exige que para encontrar el punto R se requiere del uso de la geometría dinámica, pues se necesita asegurar la congruencia entre los ángulos 1 y 2 [26]. Finalmente la profesora promueve la presentación de una conjetura general, pues abarca los casos anteriores, al no condicionar los puntos P y Q y no requerir el uso de la geometría dinámica cada vez que se desee hallar el punto R [27].

***Correspondencia conjetura – construcción:*** Este código agrupa los fragmentos en los que se estudia si el antecedente corresponde a las propiedades de los objetos dados con las que se realizó la construcción o las que se impusieron por arrastre en el proceso de exploración, y si el consecuente corresponde a las características geométricas encontradas. En este tipo de interacciones el papel de la profesora es clave, ya que es ella quien pide a los estudiantes que den cuenta del proceso de exploración que realizan para proponer una conjetura, describiendo la construcción que conllevó a dicha conjetura y además, es ella quien promueve la revisión de conjeturas a la luz de la construcción.

**Ejemplo**

[12] Melisa pregunta por las condiciones que se le dieron a los puntos P y Q.
[13] Pasa un estudiante al tablero a presentar una construcción similar a la de Darío y Leopoldo.

Luego de que los estudiantes trataron de dar solución a la situación "¿Cuál es la relación [que existe] entre el tipo de triángulo y la propiedad: dos de sus alturas son congruentes?" la profesora recoge las conjeturas, las organiza, y promueve su análisis en la clase.

| | | |
|---|---|---|
| 01 | P: | […][la profesora está observando un resumen que elaboró con las construcciones y las conjeturas realizadas por los grupos] Quiero que el grupo C me lean lo que me escribieron para la construcción. Ponemos atención por favor, porque quiero… quiero que se fijen muchísimo en lo que dicen el grupo C y después en la conjetura que me… que establecen. |
| 02 | Leopoldo: | Se construyó el triángulo ABC, luego las alturas del triángulo… y mediante el arrastre se logró que las dos alturas [dos de las alturas del triángulo] fueran congruentes. Conjetura… |
| 03 | P: | Espera un minuto. ¿Escucharon eso, no? Creo que muchos hicieron la misma construcción […], me lo lees otra vez y ponemos atención. |
| 04 | Leopoldo: | Se construyó el triángulo ABC, luego las alturas del triángulo y mediante el arrastre, se logró que dos de las alturas fueran congruentes. |
| 05 | P: | Sí. Ahora la conjetura. |
| 06 | Leopoldo: | Conjetura. Si un triángulo tiene dos lados congruentes, entonces dos de sus alturas son congruentes. |
| 07 | P: | Bueno, entonces… mira. Vamos a… vamos a determinar ahí dos… dos cosas. Una, vamos a llamar *p*… eh… lados… del triángulo ¿no? Y *q*… Y *q*… alturas congruentes… […][Escribe en el tablero: *p*: lados congruentes del triángulo, *q*: alturas congruentes] Y grupo C… léanme otra vez la construcción. |
| 08 | Leopoldo: | Se construyó el triángulo ABC, luego las alturas del triángulo y mediante el arrastre se logró que dos de las alturas fueran congruentes. |
| 09 | P: | O sea que ustedes obligaron a qué… ¿A *p* o a *q*? |
| 10 | Leopoldo: | Eh… las alturas, a *q*. |
| 11 | P: | A *q*… ¿Sí? |
| 12 | Leopoldo: | Sí. |
| 13 | P: | Esto es lo que ustedes obligaron… ¿Qué pasa? ¿Qué pasa Leopoldo? A ver… […] |
| 14 | Leopoldo: | No sé. Creo que de *q* dedujimos… |
| 15 | P: | De *q* dedujeron *p* ¿cierto? ¿Y cuál fue la conjetura que me estableciste? |
| 16 | Leopoldo: | Pues que si las alturas son congruentes… ah… si *p* entonces q… |
| 17 | Estudiante: | Si q entonces p. |

**[P7 1 - 17]**

En las interacciones codificadas con *Correspondencia conjetura – construcción* es común observar que la profesora pide a los estudiantes leer la construcción realizada, centrando la atención sobre dicha construcción y luego solicita leer la conjetura propuesta a raíz de ésta. Cuando la profesora promueve la revisión de conjeturas a la luz de la construcción [1, 3, 5], es porque no hay una correspondencia entre ellas, como se observa en el fragmento. Sin embargo, ella no evalúa directamente dicha correspondencia, sino que promueve y gestiona la participación de los estudiantes, para que sean ellos quienes la determinen. En el fragmento que hemos propuesto, la manera en que la profesora promueve la participación de los estudiantes es traduciendo el enunciado de la construcción realizada por Darío y Leopoldo, mediante dos proposiciones ($p$ y $q$) [7] e impulsando que ellos se den cuenta que la condicional que propusieron en la conjetura, no corresponde con la condicional de la construcción, que dependía de las propiedades que obligaron por arrastre. Por el impulso que realizó la profesora logró que los estudiantes, en especial Darío y Leopoldo intervinieran e interactuaran principalmente con la profesora para describir que la condicional que ellos establecieron en la conjetura es $p$ implica $q$, establecer la no correspondencia entre la construcción y la conjetura e identificar cuál conjetura se debió proponer a la luz de la construcción realizada, la cual era $q$ implica $p$ [9 - 17].

Aunque en estas interacciones la mirada se centra en determinar si hay una correspondencia entre la construcción realizada y la conjetura propuesta, observamos que la finalidad principal de la profesora con este tipo de interacciones es que los estudiantes ganen comprensión del papel que juega cada parte de una condicional que puede ser clave al momento de formular una conjetura.

***Revisión del enunciado:*** Otra interacción con la que la profesora pretende que los estudiantes adquieran herramientas para formular conjeturas y que ellos sean más cuidadosos al momento de formularlas, es la de impulsar la revisión de las propiedades que están presentes en una conjetura, con la finalidad de identificar y explicitar colectivamente, si sobran propiedades o si se deben incluir en caso de hacer falta.

**Ejemplo**

Luego de que los estudiantes trataron de dar solución al problema: “¿Cuál es la relación [que existe] entre el tipo de triángulo y la propiedad: dos de sus alturas son congruentes?”, la profesora recogió las conjeturas y las organizó para ser proyectadas y analizadas en clase.

| | | |
|---|---|---|
| 34 | P: | La conjetura del grupo F […], dice lo siguiente [lee del acetato la conjetura del grupo F]: Si el triángulo… “Si ABC es un triángulo y la medida de uno de sus ángulos es mayor a noventa y los lados que determinan este ángulo son congruentes, entonces el triángulo es isósceles y dos de sus alturas son congruentes”. Quiero que examinen la propuesta de ellos y me digan qué piensan. |
| 35 | María: | Es como muy local. O sea… |
| 36 | P: | ¿Muy local? |
| 37 | María: | obliga, obliga a que el triángulo [uno de los ángulos del triángulo] sea mayor que noventa. |
| 38 | P: | Miren la propuesta, si ¿y? |
| 39 | María: | Pues… o sea, eso se cumple, pero para ese caso específico. |
| 40 | Estudiante: | Para ese caso. |
| 41 | P: | ¿Qué es lo que se cumple? |
| 42 | Estudiante: | Que las alturas son congruentes. |
| 43 | María: | Que el triángulo es isósceles si dos de sus alturas son congruentes. |
| 44 | P: | Ah… a ver Orlando, ¿tú qué dices? |
| 45 | Orlando: | Lo que pasa que es que [según lo dicho] no puede ser cualquier triángulo isósceles sino uno con la característica de que el ángulo donde… |
| 46 | P: | El ángulo del vértice, se llama… el ángulo del vértice es el nombre que se le da. |
| 47 | Orlando: | Tiene que ser mayor de noventa, el que forma los lados iguales. |
| 48 | P: | ¿Sí? |
| 49 | Germán: | No sé si se estaría cumpliendo para el resto de triángulos porque cuando el triángulo tenga el vértice igual a noventa entonces no cumpliría.... |
| 50 | P: | El ángulo del vértice. |
| 51 | Germán: | Cuando el ángulo del vértice |
| 52 | Estudiante: | o menor |
| 53 | Germán: | sea noventa o menor que noventa no cumpliría. |
| 54 | Estudiante: | No cumple esa condición. |
| 55 | P: | Según ellos, no parecería que se cumpliera. ¿Sí? Entonces es una conjetura que está, como dice María, muy localizada. Y no lo más general posible. |

**[P8 34 - 55]**

Las interacciones asociadas a este código son promovidas por la profesora cuando observa que hay conjeturas que los estudiantes no han escrito de forma correcta, pues les faltan o les sobran condiciones. En este tipo de interacciones, la profesora propone el estudio de la conjetura cuando la presenta y pide a los estudiantes que examinen las propuestas [34], buscando que los estudiantes analicen los enunciados e identifiquen las falencias que éstos tienen. En el ejemplo que hemos propuesto María, Orlando y Germán observan que la forma en que la conjetura está escrita presenta un caso particular del teorema acerca del triángulo isósceles, cuando el grupo que propuso la conjetura adicionó como propiedad que el ángulo del vértice debía ser mayor a noventa grados [37, 39, 49, 51]. Así formulada, no expresa lo que sucede con las alturas del triángulo, en los otros casos.

***Verificación geométrica de conjeturas:*** a este código están asociadas aquellas interacciones en las que la profesora o los estudiantes realizan una comprobación empírica mediante acciones visibles (usando geometría dinámica) sobre una representación, con el propósito de poner a prueba una conjetura establecida. Por esta vía se aceptan o rechazan las conjeturas; en caso de ser aceptadas se validan e introducen al sistema axiomático. Para rechazar las conjeturas, la profesora promueve que los estudiantes busquen contraejemplos que muestren que las propiedades geométricas mencionadas no se cumplen.

**Ejemplo**

Como solución a la situación "se da una recta, dos puntos P y Q en el mismo semiplano determinado por la recta l, determine el punto R [de la recta l] para el cual la suma de las distancias [PR y QR] es la menor", Ana y Germán conjeturan que "R se encuentra en el punto de corte de la mediatriz del segmento PQ con la recta *l*". Se usa la calculadora para comprobar gráficamente la falsedad de la conjetura.

| | | |
|---|---|---|
| 150 | P: | [Nancy ha hecho la construcción con Ignacio, conecta su calculadora al video screen]. Bueno, aquí muestra… aquí muestra Nancy, que… Nancy muestra |
| 151 | Nancy: | Aquí [la mediatriz] quedaría en el segmento [arrastra P hasta que la mediatriz corta al segmento MN]. |
| 152 | P: | Bueno, primero mostremos el contraejemplo. Contraejemplo… [Nancy mueve MN hasta |

que el corte de la mediatriz de PQ se sale del segmento MN], ni siquiera queda dentro del segmento de… de las proyecciones… MN. Y bueno, vamos a ver en qué condiciones, de pronto sí se tendría. Entonces vamos a ver... [Nancy mueve P buscando que la mediatriz corte a MN en R] […]

153 Daniel: Cuando están a la misma altura.

154 P: Cuando están a la misma altura parece que sí… P y Q. ¿Sí? Entonces, lo que pasa cuando trabajamos con geometría dinámica es eso. Que a veces se nos olvida poner en nuestras conjeturas todas las condiciones que estamos viendo. Porque es muy posible que lo que ellos vieron fue cierto, pero no identificaron las demás condiciones. Entonces el teorema que proponen no es cierto porque faltan todas las condiciones.

**[P9 150 - 154]**

En este caso el papel de la profesora no es el evaluar la certeza de las conjeturas, sino el de promover en los estudiantes un estudio centrado en la aceptación o no de las mismas. Para ello se arrastran los objetos geométricos que se han incluido en el antecedente de la conjetura y si se mantienen las propiedades del consecuente, la conjetura es aceptada. En los otros casos, el encontrar una representación que muestre un contraejemplo lleva a no aceptar la conjetura, como es el caso del ejemplo que presentamos, en el que luego que Nancy arrastra los puntos P y Q, se entrevé que el punto R no corresponde al buscado. No es la profesora quien toma la decisión de aceptar o rechazar el enunciando, sino que deja esa decisión en manos de los estudiantes al invitarlos a explorar e identificar en qué momentos el enunciado propuesto por el grupo de Germán y Ana, es falso o verdadero [151-153].

***Validación de conjeturas:*** Luego de aceptar una conjetura, la profesora o algún estudiante promueven la búsqueda de pasos básicos de la demostración que permiten establecer la validez de ella. A comparación de las interacciones anteriores, con las que se buscaban que los estudiantes tuvieran más cuidado con la exploración de las situaciones propuestas y la escritura de las conjeturas encontradas, esta interacción busca institucionalizar las conjeturas que fueron aceptadas como ciertas para incluirlas como teoremas en el sistema axiomático.

**Ejemplo**

Como solución a la situación “En el ángulo a se escogen dos puntos B y C, uno a cada lado del ángulo. ¿Cuándo está el punto medio del segmento BC en la bisectriz del ángulo A?”, un grupo propone la conjetura “Si $\overline{\mathrm{BC}} \perp \overrightarrow{\mathrm{AM}}$ entonces K es el punto medio de $\overline{\mathrm{BC}}$”. Luego de que el grupo explica la conjetura, la profesora la escribe en el tablero e invita a validarla.

| | | |
|---|---|---|
| 65 | P: | [La profesora escribe en el tablero la conjetura, mientras Darío le dicta: “Si $\overline{BC} \perp \overrightarrow{AM}$ entonces $K$ es el punto medio de $\overline{BC}$”] Bueno, ¿y lo puedes mostrar? |
| 66 | Darío: | Pues… entonces tengo que [el segmento *BC*] es perpendicular [a la semirrecta *AM*] entonces éste [ángulo *K*] es recto. ¿Cierto? |
| 67 | P: | ¿Cuál? ¿Quién? Habla porque es que yo después... este, este, este, yo no... |
| 68 | Darío: | El ángulo... el ángulo AB, AKB es recto, es recto ¿cierto? |
| 69 | P: | Sí. |
| 70 | Darío: | Entonces pues hay un teorema que dice... bueno, forman los cuatro ángulos rectos. |
| 71 | P: | Sí. |
| 72 | Darío: | Entonces tengo que [ángulo] AKB es recto y que también [ángulo] AKC es recto. [Escribe en el tablero ∠AKC es recto]. Entonces tengo que esos dos son congruentes, estos dos son ángulos congruentes. Entonces tengo que [segmento] AK es congruente con ese mismo ¿cierto? Entonces esto [segmento AK] congruente con este mismo [segmento AK]. Y como esta es bisectriz [rayo AM], entonces… congruen… |
| 73 | P: | ¿Quiénes? ¿Quién? |
| 74 | Darío: | [ángulo] BAK es congruente con [ángulo] KAC. Entonces por criterio de congruencia ángulo - lado – ángulo, ya tengo que estos dos [triángulo AKC y triángulo AKB] son congruentes. Entonces, también tengo que como es por intersección entonces que K está entre B y C, entonces ya también tengo para demostrar que la medida de éste [segmento CK] es congruente con ésta, [medida del segmento BK] entonces, la medida… |
| 75 | P: | ¿La medida de quién? |
| 76 | Darío: | La medida de K a C. KC. |
| 77 | P: | Del segmento KC |
| 78 | Darío: | Es igual a la de K a B |
| 79 | P: | A la del segmento BK. Entonces conjetura… verdadera. |

**[P7 65 - 79]**

Aunque la interacción se relaciona con dar pasos claves para la demostración, no las incluimos en las interacciones asociadas a la categoría demostrar, ya que la intención apunta a admitir la conjetura y no a elaborar la demostración formal de la misma. Como se observa en el ejemplo, la profesora invita a Darío a mostrar la validez de su conjetura, él da los pasos claves de la demostración [68-78] y la profesora no exige avanzar en la justificación.

## 4.3 CATEGORÍA USAR DEFINICIONES

En la categoría *usar definiciones,* se han incluido las interacciones que contribuyen al objetivo de formular e institucionalizar definiciones para aquellos objetos geométricos que se desean incorporar al sistema axiomático, y usar en las demostraciones.

***Proponer definición:*** En este código se agrupan aquellas interacciones en las que la profesora pide a los estudiantes enunciar una definición y se genera una conversación que lleva a estudiar las relaciones entre las propuestas que formulan. Generalmente la profesora les pide que pasen el tablero y copien las definiciones, o espera que ellos las redacten y las copia haciendo una lista de las propuestas.

**Ejemplo**

En el estudio de una conjetura se hace mención a un rectángulo, objeto geométrico que no se ha incorporado al sistema axiomático. La profesora indaga por la definición que conocen los estudiantes, pasando a varios de ellos al tablero para que hagan sus propuestas.

| | | |
|---|---|---|
| 11. | P: | […] Escríbanme sus definiciones [de rectángulo]. […] Vamos a tratar de definir, […] Vamos a ver si son distintas. Escríbanme lo que ustedes creen que es un rectángulo. [Pasan al tablero varios estudiantes y escriben 4 definición: Darío: Es un paralelogramo que tiene al menos un ángulo recto. Julián: Es un paralelogramo ABCD cuyos ángulos A, B, C, D son congruentes. Ignacio: Es un paralelogramo cuyos ángulos son congruentes. Marina: Es un cuadrilátero con dos pares de lados opuestos paralelos y al menos un ángulo interno recto. Germán: cuadrilátero con sus lados adyacentes perpendiculares] |
| 12. | P: | Tenemos en realidad cuatro definiciones. |
| 13. | Ignacio: | Sí, cuatro. |

14. P: Porque estas dos coinciden [se refiere a las definiciones de Julián e Ignacio]. La de Marina, es un cuadrilátero con dos pares de lados opuestos paralelos ¿O sea?
15. Marina: Paralelogramo.
16. P: Paralelogramo. Y al menos un ángulo interno recto, luego en el fondo es igual a ésta [la de Darío]. Entonces tenemos tres. La de…
17. Ignacio: Germán.
18. P: La de Germán es: un cuadrilátero con lados adyacentes perpendiculares.
19. Germán: Con sus lados adyacentes perpendiculares.
20. P: ¿De acuerdo?
21. Alguien: Sí**.**
22. P: Cuadrilátero con…
23. Germán: Lados adyacentes perpendiculares.
24. P: Todos los pares de lados adyacentes perpendiculares. O sea que en pocas palabras, Germán está diciendo que en el rectángulo.
25. Germán: Hay cuatro ángulos rectos.
26. P: Hay cuatro ángulos rectos. ¿Sí? En cambio aquí [Julián e Ignacio] dicen, cuyos ángulos son congruentes.
27. Julián: Es la misma.
28. P: […] Bueno, y aquí [Julián, Ignacio y Darío] dicen paralelogramo.
29. Julián: Sí.
30. P: ¿Ésta equivale a ésta? o ¿no? [Se refiere a las definiciones de Germán y Marina] Cuadrilátero con lados adyacentes perpendiculares, entonces… Entonces ¿es paralelogramo? ¿Por qué? [Varios hablan al tiempo].
31. Ignacio: Porque son perpendiculares a una misma recta [los lados paralelos].

**[P5 11-31]**

En estas interacciones el papel de la profesora se centra en dos aspectos: uno, dar paso a que los estudiantes propongan diferentes definiciones sobre un objeto geométrico, que no es desconocido por ellos, y por lo cual tienen imágenes conceptuales para poderlo definir; dos, guiar una discusión en la que se analizan las diferentes propuestas en términos de sus relaciones, admitiendo o descartando algunas de las propuestas hechas. En el ejemplo se observa que los estudiantes dan sus propuestas de definición [11], y se pasa a hacer el análisis correspondiente. La primera acción que la profesora realiza es descartar una de las propuestas, al encontrar que dos de las definiciones son exactamente iguales [12, 14] reduciendo las propuestas a cuatro. Luego se analizan las propuestas restantes, analizando parejas de propuestas en las que se evidencian equivalencias, como en el caso de la definición que menciona de forma explícita que el rectángulo es un paralelogramo y aquella que lo hace dando las propiedades del paralelogramo [14-34]. Interacciones como estas son típicas cuando se desea introducir un nuevo objeto geométrico, del cual los estudiantes tienen alguna noción, al sistema axiomático.

***Búsqueda de propiedades – definición:*** Este código recoge aquellas interacciones en las que luego de ver la necesidad de introducir un objeto geométrico al sistema axiomático, la profesora pide a los estudiantes que enuncien una definición y se genera una conversación que lleva a explicitar las propiedades que deben incluirse en su formulación. En este tipo de interacciones se discute sobre una o dos propuestas dadas, se analizan y se modifican a partir de analizar propiedades que se deben incluir. Se diferencia de las interacciones codificadas anteriormente, porque acá no se buscan implicaciones entre las propuestas.

**Ejemplo:**

En el momento de la exploración que se desarrolla la dar solución a la situación *"Estudie la relación entre el tipo de triángulo, y la relación dos de sus alturas son congruentes"* surge la necesidad de definir altura de un triángulo.

| | | |
|---|---|---|
| 1. | P: | Tenemos que introducir la definición de altura. ¿Quién hace la definición de altura? ¿Quién la recuerda? Ustedes la estudiaron el semestre pasado… creo. |
| 2. | María: | Es la distancia… |
| 3. | Efraín: | Es la distancia del punto medio de un triángulo… |
| 4. | P: | Efraín. ¿Qué es la altura? |
| 5. | Efraín: | Es la distancia desde el punto medio de un triángulo hasta su ángulo opuesto. |
| 6. | P: | ¿Alguien controvierte esa definición? [Juan. y Leopoldo alzan la mano] Juan. |
| 7. | Juan: | Es la distancia desde un vértice hasta la recta que contiene al lado opuesto del vértice. |
| 8. | P: | Ambos hablan de distancia. |
| 9. | María: | La mínima distancia. |
| 10. | P: | Lo que hacen mención es hacia dónde. |
| 11. | Juan: | No es necesario decir mínima distancia, porque al decir distancia se supone que ya se ha hablado de distancia de un punto. |

12. P: ¡Ah! pero tendríamos entones que haber hablado de la distancia de un punto a una recta. Pero… yo les pregunto, la altura ¿es un objeto geométrico?, o, ¿es un número?
13. Efraín: Es un número.
14. Varios: Un objeto.
15. María: Es un segmento.
16. P: Efraín.
17. Efraín: Un segmento.
18. P: Entonces no puedo decir que es la distancia, porque si es una distancia es un número. Es un objeto geométrico. ¿Qué objeto geométrico?
19. Alguien: Un segmento.
20. P: Un segmento.

**[P6 1-20]**

En este tipo de interacciones se analizan las propuestas de propiedades para incluir en la definición, buscando que los estudiantes identifiquen los elementos que se deben incluir. En el ejemplo se observa cómo, luego que uno de los estudiantes ha dado una idea de altura de triángulo [3-5] en la que menciona la distancia, la profesora la cuestiona [6] esperando que algún estudiante del grupo diga si está de acuerdo o no. Lo que consigue es otra propuesta para definir este elemento geométrico. Luego de tener dos propuestas, la profesora busca que los estudiantes identifiquen que la distancia no es una propiedad de la altura y da pistas con la pregunta: *la altura ¿es un objeto geométrico?, o, ¿es un número?* llevándolos a establecer que al ser un objeto geométrico la propiedad con la que se define altura no puede ser una distancia, sino que debe empezarse a definir como objeto, es decir como segmento [12-20].

***Equivalencia entre definiciones:*** Este código incluye situaciones en las que, dada una definición inicial de un objeto geométrico, se revisan las condiciones usadas en la construcción de dicho objeto, lo que lleva a establecer una nueva definición; se analiza si las dos definiciones son del mismo. En el siguiente fragmento se muestra como, luego de construir por medio de la calculadora un ángulo recto, se genera una interacción para analizar la equivalencia entre la definición usual y aquella que surge en la construcción.

**Ejemplo**

1. P: Bueno. Entonces, entonces Germán, ¿cuál es la definición de ángulo recto?

2. Varios: Un ángulo…

[…]

5. Germán: Un ángulo es recto…O sea. Bueno, sí. Un ángulo es recto si la, si su medida es 90 [la profesora escribe eso y le antepone D1].

[…]

8. P: Bueno. ¿Sí? Pero miren [la construcción] que cuando nos dio al fin ese noventa, ¿qué condiciones teníamos?

[…]

11. Ignacio: Que los rayos pertenezcan a la misma…

12. P: Tiene dos [propiedades], son dos ángulos que forman par lineal, y que son…

13. María: Adyacentes.

[…]

15. P: Sí, forman par lineal.

16. Alguien: Congruentes.

17. P: Y son congruentes. Entonces ¿podría yo definir esto así? Un ángulo [escribe eso como D2] es recto, si… si forma par lineal, si forma par lineal con otro ángulo congruente a él. Sí. ¿Podría yo definir ángulo recto así? […] Son dos posi… Una que ustedes conocen desde tiempos… ¿Sí? Y otra que estoy ahí… inventándome, usando lo que hizo Darío con la cal… con la tarea que yo le puse. Pero, no sé si son la misma. […] Si son dos definiciones, dos definiciones para el mismo objeto, o si estoy definiendo cosas distintas.

18. Germán: O sea…pues estás definien… O sea, son las… las definiciones son… no son iguales. Son similares. Sino que una hace mención a un ángulo y la otra hace mención a un par lineal. […]

19. P: Bueno, un minuto. Entonces, difieren.

20. Germán: Sí.

21. P: Y... y tú ¿qué es lo que me vas a decir? Por el postulado del par…

22. Germán: Por el, o sea… ahí, o sea, en la definición dos… la profesora se basa en el postulado, en el postulado del par lineal…

23. P: Yo no me basé en el postulado del par lineal, yo me basé en lo que yo vi.

24. Germán: Pues, pero aunque, o sea, argumentando eso, se puede argumentar mediante el postulado del par lineal, para decir que…

25. P: Bueno. Entonces él ya me está tratando de mostrar algo. El argumento que me quiere dar Germán, es que realmente las dos definiciones son equivalentes. Y si yo quiero tener estas dos definiciones, tendría que mostrar que son equivalentes. Es decir, que dada una, se puede demostrar la otra y viceversa. Entonces Germán, ¿tu cuál vas a hacer? [risas] Definición 2

a…

**[P4 1 - 25]**

Luego de definir ángulo recto de la manera usual revisa la construcción de un ángulo recto que Darío hizo en la calculadora y se indaga sobre las condiciones geométricas que permitieron llegar a la construcción. Se recogen estas condiciones para proponer otro enunciado que define ángulo recto. Las acciones que describen esta interacción buscan determinar dos definiciones del mismo objeto para ser comparadas, buscando implicación entre ellas.  Después que se tienen las dos definiciones, se busca que los estudiantes identifiquen la equivalencia entre ellas, lo cual se observa en el ejemplo cuando la profesora, indaga sobre si evidentemente las dos definiciones caracterizan el mismo objeto o definen objetos diferentes, acción que desencadena una discusión entre Germán y la profesora [18-25] en la que Germán comienza a justificar informalmente la equivalencia entre las definiciones.

***Reconocimiento de los componentes de una definición:*** Con este código se caracterizan las interacciones que se desarrollan cuando en el proceso de demostrar la equivalencia entre dos definiciones, la profesora guía el proceso de reconocimiento de las propiedades incluidas en una definición para aprovechar en las demostraciones.

**Ejemplo**

Con base en la definición: un ángulo es recto si es congruente con otro que es par lineal con él, la cual se ha llamado como definición 2; se busca demostrar que el ángulo mide 90º, es decir que se pueda deducir la definición: un ángulo es recto si mide 90º, la cual se ha llamado definición 1. En la interacción que se presenta se parte del $\angle DAC$ para hacer la demostración [ver figura 2].

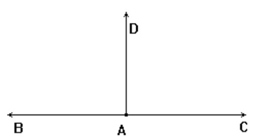



*Figura 2. Ángulo recto*

56. P: Entonces existe otro ángulo, ¿quién es? BAD... es recto. Estamos usando esta definición [se refiere a la 2 definición]. Entonces tiene otro ángulo que forma par lineal con él. Entonces, es par lineal con… [Le dicta para que Melisa complete la frase] con el dado.

57. Melisa: Y eso lo… lo justifico…

58. P: Definición dos. [2. Existe $\angle BAD$ es par lineal con $\angle DAC$ ; 2. Dado]. Y, con… forma par lineal con otro ángulo y es congruente a él. Entonces te falta esa parte. La definición dos me da dos cosas: existe el otro [ángulo] que forma par lineal con él, y… Y si quieres paso tres, o si quieres ahí las dos cosas… Tú eliges.

59. Melisa: Entonces los ángulos son congruentes…

60. P: Son congruentes. Ahí, hasta ahora solo ha usado la definición. Tengo un ángulo recto, entonces la definición dos me dice: ¡ah! entonces existe otro ángulo que forma par lineal con él y que es congruente a él. ¿Y tú qué quieres mostrar? Que la medida es noventa.

61. Melisa: Ah ya [señala el ángulo $\angle DAC$ ] **P:** De ese ángulo**.** ¿De cuál? De aquel que dijimos que era recto.

62. Melisa: Entonces voy a decir que...

63. P: Y entonces, noten una cosa que es muy interesante y que yo a veces les digo a los estudiantes que hagamos. Esto es lo dado [señala el paso uno], éste ya lo usó [el paso uno]. ¿En dónde lo usó? Aquí [escribe (1) al lado de Dado en el paso dos]. ¿Sí?

**[P4 56-63]**

Este tipo de interacciones se presentan cuando luego de ser aceptadas varias definiciones para el mismo objeto, se procede a demostrar su equivalencia para dejar una propuesta como definición y el resto como teoremas, en ese proceso la profesora busca que los estudiantes reconozcan los componentes de una de las definiciones que le permitan llegar a deducir la otra, como es el caso del ejemplo en donde la profesora le va dando pautas a Melisa para que deduzca los elementos geométricos que le permiten partir de una definición para llegar a la otra [58-62].

***Búsqueda de definición económica:*** Este código se asigna a las interacciones cuando luego de haber analizado la equivalencia de varias definiciones, la profesora y los estudiantes estudian de cuál de las definiciones es menos exigente y conveniente para incluir en el sistema axiomático.

**Ejemplo**

Profesora y estudiantes discuten cuál definición de rectángulo, de dos propuestas que se tiene, conviene introducir al sistema axiomático como definición, y cuál como teorema.

| | | |
|---|---|---|
| 73. | P: | Y yo puedo trabajar entonces rectángulos, sin haber hablado de paralelogramos. ¿Sí? Entonces, ésta es una definición buena, y depende de las condiciones [Un rectángulo es un cuadrilátero con sus lados adyacentes perpendiculares]. Pero nosotros ya sabemos mucho de paralelogramos. Entonces, posiblemente nos queramos quedar con ésta [Un rectángulo es un paralelogramo que tiene al menos un ángulo recto] o con ésta [Un rectángulo es un paralelogramo cuyos ángulos son congruentes] ¿Cuál de las dos? ¿Cuál de las dos queremos? Debemos adoptar una. Una vez que tengamos una, ya lo demás es teorema. |
| 74. | Ignacio: | La segunda [Se refiere a la definición: un rectángulo es un paralelogramo cuyos ángulos son congruentes]. |
| 75. | Nancy: | La primera [Se refiere a la definición: un rectángulo es un paralelogramo que tiene al menos un ángulo recto]. |
| 76. | Alguien: | La primera. |
| 77. | P: | ¿Prefieren la primera? ¿Por qué? |
| 78. | Nancy: | Porque ya puedo también, de ahí podría sacar ya… teniendo lo de los ángulos rectos, podría sacar que son congruentes, que miden 90. |
| 79. | P: | O sea, la primera es como menos exigente, ¿no? Digamos de cierta manera. Si yo quiero demostrar que algo es… que algún cuadrilátero es un rectángulo, sólo tengo que mostrar dos cosas, que es paralelogramo. |
| 80. | Ignacio: | Y que tiene un ángulo recto. |
| 81. | P: | Y que tiene un ángulo recto. Y en el otro me toca mostrar que es paralelogramo… |
| 82. | Ignacio: | Y con los cuatro ángulos congruentes. |
| 83. | P: | Y que los cuatro ángulos son congruentes. Entonces ésta más… exige menos para el futuro. Entonces tendríamos como teorema… [Un rectángulo es un paralelogramo cuyos ángulos son congruentes]. |
| 84. | Ignacio: | Y como definición. |
| 85. | Germán: | Y como definición. |
| 86. | P: | Entonces ésta es la definición de rectángulo [Escribe la definición]. Un rectángulo es un paralelogramo que tiene al menos un ángulo recto. ¿Sí? Y ésto sería teorema. ¿Sí? Que es, en un rectángulo. |

**[P5 73-86]**

Interacciones como la ejemplificada en el fragmento anterior, se presentan cuando en el proceso de introducir una definición al sistema axiomático, se analizan las diferentes propuestas dadas por los estudiantes, buscando la definición que menos propiedades incluya. Este tipo de definiciones facilita las demostraciones que tengan que ver con el objeto geométrico. En el fragmento se muestra como, luego de seleccionada dos de las definiciones de rectángulo propuestas por los estudiantes, se busca escoger una de ellas. El grupo se inclina por la primera: *"Un rectángulo es un paralelogramo que tiene al menos un ángulo recto"* ya que en el caso de tener que justificar la existencia de un rectángulo, en una demostración, ésta definición es menos exigente [73-78]. Luego de la selección hecha por los estudiantes, la profesora argumenta la importancia de escoger esta definición, ya que considera que sólo basta con probar dos cosas para llegar a demostrar que un objeto geométrico es rectángulo, lo cual es respaldado por los estudiantes [79-86]. La otra definición queda como un teorema, el cual se puede demostrar a partir de la definición escogida.

***Institucionalización de definiciones:*** En este código se agrupan aquellas interacciones, en las que la profesora impulsa la participación de los estudiantes en la institucionalización de un enunciado. Este tipo de interacción se presenta la finalizar el análisis de las diferentes definiciones para un objeto y haber escogido una de ellas para ser introducida en el sistema axiomático.

**Ejemplo**

Luego de analizar las diferentes propuestas para definir rectángulo, y escoger la definición más económica de las propuestas dadas, se pasa a institucionalizar la definición escogida.

86. P: Entonces ésta es la definición de rectángulo [Escribe la definición]. Un rectángulo es un paralelogramo que tiene al menos un ángulo recto. ¿Sí? Y ésto sería teorema [Un rectángulo es un paralelogramo cuyos ángulos son congruentes]. ¿Sí? Que es, en un rectángulo.
87. Germán: Todos los ángulos son rectos.
88. P: Todos los ángulos son congruentes. Sería un teorema. Y ésta [Un rectángulo es un cuadrilátero con sus lados adyacentes perpendiculares], como les decía, es importante porque como, qué tenemos construido en el sistema axiomático. Habríamos podido hablar de rectángulos hace mucho tiempo.

89. Germán: Sí.

90. P: Porque nosotros ya teníamos perpendicularidad. Entonces esa quedaría como definición.

**[P5 86-90]**

Este tipo de interacciones se genera siempre que se ha seleccionado o redactado una definición para un objeto geométrico introducido al sistema axiomático. En el fragmento se puede observar cómo, luego de seleccionada una definición de rectángulo, la profesora la escribe en el tablero [86], y posteriormente se menciona la propuesta que queda como teorema [87]. Esto se demuestra formalmente, para poderla usar en nuevas demostraciones.

## 4.4 CATEGORÍA GESTIÓN COMUNICATIVA

En la categoría *gestión comunicativa*, se han incluido las interacciones que permiten la comunicación de ideas y el debate en las clases. A diferencia de las tres categorías anteriores, ésta no es propia de la actividad demostrativa, sino que se puede presentar en cualquier otro espacio de aprendizaje. Decidimos incluirlas para mostrar cómo, a pesar de centrarnos en una actividad matemática en particular, existen interacciones propias de cualquier aula de clase.

***Complemento de ideas:*** Con este código se asocian aquellas interacciones que surgen a partir de la intervención de un estudiante, en el desarrollo de una demostración, y conllevan a que la profesora intervenga para ampliar la información que el estudiante ha dado, favoreciendo la comprensión de lo dicho. Esta interacción contribuye al desarrollo de demostraciones, ya que la profesora explicita información que puede dar lugar a ser pasos claves o justificaciones de un paso.

Tanto el ejemplo 1, como el ejemplo 2, son tomados del episodio *"Demostración: Un segmento tiene más de dos puntos";* en ellos, la profesora escucha las ideas de sus estudiantes, para luego intervenir.

**Ejemplo 1**

8. Julián: [le dicta] Sea *x*…
9. P: *X*
10. Luz: La coordenada de A.
11. Julián: La coordenada de A.
12. P: Coordenada de A.
13. Julián: *y*
14. P: *y* coordenada de B. Por… postulado, a todo punto de recta le corresponde un número. [Escribe: 3. Sea C(A) = *x;* C(B)= *y;* P. puntos de recta - números].

**[P3 8 – 14]**

## Ejemplo 2

49. María: *x* más *y* sobre dos.
50. Germán: Ah… bueno, pues entonces *x* más *y* sobre dos.
51. P: *x* más *y* sobre dos.
52. Ignacio: La coordenada del punto medio.
53. P: Entonces sabemos que *x* es menor que *x* más *y* medios, menor que *y* [escribe: $x < (x + y)/2 < y$].

**[P3 49 – 53]**

Como se observa en los ejemplos anteriores, para complementar las ideas de los estudiantes, la profesora, primero los escucha, luego parafrasea las ideas [12 y 51] y enseguida interviene para ampliar dichas ideas [14 y 53]. El complemento de ideas en estos ejemplos es de distinta naturaleza. En el primer ejemplo, tiene la finalidad de justificar por medio del postulado “puntos de recta - números” que la coordenada del punto B es *y*; y en el ejemplo 2, la profesora retoma lo que han dicho los estudiantes y explicita la desigualdad $x < (x + y)/2 < y$ [53], que se convierte en un paso clave y que luego permite demostrar que existe un punto C entre el punto A y el punto B, cuya coordenada es $(x + y)/2$. Este tipo de interacción se presenta frecuentemente en la construcción de demostraciones, aunque se observa más al principio del curso, cuando los estudiantes poco conocían de la construcción de demostraciones y de los elementos geométricos que se estudiaba. A medida que se desarrolló el curso, este tipo de interacción se hizo menos frecuente, ya que los estudiantes adquirieron una mayor agilidad al expresar y justificar sus ideas de forma clara.

***Estudiante pregunta – profesor responde:*** Esta interacción emerge cuando hay cuestionamientos que surgen por parte de los estudiantes, en alguno de los procesos de la actividad demostrativa, que son respondidos por la profesora usando la teoría del sistema axiomático construido, o algunas reglas del lenguaje, que se han establecido o se establecen en ese momento. Aunque esta interacción es típica de cualquier proceso de enseñanza – aprendizaje, en este código nos centramos en aquellas preguntas y respuestas que surgen durante procesos de la actividad demostrativa.

**Ejemplo**

Este ejemplo corresponde a una interacción que surge cuando Efraín pregunta por la manera en que se debe nombrar un ángulo, para no ser confundido con la medida del mismo, al hacer uso de una representación geométrica.

| | | |
|---|---|---|
| 5. | Efraín: | Profe, pues no sé si esté en un error, pero… ¿Cómo hace para saber que el ángulo, si lo nombramos con número, ese número no se está refiriendo a una medida? |
| 6. | P: | ¡Ah! Eso es una buena pregunta. Bueno, en el diagrama no vamos a poner medidas, primera cosa. |
| 7. | Efraín: | Medida de ángulo. ¿Cierto? |
| 8. | P: | Sí. Entonces, si yo quiero hablar de la medida, lo tengo que escribir, medida del ángulo uno [$m\measuredangle 1$]. ¿Sí? Y entonces se refiere al ángulo. |

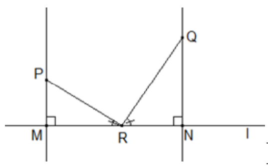
**[P2 5 – 8]**

En el ejemplo que presentamos, Efraín es el encargado de dar lugar a la interacción, pues observa que en las demostraciones realizadas en clase, nombran los ángulos con números naturales, y como a un ángulo se le puede asignar un número entre 0 y 180, se pregunta, si al nombrar un ángulo con un número, ese número estaría haciendo referencia a la medida del ángulo [5], por lo que la profesora le responde que para hablar de la medida de un ángulo se debe escribir medida del ángulo [$m\measuredangle$] [8], y como en la demostración que están realizando, no trabajan medidas de ángulos y no han escrito medida de ángulo uno, entonces el número uno hace referencia al nombre del ángulo, más no a su medida. Las preguntas que realizan los estudiantes, conllevan a aclarar, por parte de la profesora, dudas relacionadas con el lenguaje geométrico, la simbología geométrica, la escritura de una demostración, entre otros aspectos.

***Dar pistas:*** Este tipo de interacciones se presenta cuando la profesora menciona palabras o ideas que son claves en la respuesta de algún cuestionamiento hecho, las cuales son seguidas por los estudiantes, logrando que ellos den respuesta a la pregunta planteada.

**Ejemplo**

A raíz del problema "Se da una recta, dos puntos P y Q en el mismo semiplano determinado por la recta *l*, determine el punto R [de la recta *l*] para el cual la suma de las distancias [PR y QR] es la menor" Henry propone la conjetura "el punto R para el cual la suma de las distancias es mínima, es aquel que hace que los ángulos PRM y QRN sean congruentes". La profesora pregunta por la demostración de la misma para poderla incluir como teorema en el sistema axiomático que se está construyendo.

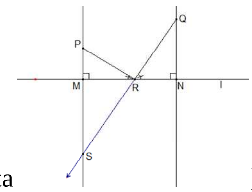
| | | |
|---|---|---|
| 78. | P: | […] Quiero mostrar que R realmente es el punto para el cual la suma de esas distancias es mínima, ¿cómo hago? […] ¿Qué está dado? […] ¿éste es quién? M [punto de intersección entre la recta *l* y la recta perpendicular a *l* que pasa por P], N [punto de intersección entre la recta *l* y la recta perpendicular a *l* que pasa por Q], ¡ah! y esta es la recta *l* y tengo estos ángulos [ángulos rectos determinados por las rectas perpendiculares y la recta *l*, ángulos PMR y QNR  ] |
| 79. | Henry: | que esos eran rectos [$\angle$PMR y $\angle$QNR] |
| 80. | P: | que esos ¿eran rectos? |
| 81. | Henry: | sí, y las perpendiculares. |
| 82. | P: | ¿Sí? […] entonces tenemos qué el ángulo… PMR es congruente a [ángulo] QNR [por ser ángulos rectos] y que éstos dos ángulos son congruentes [$\angle$ PMR y $\angle$ QNR] ¿Cómo demuestro que PR más RQ es lo mínimo? [pausa] basándome en… en lo que ya sé, por ejemplo. [pausa] ¿Qué se les ocurre? |
| | […] | |
| 86. | P: | ¿Qué características le pusieron ellos [Darío y Leopoldo] a la R? [pausa] ¿Quién era R? [pausa] |
| | […] | |
| 90. | Estudiante: | El segmento y… la recta l. |
| 91. | P: | O sea, ¿de dónde nació R?; nació de… de construir éste segmento congruente a éste [PM |

y MP’] y son colineales, P’, R y Q son colineales, ¿Sí? Entonces si yo puedo… se me ocurre a mí… mostrar, de alguna manera llegar a un punto P’ que cumple esta característica, que equidista de M y que está en la misma recta de Q y R…

92. María: Rayo opuesto a QR.

93. P: usando solamente lo que yo tengo. Entonces, el rayo opuesto a QR ¿Qué pasa si construimos el rayo opuesto a QR como dice María?

94. María: A [rayo] RQ.

95. P: A [rayo] RQ, sí; éste [traza en el dibujo el rayo RQ], busco esta intersección [con recta PM], la llamamos S. [se hace una representación como ésta 

]

**[P9 78-95]**

Este patrón de interacción se observa, generalmente, cuando los estudiantes, a pesar de tener ideas para responder a los cuestionamientos de la profesora, no pueden dar respuestas claras y justificadas de estos. La profesora da ideas de la respuesta a partir de las opiniones de los estudiantes. En el caso del ejemplo, luego de aceptada una conjetura, la profesora pasa a la validación de la misma preguntando por su demostración. A medida que Henry va proponiendo pasos que permitan llegar a la demostración, la profesora los toma, los amplia y da ideas que permiten continuar con la misma. Este es el caso de las interacciones 79 a 95. Después de que Henry a afirmado que los ángulos son rectos, como consecuencia de la perpendicularidad, la profesora afirma la congruencia de los ángulos, ampliando la idea, y pregunta sobre las condiciones del punto R [86] dando pistas de la importancia de tener clara esta característica para desarrollar la demostración; al no encontrar respuesta por parte de los estudiantes, la profesora continua dando pistas [91] para llegar a desarrollar la demostración.

***Estudiante da ideas – profesora traduce:*** Este tipo de interacción se presenta cuando en el desarrollo de una demostración o en la escritura de una definición, uno o varios estudiantes dan las afirmaciones, las justificaciones o sus propuestas de definición, y la profesora las traduce a un lenguaje geométrico, escribiendo estas ideas en el tablero.

**Ejemplo**

En el proceso de demostrar que un segmento tiene más de dos puntos, un estudiante empieza la demostración dando sus ideas a la profesora, para que ella las organice.

| | | |
|---|---|---|
| 01 | P: | […] Comenzamos con dos puntos, A y B. Dado… dados. Mis dos puntos. Bueno, ¿ahora qué? [Escribe: 1. Sean A, B puntos; dado]. |
| 02 | Juan: | Postulado de la recta y el número. |
| 03 | P: | Entonces ahora me dice Juan ¿Qué? |
| 04 | Juan: | Existe la recta. |
| 05 | P: | Existe la recta AB [escribe: 2. $\exists \overleftrightarrow{AB}$; P. de la recta]. Postulado de la recta. ¿Después qué me dices? |
| 06 | Juan: | En ese momento tenemos por esos tenemos una… dos puntos y una recta. Entonces por el postulado de la correspondencia puntos-recta, a cada punto le corresponde un único [número] real. |
| 07 | P: | O sea, ¿qué digo aquí? |
| 08 | Juan: | [le dicta] Sea *x*… |
| 09 | P: | *X* |
| 10 | Luz: | La coordenada de A. |
| 11 | Juan: | La coordenada de A. |
| 12 | P: | Coordenada de A. |
| 13 | Juan: | *y* |
| 14 | P: | *y* coordenada de B. Por… postulado, a todo punto de recta le corresponde un número. [Escribe: 3. Sea C(A) = *x*; C(B)= *y*; P. puntos de recta - números]. Y aquí ya usé el paso dos. ¿Cierto? Bueno, ¿y ahora? |
| 15 | Juan: | Método de los reales. Lo que dijo Daniel. |
| 16 | P: | ¿Qué es lo que Daniel iba a decir? |
| 17 | Daniel: | No. Pues se trata más bien de ubicar lo de la regla. |
| 18 | P: | Lo de la regla ¿la colocación de la regla? |
| 19 | María: | Sí. |
| 20 | P: | Bueno, pero entonces ¿qué hago? ya, tienen coordenadas. |
| 21 | Daniel: | A no. Pues entonces, hace la distancia. |
| 22 | P: | ¿Hago la distancia entre ellos? |
| 23 | Daniel: | Entre A y B. |
| 24 | P: | O sea… digo… ¿Qué? |

**[P3 1-24]**

Este patrón de interacción es típico en las primeras clases del semestre, en donde la profesora muestra como se esquematiza una demostración y como se empieza a desarrollar. Escribe la demostración en el tablero, a partir de las ideas que dan los estudiantes, las cuales todavía no son presentadas en un lenguaje geométrico. En el caso del ejemplo, Juan da unas primeras ideas para iniciar la demostración y la profesora las toma y las escribe en el tablero, de la forma afirmación-justificación, usando una simbología propia del lenguaje geométrico. Luego, abre el espacio para que Juan continúe con su idea [1-5]. La profesora busca la participación de los estudiantes con intervenciones como *¿Después que me dices? ¿y ahora qué? ¿Qué digo aquí?* [5, 7, 14], logrando así que no solo sea Juan quien participe en el desarrollo de la demostración, sino que intervengan otros estudiantes. Así logra que la demostración sea propuesta del grupo, y estructurada por ella. En este ejemplo se puede observar que a pesar que ella está introduciendo la estructura y forma de una demostración, no es ella quien al realiza, sino que da espacio para que los estudiantes se involucren en este proceso desde las primeras clases.

***Estudiante pregunta - profesora cuestiona:*** Con este código se agrupan todas las interacciones en las que luego de la intervención de un estudiante, con una pregunta dirigida a la profesora, ella se dirige al grupo ampliando la pregunta, para darle respuesta mediante una discusión.

**Ejemplo**

En el proceso de demostrar que las diagonales de un paralelogramo se bisecan, Leopoldo cuestiona la existencia del punto de intersección de las diagonales.

| | | |
|---|---|---|
| 37 | P: | […] estás tratando de mostrar que las diagonales [de un cuadrilátero] se bisecan. Estás tratando de demostrar que si el cuadrilátero es un paralelogramo, las diagonales se bisecan. |
| 38 | Ignacio: | Por eso. |
| 39 | Leopoldo: | Sí, pero es que no sé como… ¿yo cómo sé que las diagonales se intersecan? |
| 40 | P: | ¡Ah! Una pregunta muy buena ¿Cómo sabemos que las diagonales en un paralelogramo se cortan? |

41 Estudiante: Porque el interior del cuadrilátero es convexo.

42 P: ¿Por qué el cuadrilátero es convexo?

**[P1 37 – 42]**

Este tipo de interacciones se presenta generalmente cuando los estudiantes no están de acuerdo con algunas justificaciones que se dan, y las cuestionan. La profesora retoma el cuestionamiento y se dirige al grupo reformulando la pregunta y ampliándola para que los estudiantes busquen una respuesta. A comparación del código anterior, en este caso el rol de la profesora no es el de responder inquietudes de los estudiantes, frente a la construcción del sistema, sino el de mostrar esta necesidad al grupo, para que sean ellos quienes la satisfagan. En el caso del ejemplo, Leopoldo observa la necesidad de demostrar que las diagonales de un paralelogramo se intersecan para mostrar la bisección de éstas [37, 39], y la profesora cuestiona al grupo sobre esta necesidad buscando que sean ellos los que le den respuesta a Leopoldo [40]. Esta acción que realiza la profesora genera una discusión en el grupo en búsqueda de la respuesta.

***Regulación del lenguaje:*** Esta interacción es promovida por la profesora, cuando llama la atención de sus estudiantes con relación a la manera en que ellos hacen referencia a un objeto geométrico. Ella introduce símbolos o palabras propias del lenguaje geométrico, regulando el uso del lenguaje, para favorecer enunciados claros y precisos que faciliten la comunicación de las ideas.

**Ejemplo:**

La profesora llama la atención de Darío acerca de cómo se refiere a un objeto geométrico.

66 Darío: Pues… entonces tengo que [el segmento *BC*] es perpendicular [a la semirrecta *AM*] entonces éste [ángulo *K*] es recto. ¿Cierto?

67 P: ¿Cuál? ¿Quién? Habla [bien] porque es que yo después... este, este, este, yo no...

68 Darío: El ángulo... el ángulo AB, AKB es recto, es recto ¿cierto?

69 P: Sí.

**[P7 66 – 69]**

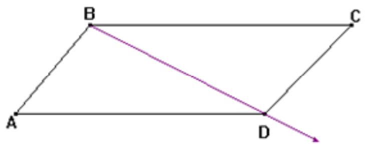
En este ejemplo, la profesora llama la atención de Darío para que use el lenguaje geométrico. Con ello busca que sus estudiantes ganen riqueza en el lenguaje geométrico y faciliten la comunicación tanto escrita como oral. La profesora le pide a Darío que no diga la palabra "esto", sino que nombre el objeto geométrico al que está haciendo referencia, es decir el ángulo [67]. Darío rectifica que el ángulo AKB es recto. Otro caso en el que la profesora regula el lenguaje, es cuando los estudiantes usan una figura geométrica cuyos vértices no han sido nombrados.

***Impulsa ideas:*** Este tipo de interacciones se presenta cuando la profesora da relevancia a las ideas o preguntas de algún estudiante, que llevan a desarrollar aspectos pertinentes de la actividad demostrativa, que no se tenían previstos por ella. Generalmente el estudiante insiste en la idea, y aunque los compañeros no estén por completo de acuerdo con ésta, la profesora lo apoya.

**Ejemplo**

Luego de surgir la necesidad de demostrar que las diagonales de un paralelogramo se intersecan, para luego mostrar que se bisecan, y después de haber escuchado y descartado varias propuestas, Henry sugiere una idea que la profesora estimula para su desarrollo.

75 Henry: Es que si tenemos los dos ángulos opuestos, entonces supongamos que… Bueno, supongamos que la bisectriz del ángulo A es la… es…[Hace una figura como:




]

76 Darío: ¿Bisectriz?

77 Henry: La bisec… la bisectriz.

78 P: ¿Del ángulo A?

79 Henry: La bisectriz del ángulo…

80 P: No hemos hablado de bisectrices todavía.

81 Darío: La diagonal.

82 Henry: No, la bisectriz.

83 P: Pero no hemos hablado de bisectriz.

84 Henry: Es que yo quiero decir que A y C están en puntos de lados opuestos de un ángulo, ¿cierto? Entonces el segmento AC, va a cortar a la bisectriz de… mejor dicho, al rayo DB.

| | | |
|---|---|---|
| 85 P: | | Ah… acá. ¿Estás mirando el ángulo ADC? |
| 86 Henry: | | Sí. |
| 87 P: | | A y C están en lados opuestos, en lados distintos de… |
| 88 Henry: | | De ese ángulo. |
| 89 P: | | De este ángulo. Sí. |
| 90 Henry: | | Y entonces, se va… Pues por el teorema, se va a cortar con la bisectriz del ángulo ADC. |
| 91 P: | | Con, con la… |
| 92 Henry: | | O bueno, con todo rayo que parta… que esté en el interior… que parta de… |
| 93 P: | | Con cualquier… semirrecta… que parta de… |
| 94 Germán: | | Del vértice. |
| 95 P: | | Del vértice. Va a cortar el segmento que une dos puntos de los lados. Muy bien, esa es. |
| 96 Henry: | | Y como lo mismo pasa con el otro. Pues la intersección de esos también lleva a que se cortan. |
| 97 P: | | Ya mostramos que se cortan. O sea, esta diagonal [AC] está cortada por ésta otra [BD]. Porque es una semirrecta que… muy bien. Entonces, sí se corta. Gracias Henry. Ahí estaba la respuesta. Las diagonales de ese cuadrilátero se cortan. |

**[P1 75 - 97]**

Este tipo de interacciones se presentan generalmente cuando los estudiantes aportan posibles rutas para lograr una justificación, y la profesora estimula su participación estableciendo un dialogo con ellos para que desarrollen sus ideas. En ocasiones, los aportes de los estudiantes no son aceptados por el grupo, pero al ver la importancia de los mismos la profesora apoya las ideas hasta que logra esa aceptación, como es el caso del ejemplo. Aunque el grupo (e inicialmente al profesora) no aceptan la idea de Henry cuando él mención la bisectriz, objeto geométrico que no se ha definido en el sistema axiomático [75, 83], Henry continúa con su idea y la profesora establece un dialogo con él, ampliando o reafirmando las ideas, hasta lograr el desarrollo de la misma [84, 97].

## 4.5 SÍNTESIS DEL ANÁLISIS DE DATOS

Los códigos descritos y ejemplificados anteriormente son el resultado del análisis de los nueve videos de clase, que se han mencionado en capítulos anteriores, pero son recurrentes a todo el proceso de enseñanza aprendizaje durante el semestre. Aquí solo hemos escogido un fragmento representativo para cada uno de los códigos, pero estos patrones de interacción se encuentran de forma frecuente en las diferentes clases, e incluso se puede encontrar un mismo patrón en una misma clase.

Los códigos que se muestran aquí, y sus respectivas categorías fueron la base para la elaboración de los informes descriptivo-interpretativos presentados, los cuales muestran un análisis más profundo de los mismos, en el contexto de los episodios de clase.

# CAPÍTULO 5. RESULTADOS

Una vez hecho el análisis de los datos, obtuvimos como resultado un material didáctico de apoyo para el curso "Enseñanza y Aprendizaje de la Geometría" o para otros espacios académicos. El material didáctico es un conjunto de nueve informes descriptivo-interpretativos, acompañados cada uno de ellos de un video-clip, material que se describe a continuación.

## 5.1 INFORMES DESCRIPTIVO-INTERPRETATIVOS

Como ya dijimos, el informe descriptivo-interpretativo es una reconstrucción que el investigador realiza de un episodio de clase, en el que describe, analiza e interpreta lo sucedido en el episodio. El análisis y la interpretación son específicos de las interacciones impulsadas por la profesora en el episodio caracterizado por el desarrollo de procesos de la actividad demostrativa. Cada informe descriptivo-interpretativo inicia con un encabezado en el que se describe el número del video-clip que lo acompaña, su tiempo de duración, el proceso de la actividad demostrativa en la que se centra el análisis y la descripción del mismo en términos del objeto geométrico abordado en el episodio. Luego del encabezado, viene el desarrollo del informe descriptivo-interpretativo. Allí se presenta una contextualización del episodio de clase y se presentan los fragmentos de la clase que reconstruyen dicho episodio. Cada fragmento se constituye de la descripción de los sucesos que lo caracterizan, la trascripción del mismo, y la interpretación y análisis bajo el código o códigos que ejemplifican las interacciones que allí se presentan. En el análisis, los códigos se escriben en letra cursiva, o se dan palabras claves de éste, también en cursiva, buscando que el lector identifique el tipo de interacción que se está analizando. Estos fragmentos son escritos de forma cronológica, dejando entrever la secuencia en que ocurrieron los sucesos de la clase, para así tener, una idea global de lo que allí ocurrió. A continuación se presenta uno de los nueve informes descriptivo-interpretativos, como un ejemplo del resultado obtenido. Los otros ocho se encuentran en el Anexo 1.

**VIDEO CLIP N. 1**

**Tiempo estimado:** 15 minutos 8 segundos

**Proceso de la actividad demostrativa:** Demostrar

**Descripción:** Demostración del teorema *"Si un cuadrilátero es paralelogramo, entonces las diagonales se bisecan".*

Este informe descriptivo-interpretativo corresponde a un segmento de clase del día 24 de Mayo de 2007, en el que se realiza una demostración colectiva. Esta clase es la número 44, y van 71 horas de clase.

En la clase del día 16 de Mayo (clase número 42), la profesora propone la tarea abierta "determinar la relación existente entre el tipo de cuadrilátero y la propiedad: una diagonal biseca a la otra". Los estudiantes la resuelven mediante la exploración realizada en el software Cabri. Obtienen como resultado diversas conjeturas sobre los cuadriláteros que satisfacen la condición solicitada. La profesora recoge las conjeturas y las organiza en un acetato para proyectarlas en la clase del día 24 de Mayo, con el fin de compartir los resultados ante el grupo, para su estudio y análisis. Después de leer una conjetura, el grupo responsable de ésta da a conocer la exploración realizada, que condujo a su formulación, para estudiarla a la luz de la construcción, admitirla como posible y luego proceder a su demostración. Una de las conjeturas sugeridas es la de Leopoldo y Darío "*si* [*el cuadrilátero*] *es paralelogramo entonces las diagonales se bisecan*". Después de admitirla, la profesora invita a Leopoldo, para que proceda a justificarla mediante una demostración formal, públicamente.

Hemos dividido el informe descriptivo-interpretativo en cuatro fragmentos. En el primero, se inicia la demostración con el paralelogramo *ABCD*, afirmando que el segmento *AB* es paralelo al segmento *DC*; en el segundo, se afirma y justifica la congruencia de los triángulos *DAC* y *BAC* [ver figura 1]; en el tercer fragmento, surge la necesidad de demostrar que si un cuadrilátero es convexo (como es el caso del paralelogramo) entonces sus diagonales se cortan en el interior; en el cuarto fragmento, Henry propone una idea para justificar la necesidad que surgió en el fragmento tres, la cual es impulsada por la profesora.

Así termina la demostración.

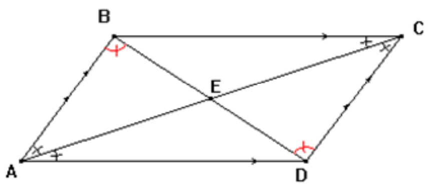
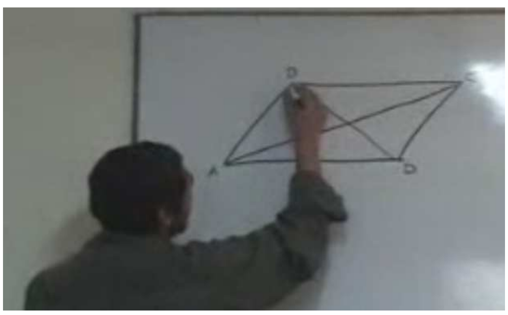



*Figura 1*

*Fragmento 1*

El episodio comienza cuando Leopoldo recurre a una representación gráfica de paralelogramo sin nombrar sus vértices y la profesora le indica que debe nombrar la figura, para hacer referencia a ella, por lo que Leopoldo nombra los vértices del paralelogramo y luego comienza una prueba en la que nombra pasos claves de una posible demostración formal: traza las diagonales del paralelogramo y se refiere a propiedades de los ángulos alternos internos. La profesora que espera que Leopoldo realice una demostración formal, más no una prueba, lo interrumpe diciéndole que deben escribir todos los pasos y le indica que el primer paso es "el cuadrilátero *ABCD* es paralelogramo". Después de que Leopoldo lo escribe, la profesora indaga sobre qué se puede deducir de esa afirmación; Leopoldo no da una respuesta correspondiente a la intención de la pregunta, por lo que la profesora recurre a los demás estudiantes y con la ayuda de Nancy e Ignacio afirma que $\overline{AB}$ y $\overline{DC}$ son paralelos.



| | | |
|---|---|---|
| 01 | P: | Pues ABCD, hay que nombrarlo o sino ¿cómo vamos a definirlo? |
| 02 | Leopoldo: | Tenemos el cuadrilátero ABCD. Entonces trazamos las diagonales. |
| 03 | P: | Sí. |

04 Leopoldo: Entonces, por ángulos alternos internos entre paralelas… el ángulo… éste… es congruente con…

05 P: Sí. Vamos a hacer una cosa Leopoldo. Vamos a escribir todos los pasos. Todos los pasos. Entonces, primer paso, ABCD es paralelogramo. Cuadrilátero… cuadrilátero ponemos un…

06 Nancy: El símbolo. [Leopoldo escribe: 1. □ ABCD es paralelogramo]

07 P: ABCD es paralelogramo.

08 Ignacio: Paralelogramo.

09 P: Entonces, ¿qué sabes?

10 Leopoldo: Tengo que decir: sean las diagonales ¿no? [Escribe: 2. Sean $\overline{AC}$ y $\overline{DB}$ las diagonales] Sean AC y BD… [Luego escribe: 3. $\angle CAD \cong \angle BCA$]

11 P: Y BD, las diagonales. CAD con… ¿Están de acuerdo que ese sería el tercer paso en esa demostración?

12 Ignacio: Son alternos internos.

13 Nancy: Lo primero que… aprovechar la definición de paralelogramo.

14 P: Sí, hay que aprovechar. O sea que ¿cuál es el paso anterior?

15 Ignacio: Que son paralelas.

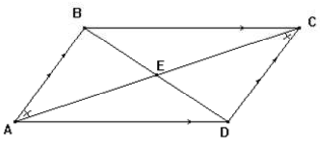
16 P: Que A…

17 Ignacio: Que AB y CD son paralelos.

18 P: ¿Quiénes son las paralelas?

19 Ignacio: AB y DC [Leopoldo cambia el paso 3 por: 3. $\overline{AB} \parallel \overline{CD}$ y $\overline{BC} \parallel \overline{AD}$ ].

20 P: Bueno, por eso le estoy pidiendo que la escriba. Porque vamos a poner todos los pasos que realmente tienen que estar. Entonces, ésto está dado [paso 1]. Ésto es definición de diagonal [paso 2], bueno, y existencia… postulado de la recta y todo eso, ¿no? Y ésto [paso tres] es definición de paralelogramo, entonces puedes decir que los ángulos son congruentes porque son alternos internos [Queda como paso cuatro: 4. $\angle CAD \cong \angle BCA$.

La figura va así: 

] Bien. [Leopoldo escribe: 5. $\angle ACD \cong \angle BAC$]

**[P1 1- 20]**

En la primera parte de la interacción, la profesora *regula el lenguaje* al pedir a Leopoldo nombrar los vértices del paralelogramo que ha dibujado para que las afirmaciones y justificaciones que se vayan a realizar, relacionadas con esta figura, sean específicas y claras para todos los miembros de la comunidad; también se observa que la justificación que Leopoldo empieza a realizar es una prueba, por lo que ella, en su intento de que Leopoldo escriba los pasos de la demostración, *regula el lenguaje* cuando propone introducir como simbología geométrica, el símbolo "□" para explicitar que el cuadrilátero *ABCD* es un paralelogramo. La introducción de símbolos geométricos simplifica la escritura, referencia el tipo de figura geométrica a estudiar y facilita la comunicación al momento de referirse de forma escrita o verbal a este objeto.

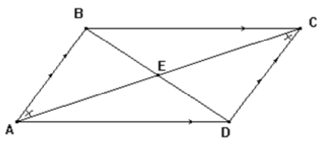
Una vez que Leopoldo afirma que el cuadrilátero *ABCD* es paralelogramo, la profesora se dirige a él diciéndole *"Entonces, ¿Qué sabes?"* [9], buscando que Leopoldo evoque la definición de paralelogramo, recuerde algunas de sus propiedades que se puedan derivar y sean útiles para el desarrollo de la demostración, buscando el *paso a seguir* y haciendo explicitas las propiedades en el paso tres. Sin embargo, el paso tres que Leopoldo menciona no se deduce de los pasos uno y dos, pues menciona las diagonales y se adelanta con uno de los pasos claves al afirmar la congruencia entre ángulos alternos internos, sin haber nombrado las propiedades que se requieren para encadenar los pasos uno y dos con dicha afirmación; al observar este hecho, la profesora no evalúa, directamente, el proceso que está desarrollando, sino que se dirige al grupo con una pregunta para que de común acuerdo determinen si la congruencia de los ángulos $\angle CAD$ y $\angle BCA$ [11] es el tercer paso, Nancy interviene, proponiendo aprovechar la definición de paralelogramo antes de mencionar la congruencia [13]. La profesora acepta esta idea cuando le da relevancia, y pregunta por el paso previo a afirmar la congruencia de ángulos, *buscando antecedentes posibles* para la afirmación de Leopoldo. Ignacio a partir de la intervención de Nancy y de la profesora, afirma el paralelismo que se requiere [17] para concluir que dos ángulos alternos internos son congruentes y el paralelismo es justificado por la profesora en la línea 20.

*Fragmento 2*

Luego de que Ignacio nombra el paralelismo, Leopoldo continúa escribiendo en el tablero un nuevo paso [19]. Como en ese momento los pasos de la demostración no se han justificado explícitamente, la profesora interrumpe a Leopoldo y nombra la justificación de los mismos; luego, Leopoldo continúa con la demostración. En uno de los pasos siguientes, Leopoldo afirma que el triángulo DAC es congruente con el triángulo BAC [ver figura 1], afirmación que es objeto de justificación luego de ser aceptada por el grupo.

19 Ignacio: AB y DC [Leopoldo cambia el paso 3 por: 3. $\overline{AB} \parallel \overline{CD}$ y $\overline{BC} \parallel \overline{AD}$ ].

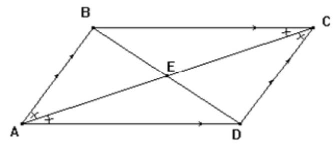
20 P: Bueno, por eso le estoy pidiendo que la escriba. Porque vamos a poner todos los pasos que realmente tienen que estar. Entonces, ésto está dado [paso 1]. Ésto es definición de diagonal [paso 2], bueno, y existencia… postulado de la recta y todo eso, ¿no? Y ésto [paso tres] es definición de paralelogramo, entonces puedes decir que los ángulos son congruentes porque son alternos internos [Queda como paso cuatro: 4. $\angle CAD \cong \angle BCA$. La figura va así:




] Bien. [Leopoldo escribe: 5. $\angle ACD \cong \angle BAC$]

21 Leopoldo: Así.

22 P: Sí. Noten que es el mismo teorema, pero con otro par de lados paralelos. Ojo con eso, porque hay que estar seguros de que tenemos las paralelas correspondientes. Bien. [Leopoldo complementa la figura:




] O sea que ángulo, triángulo DAC congruente con BCA, ¿De acuerdo?

23 Estudiantes: Sí.

24 P: ¿Por?

25 Estudiante: Lado – ángulo…

26 Leopoldo: Ángulo - lado - ángulo. [Escribe: 8. $\overline{AB} \cong \overline{CD}$ y $\overline{BC} \cong \overline{AD}$]

27 P: Ángulo-lado-ángulo. […]

**[P1 19 - 27]**

Este fragmento ejemplifica una interacción en la que se favorece la práctica de la norma de justificar establecida en la clase, cuando la profesora da las justificaciones de los cuatro primeros pasos [20] e interviene con la pregunta “¿por?” [24] (luego de que el grupo acepta como válida la congruencia de los triángulos) *requiriendo la justificación* al pretender que

Leopoldo justifique la congruencia establecida a partir del sistema axiomático de referencia. Esta pregunta no sorprende a Leopoldo quien reconoce la norma de la clase y con el teorema ángulo – lado – ángulo[14] justifica la congruencia del triángulo *DAC* y del triángulo *BCA*. La profesora refuerza la norma, cuando parafrasea la justificación dada por Leopoldo [27].

*Fragmento 3*

Teniendo la congruencia de los triángulos *DAC* y *BCA*, Leopoldo afirma la congruencia de los lados opuestos del paralelogramo como un paso intermedio y en medio de la demostración de la conjetura, expresa la necesidad de usar que las diagonales de un cuadrilátero se intersecan. Esto genera una discusión entre los miembros de la clase, ya que éste es un teorema que no ha sido demostrado.

| | | |
|---|---|---|
| 37 | P: | Sí, estás tratando de mostrar que las diagonales [de un cuadrilátero] se bisecan. Estás tratando de demostrar que si el cuadrilátero es un paralelogramo, las diagonales se bisecan. |
| 38 | Ignacio: | Por eso. |
| 39 | Leopoldo: | Sí, pero es que no sé como… ¿yo cómo sé que las diagonales se intersecan? |
| 40 | P: | ¡Ah! Una pregunta muy buena ¿Cómo sabemos que las diagonales en un paralelogramo se cortan? |
| 41 | Estudiante: | Porque el interior del cuadrilátero es convexo. |
| 42 | P: | ¿Por qué el cuadrilátero es convexo? |
| 43 | Estudiante: | El interior del… |
| 44 | P: | ¿Y esa es la definición de convexo? |
| 45 | Estudiante: | El interior. |
| 46 | Ignacio: | El interior del cuadrilátero es convexo. Dados dos puntos, todos pertenecen al interior del… O sea, por decir la diagonal AC, los puntos A y C, toda la diagonal pertenece al interior del… cuadrilátero. Porque ahí están… Y B y D están a lados opuestos también. |
| 47 | P: | La diagonal, excepto los … |
| 48 | Ignacio: | Ah sí, los… |
| 49 | P: | Los extremos. |

[14] El teorema *Ángulo – Lado – Ángulo* (A.L.A) establece que si dos ángulos y el lado comprendido entre ellos de un triángulo son congruentes con dos ángulos y el lado comprendido entre ellos de otro triángulo, entonces los triángulos son congruentes.

| | | |
|---|---|---|
| 50 | Leopoldo: | Profe, tenemos que demostrar que un paralelogramo es un cuadrilátero convexo ¿no? |
| 51 | P: | Tendríamos que demostrar que es un cuadrilátero convexo si queremos usar eso. [Varios hablan al tiempo sobre el asunto, pero son se comprende lo que dicen] |

**[P1 37 - 51]**

En el desarrollo de la demostración Leopoldo se ve limitado, cuando observa que necesita un teorema que no ha sido establecido en el sistema axiomático que tienen de referencia, con relación a la intersección de las diagonales de un cuadrilátero, y por tanto le surge la preocupación de cómo justificar ese paso. La profesora, reconociendo la inquietud de Leopoldo, da relevancia al cuestionamiento que él hace: "¿yo cómo sé que las diagonales se intersecan?" [39] y lo plantea al grupo, brindando un espacio para el debate, en *búsqueda de la justificación*. El debate es enriquecido por la participación de dos estudiantes e Ignacio [43-46], quienes afirman que la justificación puede darse a partir de que el interior del cuadrilátero es convexo. Esta nueva afirmación se convierte en objeto a justificar; Leopoldo pregunta sobre la necesidad de demostrar si un paralelogramo es un cuadrilátero convexo [50]. La profesora dice que se debe demostrar sólo si se desea usar, reforzando la necesidad de justificar toda afirmación usada en una demostración, norma que se ha establecido en clase.

A diferencia del fragmento *2*, en el cual la justificación de una afirmación dada para desarrollo de la demostración es inmediata, pues hace parte del sistema axiomático construido, en éste fragmento no se observa lo mismo, pues en el sistema axiomático construido no hay una definición, postulado o teorema que justifique que las diagonales de un cuadrilátero se intersecan. Por eso es necesario buscar una justificación que valide la intersección de las diagonales. Resaltamos que tanto el fragmento 2 como el fragmento *3* surgen a partir de la norma establecida, de justificar toda afirmación en medio de una demostración.

*Fragmento 4*

El grupo sigue interactuando en búsqueda de la justificación al cuestionamiento de Leopoldo acerca de la intersección de las diagonales de un paralelogramo. Algunos estudiantes proponen justificar la intersección usando la propiedad según la cual el cuadrilátero es convexo. En una de las interacciones que allí se gestan, Henry propone una idea que la profesora estimula para su desarrollo.

75 Henry: Es que si tenemos los dos ángulos opuestos, entonces supongamos que… Bueno, supongamos que la bisectriz del ángulo A es la… es…

76 Darío: ¿Bisectriz?

77 Henry: La bisec… la bisectriz.

78 P: ¿Del ángulo A?

79 Henry: La bisectriz del ángulo…

80 P: No hemos hablado de bisectrices todavía.

81 Darío: La diagonal.

82 Henry: No, la bisectriz.

83 P: Pero no hemos hablado de bisectriz.

84 Henry: Es que yo quiero decir que A y C están en puntos de lados opuestos de un ángulo, ¿cierto? Entonces el segmento AC, va a cortar a la bisectriz de… mejor dicho, al rayo DB.

85 P: Ah… acá. ¿Estás mirando el ángulo ADC?

86 Henry: Sí.

87 P: A y C están en lados opuestos, en lados distintos de…

88 Henry: De ese ángulo.

89 P: De este ángulo. Sí.

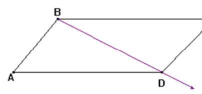
90 Henry: Y entonces, se va… Pues por el teorema, se va a cortar con la bisectriz del ángulo ADC.

91 P: Con, con la…

92 Henry: O bueno, con todo rayo que parta… que esté en el interior… que parta de…

93 P: Con cualquier… semirrecta… que parta de…

94 Germán: Del vértice.

95 P: Del vértice. Va a cortar el segmento que une dos puntos de los lados. [Hace una figura como: 

] Muy bien, esa es.

96 Henry: Y como lo mismo pasa con el otro. Pues la intersección de esos también lleva a que se cortan.

97 P: Ya mostramos que se cortan. O sea, esta diagonal [AC] está cortada por ésta otra [BD]. Porque es una semirrecta que… muy bien. Entonces, sí se corta. Gracias Henry. Ahí estaba

la respuesta. Las diagonales de ese cuadrilátero se cortan.

**[P1 75 - 97]**

En el Fragmento 4 se puede observar que inicialmente la profesora y Darío no están convencidos de la idea de Henry [75 - 83], ya que él quiere hacer uso de la bisectriz, objeto geométrico que no se ha usado en el proceso de la demostración, por lo que Darío menciona que es la diagonal el objeto geométrico del que se quiere hablar; Henry insiste hasta que la profesora acepta e *impulsa la idea*, porque observa que es un camino viable, estableciendo una conversación con Henry en la que amplía cada una de las afirmaciones que él va realizando, y las *traduce* en pasos de la demostración, además de hacer una representación gráfica que permite visualizar cada una de las afirmaciones de Henry, así llegan a la justificación buscada ("las diagonales del cuadrilátero se cortan") [84 - 97]. Esta interacción, es un ejemplo de la construcción colectiva del conocimiento, pues se observa que la profesora no es quién impone las ideas, sino que las ideas de los estudiantes contribuyen en el desarrollo de la demostración. Como se observa en la continuación de éste episodio, Leopoldo sigue con el desarrollo de la demostración, afirmando que E es punto medio del segmento AC. Al tener *incompletas* las condiciones del antecedente que le permiten *justificar* esta afirmación, sus compañeros lo corrigen y le dicen que le hace falta usar la interestancia, que requiere de la afirmación realizada por Henry.

| | | |
|---|---|---|
| 106 | P: | La interestancia. [Leopoldo incluye un nuevo paso: 13 A-E-C]. Sí, pero para poder decir esa interestancia, ¿Entonces qué necesitábamos? |
| 107 | Nancy: | Que se cortan. |
| 108 | Estudiante: | Con lo que dijo él. |
| 109 | P: | Con lo que dijo él [Henry]. O sea, primero que se cortan AC y… |
| 110 | Leopoldo: | BD |
| 111 | P: | Y BD. Claro que lo que me dice Henry es que la semirrecta DB, intersección el segmento AC es diferente al vacío. [Escribe entre los pasos 12 y 13: $\overline{BD} \cap \overline{AC} \neq \emptyset$] La semirrecta, más no... |
| 112 | Henry: | Por eso yo le decía lo del opuesto, lo del ángulo opuesto. Porque es la intersección de las dos rectas ahí, más o menos... |
| 113 | P: | O sea, ¿qué ángulo miro ahora? |
| 114 | Henry: | El ángulo ABC |

| | | |
|---|---|---|
| 115 | P: | ABC |
| 116 | Germán: | Sí. |
| 117 | Henry: | Y entonces… |
| 118 | P: | Ah. Entonces si miramos el ángulo ABC tendríamos que la semirrecta… Ah, es que aquí es DB. |
| 119 | Estudiantes: | Sí, DB. |
| 120 | P: | DB. Y aquí tendríamos la semirrecta… |
| 121 | Germán: | DB |
| 122 | P: | BD |
| 123 | Germán: | intersección |
| 124 | P: | Intersección con el segmento AC |
| 125 | Germán: | No es vacío. |
| 126 | P: | No es vacío [Escribe al lado de la otra intersección: $\overrightarrow{DB} \cap \overline{AC} \neq \emptyset$] y eso nos debe llevar a que los dos segmentos se cortan. Porque la intersección de éstas dos semirrectas es el segmento. Entonces, poder concluir que esto no es vacío. Sí señor, tocaba usar ambas. ¿Sí? Bueno. |
| 127 | Leopoldo: | Pues ahí… Sea E el punto de intersección de los segmentos. [Escribe: 14. E es el punto medio de AC 15. $\{E\} = \overline{AC} \cap \overline{BD}$] |
| 128 | P: | Sí. E es el punto de intersección de los dos segmentos. |
| 129 | Leopoldo: | Sea E… |
| 130 | P: | Sí, por definición. |
| 131 | Leopoldo: | ¿Y eso lo escribo acá? |
| 132 | P: | Eso lo meti… Lo debiste haber metido acá [Entre los pasos 9 y 10] ¿cierto? Porque aquí fue donde lo introdujiste. O sea, esta discusión [lo que se refiere a las intersecciones] en realidad viene acá. Porque tú vas a decir, entonces sea E igual a la intersección de los dos segmentos. Y entonces ahora sí, tiene la interestancia, tiene la igualdad y tiene que es punto medio del segmento AC. Y así hace con el otro. Gracias Leopoldo. O sea que, definitivamente, logramos demostrar que la conjetura era cierta. |

**[P1 106 - 132]**

Gracias al impulso que la profesora da a la idea de Henry, y a la interacción entre Henry, la profesora, Leopoldo, y otro de sus compañeros [104 - 109], la demostración realizada por Leopoldo toma un nuevo aire, que permite concluir que las diagonales se intersecan y por ende, se concluye la demostración, mostrando que las diagonales del paralelogramo se bisecan [127-132].

## 5.2 VIDEO - CLIPS

Buscando vincular la formación inicial de los docentes con la práctica real de un profesor de matemáticas, se diseñan los video-clips, que acompañan cada informe descriptivo-interpretativo. Estos video-clips son evidencias de la práctica profesional, que recoge momentos de enseñanza de las matemáticas; con este material no se busca que los futuros docentes reproduzcan el modelo de enseñanza que allí se presenta, sino que por medio de ellos analicen, reflexionen y caractericen los procesos de enseñanza y aprendizaje a partir de la práctica real de otros, como un paso para acercarse y mejorar las prácticas docentes. Con estos video-clips, apoyados de los informes descriptivo-interpretativos, se espera que los docentes en formación centren las miradas en las interacciones que se gestan en una clase de geometría cuando se aborda la actividad demostrativa.

Los video-clips presentados son la evidencia visual y auditiva del episodio de clase a analizar. De las clases en que se extrajeron dichos episodios se eliminaron pequeños fragmentos, en donde se encontraban intervenciones no relevantes del episodio que se quería presentar, como comentarios de los estudiantes o de la profesora, que no correspondían con el tema estudiado. De los episodios de conjeturación, observamos varias interacciones que correspondían a un mismo código en el mismo episodio, por lo que se dejaron las más representativas y se eliminaron otras. Cada uno de los video-clips elaborados está estructurado de la siguiente forma:

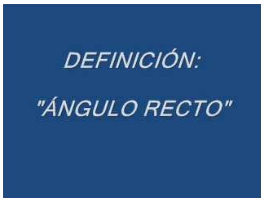
- *Presentación.* Se describe el proceso de la actividad demostrativa que se desarrolla en el video, y el objetivo central del episodio. En el caso del proceso de demostrar se presenta el enunciado del teorema que se desea justificar; para el proceso de usar definiciones, se menciona el objeto geométrico a definir; y para el proceso de conjeturar, se menciona el problema que la profesora propuso a la clase, y del cual se obtuvieron las conjeturas estudiadas. La presentación de cada uno de los video-clips, se muestra a continuación, con la numeración establecida para relacionar el video-clip con el informe descriptivo-interpretativo.

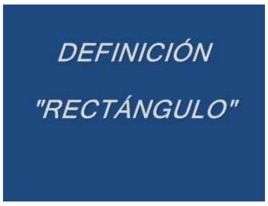
Videos-clips de la acción de demostrar:




Video-clip N. 1 Video-clip N. 2 Video-clip N. 3

Video-clips de la acción de definir:

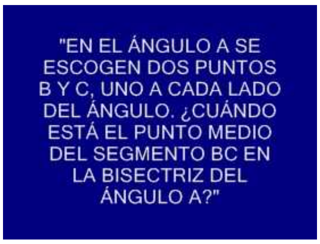


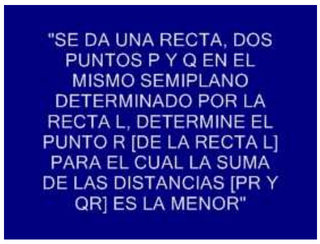


Video-clip N. 4 Video-clip N. 5 Video-clip N. 6

Video-clips de la acción de conjeturar:






Video-clip N. 7 Video-clip N. 8 Video-clip N. 9

- *Desarrollo.* En el desarrollo del video-clip se presenta el segmento de video del episodio de enseñanza analizado, el cual está subtitulado, para que sean claras las intervenciones de cada una de las personas que intervienen.

- *Créditos:* Al finalizar el episodio de enseñanza se muestran los créditos en donde se mencionan como autores de la grabación del video al grupo Aprendizaje y Enseñanza de la Geometría de la Universidad Pedagógica Nacional (UPN), la fecha en la que esta se realizó y las personas que editaron el video [Ver *Imagen 4*].

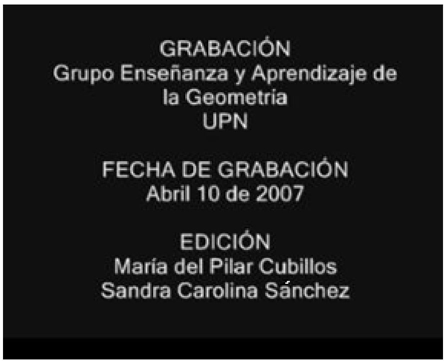



*Imagen 4. Créditos de los video-clips*

Los nueve video-clips editados se encuentran en un video en el que inicialmente se encuentra un menú, de nueve nombre que se relacionan con cada uno de los videos, la parte inicial del nombre se refiere al proceso que se desea mostrar, y la segunda parte, que se encuentra entre comillas, una frase que relaciona el objeto geométrico estudiado.

# CAPÍTULO 6. CONCLUSIONES

En este capítulo reportamos las conclusiones obtenidas del trabajo investigativo que hemos presentado. Así mismo, analizamos los aportes del trabajo a la comunidad de educadores matemáticos, en especial a aquellos que se inclinan por la enseñanza de la geometría o por la formación docente, y finalizamos con algunas preguntas que surgen a partir del trabajo que hemos desarrollado y consideramos que pueden ser resueltas en futuros proyectos.

Al hacer un análisis retrospectivo de la descripción general de la clase de geometría plana presentada en Echeverry, Molina, Perry y Samper (2009) y Camargo, Echeverry, Molina, Perry & Samper (2008), observamos que las acciones que los autores mencionan como acciones que comprometen a los estudiantes con la actividad demostrativa, asociadas con la gestión que hace el profesor, están directamente relacionados con los patrones de interacción identificados y descritos en el Capítulo 3 y 4, la mayoría de los patrones de interacciones que identificamos se entrevén, y en algunas oportunidades se describen en los artículos ya mencionados, pero sin que los autores les dieran relevancia a los mismos. Ampliando aquí una descripción de cada uno de los patrones y ejemplificándolos desde la la práctica de una profesora centrada en la actividad demostrativa.

Algunos de los aspectos de interacción que son susceptibles de reflexión y análisis por parte de docentes en formación inicial como aporte a su formación en geometría, son los patrones de interacción relacionados con los procesos: demostrar, usar definiciones y conjeturar que hemos identificado y presentado en el Capítulo 4. A partir de la reflexión sobre la práctica de una profesora en el estudio colectivo de la actividad demostrativa, los futuros docentes pueden confrontar sus creencias y concepciones sobre la práctica de enseñar matemáticas y su conocimiento sobre la enseñanza de la demostración en geometría, así van consolidando su conocimiento profesional. Cabe aclarar que nuestra intención no es que los estudiantes copien o repitan los patrones de interacción que se identificaron, sino que analicen sobre ellos.

Toda actividad se rige por unos patrones de interacción, que en todos los casos no son los mismos, pues como se observó en el Capítulo 3 y 4, el estudio de los procesos demostrar, usar definiciones y conjeturar de la actividad demostrativa no se rigen por unas mismas pautas de interacción, aunque existen unos generales que son los encontrados en la categoría de gestión comunicativa, cada uno de los procesos tiene unos patrones propios que lo caracterizan en el aula.

Algunos aspectos que influyen en la práctica del profesor y que están directamente relacionados con el conocimiento profesional son: la experiencia del profesor en la enseñanza de la actividad matemática que favorece en clase con sus estudiantes, la reflexión de la práctica y la evaluación y reestructuración de las tareas y problemas que se proponen en la clase. Como se observó en el estado del arte, las tareas que se proponen en la clase de geometría son objeto de evaluación y reestructuración, por parte de los integrantes de la línea de investigación "Aprendizaje y Enseñanza de la Geometría", de la cual hace parte la profesora que guía la clase geometría plana aproximadamente diez años atrás y cuya metodología de la clase ha sido modificada desde el año 2004. Observamos que la experiencia que tiene la profesora sobre la enseñanza de la demostración y los estudios que ha realizado de la actividad demostrativa permiten estructurar y guiar las interacciones que surgen en la clase, pues desde el inicio ella sabe cuál es la meta a alcanzar y los caminos que conllevan o no a alcanzar dicha meta.

Las categorías de interacción que emergieron de la práctica de la profesora y el análisis que realizamos a dicha práctica aportan a la educación matemática, en especial a la educación en geometría y al conocimiento sobre la enseñanza de los docentes en formación inicial, al convertirse en el marco teórico desde el que observar la práctica profesional de un profesor. Dicho marco teórico junto con los resultados obtenidos de la investigación se convierten en piezas claves para el diseño y desarrollo de entornos favorables para la reflexión y análisis de la práctica de enseñar matemáticas.

Gracias a la práctica de la profesora y a las condiciones de la clase fue posible producir el material didáctico obtenido como resultado, ya que dicha práctica permitió caracterizar interacciones entre la profesora y los estudiantes, y dar un ejemplo de la práctica docente en relación a la actividad demostrativa. Dichas categorías emergieron de los procesos de la actividad demostrativa trabajados en cada episodio de clase, y en particular del conocimiento matemático o geométrico puesto en juego en cada uno de los procesos.

Con el material que hemos obtenido respondemos a una de las necesidades investigativas tanto a nivel nacional como internacional y tratamos de suplir, en parte, la necesidad de tener material didáctico para la formación docente, siendo conscientes que éste no es el único tipo de material que se puede usar en los programas de formación inicial. Consideramos que el material acercará a los futuros profesores a la práctica de aula, y permitirá que ellos conozcan y reflexionen sobre ella, ganando conocimiento acerca de la enseñanza de las matemáticas.

En relación a los aportes en términos del estudio de las interacciones que se describen a lo largo del documento, se amplía el panorama de los patrones de interacción que se dan en el aula de matemáticas, ya que la mayoría de las investigaciones consultadas al referirse a interacciones caracterizan acciones propias de la profesora y de los estudiantes, pero muy pocas se centran en caracterizar fragmentos de diálogos que se encadenan en medio de una actividad matemática y que están directamente relacionados con esas acciones. Logrando así, con nuestra investigación caracterizar interacciones a partir de cadenas conversacionales, que intentan favorecer el aprendizaje de una actividad matemática, y en las cuales están inmersas las acciones identificadas en algunos de los proyectos de investigación leídos.

En el mismo sentido, un aporte importante es la caracterización de interacciones en una actividad matemática propia, ya que fue posible darnos cuenta que éstas varían de acuerdo a la actividad matemática que se desarrolla en el aula, aunque no se desconoce que existen unas generales. Además, también logramos identificar que los patrones de interacción también varían de acuerdo a los procesos que se desarrollen, ya que la gestión que realiza la profesora para lograr los propósitos que se establece para las clases, es variable de acuerdo al proceso trabajado. Por lo anterior, aunque describimos 4 categorías de análisis estas pueden no observarse al analizar otro de los procesos de la actividad demostrativa, emergiendo así otras categorías de análisis, ya que las categorías emergieron a medida que se analizaban los fragmentos de clase de los procesos: formular conjeturas, usar definiciones y demostrar formalmente. Logrando así una caracterización propia de las interacciones que se gestan en la práctica de una profesora de geometría cuando favorece el aprendizaje de la actividad demostrativa.

La elaboración de esta investigación nos volvió sensibles frente a las interacciones que se gestan en el aula, y nos lleva a mirar cuáles de estos patrones se dan en nuestras aulas, frente a los procesos que aquí trabajamos. Además, nos reafirma el gusto por la geometría, en especial por todos aquellos procesos que se involucran en su aprendizaje, quedándonos la expectativa de seguir investigando aspectos relacionados con este tema.

Al terminar esta investigación nos surgen varias preguntas ¿Cómo son los patrones de interacción en la actividad demostrativa en otra rama de las matemáticas? ¿En qué otra actividad matemática se evidenciarán los patrones de interacción identificados? ¿Qué otros patrones de interacción se identifican en otra actividad matemática? ¿Qué tipo reflexión y análisis se logrará de los futuros docentes con los que se trabaje el material resultado de esta investigación? ¿Cómo guiar el desarrollo del curso Enseñanza y Aprendizaje de la geometría, en el que se usen los resultados de esta investigación, para promover la reflexión y el análisis de la práctica docente?, que esperamos puedan ser resueltas en futuros proyectos.

## REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS


Callejo, M., Llinares, S., & Valls, J. (2006). *Video–Clips y análisis de la enseñanza. Construcción del Conocimiento necesario para enseñar matemáticas*, en M.C. Penalva, I.

Callejo, M., Llinares, S., & Valls, J. (2007(a)). *Interacción y análisis de la enseñanza. Aspectos claves en la construcción del conocimiento profesional*. Investigación en la Escuela. 61(1). 5 – 21.

Callejo, M., Llinares, S., & Valls, J. (2007 (b)). E*l uso de videoclips para una práctica reflexiva*. Comunicación en las XIII Jornadas de Aprendizaje y enseñanza de las Matemáticas. Granada.

Callejo, M., Llinares, S., & Valls, J. (2008). *Dialécticas en el diseño de materiales curriculares y entornos de aprendizaje para estudiantes para maestro en el área de didáctica de la matemática.* Alicante.

Camargo, L., Perry, P., & Samper, C. (2005). *La demostración en la clase de Geometría: ¿puede tener un papel protagónico?* En: Educación Matemática. 17 (003)

Camargo L., Perry P., Rojas, C., & Samper C. (2006). *Actividad demostrativa en la formación inicial del profesor de matemáticas.* Bogotá

Camargo L., Echeverry A., Molina O., Perry P., & Samper C. (2008). *La formación inicial de profesores de matemáticas de cara a las reformas propuestas en los lineamientos curriculares colombianos de 1998.* Bogotá.

Camargo L., Echeverry A., Molina O., Perry P., & Samper C. (2009). *Estudio del cuadrilátero de Saccheri como pretexto para la construcción de un sistema axiomático local.* Artículo sometido a consideración de la Revista *Matemáticas: Enseñanza Universitaria*. Bogotá.

Cobb P., Godino, G., Greer, B., Nesher, P., & Steffe , L. (1996). *Theories of Mathematical Learning.*

Gavilán, J., García, M., & Llinares., S (2007 (a)). *Una perspectiva para el análisis de la práctica del profesor de matemáticas. Implicaciones metodológicas.* En: Enseñanza de las ciencias. 25 (2). 157 – 170.

Gavilán, J., García, M., & Llinares., S (2007 (b)). *La modelación de la descomposición genética de una noción matemática. Explicando la práctica del profesor desde el punto de vista del aprendizaje potencial en los estudiantes.* En: Educación matemática. 19 (2). 5-39. Agosto

Godino, J. (2002). *La formación matemática y didáctica de maestros como campo de acción e investigación para la didáctica de las matemáticas: el proyecto Edumat-Maestros.* En: http://www.ugr.es/~jgodino/fprofesores.htm, descargado el 15 de Abril de 2002.

Godino, J., & Recio, A. (2001) *Significados institucionales de la demostración. Implicaciones para la educación matemática.* En: Enseñanza de las ciencias, 19 (3). Pp. 405-414

Llinares, S. (2000) *Intentando comprender la práctica del profesor de matemáticas*. En: DA PONTE, J.P. y SERRAZINA, L. (org.). Educação matemática em Portugal, Espanha e Itália : actas. [Lisboa] : Secção de Educação Matemática da Sociedade Portuguesa de Ciências da Educação, 2000. Pp. 109-132.

Llinares, S. (2007 (a)). *Conocimiento profesional del profesor de matemáticas: Conocimiento, Creencias y Contexto en relación a la noción de función.*

Llinares, S. (2007 (b)) *Formación de profesores de matemáticas. Desarrollando entornos de aprendizaje para relacionar la formación inicial y el desarrollo profesional.* Conferencia invitada en la XIII Jornadas de Aprendizaje y Enseñanza de las Matemáticas. JAEM. Granada. Julio

Llinares, S (2008). *Aprendizaje del estudiante para profesor de matemáticas y el papel de los nuevos instrumentos de comunicación.* Conferencia invitada en III Encuentro de Programas en Formación Inicial de Profesores de Matemáticas, Universidad Pedagógica Nacional, Santa Fe de Bogotá, Colombia. Abril 24 y 25 de 2008.

Llinares, S., Roig, A., & Valls., J. (2008). *Aprendizaje y diseño de entornos de aprendizaje basado en videos en los programas de formación de profesores de matemáticas.* En: Educación Matemática, Diciembre 59 – 82.

Mariotti, M. (2009). *Artifacts and signs after a Vygotskian perspective: the role of the teacher*. En: Mathematics Education N.41 Pp 427–440

Martin, T., Soucy, S., Wallace, M. & Dindyal, J. (2005). *The interplay of teacher and student actions in the teaching and learning of geometric proof.* En: Educational Studies in Mathematics N.60 Pp 95–124.

Ortiz, H., & Jimenez, N. (2006). La demostración, elemento vivo en la didáctica de la matemática. En: Scientia et Technica. Año XII, No 31, Agosto de 2006.

Plan de estudios de la Licenciatura en matemáticas de la Universidad Pedagógica Nacional, para estudiantes que ingresan en el primer semestre del 2008.

Sinclair, M. (2003). S*ome implications of the results of a case study for the design of pre-constructed, dynamic geometry sketches and accompanying materials.* En: Educational Studies in Mathematics N.52 Pp 289–317.

# ANEXOS

## ANEXO I. INFORMES DESCRIPTIVO-INTERPRETATIVOS

A continuación se muestran los ocho informes descriptivo-interpretativos, del dos al nueve, los cuales son uno de los resultados de la investigación. El informe descriptivo-interpretativo uno se presentó en el capítulo de resultados.

**VIDEO CLIP N. 2**

**Tiempo estimado:** 10 minutos 43 segundos

**Actividad matemática:** Demostrar

**Descripción:** Demostración del teorema "Si dos ángulos son opuestos por el vértice entonces son congruentes".

---

Este informe descriptivo-interpretativo corresponde a un segmento de clase del día 13 de Marzo de 2007, en el que se realiza una demostración colectiva, que por medio de la gestión de la profesora, los estudiantes participan en la construcción de la demostración, mientras que Wilson va escribiendo los pasos de la demostración en el tablero. Esta clase se desarrolló en SALACAD, una de las salas de informática de la universidad.

En la clase del 8 de marzo, la profesora propone la tarea abierta "*Dado un ángulo A ¿Qué condiciones debe cumplir B para ser congruente al ángulo A?*" de la cual surgió la necesidad de definir ángulo[15], y de establecer el postulado de la medida de ángulo[16] y el postulado de construcción de ángulo[17], elementos que se introdujeron al sistema axiomático en construcción. Durante la última parte de la clase, los estudiantes tratan de resolver la tarea mediante la exploración en el software Cabri, y retoman esta exploración en la primera parte de la clase del 13 de marzo. De la exploración realizada se obtuvieron

[15] Un *ángulo* es la unión de dos rayos, con el mismo origen o extremo, que no son colineales.

[16] A cada ángulo le corresponde un número real entre 0 y 180.

[17] Sea $\overrightarrow{AB}$ un rayo de la arista del semiplano H. Para cada número r entre 0 y 180, hay exactamente un rayo $\overrightarrow{AP}$, con P en H, tal que $m\angle PAB=r$.

diversas conjeturas, de las cuales algunas quedaron pendientes, ya que mencionaban nociones que no habían sido introducidas en el sistema; una de las propuestas, que fue analizada y discutida por el grupo, es "*Si dos ángulos son opuestos por el vértice entonces son congruentes*". El análisis de esta conjetura conllevó a definir ángulos opuestos por el vértice[18], ángulos par lineal[19], y establecer el postulado de ángulos par lineal[20]; los dos últimos surgen en el momento de tratar de demostrar la conjetura. Luego, de que algunos de los estudiantes esbozan la demostración de la conjetura, la profesora pasa a Wilson al tablero para que realice la demostración correspondiente.

*Fragmento 1*

El episodio comienza cuando Wilson inicia la producción de la demostración, escribiendo la afirmación $\angle ABC$, por lo cual la profesora interviene, indicando que escriba ángulo 1 y ángulo 3, como forma abreviada de mencionar los ángulos, partiendo de la representación gráfica que se tiene [Figura 1]; además, le indica que escriba solo las afirmaciones, y que las justificaciones deberán ser dadas oralmente por todos los miembros de la comunidad. Ante la primera indicación, Erick interviene con una pregunta.

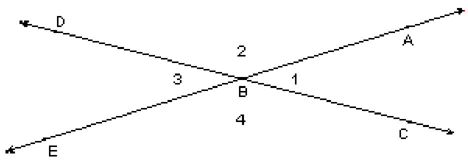



*Figura 1*

| | | |
|---|---|---|
| 01 | P: | Vamos a hacer el siguiente plan. Wilson va a escribir solamente las afirmaciones, y verbalmente vamos a decir cuáles son las justificaciones, ¿bien? **[**Wilson pasa al tablero y escribe: AFIRMACION, 1. $\angle ABC$ ] |
| 02 | Efraín: | Profe, una pregunta. |
| 03 | P: | No. Ángulo uno y ángulo tres, para que nos rinda el tiempo [Wilson borra |

[18] Dos ángulos son *opuestos por el vértice*, si sus lados forman dos pares de rayos opuestos.
[19] Si $\overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{AD}$ son rayos opuestos, y C es un punto que no está en la recta $\overleftrightarrow{BD}$, entonces $\angle BAC$ y $\angle CAD$ forman un *par lineal.*
[20] Si dos ángulos forman par lineal entonces la suma de sus mediadas es $180^o$.

$\angle$ABC, y escribe $\angle 1$ y $\angle 3$]. ¿Quién tiene una pregunta?

| | | |
|---|---|---|
| 04 | Efraín: | Profe, pues no sé si esté en un error, pero… ¿Cómo hace para saber que el ángulo, si lo nombramos con número, ese número no se está refiriendo a una medida? |
| 05 | P: | ¡Ah! Eso es una buena pregunta. Bueno, en el diagrama no vamos a poner medidas, primera cosa. |
| 06 | Efraín: | Medida de ángulo. ¿Cierto? |
| 07 | P: | Sí. Entonces, si yo quiero hablar de la medida, lo tengo que escribir, medida del ángulo uno. ¿Sí? Y entonces se refiere al ángulo. Entonces, cuando está en el interior del ángulo es porque estamos hablando de ese ángulo, el número. 1 y 3 son opuestos por el vértice… |

[P2 01- 07]

En este fragmento la profesora *responde* a Efraín, ante un cuestionamiento que surge al nombrar los ángulos con números, ya que en un momento anterior se había introducido el postulado de la medida de ángulos, lo que Erick consideraba podía causar confusión. A la pregunta, la profesora responde haciendo aclaración de cómo se hace uso de este postulado, resaltando que al mencionar la medida de un ángulo ésta se debe hacer en medio de la demostración y no sobre la figura.

*Fragmento 2*

Luego de la intervención de Efraín, Wilson continúa con la demostración, buscando un par de ángulos par lineal, para poder hablar de que la suma de las medidas es 180, y luego hacer uso de ello, para buscar la medida de uno de los ángulos que es opuesto.

| | | |
|---|---|---|
| 10 | Wilson: | Ahora necesitamos obtener la medida del… de algún ángulo… de los dos ángulos, de uno de los dos ángulos, para que al sumarlos de 180. Entonces eso lo sabemos mediante el… mediante la definición de… este postulado. |

¿Qué más necesitamos? El otro ángulo, el que nos forme 180.

| | | |
|---|---|---|
| 11 | P: | Sí. |
| 12 | Efraín: | El par lineal. |
| 13 | Wilson: | El par lineal. |
| 14 | P: | Sí. |
| 15 | Wilson: | Entonces ese lo ubicamos mediante… mediante la definición. |
| 16 | María: | Y el ángulo… |
| 17 | P: | Es lo único que puedo usar, pero ¿qué necesito para poder declarar que está en el par lineal? |
| 18 | Wilson: | Que son rayos opuestos. Que los rayos son opuestos y que un punto del otro… |
| 19 | P: | Del otro rayo no está en la recta. |
| 20 | Wilson | Del otro rayo no está en la recta. |
| 21 | P: | Entonces lo primero que vas a tener que decirme es ¿qué? |
| 22 | María: | Que son opuestos. |
| 23 | Wilson: | Que son… El ángulo 1 y el ángulo 2… |
| 24 | P: | ¡No! |
| 25 | María: | Eso es una conclusión Wilson. |
| 26 | P: | Exactamente, eso es lo que tú quieres concluir, pero ¿qué elementos necesito para poderlo decir? Me lo acabas de decir. |
| 27 | Wilson: | Ah ya. El rayo |
| 28 | P: | ¿AB? |
| 29 | Wilson: | Y el rayo BD |
| 30 | P: | ¿AB y BD? |
| 31 | Wilson: | ¿Y BD? y BE |
| 32 | P: | AB, AB es éste. |
| 33 | Wilson: | BA, BA, BA. |
| 34 | P: | BA y… |
| 35 | Wilson: | DE |
| 36 | P: | Son… opuestos [Wilson escribe: 2. $\overrightarrow{BA}$ y $\overrightarrow{BE}$ son opuestos] ¿cómo lo |

sabes? ¿cómo lo sabe él? ¿Construcción?

37 Varios: Definición de ángulos opuestos.

38 P: ¿Definición de…?

39 Alguien: Ángulos opuestos.

40 P: No de rayos opuestos. De…

41 Alguien: Ángulos opuestos.

42 P: Ángulos opuestos por el vértice. Lo que está dado son los ángulos. ¿Sí? Y la definición me dice que tiene… forman dos pares de rayos opuestos. Y… Wilson está cogiendo un par, de rayos opuestos. Entonces, por definición de ángulos opuestos por el vértice. Bueno, ¿qué más necesito?

43 Wilson: Ahora… ¿Ahora si la medida?

44 P: No, tú dijiste que los querías declarar par lineal.

45 Wilson: A pues el punto C…

46 P: Necesitamos un punto…

47 Wilson: Que no esté…

48 P: Que no esté en la recta. ¿Quién? ¿Quién va a ser?

49 Wilson: C

50 P: ¿C?

51 María: B, B.

52 Wilson: B ya está.

53 P: Bueno, puede ser C o D, pero tú habías dicho que ibas a usar éstos. [señala 1, 2 y 3]

54 Wilson: Bueno, sí.

55 P: D ¿y cómo puedes estar segura que D no está en esa recta? [Wilson escribe: 3. D$\notin \overleftrightarrow{AB}$]

56 Luz: Por…

57 Julián: Por la misma definición de ángulos opuestos…

58 P: ¿Por qué? ¿qué?

59 Julián: Únicamente son dos pares de ángulos, de rayos opuestos.

60 P: Son dos pares de rayos opuestos. Luego, necesito eso también ¿cierto?

Entonces, en el paso dos, en el paso dos, Wilson me debe poner ambas cosas [completa en paso dos con otro color escribiendo: $\overrightarrow{BD}$ y $\overrightarrow{BC}$ opuestos].

61 Alguien: AB o BC. Ah no.

62 P: Y BD, y BC opuestos. ¿Y eso me va a asegurar que D no esté en recta AB?

63 Julián: Puedo decir que BD como no es opuestos con BE o BA…

64 Alguien: Sí, si claro.

65 P: BD no es opuesto con BA. O sea, ahí lo que está jugando un papel importantísimo es… esta palabra: “dos pares” [de la definición de ángulos opuestos por el vértice]. Dos pares, porque eso me está diciendo que D y C no pueden estar en la misma recta. En la misma recta AE o AB, porque entonces no serían otro par ¿sí? Entonces es el “dos” que juega un papel importante ahí, porque me asegura entonces que el punto no puede estar en la recta. Bueno, eso sería un poco complicado escribir todo eso, pero entonces lo vamos a poner: D no pertenece a recta AB por definición, vamos a decir de par lineal, de opuestos por el vértice. Ya, tengo un punto, y ahora si puedes decir que estos dos ángulos ¿cuáles?

66 Wilson: Ángulos 1 y 2 son par lineal. [Escribe 4. $\angle 1$ y $\angle 2$ son par lineal]

67 P: Entonces 1 y 2 son par lineal. ¿1 y 2 son los que está declarando él que son par lineal?

68 Wilson: Si

69 Ana: 2 y 3

70 P: 2 y 3, ¿cierto? ¿por qué?

71 Ana: Porque él estaba hablando de rayos opuestos.

72 P: Porque él está tomando estos rayos opuestos y este punto no. Entonces 2 y 3, 2 y 3 [Wilson corrige] Estos rayos opuestos y este punto no. Tiene un par lineal, ¿de acuerdo? 2 y 3. Bien.

73 Wilson: Ahora si podemos decir que las medidas. O sea, podemos usar este postulado.

| | | |
|---|---|---|
| 74 | P: | Ahora usamos el postulado del par lineal… |
| 75 | Wilson: | Postulado del par lineal, para decir que la medida… |
| 76 | P: | Que la suma de las medidas es 180. La medida de ángulo 2 y la medida de ángulo 3… Ojo, Wilson se acordó cómo se simboliza la medida de… Es 180, postulado del par lineal. Bueno, ¿y? ¿y qué más? |
| 77 | Julián: | Por el postulado, la medida del ángulo uno y la medida del ángulo dos debe medir 180. |

[P2 10 - 77]

En este fragmento Wilson anticipa que para desarrollar la demostración necesita hallar la medida de dos ángulos que sumen 180 [10]; además, colectivamente acuerdan que necesitan declarar que los ángulos 1 y 2 son opuestos por el vértice [22, 26] por lo que se gesta una interacción en la que se *buscan los antecedentes posibles* que conlleven a la conclusión. Dichos antecedentes están relacionados con rayos opuestos y ángulos par lineal [60 - 67]. En el proceso de la búsqueda de los antecedentes, el papel de profesora es el de guiar, vigilar y garantizar que los antecedentes que se incluyan en la demostración efectivamente conlleven a la conclusión, ya que Wilson y algunos estudiantes nombran elementos del sistema axiomático que no conllevan a la conclusión anticipada [18 – 26, 39 - 42]. Además de buscar los antecedentes, *la profesora requiere la justificación* de algunos de ellos [36] y los estudiantes intervienen para corresponder al requerimiento. La justificación se obtiene mediante la interacción entre la profesora y algunos estudiantes [36 - 42].

Otra interacción que también surge en este fragmento es iniciada por la profesora cuando observa que Wilson solamente ha incluido en la demostración un par de rayos opuestos y que para afirmar que dos ángulos son opuestos por el vértice necesitan dos pares de rayos opuestos, por lo que al tener los *requisitos incompletos,* la profesora completa el paso dos [59 - 60].

*Fragmento 3*

Luego de determinar que los ángulos 2 y 3 suman 180 porque son par lineal, proceden a justificar que los ángulos 1 y 4 también son par lineal y mediante relaciones algebraicas logran concluir la demostración.

| | | |
|---|---|---|
| 78 | P: | Necesito conseguir… |
| 79 | Julián: | Otro par lineal. |
| 80 | P: | Otro par lineal. Y entonces ¿qué ingredientes necesito? |
| 81 | Ana: | Pues otro punto que no pertenezca al… |
| 82 | Julián: | Otro punto que no pertenezca a la otra recta, a la otra recta. [Wilson escribe C $\notin$ ]. |
| 83 | P: | ¿C? |
| 84 | Wilson: | Sí. |
| 85 | P: | ¿Es el que quieres? |
| 86 | Leopoldo: | A |
| 87 | Ana: | E |
| 88 | Leopoldo: | Está hablando de A, tiene que poner a A. |
| 89 | P: | ¡Ah! A es el punto que queremos decir que no está en la recta [Wilson corrige 6. A $\notin$ $\overleftrightarrow{DC}$ ] Entonces ángulo 1 y ángulo 4 son par lineal, por definición ¿y? Todo bórralo. Y ahora ¿cuál es el siguiente paso? |
| 90 | Wilson: | Y ahora decimos que son par lineal. Ahora necesitamos otro 180. O sea hacemos igual. |
| 91 | Luz: | La medida. |
| 92 | P: | ¿Otra vez? |
| 93 | Wilson: | La medida del ángulo 1 más la medida del ángulo… |
| 94 | P: | ¡Ay! ¿qué?, 1 y 4 son par lineal. |
| 95 | Alguien: | Sí, pero… |
| 96 | Wilson: | Sí. |
| 97 | P: | Pero… necesitaríamos a C, y tú cogiste fue a A |
| 98 | Alguien: | Sí. |
| 99 | Alguien: | 1 y 2 [Wilson corrige y escribe 7. $\angle 1$ y $\angle 2$ son par lineal 8. m$\angle 1$ + m$\angle 2$ = 180]. |
| 100 | P: | 1y 2. Entonces fíjense que ese punti… esta partecita, bastante importante ¿no? [los pasos 3 y 6] Porque me dice a cuál me estoy refiriendo. A cuál par lineal. Sí, porque hay varios pares lineales ahí. Bueno. Postulado del… par lineal ¿y ahora? Y ahora ¿cuál era el plan? ¿Para qué dijimos todo eso? Wilson. Ignacio ¿para qué hicimos todo eso? ¿Dónde está Ignacio? |
| 101 | Ignacio: | Igualamos… Igualamos las dos medidas que dan 180, para… |

| | | |
|---|---|---|
| 102 | P: | O sea que ahora se vuelve una demostración… |
| 103 | Varios: | Algebraica. |
| 104 | P: | Algebraica. Vamos a usar la propiedad algebraica. Y es la propiedad… Luz. |
| 105 | Luz: | ¿Transitiva? |
| 106 | P: | Transitiva. La propiedad transitiva de 5 y 8 [pasos]. Usando 5 y 8. No se le olvide ponerme todos los pasitos. Igualamos. La propiedad transitiva me permite igualar, o sustitución. Hay dos formas de justificarlo. Que la medi… esta suma es igual a esta suma. |
| 107 | Wilson: | ¿Lo colocamos acá? |
| 108 | P: | Sí. |
| 109 | María: | Más fácil la transitiva. |
| 110 | P: | Cualquiera. Es sustitución o es propiedad transitiva. La cuestión es que sustitución es mucho más amplio, lo puedo usar en otros momentos. La transitividad la puedo usar cuando tengo ecuaciones o cuando tengo congruencias. Mientras que la sustitución la puedo usar cuando tengo desigualdades. Algún día nos va, vamos a trabajar con desigualdades, también. [Wilson escribe 9. $m\angle 2 + m\angle 3 = m\angle 1 + m\angle 2$, 10. $m\angle 3 = m\angle 1$]. |
| 111 | Germán: | La medida del ángulo dos… |
| 112 | María: | Medida del ángulo tres es igual a la medida del ángulo 1. |
| 113 | P: | Entonces, medida del ángulo 3 es igual a medida del ángulo 1. Propiedad… |
| 114 | Alguien: | Cancelativa. |
| 115 | P: | Cancelativa. Me da otra propiedad de los reales. Ese es su décimo paso. Propiedad cancelativa, y por lo tanto conclusión, ángulo 1 congruente al ángulo 3 por… definición. |

En este fragmento también se evidencia una interacción en la que se *buscan los posibles antecedentes* que permiten afirmar que los ángulos 1 y 4 son par lineal, para ello usan rayos opuestos y mediante un proceso similar al realizado en el fragmento 2, logran establecer colectivamente que los ángulos 1 y 4 suman 180 grados [78 - 100]. Teniendo dos pares de ángulos par lineal logran demostrar mediante relaciones algebraicas que si dos ángulos son opuestos por el vértice entonces son congruentes [101 - 115].

**VIDEO CLIP N. 3**

**Tiempo estimado:** 6 minutos 21 segundos.

**Proceso de la actividad demostrativa:** Demostrar

**Descripción:** Demostración del teorema "*Un segmento tiene más de dos puntos*".

Este informe descriptivo-interpretativo corresponde a un segmento de clase del día 15 de Febrero de 2007, en el que se realiza una demostración colectiva, guiada por la profesora. Esta es la sexta clase, se define segmento como el *"conjunto de puntos A y B y los puntos C talque C está entre A y B (A – C - B)"*. El episodio de clase que se describe en este informe descriptivo-interpretativo, se centra en la prueba de que un segmento tiene más de dos puntos, con el fin negociar el significado de la definición de segmento y extraer aspectos centrales que sirven al sistema axiomático que se está construyendo en el curso. La profesora modela la forma de escribir una demostración a partir de la participación de los miembros de la comunidad.

Luego de que se define segmento, la profesora pregunta a los estudiantes "*¿es el segmento AB subconjunto de alguna recta?"*; varios responden que sí, que es el subconjunto de la recta que contiene el punto *A* y el punto *B.* La profesora indaga por la justificación de esa afirmación, y uno de los estudiantes responde que es porque por dos puntos pasa una recta; ella dice que esta afirmación no justifica el hecho. La profesora realiza preguntas que constituyen un posible camino para hacer la justificación, tratando de que los estudiantes analicen que el segmento *AB* está contenido en la recta *AB;* entre ellas, surge la pregunta *¿puede ser el segmento AB solamente* [los puntos] *A y B?*

Mediante una conversación colectiva en la que se discuten varias opciones, como que los puntos *A* y *B* pueden "estar muy pegados" o son el mismo punto, el grupo acuerda que un segmento no se constituye únicamente por los puntos *A* y *B*. La profesora pregunta por la justificación, e Ignacio dice que para hablar de interestancia (como aparece en la definición de segmento) se necesitan tres puntos; María, Daniel y Julián argumentan la existencia de un punto entre *A* y *B* usando el "postulado correspondencia puntos en recta" que permite hacer una correspondencia entre los puntos y los números reales, y la densidad de los números reales, que permite afirmar que entre dos números reales existe otro número real; la profesora cuestiona este argumento pues el "postulado correspondencia puntos en recta" requiere la existencia de la recta, y hasta el momento existirían dos puntos (*A* y *B*), más no la recta. Julián dice que al tener los dos puntos puede afirmar la existencia de la recta, por el "postulado de la recta"[21].

Después de las afirmaciones de los estudiantes la profesora comienza la demostración formal del teorema "*Un segmento tiene más de dos puntos*".

El video comienza cuando la profesora afirma que lo que quiere demostrar es, que "el segmento *AB* es diferente del conjunto de puntos *A* y *B*". La demostración inicia con la afirmación de la existencia de los puntos *A* y *B*, y se va desarrollando con la reconstrucción de las diferentes afirmaciones y justificaciones que se habían dado en la anterior conversación. Como pasos claves de la demostración se tienen: la existencia de los puntos *A* y *B* y la existencia de la recta, la correspondencia entre los puntos *A* y *B* de la recta *AB* con los números reales, la existencia de un número entre la coordenada de *A* y la coordenada de *B* y la correspondencia de éste número con un punto *C* de la recta *AB.*

En la interacción que se gesta en el desarrollo de la demostración se observa: estudiante da ideas - profesora traduce, impulsar ideas, requerimiento de justificación, pasos soporte de justificación, búsqueda de antecedentes posibles. Estas seis acciones trazan el camino de análisis de este informe descriptivo-interpretativo. El lector observará que algunas intervenciones se repiten porque tienen una función diferente según su codificación; esto hace que el informe descriptivo-interpretativo no se presente cronológicamente.

*Fragmento 1*

En este fragmento se retoma la discusión que se generó, cuando el grupo acordó que el segmento *AB* no son los puntos *A* y *B* únicamente; iniciando formalmente la demostración.

| | | |
|---|---|---|
| 04 | Julián: | Existe la recta. |
| 05 | P: | Existe la recta AB [escribe: 2. $\exists \overleftrightarrow{AB}$; P. de la recta]. Postulado de la recta. ¿Después qué me dices? |

[21] Postulado de la recta: dados dos puntos cualesquiera existe una recta que los contiene.

| | | |
|---|---|---|
| 06 | Julián: | En ese momento tenemos por esos tenemos una… dos puntos y una recta. Entonces por el postulado de la correspondencia puntos-recta, a cada punto le corresponde un único [número] real. |
| 07 | P: | O sea, ¿qué digo aquí? |
| 08 | Julián: | [le dicta] Sea *x*… |
| 09 | P: | *X* |
| 10 | Luz: | La coordenada de A. |
| 11 | Julián: | La coordenada de A. |
| 12 | P: | Coordenada de A. |
| 13 | Julián: | *y* |
| 14 | P: | *y* coordenada de B. Por… postulado, a todo punto de recta le corresponde un número. [Escribe: 3. Sea C(A) = *x*; C(B)= *y*; P. puntos de recta - números]. Y aquí ya usé el paso dos. ¿Cierto? Bueno, ¿y ahora? |
| 15 | Julián: | Método de los reales. Lo que dijo Daniel. |
| 16 | P: | ¿Qué es lo que Daniel iba a decir? |
| 17 | Daniel: | No. Pues se trata más bien de ubicar lo de la regla. |
| 18 | P: | Lo de la regla ¿la colocación de la regla? |
| 19 | María: | Sí. |
| 20 | P: | Bueno, pero entonces ¿qué hago? ya, tienen coordenadas. |
| 21 | Daniel: | A no. Pues entonces, hace la distancia. |
| 22 | P: | ¿Hago la distancia entre ellos? |
| 23 | Daniel: | Entre A y B. |
| 24 | P: | O sea… digo… ¿Qué? |
| 25 | Daniel: | Puedo hallar la distancia. |

**[P3 4 –25]**

En este fragmento se muestra como, luego de que los estudiantes retoman las ideas de la conversación anterior para decir cada uno de los pasos de la demostración, la profesora *traduce* éstos *a un lenguaje geométrico*, como se observa en la intervención 04 y 05, en donde un estudiante dice "existe la recta" y la profesora escribe en el tablero "$\exists \overleftrightarrow{AB}$"; y en las intervenciones 8 a 14, en donde Julián y Luz le dicta a la profesora las coordenadas de A y B, y la profesora escribe "Sea C(A)=*x;* C(B)=*y*", logrando así ir construyendo la demostración e introduciendo una escritura propia de la geometría que les permita a los estudiantes usarla en el desarrollo del curso, y comprenderla al momento de leer textos que usen esta simbología.

La profesora usa un formato de dos columnas, para realizar la respectiva demostración, escribiendo las afirmaciones que dan los estudiantes y que ella traduce, y frente a cada una de las afirmaciones escribe su correspondiente justificación [5, 14], con la numeración de los *pasos* previos en donde están las condiciones que les permiten hacer la afirmación, reafirmando la importancia del formato, que había introducido en clases anteriores para cada una de las demostraciones realizadas, la importancia de justificar cada una de las afirmaciones dadas, y de escribir el número del *paso* o afirmación que *soporta* la justificación dada, dado que en el formato de dos columnas se van numerando cada uno de los pasos que se realizan.

*Fragmento 2*

En este fragmento se observan dos intervenciones, en la primera se le asignan coordenadas a los puntos *A* y *B* y en la segunda se habla de la coordenada del punto medio, punto que está entre *A* y *B.*

| | | |
|---|---|---|
| 8. | Julián: | [le dicta] Sea *x…* |
| 9. | P: | *X* |
| 10. | Luz: | La coordenada de A. |
| 11. | Julián: | La coordenada de A. |
| 12. | P: | Coordenada de A. |
| 13. | Julián: | *y* |
| 14. | P: | *y* coordenada de B. Por… postulado, a todo punto de recta le corresponde un número. [Escribe: 3. Sea C(A) = *x;* C(B)= *y;* P. puntos de recta - números]. Y aquí ya usé el paso dos. ¿Cierto? Bueno, ¿y ahora? |
| | […] | |
| 49 | María: | *x* más *y* sobre dos. |
| 50 | Germán: | Ah… bueno, pues entonces *x* más *y* sobre dos. |
| 51 | P: | *x* más *y* sobre dos. |
| 52 | Ignacio: | La coordenada del punto medio. |
| 53 | P: | Entonces sabemos que *x* es menor que *x* más *y* medios, menor que *y* [escribe: $x < (x + y)/2 < y$]. Ésto es una… lo podemos demostrar, un teorema de los reales, bueno, ¿y entonces? |

**[P3 8 – 14, 49-53]**

En las intervenciones 8 a 14 del fragmento, observamos que la profesora *complementa la idea* que Julián propone, porque después de dictarle las coordenadas de A y B, la profesora parafrasea y completa la idea escribiendo la justificación que le permite realizar esta afirmación [14]; justificación que es reforzada con el paso dos de la demostración, cuando la profesora dice "[…]Y aquí ya usé el paso dos[…]" [14]. En el desarrollo de la demostración, la profesora también *complementa la idea* de María, Germán e Ignacio quienes se refieren al número *"x más y sobre dos"* [49,50] o de la coordenada del punto medio [52] y la profesora completa la idea, describiendo la coordenada del punto medio como un número que está entre $x$ e $y$, cuando afirma *"x menor que x más y medios, menor que y"* [53].

*Fragmento 3*

En este fragmento se continua con la idea de usar el punto medio para demostrar la existencia de infinitos pintos en le segmento AB.

| | | |
|---|---|---|
| 14 | P: | […] Y aquí ya usé el paso dos. ¿Cierto? Bueno, ¿y ahora? |
| 15 | Julián: | Método de los reales. Lo que dijo Daniel. |
| 16 | P: | ¿Qué es lo que Daniel iba a decir? |
| 17 | Daniel: | No. Pues se trata más bien de ubicar lo de la regla. |
| 18 | P: | Lo de la regla ¿la colocación de la regla? |
| 19 | María: | Sí. |
| 20 | P: | Bueno, pero entonces ¿qué hago? ya, tienen coordenadas. |
| 21 | Daniel: | A no. Pues entonces, hace la distancia. |
| 22 | P: | ¿Hago la distancia entre ellos? |
| 23 | Daniel: | Entre A y B. |
| 24 | P: | O sea… digo… ¿Qué? |
| 25 | Daniel: | Puedo hallar la distancia. |
| 26 | P: | ¿La distancia de AB es el valor absoluto de $x$ menos $y$? |
| 27 | Luz: | Sí. |
| 28 | P: | Aja. |
| 29 | Daniel: | Entonces… eso da un número… No,…tengo dos números reales, entonces como tengo dos números reales, entre ellos está… |
| 30 | P: | ¿Al fin voy a usar ésto? ¿O no? [se refiere a la distancia, en el paso 4.] |
| 31 | Daniel: | No, no, no… ya no [risas] |

| | | |
|---|---|---|
| 32 | P: | Ya no, aquí lo único que voy a lograr es el postulado de la distancia que me dice que para todo, eh… el postulado de puntos, puntos - números, que me dice cada par de puntos van a tener un número positivo. |
| 33 | Daniel: | Entonces no. Como tenemos los dos reales, entonces sí podemos garantizar que existe otro real entre ellos. |
| 34 | P: | ¿Sí? |
| 35 | Ignacio: | No. Pero es que ya definimos… |
| 36 | Daniel: | Porque están…entre el punto medio y eso se lo asignamos a uno… |
| 37 | María: | A más B sobre dos. |
| 38 | Daniel: | O sea, por el teorema que vimos ahorita [Si B está entre A y C, entonces la coordenada de B está entre la coordenada de A y la coordenada de B]… |
| 39 | P: | ¿Qué es eso del punto medio? Tú [Daniel] me tienes que decir que existe *r* entre…, tú tienes que convencerme que existe un *r* [número] real. |
| 40 | Ignacio: | Entre los dos… puntos A, B. |
| 41 | P: | Sí. Tal que *x* menor que *r* menor que *y* ¿Eso es lo que queremos? |
| 42 | Daniel: | Sí. |
| 43 | P: | Ahorita. |
| 44 | Aníbal: | A lo que tenemos que llegar. |

**[P3 14-44]**

En busca del paso a seguir en el desarrollo de la demostración, la profesora *impulsa las ideas* de Daniel, cuando pregunta por el paso a seguir [14] con la pregunta *"¿y ahora?"* y Julián hace referencia a las ideas de Daniel [15], quien expresa sus ideas mediante las preguntas que le va haciendo la profesora para obtener información acerca del procedimiento a seguir en la demostración. El impulso que la profesora da a la idea de Daniel es 'tan fuerte' que llega hasta el punto de preguntarle si va a usar un hecho que de antemano ella sabe que no sirve [30], respondiendo él que no lo va a usar [31] y ella borra el paso 4 de la demostración, sin contradecirlo o juzgarlo, sino explicando por qué ese no es el paso a seguir [32]. El número que proponía Daniel no es el más adecuado para continuar el desarrollo de la demostración, ya que se pretende buscar un número que esté entre la coordenada del punto *A* y la coordenada del punto *B*, como se observa en pasos posteriores de la demostración. Daniel sigue dando sus afirmaciones las cuales son complementadas por otros estudiantes, y la profesora sigue apoyando la idea de Daniel hasta lograr desarrollar una buena parte de la demostración.

*Fragmento 4*

Esta interacción se da con relación al punto que está entre los puntos *A* y *B.*

59 Ignacio: El punto C. La coordenada de *x*, la coordenada de *x* más *y* sobre dos es la coordenada del punto C.

60 Germán: Eso. Sí, entonces decimos sea *x* más *y* sobre dos…

61 P: ¿Y qué me lo permite?

62 Ignacio: El postulado de puntos…

63 P: Entonces digo [sigue escribiendo la demostración], sea…

64 Ignacio: Sea C…

65 P: C el punto [varios le dictan].

66 Ignacio: Coordenadas.

67 María: Con coordenadas.

68 P: El punto.

69 Ignacio: Con coordenadas.

70 P: Con coordenada.

71 Ignacio: *x* más *y* sobre dos.

72 P: *x* más *y* medios [ $(x + y)/2$], ¿y eso, qué me lo asegura?

73 Germán: Eso me lo asegura el postula… a cada número real le corresponde un único punto.

74 Julián: El postulado puntos-recta, el cuatro y el…

[…]

81 Efraín: Entonces, ahora por el teorema anterior.

82 Germán: Ya tenemos un punto entre dos…

83 P: Ahora por el teorema anterior tengo des… ¿Por el teorema anterior?

84 Germán: Por el teorema recíproco de la interestancia. Sí.

85 P: ¿Por ese?

86 Germán: No por el… Pues el…

87 P: Por el teorema de interestancia. Tenemos que, C está entre A y B… teorema de interestancia, usando el cuatro y el cinco [pasos]. O sea que hemos demostrado que un conjun… un segmento tiene más de dos puntos ¿Sí? En nuestra geometría… puede que haya geometrías donde no.

**[P3 59-74, 81-87]**

Este fragmento muestra la importancia de *justificar* toda afirmación, en especial dentro del desarrollo de una demostración. En las líneas 61 y 72 la profesora pregunta por la justificación a la afirmación de Ignacio [59] diciendo ¿Y qué me lo permite? [61], ¿y eso, qué me lo asegura? [72], estas dos preguntas no se hace de forma continua, ya que antes de volver a preguntar por la afirmación la profesora escribe el paso a partir de las ideas de sus estudiantes; Germán *justifica* la afirmación recurriendo al "postulado recta – números reales" [73] que hace parte del sistema axiomático construido en clase, y Julián empieza a dar los pasos soportes de la justificación [73]. En las intervenciones 81 a 87, también observamos una interacción en la cual se justifica la existencia de un punto *C* entre los puntos *A* y *B* con el teorema de interestancia[22], y se determinan los pasos que soportan esa justificación.

*Fragmento 5*

En este fragmento continúa la interacción con relación al punto C que está entre el punto *A* y el punto *B.*

| | | |
|---|---|---|
| 39 | P: | […] Tú [Daniel] me tienes que decir que existe r entre…, tú tienes que convencerme que existe un r [número] real. |
| 40 | Ignacio: | Entre los dos… puntos A, B. |
| 41 | P: | Sí. Tal que x menor que r menor que y ¿Eso es lo que queremos? |
| 42 | Daniel: | Sí. |
| 43 | P: | Ahorita. |
| 44 | Aníbal: | A lo que tenemos que llegar. |
| 45 | P: | ¿Y ustedes saben de alguno que podamos asegurar que está entre los otros dos? |
| 46 | Ignacio: | Por eso, punto medio. |
| 47 | María: | Sí, x más y sobre dos. |
| 48 | P: | ¿Punto medio? Punto medio es un objeto geométrico… ¡y yo estoy hablando de números! |
| 49 | María: | x más y sobre dos. |
| 50 | Germán: | Ah… bueno, pues entonces x más y sobre dos. |
| 51 | P: | x más y sobre dos. |
| 52 | Ignacio: | La coordenada del punto medio. |
| 53 | P: | Entonces sabemos que x es menor que x más y medios, menor que y [escribe: $x < (x + y)/2$ |

[22] Teorema de interestancia: la coordenada del punto C está entre la coordenada del punto A y la coordenada del punto B, entonces el punto *C* está entre el punto *A* y el punto *B.*

< y]. Ésto es una… lo podemos demostrar, un teorema de los reales, […]

**[P3 39-53]**

En la búsqueda de determinar el punto que está entre A y B, y haciendo uso de coordenadas para encontrar ese punto, se determina que se debe buscar un número que se encuentre entre $x$ e $y$ [39-44] estableciendo así una de las conclusiones que permitirá continuar con la demostración, por lo cual la profesora pide *buscar posibles antecedentes* que permitan justificar esta conclusión, con la pregunta *"¿Y ustedes saben de alguno que podamos asegurar que está entre los otros dos?"* [45]. Los estudiantes buscan una ruta que permita llegar a esta afirmación, obtenido así que uno de los números que cumple esta condición es la coordenada del punto medio, haciendo su correspondiente justificación [46-53].

*Fragmento 6*

En este fragmento se muestra como al tratar de justificar una afirmación, esto no se logra por hacer falta parte del antecedente para su justificación.

53 P: Entonces sabemos que $x$ es menor que $x$ más $y$ medios, menor que $y$ [escribe: $x < (x + y)/2 < y$]. Ésto es una… lo podemos demostrar, un teorema de los reales, bueno, ¿y entonces?

54 Daniel: Por el teorema de ahorita [risas].

55 Ignacio: El teorema que acabamos de demostrar.

56 Daniel: Ahora tenemos la coordenada. O sea…

57 P: Pero aquí no hay tres puntos y allá yo comenzaba con tres puntos.

58 Germán: No. Pues entonces ahora otra vez aplicamos el...

59 Ignacio: El punto C. La coordenada de $x$, la coordenada de $x$ más $y$ sobre dos es la coordenada del punto C.

60 Germán: Eso. Sí, entonces decimos sea $x$ más $y$ sobre dos…

61 P: ¿Y qué me lo permite?

62 Ignacio: El postulado de puntos…

63 P: Entonces digo [sigue escribiendo la demostración], sea…

64 Ignacio: Sea C…

65 P: C el punto [varios le dictan].

66 Ignacio: Coordenadas.

67 María: Con coordenadas.

68 P: El punto.

69 Ignacio: Con coordenadas.

70 P: Con coordenada.
71 Ignacio: *x* más *y* sobre dos.
72 P: *x* más *y* medios [ $(x + y)/2$], […]

**[P3 53 - 72]**

Luego de haber afirmado que existe un punto con coordenada $(x + y)/2$ que se encuentra entre *x* e *y*, Daniel busca justificarlo con un teorema que se ha acabado de demostrar, justificación que no es aceptada por la profesora al resaltar que el teorema de interestancia requiere de tres puntos, y en el desarrollo de la demostración no se cuenta con tres puntos sino con dos [57]; así, no se cuentan con los elementos necesarios para usar el teorema de interestancia en la justificación buscada, teniendo así los *requerimiento de la justificación incompletos*. Esta afirmación de la profesora, hace que Germán e Ignacio busquen completar los elementos que faltan para esta justificación logrando encontrar el punto C con coordenada $(x + y)/2$ [58-72]. En este caso se observa como al no tener una justificación completa, los estudiantes no desechan de todo la idea sino completarla y continuar con el desarrollo de la demostración.

**VIDEO CLIP N. 4**
**Tiempo estimado:** 14 minutos
**Proceso de la actividad demostrativa:** Usar definición
**Descripción:** Definición de ángulo recto

Este informe descriptivo-interpretativo corresponde a un segmento de clase del 15 de Marzo de 2007, cuyo objeto es definir ángulo recto. A partir de dos definiciones dadas en clase, una propuesta por uno de los estudiantes y otra que surge de una construcción realizada, se busca deducir la equivalencia de ellas, mostrando una de las implicaciones, durante la clase, y se deja la otra como tarea para ser socializada la siguiente clase.

En esta clase la profesora propone la tarea abierta “Construir dos ángulos adyacentes congruentes”, de la cual surgen diferentes propuestas. Luego de que se exponen las propuestas a la clase, la profesora pasa a Daniel al frente, proyecta la construcción, y por medio del arrastre logra obtener ángulos par lineal con la condición pedida (ángulos adyacentes congruentes) lo que lleva a obtener un par de ángulos rectos. Como en este momento no se había definido ángulo recto, surge la necesidad de definir este objeto geométrico, cumpliendo con la norma que todo objeto geométrico con el que se trabaje debe ser definido, introduciendo esta definición al sistema axiomático.

En los fragmentos que se encuentran a continuación, se muestra el análisis de la equivalencia entre las dos definiciones propuestas, y posteriormente la demostración de una de las dos implicaciones. La otra implicación no se muestra, ya que se deja como tarea para el espacio extracurricular, y se socializa de forma rápida en la clase siguiente repitiéndose algunas de las interacciones características de los fragmentos a presentar.

*Fragmento 1*

Daniel pasa al tablero, con ayuda de la calculadora y por medio del arrastre, obtiene un par de ángulos adyacentes congruentes, que además son par lineal, y luego caracteriza cada uno de estos ángulos como un ángulo recto. Al aceptar los estudiantes que los ángulos obtenidos son rectos, la profesora procede a preguntar por la definición de este objeto geométrico, de donde surgen dos definiciones, una dada por Germán, de acuerdo a las concepciones que tiene, y otra dada por la profesora, que es establecida a partir de la construcción de Daniel lo que logra por el arrastre. A continuación se muestra como se llega a las dos propuestas, y el dialogo que se genera entre Gabriel y la profesora, hasta que concluyen que de una de las definiciones se puede llegar a la otra.

| | | |
|---|---|---|
| 3. | P: | Bueno. Entonces, entonces Germán, ¿cuál es la definición de ángulo recto? |
| 4. | Varios: | Un ángulo… |
| | […] | |
| 6. | Germán: | Un ángulo es recto…O sea. Bueno, sí. Un ángulo es recto si la, si su medida es 90 [la profesora escribe eso y le antepone D1]. |
| | […] | |
| 9. | P: | Bueno. ¿Sí? Pero miren [la construcción] que cuando nos dio al fin ese noventa, ¿qué condiciones teníamos? |
| | […] | |

14. Ignacio: Que los rayos pertenezcan a la misma…

15. P: Tiene dos [propiedades], son dos ángulos que forman par lineal, y que son…

[…]

26. Varios: Congruentes.

27. P: Y son congruentes. Entonces ¿podría yo definir esto así? Un ángulo [escribe eso como D2] es recto, si… si forma par lineal, si forma par lineal con otro ángulo congruente a él. Sí. ¿Podría yo definir ángulo recto así? […] Son dos posi… Una que ustedes conocen desde tiempos… ¿Sí? Y otra que estoy ahí… inventándome, usando lo que hizo Darío con la cal… con la tarea que yo le puse. Pero, no sé si son la misma. […] Si son dos definiciones, dos definiciones para el mismo objeto, o si estoy definiendo cosas distintas.

28. Germán: O sea…pues estás definien… O sea, son las… las definiciones son… no son iguales. Son similares. Sino que una hace mención a un ángulo y la otra hace mención a un par lineal. […]

29. P: Bueno, un minuto. Entonces, difieren.

30. Germán: Sí.

31. P: Y... y tú ¿qué es lo que me vas a decir? Por el postulado del par…

32. Germán: Por el, o sea… ahí, o sea, en la definición dos… la profesora se basa en el postulado, en el postulado del par lineal…

33. P: Yo no me basé en el postulado del par lineal, yo me basé en lo que yo vi.

34. Germán: Pues, pero aunque, o sea, argumentando eso, se puede argumentar mediante el postulado del par lineal, para decir que…

35. P: Bueno. Entonces él ya me está tratando de mostrar algo. El argumento que me quiere dar Germán, es que realmente las dos definiciones son equivalentes. Y si yo quiero tener estas dos definiciones, tendría que mostrar que son equivalentes. Es decir, que dada una, se puede demostrar la otra y viceversa. Entonces Germán, ¿tu cuál vas a hacer? [risas] Definición 2 a…

**[P4 1-24]**

La interacción empieza cuando la profesora indaga por la definición de ángulo recto, partiendo del interés de que los estudiantes *propongan definiciones* para este objeto geométrico, que se acaba de mencionar; recibe respuesta por parte de Germán, quien define a partir de la medida [5]. Definición a la cual la profesora le da importancia, al copiar esta en el tablero.

La profesora retoma la intervención de Daniel, cuando pasa al tablero al mostrar su construcción en la calculadora, ella busca caracterizar los ángulos rectos que se obtienen por medio del arrastre, como un caso especial de ángulos adyacentes congruentes, preguntando por las condiciones que se tenían para lograr el ángulo recto en esa construcción [8]. Obtiene respuesta por parte de Ignacio, quien observa en la construcción rayos colineales respuesta que la profesora traduce en ángulos que formen par lineal. Ella continúa buscando que los estudiantes listen características o *busquen propiedades* con las palabras "y que son…" [12], sin completar frase, esperando que los estudiantes la completen, acción que es seguida por varios estudiantes completando la frase con la palabra "congruentes". La profesora retoma las dos últimas intervenciones de los estudiantes, escribiendo otra definición a partir de estas características, resaltando que esta definición surge a partir de la construcción hecha por Daniel al tratar de dar respuesta a la tarea propuesta. Se cuestiona, buscando cuestionar  a los estudiantes, si las dos definiciones son equivalentes, o si se está definiendo dos objetos diferentes. Por lo cual Germán afirma [17, 19] que las dos definiciones son diferentes, tratando de dar una argumentación, que es cortada por la profesora, quien busca asegurarse que Germán está observando que las definiciones difieren, y luego da la oportunidad a Germán de argumentar la afirmación dada, quien afirma que la segunda definición es resultado de uno de los postulados trabajados en clase.  Afirmación que es refutada por la profesora, ya que ella afirma que la definición surgió de la construcción realizada por Daniel [22]. Por lo cual Germán, sin dejar la idea de hacer uso del postulado del par lineal, afirma que una de las implicaciones se puede argumentar haciendo uso de este postulado. La profesora retoma la afirmación de Gabriel [24] mostrando al grupo lo que él quiere argumentar haciendo uso del postulado par lineal; además, resalta que si se quieren incluir las dos *definiciones* al sistema axiomático, se debe demostrar que estas son *equivalentes*, ya que describen el mismo objetó geométrico

En este fragmento se puede observar como a partir de las concepciones de los estudiantes, y de una construcción que surge como respuesta al tratar de realizar una tarea propuesta, surgen dos definiciones diferentes para un mismo objeto geométrico, que son equivalentes. Y como a partir del sistema axiomático construido y algunas características que dieron lugar a la segunda definición, uno de los estudiantes trata de argumentar como una de las definiciones propuestas puede surgir de la otra, guiado por las intervenciones de la profesora. Aceptando que las dos definiciones están caracterizando el mismo objeto geométrico.

*Fragmento 2*

Luego de ser aceptadas las dos definiciones como equivalentes, Germán propone demostrar que una definición implica la otra, queriendo empezar a demostrar que la definición que surgió de la construcción implica la definición propuesta por él. La profesora invita a Melisa a que esboce la demostración en el tablero, a lo cual Mónica se muestra un poco reacia, pero pasa al tablero, y con ayuda la profesora, inicia la demostración formal de la implicación propuesta.

37 P: Pues por eso es que te va a apoyar Germán. Germán te va a apoyar. Bueno. Entonces, vamos a ver. ¿Por qué? ¿Por qué quiero dos definiciones? Bueno. Pues realmente, porque me parece interesante esta situación. Y si realmente, puedo mostrar que son equivalentes, pues de pronto, me va a ser más útil una que otra. ¿Sí? Cuando yo quiera hablar de ángulos rectos. Entonces comenzamos. ¿Vamos a mostrar cuál, Germán?

38 Varios: Dos implica uno [Un ángulo es recto si forma par lineal con otro ángulo congruente a él implica que mide 90 grados]

39 Germán: Dos implica uno.

40 P: Entonces vas a tomar…

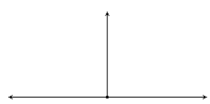
41 Germán: Si dos ángulos.

42 P: Que hay un ángulo.

43 Alguien: Que forma par lineal con otro ángulo.

44 Germán: Si, si.

45 P: Que tenemos dos ángulos que forman par lineal… Entonces ángulo A y ángulo B forman par line… No, ángulo BAC y BAD forman par lineal, como quieras nombrarlos. Haz una figura. Es bueno hacer una figura para…

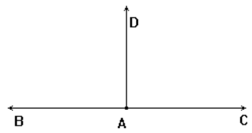
46 Melisa: ¿Es algo así cierto? [Melisa hace la siguiente figura  ]

47 P: Sí.

48 Melisa: Entonces digo que…digo que A.

49 P: Si, nombrémoslos.

50 Melisa: Entonces, me dice que los nombre como A, B, C, D [el dibujo queda:




]

51 P: Bueno, entonces, ¿qué tienes dado?

52 Melisa: Entonces… Dado yo tengo pues que existen… Que son par lineales el ángulo BAD y DAC.

53 P: Sí, pero ¿qué tienes dado? Que uno de ellos es el ángulo recto ¿Si? ¿cuál? cualquiera.

54 Melisa: DAC [escribe: 1. $\angle DAC$ es un ángulo recto; 1. Dado]

55 P: Bueno, entonces DAC es ángulo recto. Entonces, eso está dado. DAC es un ángulo recto ¿sí? Usando la segunda definición. DAC es un ángulo recto. Entonces se supone que tiene otro ángulo que forma con él un par lineal.

56 Melisa: Entonces… [Melisa escribe: existe $\angle BAD$ ]

**[P4 37-56]**

Antes de Melisa iniciar la demostración, la profesora cuenta al grupo el objetivo de aceptar las dos definiciones propuestas y la equivalencia entre ellas, ya que si son aceptadas las dos definiciones, en una demostración, se puede hacer uso de una u otra definición dependiendo las características geométricas que se tengan [37]. La profesora da la opción a Germán de confirmar cual es la implicación que quiere demostrar, por lo que Gabriel afirma que se quiere demostrar que de la definición que se dedujo a partir de la construcción se puede deducir la definición dada por él [39]. Al iniciar la demostración, la profesora orienta a Melisa dándole el primer paso de ésta [45], primero dando un enunciado en general (tenemos dos ángulos que forman par lineal) y después traduciendo este enunciado a una notación geométrica, nombrando los dos ángulos, dando relevancia a la importancia de nombrar los objetos geométricos y *regulando el lenguaje* geométrico, dentro de una demostración. Posteriormente pide hacer una figura, antes de que Melisa inicie la demostración, para ayudarse por medio de esta representación. Melisa hace una figura de ángulos par lineal, y confirma con la profesora si es esa la figura que ella pedía, para luego darle nombre a los ángulos a partir de la traducción que la profesora había hecho, acciones que Melisa ejecuta por la aceptación de la profesora [46-50].

Luego que Melisa hace el dibujo de los ángulos, la profesora le pregunta por la afirmación que debe iniciar la demostración [51], a partir de las características geométricas que están dadas en la definición, teniendo en cuenta que aunque élla ya lo había dicho, Melisa no tomo nota de ésto, por dar relevancia a la propuesta de la profesora de hacer uso de la representación gráfica. Melisa repite que se parte de los ángulos par lineal, pero la profesora sigue cuestionando sobre lo que se tiene dado [53] buscando que *reconozca los componentes de la definición* para iniciar con la demostración, y sin dar espacio a Melisa responda, élla afirma que es lo que se tiene como dado, pidiendo a Melisa que escoja un ángulo, y reescriba esta afirmación en términos geométricos, *regulando el lenguaje* nuevamente, acción que Melisa ejecuta obteniendo la primera afirmación de la demostración. Enseguida, la profesora da la segunda afirmación de la demostración, que se deduce a partir de la definición que se ha tomado como dada (Definición 2).

*Fragmento 3*

Luego de escribir la primera afirmación para la demostración, se elabora ésta mirando cómo a partir de lo dado, es decir de la definición aceptada como cierta, se empiezan a deducir otras características de éste par de ángulos. A continuación se muestra la interacción que se genera entre la profesora y Melisa, al continuar con la demostración.

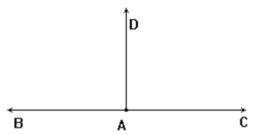



*Figura1. Ángulo recto*

64. P: Entonces existe otro ángulo, ¿quién es? BAD... es recto. Estamos usando esta definición [se refiere a la 2 definición]. Entonces tiene otro ángulo que forma par lineal con él. Entonces, es par lineal con… [Le dicta para que Melisa complete la frase] con el dado.

65. Melisa: Y eso lo… lo justifico…

66. P: Definición dos. [2. Existe $\angle BAD$ es par lineal con $\angle DAC$ ; 2. Dado]. Y, con… forma par lineal con otro ángulo y es congruente a él. Entonces te falta esa parte. La definición dos me da dos cosas: existe el otro [ángulo] que forma par lineal con él, y… Y si quieres paso tres, o si quieres ahí las dos cosas… Tú eliges.

67. Melisa: Entonces los ángulos son congruentes…

68. P: Son congruentes. Ahí, hasta ahora solo ha usado la definición. Tengo un ángulo recto, entonces la definición dos me dice: ¡ah! entonces existe otro ángulo que forma par lineal

con él y que es congruente a él. ¿Y tú qué quieres mostrar? Que la medida es noventa.

**[P4 56-60]**

Luego de tenerse la primera afirmación de la demostración, en la que se establece lo que está dado por la definición escogida, la profesora guía el desarrollo de la demostración, buscando que Melisa identifique qué *elementos de la definición* puede tomar para continuar con el cuerpo de la definición, para lo cual la profesora *da pistas* de la segunda afirmación [56] parafraseando parte de ésta para que Melisa la complete, y le dicta la justificación de la misma. Como la definición escogida tiene dos componentes, la profesora hace mención del segundo, buscando que Melisa los reconozca, e identifique el siguiente paso, sin embargo le da la opción de organizar la demostración como ella desee [58]. Luego de que Melisa reconoce los dos componentes de la definición, y hace uso de ellos en el desarrollo de la demostración, la profesora refuerza que esos pasos que se han obtenido son resultado de la definición escogida [60], mencionando los elementos y la conclusión a la que se desea llegar para que Melisa proponga una posible ruta.

En esta interacción se observa como la profesora le muestra a Melisa y al grupo, el reconocimiento de los componentes de la definición escogida por el grupo para iniciar la demostración, ya que estos elementos son los que permite dar los primeros pasos y es a partir de ellos que se puede pensar en una posible ruta para la demostración.

**VIDEO CLIP N. 5**

**Tiempo estimado:** 7 minutos 39 segundos

**Proceso de la actividad demostrativa:** Usar definición

**Descripción:** Definición de rectángulo

Este informe descriptivo-interpretativo corresponde a un episodio de clase del día 29 de mayo de 2007, en la que se construye la definición de rectángulo a partir de varias definiciones que son propuestas por el grupo, evocadas de las concepciones o percepciones de imágenes que tiene. Esta clase es la número 46 del semestre, llevando un total de 74 horas de clase.

En la clase del día 16 de Mayo (clase número 42), la profesora propone la tarea abierta "determinar la relación existente entre el tipo de cuadrilátero y la propiedad: una diagonal biseca a la otra". Los estudiantes la resuelven mediante la exploración realizada en el software Cabri. Obtienen como resultado diversas conjeturas sobre los cuadriláteros que satisfacen la condición solicitada. La profesora recoge las conjeturas y las organiza en un acetato para proyectarlas en la clase del día 24 de Mayo, con el fin de compartir los resultados ante el grupo, para su estudio y análisis. Después de leer una conjetura, el grupo responsable de ésta da a conocer la exploración realizada, que condujo a su formulación, para estudiarla a la luz de la construcción, admitirla como posible y luego proceder a su demostración. Una de las conjeturas sugeridas es la de Joaquín y Juan *"Dado el cuadrilátero ABCD, si sus diagonales se bisecan entonces tiene dos pares de lados congruentes".* Luego que la profesora lee la afirmación se discute que en la conjetura está inmersa la definición de paralelogramo, ya que al tener lados opuestos paralelos se tiene paralelogramo, sin embargo la profesora pide al grupo que muestre la construcción para mirar la coherencia de la conjetura, observando que evidentemente construyeron diagonales que se bisecan pero además éstas son congruentes, lo que lleva a observar que el cuadrilátero obtenido es un rectángulo, lo cual se reafirma luego del arrastre. Luego que Daniel, uno de los estudiantes del grupo, afirma que la figura obtenida es un rectángulo, surge la necesidad de definir este objeto geométrico.

Hemos dividido el informe descriptivo-interpretativo en tres fragmentos. En el primero, se muestran las diferentes propuestas de definición de ángulo recto con algunas interacciones que giran alrededor de éstas; en el segundo, se muestra las interacciones que se dan en el análisis de las propuestas en términos de sus componentes y la comparación que se hace de las mismas; en el tercer fragmento, luego de descartar varias propuestas, se analizan, las dos que quedaron, para determinar cual queda como definición y cual se deja como teorema, y se institucionaliza la definición.

*Fragmento 1*

El episodio comienza cuando la profesora pregunta por la definición de rectángulo, buscando que los estudiantes establezcan definiciones a partir de la percepción visual de la figura que observan y sus concepciones, obteniendo así varias propuestas que serán objeto de estudio.

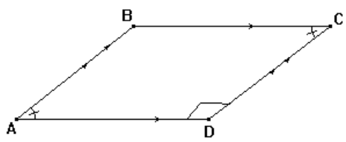
| | | |
|---|---|---|
| 01 | P: | ¿Qué es un rectángulo? |
| 02 | Ignacio: | Un cuadrilátero cuyos cuatro ángulos son rectos. |
| 03 | P: | Espérate. Hay que definirlo. |
| 04 | Ignacio: | ¡Ah! Bueno. |
| 05 | P: | ¿Cómo lo definimos para ver si eso es lo que estamos viendo? |
| 06 | Ignacio: | Un cuadrilátero cuya… que tiene… |
| 07 | P: | Escríbanme… |
| 08 | María: | Dos ángulos internos. |
| 09 | P: | Todos. |
| 10 | Ignacio: | Un ángulo de 90 grados. |
| 11 | P: | A ver. Escríbanme sus definiciones. Una, ¿quién más? Otra definición, ¿quién más? Vamos a tratar de definir, ¿tú? Otra definición. Vamos a ver si son distintas. Escríbanme lo que ustedes creen que es un rectángulo. [Pasan al tablero varios estudiantes y escriben si definición: **Darío:** Es un paralelogramo que tiene al menos un ángulo recto. **Julián:** Es un paralelogramo ABCD cuyos ángulos A, B, C, D son congruentes. **Ignacio:** Es un paralelogramo cuyos ángulos son congruentes. **Marina:** Es un cuadrilátero con dos pares de lados opuestos paralelos y al menos un ángulo interno recto. **Germán:** cuadrilátero con sus lados adyacentes perpendiculares] |
| 12 | P: | Tenemos en realidad cuatro definiciones. |
| 13 | Ignacio: | Si cuatro. |
| 14 | P: | Porque estas dos coinciden. La de Marina, es un cuadrilátero con dos pares de lados opuestos paralelos ¿O sea? |
| 15 | Marina: | Paralelogramo. |
| 16 | P: | Paralelogramo. Y al menos un ángulo interno recto, luego en el fondo es igual a ésta [la de Darío]. Entonces tenemos tres. […] |

**[P5, 1-17]**

Luego que la profesora pregunta por la definición de rectángulo, Ignacio da una propuesta que no es aceptada por ella, ya que la forma en que interviene Ignacio es como si estuviera afirmando que esa es la definición que se tiene [01-02]. La profesora propone que se construya una definición, para luego verificar que la figura construida por Joaquín y Juan si es un rectángulo [03, 05], buscando que los estudiantes *propongan definiciones.* Ignacio y María proponen dos definiciones diferentes, por lo cual la profesora pide que pasen al tablero y las escriban para poder ser analizadas, logrando que varios estudiantes pasen a dar su propuesta, obteniendo cinco definiciones [11]. La profesora descarta una de las propuestas al ver que hay dos iguales, la de Marina y la de Darío; quedando así cuatro propuestas para ser analizadas.

*Fragmento 2*

Luego de descartar una de las propuestas de definición de rectángulo se pasa al análisis de la otras cuatro, descartando una que se pueda inferir de otra propuesta, dejando tres propuestas.

| | | |
|---|---|---|
| 41 | P: | […] Ésta lleva a ésta. [De la de Darío a la de Germán] O sea, si son equivalentes. Si tengo paralelogramo con un ángulo recto, tengo cuadrilátero con cuatro ángulos… ¿qué? con lados adyacentes perpendiculares. |
| 42 | Ignacio: | Los lados opuestos sean congruentes |
| 43 | P: | ¿Sí o no? |
| 44 | Ignacio: | El ángulo opuesto al ángulo recto del paralelogramo, en ese caso sería también recto. |
| 45 | P: | A ver, tengo paralelogramo. |
| 46 | Ignacio: | Sí. |
| 47 | P: | [En el cuadrilátero] ABCD, éste es un ángulo recto [D] [Hace una figura como la siguiente:   ] |
| 48 | Ignacio: | El ángulo B sería recto también. |
| 49 | Luz: | El ángulo ABC**.** |
| 50 | Ignacio: | El ángulo ABC o el ángulo B sería recto también. |
| 51 | P: | Pero, siempre y cuando demostremos… Ah no. |
| 52 | Ignacio: | Es un paralelogramo. |
| 53 | Luz: | Es un paralelogramo. |
| 54 | P: | Si tiene la razón. Éstos dos son opuestos… son congruen… rectos [B y D]. ¿Y? |
| 55 | Ignacio: | Son paralelas. |

| | | |
|---|---|---|
| 56 | María: | Si son perpendiculares, las rectas no son paralelas ¿no? |
| 57 | P: | Tengo paralelogramo. |
| 58 | Ignacio: | Entonces ambas son paralelas. |
| 59 | P: | Estas son paralelas. |
| 60 | Ignacio: | Sí. |
| 61 | P: | Estas dos son paralelas. |
| 62 | Ignacio: | Entonces… |
| 63 | P: | Por el teorema, tengo que éste ángulo también es recto, porque los opuestos son congruentes. Falta un par… |
| 64 | Nancy: | Si una recta es perpendicular… |
| 65 | Ignacio: | Si dos rectas son… |
| 66 | Nancy: | ¿Cómo es? Si a una recta se traza la perpendicular y la paralela a esa perpendicular, también es perpendicular a la otra. |
| 67 | P: | Si hay una recta perpendicular a dos paralelas, es perpendicular a la otra. |
| 68 | Ignacio. | Y por ende… |
| 69 | P: | Muy bien. […] O sea, tenemos en el fondo tres definiciones. Ésta [Germán], porque es una definición que puedo dar cuando todavía no he hablado de cuadriláteros, de paralelogramos. |
| 70 | Ignacio: | De paralelogramos. |
| 71 | P: | Y yo puedo trabajar entonces rectángulos, sin haber hablado de paralelogramos. ¿Sí? Entonces, ésta es una definición buena, y depende de las condiciones. Pero nosotros ya sabemos mucho de paralelogramos. Entonces, posiblemente nos queramos quedar con ésta o con ésta [Darío o Ignacio] ¿Cuál de las dos? ¿Cuál de las dos queremos? Debemos adoptar una. Una vez que tengamos una, ya lo demás es teorema. |

[P5 41-71]

Continuando con la discusión y análisis de las propuestas de definición, la profesora propone analizar dos definiciones que parecen equivalentes, para poder descartar una de ellas y reducir la lista de propuestas. Ella propone ver si de la definición propuestas por Darío "Es un paralelogramo que tiene al menos un ángulo recto" se puede inferir la definición propuesta por Germán "cuadrilátero con sus lados adyacentes perpendiculares", por lo que Ignacio, *reconociendo los componentes* de la propuesta, inicia a demostrar que de una se puede deducir la otra, estableciendo la primera la afirmación que permita desarrollar la demostración [42, 44], y da la justificación de esta afirmación. Luego que Ignacio justifica su intervención, la profesora no se convence de ésta, por lo que él continua reforzando su justificación hasta que logra que la profesora la acepte y amplié la idea que él está desarrollando [48-63]. Luego Nancy e Ignacio continúan con la demostración, estableciendo las afirmaciones y las justificaciones necesarias, hasta lograr mostrar que los cuatro ángulos son congruentes, logrando así reducir las propuestas a tres [64-71]. En este fragmento se puede observar como luego que la profesora propone analizar las dos definiciones propuestas, es Ignacio quien impulsado por la ella, identifica los componentes de la propuesta y con ayuda de Nancy y la profesora logra demostrar la implicación.

*Fragmento 3*

Luego que las propuestas han sido reducidas a tres, la profesora descarta una de ellas al no mencionar paralelogramos, ya que al tener este objeto geométrico se debe aprovechar para reducir las condiciones de la demostración, quedando dos propuesta. Se analizan las dos propuestas buscado establecer la más económica, y dejando la otra como un Teorema.

| | | |
|---|---|---|
| 87. | P: | […] posiblemente nos queramos quedar con ésta [Un rectángulo es un paralelogramo que tiene al menos un ángulo recto] o con ésta [Un rectángulo es un paralelogramo cuyos ángulos son congruentes] ¿Cuál de las dos? ¿Cuál de las dos queremos? Debemos adoptar una. Una vez que tengamos una, ya lo demás es teorema. |
| 88. | Ignacio: | La segunda [Se refiere a la definición: un rectángulo es un paralelogramo cuyos ángulos son congruentes]. |
| 89. | Nancy: | La primera [Se refiere a la definición: un rectángulo es un paralelogramo que tiene al menos un ángulo recto]. |
| 90. | Alguien: | La primera. |
| 91. | P: | ¿Prefieren la primera? ¿Por qué? |
| 92. | Nancy: | Porque ya puedo también, de ahí podría sacar ya… teniendo lo de los ángulos rectos, podría sacar que son congruentes, que miden 90. |
| 93. | P: | O sea, la primera es como menos exigente, ¿no? Digamos de cierta manera. Si yo quiero demostrar que algo es… que algún cuadrilátero es un rectángulo, sólo tengo que mostrar dos cosas, que es paralelogramo. |
| 94. | Ignacio: | Y que tiene un ángulo recto. |
| 95. | P: | Y que tiene un ángulo recto. Y en el otro me toca mostrar que es paralelogramo… |
| 96. | Ignacio: | Y con los cuatro ángulos congruentes. |

97. P: Y que los cuatro ángulos son congruentes. Entonces ésta más… exige menos para el futuro. Entonces tendríamos como teorema… [Un rectángulo es un paralelogramo cuyos ángulos son congruentes].

98. Ignacio: Y como definición.

99. Germán: Y como definición.

100. P: Entonces ésta es la definición de rectángulo [Escribe la definición]. Un rectángulo es un paralelogramo que tiene al menos un ángulo recto. ¿Sí? Y ésto sería teorema. ¿Sí? Que es, en un rectángulo.

**[P5 73-86]**

En el fragmento se muestra como, luego de seleccionada dos de las definiciones de rectángulo propuestas por los estudiantes, la profesora propone escoger una de ellas para dejarla como definición. Aunque inicialmente Ignacio se inclina por la segunda definición "Un rectángulo es un paralelogramo cuyos ángulos son congruentes" [74], el grupo se inclina por la primera "Un rectángulo es un paralelogramo que tiene al menos un ángulo recto" ya que en el caso de tener que justificar la existencia de un rectángulo, en una demostración, ésta definición es menos exigente [75-78] buscando así una *definición económica*. Luego de la selección hecha por los estudiantes, la profesora argumenta la importancia de escoger esta definición, ya que considera que sólo basta con probar dos cosas para llegar a demostrar que un objeto geométrico es rectángulo, lo cual es respaldado por los estudiantes [79-86], e *institucionaliza* la definición escogida por el grupo, escribiendo la definición en el tablero, y dejando la otra definición como un teorema, el cual se puede demostrar a partir de la definición escogida. Interacciones como la presentada en el fragmento se da generalmente, cuando hay varias propuestas de definición validas, para un objeto geométrico a introducir, y se busca escoger aquella que tenga menos condiciones para introducirla como definición en el sistema axiomático; luego de hacer la selección se pasa a la institucionalización de la definición.

**VIDEO CLIP N. 6**

**Tiempo estimado:** 7 minutos, 23 segundos

**Proceso de la actividad demostrativa:** Usar definición

**Descripción:** Definición de altura de un triángulo

Este informe descriptivo-interpretativo corresponde a un episodio de clase del 10 de abril de 2007, en donde se define colectivamente "altura de un triángulo", a partir de diferentes propuestas que los estudiantes realizan, las cuales son cuestionadas por la profesora y discutidas por el grupo, para llegar a elaborar una definición.

En esta clase la profesora propone la tarea abierta "Estudie la relación entre el tipo de triángulo, y la relación: dos de sus alturas son congruentes" de la cuál surgió la necesidad de definir altura de un triángulo, ya que en el curso se tiene como norma que todo objeto geométrico con el que se trabaje debe ser definido, introduciendo esta definición al sistema axiomático. En los fragmentos que se muestran a continuación se observa cómo a partir de la necesidad de definir altura se proponen varias definiciones, se discuten en termino las propiedades del objeto a definir, y por último se institucionaliza una definición.

*Fragmento 1*

Los estudiantes al tratar de resolver la tarea propuesta, y al no tener la definición de altura de un triángulo, preguntan por la definición de ésta; por lo cual la profesora promueve una lluvia de ideas sobre la definición, a partir de los recuerdos o concepciones que tienen los estudiantes, para que por medio de la discusión de éstas, se llegue a una nueva definición.

| | | |
|---|---|---|
| 01 | P: | Tenemos que introducir la definición de altura. ¿Quién hace la definición de altura? ¿Quién la recuerda? Ustedes la estudiaron el semestres pasado… creo. |
| 02 | María: | Es la distancia… |
| 03 | Efraín: | Es la distancia del punto medio de un triángulo… |
| 04 | P: | Efraín. ¿Qué es la altura? |
| 05 | Efraín: | Es la distancia desde el punto medio de un [lado de un] triángulo hasta su ángulo opuesto. |
| 06 | P: | ¿Alguien controvierte esa definición? [Juan y Leopoldo alzan la mano] Juan. |
| 07 | Juan: | Es la distancia desde un vértice hasta la recta que contiene al lado opuesto del vértice. |
| 08 | P: | Ambos hablan de distancia. |
| | […] | |
| 12 | P: | Ah, pero tendríamos entones que haber hablado de la distancia de un punto a una recta. Pero, yo les pregunto, la altura ¿es un objeto geométrico?, o, ¿es un número? |

| | | |
|---|---|---|
| 13 | Efraín: | Es un número. |
| 14 | Varios: | Un objeto. |
| 15 | María: | Es un segmento. |
| 16 | P: | Efraín. |
| 17 | Efraín: | Un segmento. |
| 18 | P: | Entonces no puedo decir que es la distancia, porque si es una distancia es un número. Es un objeto geométrico. ¿Qué objeto geométrico? |
| 19 | Alguien: | Un segmento. |
| 20 | P: | Un segmento. En los libros hay altura definida como recta y altura como segmento. Nosotros vamos a trabajar la altura definida como segmento. Un segmento. Ahora sí… Que contiene un vértice de un triángulo, y… |
| 21 | Alguien: | Y es perpendicular a la recta que contiene… |
| 22 | P: | El…y va… es perpendicular… al lado opuesto de vértice. ¡No! A la recta que contiene el lado opuesto. Vamos a escribirlo... Lo que pasa es que Efraín y Juan hablaron de distancia, porque como la altura es un segmento, pues le puedo tomar la longitud. Y hablar de la distancia entre los extremos del segmento que es la altura. Si la definimos como recta nunca podríamos medir la altura y entonces ¿cómo calculamos el área de un triángulo? y entonces es mejor definirla como segmento. [Escribe: altura de un triángulo es el segmento perpendicular que contiene un vértice de un triángulo y es perpendicular a la recta que contiene al lado opuesto] La altura de un triángulo es el segmento que contiene un vértice del triángulo y es perpendicular a la recta que contiene al lado opuesto [Leyendo la definición del tablero]. |

**[P6 1-22]**

En este fragmento la profesora indaga sobre la definición de altura, llevando a que los estudiantes evoquen recuerdos del concepto [01], y *propongan definiciones* a partir de las diferentes concepciones que tienen. A medida que los estudiantes van participando, la profesora hace preguntas o afirmaciones que conllevan a que uno o varios estudiantes contradigan, apoyen o complementen las opiniones dadas por sus compañeros. Luego de la intervención de María, Efraín toma la palabra, asociando la altura con una distancia y propone una definición próxima a la definición de mediana [03-05]. La profesora no corrige la definición propuesta, sino que pide controvertirla, buscando que algún miembro del grupo corrija o contradiga la propuesta. Juan participa, proponiendo su definición de altura, sin oponerse de forma explícita a la propuesta de Efraín, sino que insinúa que no está de acuerdo proponiendo su propia versión [07]. La profesora al escuchar las dos propuestas de posibles definiciones, resalta la característica de distancia que otorgan los dos estudiantes en sus definiciones [08], sin tener en cuenta las otras características mencionadas, con la finalidad de hacer la corrección y buscar la distinción entre altura como objeto geométrico o como número [12], *buscando* una *propiedad* de la altura, por lo cual los estudiantes identifican la altura como un objeto geométrico; María y Efraín identifica el tipo de objeto geométrico que es la altura, mencionando que ésta es un segmento [15, 17]. La profesora hace la aclaración de que la altura no puede ser una distancia, ya que si fuese así esta sería un número; y menciona la definición de altura que aparece propuesta en los libros de texto, en los que aparecen dos definiciones diferentes, altura como recta y altura como segmento. Ella menciona que la altura se definirá como segmento para poder determinar su magnitud, dando importancia al cálculo del área de un triángulo. Al haber definido altura como segmento, empieza a construir la definición de altura, teniendo en cuenta parte de la propuesta de Juan, en donde toma un vértice del triángulo como parte de la altura, y agrega la propiedad de la perpendicularidad, dando una definición opcional [22].

*Fragmento 2*

Luego de de tener una primera versión de la definición de altura a partir de las diferentes intervenciones de los estudiantes, y las afirmaciones, cuestionamientos y aclaraciones hechas por la profesora, se retoman las ideas y la definición propuesta para generar la definición final, proceso en el cual los estudiantes participan activamente, surgen nuevas aclaraciones en la definición, y se concluye la definición que se introduce en el sistema axiomático.

| | | |
|---|---|---|
| 22 | P: | […] La altura de un triángulo es el segmento que contiene un vértice del triángulo y es perpendicular a la recta que contiene al lado opuesto [Leyendo la definición del tablero]. |
| 23 | Darío: | Una pregunta, profe. Ahí ¿no habría que especificar que ese vértice está en el extremo del segmento? Porque cuando se habla de contenido, puede que esté entre los dos segmentos ¿cierto? |
| 24 | P: | Sí. Lo que quería dar a entender [con la palabra] contiene, es que va desde. Que es como aparece en los libros. Que va desde. Entonces, mejor escribir como propone Darío. No. Es un segmento, uno de cuyos extremos es un vértice del triángulo y es perpendicular al |

| | | |
|---|---|---|
| | | ta ta ta. ¿Sí? Es mejor decirlo… |
| 25 | Juan: | Y entonces el otro extremo también… |
| 26 | P: | Es… No, pero eso sí no hay necesidad de decirlo. Porque no causa esa problemática que dice Darío. Pero, arreglemos esa parte primero. Entonces, es el segmento… o es un segmento cuyo [corrige la definición escrita en el tablero], uno de cuyos extremos… tocaría escribir. Uno de cuyos extremos es un vértice del triángulo. Tocaría decir entonces… ¿y el otro? |
| 27 | Darío: | Y el otro extremo… |
| 28 | P: | Y el otro extremo… |
| 29 | Darío: | Pues es la intersección… |
| 30 | Orlando: | Un punto de la recta… |
| 31 | Alguien: | Es la intersección entre… |
| 32 | P: | Es un segmento, uno de cuyos extremos es un vértice del triángulo y es perpendicular a la recta que contiene al lado opuesto. Pero… ¿y el otro extremo? |
| 33 | Ignacio: | Es la intersección entre el segmento y el lado. |
| 34 | P: | Porque es que… Claro, los libros se ahorran esta problemática diciendo es un segmento que va desde un vértice de un triángulo hasta la recta que contiene el lado opuesto. Si. Entonces va… de aquí hasta acá… resuelto el problema. Entonces, aquí tenemos todavía el problema del otro extremo, en dónde para. Porque es un segmento, uno de cuyos extremos es un vértice del triángulo… |
| 35 | María: | Y el otro es un punto. |
| 36 | P: | Es perpendicular a la recta que contiene el lado opuesto, y el otro extremo está en esa recta. Tocaría decirlo así. |
| 37 | María: | Sí. Es un punto que está contenido en esa... |
| 38 | P: | O sea, aquí tengo que poner una coma [en lugar de “y” es perpendicular]. Aquí, coma, es perpendicular a la recta que contiene al lado opuesto, y el otro extremo ¿qué? |
| 39 | María: | Está contenido en el triángulo. |
| 40 | P: | Y el otro extremo no necesariamente está contenido en el triángulo… |
| 41 | María: | Ah no. No, no, no. |
| 42 | P: | Porque ¿qué pasa si tenemos este triángulo? [dibuja un triángulo obtusángulo]. |
| 43 | María: | Que está contenida en la recta. |
| 44 | Estudiante: | Es la intersección… |
| 45 | P: | Aquí no necesariamente está. Y el otro… extremo ¿dónde está? Está en la recta que contiene el lado opuesto. En dicha recta, podemos decir. Quedó mejor [la definición]. |

**[P6 22-45]**

Luego que la profesora redactó una primera versión de la definición de altura, y la escribió en el tablero, Daniel objeta la definición dando una aclaración a lo que la profesora ha escrito, ya que él considera que la definición queda ambigua tal como está propuesta [23]. Con la afirmación *una pregunta*, se entrevé que Daniel no quería buscar respuesta a un cuestionamiento que le haya surgido en medio de la discusión, sino corregir una característica de la propuesta que se tiene [23], aclarando que el vértice del triángulo que se menciona en la definición, debe ser extremo de la altura. Observación que es aceptada por la profesora, luego de explicar lo que quería describir con las palabras usadas en la definición. Por lo cual interviene Juan, ya que él considera que el otro extremo de la altura tiene una característica similar; observación que no es aceptada por la profesora, justificando él porque la tiene en cuenta. En medio de este análisis se observa como los estudiantes *buscan propiedades* del objeto geométrico que les permitan mejorar su definición de tal forma que quede los más clara posible. La profesora rescribe la versión 1 de la definición teniendo en cuenta la observación dada por Daniel, y luego indaga por la característica que debe tener el otro extremo de la altura, a lo cual dos estudiantes dan respuesta [29, 30], pero la profesora no las tiene en cuenta porque las respuestas no caracterizan el otro extremo, por lo que vuelve a indagar “Y el otro extremo” [32]. Sin obtener una respuesta que sea satisfactoria para ella, por lo cual inicia reescribiendo la definición que se tiene hasta el momento, e insiste con la pregunta del otro extremo, logrando que María de una respuesta incorrecta, que es retomada y corregida por la profesora por medio de un contraejemplo que muestra la falsedad de la afirmación, al hacer uso de un triángulo obtusángulo [39,42]. Los estudiantes siguen dando propuestas para la definición, pero sin embargo estas no son tomadas por la profesora, por lo cual ella termina escribiendo la definición.

En este fragmento aunque la profesora hace varios cuestionamientos sobre características geométricas del objeto a definir, y los estudiantes se encuentran comprometidos con la construcción de la misma al dar diferentes respuestas con la finalidad de complementar, no se ve una construcción colectiva en su totalidad, ya que aunque en un principio fueron los estudiantes quienes construyeron la definición se entrevé, que después, varias de las respuestas dadas no fueron satisfactorias para ella, por lo mismo ella termino redactando la definición, realizando la *institucionalización* de la misma, ya que esta fue aceptada por el grupo de estudiantes.

**VIDEO CLIP N. 7**

**Tiempo estimado:** 9 minutos 43 segundos

**Actividad matemática:** Conjeturar

**Descripción:** Conjeturas del problema: *"En el ángulo A se escogen dos puntos B y C, uno a cada lado del ángulo. ¿Cuándo está el punto medio del segmento BC en la bisectriz del ángulo A? Justificar la respuesta."*

Este informe descriptivo-interpretativo corresponde a un segmento de clase de los días 23 y 24 de abril de 2007 (clases 32 y 33) en el que se analiza las conjeturas realizadas por los estudiantes, del problema: "En el ángulo A se escogen dos puntos B y C, uno a cada lado del ángulo. ¿Cuándo está el punto medio del segmento BC en la bisectriz del ángulo A? Justificar la respuesta."

En una clase anterior la profesora recogió las conjeturas que los estudiantes propusieron y las organizó en cuatro que éstas representan o abarcan todas las conjeturas formuladas, para analizarlas colectivamente:

**Conjetura 1:** Si K es el punto medio del segmento BC y AB = AC, entonces K está en la bisectriz del ángulo A.

**Conjetura 2:** Si la bisectriz del ángulo A interseca al segmento BC en el punto medio, entonces AB = AC.

**Conjetura 3**: Si el segmento BC es perpendicular a la bisectriz del ángulo A entonces la intersección entre la bisectriz y el segmento BC es el punto medio K del segmento BC.

**Conjetura 4:** Si el triángulo ABC es isósceles con BA igual a AC, entonces la bisectriz del ángulo BAC interseca al segmento BC en el punto medio.

El análisis de las conjeturas comienza cuando la profesora pide a dos grupos describir cómo realizaron la exploración, si habían usado geometría dinámica y cómo fue el proceso de construcción al momento de resolver el problema; esta solicitud obedece a la intención de estudiar las conjeturas a la luz de la construcción realizada en Cabri.

*Fragmento 1*

La profesora propone una conjetura para que sea estudiada colectivamente, a la luz de la construcción. Para ello, pide a dos de los grupos que formularon la conjetura describir la construcción que realizaron, generando una interacción en la que se analiza cuál de las dos construcciones corresponde a la conjetura formulada.

01 P: […] decía: en el ángulo A, o sea que ¿qué está dado?

02 Varios: El ángulo A.

03 P: Se escogen dos puntos B y C ¿Dados? Sí. En los lados del ángulo. Y se pregunta, ¿cuándo está el punto medio del segmento BC en la bisectriz del ángulo A? Justifique su respuesta. Bien, entonces, el grupo de Luz, el grupo A y el grupo D me proponen una conjetura. […]Antes de escribir la conjetura, le voy a preguntar al grupo de Luz, […] ¿Cómo hicieron ustedes la exploración? ¿Si fueron a usar la calculadora? ¿Si, si, fueron a... a usar la graba... la calculadora o la...? ¿Sí?

04 Luz: Claro.

05 P: ¿En dónde lo hicieron?

06 Luz: Nosotras tenemos Cabri.

07 P: Ah, tienen Cabri. Bueno, entonces descríbeme ¿qué hicieron?

08 Marina: Pues, teníamos el ángulo… el ángulo dado [La construcción hecha partió de garantizar la igualdad entre las longitudes de los segmentos $\overline{AB}$ y $\overline{AC}$].

09 P: Sí.

10 Marina: Nos pedían era el punto medio del segmento BC. Como ya en una tarea anterior nos habíamos dado cuenta que si tenían… si los dos...o sea, dos segmentos que están contenidos en los rayos del ángulo tenían la misma medida…

11 P: ¿O sea que ustedes no hicieron una construcción?

12 Marina: Sí, sino... o sea ya íbamos era a eso.

13 P: Ah, usaron lo que ya nosotros sabíamos. O sea que ustedes a B y a C los escogieron con una propiedad especial, a pesar de que el problema no dice. Bueno, entonces ese es el grupo de Luz, el grupo F. El grupo A ¿Quién es del grupo A?

14 Julián: Nosotros.

15 P: ¿Cómo hicieron ustedes la construcción?

16 Joaquín: Teníamos el ángulo, le dimos dos puntos sin que cumplieran ninguna propiedad, y después mediante el arrastre nos dimos cuenta que el punto D estaba sobre la bisectriz; si estaba…

17 P: O sea, construyeron el ángulo…,

18 Joaquín: los dos…

19 P: los dos puntos,

20 Joaquín: los dos puntos…

21 P: ¿qué más construyeron?

22 Julián: El segmento... ¡ah!, pues la recta entre los dos puntos, el segmento...

23 P: El segmento BC.

24 Julián: luego el punto medio.

25 P: El punto medio. ¿Qué más?

26 Julián: ¡Ah! y pues, la bisectriz.

27 Joaquín: La bisectriz.

28 P: Y la bisectriz, claro. ¿Y entonces qué hicieron?

29 Joaquín: Mediante el arrastre. O sea…

30 P: ¿Arrastraron a quién?

31 Joaquín: a uno de los dos puntos de tal forma que el punto D… o sea, uno de los dos puntos de este ángulo, o sea que está en este ángulo, lo arrastramos de forma que el punto D estuviera en mitad… o estuviera en la bisectriz, y después utilizamos la…

32 P: Arrastraron a B o a C.

33 Joaquín: Sí.

34 P: Para lograrlo […]. La conjetura de estos tres grupos [F, A y D] dice: Si K es punto medio del segmento BC, y si estos dos segmentos AB y AC tienen la misma longitud, entonces K está en la bisectriz del ángulo A. Oímos dos construcciones, la de Marina y Luz, que dicen que ellas hicieron segmentos congruentes a los dos lados, porque se acordaron de algo que se había hecho en clase y se dieron cuenta que quedaba el punto medio de ese segmento en la bisectriz; y la de Joaquín y Jorge que dicen que construyeron el segmento y arrastraron. ¿Cuál de los dos grupos me está reportando una conjetura que concuerda con la construcción que hicieron? ¿El de Joaquín o el de Luz?

35 Germán: El de Luz que hace los segmentos congruentes, primero.

36 P: El de…

37 Germán: El de Luz que hace primero los segmentos congruentes, y…

38 P: Germán

39 Germán: de ahí ya…

40 P: ¿Por qué? ¿Por qué el de Luz?

41 Germán: Porque es el que coincide con la conjetura…

42 P: ¿Por qué coincide?

43 Germán: Porque ellos primero parten haciendo o sea, parten creando el ángulo pero con los segmentos congruentes para crear un triángulo.

44 P: Porque ellos pusieron… ellas pusieron esta condición [segmentos AB y AC tienen la misma longitud]… que la ponen aquí en la hipótesis, ¿sí?, ellas se aseguraron de tener eso, antes de mirar qué pasaba con el punto medio. En cambio ustedes [grupo A] supuestamente arrastraron, hasta que el punto medio coincidiera. Y en ese caso ¿cuál debía ser su conjetura?

45 Julián: No sé. Sería el recíproco.

46 P: Creo que tendría que ser la del grupo I o la del grupo B, que dicen: Si la bisectriz del ángulo A interseca al segmento BC en el punto medio, entonces AB y AC tienen la misma longitud. Ésa debió haber sido su conjetura. […] Para mí es muy importante que ustedes escriban cuál es la construcción. Porque nosotros tenemos que entender que lo que nosotros estamos haciendo, es descubriendo teoremas y que los teoremas reportan dependencias. Aquellas [condiciones] que nosotros construimos, son la hipótesis. Aquellas condiciones. Y aquellas que resultan de lo que construimos, son la tesis del teorema.

Al iniciar este fragmento la profesora centra la atención de los estudiantes en las condiciones dadas en el problema e incentiva la descripción completa de la construcción que realizaron los grupos para dar respuesta al problema. Con las intervenciones y preguntas que ella realiza en las líneas 3 a 32 mientras los estudiantes describen la construcción, pretende que todos los estudiantes se fijen en la diferencia entre los objetos que construyeron y los objetos que arrastraron; suscitando la comparación de las construcciones formuladas por los grupos. Así, hace caer en cuanta a los estudiantes que el grupo A tomó como dado la igualdad entre las longitudes de los segmentos $\overline{AB}$ y $\overline{AC}$ [8]; mientras que el grupo F tomó como dado la intersección entre la bisectriz del ángulo A y el punto medio del segmento BC [31].

Luego de que los estudiantes describen las construcciones la profesora *presenta la conjetura* formulada por los dos grupos, con la finalidad de que los estudiantes analicen en cuál de las dos construcciones el antecedente de la conjetura corresponde a las características de la construcción obligadas por arrastre y si el consecuente corresponde a las características geométricas encontradas y pregunta a la comunidad por la *correspondencia entre la conjetura y las construcciones propuestas* [34]. Germán que reconoce la intención de la profesora pues en clases anteriores ha hecho estudios de correspondencia entre una conjetura y la construcción realizada para formularla, afirma que la conjetura del grupo F es la que corresponde con la construcción porque las integrantes del grupo aseguraron la congruencia entre los segmentos AB y AC [35]; como Germán da su apreciación rápidamente, la profesora incentiva su participación y le exige justificar por qué afirma que la conjetura corresponde con la construcción realizada por el grupo F [40, 42].

La profesora acepta la afirmación de Germán y la *complementa* cuando dice a los estudiantes que el grupo F se aseguró de que los segmentos AB y BC tuvieran la misma longitud para incluir ésta condición en la hipótesis [44] y deja entrever que la conjetura del grupo A no corresponde con su construcción, parafraseando la conjetura que debió proponer [46].

La profesora finaliza éste fragmento reforzando la norma de reportar la construcción que se realiza en el proceso de conjeturar, para determinar si las dependencias explicitadas en la conjetura corresponden con la construcción.

*Fragmento 2*

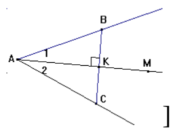
Además de estudiar la conjetura a la luz de la construcción, la profesora solicita dar los pasos claves para demostrar las conjeturas admitidas. Darío es el encargado de presentar la conjetura de su grupo y esbozar la demostración; un proceso similar se realiza con las otras conjeturas.

| | | |
|---|---|---|
| 47 | P: | El grupo C me dice: […] que K está en la bisectriz del segmento BC, ¿Cómo es que me dicen? […] ¿Que K está en la bisectriz si el segmento es perpendicular a la bisectriz? |
| 48 | Darío: | ¡Ah! Sí. Hay algún… nos salieron dos propuestas [conjeturas] en... para la solución de esa... bueno del problema. |
| 49 | P: | Darío. Sí. |
| 50 | Darío: | Entonces que era uno que si el segmento fuera perpendicular a la… |
| 51 | P: | Bisectriz. |

52 Darío: a la bisectriz… y la otra era que… pues el puntico…

53 P: Bueno… pasa, pasa… [al tablero] pero entonces, necesito que me diga claramente cuáles son las dos. […]

54 Darío: [Pasa al tablero y dibuja:




]

Entonces, pues lo que nosotros decíamos es que si... si el segmento… BC era perpendicular a la bisectriz [AM], entonces pues la…

55 P: K, Lo llamamos K… el punto medio.

56 Darío: K.

57 P: El punto medio.

58 Darío: Pues la intersección de la bisectriz con el [segmento BC]…

59 P: ¡Ah!, es el punto medio.

60 Darío: con el segmento es el punto medio.

61 P: O sea, que la hipótesis es: Si el segmento BC es perpendicular a la bisectriz A… AM…

62 Estudiante: AM.

63 P: a AM, entonces…

64 Darío: Entonces pues la intersección, el punto de intersección es el punto medio de [segmento] BC.

65 P: [La profesora escribe en el tablero la conjetura, mientras Darío le dicta: “Si $\overline{BC} \perp \overrightarrow{AM}$ entonces $K$ es el punto medio de $\overline{BC}$”] Bueno, ¿y lo puedes mostrar?

66 Darío: Pues… entonces tengo que [el segmento *BC*] es perpendicular [a la semirrecta *AM*] entonces éste [ángulo *K*] es recto. ¿Cierto?

67 P: ¿Cuál? ¿Quién? Habla [bien] porque es que yo después... este, este, este, yo no...

68 Darío: El ángulo... el ángulo AB, AKB es recto, es recto ¿cierto?

69 P: Sí.

70 Darío: Entonces pues hay un teorema que dice... bueno, forman los cuatro ángulos rectos.

71 P: Sí.

72 Darío: Entonces tengo que [ángulo] AKB es recto y que también [ángulo] AKC es recto. [Escribe en el tablero ∠AKC es recto]. Entonces tengo que esos dos son congruentes, estos dos son ángulos congruentes. Entonces tengo que [segmento] AK es congruente con ese mismo ¿cierto? Entonces esto [segmento AK] congruente con este mismo [segmento AK]. Y como esta es bisectriz [rayo AM], entonces… congruen…

73 P: ¿Quiénes? ¿Quién?

74 Darío: [ángulo] BAK es congruente con [ángulo] KAC. Entonces por criterio de congruencia ángulo - lado – ángulo, ya tengo que estos dos [triángulo AKC] son congruentes con estos dos [triángulo

AKB]. Entonces, también tengo que como es por intersección entonces que K está entre B y C, entonces ya también tengo para demostrar que la medida de éste [segmento CK] es congruente con ésta, [medida del segmento BK] entonces, la medida…

| | | |
|---|---|---|
| 75 | P: | ¿La medida de quién? |
| 76 | Darío: | La medida de K a C. KC. |
| 77 | P: | Del segmento KC |
| 78 | Darío: | Es igual a la de K a B |
| 79 | P: | A la del segmento BK. Entonces conjetura… verdadera. Muy bien, gracias. |

En este fragmento se observan tres tipos de interacciones, en la primera la profesora invita a Darío a *presentar la conjetura* que formuló con su con su compañero [47], él afirma que formularon dos conjeturas y cuando intenta presentarlas observa que se le dificulta expresarlas verbalmente, por lo que insinúa con un gesto que quiere pasar a tablero [48 - 52], lo cual es aceptado por la profesora [53]. En el tablero Darío realiza una representación gráfica de su conjetura y mediante interacción con la profesora presentan una de las conjeturas a los estudiantes, resaltando los elementos y propiedades geométricas usadas. Además de la presentación gráfica y verbal de la conjetura la profesora favorece la presentación de la conjetura con un lenguaje claro y preciso, por lo que interpreta lo que dice Darío y comienza a escribir la conjetura en forma de condicional, es decir de la forma si – entonces [65]. En esta interacción la profesora y el estudiante asumen el papel de pares académicos que buscan reconstruir claramente una conjetura, teniendo en cuenta que Darío acepta que la profesora complemente e intervenga en sus ideas y que la profesora acepta que Darío le dicte la conjetura mientras ella la escribe en el tablero.

Luego de presentar la conjetura con la que la profesora y los estudiantes están de acuerdo, se procede a *validar la misma*, incitada por la profesora [65]; para la validación de la conjetura Darío da los pasos claves de una demostración. Cuando inicia la validación la profesora interactúa con él para *regular el lenguaje* [67], ya que Darío no especifica el objeto geométrico al que está haciendo referencia, sino que usa la palabra “éste” en lugar de mencionar la palabra ángulo. Esta interacción es promovida por la profesora para que los estudiantes se acostumbren a usar el lenguaje geométrico y para que la comunicación de ideas, en este caso la validación de la conjetura sea clara y precisa, favoreciendo en los demás estudiantes la comprensión de la validación e incluirlos en la misma. Las intervenciones 73 y 75 son otros momentos en los que la profesora regula el lenguaje, a los cuales Darío responde con la regulación de su propio lenguaje [68, 74, 76].

En la validación de la conjetura Darío asume como dado que el punto K pertenece a la bisectriz AM y al segmento BC por ser el punto de intersección de estos objetos geométricos y utiliza el criterio Ángulo – Lado – Ángulo que han trabajado en clases anteriores y que establece la congruencia entre los triángulos; en este caso entre los triángulos AKC y AKB [74] pues cuenta con la congruencia entre los ángulos AKC y AKB que son los ángulos rectos que se obtienen a partir de la perpendicularidad entre el segmento BC y la bisectriz AM [72]; con la congruencia del segmento AK consigo mismo y con la congruencia de los ángulos BAK y KAC determinados por la bisectriz AM a la que pertenece el punto K [74]. Seguido a la congruencia de los triángulos AKC y AKB, Darío resalta la interestancia B – K – C e infiere la congruencia entre los segmentos KC y KB al ser los lados correspondientes entre los triángulos congruentes, la profesora va aceptando los pasos que propone Darío y con la intervención de la línea 75 conlleva a la interacción que establece que la medida del segmento *KB* es igual a la del segmento *KC;* al parafrasear éste hecho [77 -79], expresa que así queda comprobando que el punto K es el punto medio del segmento BC.

**VIDEO CLIP N. 8**

**Tiempo estimado:** 6 minutos 30 segundos.

**Actividad matemática:** Conjeturar

**Descripción:** Conjeturas del problema *"¿Cuál es la relación [que existe] entre el tipo de triángulo y la propiedad: dos de sus alturas son congruentes?"*.

---

Este informe descriptivo-interpretativo corresponde a un segmento de clase del día 12 de Abril, en el que se analizan las conjeturas planteadas por los estudiantes al problema:

“¿Cuál es la relación entre el tipo de triángulo y la propiedad: dos de sus alturas son congruentes? Escriba el proceso de construcción y formule las conjeturas que se pueden establecer”.

En la clase anterior, la profesora propuso el problema, y los estudiantes tuvieron la oportunidad de trabajar con Cabri para realizar construcciones que les permitieran establecer conjeturas. Cada uno de los grupos estableció entre una y tres conjeturas, que fueron recogidas y analizadas por la profesora. Ella revisó la similitud entre las conjeturas, los requerimientos e implicaciones de las mismas, la correspondencia entre la construcción y la conjetura, y la veracidad; después determinó la secuencia en la que se analizarían las conjeturas en la clase. Algunas de las conjeturas obtenidas por los estudiantes son:

**Conjetura 1:** Si un triángulo tiene dos lados congruentes entonces dos de sus alturas son congruentes.

**Conjetura 2:** Si un triángulo tiene dos alturas congruentes entonces el triángulo tiene congruentes los lados opuestos a los vértices de las alturas congruentes.

**Conjetura 3:** Si ABC es un triángulo y la medida de uno de sus ángulos es mayor a 90 y los lados que determinan este ángulo son congruentes entonces el triángulo es isósceles y dos de sus alturas son congruentes.

**Conjetura 4:** Si un triángulo tiene al menos dos lados congruentes, entonces al menos dos de sus alturas son congruentes.

Al iniciar la clase la profesora propone el estudio de la conjetura 1, elaborada por dos grupos; el estudio consiste en determinar la correspondencia entre la construcción realizada mediante la exploración con geometría dinámica y la conjetura elaborada. Aunque en la clase se estudió la construcción realizada por cada uno de los dos grupos, que conllevó a plantear la conjetura 1, en el *Fragmento 1* reportamos una de las interacciones que surgieron a partir de dicho estudio. En el *Fragmento 2* se estudian otras dos conjeturas, entre ellas la conjetura 3, para evaluar aspectos relacionados con la redacción de las mismas.

*Fragmento 1:*

La profesora pide al grupo C comunicar la construcción que realizaron y la conjetura que plantearon para determinar la correspondencia entre la construcción y la conjetura.

01 P: […][la profesora está observando un resumen que elaboró con las construcciones y las conjeturas realizadas por los grupos] Quiero que el grupo C me lean lo que me escribieron para la construcción. Ponemos atención por favor, porque quiero… quiero que se fijen muchísimo en lo que dicen el grupo C y después en la conjetura que me… que establecen.

02 Leopoldo: Se construyó el triángulo ABC, luego las alturas del triángulo… y mediante el arrastre se logró que las dos alturas [dos de las alturas del triángulo] fueran congruentes. Conjetura…

03 P: Espera un minuto. ¿Escucharon eso, no? Creo que muchos hicieron la misma construcción […], me lo lees otra vez y ponemos atención.

04 Leopoldo: Se construyó el triángulo ABC, luego las alturas del triángulo y mediante el arrastre, se logró que dos de las alturas fueran congruentes.

05 P: Sí. Ahora la conjetura.

06 Leopoldo: Conjetura. Si un triángulo tiene dos lados congruentes, entonces dos de sus alturas son congruentes.

07 P: Bueno, entonces… mira. Vamos a… vamos a determinar ahí dos… dos cosas. Una, vamos a llamar *p*… eh… lados… del triángulo ¿no? Y *q*… Y *q*… alturas congruentes… […][Escribe en el tablero: *p*: lados congruentes del triángulo, *q*: alturas congruentes] Y grupo C… léanme otra vez la construcción.

08 Leopoldo: Se construyó el triángulo ABC, luego las alturas del triángulo y mediante el arrastre se logró que dos de las alturas fueran congruentes.

09 P: O sea que ustedes obligaron a qué… ¿A *p* o a *q*?

10 Leopoldo: Eh… las alturas, a *q*.

11 P: A *q*… ¿Sí?

12 Leopoldo: Sí.

13 P: Esto es lo que ustedes obligaron… ¿Qué pasa? ¿Qué pasa Leopoldo? A ver…
[…]

14 Leopoldo: No sé. Creo que de *q* dedujimos…

15 P: De *q* dedujeron *p* ¿cierto? ¿Y cuál fue la conjetura que me estableciste?

16 Leopoldo: Pues que si las alturas son congruentes… ah… si *p* entonces q…

17 Estudiante: Si q entonces p.

18 Darío: Es que después miramos…

19 Estudiante: Si p entonces q.

20 P: Si los lados son congruentes…

21 Leopoldo: Si los lados son congruentes entonces las alturas son congruentes.

22 P: Muy bien.

23 Darío: Y fue al revés.

24 P: O sea… y esto no les pasó solamente a ellos. Muchos de ustedes hicieron lo mismo. La construcción de ellos fue obligar a que se cumpliera *q*… y se dieron cuenta que entonces se daba *p*. Pero la conjetura que me escribieron…

25 Estudiante: Si p entonces q.

26 P: es: si *p*

27 Estudiante: entonces q.

28 P: entonces *q*. Esto es muy importante. Muy importante porque en el teorema la hipótesis es aquello que sabemos como válido. Y lo que ustedes sabían como válido era la congruencia de las alturas, porque eso era lo que ustedes estaban buscando que sucediera. Entonces digamos que la conjetura no corresponde a tú construcción. […]

29 Leopoldo: Profe… una cosa, pero entonces de acuerdo a esto, lo correcto habría sido escribir primero que si las alturas son congruen… o sea la congruencia…

30 P: Según tú construcción,

31 Leopoldo: Sí.

32 P: lo que tú me podías reportar a mi era que si las alturas son congruentes, entonces los… los…

33 Estudiante: Los lados son congruentes.

34 P: los lados son congruentes. Según tu construcción. […]

[1 - 34]

La profesora con la finalidad de que los estudiantes sean más cuidadosos al momento de decidir qué propiedades incluir en la conjetura o cuál es el antecedente y el consecuente de la conjetura, retoma la construcción del grupo C y le pide a los otros estudiantes fijar su atención en la construcción realizada por éste grupo y en la conjetura planteada [01]. Con las expresiones usadas en la intervención 03, la profesora invita a los estudiantes a identificar y tener presente aquellas propiedades que se asumen como dadas en la construcción realizada por Leopoldo y Darío, para establecer colectivamente si hay o no una *correspondencia entre la construcción y la conjetura* establecida.

Con la finalidad de estudiar colectivamente dicha correspondencia y que Leopoldo asocie lo que obligaron por arrastre con lo que obtuvieron por construcción, la profesora introduce el lenguaje proposicional [07] y con la frase “ustedes obligaron a qué… ¿A p o a q?” [09] conlleva a que Leopoldo se sorprenda [11] y favorece que él se dé cuenta que en la construcción obligaron la congruencia entre las alturas para deducir la congruencia de los lados; es decir que el proceso de construcción fue $q \rightarrow p$ [9 a 13], confirmándolo en la intervención 13. Con la intervención 14 la profesora incentiva a Leopoldo a exteriorizar lo que está observando en relación a la construcción realizada, dando a conocer de manera dudosa, mediante el lenguaje proposicional, que de las alturas congruentes se dedujo la congruencia de los lados, lo cual es afirmado por ella [16] para analizar en el mismo lenguaje la conjetura propuesta; logrando determinar colectivamente que no hay una correspondencia entre la construcción y la conjetura pues, como se nombró anteriormente, la construcción fue $q \rightarrow p$ y la conjetura fue escrita de la manera $p \rightarrow q$, poniendo como consecuente las alturas congruentes, aunque la construcción se basó en la congruencia de las alturas [22 - 29].

El análisis de la correspondencia entre la construcción y la conjetura finaliza cuando Leopoldo reconfirma que la manera en que escribieron la conjetura no era correcta pues el antecedente debería ser alturas congruentes y el consecuente lados congruentes, lo cual es reforzado por la profesora al decir que según la construcción reportada, la conjetura debería ser "si las alturas son congruentes, entonces los lados son congruentes" [33 y 35].

*Fragmento 2*

En este fragmento la profesora impulsa la revisión de las propiedades que el grupo F y C incluyeron en la conjetura, para evaluar aspectos relacionados con la redacción de las mismas. Para ello muestra las conjeturas de los grupos y pide opinión de los demás estudiantes.

| | | |
|---|---|---|
| 34 | P: | […] La conjetura del grupo F […], dice lo siguiente [lee del acetato la conjetura del grupo F]: Si el triángulo… "Si ABC es un triángulo y la medida de uno de sus ángulos es mayor a noventa y los lados que determinan este ángulo son congruentes, entonces el triángulo es isósceles y dos de sus alturas son congruentes". Quiero que examinen la propuesta de ellos y me digan qué piensan. |
| 35 | María: | Es como muy local. O sea… |
| 36 | P: | ¿Muy local? |
| 37 | María: | obliga, obliga a que el triángulo [uno de los ángulos del triángulo] sea mayor que noventa. |
| 38 | P: | Miren la propuesta, si ¿y? |
| 39 | María: | Pues… o sea, eso se cumple, pero para ese caso específico. |

| | | |
|---|---|---|
| 40 | Estudiante: | Para ese caso. |
| 41 | P: | ¿Qué es lo que se cumple? |
| 42 | Estudiante: | Que las alturas son congruentes. |
| 43 | María: | Que el triángulo es isósceles si dos de sus alturas son congruentes. |
| 44 | P: | Ah… a ver Orlando, ¿tú qué dices? |
| 45 | Orlando: | Lo que pasa que es que [según lo dicho] no puede ser cualquier triángulo isósceles sino uno con la característica de que el ángulo donde… |
| 46 | P: | El ángulo del vértice, se llama… el ángulo del vértice es el nombre que se le da. |
| 47 | Orlando: | Tiene que ser mayor de noventa, el que forma los lados iguales. |
| 48 | P: | ¿Sí? |
| 49 | Germán: | No sé si se estaría cumpliendo para el resto de triángulos porque cuando el triángulo tenga el vértice igual a noventa entonces no cumpliría.... |
| 50 | P: | El ángulo del vértice. |
| 51 | Germán: | Cuando el ángulo del vértice |
| 52 | Estudiante: | o menor |
| 53 | Germán: | sea noventa o menor que noventa no cumpliría. |
| 54 | Estudiante: | No cumple esa condición. |
| 55 | P: | Según ellos, no parecería que se cumpliera. ¿Sí? Entonces es una conjetura que está, como dice María, muy localizada. Y no lo más general posible. |
| 56 | Estudiante: | Si, pues fue lo que nosotros… |
| 57 | P: | Sí. El grupo C… Ah no sé por qué puse ésta. [Si un triángulo tiene dos lados congruentes] entonces dos de sus alturas son congruentes. Bueno, ¿qué piensan de esa? Ya sé porque lo puse. |
| 58 | Germán: | porque… porque… Pues está al revés porque lo que nos da es la congruencia de las alturas, no la congruencia de los lados. |
| 59 | P: | Ah no, porque depende de la construcción que hayan hecho. |
| 60 | Germán: | Ah sí, eso es verdad. |
| 61 | P: | Sí. No por ese lado no. […] Pero, ¿qué pasa con la conjetura del grupo C? |
| 62 | María: | Que falta… falta decir cuáles son las alturas |
| 63 | P: | ¡Aja! |
| 64 | María: | respectivas a qué ángulo… a qué lado. |
| 65 | P: | Exacto, ¿Por qué no son… son cualquier par de alturas? |
| 66 | Estudiante: | no puede ser… |
| 67 | P: | No. Entonces, falta decir cuáles son exactamente esas alturas. |

[34 - 67]

En este fragmento se observa una interacción en la que la profesora promueve la *revisión del enunciado* de la conjetura propuesta por el grupo F y el grupo C. Con la intención de que los estudiantes adquieran herramientas para formular conjeturas y para que sean más cuidadosos en la escritura de las mismas, la profesora da lugar a la participación de los estudiantes, pidiéndoles expresar su opinión con respecto a la conjetura propuesta [36 y 63]. De la conjetura del grupo F [36] María afirma que es una conjetura muy local, pues es un caso específico que obliga a que el triángulo tenga un ángulo mayor que 90°[39 y 41]; Orlando y Germán complementan la idea de María diciendo que el triángulo considerado en la conjetura es un triángulo muy específico que debe cumplir que el ángulo comprendido por los lados congruentes debe ser mayor que 90° [47 - 49], lo cual implicaría que para los otros triángulos isósceles no se cumple que tienen dos de las alturas congruentes[51]. En esta interacción, se observa una inconformidad incitada por la profesora, por parte de María, Orlando y Germán, quienes detrás de sus intervenciones hacen ver que a la conjetura le sobra la propiedad en la que el ángulo comprendido por los lados congruentes debe ser mayor que 90°.

En la interacción que se gesta por la conjetura C: “Si un triángulo tiene dos lados congruentes entonces dos de sus alturas son congruentes”, María deja ver que en esta conjetura no “sobran” propiedades, sino que por el contrario se debe incluir a la conjetura, una propiedad que especifique cuáles son las dos alturas congruentes o relativas a qué lados [64 , 66], pues durante los análisis realizados a las conjeturas han hablado de dos alturas congruentes, más no se ha dicho con exactitud cuáles son esas alturas y, como dice la profesora no son cualquier par de alturas [67].

En este fragmento hemos visto cómo la profesora fue la promotora de la interacción que permitió determinar si en una conjetura sobraban propiedades, o si por el contrario, era necesario incluir otras propiedades y su segundo rol en la interacción fue el de complementar las ideas de los estudiantes. En este caso observamos que la profesora no tomó otro papel diferente al de promover la interacción y complementar ideas, gracias a la manera en que estructuró la clase.

**VIDEO CLIP N. 9**

**Tiempo estimado:** 23 minutos 15 segundos.

**Actividad matemática:** Conjeturar

**Descripción:** Conjeturas del problema: *"Se da una recta, dos puntos P y Q en el mismo semiplano determinado por la recta l, determine el punto R [de la recta l] para el cual la suma de las distancias [PR y QR] es la menor"*

En la clase número 39 correspondiente al 8 de mayo de 2007, la profesora propone la situación: "Se da una recta, dos puntos P y Q en el mismo semiplano determinado por la recta l, determine el punto R [de la recta l] para el cual la suma de las distancias [PR y QR] es la menor"; ésta es abordada en parejas usando el programa Cabri.

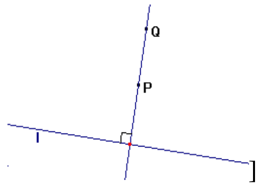
Este informe descriptivo-interpretativo lo componen cuatro fragmentos; en el primer fragmento la profesora pasa al tablero a algunos estudiantes para que presenten a sus compañeros cómo encontrar el punto R, teniendo en cuenta los requerimientos establecidos para los puntos P y Q. En el segundo fragmento que se desarrolla en la clase siguiente, correspondiente al 14 de mayo de 2007 uno de los estudiantes pasa al tablero y da a conocer los pasos claves de una demostración, que permite validar la conjetura que formuló con su compañero. En el tercer fragmento se muestra que el punto R encontrado por el grupo de Henry es el mismo punto R caracterizado por Darío y Leopoldo. Finalmente, en el cuarto fragmento dos estudiantes verifican geométricamente una conjetura, obteniendo un contraejemplo y mostrando que la conjetura no es válida.

*Fragmento 1*

En el proceso de realizar la construcción y formular la conjetura, la profesora interactúa con los grupos para conocer cuál es la propuesta de cada uno de ellos y después invita a algunos estudiantes a pasar a tablero y a describir cómo encontrar el punto R. En el orden de llamada tiene en cuenta los requerimientos establecidos por cada uno de los grupos, para los puntos P y Q.

01 P: […][23] Un caso que consideraron ustedes fue ¿cuál?

02 María: […][24] . Pusimos a P y a Q, y después animamos a Q sobre… o sea que quedaran colineales… Q y P sobre la perpendicular. [por P a *l*] [Representa algo así:




]

03 P: Y ahí… les da… en ese caso.

04 María: Sí.

05 P: O sea, un caso era que Q y P estuvieran sobre la perpendicular de P a la recta.

06 María: Sí.

07 P: Y entonces en ese caso R es…

08 María: R es…

09 P: el punto de de intersección. ¿Sí?

10 María: el punto de de intersección.

11 P: Bueno, gracias. Ese es un caso, ¿sí? Otro caso; el caso de ustedes fue ¿cuál?

12 Joaquín: [Pasa Joaquín al tablero] Pues tenemos… la recta *l*, una recta *T* que es perpendicular…

13 P: Desde P, ¿no? Tenemos a P y a Q.

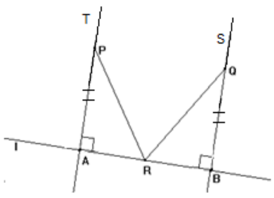
14 Joaquín: Aquí está P, tenemos una recta perpendicular S donde está Q, la distancia… bueno [punto]A,

15 P: Tal que ¿qué?

16 Joaquín: [punto] B, tal que la distancia de P a A sea igual a la distancia de Q a B. Entonces hallamos que el punto medio de este segmento [AB] era la mínima distancia…

17 P: Mínima suma.

18 Joaquín: La mínima suma. [Joaquín hizo una representación como:




]

19 P: Otro caso ¿sí?, otro caso especial. ¿Sí? Gracias. Entonces R. Esto es muy importante. Esto que estoy mostrándoles es muy importante. Cuando uno tiene que resolver un problema y a veces como que el problema no sabe como por dónde comenzar a… a resolverlo, uno simplifica las condiciones y empiezan entonces a surgir otras ideas.

[23] La profesora le indica a María cuál caso presentar, de los que ella y su compañero propusieron.
[24] María repite las condiciones dadas en el problema.

Entonces una [forma] es: bueno, imaginémonos que Q está en la misma recta perpendicular desde P a la recta *l*, y entonces R sería “fulanito”. Otro caso es: imaginémonos que P y Q están a la misma distancia de la recta *l*. Y entonces R es… “fulanito”. Otra posibilidad Henry es… ¿qué?

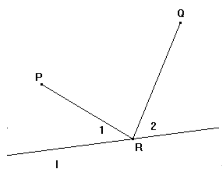
20 Henry: [Pasa Henry al tablero] Tengo la recta *l* y tengo el segmento digamos… PQ

21 P: Los puntos P y Q.

22 Henry: los puntos P y Q. Entonces, pues… ubico cualquier… tengo que ubicar un punto… ubico el punto R…

23 P: Un punto R.

24 Henry: un punto R, tal que… trazo este segmento [PR] y éste [segmento QR]. Entonces si… cumplo que el ángulo... que este ángulo es congruente con éste [Hace una representación y señala los ángulos




]

25 P: 1 y 2… ángulos 1 y 2

26 Henry: el ángulo 1 y [el ángulo] 2 son congruentes, entonces la suma de las distancias va a ser la menor.

27 P: Y… Gracias. O sea, él dice: busco a R para que el ángulo 1 y [el ángulo] 2 sean congruentes. Y entonces me da ¿Sí? […][25] Pero, el problema con la de ellos es que es una conjetura dinámica. Es decir, no puedo encontrar a R sino con el computador. Pero, ¿qué hago cuando estoy con papel y lápiz? ¿Cómo hago yo para estar sabiendo exactamente en qué momento me va a dar que esos dos ángulos son congruentes? […][26] Pero se fijaron en los ángulos, lo cual es algo muy interesante; excepto que como les digo con papel y lápiz, ¿cómo hago? […][27] Darío y Leopoldo tienen otra propuesta. [Extiende su mano con el marcador para que Darío pase al tablero].

28 Darío: [Pasa al tablero] Pues… Entonces, pues teníamos a P y a Q, ¿cierto? entonces, trazamos la perpendicular de P a… a la recta *l* y la de Q a la recta *l*. Entonces copiamos… sacamos la misma distancia de P, colocamos acá…

29 P: Llamemos este punto de intersección.

30 Darío: Ah bueno, M

---

[25] Se presenta a la comunidad una construcción similar a la propuesta por Henry y su compañero, que requiere de la geometría dinámica.

[26] Melisa pregunta por las condiciones que se le dieron a los puntos P y Q.

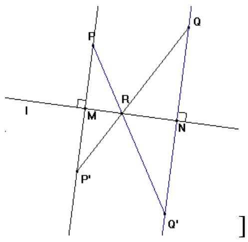
[27] Pasa un estudiante al tablero a presentar una construcción similar a la de Darío y Leopoldo.

31 P: M y…

32 Darío: y N.

33 P: N.

34 Darío: Entonces, sacamos acá a P’ y acá… a Q’. Entonces trazamos este… segmento de P a Q’ y de P’ a Q. [




]

35 P: Y se cortan ambos.

36 Darío: La intersección se corta y se cortan también en la recta… y este [punto] es R.

37 P: Y ese es R.

38 Leopoldo: ¡Sí se cortan ahí!

39 Darío: Sí.

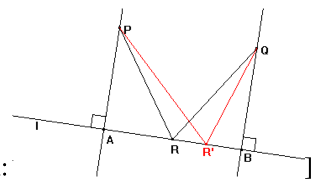
40 P: Tenemos… dos caracterizaciones generales, una caracterización para un caso especial, dos caracterizaciones… dos… dos caracterizaciones para casos especiales, cuando Q y… está en la perpendicular de P a la recta. ¿Sí? Dos caracterizaciones digamos dinámicas, porque… Y me pregunto si todas me están dando un mismo punto R. Pues ustedes dicen que sí, ¿no? ustedes encontraron para que diera lo mínimo. Entonces, ahora hay que decidir, de las caracterizaciones que tenemos, por ejemplo, de pronto el caso en donde están a la misma distancia de la recta, puedan hacer la demostración; y cuál de esas dos caracterizaciones que no tienen en cuenta esa carac... esa propiedad especial nos servirá para hacer la demostración. Pero, ¿qué es lo que tengo que demostrar? Es la pregunta.

41 Daniel: Que la suma [de la longitud del segmento PR y QR] es la mínima.

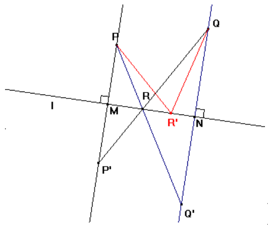
42 P: Sí, pero… y ¿Cómo muestro que algo es mínimo?

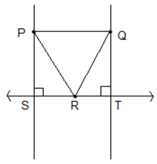
43 Daniel: Comparando.

44 P: Comparando, exacto. Entonces, nos toca imaginarnos que hay otro punto… una posibilidad, que hay otro punto R’ y comparar, esta suma [PR+RQ] con ésta [PR’+R’Q]. [complementa el dibujo de Joaquín y Juan:




]O lo mismo aquí, R’ y comparar; [Complementa la figura de Darío y Leopoldo:




] o en el caso que borramos en donde P y Q están a la misma altura. [Hace una representación así: 

] Esa es una forma es… comparar, […][28] esa es la que hemos usado hasta ahora. ¿Sí? Esa es una forma. […][29]

En primer lugar la profesora invita a María a *presentar la conjetura* considerada por ella y su compañero [01]. En esta interacción, que es la primera que se gesta en la socialización de cómo encontrar el punto R, la profesora tiene como prioridad presentar el caso trivial sin opacar las presentaciones de los otros estudiantes [01-11].

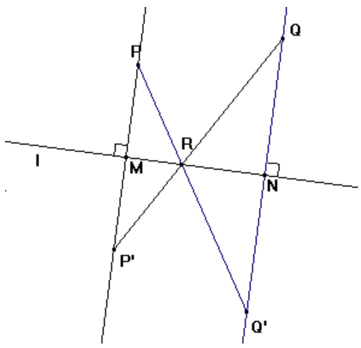
Luego de la presentación de la conjetura de María se presenta la conjetura formulada por Joaquín y su compañero en la que también condicionan los puntos P y Q [12 - 18]. La presentación de estas dos conjeturas obedece a la intención de la profesora de resaltar que en el proceso de resolver un problema, en muchas ocasiones, es necesario estudiar casos específicos, en los que se simplifican algunas condiciones para surjan nuevas ideas y se pueda llegar a una solución general [19].

Otro tipo de conjetura es presentada por Henry, en ella no se condicionan los puntos P y Q. En la interacción entre la profesora y Henry para presentar la conjetura, ella regula el lenguaje, introduce simbología geométrica y sintetiza lo dicho por Henry [21 - 27], favoreciendo la comunicación y comprensión de la conjetura. La presentación esta conjetura da lugar a que la profesora se refiera a un tipo de conjeturas en donde la posición de R es encontrada no por medio de una construcción geométrica sino por medio del arrastre, lo que hace que el punto no tenga una caracterización a partir de propiedades

[28] La profesora reconstruye en el tablero la construcción en la que P y Q están a la misma altura.
[29] Finaliza la clase en la que se presentaron las construcciones realizadas por los estudiantes, relacionadas con el problema planteado por la profesora, e inicia la clase en la que las conjeturas y construcciones del problema propuesto son analizadas.

geométricas justificables teóricamente. Así, cuando la profesora se refiere a la congruencia de dos ángulos explica que la conjetura es dinámica, por lo que requiere el uso del computador o calculadora y no permite que el punto R sea determinado con el uso del papel y del lápiz, ratificando que no se puede caracterizar geométricamente [27].

La profesora incentiva la presentación de la conjetura de Darío y su compañero, en la que no ponen condición distinta a la dada en la situación, para los puntos P y Q, y que permiten encontrar al punto R mediante el uso del lápiz y del papel. La conjetura consiste en realizar la simetría axial de los puntos P y Q con respecto a la recta *l*, nombrados P' y Q' respectivamente y trazar los segmentos PQ' y QP' para determinar la intersección que es etiquetada con el punto R [27 - 39].



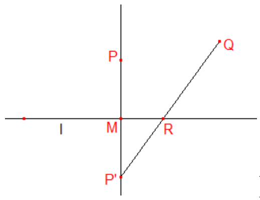

Al finalizar ésta interacción cuya esencia ha sido mostrar la riqueza en las ideas y la variedad en las conjeturas para caracterizar del punto R (construcciones específicas, dinámicas y robustas), la profesora invita a los estudiantes a la revisar si el punto R es el mismo en todas las conjeturas y a realizar su respectiva demostración. En esta invitación, se gesta una interacción entre Daniel y profesora [40 - 44], que se centra en qué es lo que se debe demostrar y cómo se debe demostrar, lo cual evidencia que la profesora no impone qué demostrar y cómo demostrar, pues es Daniel quien afirma que se debe demostrar que la suma de la longitud del segmento PR y RQ es mínima y que la manera de realizar su demostración es comparando. Los aportes de Daniel son valorados por la profesora al parafrasearlos y complementarlos.

*Fragmento 2*

En la clase número 40 correspondiente al 14 de mayo la profesora reconoce que el grupo de la clase obtuvo todas las soluciones que en otras ocasiones se habían encontrado pero no en un mismo grupo, por lo que su finalidad es mostrar y comprobar cómo todos los grupos llegaron al mismo punto R, por caminos distintos, aunque requiera de relaciones que aún no han sido establecidas en el sistema axiomático. Para comenzar, la profesora recuerda la construcción realizada por Leopoldo y Darío y les pregunta si saben cómo "demostrarlo", Darío pasa al tablero y realiza la respectiva demostración.

| | | |
|---|---|---|
| 44 | P: | […] Me puse a analizar un poco sus respuestas y entonces estoy entusiasmadísima, porque quiero mostrar cómo realmente todos llegaron a lo que se debe llegar, caminos muy distintos, pero… comprobar, demostrar que todos llegamos al mismo sitio va a ser bastante interesante; vamos a requerir de cosas que todavía no tenemos, pero ustedes ya saben que eso es lo chévere, porque se crean unas necesidades que nos van a impulsar a decir bueno, entonces ¿cómo mostramos esas necesidades? […][30] La de Darío y Leopoldo [coloca la conjetura] […] que es la que… no sé si ustedes pensaron la demostración… pero es éste esquema el que me sirve… la demo… ¿ya sabes cómo demostrarlo? |
| 45 | Darío: | Sí. Colocando por ejemplo, otro punto en la recta |
| 46 | P: | Sí. |
| 47 | Darío: | ya tendríamos el triángulo… P… Q'… y ese punto, entonces pues la distancia… |
| 48 | P: | A ver pasa, pasa Darío… y… porque voy a necesitar esta demostración para mostrarles realmente cómo todos llegamos por caminos distintos al mismo sitio. […][31][La profesora muestra la figura que presentaron Darío y Leopoldo en la clase anterior cuando formularon la conjetura]. |
| 49 | Darío: | Pues primero, para la demostración yo, yo… me di cuenta que… pues con uno de estos bastaría [punto P' o punto Q']… |
| 50 | P: | Con uno basta, sí señor, entonces… |
| 51 | Darío: | Quitemos por ejemplo ésta [tacha el segmento PQ']. |
| 52 | P: | Quitemos esa, sí. |
| 53 | Darío: | Entonces, va a ser… va a ser el mismo [punto] R, mejor dicho, entonces pues… |
| 54 | P: | Entonces hagamos el dibujo como propones. [Darío hace la figura en el tablero dejando |

[30] La profesora recuerda lo realizado en la clase anterior, y algunas de las construcciones correspondientes a las conjeturas que se expusieron.
[31] La profesora recuerda la construcción realizada por Darío y Leopoldo.

sólo el segmento P’Q 

].

55 Darío: ¿Cierto?

56 P: Sí.

57 Darío: Entonces pues, como… como está el segmento [P’Q] y [los puntos] están en dos semiplanos distintos entonces intersecan al…

58 P: A la recta l.

59 Darío: a la recta l… entonces la intersección…

60 P: Escogió… P y Q están en el mismo semiplano, escoge a P’ en el semiplano opuesto, entonces Q y P’ que están en semiplanos opuestos, el segmento corta.

61 Darío: Entonces bueno, esta suma [P’R + RQ] pues daría… como este punto [R] está entre P y Q, puedo hacer que PR más RQ sea igual a PQ. [Escribe: P’R + RQ = RQ]. Entonces si… cojo otro punto…

62 P: P’.

63 Darío: P’ sí. P’. [corrige y le agrega el prima a las P]

64 P: a P’Q.

65 Darío: Entonces si cojo otro punto de… de la recta… esto es…

66 P: Pero… primero una pregunta, primero te tengo una pregunta. En la tarea decía que PR más RQ y tú tienes es P’.

67 Darío: Ah pues sí. Por eso entonces… no pues por eso, es que después se hace que… como tengo un punto en la recta y tengo una recta perpendicular, entonces, si trazo aquí el otro segmento [PR], éste va a ser congruente [los triángulos PRM y P’RM] por criterio de congruencia de triángulos lado-ángulo-lado.

68 P: ¿De acuerdo? él construyo este segmento [PM] congruente a éste [MP’] y comparten un lado. Bien, o sea que esta suma [P’R + RQ = P’Q] es exactamente la misma de PR que era la que queríamos y ahora sí le doy permiso de que borre de P el “prima”. No ahí no, ahí sí [Darío borra el “prima” y deja: PR + RQ = RQ]. Bueno.

69 Darío: Entonces ya…entonces coloco… cojo un… no selecciono un…

70 P: Cualquier otro punto [en la recta l].

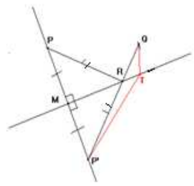
71 Darío: cualquier otro punto [en la recta l]…

72 P: ¿Aquí? [Ella ubica el marcador sobre la recta *l* y le pregunta si ahí ubica el punto]

73 Darío: Sí, cualquier… en cualquier lado. [La profesora ubica un punto T sobre la recta *l*] Entonces… ya no se cumpliría la interestancia entre P y Q [P’-T-Q], entonces no serían colineales P, T y Q.

74 P: Sí.

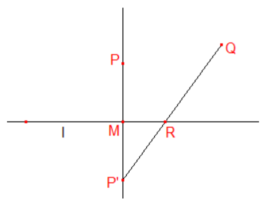
75 Darío: Entonces ahí tengo un triángulo. Entonces, por el criterio de desigualdad del triángulo tengo que de Q a T más T a P es mayor que QP [o sea QT más TP’ es mayor a QP´].

Entonces pues, con cualquier T va a ser igual. [  ]

76 P: O sea desigualdad triangular… ¿sí?... ¿de acuerdo?, bueno… entonces, esa es la propuesta de él y ya vimos que funciona. Ya sabemos quién es R y ya sabemos cómo encontrarlo. […][32]

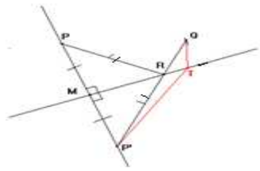
En este fragmento la profesora invita a Darío a *validar la conjetura* que realizó con Leopoldo [44]. Darío inicia con un esbozo verbal de la demostración pero la profesora le pide que pase al tablero [48], pues ella quiere favorecer la comunicación de la demostración mediante una representación gráfica, que permita a los otros estudiantes comprenderla. Además la finalidad de la profesora es que Darío valide su conjetura, para usarla como un medio de validación de las otras conjeturas, si logran comprobar que el punto R obtenido en las conjeturas de los otros grupos es el mismo punto R obtenido por Darío y Leopoldo.

Darío realiza un dibujo que tiene en cuenta los antecedentes de la conjetura y en el que se apoya para dar los pasos claves de la demostración de la misma.




Él inicia la validación con la interestancia P’- R - Q [57 - 61], para luego comparar la suma de las distancias P’R y RQ con la suma de las distancias P´T y TQ, donde T es un punto diferente R, de la recta l [69 - 73].

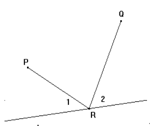
[32] La profesora recuerda a los estudiantes la finalidad de la clase: comprobar si el punto R que propusieron los estudiantes es el mismo.



Por desigualdad triangular, logra establecer que el punto R es el que garantiza que la suma de las distancias PR y RQ sea la menor [75 - 76]. En esta interacción el papel de la profesora es el de motivar a la validación de la conjetura y el seguir paso a paso las afirmaciones dadas por Darío, garantizando que los pasos claves mencionados sean explicados o justificados y efectivamente conlleven a validar la conjetura; como se observa en la interacción 66 a 68, en la que la profesora llama la atención de Darío al mencionar un punto P' que no fue dado en el problema, conllevando a la justificación del mismo para poder usarlo en la validación.

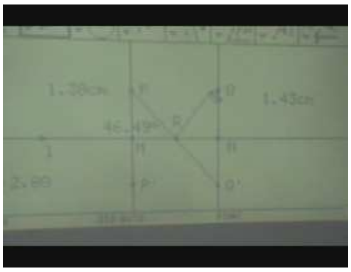
*Fragmento 3*

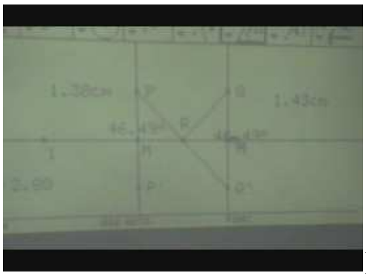
Luego de que Darío valida su conjetura, la profesora procede a mostrar cómo el punto R encontrado mediante las caracterizaciones presentadas en la clase anterior, es el mismo. Para ello usa la construcción realizada por Darío y Leopoldo, ya que esta construcción es robusta y la va modificando según las caracterizaciones dadas por los otros grupos, para luego dar los pasos claves que validen las otras caracterizaciones. La esencia de la siguiente interacción es mostrar que el punto R caracterizado por el grupo de Henry es el mismo punto R, caracterizado por Darío y Leopoldo; esta interacción representa el análisis realizado con cada una de las caracterizaciones.

| | | |
|---|---|---|
| 76 | P: | […][33] Entonces ahora viene la propuesta… de… Henry. Henry dice que el ángulo… entre otras esta es una regla… una ley de la física, ¿no? de… de luz ¿cierto? que ¿dice qué? [muestra la figura de Henry  ] |
| 77 | Daniel: | el ángulo de incidencia es igual al ángulo de reflexión. |

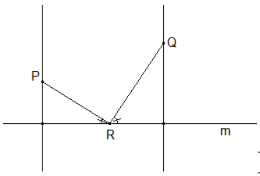
[33] La profesora recuerda a los estudiantes la finalidad de la clase: comprobar si el punto R que propusieron los estudiantes es el mismo.

78 P: reflexión… el ángulo de incidencia que es éste [señala el ángulo 1] es igual al ángulo de reflexión [señala el ángulo 2]. Que un rayo de luz cae y se refleja con el mismo ángulo si? y si tratamos de mover ahí [se refiere a la construcción realizada de la conjetura de Darío y Leopoldo] para que eso suceda [la congruencia de los ángulos 1 y 2] si… que les dije que la construcción de Henry tiene un problema que yo con lápiz y papel difícilmente puedo… hacer… encontrar a la R, que con geometría dinámica sí puedo fácilmente, pero que con lápiz y papel es un poco difícil encontrar a R de esa forma. Pero… es cierto lo que dice… [Mide los ángulos en la construcción de Leopoldo y Darío





] y vemos que sí… y entonces me pregunté yo: bueno, ¿cómo yo lo demuestro? Claro, yo teóricamente no tengo que encontrarlo… yo teóricamente digo si R es el punto tal que el ángulo de incidencia sea igual al ángulo de reflexión, entonces la distancia… la suma de esas distancias es mínima. O sea que voy a empezar a... a tratar de demostrar ese teorema; tengo a [punto] P, a la recta *m*, a [punto] Q [en el tablero representa una recta *m*, dos puntos P y Q en el mismo semiplano y las rectas perpendiculares a la recta m, que pasa por éstos puntos] y he encontrado a R, tal que este ángulo y este ángulo son congruentes [ángulos 1 y 2 de la construcción de Henry][hace una gráfica como la siguiente



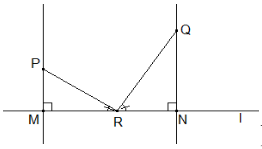

].

Quiero mostrar que R realmente es el punto para el cual la suma de esas distancias es mínima, ¿cómo hago?, sin usar la demostración de Darío, ya aquí mostré que… coinciden [las construcciones y la congruencia de los ángulos], pero ¿cómo lo demuestro así? ¿Qué está dado?

[…][34]

82 P: […] entonces tenemos qué el ángulo… PMR es congruente a [ángulo] QNR [por ser ángulos rectos] y que éstos dos ángulos son congruentes [ángulos PRM y QRN] [es lo

[34] Interacción entre la profesora y algunos estudiantes para reconstruir la conjetura propuesta por Henry.

que encontró explorando 

].

¿Cómo demuestro que PR más RQ es lo mínimo? [pausa] basándome en… en lo que ya sé, por ejemplo. [pausa] ¿Qué se les ocurre? [pausa] ¿Qué dices?

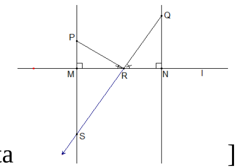
[…][35]

90 P: O sea, ¿de dónde nació R?; nació de… de construir éste segmento congruente a éste [PM y MP’] y son colineales, P’, R y Q son colineales, ¿sí? Entonces si yo puedo… se me ocurre a mí… mostrar, de alguna manera llegar a un punto P’ que cumple esta característica, que equidista de M y que está en la misma recta de Q y R…

91 María: Rayo opuesto a QR.

92 P: usando solamente lo que yo tengo. Entonces, el rayo opuesto a QR ¿Qué pasa si construimos el rayo opuesto a QR como dice María?

93 María: a [rayo] RQ.

94 P: a [rayo] RQ, sí; éste [traza en el dibujo el rayo RQ], busco esta intersección [con recta PM], la llamamos S. [se hace una representación como ésta 

]

95 Estudiante: Tiene los ángulos congruentes.

96 P: ya, como dice María tan pronto yo le dije lo de la colinealidad, ella se ocurrió el rayo opuesto, ya me encargué de una de las condiciones que yo requiero. Lo único que me falta es mostrar que S cumple la otra [condición], que la distancia a M es la misma que de P a M.

97 Melisa: Ya está profe,

98 P: ¿ya está? ¿por qué?

99 Melisa: si profe porque mire que por rayos opuestos que el rayo RN es opuesto a RM…

100 P: sí.

101 Melisa: y miramos que [rayo] RQ es opuesto a [rayo] RS;

102 P: Sí.

103 Melisa: por definición de ángulos opuestos por el vértice… pues ahí ya están los ángulos opuestos por el vértice y por el teorema miramos que son congruentes, entonces ya tenemos lado, ángulo y ángulo. No perdón, ángulo, lado, ángulo [Congruencia entre los triángulos PMR y SMR].

[35] Interacción entre la profesora y algunos estudiantes en la que se concreta qué se debe validar.

| | | |
|---|---|---|
| 104 P: | | Y ¿éste? [señala los segmentos SM y MP y les hace dos líneas para indicar la congruencia entre ellos]. |
| 105 Estudiantes: | | Congruentes. |
| 106 P: | | Y ya mostramos que bajo esas condiciones eso nos da la misma distancia. Muy Bien. […][36] |

En este episodio observamos dos interacciones, en la primera la profesora *verifica geométricamente la conjetura* Henry. Para ello usa la construcción de Darío y Leopoldo realizada previamente en Cabri y mide el ángulo de incidencia y el ángulo de reflexión para comprobar que tienen la misma medida [78]. Al verificar que los ángulos tienen la misma amplitud la conjetura es aceptada y la profesora promueve la validación de la misma.

En la segunda interacción se procede a *verificar* colectivamente *la conjetura* de Henry. Para ello, la profesora explica qué se quiere demostrar y qué es lo dado; además realiza una representación gráfica que facilite comunicar la conjetura y la verificación a realizar [78]. Aunque la profesora ha resaltado qué es lo dado y qué es lo que se quiere demostrar, los estudiantes no tienen una respuesta inmediata para validar la conjetura, por lo que ella en las líneas 82 y 90 insiste en algunas de las condiciones dadas y *da* algunas *pistas* relacionadas con el camino a seguir [90], como es llegar al punto P' encontrado por Darío y Leopoldo. Gracias a la pista que da la profesora, María da una *idea* que es *impulsada* por la profesora [91 - 94] y que conlleva a verificar la conjetura mediante las propiedades del rayo opuesto, de los ángulos opuestos por el vértice y del criterio de congruencia de triángulos ángulo – lado – ángulo [95 - 106].

*Fragmento 4*

La profesora plantea a los estudiantes la conjetura de Germán y Ana para que busquen un contraejemplo que permita rechazar la conjetura. Melisa pasa al tablero y realiza una representación a mano alzada, que aparentemente es un contraejemplo a la conjetura en estudio, pero que no puede ser aceptado pues los objetos geométricos empleados en la construcción no satisfacen las características de los mismos. Nancy e Ignacio realizan una

[36] Se hace un proceso similar para determinar la veracidad de la otra conjetura que requiere geometría dinámica.

verificación geométrica de la conjetura en la calculadora, que permite rechazar la conjetura y la presentan a sus compañeros.

| | | |
|---|---|---|
| 106 | P: | […][37] Y lo último que quiero es mirar la propuesta… de Germán y Ana. ¿Por qué llegan ellos a esa conjetura?, es mi pregunta [Muestra en el acetato la conjetura de Germán y Ana]. Dicen: R se encuentra en el punto de corte de la mediatriz del segmento PQ con la recta *l*. Digo, por qué llegan ellos a eso… porque hemos visto que… dos de los grupos pusieron condiciones más sencillas o más especiales, y llegaron a un punto R que, bajo estas condiciones, son válidas. Pero, Germán y Ana no me reportan si hay más condiciones o no. A pesar de eso, ellos llegaron a una conjetura. Entonces mi pregunta es: ¿es siempre falsa? ¿Hay momentos en que es verdadera? Entonces ya les toca a ustedes con la calculadora ver si encuentran. |
| 107 | Daniel: | Cuando [los puntos P y Q] están a la misma altura sí. |
| 108 | P: | ¿Cuándo están a la misma altura? ¿Entonces se cumple que R es el punto de corte de la mediatriz del segmento PQ? Pues puede ser… miren a ver… si es que ellos también usaron eso, o sí… ¿Ana no se acuerda [Germán no asistió]? |
| 109 | Ana: | Pues es que, básicamente la conjetura es por construcción |
| 110 | P: | La construcción que hicieron |
| 111 | Ana: | Sí. |
| 112 | P: | ¿Pero no te acuerdas qué condiciones pusieron? |
| 113 | Leonor: | No, ninguna, ellos tenían a P y Q, cualquiera. |
| 114 | Ana: | P y Q no eran |
| 115 | P: | O sea para cualquier P y Q, ¿no había ninguna condición? ¿Y será cierto para cualquier P y Q? |
| 116 | Estudiantes: | No… no |
| 117 | Ana: | No dados… No, fijos eran P y Q |
| 118 | P: | P y Q, ¿pero P y Q estaban en cualquier posición? |
| 119 | Ana: | En el mismo semiplano. |
| 120 | P: | Sí. |
| 121 | Ana: | Sí, cualquier punto. |
| 122 | P: | Las mismas distancias, las distancias podrían ser cualquier par. Entonces, ¿quién tiene un contraejemplo? Porque me están diciendo que disque no es posible. |
| 123 | Daniel: | ¿Es la perpendicular y que pasa por el punto medio? |
| 124 | P: | Esa es la definición de mediatriz, sí. ¿Quién me puede mostrar un…? |

[37] Se hace un proceso similar para determinar la veracidad de la otra conjetura que requiere geometría dinámica.

125 Melisa: Sería a mano.

126 P: Bueno, a mano. [Melisa pasa al tablero]

127 Melisa: Pues según lo que hemos demostrado con los otros grupos.

128 P: Sí…

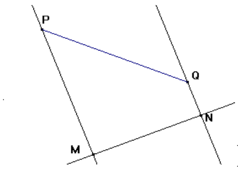
129 Melisa: Digamos que este es un segmento. Y sería acá.

130 P: P y ahí Q.

131 Melisa: Entonces trazamos acá… acá, y acá [dos rectas perpendiculares al segmento inicial].

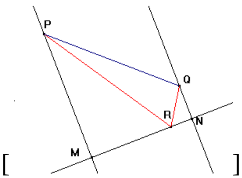
132 P: Las perpendiculares. Pero ponme P y Q porque si no cómo vamos a hablar el mismo idioma.

133 Melisa: Ponemos acá a P y acá a Q [en el mismo semiplano, cada punto en una recta perpendicular].

134 P: Más exagerado aún [la diferencia de distancias de P y Q a *l*][ 

] Bueno.

135 Melisa: Entonces, tomamos más o menos la medida [del segmento al punto Q] y trazamos acá [en el semiplano que no contiene al punto Q y sobre la recta perpendicular que contiene a Q]. [Melisa traza el segmento cuyos extremos son los puntos P y el punto encontrado y traza el punto de intersección entre éste segmento y el segmento inicial]

136 P: Y ese es R, este es R [ 

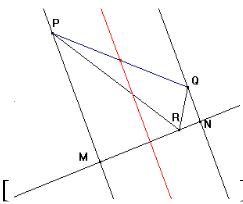
]

137 Melisa: Si Profe, este sería R y éste no es el punto medio [muestra el segmento MN].

138 P: No, del segmento PQ.

139 Melisa: ¿O sea de éste? [muestra PQ]

140 P: Sí, están diciendo que miremos el… punto, el punto medio del segmento PQ y la proyección.

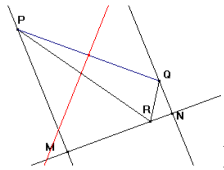
141 Melisa: ¿Entonces sería así? [ 

] ¿o así?

142 P: La mediatriz…

143 Melisa: ¿sería así?

144 P: Ah, sí, la mediatriz.

145 Melisa: Entonces, ¿quedaría por acá? [ 

]

146 P: Sí. Pero yo no sé si tu dibujo es posible… Bueno.

147 Melisa: Sería así

148 P: Por eso es que la calculadora es útil. Porque puede que ella... Esas líneas… son torcidas… y entonces le dé por fuera porque las torció. Por eso es mi pregunta… P y Q es la mediatriz del segmento PQ. Es el corte de la mediatriz del segmento PQ con la recta *l*. […] ¿Quién tiene un ejemplo… o contraejemplo? […][38]
PQ… queda por fuera ni si quiera queda adentro. [la mediatriz de PQ no corta en el segmento MN]

149 Ignacio: Esta es la mediatriz.

150 P: Bueno... pasa a ver. O sea que parece que la propuesta de Melisa, ya bien hecha… [se ríen] ya bien hecha, también funciona [Nancy ha hecho la construcción con Ignacio, conecta su calculadora al video screen]. Bueno, aquí muestra… aquí muestra Nancy, que… Nancy muestra

151 Nancy: Aquí [la mediatriz] quedaría en el segmento [arrastra P hasta que la mediatriz corta al segmento MN].

152 P: Bueno, primero mostremos el contraejemplo. Contraejemplo… [Nancy mueve MN hasta que el corte de la mediatriz de PQ se sale del segmento MN], ni siquiera queda dentro del segmento de… de las proyecciones… MN. Y bueno, vamos a ver en qué condiciones, de pronto sí se tendría. Entonces vamos a ver... [Nancy mueve P buscando que la mediatriz corte a MN en R] […]

153 Daniel: Cuando están a la misma altura.

154 P: Cuando están a la misma altura parece que sí… P y Q. ¿Sí? Entonces, lo que pasa cuando trabajamos con geometría dinámica es eso. Que a veces se nos olvida poner en nuestras conjeturas todas las condiciones que estamos viendo. Porque es muy posible que lo que ellos vieron fue cierto, pero no identificaron las demás condiciones. Entonces el teorema que proponen no es cierto porque faltan todas las condiciones.

[38] Se habla de un parcial que deben realizar en la clase.

En este fragmento la profesora invita a los estudiantes a revisar con la ayuda de la calculadora en qué momentos y bajo qué condiciones la conjetura es verdadera y a determinar si la falsedad de la conjetura se da siempre, aunque la profesora sabe que la conjetura no es cierta [106]. Daniel se anticipa afirmando la certeza de la conjetura cuando los puntos P y Q tienen como condición, estar a la misma distancia de la recta, por lo que la profesora invita nuevamente a los estudiantes a revisar bajo qué condiciones la conjetura es cierta [107 - 108] y promueve una interacción con la que pretende que Ana describa la construcción hecha, para ver si impuso condiciones adicionales a las expuestas en la conjetura [108 – 122]. Cuando se concluye que Ana no puso condiciones adicionales, la profesora permite que Melisa haga una posible *verificación geométrica de la conjetura*, aunque sea a mano.

Mientras Melisa presenta su propuesta, la profesora vigila y garantiza que la representación geométrica que Melisa está realizando en el tablero presente lo dicho por Ana en la conjetura [129 - 146]. Aunque la representación hecha por Melisa incluye los objetos geométricos incluidos en la conjetura de Ana, dicha representación no permite aceptar o rechazar la conjetura, ya que al ser a mano alzada no garantiza todas las propiedades de los objetos geométricos involucrados; por lo que la profesora nuevamente invita a los estudiantes a verificar geométricamente la conjetura [148].

Nancy realiza la propuesta de Melisa usando geometría dinámica, lo cual le permite presentar un contraejemplo de la conjetura, pues el punto R encontrado por Ana no es el punto que garantiza la suma mínima [150 - 152], rechazando así la conjetura propuesta por Ana y Germán. Ante el hecho de observar que la conjetura posiblemente sea válida cuando los puntos P y Q están a la misma distancia de la recta *l*, la profesora llama la atención sobre la importancia de ser más cuidadosos al momento de plantear una conjetura, para no olvidar explicitar todas las condiciones que garanticen su veracidad [152 - 154].

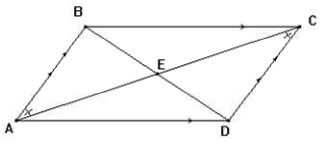
## ANEXO II. TRANSCRIPCIONES

A continuación se muestran las nueve transcripciones de los episodios seleccionados, en el mismo orden en que fueron presentados los informes descriptivo-interpretativos. La primera transcripción corresponde al informe descriptivo-interpretativo presentado en el capítulo de resultados.

### DEMOSTRACIÓN “SI UN CUADRILÁTERO ES PARALELOGRAMO ENTONCES LAS DIAGONALES SE BISECAN”

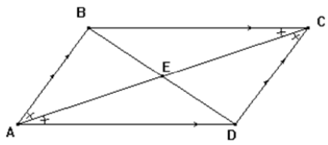
| | | |
|---|---|---|
| 01 | P: | Pues ABCD, hay que nombrarlo o sino ¿cómo vamos a definirlo? |
| 02 | Leopoldo: | Tenemos el cuadrilátero ABCD. Entonces trazamos las diagonales. |
| 03 | P: | Sí. |
| 04 | Leopoldo: | Entonces, por ángulos alternos internos entre paralelas… el ángulo… éste… es congruente con… |
| 05 | P: | Sí. Vamos a hacer una cosa Leopoldo. Vamos a escribir todos los pasos. Todos los pasos. Entonces, primer paso, ABCD es paralelogramo. Cuadrilátero… cuadrilátero ponemos un… |
| 06 | Nancy: | El símbolo. [Leopoldo escribe: 1. □ ABCD es paralelogramo] |
| 07 | P: | ABCD es paralelogramo. |
| 08 | Ignacio: | Paralelogramo. |
| 09 | P: | Entonces, ¿qué sabes? |
| 10 | Leopoldo: | Tengo que decir: sean las diagonales ¿no? [Escribe: 2. Sean $\overline{AC}$ y $\overline{DB}$ las diagonales] Sean AC y BD… [Luego escribe: 3. $\angle CAD \cong \angle BCA$] |
| 11 | P: | Y BD, las diagonales. CAD con… ¿Están de acuerdo que ese sería el tercer paso en esa demostración? |
| 12 | Ignacio: | Son alternos internos. |
| 13 | Nancy: | Lo primero que… aprovechar la definición de paralelogramo. |
| 14 | P: | Sí, hay que aprovechar. O sea que ¿cuál es el paso anterior? |
| 15 | Ignacio: | Que son paralelas. |
| 16 | P: | Que A… |
| 17 | Ignacio: | Que AB y CD son paralelos. |
| 18 | P: | ¿Quiénes son las paralelas? |
| 19 | Ignacio: | AB y DC [Leopoldo cambia el paso 3 por: 3. $\overline{AB} \parallel \overline{CD}$ y $\overline{BC} \parallel \overline{AD}$ ]. |
| 20 | P: | Bueno, por eso le estoy pidiendo que la escriba. Porque vamos a poner todos los pasos que realmente tienen que estar. Entonces, ésto está dado [paso 1]. Ésto es definición de |

diagonal [paso 2], bueno, y existencia… postulado de la recta y todo eso, ¿no? Y ésto [paso tres] es definición de paralelogramo, entonces puedes decir que los ángulos son congruentes porque son alternos internos [Queda como paso cuatro: 4. $\angle CAD \cong \angle BCA$ .

La figura va así: 

] Bien. [Leopoldo escribe: 5. $\angle ACD \cong \angle BAC$ ]

21 Leopoldo: Así.

22 P: Sí. Noten que es el mismo teorema, pero con otro par de lados paralelos. Ojo con eso, porque hay que estar seguros de que tenemos las paralelas correspondientes. Bien. [Leopoldo complementa la figura: 

] O sea que ángulo, triángulo DAC congruente con BCA, ¿De acuerdo?

23 Estudiantes: Sí.

24 P: ¿Por?

25 Estudiante: Lado – ángulo…

26 Leopoldo: Ángulo - lado - ángulo. [Escribe: 8. $\overline{AB} \cong \overline{CD}$ y $\overline{BC} \cong \overline{AD}$]

27 P: Ángulo-lado-ángulo. Aja. Que era lo que queríamos mostrar ahorita. Que si…

28 Ignacio: ¿Qué?

29 P: Ahorita. Que si es paralelogramo… ¡ah!, ¡no!… si las diagonales se bisecan…

30 Leopoldo: Tengo que demostrar que las diagonales se bisecan.

31 Nancy: Eso fue lo anterior.

32 P: Sí, sí, sí. Pero lo que has mostrado es otra cosa. Si es paralelogramo, los lados opuestos son congruentes.

33 Germán: Sí. Pero de ahí también sale, también sale…

34 Nancy: Termina esa demostración…

35 Estudiante: Siga hermano.

36 Leopoldo: Hasta ahora va que los lados opuestos son congruentes y yo estoy tratando de mostrar que las diagonales se bisecan.

37 P: Sí, estás tratando de mostrar que las diagonales [de un cuadrilátero] se bisecan. Estás tratando de demostrar que si el cuadrilátero es un paralelogramo, las diagonales se bisecan.

38 Ignacio: Por eso.

39 Leopoldo: Sí, pero es que no sé como… ¿yo cómo sé que las diagonales se intersecan?

40 P: ¡Ah! Una pregunta muy buena ¿Cómo sabemos que las diagonales en un paralelogramo se cortan?

41 Estudiante: Porque el interior del cuadrilátero es convexo.

42 P: ¿Por qué el cuadrilátero es convexo?

43 Estudiante: El interior del…

44 P: ¿Y esa es la definición de convexo?

45 Estudiante: El interior.

46 Ignacio: El interior del cuadrilátero es convexo. Dados dos puntos, todos pertenecen al interior del… O sea, por decir la diagonal AC, los puntos A y C, toda la diagonal pertenece al interior del… cuadrilátero. Porque ahí están… Y B y D están a lados opuestos también.

47 P: La diagonal, excepto los …

48 Ignacio: Ah sí, los…

49 P: Los extremos.

50 Leopoldo: Profe, tenemos que demostrar que un paralelogramo es un cuadrilátero convexo ¿no?

51 P: Tendríamos que demostrar que es un cuadrilátero convexo si queremos usar eso. [Varios hablan al tiempo sobre el asunto, pero son se comprende lo que dicen]

52 Germán: Pero es que… O sea, yo tengo una pregunta: ¿Simplemente no digo que E sea el punto de intersección o que E sea el punto de corte de las diagonales? Yo asumo… O no asumo, sino que no… simplemente no tomo esa característica, sino que hablo por ejemplo de los otros dos ángulos y hago la congruencia entre los triángulos. Entonces, simplemente como necesito saber que se bisecan, entonces demuestro eso. ¡Ah! pero después si debo demostrar la intersección de las diagonales. [Todos se ríen]

53 P: No pues sí. Pero hemos asumido, hemos asumido en todo ésto que las diagonales del paralelogramo…

54 Germán: Si se cortan.

55 P: O del cuadrilátero se están cortando. Pero es una pregunta muy importante, ¿será que si se cortan? ¿Tenemos una forma de demostrar que realmente se cortan? Es otra cosa que voy a dejar en el aire, ¿sí?

56 Ignacio: Profe, si se puede.

57 P: ¿Cómo demostrar que las diagonales se cortan?.

58 Ignacio: Por eso dije que… Por eso yo me atreví a decir que el interior del paralelogramo es convexo. Sí, porque… y después sería decir que el segmento BD, exceptuando los puntos B y D está en el interior de ese paralelogramo. Y lo mismo con el segmento AC,

entonces… como todo está en el interior del… del… como todos los segmentos están en el interior del paralelogramo, entonces la interse… entonces la intersección también estaría ahí, pero no sé cómo…

59 P: Pero es que, ¿quién dijo que se tienen que cortar?

60 Germán: Pues es que…

61 Estudiante: En el paralelogramo pues da, pero al hablar de…

62 P: Si se cortan… sí. Pero, ¿si no? Yo puedo tener dos segmentos en el interior que no se corten.

63 Germán: En el interior de…

64 P: Sí, estamos tratando de mostrar.

65 Ignacio: Únicamente en el secante, pero no hay necesidad de que se corten.

66 P: De que se corte. Entonces nos queda esa gran interrogante. Y muy bueno que me la hayas recordado. Vamos a suponer que si, por ahora. Pero nos queda por demostrar eso, porque todo depende de eso. Es otra cosa que tenemos que ir pensando. Entonces, digamos que sí… se cortan.

67 Leopoldo: Entonces… eh… Tenemos que decir que el ángulo es congruente... [Escribe: 9. $\angle ABD \cong \angle BCD$]

68 Ignacio: Profe, profe, profe…

69 Nancy: Si decimos que el paralelogramo es un conjunto convexo, quiere decir que no hay dos…

70 P: Pero no lo hemos demostrado.

71 Nancy: ¿Entonces no lo puedo usar todavía?

72 P: Pues no hemos demostrado que el paralelogramo es un conjunto convexo.

73 María: Y hay segmentos que no se cortan dentro del paralelogramo.

74 P: Henry.

75 Henry: Es que si tenemos los dos ángulos opuestos, entonces supongamos que… Bueno, supongamos que la bisectriz del ángulo A es la… es…

76 Darío: ¿Bisectriz?

77 Henry: La bisec… la bisectriz.

78 P: ¿Del ángulo A?

79 Henry: La bisectriz del ángulo…

80 P: No hemos hablado de bisectrices todavía.

81 Darío: La diagonal.

82 Henry: No, la bisectriz.

83 P: Pero no hemos hablado de bisectriz.

84 Henry: Es que yo quiero decir que A y C están en puntos de lados opuestos de un ángulo, ¿cierto? Entonces el segmento AC, va a cortar a la bisectriz de… mejor dicho, al rayo DB.

85 P: Ah… acá. ¿Estás mirando el ángulo ADC?

86 Henry: Sí.

87 P: A y C están en lados opuestos, en lados distintos de…

88 Henry: De ese ángulo.

89 P: De este ángulo. Sí.

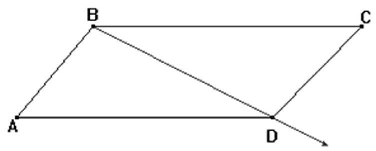
90 Henry: Y entonces, se va… Pues por el teorema, se va a cortar con la bisectriz del ángulo ADC.

91 P: Con, con la…

92 Henry: O bueno, con todo rayo que parta… que esté en el interior… que parta de…

93 P: Con cualquier… semirrecta… que parta de…

94 Germán: Del vértice.

95 P: Del vértice. Va a cortar el segmento que une dos puntos de los lados. [Hace una figura como: 

] Muy bien, esa es.

96 Henry: Y como lo mismo pasa con el otro. Pues la intersección de esos también lleva a que se cortan.

97 P: Ya mostramos que se cortan. O sea, esta diagonal [AC] está cortada por ésta otra [BD]. Porque es una semirrecta que… muy bien. Entonces, sí se corta. Gracias Henry. Ahí estaba la respuesta. Las diagonales de ese cuadrilátero se cortan.

98 Ignacio: No, no, no.

99 P: [La profesora observa lo que ha dicho Leopoldo] E es el punto medio de…

100 Ignacio: No lo puede decir. Todavía no.

101 P: ¿Por qué no?

102 Ignacio: Porque eso es con medidas, no con congruencia, no con lados congruentes sino con medida.

103 Germán: Para que complete…

104 P: Que porque hay que demostrar que las medidas son la misma. O sea, que pases esto a medidas. AE = EC. [Leopoldo corrige el paso 12: 12. AC = EC] ¿Y falta?

105 Nancy: La interestancia.

106 P: La interestancia. [Leopoldo incluye un nuevo paso: 13 A-E-C]. Sí, pero para poder decir esa interestancia, ¿Entonces qué necesitábamos?

| | | |
|---|---|---|
| 107 | Nancy: | Que se cortan. |
| 108 | Estudiante: | Con lo que dijo él. |
| 109 | P: | Con lo que dijo él [Henry]. O sea, primero que se cortan AC y… |
| 110 | Leopoldo: | BD |
| 111 | P: | Y BD. Claro que lo que me dice Henry es que la semirrecta DB, intersección el segmento AC es diferente al vacío. [Escribe entre los pasos 12 y 13: $\overline{BD} \cap \overline{AC} \neq \emptyset$] La semirrecta, más no... |
| 112 | Henry: | Por eso yo le decía lo del opuesto, lo del ángulo opuesto. Porque es la intersección de las dos rectas ahí, más o menos... |
| 113 | P: | O sea, ¿qué ángulo miro ahora? |
| 114 | Henry: | El ángulo ABC |
| 115 | P: | ABC |
| 116 | Germán: | Sí. |
| 117 | Henry: | Y entonces… |
| 118 | P: | Ah. Entonces si miramos el ángulo ABC tendríamos que la semirrecta… Ah, es que aquí es DB. |
| 119 | Estudiantes: | Sí, DB. |
| 120 | P: | DB. Y aquí tendríamos la semirrecta… |
| 121 | Germán: | DB |
| 122 | P: | BD |
| 123 | Germán: | intersección |
| 124 | P: | Intersección con el segmento AC |
| 125 | Germán: | No es vacío. |
| 126 | P: | No es vacío [Escribe al lado de la otra intersección: $\overrightarrow{DB} \cap \overline{AC} \neq \emptyset$] y eso nos debe llevar a que los dos segmentos se cortan. Porque la intersección de éstas dos semirrectas es el segmento. Entonces, poder concluir que esto no es vacío. Sí señor, tocaba usar ambas. ¿Sí? Bueno. |
| 127 | Leopoldo: | Pues ahí… Sea E el punto de intersección de los segmentos. [Escribe: 14. E es el punto medio de AC 15. $\{E\} = \overline{AC} \cap \overline{BD}$] |
| 128 | P: | Sí. E es el punto de intersección de los dos segmentos. |
| 129 | Leopoldo: | Sea E… |
| 130 | P: | Sí, por definición. |
| 131 | Leopoldo: | ¿Y eso lo escribo acá? |

132 P: Eso lo meti… Lo debiste haber metido acá [Entre los pasos 9 y 10] ¿cierto? Porque aquí fue donde lo introdujiste. O sea, esta discusión [lo que se refiere a las intersecciones] en realidad viene acá. Porque tú vas a decir, entonces sea E igual a la intersección de los dos segmentos. Y entonces ahora sí, tiene la interestancia, tiene la igualdad y tiene que es punto medio del segmento AC. Y así hace con el otro. Gracias Leopoldo. O sea que, definitivamente, logramos demostrar que la conjetura era cierta.

## DEMOSTRACIÓN "SI DOS ÁNGULOS SON OPUESTOS POR EL VÉRTICE, ENTONCES SON CONGRUENTES"

| | | |
|---|---|---|
| 01 | P: | Vamos a hacer el siguiente plan. Wilson va a escribir solamente las afirmaciones, y verbalmente vamos a decir cuáles son las justificaciones, ¿bien? **[**Wilson pasa al tablero y escribe: AFIRMACION, 1. $\angle ABC$ ] |
| 02 | Efraín: | Profe, una pregunta. |
| 03 | P: | No. Ángulo uno y ángulo tres, para que nos rinda el tiempo [Wilson borra $\angle ABC$, y escribe $\angle 1$ y $\angle 3$]. ¿Quién tiene una pregunta? |
| 04 | Efraín: | Profe, pues no sé si esté en un error, pero… ¿Cómo hace para saber que el ángulo, si lo nombramos con número, ese número no se está refiriendo a una medida? |
| 05 | P: | ¡Ah! Eso es una buena pregunta. Bueno, en el diagrama no vamos a poner medidas, primera cosa. |
| 06 | Efraín: | Medida de ángulo. ¿Cierto? |
| 07 | P: | Sí. Entonces, si yo quiero hablar de la medida, lo tengo que escribir, medida del ángulo uno. ¿Sí? Y entonces se refiere al ángulo. Entonces, cuando está en el interior del ángulo es porque estamos hablando de ese ángulo, el número. 1 y 3 son opuestos por el vértice… |
| 08 | Varios: | Dado. |
| 09 | P: | Dado. Sí, tu no las escribes [la justificación], ellos las van a decir. Sí, te vamos a ayudar. Dos. |
| 10 | Wilson: | Ahora necesitamos obtener la medida del… de algún ángulo… de los dos ángulos, de uno de los dos ángulos, para que al sumarlos de 180. Entonces eso lo sabemos mediante el… mediante la definición de… este postulado. ¿Qué más necesitamos? El otro ángulo, el que nos forme 180. |
| 11 | P: | Sí. |
| 12 | Efraín: | El par lineal. |
| 13 | Wilson: | El par lineal. |

| | | |
|---|---|---|
| 14 | P: | Sí. |
| 15 | Wilson: | Entonces ese lo ubicamos mediante… mediante la definición. |
| 16 | María: | Y el ángulo… |
| 17 | P: | Es lo único que puedo usar, pero ¿qué necesito para poder declarar que está en el par lineal? |
| 18 | Wilson: | Que son rayos opuestos. Que los rayos son opuestos y que un punto del otro… |
| 19 | P: | Del otro rayo no está en la recta. |
| 20 | Wilson | Del otro rayo no está en la recta. |
| 21 | P: | Entonces lo primero que vas a tener que decirme es ¿qué? |
| 22 | María: | Que son opuestos. |
| 23 | Wilson: | Que son… El ángulo 1 y el ángulo 2… |
| 24 | P: | ¡No! |
| 25 | María: | Eso es una conclusión Wilson. |
| 26 | P: | Exactamente, eso es lo que tú quieres concluir, pero ¿qué elementos necesito para poderlo decir? Me lo acabas de decir. |
| 27 | Wilson: | Ah ya. El rayo |
| 28 | P: | **¿**AB? |
| 29 | Wilson: | Y el rayo BD |
| 30 | P: | ¿AB y BD? |
| 31 | Wilson: | ¿Y BD? y BE |
| 32 | P: | AB, AB es éste. |
| 33 | Wilson: | BA, BA, BA. |
| 34 | P: | BA y… |
| 35 | Wilson: | DE |
| 36 | P: | Son… opuestos [Wilson escribe: 2. $\overrightarrow{BA}$ y $\overrightarrow{BE}$ son opuestos] ¿cómo lo sabes? ¿cómo lo sabe él? ¿Construcción? |
| 37 | Varios: | Definición de ángulos opuestos. |
| 38 | P: | ¿Definición de…? |
| 39 | Alguien: | Ángulos opuestos. |
| 40 | P: | No de rayos opuestos. De… |
| 41 | Alguien: | Ángulos opuestos. |
| 42 | P: | Ángulos opuestos por el vértice. Lo que está dado son los ángulos. ¿Sí? Y la definición me dice que tiene… forman dos pares de rayos opuestos. Y… Wilson está cogiendo un par, de rayos opuestos. Entonces, por definición de ángulos opuestos por el vértice. Bueno, ¿qué más necesito? |
| 43 | Wilson: | Ahora… ¿Ahora si la medida? |

| | | |
|---|---|---|
| 44 | P: | No, tú dijiste que los querías declarar par lineal. |
| 45 | Wilson: | A pues el punto C… |
| 46 | P: | Necesitamos un punto… |
| 47 | Wilson: | Que no esté… |
| 48 | P: | Que no esté en la recta. ¿Quién? ¿Quién va a ser? |
| 49 | Wilson: | C |
| 50 | P: | ¿C? |
| 51 | María: | B, B. |
| 52 | Wilson: | B ya está. |
| 53 | P: | Bueno, puede ser C o D, pero tú habías dicho que ibas a usar éstos. [señala 1, 2 y 3] |
| 54 | Wilson: | Bueno, sí. |
| 55 | P: | D ¿y cómo puedes estar segura que D no está en esa recta? [Wilson escribe: 3. $D \notin \overleftrightarrow{AB}$] |
| 56 | Luz: | Por… |
| 57 | Julián: | Por la misma definición de ángulos opuestos… |
| 58 | P: | ¿Por qué? ¿qué? |
| 59 | Julián: | Únicamente son dos pares de ángulos, de rayos opuestos. |
| 60 | P: | Son dos pares de rayos opuestos. Luego, necesito eso también ¿cierto? Entonces, en el paso dos, en el paso dos, Wilson me debe poner ambas cosas [completa en paso dos con otro color escribiendo: $\overrightarrow{BD}$ y $\overrightarrow{BC}$ opuestos]. |
| 61 | Alguien: | AB o BC. Ah no. |
| 62 | P: | Y BD, y BC opuestos. ¿Y eso me va a asegurar que D no esté en recta AB? |
| 63 | Julián: | Puedo decir que BD como no es opuestos con BE o BA… |
| 64 | Alguien: | Sí, si claro. |
| 65 | P: | BD no es opuesto con BA. O sea, ahí lo que está jugando un papel importantísimo es… esta palabra: “dos pares” [de la definición de ángulos opuestos por el vértice]. Dos pares, porque eso me está diciendo que D y C no pueden estar en la misma recta. En la misma recta AE o AB, porque entonces no serían otro par ¿sí? Entonces es el “dos” que juega un papel importante ahí, porque me asegura entonces que el punto no puede estar en la recta. Bueno, eso sería un poco complicado escribir todo eso, pero entonces lo vamos a poner: D no pertenece a recta AB por definición, vamos a decir de par lineal, de opuestos por el vértice. Ya, tengo un punto, y ahora si puedes decir que estos dos ángulos ¿cuáles? |
| 66 | Wilson: | Ángulos 1 y 2 son par lineal. [Escribe 4. $\angle 1$ y $\angle 2$ son par lineal] |
| 67 | P: | Entonces 1 y 2 son par lineal. ¿1 y 2 son los que está declarando él que son par lineal? |
| 68 | Wilson: | Si |
| 69 | Ana: | 2 y 3 |
| 70 | P: | 2 y 3, ¿cierto? ¿por qué? |

71 Ana: Porque él estaba hablando de rayos opuestos.

72 P: Porque él está tomando estos rayos opuestos y este punto no. Entonces 2 y 3, 2 y 3 [Wilson corrige] Estos rayos opuestos y este punto no. Tiene un par lineal, ¿de acuerdo? 2 y 3. Bien.

73 Wilson: Ahora si podemos decir que las medidas. O sea, podemos usar este postulado.

74 P: Ahora usamos el postulado del par lineal…

75 Wilson: Postulado del par lineal, para decir que la medida…

76 P: Que la suma de las medidas es 180. La medida de ángulo 2 y la medida de ángulo 3… Ojo, Wilson se acordó cómo se simboliza la medida de… Es 180, postulado del par lineal. Bueno, ¿y? ¿y qué más?

77 Julián: Por el postulado, la medida del ángulo uno y la medida del ángulo dos debe medir 180.

78 P: Necesito conseguir…

79 Julián: Otro par lineal.

80 P: Otro par lineal. Y entonces ¿qué ingredientes necesito?

81 Ana: Pues otro punto que no pertenezca al…

82 Julián: Otro punto que no pertenezca a la otra recta, a la otra recta. [Wilson escribe C $\notin$ ].

83 P: ¿C?

84 Wilson: Sí.

85 P: ¿Es el que quieres?

86 Leopoldo: A

87 Ana: E

88 Leopoldo: Está hablando de A, tiene que poner a A.

89 P: ¡Ah! A es el punto que queremos decir que no está en la recta [Wilson corrige 6. A $\notin \overleftrightarrow{DC}$ ] Entonces ángulo 1 y ángulo 4 son par lineal, por definición ¿y? Todo bórralo. Y ahora ¿cuál es el siguiente paso?

90 Wilson: Y ahora decimos que son par lineal. Ahora necesitamos otro 180. O sea hacemos igual.

91 Luz: La medida.

92 P: ¿Otra vez?

93 Wilson: La medida del ángulo 1 más la medida del ángulo…

94 P: ¡Ay! ¿qué?, 1 y 4 son par lineal.

95 Alguien: Sí, pero…

96 Wilson: Sí.

97 P: Pero… necesitaríamos a C, y tú cogiste fue a A

98 Alguien: Sí.

99 Alguien: 2 y 2 [Wilson corrige y escribe 7. $\angle 1$ y $\angle 2$ son par lineal 8. m$\angle 1$ + m$\angle 2$ = 180].

100 P: 1y 2. Entonces fíjense que ese punti… esta partecita, bastante importante ¿no? [los pasos 3 y 6] Porque me dice a cuál me estoy refiriendo. A cuál par lineal. Sí, porque hay varios pares lineales ahí. Bueno. Postulado del… par lineal ¿y ahora? Y ahora ¿cuál era el plan? ¿Para qué dijimos todo eso? Wilson. Ignacio ¿para qué hicimos todo eso? ¿Dónde está Ignacio?

101 Ignacio: Igualamos… Igualamos las dos medidas que dan 180, para…

102 P: O sea que ahora se vuelve una demostración…

103 Varios: Algebraica.

104 P: Algebraica. Vamos a usar la propiedad algebraica. Y es la propiedad… Luz.

105 Luz: ¿Transitiva?

106 P: Transitiva. La propiedad transitiva de 5 y 8 [pasos]. Usando 5 y 8. No se le olvide ponerme todos los pasitos. Igualamos. La propiedad transitiva me permite igualar, o sustitución. Hay dos formas de justificarlo. Que la medi… esta suma es igual a esta suma.

107 Wilson: ¿Lo colocamos acá?

108 P: Sí.

109 María: Más fácil la transitiva.

110 P: Cualquiera. Es sustitución o es propiedad transitiva. La cuestión es que sustitución es mucho más amplio, lo puedo usar en otros momentos. La transitividad la puedo usar cuando tengo ecuaciones o cuando tengo congruencias. Mientras que la sustitución la puedo usar cuando tengo desigualdades. Algún día nos va, vamos a trabajar con desigualdades, también. [Wilson escribe 9. $m\angle 2 + m\angle 3 = m\angle 1 + m\angle 2$, 10. $m\angle 3 = m\angle 1$].

111 Germán: La medida del ángulo dos…

112 María: Medida del ángulo tres es igual a la medida del ángulo 1.

113 P: Entonces, medida del ángulo 3 es igual a medida del ángulo 1. Propiedad…

114 Alguien: Cancelativa.

115 P: Cancelativa. Me da otra propiedad de los reales. Ese es su décimo paso. Propiedad cancelativa, y por lo tanto conclusión, ángulo 1 congruente al ángulo 3 por… definición.

## DEMOSTRACIÓN “UN SEGMENTO TIENE MÁS DE DOS PUNTOS”

01 P: El teorema que yo quiero demostrar es que ésto [segmento AB] no es igual a solamente dos puntos [escribe: $\overline{AB} \neq \{A, B\}$] ¿Cierto? Eso es lo que estamos tratando de mostrar. Comenzamos con dos puntos, A y B. Dado… dados. Mis dos puntos. Bueno, ¿ahora qué?

[Escribe: 1. Sean A, B puntos; dado].

02 Julián: Postulado de la recta y el número.

03 P: Entonces ahora me dice Julián ¿Qué?

04 Julián: Existe la recta.

05 P: Existe la recta AB [escribe: 2. $\exists\ \overleftrightarrow{AB}$; P. de la recta]. Postulado de la recta. ¿Después qué me dices?

06 Julián: En ese momento tenemos por esos tenemos una… dos puntos y una recta. Entonces por el postulado de la correspondencia puntos-recta, a cada punto le corresponde un único [número] real.

07 P: O sea, ¿qué digo aquí?

08 Julián: [le dicta] Sea *x*…

09 P: *X*

10 Luz: La coordenada de A.

11 Julián: La coordenada de A.

12 P: Coordenada de A.

13 Julián: *y*

14 P: *y* coordenada de B. Por… postulado, a todo punto de recta le corresponde un número. [Escribe: 3. Sea C(A) = *x*; C(B)= *y*; P. puntos de recta - números]. Y aquí ya usé el paso dos. ¿Cierto? Bueno, ¿y ahora?

15 Julián: Método de los reales. Lo que dijo Daniel.

16 P: ¿Qué es lo que Daniel iba a decir?

17 Daniel: No. Pues se trata más bien de ubicar lo de la regla.

18 P: Lo de la regla ¿la colocación de la regla?

19 María: Sí.

20 P: Bueno, pero entonces ¿qué hago? ya, tienen coordenadas.

21 Daniel: A no. Pues entonces, hace la distancia.

22 P: ¿Hago la distancia entre ellos?

23 Daniel: Entre A y B.

24 P: O sea… digo… ¿Qué?

25 Daniel: Puedo hallar la distancia.

26 P: ¿La distancia de AB es el valor absoluto de *x* menos *y*?

27 Luz: Sí.

28 P: Aja.

29 Daniel: Entonces… eso da un número… No,…tengo dos números reales, entonces como tengo dos números reales, entre ellos está…

30 P: ¿Al fin voy a usar ésto? ¿O no? [se refiere a la distancia, en el paso 4.]

31 Daniel: No, no, no… ya no [risas]

32 P: Ya no, aquí lo único que voy a lograr es el postulado de la distancia que me dice que para todo, eh… el postulado de puntos, puntos - números, que me dice cada par de puntos van a tener un número positivo.

33 Daniel: Entonces no. Como tenemos los dos reales, entonces sí podemos garantizar que existe otro real entre ellos.

34 P: ¿Sí?

35 Ignacio: No. Pero es que ya definimos…

36 Daniel: Porque están…entre el punto medio y eso se lo asignamos a uno…

37 María: A más B sobre dos.

38 Daniel: O sea, por el teorema que vimos ahorita [Si B está entre A y C, entonces la coordenada de B está entre la coordenada de A y la coordenada de B]…

39 P: ¿Qué es eso del punto medio? Tú [Daniel] me tienes que decir que existe $r$ entre…, tú tienes que convencerme que existe un $r$ [número] real.

40 Ignacio: Entre los dos… puntos A, B.

41 P: Sí. Tal que $x$ menor que $r$ menor que $y$ ¿Eso es lo que queremos?

42 Daniel: Sí.

43 P: Ahorita.

44 Aníbal: A lo que tenemos que llegar.

45 P: ¿Y ustedes saben de alguno que podamos asegurar que está entre los otros dos?

46 Ignacio: Por eso, punto medio.

47 María: Sí, $x$ más $y$ sobre dos.

48 P: ¿Punto medio? Punto medio es un objeto geométrico… ¡y yo estoy hablando de números!

49 María: $x$ más $y$ sobre dos.

50 Germán: Ah… bueno, pues entonces $x$ más $y$ sobre dos.

51 P: $x$ más $y$ sobre dos.

52 Ignacio: La coordenada del punto medio.

53 P: Entonces sabemos que $x$ es menor que $x$ más $y$ medios, menor que $y$ [escribe: $x < (x + y)/2 < y$]. Ésto es una… lo podemos demostrar, un teorema de los reales, bueno, ¿y entonces?

54 Daniel: Por el teorema de ahorita [risas].

55 Ignacio: El teorema que acabamos de demostrar.

56 Daniel: Ahora tenemos la coordenada. O sea…

57 P: Pero aquí no hay tres puntos y allá yo comenzaba con tres puntos.

58 Germán: No. Pues entonces ahora otra vez aplicamos el...

59 Ignacio: El punto C. La coordenada de $x$, la coordenada de $x$ más $y$ sobre dos es la coordenada del

punto C.

60 Germán: Eso. Sí, entonces decimos sea *x* más *y* sobre dos…

61 P: ¿Y qué me lo permite?

62 Ignacio: El postulado de puntos…

63 P: Entonces digo [sigue escribiendo la demostración], sea…

64 Ignacio: Sea C…

65 P: C el punto [varios le dictan].

66 Ignacio: Coordenadas.

67 María: Con coordenadas.

68 P: El punto.

69 Ignacio: Con coordenadas.

70 P: Con coordenada.

71 Ignacio: *x* más *y* sobre dos.

72 P: *x* más *y* medios [ $(x + y)/2$], ¿y eso, qué me lo asegura?

73 Germán: Eso me lo asegura el postula… a cada número real le corresponde un único punto.

74 Julián: El postulado puntos-recta, el cuatro y el…

75 P: A todo número real

76 Julián: El cuatro y el dos.

77 Germán: Le corresponde un único punto.

78 P: Le corresponde [copia] un punto de la recta, ¿ahí estoy usando qué?

79 Julián: El cuatro y el dos [se refiere a los pasos de la demostración],

80 P: El dos y el cuatro, aunque aquí en el cuatro me faltó decir una cosa… que éste era, este número es un real [$(x + y)/2$] ¿no? Entonces, dos y cuatro. ¿Y ahora?

81 Efraín: Entonces, ahora por el teorema anterior.

82 Germán: Ya tenemos un punto entre dos…

83 P: Ahora por el teorema anterior tengo des… ¿Por el teorema anterior?

84 Germán: Por el teorema recíproco de la interestancia. Sí.

85 P: ¿Por ese?

86 Germán: No por el… Pues el…

87 P: Por el teorema de interestancia. Tenemos que, C está entre A y B… teorema de interestancia, usando el cuatro y el cinco [pasos]. O sea que hemos demostrado que un conjun… un segmento tiene más de dos puntos ¿Sí? En nuestra geometría… puede que haya geometrías donde no.

**DEFINICIÓN “ÁNGULO RECTO”**

01 P: Bueno. Entonces, entonces Germán, ¿cuál es la definición de ángulo recto?

02 Varios: Un ángulo…

03 Germán: Un ángulo es recto…

04 P: Germán. ¡Uy! ¿Cuántos Germanes hay? Germán.

05 Germán: Un ángulo es recto…O sea. Bueno, sí. Un ángulo es recto si la, si su medida es 90 [la profesora escribe eso y le antepone D1].

06 Alguien: De noventa grados.

07 Germán: Si su medida es noventa grados.

08 P: Bueno. ¿Sí? Pero miren que cuando nos dio al fin ese noventa, ¿qué condiciones teníamos?

09 Ignacio: Que los rayos.

10 P: ¿Qué condiciones?

11 Ignacio: Que los rayos pertenezcan a la misma…

12 P: Tiene dos, son dos ángulos que forman par lineal, y que son…

13 María: Adyacentes.

14 Alguien: Ángulos.

15 P: Sí, forman par lineal.

16 Alguien: Congruentes.

17 P: Y son congruentes. Entonces, podría yo ¿definir ésto así? Un ángulo [escribe eso como D2] es recto, si… si forma par lineal, si forma par lineal con otro ángulo congruente a él. Sí. ¿Podría yo definir ángulo recto así? Gracias. Son dos posi… Una que ustedes conocen desde tiempos A… ¿Si? Y otra que estoy ahí… inventándome, usando lo que hizo Darío con la cal… con la tarea que yo le puse. Pero, no sé si son la misma. Si, si estoy definiendo… Si son dos definiciones, dos definiciones para el mismo objeto, o si estoy definiendo cosas distintas.

18 Germán: O sea…pues estás definien… O sea, son las… las definiciones son… no son iguales. Son similares. Sino que una hace mención a un ángulo y la otra hace mención a un par lineal. Por el postulado del par lineal, decimos que, que…

19 P: Bueno, un minuto. Entonces, difieren.

20 Germán: Sí.

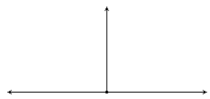
21 P: Y... y tú ¿qué es lo que me vas a decir? Por el postulado del par…

22 Germán: Por el, o sea… ahí, o sea, en la definición dos… la profesora se basa en el postulado, en el postulado del par lineal…

23 P: Yo no me basé en el postulado del par lineal, yo me basé en lo que yo vi.

| | | |
|---|---|---|
| 24 | Germán: | Pues, pero aunque, o sea, argumentando eso, se puede argumentar mediante el postulado del plan, del par lineal, para decir que… |
| 25 | P: | Bueno. Entonces él ya me está tratando de mostrar algo. El argumento que me quiere dar Germán, es que realmente las dos definiciones son equivalentes. Y si yo quiero tener estas dos definiciones, tendría que mostrar que son equivalentes. Es decir, que dada una, se puede demostrar la otra y viceversa. Entonces Germán, ¿tu cuál vas a hacer? [risas] Definición 2 a… |
| 26 | Germán: | Pues… |
| 27 | P: | ¿Cuál era la que estabas pensando? |
| 28 | Germán: | La definición dos… |
| 29 | P: | ¿Definición una implica definición dos? [Escribe D1→D2], o ¿definición dos implica definición uno? [Escribe: D2→D1] Solamente dime cuál de las dos es, no que me lo hagas. |
| 30 | Germán: | La definición dos implica uno. |
| 31 | P: | Dos implica uno. |
| 32 | Germán: | Sí. |
| 33 | P: | Bueno. Vamos a ver, le voy a pedir a otra persona que me haga esa demostración, y tú estás ahí pendiente por si acaso. Por si acaso la otra persona se vara. ¿A quién le voy a pedir? Bien, a Melisa [Melisa hace cara de rechazo]. |
| 34 | Melisa: | No profe. |
| 35 | P: | ¿No quieres? |
| 36 | Melisa: | No, lo que pasa es que… O sea, me pongo muy nerviosa para pasar al tablero. Y además es que... O sea, lo tengo claro en mi cabeza pero no sé como demostrarlo. |
| 37 | P: | Pues por eso es que te va a apoyar Germán. Germán te va a apoyar. Bueno. Entonces, vamos a ver. ¿Por qué? ¿Por qué quiero dos definiciones? Bueno. Pues realmente, porque me parece interesante esta situación. Y si realmente, puedo mostrar que son equivalentes, pues de pronto, me va a ser más útil una que otra. ¿Sí? Cuando yo quiera hablar de ángulos rectos. Entonces comenzamos. ¿Vamos a mostrar cuál, Germán? |
| 38 | Varios: | Dos implica uno. |
| 39 | Germán: | Dos implica uno. |
| 40 | P: | Entonces vas a tomar… |
| 41 | Germán: | Si dos ángulos. |
| 42 | P: | Que hay un ángulo. |
| 43 | Alguien: | Que forma par lineal con otro ángulo. |
| 44 | Germán: | Si, si. |
| 45 | P: | Que tenemos dos ángulos que forman par lineal… Entonces ángulo A y ángulo B |

forman par line… No, ángulo BAC y BAD forman par lineal, como quieras nombrarlos. Haz una figura. Es bueno hacer una figura para…

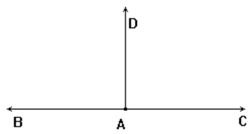
46 Melisa: ¿Es algo así cierto? [Melisa hace la siguiente figura  ]

47 P: Sí.

48 Melisa: Entonces digo que…digo que A.

49 P: Si, nombrémoslos.

50 Melisa: Entonces, me dice que los nombre como A, B, C, D [el dibujo queda:




]

51 P: Bueno, entonces, ¿qué tienes dado?

52 Melisa: Entonces… Dado yo tengo pues que existen… Que son par lineales el ángulo BAD y DAC.

53 P: Sí, pero ¿qué tienes dado? Que uno de ellos es el ángulo recto ¿Si? ¿cuál? cualquiera.

54 Melisa: DAC [escribe: 1. $\angle DAC$ es un ángulo recto; 1. Dado] **P:** Bueno, entonces DAC es ángulo recto. Entonces, eso está dado. DAC es un ángulo recto ¿sí? Usando la segunda definición. DAC es un ángulo recto. Entonces se supone que tiene otro ángulo que forma con él un par lineal.

55 Melisa: Entonces… [Melisa escribe: existe $\angle BAD$ ]

56 P: Entonces existe otro ángulo, ¿quién es? BAD... es recto. Estamos usando esta definición [se refiere a la 2 definición]. Entonces tiene otro ángulo que forma par lineal con él. Entonces, es par lineal con… [Le dicta para que Melisa complete la frase] con el dado [Melisa completa el paso 2].

57 Melisa: Y eso lo… lo justifico…

58 P: Definición dos. [2. Existe $\angle BAD$ es par lineal con $\angle DAC$ ; 2. Dado]. Y, con… forma par lineal con otro ángulo y es congruente a él. Entonces te falta esa parte. La definición dos me da dos cosas: existe el otro que forma par lineal con él, y… Y si quieres paso tres, o si quieres ahí las dos cosas… Tú eliges.

59 Melisa: Entonces los ángulos son congruentes [lo escribió en el mismo paso dos].

60 P: Son congruentes. Ahí, hasta ahora solo ha usado la definición. Tengo un ángulo recto, entonces la definición dos me dice: ¡ah! entonces existe otro ángulo que forma par lineal con él y que es congruente a él. ¿Y tú qué quieres mostrar? Que la medida es noventa.

61 Melisa: Ah ya [señala el ángulo $\angle DAC$ ]

| | | |
|---|---|---|
| 62 | P: | De ese ángulo**.** ¿De cuál? De aquel que dijimos que era recto. |
| 63 | Melisa: | Entonces voy a decir que... |
| 64 | P: | Y entonces, noten una cosa que es muy interesante y que yo a veces les digo a los estudiantes que hagamos. Ésto es lo dado [señala el paso uno con un chulo], éste ya lo usó [el paso uno]. ¿En dónde lo usó? Aquí [escribe (1) al lado de Dado en el paso dos]. ¿Sí? |
| 65 | Alguien: | Sí**.** |
| 66 | P: | Entonces ahora este siguiente paso, ¿qué jugo le puedo sacar? ¿Sí? |
| 67 | Germán: | Que la suma de las medidas... |
| 68 | P: | ¿A este paso? [el paso 2]. Vamos a dejar que Melisa piense, ¿sí? |
| 69 | Melisa: | Que la medida de éste más la medida de éste es 180. |
| 70 | P: | Sí. ¿Y eso cómo lo sabes? |
| 71 | Melisa: | Por el postulado de… |
| 72 | Alguien: | Del par lineal. |
| 73 | Melisa: | Del par lineal. |
| 74 | P: | Del par lineal. Entonces es… |
| 75 | Melisa: | Pero yo no sé cómo escribirlo acá. |
| 76 | P: | De la suma de las medidas [Melisa escribe el paso tres: 3. m $\angle BAD$ +m $\angle DAC$ = 180; 3. Postulado del par lineal]. |
| 77 | Varios: | La medida del ángulo DAC más la medida del ángulo BAD. |
| 78 | P: | Sí. |
| 79 | Germán: | Profe. |
| 80 | Alguien: | AD o DAC |
| 81 | P: | A. La medida, medida, medida. |
| 82 | Germán: | DAC pon Melisa. |
| 83 | P: | Y ahí está usando el postulado del par lineal. ¿Sí? De ahora en adelante vamos a poner solamente aquí P [en vez de postulado]. P, par lineal. Si no nos acordamos el nombre decimos qué es. ¿Bien? ¿Y ahí qué usaste? El dos, punto dos [paso dos; escribe (2) en la justificación]. Ese ya lo usaste. Bueno. Entonces lo podríamos tachar, como quien dice. Claro, que eso no dice, eso no quiere decir que hay pasos en la demostración que no use yo dos y tres veces, en una demostración. Pero por lo menos si hay uno que no he usado, me puede decir: oiga, algo falta, usted por qué no me ha usado. Bueno, puede que no lo necesite, ¿no? Pero puede que sí. Bueno, hasta ahí vas, Melisa. Tienes que mostrar…Tienes que mostrar que la medida de DAC es noventa. Ésto no lo has usado [el paso dos sobre la congruencia de los ángulos]. |
| 84 | Melisa: | Yo podría. |

85 P: ¿Eso qué te dice?

86 Melisa: Perdón, yo podría… No sé. Podría decir lo siguiente. Que cómo éstos, la medida de los dos son iguales, entonces yo podría remplazar acá…

87 P: No lo has dicho. Tú tienes la congruencia, ojo, me tienes que escribir ese paso. Una cosa es la congruencia entre figuras geométricas, y otra cosa es, igualdad entre ciertos números. Entonces, hay que decirlo. [Melisa escribe 4. $m\angle BAD \cong m\angle DAC$ ]. ¡Igual! Igualdad entre números. No congruencia. La congruencia es una relación entre figuras geométricas. La igualdad, una relación entre números. Por definición de congruencia. Y ya usaste este paso. Ahí también solo vamos a poner D. [Melisa escribe: 4. $m\angle BAD$ =m $\angle DAC$; 4. Definición de congruencia]. Es que las demostraciones ahorita van a comenzar a ser bien largas. Entonces vamos a empezar a acortar un poco lo que decimos. Bien.

88 Melisa: Entonces por éste paso [Señala el paso 4], yo puedo remplaza acá.

89 P: Claro, remplazas ahí. ¿Cuál es el que quieres mostrar que tiene medida 90?

90 Melisa: ¡Ah! No. Éste no. [ángulo DAC]

91 P: Sí, ojo. El que comenzó siendo ángulo recto, según mi definición dos.

92 Melisa: [Melisa escribe: 5. m $\angle DAC$ + m $\angle DAC$ = 180; 5. Sustitución] Uno podría decir ¿por sustitución?

93 P: Sustitución.

94 . Melisa: Y por él… Por este paso y este paso

95 P: Sustitución usando… tres y cuatro.

96 Alguien: Tres y cuatro.

97 P: El… ¿qué?... si, tres y cuatro. Entonces, fíjense. A veces usamos uno sólo [pasos], a veces tenemos que usar dos. Bien [Melisa se queda mirando el tablero].

98 Melisa: Entonces sigue…

99 P: ¿De dónde va a salir el 90?

100 Melisa: No sé.

101 P: ¿Cómo así?

102 María: 180 sobre 2.

103 Alguien: Ese último paso.

104 P: Dos… Dos veces la medida es igual a 180.

105 Germán: Listo.

106 Melisa: Entonces yo…

107 P: Aquí tienes una y aquí tienes otra [Melisa escribe: 6. 2m$\angle DAC$ =180 y debajo: m $\angle DAC$ =90].

108 Melisa: ¡Ah! Entonces queda…

109 P: Sí. Por álgebra. Y logramos mostrar que si el ángulo es recto, según la definición dos, entonces cumple la definición uno. Nos falta mostrar que si el ángulo es recto, según la definición uno, entonces cumple la definición dos.

## DEFINICIÓN “RECTÁNGULO”

17 P: ¿Qué es un rectángulo?

18 Ignacio: Un cuadrilátero cuyos cuatro ángulos son rectos.

19 P: Espérate. Hay que definirlo.

20 Ignacio: ¡Ah! Bueno.

21 P: ¿Cómo lo definimos para ver si eso es lo que estamos viendo?

22 Ignacio: Un cuadrilátero cuya… que tiene…

23 P: Escríbanme…

24 María: Dos ángulos internos.

25 P: Todos.

26 Ignacio: Un ángulo de 90 grados.

27 P: A ver. Escríbanme sus definiciones. Una, ¿quién más? Otra definición, ¿quién más? Vamos a tratar de definir, ¿tú? Otra definición. Vamos a ver si son distintas. Escríbanme lo que ustedes creen que es un rectángulo. [Pasan al tablero varios estudiantes y escriben si definición: **Darío:** Es un paralelogramo que tiene al menos un ángulo recto. **Julián:** Es un paralelogramo ABCD cuyos ángulos A, B, C, D son congruentes. **Ignacio:** Es un paralelogramo cuyos ángulos son congruentes. **Marina:** Es un cuadrilátero con dos pares de lados opuestos paralelos y al menos un ángulo interno recto. **Germán:** cuadrilátero con sus lados adyacentes perpendiculares]

28 P: Tenemos en realidad cuatro definiciones.

29 Ignacio: Si cuatro.

30 P: Porque estas dos coinciden.

31 P: La de Marina, es un cuadrilátero con dos pares de lados opuestos paralelos ¿O sea?

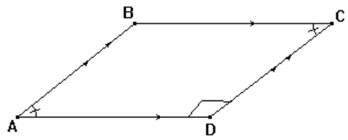
32 Marina: Paralelogramo.

33 P: Paralelogramo. Y al menos un ángulo interno recto, luego en el fondo es igual a ésta [la de Darío]. Entonces tenemos tres. La de…

34 Ignacio: Germán.

35 P: La de Germán es, un cuadrilátero con lados adyacentes perpendiculares.

| | | |
|---|---|---|
| 36 | Germán: | Con sus lados adyacentes perpendiculares. |
| 37 | P: | ¿De acuerdo? |
| 38 | Alguien: | Sí. |
| 39 | P: | Cuadrilátero con… |
| 40 | Germán: | Lados adyacentes perpendiculares. |
| 41 | P: | Todos los pares de lados adyacentes perpendiculares. O sea que en pocas palabras, Germán está diciendo que en el rectángulo. |
| 42 | Germán: | Hay cuatro ángulos rectos. |
| 43 | P: | Hay cuatro ángulos rectos. ¿Sí? En cambio aquí dicen, cuyos ángulos son congruentes [Juan e Ignacio]. |
| 44 | Juan: | Es la misma. |
| 45 | P: | Y aquí dicen… Bueno, y aquí dicen paralelogramo [Julián, Ignacio, Darío]. |
| 46 | Juan: | Sí. |
| 47 | P: | ¿Ésta equivale a ésta? o ¿no? Cuadrilátero con lados adyacentes perpendiculares, entonces… Entonces ¿es paralelogramo? ¿Por qué? [varios hablan al tiempo]. |
| 48 | Ignacio: | Porque son perpendiculares a una misma recta. |
| 49 | Germán: | Sí, porque es un paralelogramo porque yo dije. |
| 50 | P: | Bueno. No. Sí. Todas… o sea que de éstas [Ignacio y Darío] podemos inferir ésta. |
| 51 | Ignacio: | Sí. |
| 52 | P: | Sí. Bueno. Depende… estas dos definiciones… ésta tiene los cuatro ángulos [Ignacio] y ésta pide sólo uno. |
| 53 | Germán: | Es que pues, un paralelogramo puede ser así. |
| 54 | P: | Sí, pero éste pide un ángulo recto y éste pide cuatro. Entonces todavía no sé si de ésta llego a ésta [De la de Darío, a la de Julián]. |
| 55 | Ignacio: | O de ésta a ésta. |
| 56 | P: | Ah, sí. Si tengo… |
| 57 | Luz: | Si tiene cuatro entonces tiene uno. |
| 58 | P: | Entonces tiene uno. Y si ésta lleva a ésta. [De la de Darío a la de Gabriel] O sea, si son equivalentes. Si tengo paralelogramo con un ángulo recto, tengo cuadrilátero con cuatro ángulos… ¿qué? con lados adyacentes perpendiculares. |
| 59 | Ignacio: | Los lados opuestos sean congruentes |
| 60 | P: | ¿Sí o no? |
| 61 | Ignacio: | El ángulo opuesto al ángulo recto del paralelogramo, en ese caso sería también recto. |
| 62 | P: | A ver, tengo paralelogramo. |
| 63 | Ignacio: | Sí. |
| 64 | P: | ABCD, éste es un ángulo recto [D] [Hace una figura como la siguiente: |




]

65 Ignacio: El ángulo B sería recto también.

66 Luz: El ángulo ABC**.**

67 Ignacio: El ángulo ABC o el ángulo B sería recto también.

68 P: Pero, siempre y cuando demostremos… Ah no.

69 Ignacio: Es un paralelogramo.

70 Luz: Es un paralelogramo.

71 P: Si tiene la razón. Éstos dos son opuestos… son congruen… rectos [B y D]. ¿Y?

72 Ignacio: Son paralelas.

73 María: Si son perpendiculares, las rectas no son paralelas ¿no?

74 P: Tengo paralelogramo.

75 Ignacio: Entonces ambas son paralelas.

76 P: Estas son paralelas.

77 Ignacio: Sí.

78 P: Estas dos son paralelas.

79 Ignacio: Entonces…

80 P: Por el teorema, tengo que éste ángulo también es recto, porque los opuestos son congruentes. Falta un par…

81 Nancy: Si una recta es perpendicular…

82 Ignacio: Si dos rectas son…

83 Nancy: ¿Cómo es? Si a una recta se traza la perpendicular y la paralela a esa perpendicular, también es perpendicular a la otra.

84 P: Si hay una recta perpendicular a dos paralelas, es perpendicular a la otra.

85 Ignacio. Y por ende…

86 P: Muy bien. Entonces ¿son equivalentes? Son equivalentes. Si tengo ésto [Darío] se cumple ésto [Ignacio] y si tengo ésto [Ignacio] se cumple ésto [Darío]. Y… ésta… ¿se deduce de acá? Lo acabamos de hacer. ¿Sí? Bien. ¿Cuál es la…? ¿cuál es la… la bondad de las dos? O sea, tenemos en el fondo tres definiciones. Ésta [Germán], porque es una definición que puedo dar cuando todavía no he hablado de cuadriláteros, de paralelogramos.

87 Ignacio: De paralelogramos.

88 P: Y yo puedo trabajar entonces rectángulos, sin haber hablado de paralelogramos. ¿Sí? Entonces, ésta es una definición buena, y depende de las condiciones. Pero nosotros ya sabemos mucho de paralelogramos. Entonces, posiblemente nos queramos quedar con ésta

o con ésta [Darío o Ignacio] ¿Cuál de las dos? ¿Cuál de las dos queremos? Debemos adoptar una. Una vez que tengamos una, ya lo demás es teorema.

89 Ignacio: La segunda.

90 Nancy: La primera.

91 Alguien: La primera.

92 P: ¿Prefieren la primera? ¿Por qué?

93 Nancy: Porque ya puedo también, de ahí podría sacar ya… teniendo lo de los ángulos rectos, podría sacar que son congruentes, que miden 90.

94 P: O sea, la primera es como menos exigente, ¿no? Digamos de cierta manera. Si yo quiero demostrar que algo es… que algún cuadrilátero es un rectángulo, sólo tengo que mostrar dos cosas, que es paralelogramo.

95 Ignacio: Y que tiene un ángulo recto.

96 P: Y que tiene un ángulo recto. Y en el otro me toca mostrar que es paralelogramo…

97 Ignacio: Y con los cuatro ángulos congruentes.

98 P: Y que los cuatro ángulos son congruentes. Entonces ésta más… exige menos para el futuro. Entonces tendríamos como teorema…

99 Ignacio: Y como definición.

100 Germán: Y como definición.

101 P: Entonces ésta es la definición de rectángulo [Escribe la definición]. Un rectángulo es un paralelogramo que tiene al menos un ángulo recto. ¿Sí? Y ésto sería teorema. ¿Sí? Que es, en un rectángulo.

102 Germán: Todos los ángulos son rectos.

103 P: Todos los ángulos son congruentes. Sería un teorema. Y ésta [Germán], como les decía, es importante porque como, qué tenemos construido en el sistema axiomático. Habríamos podido hablar de rectángulos hace mucho tiempo.

104 Germán: Sí.

105 P: Porque nosotros ya teníamos perpendicularidad. Entonces esa quedaría como definición.

**DEFINICIÓN “ALTURA DE UN TRIÁNGULO”**

09 P: Tenemos que introducir la definición de altura. ¿Quién hace la definición de altura? ¿Quién la recuerda? Ustedes la estudiaron el semestres pasado… creo.

10 María: Es la distancia…

11 Efraín: Es la distancia del punto medio de un triángulo…

12 P: Efraín. ¿Qué es la altura?

13 Efraín: Es la distancia desde el punto medio de un triángulo hasta su ángulo opuesto.

| | | |
|---|---|---|
| 14 | P: | ¿Alguien controvierte esa definición? [Juan y Leopoldo alzan la mano] Juan. |
| 15 | Juan: | Es la distancia desde un vértice hasta la recta que contiene al lado opuesto del vértice. |
| 16 | P: | Ambos hablan de distancia. |
| 17 | María: | La mínima distancia. |
| 18 | P: | Lo que hacen mención es hacia dónde. |
| 19 | Juan: | No es necesario decir mínima distancia, porque al decir distancia se supone que ya se ha hablado de distancia de un punto. |
| 20 | P: | Ah, pero tendríamos entones que haber hablado de la distancia de un punto a una recta. Pero, yo les pregunto, la altura ¿es un objeto geométrico?, o, ¿es un número? |
| 21 | Efraín: | Es un número. |
| 22 | Varios: | Un objeto. |
| 23 | María: | Es un segmento. |
| 24 | P: | Efraín. |
| 25 | Efraín: | Un segmento. |
| 26 | P: | Entonces no puedo decir que es la distancia, porque si es una distancia es un número. Es un objeto geométrico. ¿Qué objeto geométrico? |
| 27 | Alguien: | Un segmento. |
| 28 | P: | Un segmento. En los libros hay altura definida como recta y altura como segmento. Nosotros vamos a trabajar la altura definida como segmento. Un segmento. Ahora sí… Que contiene un vértice de un triángulo, y… |
| 29 | Alguien: | Y es perpendicular a la recta que contiene… |
| 30 | P: | El…y va… es perpendicular… al lado opuesto de vértice. ¡No! A la recta que contiene el lado opuesto. Vamos a escribirlo... Lo que pasa es que Efraín y Juan hablaron de distancia, porque como la altura es un segmento, pues le puedo tomar la longitud. Y hablar de la distancia entre los extremos del segmento que es la altura. Si la definimos como recta nunca podríamos medir la altura y entonces ¿cómo calculamos el área de un triángulo? y entonces es mejor definirla como segmento. [Escribe: altura de un triángulo es el segmento perpendicular que contiene un vértice de un triángulo y es perpendicular a la recta que contiene al lado opuesto] La altura de un triángulo es el segmento que contiene un vértice del triángulo y es perpendicular a la recta que contiene al lado opuesto [Leyendo la definición del tablero]. |
| 31 | Darío: | Una pregunta, profe. Ahí ¿no habría que especificar que ese vértice está en el extremo del segmento? Porque cuando se habla de contenido, puede que esté entre los dos segmentos ¿cierto? |
| 32 | P: | Sí. Lo que quería dar al poner contiene, es que va desde. Que es como aparece en los libros. Que va desde. Entonces, mejor escribir como propone Darío. No. Es un |

segmento, uno de cuyos extremos es un vértice del triángulo y es perpendicular al ta ta ta. ¿Sí? Es mejor decirlo…

33 Juan: Y entonces el otro extremo también…

34 P: Es… No, pero eso sí no hay necesidad de decirlo. Porque no causa esa problemática que dice Darío. Pero, arreglemos esa parte primero. Entonces, es el segmento… o es un segmento cuyo [corrige la definición escrita en el tablero], uno de cuyos extremos… tocaría escribir. Uno de cuyos extremos es un vértice del triángulo. Tocaría decir entonces… ¿y el otro?

35 Darío: Y el otro extremo…

36 P: Y el otro extremo…

37 Darío: Pues es la intersección…

38 Orlando: Un punto de la recta…

39 Alguien: Es la intersección entre…

40 P: Es un segmento, uno de cuyos extremos es un vértice del triángulo y es perpendicular a la recta que contiene al lado opuesto. Pero… ¿y el otro extremo?

41 Ignacio: Es la intersección entre el segmento y el lado.

42 P: Porque es que… Claro, los libros se ahorran esta problemática diciendo es un segmento que va desde un vértice de un triángulo hasta la recta que contiene el lado opuesto. Si. Entonces va… de aquí hasta acá… resuelto el problema. Entonces, aquí tenemos todavía el problema del otro extremo, en dónde para. Porque es un segmento, uno de cuyos extremos es un vértice del triángulo…

43 María: Y el otro es un punto.

44 P: Es perpendicular a la recta que contiene el lado opuesto, y el otro extremo está en esa recta. Tocaría decirlo así.

45 María: Sí. Es un punto que está contenido en esa...

46 P: O sea, aquí tengo que poner una coma [en lugar de “y” es perpendicular]. Aquí, coma, es perpendicular a la recta que contiene al lado opuesto, y el otro extremo ¿qué?

47 María: Está contenido en el triángulo.

48 P: Y el otro extremo no necesariamente está contenido en el triángulo…

49 María: Ah no. No, no, no.

50 P: Porque ¿qué pasa si tenemos este triángulo? [dibuja un triángulo obtusángulo].

51 María: Que está contenida en la recta.

52 Estudiante: Es la intersección…

53 P: Aquí no necesariamente está. Y el otro… extremo ¿dónde está? Está en la recta que contiene el lado opuesto. En dicha recta, podemos decir. Quedó mejor [la definición].

## CONJETURAR "EN EL ÁNGULO A SE ESCOGEN DOS PUNTOS B Y C, UNO A CADA LADO DEL ÁNGULO. ¿CUÁNDO ESTÁ EL PUNTO MEDIO DEL SEGMENTO BC EN LA BISECTRIZ DEL ÁNGULO A?

01 P: […] decía: en el ángulo A, o sea que ¿qué está dado?

02 Varios: El ángulo A.

03 P: Se escogen dos puntos B y C ¿Dados? Sí. En los lados del ángulo. Y se pregunta, ¿cuándo está el punto medio del segmento BC en la bisectriz del ángulo A? Justifique su respuesta. Bien, entonces, el grupo de Luz, el grupo A y el grupo D me proponen una conjetura. […]Antes de escribir la conjetura, le voy a preguntar al grupo de Luz, […] ¿Cómo hicieron ustedes la exploración? ¿Si fueron a usar la calculadora? ¿Si, si, fueron a... a usar la graba... la calculadora o la...? ¿Sí?

04 Luz: Claro.

05 P: ¿En dónde lo hicieron?

06 Luz: Nosotras tenemos Cabri.

07 P: Ah, tienen Cabri. Bueno, entonces descríbeme ¿qué hicieron?

08 Marina: Pues, teníamos el ángulo… el ángulo dado [La construcción hecha partió de garantizar la igualdad entre las longitudes de los segmentos $\overline{AB}$ y $\overline{AC}$].

09 P: Sí.

10 Marina: Nos pedían era el punto medio del segmento BC. Como ya en una tarea anterior nos habíamos dado cuenta que si tenían… si los dos...o sea, dos segmentos que están contenidos en los rayos del ángulo tenían la misma medida…

11 P: ¿O sea que ustedes no hicieron una construcción?

12 Marina: Sí, sino... o sea ya íbamos era a eso.

13 P: Ah, usaron lo que ya nosotros sabíamos. O sea que ustedes a B y a C los escogieron con una propiedad especial, a pesar de que el problema no dice. Bueno, entonces ese es el grupo de Luz, el grupo F. El grupo A ¿Quién es del grupo A?

14 Julián: Nosotros.

15 P: ¿Cómo hicieron ustedes la construcción?

16 Joaquín: Teníamos el ángulo, le dimos dos puntos sin que cumplieran ninguna propiedad, y después mediante el arrastre nos dimos cuenta que el punto D estaba sobre la bisectriz; si estaba…

17 P: O sea, construyeron el ángulo…,

18 Joaquín: los dos…

19 P: los dos puntos,

20 Joaquín: los dos puntos…

21 P: ¿qué más construyeron?

22 Julián: El segmento... ¡ah!, pues la recta entre los dos puntos, el segmento...

23 P: El segmento BC.

24 Julián: luego el punto medio.

25 P: El punto medio. ¿Qué más?

26 Julián: ¡Ah! y pues, la bisectriz.

27 Joaquín: La bisectriz.

28 P: Y la bisectriz, claro. ¿Y entonces qué hicieron?

29 Joaquín: Mediante el arrastre. O sea…

30 P: ¿Arrastraron a quién?

31 Joaquín: a uno de los dos puntos de tal forma que el punto D… o sea, uno de los dos puntos de este ángulo, o sea que está en este ángulo, lo arrastramos de forma que el punto D estuviera en mitad… o estuviera en la bisectriz, y después utilizamos la…

32 P: Arrastraron a B o a C.

33 Joaquín: Sí.

34 P: Para lograrlo […]. La conjetura de estos tres grupos [F, A y D] dice: Si K es punto medio del segmento BC, y si estos dos segmentos AB y AC tienen la misma longitud, entonces K está en la bisectriz del ángulo A. Oímos dos construcciones, la de Marina y Luz, que dicen que ellas hicieron segmentos congruentes a los dos lados, porque se acordaron de algo que se había hecho en clase y se dieron cuenta que quedaba el punto medio de ese segmento en la bisectriz; y la de Joaquín y Juan que dicen que construyeron el segmento y arrastraron. ¿Cuál de los dos grupos me está reportando una conjetura que concuerda con la construcción que hicieron? ¿El de Joaquín o el de Luz?

35 Germán: El de Luz que hace los segmentos congruentes, primero.

36 P: El de…

37 Germán: El de Luz que hace primero los segmentos congruentes, y…

38 P: Germán

39 Germán: de ahí ya…

40 P: ¿Por qué? ¿Por qué el de Luz?

41 Germán: Porque es el que coincide con la conjetura…

42 P: ¿Por qué coincide?

43 Germán: Porque ellos primero parten haciendo o sea, parten creando el ángulo pero con los

segmentos congruentes para crear un triángulo.

44 P: Porque ellos pusieron… ellas pusieron esta condición [segmentos AB y AC tienen la misma longitud]… que la ponen aquí en la hipótesis, ¿sí?, ellas se aseguraron de tener eso, antes de mirar qué pasaba con el punto medio. En cambio ustedes [grupo A] supuestamente arrastraron, hasta que el punto medio coincidiera. Y en ese caso ¿cuál debía ser su conjetura?

45 Julián: No sé. Sería el recíproco.

46 P: Creo que tendría que ser la del grupo I o la del grupo B, que dicen: Si la bisectriz del ángulo A interseca al segmento BC en el punto medio, entonces AB y AC tienen la misma longitud. Ésa debió haber sido su conjetura. […] Para mí es muy importante que ustedes escriban cuál es la construcción. Porque nosotros tenemos que entender que lo que nosotros estamos haciendo, es descubriendo teoremas y que los teoremas reportan dependencias. Aquellas [condiciones] que nosotros construimos, son la hipótesis. Aquellas condiciones. Y aquellas que resultan de lo que construimos, son la tesis del teorema.

[…]

47 P: El grupo C me dice: […] que K está en la bisectriz del segmento BC, ¿Cómo es que me dicen? […] ¿Que K está en la bisectriz si el segmento es perpendicular a la bisectriz?

48 Darío: ¡Ah! Sí. Hay algún… nos salieron dos propuestas [conjeturas] en... para la solución de esa... bueno del problema.

49 P: Darío. Sí.

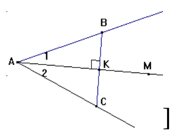
50 Darío: Entonces que era uno que si el segmento fuera perpendicular a la…

51 P: Bisectriz.

52 Darío: a la bisectriz… y la otra era que… pues el puntico…

53 P: Bueno… pasa, pasa… [al tablero] pero entonces, necesito que me diga claramente cuáles son las dos. […]

54 Darío: [Pasa al tablero y dibuja:




]

Entonces, pues lo que nosotros decíamos es que si... si el segmento… BC era perpendicular a la bisectriz [AM], entonces pues la…

55 P: K, Lo llamamos K… el punto medio.

56 Darío: K.

57 P: El punto medio.

58 Darío: Pues la intersección de la bisectriz con el [segmento BC]…

59 P: ¡Ah!, es el punto medio.

60 Darío: con el segmento es el punto medio.

61 P: O sea, que la hipótesis es: Si el segmento BC es perpendicular a la bisectriz A… AM…

62 Estudiante: AM.

63 P: a AM, entonces…

64 Darío: Entonces pues la intersección, el punto de intersección es el punto medio de [segmento] BC.

65 P: [La profesora escribe en el tablero la conjetura, mientras Darío le dicta: “Si $\overline{BC} \perp \overrightarrow{AM}$ entonces $K$ es el punto medio de $\overline{BC}$”] Bueno, ¿y lo puedes mostrar?

66 Darío: Pues… entonces tengo que [el segmento *BC*] es perpendicular [a la semirrecta *AM*] entonces éste [ángulo *K*] es recto. ¿Cierto?

67 P: ¿Cuál? ¿Quién? Habla porque es que yo después... este, este, este, yo no...

68 Darío: El ángulo... el ángulo AB, AKB es recto, es recto ¿cierto?

69 P: Sí.

70 Darío: Entonces pues hay un teorema que dice... bueno, forman los cuatro ángulos rectos.

71 P: Sí.

72 Darío: Entonces tengo que [ángulo] AKB es recto y que también [ángulo] AKC es recto. [Escribe en el tablero ∠AKC es recto]. Entonces tengo que esos dos son congruentes, estos dos son ángulos congruentes. Entonces tengo que [segmento] AK es congruente con ese mismo ¿cierto? Entonces esto [segmento AK] congruente con este mismo [segmento AK]. Y como esta es bisectriz [rayo AM], entonces… congruen…

73 P: ¿Quiénes? ¿Quién?

74 Darío: [ángulo] BAK es congruente con [ángulo] KAC. Entonces por criterio de congruencia ángulo - lado – ángulo, ya tengo que estos dos [triángulo AKC] son congruentes con estos dos [triángulo AKB]. Entonces, también tengo que como es por intersección entonces que K está entre B y C, entonces ya también tengo para demostrar que la medida de éste [segmento CK] es congruente con ésta, [medida del segmento BK] entonces, la medida…

75 P: ¿La medida de quién?

76 Darío: La medida de K a C. KC.

77 P: Del segmento KC

78 Darío: Es igual a la de K a B

79 P: A la del segmento BK. Entonces conjetura… verdadera. Muy bien, gracias.

## CONJETURAR “¿CUÁL ES LA RELACIÓN [EXISTENTE] ENTRE EL TIPO DE TRIÁNGULO Y LA PROPIEDAD: DOS DE SUS ALTURAS SON CONGRUENTES?”

01 P: […][la profesora está observando un resumen que elaboró con las construcciones y las

conjeturas realizadas por los grupos] Quiero que el grupo C me lean lo que me escribieron para la construcción. Ponemos atención por favor, porque quiero… quiero que se fijen muchísimo en lo que dicen el grupo C y después en la conjetura que me… que establecen.

02 Leopoldo: Se construyó el triángulo ABC, luego las alturas del triángulo… y mediante el arrastre se logró que las dos alturas [dos de las alturas del triángulo] fueran congruentes. Conjetura…

03 P: Espera un minuto. ¿Escucharon eso, no? Creo que muchos hicieron la misma construcción […], me lo lees otra vez y ponemos atención.

04 Leopoldo: Se construyó el triángulo ABC, luego las alturas del triángulo y mediante el arrastre, se logró que dos de las alturas fueran congruentes.

05 P: Sí. Ahora la conjetura.

06 Leopoldo: Conjetura. Si un triángulo tiene dos lados congruentes, entonces dos de sus alturas son congruentes.

07 P: Bueno, entonces… mira. Vamos a… vamos a determinar ahí dos… dos cosas. Una, vamos a llamar *p*… eh… lados… del triángulo ¿no? Y *q*… Y *q*… alturas congruentes… […][Escribe en el tablero: *p*: lados congruentes del triángulo, *q*: alturas congruentes] Y grupo C… léanme otra vez la construcción.

08 Leopoldo: Se construyó el triángulo ABC, luego las alturas del triángulo y mediante el arrastre se logró que dos de las alturas fueran congruentes.

09 P: O sea que ustedes obligaron a qué… ¿A *p* o a *q*?

10 Leopoldo: Eh… las alturas, a *q*.

11 P: A *q*… ¿Sí?

12 Leopoldo: Sí.

13 P: Esto es lo que ustedes obligaron… ¿Qué pasa? ¿Qué pasa Leopoldo? A ver…
[…]

14 Leopoldo: No sé. Creo que de *q* dedujimos…

15 P: De *q* dedujeron *p* ¿cierto? ¿Y cuál fue la conjetura que me estableciste?

16 Leopoldo: Pues que si las alturas son congruentes… ah… si *p* entonces q…

17 Estudiante: Si q entonces p.

18 Darío: Es que después miramos…

19 Estudiante: Si p entonces q.

20 P: Si los lados son congruentes…

21 Leopoldo: Si los lados son congruentes entonces las alturas son congruentes.

22 P: Muy bien.

23 Darío: Y fue al revés.

24 P: O sea… y esto no les pasó solamente a ellos. Muchos de ustedes hicieron lo mismo. La construcción de ellos fue obligar a que se cumpliera *q*… y se dieron cuenta que entonces se

daba *p*. Pero la conjetura que me escribieron…

25 Estudiante: Si p entonces q.

26 P: es: si *p*

27 Estudiante: entonces q.

28 P: entonces *q*. Esto es muy importante. Muy importante porque en el teorema la hipótesis es aquello que sabemos como válido. Y lo que ustedes sabían como válido era la congruencia de las alturas, porque eso era lo que ustedes estaban buscando que sucediera. Entonces digamos que la conjetura no corresponde a tú construcción. […]

29 Leopoldo: Profe… una cosa, pero entonces de acuerdo a esto, lo correcto habría sido escribir primero que si las alturas son congruen… o sea la congruencia…

30 P: Según tú construcción,

31 Leopoldo: Sí.

32 P: lo que tú me podías reportar a mi era que si las alturas son congruentes, entonces los… los…

33 Estudiante: Los lados son congruentes.

34 P: los lados son congruentes. Según tu construcción.

[…]

La conjetura del grupo F […], dice lo siguiente [lee del acetato la conjetura del grupo F]: Si el triángulo… "Si ABC es un triángulo y la medida de uno de sus ángulos es mayor a noventa y los lados que determinan este ángulo son congruentes, entonces el triángulo es isósceles y dos de sus alturas son congruentes". Quiero que examinen la propuesta de ellos y me digan qué piensan.

35 María: Es como muy local. O sea…

36 P: ¿Muy local?

37 María: obliga, obliga a que el triángulo [uno de los ángulos del triángulo] sea mayor que noventa.

38 P: Miren la propuesta, si ¿y?

39 María: Pues… o sea, eso se cumple, pero para ese caso específico.

40 Estudiante: Para ese caso.

41 P: ¿Qué es lo que se cumple?

42 Estudiante: Que las alturas son congruentes.

43 María: Que el triángulo es isósceles si dos de sus alturas son congruentes.

44 P: Ah… a ver Orlando, ¿tú qué dices?

45 Orlando: Lo que pasa que es que [según lo dicho] no puede ser cualquier triángulo isósceles sino uno con la característica de que el ángulo donde…

46 P: El ángulo del vértice, se llama… el ángulo del vértice es el nombre que se le da.

47 Orlando: Tiene que ser mayor de noventa, el que forma los lados iguales.

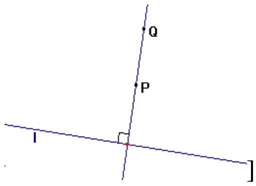
| | | |
|---|---|---|
| 48 | P: | ¿Sí? |
| 49 | Germán: | No sé si se estaría cumpliendo para el resto de triángulos porque cuando el triángulo tenga el vértice igual a noventa entonces no cumpliría.... |
| 50 | P: | El ángulo del vértice. |
| 51 | Germán: | Cuando el ángulo del vértice |
| 52 | Estudiante: | o menor |
| 53 | Germán: | sea noventa o menor que noventa no cumpliría. |
| 54 | Estudiante: | No cumple esa condición. |
| 55 | P: | Según ellos, no parecería que se cumpliera. ¿Sí? Entonces es una conjetura que está, como dice María, muy localizada. Y no lo más general posible. |
| 56 | Estudiante: | Si, pues fue lo que nosotros… |
| 57 | P: | Sí. El grupo C… Ah no sé por qué puse ésta. [Si un triángulo tiene dos lados congruentes] entonces dos de sus alturas son congruentes. Bueno, ¿qué piensan de esa? Ya sé porque lo puse. |
| 58 | Germán: | porque… porque… Pues está al revés porque lo que nos da es la congruencia de las alturas, no la congruencia de los lados. |
| 59 | P: | Ah no, porque depende de la construcción que hayan hecho. |
| 60 | Germán: | Ah sí, eso es verdad. |
| 61 | P: | Sí. No por ese lado no. […] Pero, ¿qué pasa con la conjetura del grupo C? |
| 62 | María: | Que falta… falta decir cuáles son las alturas |
| 63 | P: | ¡Aja! |
| 64 | María: | respectivas a qué ángulo… a qué lado. |
| 65 | P: | Exacto, ¿Por qué no son… son cualquier par de alturas? |
| 66 | Estudiante: | no puede ser… |
| 67 | P: | No. Entonces, falta decir cuáles son exactamente esas alturas. |

## CONJETURAS DEL PROBLEMA: "SE DA UNA RECTA, DOS PUNTOS P Y Q EN EL MISMO SEMIPLANO DETERMINADO POR LA RECTA L, DETERMINE EL PUNTO R [DE LA RECTA L] PARA EL CUAL LA SUMA DE LAS DISTANCIAS [PR Y QR] ES LA MENOR"

| | | |
|---|---|---|
| 01 | P: | […][39] Un caso que consideraron ustedes fue ¿cuál? |
| 02 | María: | […][40] . Pusimos a P y a Q, y después animamos a Q sobre… o sea que quedaran |

[39] La profesora le indica a María cuál caso presentar, de los que ella y su compañero propusieron.

colineales… Q y P sobre la perpendicular. [por P a *l*] [Representa algo así:




]

03 P: Y ahí… les da… en ese caso.

04 María: Sí.

05 P: O sea, un caso era que Q y P estuvieran sobre la perpendicular de P a la recta.

06 María: Sí.

07 P: Y entonces en ese caso R es…

08 María: R es…

09 P: el punto de de intersección. ¿Sí?

10 María: el punto de de intersección.

11 P: Bueno, gracias. Ese es un caso, ¿sí? Otro caso; el caso de ustedes fue ¿cuál?

12 Joaquín: [Pasa Joaquín al tablero] Pues tenemos… la recta *l*, una recta *T* que es perpendicular…

13 P: Desde P, ¿no? Tenemos a P y a Q.

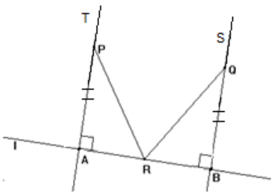
14 Joaquín: Aquí está P, tenemos una recta perpendicular S donde está Q, la distancia… bueno [punto]A,

15 P: Tal que ¿qué?

16 Joaquín: [punto] B, tal que la distancia de P a A sea igual a la distancia de Q a B. Entonces hallamos que el punto medio de este segmento [AB] era la mínima distancia…

17 P: Mínima suma.

18 Joaquín: La mínima suma. [Joaquín hizo una representación como:




]

19 P: Otro caso ¿sí?, otro caso especial. ¿Sí? Gracias. Entonces R. Esto es muy importante. Esto que estoy mostrándoles es muy importante. Cuando uno tiene que resolver un problema y a veces como que el problema no sabe como por dónde comenzar a… a resolverlo, uno simplifica las condiciones y empiezan entonces a surgir otras ideas. Entonces una [forma] es: bueno, imaginémonos que Q está en la misma recta perpendicular desde P a la recta *l*, y entonces R sería "fulanito". Otro caso es: imaginémonos que P y Q están a la misma distancia de la recta *l*. Y entonces R es…

---

[40] María repite las condiciones dadas en el problema.

“fulanito”. Otra posibilidad Henry es… ¿qué?

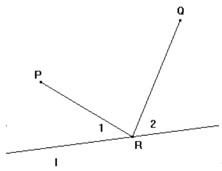
20 Henry: [Pasa Henry al tablero] Tengo la recta *l* y tengo el segmento digamos… PQ

21 P: Los puntos P y Q.

22 Henry: los puntos P y Q. Entonces, pues… ubico cualquier… tengo que ubicar un punto… ubico el punto R…

23 P: Un punto R.

24 Henry: un punto R, tal que… trazo este segmento [PR] y éste [segmento QR]. Entonces si… cumplo que el ángulo... que este ángulo es congruente con éste [Hace una representación y señala los ángulos




]

25 P: 1 y 2… ángulos 1 y 2

26 Henry: el ángulo 1 y [el ángulo] 2 son congruentes, entonces la suma de las distancias va a ser la menor.

27 P: Y… Gracias. O sea, él dice: busco a R para que el ángulo 1 y [el ángulo] 2 sean congruentes. Y entonces me da ¿Sí? […][41] Pero, el problema con la de ellos es que es una conjetura dinámica. Es decir, no puedo encontrar a R sino con el computador. Pero, ¿qué hago cuando estoy con papel y lápiz? ¿Cómo hago yo para estar sabiendo exactamente en qué momento me va a dar que esos dos ángulos son congruentes? […][42] Pero se fijaron en los ángulos, lo cual es algo muy interesante; excepto que como les digo con papel y lápiz, ¿cómo hago? […][43] Darío y Leopoldo tienen otra propuesta. [Extiende su mano con el marcador para que Darío pase al tablero].

28 Darío: [Pasa al tablero] Pues… Entonces, pues teníamos a P y a Q, ¿cierto? entonces, trazamos la perpendicular de P a… a la recta *l* y la de Q a la recta *l*. Entonces copiamos… sacamos la misma distancia de P, colocamos acá…

29 P: Llamemos este punto de intersección.

30 Darío: Ah bueno, M

31 P: M y…

32 Darío: y N.

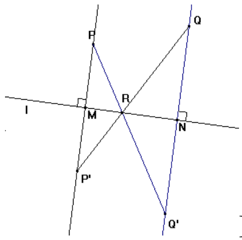
33 P: N.

[41] Se presenta a la comunidad una construcción similar a la propuesta por Henry y su compañero, que requiere de la geometría dinámica.

[42] Melisa pregunta por las condiciones que se le dieron a los puntos P y Q.

[43] Pasa un estudiante al tablero a presentar una construcción similar a la de Darío y Leopoldo.

34 Darío: Entonces, sacamos acá a P’ y acá… a Q’. Entonces trazamos este… segmento de P a Q’ y de P’ a Q. [




]

35 P: Y se cortan ambos.

36 Darío: La intersección se corta y se cortan también en la recta… y este [punto] es R.

37 P: Y ese es R.

38 Leopoldo: ¡Sí se cortan ahí!

39 Darío: Sí.

40 P: Tenemos… dos caracterizaciones generales, una caracterización para un caso especial, dos caracterizaciones… dos… dos caracterizaciones para casos especiales, cuando Q y… está en la perpendicular de P a la recta. ¿Sí? Dos caracterizaciones digamos dinámicas, porque… Y me pregunto si todas me están dando un mismo punto R. Pues ustedes dicen que sí, ¿no? ustedes encontraron para que diera lo mínimo. Entonces, ahora hay que decidir, de las caracterizaciones que tenemos, por ejemplo, de pronto el caso en donde están a la misma distancia de la recta, puedan hacer la demostración; y cuál de esas dos caracterizaciones que no tienen en cuenta esa carac... esa propiedad especial nos servirá para hacer la demostración. Pero, ¿qué es lo que tengo que demostrar? Es la pregunta.

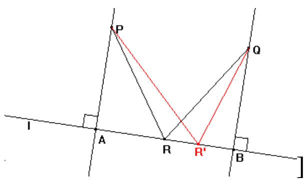
41 Daniel: Que la suma [de la longitud del segmento PR y QR] es la mínima.

42 P: Sí, pero… y ¿Cómo muestro que algo es mínimo?

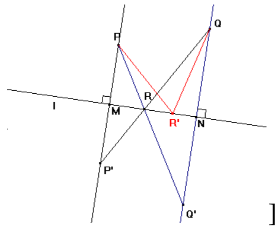
43 Daniel: Comparando.

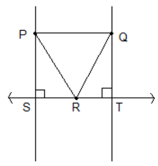
44 P: Comparando, exacto. Entonces, nos toca imaginarnos que hay otro punto… una posibilidad, que hay otro punto R’ y comparar, esta suma [PR+RQ] con ésta [PR’+R’Q].

[complementa el dibujo de Joaquín y Juan:




]O lo mismo aquí, R’ y comparar; [Complementa la figura de Darío y Leopoldo:



] o en el caso que borramos en donde P y Q están a la misma altura. [Hace una representación así: 

] Esa es una forma es… comparar, […][44] esa es la que hemos usado hasta ahora. ¿Sí? Esa es una forma. […][45]

Me puse a analizar un poco sus respuestas y entonces estoy entusiasmadísima, porque quiero mostrar cómo realmente todos llegaron a lo que se debe llegar, caminos muy distintos, pero… comprobar, demostrar que todos llegamos al mismo sitio va a ser bastante interesante; vamos a requerir de cosas que todavía no tenemos, pero ustedes ya saben que eso es lo chévere, porque se crean unas necesidades que nos van a impulsar a decir bueno, entonces ¿cómo mostramos esas necesidades? […][46] La de Darío y Leopoldo [coloca la conjetura] […] que es la que… no sé si ustedes pensaron la demostración… pero es éste esquema el que me sirve… la demo… ¿ya sabes cómo demostrarlo?

45 Darío: Sí. Colocando por ejemplo, otro punto en la recta

46 P: Sí.

47 Darío: ya tendríamos el triángulo… P… Q'… y ese punto, entonces pues la distancia…

48 P: A ver pasa, pasa Darío… y… porque voy a necesitar esta demostración para mostrarles realmente cómo todos llegamos por caminos distintos al mismo sitio. […][47][La profesora muestra la figura que presentaron Darío y Leopoldo en la clase anterior cuando formularon la conjetura].

49 Darío: Pues primero, para la demostración yo, yo… me di cuenta que… pues con uno de estos bastaría [punto P' o punto Q']…

50 P: Con uno basta, sí señor, entonces…

51 Darío: Quitemos por ejemplo ésta [tacha el segmento PQ'].

---

[44] La profesora reconstruye en el tablero la construcción en la que P y Q están a la misma altura.

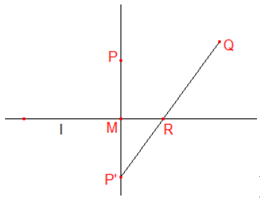
[45] Finaliza la clase en la que se presentaron las construcciones realizadas por los estudiantes, relacionadas con el problema planteado por la profesora, e inicia la clase en la que las conjeturas y construcciones del problema propuesto son analizadas.

[46] La profesora recuerda lo realizado en la clase anterior, y algunas de las construcciones correspondientes a las conjeturas que se expusieron.

[47] La profesora recuerda la construcción realizada por Darío y Leopoldo.

52 P: Quitemos esa, sí.

53 Darío: Entonces, va a ser… va a ser el mismo [punto] R, mejor dicho, entonces pues…

54 P: Entonces hagamos el dibujo como propones. [Darío hace la figura en el tablero dejando sólo el segmento P’Q 

].

55 Darío: ¿Cierto?

56 P: Sí.

57 Darío: Entonces pues, como… como está el segmento [P’Q] y [los puntos] están en dos semiplanos distintos entonces intersecan al…

58 P: A la recta l.

59 Darío: a la recta l… entonces la intersección…

60 P: Escogió… P y Q están en el mismo semiplano, escoge a P’ en el semiplano opuesto, entonces Q y P’ que están en semiplanos opuestos, el segmento corta.

61 Darío: Entonces bueno, esta suma [P’R + RQ] pues daría… como este punto [R] está entre P y Q, puedo hacer que PR más RQ sea igual a PQ. [Escribe: P’R + RQ = RQ]. Entonces si… cojo otro punto…

62 P: P’.

63 Darío: P’ sí. P’. [corrige y le agrega el prima a las P]

64 P: a P’Q.

65 Darío: Entonces si cojo otro punto de… de la recta… esto es…

66 P: Pero… primero una pregunta, primero te tengo una pregunta. En la tarea decía que PR más RQ y tú tienes es P’.

67 Darío: Ah pues sí. Por eso entonces… no pues por eso, es que después se hace que… como tengo un punto en la recta y tengo una recta perpendicular, entonces, si trazo aquí el otro segmento [PR], éste va a ser congruente [los triángulos PRM y P’RM] por criterio de congruencia de triángulos lado-ángulo-lado.

68 P: ¿De acuerdo? él construyo este segmento [PM] congruente a éste [MP’] y comparten un lado. Bien, o sea que esta suma [P’R + RQ = P’Q] es exactamente la misma de PR que era la que queríamos y ahora sí le doy permiso de que borre de P el “prima”. No ahí no, ahí sí [Darío borra el “prima” y deja: PR + RQ = RQ]. Bueno.

69 Darío: Entonces ya…entonces coloco… cojo un… no selecciono un…

70 P: Cualquier otro punto [en la recta l].

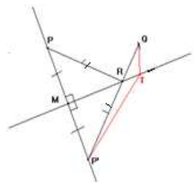
71 Darío: cualquier otro punto [en la recta l]…

72 P: ¿Aquí? [Ella ubica el marcador sobre la recta *l* y le pregunta si ahí ubica el punto]

73 Darío: Sí, cualquier… en cualquier lado. [La profesora ubica un punto T sobre la recta *l*] Entonces… ya no se cumpliría la interestancia entre P y Q [P'-T-Q], entonces no serían colineales P, T y Q.

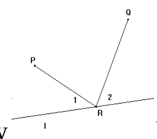
74 P: Sí.

75 Darío: Entonces ahí tengo un triángulo. Entonces, por el criterio de desigualdad del triángulo tengo que de Q a T más T a P es mayor que QP [o sea QT más TP' es mayor a QP´]. Entonces pues, con cualquier T va a ser igual. [



]

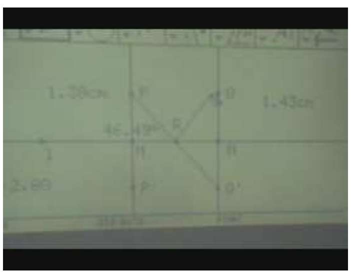
76 P: O sea desigualdad triangular… ¿sí?... ¿de acuerdo?, bueno… entonces, esa es la propuesta de él y ya vimos que funciona. Ya sabemos quién es R y ya sabemos cómo encontrarlo. […][48] Entonces ahora viene la propuesta… de… Henry. Henry dice que el ángulo… entre otras esta es una regla… una ley de la física, ¿no? de… de luz ¿cierto? que ¿dice qué? [muestra la figura de Henry

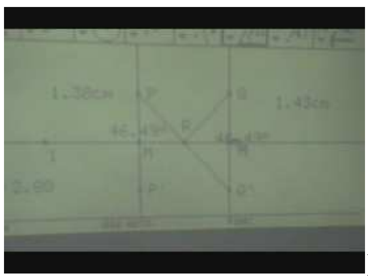


]

77 Daniel: el ángulo de incidencia es igual al ángulo de reflexión.

78 P: reflexión… el ángulo de incidencia que es éste [señala el ángulo 1] es igual al ángulo de reflexión [señala el ángulo 2]. Que un rayo de luz cae y se refleja con el mismo ángulo si? y si tratamos de mover ahí [se refiere a la construcción realizada de la conjetura de Darío y Leopoldo] para que eso suceda [la congruencia de los ángulos 1 y 2] si… que les dije que la construcción de Henry tiene un problema que yo con lápiz y papel difícilmente puedo… hacer… encontrar a la R, que con geometría dinámica sí puedo fácilmente, pero que con lápiz y papel es un poco difícil encontrar a R de esa forma. Pero… es cierto lo que dice… [Mide los ángulos en la construcción de Leopoldo y Darío

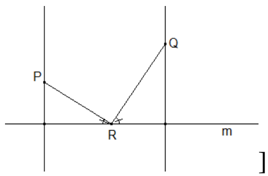




] y vemos que

[48] La profesora recuerda a los estudiantes la finalidad de la clase: comprobar si el punto R que propusieron los estudiantes es el mismo.

sí… y entonces me pregunté yo: bueno, ¿cómo yo lo demuestro? Claro, yo teóricamente no tengo que encontrarlo… yo teóricamente digo si R es el punto tal que el ángulo de incidencia sea igual al ángulo de reflexión, entonces la distancia… la suma de esas distancias es mínima. O sea que voy a empezar a... a tratar de demostrar ese teorema; tengo a [punto] P, a la recta *m*, a [punto] Q [en el tablero representa una recta *m*, dos puntos P y Q en el mismo semiplano y las rectas perpendiculares a la recta m, que pasa por éstos puntos] y he encontrado a R, tal que este ángulo y este ángulo son congruentes [ángulos 1 y 2 de la construcción de Henry][hace una gráfica como la siguiente



].

Quiero mostrar que R realmente es el punto para el cual la suma de esas distancias es mínima, ¿cómo hago?, sin usar la demostración de Darío, ya aquí mostré que… coinciden [las construcciones y la congruencia de los ángulos], pero ¿cómo lo demuestro así? ¿Qué está dado? Esto. Ah, ¿éste es quién? M [punto de intersección entre la recta *l* y la recta perpendicular a *l* que pasa por P], N [punto de intersección entre la recta *l* y la recta perpendicular a *l* que pasa por Q],

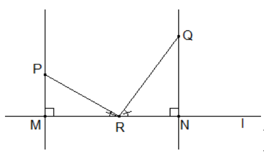
¡ah! y esta es la recta *l* [borra la letra m] y tengo estos ángulos [ángulos rectos determinados por las rectas perpendiculares y la recta *l*, ángulos PMR y QNR], no? Porque eso era parte de lo dado. Ah no, tú no tienes eso en tu figura, no? [se dirige a Henry]

79 Henry: que esos eran rectos [ángulos PRM y QRN]

80 P: que esos ¿eran rectos?

81 Henry: sí, y las perpendiculares.

82 P: ¿sí? Bueno, entonces digamos que sí, o si no lo puedo formar; entonces tenemos qué el ángulo… PMR es congruente a [ángulo] QNR [por ser ángulos rectos] y que éstos dos ángulos son congruentes [ángulos PRM y QRN] [es lo que encontró explorando



].

¿Cómo demuestro que PR más RQ es lo mínimo? [pausa] basándome en… en lo que ya sé, por ejemplo. [pausa] ¿Qué se les ocurre? [pausa] ¿Qué dices?

83 Melisa: No, que me estaba preguntando…

84 P: ¿Melisa?

85 Melisa: No pues me estaban preguntando si PR y RQ tiene que ser lo mínimo. Entonces les dije

que sí.

86 P: Sí, eso es lo que estoy tratando de mostrar. Pero claro yo puedo usar lo que ya… que ya sabemos cómo llegar a R y mostrar que éste camino que ya lo… verificamos, sí me lleva a la misma R que proponen ellos [Darío y Leopoldo]. ¿Qué características le pusieron ellos a la R? [pausa] ¿Quién era R? [pausa]

87 Estudiante: ¿Ellos?

88 P: Sí ellos, Darío.

89 Estudiante: El segmento y… la recta l.

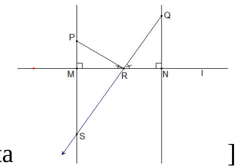
90 P: O sea, ¿de dónde nació R?; nació de… de construir éste segmento congruente a éste [PM y MP’] y son colineales, P’, R y Q son colineales, ¿sí? Entonces si yo puedo… se me ocurre a mí… mostrar, de alguna manera llegar a un punto P’ que cumple esta característica, que equidista de M y que está en la misma recta de Q y R…

91 María: Rayo opuesto a QR.

92 P: usando solamente lo que yo tengo. Entonces, el rayo opuesto a QR ¿Qué pasa si construimos el rayo opuesto a QR como dice María?

93 María: a [rayo] RQ.

94 P: a [rayo] RQ, sí; éste [traza en el dibujo el rayo RQ], busco esta intersección [con recta PM], la llamamos S. [se hace una representación como ésta




]

95 Estudiante: Tiene los ángulos congruentes.

96 P: ya, como dice María tan pronto yo le dije lo de la colinealidad, ella se ocurrió el rayo opuesto, ya me encargué de una de las condiciones que yo requiero. Lo único que me falta es mostrar que S cumple la otra [condición], que la distancia a M es la misma que de P a M.

97 Melisa: Ya está profe,

98 P: ¿ya está? ¿por qué?

99 Melisa: si profe porque mire que por rayos opuestos que el rayo RN es opuesto a RM…

100 P: sí.

101 Melisa: y miramos que [rayo] RQ es opuesto a [rayo] RS;

102 P: Sí.

103 Melisa: por definición de ángulos opuestos por el vértice… pues ahí ya están los ángulos opuestos por el vértice y por el teorema miramos que son congruentes, entonces ya tenemos lado, ángulo y ángulo. No perdón, ángulo, lado, ángulo [Congruencia entre los triángulos PMR y SMR].

104 P: Y ¿éste? [señala los segmentos SM y MP y les hace dos líneas para indicar la congruencia entre ellos].

105 Estudiantes: Congruentes.

106 P: Y ya mostramos que bajo esas condiciones eso nos da la misma distancia. Muy Bien. […][49] Y lo último que quiero es mirar la propuesta… de Germán y Ana. ¿Por qué llegan ellos a esa conjetura?, es mi pregunta [Muestra en el acetato la conjetura de Germán y Ana]. Dicen: R se encuentra en el punto de corte de la mediatriz del segmento PQ con la recta *l*. Digo, por qué llegan ellos a eso… porque hemos visto que… dos de los grupos pusieron condiciones más sencillas o más especiales, y llegaron a un punto R que, bajo estas condiciones, son válidas. Pero, Germán y Ana no me reportan si hay más condiciones o no. A pesar de eso, ellos llegaron a una conjetura. Entonces mi pregunta es: ¿es siempre falsa? ¿Hay momentos en que es verdadera? Entonces ya les toca a ustedes con la calculadora ver si encuentran.

107 Daniel: Cuando [los puntos P y Q] están a la misma altura sí.

108 P: ¿Cuándo están a la misma altura? ¿Entonces se cumple que R es el punto de corte de la mediatriz del segmento PQ? Pues puede ser… miren a ver… si es que ellos también usaron eso, o sí… ¿Ana no se acuerda [Germán no asistió]?

109 Ana: Pues es que, básicamente la conjetura es por construcción

110 P: La construcción que hicieron

111 Ana: Sí.

112 P: ¿Pero no te acuerdas qué condiciones pusieron?

113 Leonor: No, ninguna, ellos tenían a P y Q, cualquiera.

114 Ana: P y Q no eran

115 P: O sea para cualquier P y Q, ¿no había ninguna condición? ¿Y será cierto para cualquier P y Q?

116 Estudiantes: No… no

117 Ana: No dados… No, fijos eran P y Q

118 P: P y Q, ¿pero P y Q estaban en cualquier posición?

119 Ana: En el mismo semiplano.

120 P: Sí.

121 Ana: Sí, cualquier punto.

122 P: Las mismas distancias, las distancias podrían ser cualquier par. Entonces, ¿quién tiene un contraejemplo? Porque me están diciendo que disque no es posible.

123 Daniel: ¿Es la perpendicular y que pasa por el punto medio?

[49] Se hace un proceso similar para determinar la veracidad de la otra conjetura que requiere geometría dinámica.

124 P: Esa es la definición de mediatriz, sí. ¿Quién me puede mostrar un…?

125 Melisa: Sería a mano.

126 P: Bueno, a mano. [Melisa pasa al tablero]

127 Melisa: Pues según lo que hemos demostrado con los otros grupos.

128 P: Sí…

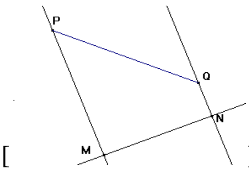
129 Melisa: Digamos que este es un segmento. Y sería acá.

130 P: P y ahí Q.

131 Melisa: Entonces trazamos acá… acá, y acá [dos rectas perpendiculares al segmento inicial].

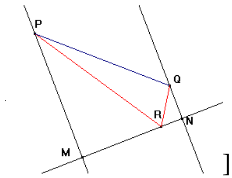
132 P: Las perpendiculares. Pero ponme P y Q porque si no cómo vamos a hablar el mismo idioma.

133 Melisa: Ponemos acá a P y acá a Q [en el mismo semiplano, cada punto en una recta perpendicular].

134 P: Más exagerado aún [la diferencia de distancias de P y Q a *l*][ 

] Bueno.

135 Melisa: Entonces, tomamos más o menos la medida [del segmento al punto Q] y trazamos acá [en el semiplano que no contiene al punto Q y sobre la recta perpendicular que contiene a Q]. [Melisa traza el segmento cuyos extremos son los puntos P y el punto encontrado y traza el punto de intersección entre éste segmento y el segmento inicial]

136 P: Y ese es R, este es R [ 

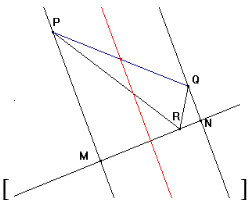
]

137 Melisa: Si Profe, este sería R y éste no es el punto medio [muestra el segmento MN].

138 P: No, del segmento PQ.

139 Melisa: ¿O sea de éste? [muestra PQ]

140 P: Sí, están diciendo que miremos el… punto, el punto medio del segmento PQ y la proyección.

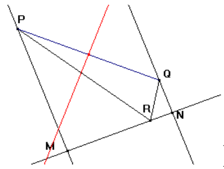
141 Melisa: ¿Entonces sería así? [ 

] ¿o así?

142 P: La mediatriz…

143 Melisa: ¿sería así?

144 P: Ah, sí, la mediatriz.

145 Melisa: Entonces, ¿quedaría por acá? [ 

]

146 P: Sí. Pero yo no sé si tu dibujo es posible… Bueno.

147 Melisa: Sería así

148 P: Por eso es que la calculadora es útil. Porque puede que ella... Esas líneas… son torcidas… y entonces le dé por fuera porque las torció. Por eso es mi pregunta… P y Q es la mediatriz del segmento PQ. Es el corte de la mediatriz del segmento PQ con la recta *l*. […] ¿Quién tiene un ejemplo… o contraejemplo? […][50]
PQ… queda por fuera ni si quiera queda adentro. [la mediatriz de PQ no corta en el segmento MN]

149 Ignacio: Esta es la mediatriz.

150 P: Bueno... pasa a ver. O sea que parece que la propuesta de Melisa, ya bien hecha… [se ríen] ya bien hecha, también funciona [Nancy ha hecho la construcción con Ignacio, conecta su calculadora al video screen]. Bueno, aquí muestra… aquí muestra Nancy, que… Nancy muestra

151 Nancy: Aquí [la mediatriz] quedaría en el segmento [arrastra P hasta que la mediatriz corta al segmento MN].

152 P: Bueno, primero mostremos el contraejemplo. Contraejemplo… [Nancy mueve MN hasta que el corte de la mediatriz de PQ se sale del segmento MN], ni siquiera queda dentro del segmento de… de las proyecciones… MN. Y bueno, vamos a ver en qué condiciones, de pronto sí se tendría. Entonces vamos a ver... [Nancy mueve P buscando que la mediatriz corte a MN en R] […]

153 Daniel: Cuando están a la misma altura.

154 P: Cuando están a la misma altura parece que sí… P y Q. ¿Sí? Entonces, lo que pasa cuando trabajamos con geometría dinámica es eso. Que a veces se nos olvida poner en nuestras conjeturas todas las condiciones que estamos viendo. Porque es muy posible que lo que ellos vieron fue cierto, pero no identificaron las demás condiciones. Entonces el teorema que proponen no es cierto porque faltan todas las condiciones.

---

[50] Se habla de un parcial que deben realizar en la clase.