CONCEPCIONES DE ALGUNOS PROFESORES DE MATEMÁTICAS DE BÁSICA SECUNDARIA SOBRE LOS DECIMALES Y SU RELACIÓN, COMO REPRESENTACIÓN, CON LOS NÚMEROS RACIONALES

Autoras:
Cristina Cruz Fonseca
Amalia Cristina Torres Montiel

UNIVERSIDAD PEDAGÓGICA NACIONAL
FACULTAD DE CIENCIA Y TECNOLOGÍA
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS
MAESTRÍA EN DOCENCIA DE LA MATEMÁTICA

Bogotá, 2008

CONCEPCIONES DE ALGUNOS PROFESORES DE MATEMÁTICAS DE BÁSICA SECUNDARIA SOBRE LOS DECIMALES Y SU RELACIÓN, COMO REPRESENTACIÓN, CON LOS NÚMEROS RACIONALES

Autoras:
Cristina Cruz Fonseca
Amalia Cristina Torres Montiel

Tesis de grado para optar al título de
Magíster en Docencia de las Matemáticas

Directora:
Mgs. Lyda C. Mora Mendieta

UNIVERSIDAD PEDAGÓGICA NACIONAL
FACULTAD DE CIENCIA Y TECNOLOGÍA
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS
MAESTRÍA EN DOCENCIA DE LA MATEMÁTICA

Bogotá, D.C., 2008

UNIVERSIDAD PEDAGOGICA NACIONAL
Educadora de educadores

FACULTAD DE CIENCIA Y TECNOLOGÍA
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS

ACTA DE EVALUACION DE TRABAJO DE GRADO

Escuchada la sustentación de la Tesis de Grado titulado ***"Concepciones de algunos profesores de matemáticas de Básica secundaria sobre los decimales y su relación, como representación, con los números racionales"***, presentado por los estudiantes ***Amalia Cristina Torres Montiel*** código 2005185019 y ***Cristina Cruz Fonseca*** código 2005185008, como requisito parcial para optar al título de **Magíster en Docencia de la Matemática**, analizado el proceso seguido por los estudiantes en la elaboración del Trabajo y evaluada la calidad del escrito final, se le asigna la calificación de **Aprobado** con 45 puntos.

Observaciones:

En constancia se firma a los 19 días del mes de junio de 2008.

JURADOS

Director(a) del Trabajo: Profesor(a) ____________
LYDA MORA

Jurados:

Profesor(a) ____________
GABRIEL MACERA

Profesor (a) FRANCISCO CAMELO
FRANCISCO CAMELO

A nuestras familias: ***Torres Montiel***
Cruz Fonseca

Agradecemos a

La profesora Lyda Mora, por su acertada dirección y apoyo permanente en el proceso de elaboración de este trabajo; al profesor Edgar Guacaneme por su valiosa colaboración en la lectura de los documentos iniciales, sus sugerencias siempre apropiadas y su constante respaldo; a los profesores Francisco Camelo y Gabriel Mancera que como jurados aportaron sugerencias pertinentes para la cualificación del trabajo.

Los profesores y estudiantes que de manera solidaria y confiada participaron contestando las encuestas, pues sin su contribución no se hubiera podido realizar la investigación.

Nuestras familias por su paciencia, comprensión y apoyo incondicional.

A Sammy por sus aportes y por su compañía en el proceso, no solo del trabajo final, sino de todo el tiempo dedicado a la maestría. Criss.

RESUMEN ANALÍTICO

TIPO DE DOCUMENTO	:	Tesis de grado
TIPO DE IMPRESIÓN	:	Mecanografía
NIVEL DE CIRCULACIÓN	:	Restringida
ACCESO AL DOCUMENTO	:	Universidad Pedagógica Nacional
TÍTULO DEL DOCUMENTO	:	Concepciones de algunos profesores de matemáticas de básica secundaria sobre los decimales y su relación, como representación, con los números racionales.
AUTORES	:	CRUZ FONSECA, Cristina y TORRES MONTIEL, Amalia Cristina
PUBLICACIÓN	:	Bogotá, D. C., 2008, 107 páginas.
PALABRAS CLAVES	:	Concepciones, representación, decimales, números racionales.

DESCRIPCIÓN

Esta investigación enmarcada en el paradigma interpretativo y con una metodología interpretativa, tiene como propósito identificar y caracterizar las concepciones de algunos profesores de matemáticas de básica secundaria, sobre los decimales como representación de los números racionales.

FUENTES

Para el desarrollo de la investigación se hizo una revisión bibliográfica en bases de datos, libros y artículos en revistas impresas y virtuales que incluyó aspectos relacionados con: concepciones sobre decimales y números racionales de maestros y de estudiantes para maestros de autores como Abrougui (2003), Gairín (2001/ 2003 - 2004), Gómez (2001), Ruíz (1993) y Thompson (1992); la representación en matemáticas se consultó en autores como Duval (1999), Janvier (1987), Castro (2001), (Luque & Mora,

2001) y Kaput (1987); historia de las matemáticas, en particular el desarrollo del número racional y la formalización del mismo desde las matemáticas consultando libros o artículos de autores como Boyer (1986), Smith (1958), Cajori (1993), Sarton (1935), Belna (1996), Sánchez (1997), Dedekin (1872/1998), Villegas (2004), Brooks (1880), Muñoz (1983), Apostol (1977) y Rey (1952); finalmente para el aspecto metodológico se consultó a Rico y Gil (2003), Marqués (2006) y Hernández, Fernández & Baptista (1991).

CONTENIDO

En el primer capítulo del documento se describe el problema de investigación, los antecedentes, la justificación, los objetivos y las hipótesis trazadas; en el segundo capítulo, se expone el marco teórico que sustenta el trabajo y que incluye el desarrollo de los temas: concepciones de los maestros de matemáticas, representación en el aprendizaje de las matemáticas, representación de los números racionales, historia de la representación de los números racionales y presentación formal del número racional; y en el tercero, se ilustra el aspecto metodológico de la investigación así como el análisis de la información recolectada; finalmente, se exponen las conclusiones.

METODOLOGÍA

La metodología empleada fue interpretativa y se usó la encuesta como técnica cuantitativa. En el análisis se empleó estadística descriptiva, que junto con el análisis teórico hecho respaldan el proceso de categorización. La investigación se desarrolló en tres fases: elaboración teórica, recolección de información y análisis descriptivo.

CONCLUSIONES

- Desde las matemáticas, se identificaron diferentes representaciones de los números racionales: como fracción, fracciones continuas finitas simples, gráfica y decimal.

- Desde la historia de las matemáticas, se hizo el seguimiento del proceso de construcción de los números racionales y sus representaciones fraccionaria y decimal, identificando el momento en el que se da el cambio de la notación fraccionaria a la notación decimal. Se evidenció a través de la encuesta aplicada a los docentes que en la escuela, en el proceso de enseñanza de los decimales, se reproduce el orden de construcción histórica: primero las fracciones y luego el paso a los decimales.

- Se establecieron seis categorías para el análisis de la información recolectada, tres para la variable de conocimiento formal: significado de los decimales, noción de densidad y relación entre decimales, fraccionarios y conjuntos numéricos; y tres para la variable acciones didácticas: conocimientos que deben saber los estudiantes para aprender decimales, significados que utilizan los docentes para introducir los decimales y organización jerárquica que hacen los docentes de los aspectos a aprender sobre decimales.

- A través de las encuestas se recogieron diversas afirmaciones, expresiones, ideas y respuestas de los maestros, que permitieron identificar sus concepciones sobre los decimales y su papel como representación de los números racionales. Los maestros de matemáticas, de básica secundaria, que participaron en la encuesta sobre los decimales y su relación***, como representación,*** con los números racionales mostraron cuatro clases de concepciones: representación decimal como cociente, representación decimal como fracciones decimales, decimales como representación de números racionales y decimales como parte de un conjunto numérico.

- Aunque una de las concepciones predominante es la de decimal como representación de los números racionales, no se observó que los maestros la usen para lograr mayor comprensión de la propiedad de densidad. La mayoría de los docentes usan representaciones diferentes a la decimal cuando se enfrentan a ejercicios relacionados con esta noción.

- Aunque los docentes señalan relaciones entre los fraccionarios y los decimales (como representación de números racionales), en el momento de usar estas relaciones, por ejemplo para elaborar diagramas y resolver ejercicios, no las tienen en cuenta.

- Establecer las concepciones que tienen algunos docentes sobre los decimales y su relación, como representación, con los números racionales posibilita la apertura de espacios en los cuales los maestros reflexionen sobre las propias concepciones buscando la posibilidad de efectuar cambios en las mismas que generen a su vez modificaciones en su quehacer en el aula.

- La presente investigación permitió a las investigadoras profundizar y ampliar sus conocimientos sobre los números racionales, en particular sobre su representación decimal y sobre las diferentes concepciones con que se puede abordar ésta representación.

- Conocer las diferentes concepciones sobre el objeto matemático abordado da pautas para modificar el quehacer en el aula de las investigadoras y diseñar propuestas de formación para futuros profesores de matemáticas.

CONTENIDO

ILUSTRACIONES

INTRODUCCIÓN

Se presenta en este documento una investigación acerca de las concepciones sobre los decimales y su relación, como representación, con los números racionales, de algunos maestros de Matemáticas de Básica Secundaria. En el primer capítulo se describe el problema de investigación que incluye: los antecedentes, la justificación, los objetivos y las hipótesis que orientaron la realización del trabajo.

En el segundo capítulo, atendiendo a los objetivos e hipótesis planteadas se hizo un estudio de los temas fundamentales para la investigación, lo que constituyó el marco teórico, incluye aspectos relacionados con las concepciones de los maestros de matemáticas, la representación en matemáticas, las representaciones de los números racionales, en particular la decimal, una revisión histórica sobre esta representación, y la formalización de los números racionales.

Para identificar las concepciones se diseño un cuestionario que indagó sobre los conocimientos formales y algunas acciones didácticas de los docentes alrededor de la representación decimal de los números racionales y su enseñanza. La manera como se diseño el cuestionario, la información recogida y su correspondiente análisis junto con los resultados y conclusiones se encuentran en el capítulo tres, en donde, además, se describe la metodología de investigación.

1 PROBLEMA DE INVESTIGACIÓN

En este capítulo se presenta la propuesta de investigación; en primera instancia los antecedentes y a partir de éstos, la justificación de la investigación, los objetivos y por último las hipótesis planteadas.

El estudio de los decimales forma parte del currículo de las matemáticas escolares debido principalmente a dos razones: *(i)* su uso generalizado para presentar información sobre diversas mediciones en la cotidianidad y en diferentes áreas del conocimiento, ya que se emplean para expresar medidas de longitudes, superficies, pesos, tiempo, capacidad, etc., y para presentar información estadística relacionada con sucesos sociales, culturales, políticos y económicos, y *(ii)* su importancia como sistemas de representación de valores aproximados y como expresiones infinitas para números *racionales* e irracionales, lo cual se considera indispensable para comprender los números reales, sus propiedades (densidad y completitud), así como los conceptos de límite, continuidad, derivada e integral definida (Ministerio de Educación Nacional [MEN], 2006).

A pesar de que el estudio de los decimales se inicia en los últimos años de básica primaria y se refuerza en los primeros de secundaria, como se evidencia en los estándares de matemáticas (MEN, 2006), en cursos posteriores y en primeros semestres de universidad se observan dificultades y vacíos en su aprendizaje, éstos se señalan en los antecedentes de investigación. Indagar acerca de las concepciones que tienen los docentes sobre los decimales permite identificar algunas de las causas de las dificultades de su aprendizaje y plantear acciones que conlleven a solucionarlas, ya que las concepciones sobre las matemáticas, los temas que enseñan y la enseñanza misma, influyen de manera importante en la forma como desarrollan su trabajo en el aula de clase y en los aprendizajes de los estudiantes (Thompson, 1992; Ernest, 1988/1994).

El presente trabajo, teniendo en cuenta que desde las matemáticas los decimales no son objeto matemático sino representación del objeto número racional, indaga sobre las concepciones que tienen los docentes acerca de los decimales y su relación, como representación, con los números racionales; se enmarca en el enfoque cognitivo de investigación en didáctica de las matemáticas, puesto que se pregunta sobre el conocimiento, las formas de describir el conocimiento y las concepciones de los profesores (Font, 2002; Llinares, 1996); y se centra en la línea de estudio pensamiento numérico, que investiga los procesos cognitivos y culturales con los se dan significados usando diferentes estructuras numéricas (Rico, 1996).

1.1 Planteamiento del Problema

1.1.1 Antecedentes de investigación

Los antecedentes de esta investigación se organizan en dos grupos: los de tipo personal, relacionados con la experiencia profesional de las investigadoras como maestras de matemáticas en educación básica y formadoras de docentes y; los correspondientes al estado del arte, que recogen una revisión bibliográfica de algunas investigaciones relacionadas con el objeto de esta investigación, desarrolladas en los últimos años.

1.1.1.1 La experiencia profesional

Durante más de trece años las investigadoras han sido profesoras de matemáticas en diferentes niveles de Educación Básica y Media Vocacional; en el transcurso de este tiempo han observado que los estudiantes presentan dificultades en el aprendizaje de las matemáticas y de manera particular de los temas referidos al manejo comprensivo de los números racionales, sus propiedades y sus representaciones; algunas investigaciones sobre este aspecto corroboran los hechos observados por ellas:

- Durante el aprendizaje de las operaciones de multiplicación y división de números racionales, para los estudiantes no es fácil justificar hechos como: *(i)* al multiplicar por un decimal el resultado no siempre es mayor que el multiplicando, *(ii)* es posible dividir un número entre uno mayor que él, *(iii)* al agregar ceros a los residuos se pueda seguir dividiendo, *(iv)* para obtener el producto o el cociente de dos números donde uno de ellos es potencia de diez, basta con correr la coma en el multiplicando o en el dividendo. Estos hechos son difíciles de comprender, pues los alumnos trasladan su conocimiento de los números naturales sobre los nuevos números, sin tener claro que el nuevo conjunto numérico, que está de fondo, tiene características diferentes y las operaciones cumplen, además de las propiedades de los números naturales, unas propiedades nuevas (Tirosh, Fischbein, Greaber & Wilson, 1998).

Algunas ideas que tienen los estudiantes sobre los decimales son:

- Al estudiar el orden en los decimales consideran que 3,24 es mayor que 3,4 porque 24 es mayor que 4, esto se debe a que interpretan los decimales como parejas de números naturales separadas por comas (Centeno, 1988).
- Consideran que entre dos decimales como 5,2 y 5,3 no hay otros números, esto implica que se está ignorando la propiedad de densidad en los números racionales. Se les dificulta, de igual manera, la ubicación en la recta numérica de algunos números racionales (Centeno, 1988).
- Interpretan la coma en la escritura decimal de diferentes formas erróneas: en el mismo sentido de la barra de la fracción, por ejemplo $2{,}5 = \frac{2}{5}$; como separación de las unidades de medida, m. y cm.; Kg. y g; y en el sentido gramatical de la escritura, como un separador (Brekke, 1996).

Estas observaciones han motivado el interés en estudiar aspectos relacionados con la enseñanza de los decimales y su relación con los números racionales.

Además, la experiencia en formación de profesores, adquirida por las investigadoras como integrantes de un centro de investigación en Didáctica de las Matemáticas[1] y como profesoras universitarias[2], ha permitido identificar que a través del trabajo con los docentes se incide en la transformación de los procesos de aprendizaje en el aula, en la medida en que se logren cambios en las concepciones sobre la disciplina y la didáctica; esto es posible si el proceso de formación tiene en cuenta lo que los docentes conocen y creen conocer (Ortiz, Hernández & Cruz; 2005).

1.1.1.2 Estado del arte

La literatura revisada se halló en: reportes de investigación encontrados en revistas publicadas en medios electrónicos, revistas especializadas en Educación Matemática en las bibliotecas de las Universidades Distrital Francisco José de Caldas y Pedagógica Nacional y libros sobre Investigaciones en Educación Matemática[3].

En la búsqueda se encontraron investigaciones que aportan al análisis de los resultados y a aspectos puntuales de esta investigación, para su presentación se organizaron atendiendo al aspecto central de cada trabajo, en tres grupos: *(i)* concepciones de los números racionales, *(ii)* concepciones sobre decimales y *(iii)* los decimales en la escolaridad; además se incluye una investigación que aportó a la metodología.

Concepciones de los números racionales.

a. El documento, de Tirosh, Fischbein, Graeber & Wilson (1998): *Concepciones de los futuros profesores de educación elemental sobre los números racionales*, aporta a esta

[1] Centro de Investigación y de Estudios sobre el Aprendizaje Escolar. AprendEs.
[2] Docentes catedráticas de la Universidad Pedagógica Nacional, en la ciudad de Bogotá.
[3] Universidades de la ciudad de Bogotá, Colombia.

investigación información para el marco teórico sobre las concepciones y conocimientos de un grupo de estudiantes para profesores de Educación Básica acerca de los números racionales.

Uno de los objetivos principales de esta investigación fue desarrollar un marco conceptual para analizar el conocimiento matemático de los futuros docentes sobre números racionales. La investigación se realizó con estudiantes para maestros en su primer año de universidad, a quienes se aplicó un cuestionario con el que se indagó sobre su compresión de los números racionales. Para analizar las respuestas al cuestionario examinaron la comprensión formal, algorítmica e intuitiva que de los números racionales mostraron los estudiantes para maestros, bajo la suposición de que el conocimiento matemático está conformado por un sistema de conexiones, entre estas tres dimensiones del conocimiento. En la dimensión algorítmica, se examinó la capacidad de hacer cálculos con números racionales y explicar los pasos sucesivos de los algoritmos estándares usados para las operaciones con fracciones y decimales. Así como la conversión de fracciones a decimales y viceversa, y las expresiones decimales infinitas periódicas. En la dimensión formal, se rastreó la capacidad de definir los números racionales e irracionales, en relación con la jerarquía entre los diferentes conjuntos de números, la posibilidad de un número de ser elemento de varios conjuntos numéricos a la vez, la densidad de los números racionales y la familiaridad con las propiedades conmutativa, asociativa y distributiva de las operaciones de adición y multiplicación. En la dimensión intuitiva, se observó la capacidad para producir modelos intuitivos adecuados para representar conceptos y operaciones entre los números racionales.

Entre los resultados de esta investigación se tiene que:

Con respecto al conocimiento algorítmico: la mayoría de los futuros docentes participantes, acertaron en el desarrollo de adiciones, sustracciones y multiplicaciones con números fraccionarios y con decimales. Los resultados no fueron tan satisfactorios con respecto a la división; además, algunos de los participantes que contestaron correctamente estos ejercicios primero escribieron los decimales en su forma fraccionaria y luego los operaron. Las respuestas incorrectas más frecuentes a los problemas de división con decimales estaban relacionadas con la ubicación incorrecta de las comas, y la frecuente declaración de que el ejercicio no se podía realizar ya que el dividendo era menor que el divisor. Asimismo, no podían justificar los pasos de los algoritmos estándares de las operaciones con decimales y fracciones; algunos no daban justificación, su respuesta era “simplemente se hace de esa manera”. A otros, les sorprendió que les preguntaran por la justificación, tan sólo sabían que esos eran los pasos a seguir, incluso algunos expresaron que ese conocimiento no estaba a su alcance.

Con respecto al conocimiento formal: se encontró que aquellos estudiantes que habían escogido su especialización en matemáticas tenían mejores resultados que los que no, podían expresar correctamente las definiciones formales de número racional e irracional, dibujaban un diagrama adecuado de Venn para representar los conjuntos numéricos, describían correctamente las propiedades conmutativa, asociativa y distributiva de la multiplicación. Mientras que los estudiantes que no escogieron como especialidad las matemáticas mostraron un conocimiento formal, de estos aspectos, escaso e incompleto. Con respecto a identificar a qué conjunto o conjuntos numéricos pertenece un número y a la comprensión de la densidad de los racionales se encontró que los conocimientos de los entrevistados eran muy pobres, se observó confusión entre número real y números positivos; y pocos conocían la densidad de los racionales, la mayoría expresó que entre un quinto y un cuarto no había otros números, el uno era sucesor del otro. Pero cuando la pregunta era entre decimales sí había conocimiento de la existencia de infinitos decimales entre números como 0,24 y 0,25.

b. La investigación *Estudiantes para maestros: reflexiones sobre la instrucción en los números racionales positivos*, de José María Gairín (2003 – 2004), presenta un estudio en el que detecta las dificultades de comprensión que tienen los estudiantes para maestros sobre los distintos significados que componen el concepto de número racional y su estructura como sistema. En el estudio se indaga sobre los siguientes aspectos: significado de las fracciones y de las expresiones decimales, significado de las relaciones de orden y la densidad respecto del orden, y conexiones entre las representaciones fraccionaria y decimal; se hace a través de una encuesta aplicada a estudiantes para maestros de primaria de la Universidad de Zaragoza, al inicio del segundo curso, para asegurar que sus respuestas correspondieran a las concepciones previas sobre números racionales.

En el análisis de las respuestas el autor identifica las seis características siguientes:

1. Los estudiantes para maestro tienen un significado casi exclusivo de la fracción como relación parte-todo asociado a un modelo físico.
2. La notación decimal se reconoce exclusivamente con significado numérico, no se asocia a cantidades de magnitud ni se sustenta en el uso de modelos.
3. La relación entre las notaciones fraccionaria y decimal se establece de forma exclusiva mediante procesos algorítmicos.
4. Las relaciones de orden entre fracciones no se justifican en modelos, simplemente se utilizan técnicas de cálculo.
5. No es frecuente que utilicen el principio de valor posicional para establecer relaciones de orden entre los números decimales.
6. Los estudiantes no admiten la densidad respecto del orden de los números racionales; la topología del conjunto de los números racionales es la misma que la de los números naturales.

La caracterización hecha por Gairín aporta a esta investigación elementos para caracterizar las concepciones de los docentes principalmente las descripciones de las características 2, 3 y 6 de su clasificación. Él encuentra que al relacionar las notaciones fraccionaria y decimal la mayoría de los estudiantes entrevistados utiliza como justificación la división entre el numerador y el denominador.

Concepciones sobre decimales

a. El documento de Abrougui (2003): *Concepciones de los profesores de la Escuela Básica, sobre los números decimales, a partir de un análisis epistemológico de los decimales, una aproximación teórica de las concepciones, el estudio del currículo y de un cuestionario aplicado a los profesores de la Enseñanza Básica*, aporta elementos acerca de las concepciones sobre decimales que tienen los profesores de los grados quinto y sexto de Educación Básica, hace un análisis epistemológico sobre la génesis del desarrollo de los decimales en la historia de las matemáticas que permitió identificar tres concepciones diferentes de los números decimales que no se excluyen mutuamente, pero se complementan. Apoyadas en la dialéctica de herramienta–objeto de Douady (1984), estas concepciones son:

- Los decimales como herramienta para resolver los problemas de la vida cotidiana, problemas externos a las matemáticas. En ese caso los califican como herramientas externas.
- Los decimales como números sobre los que se pueden efectuar operaciones. Los designan como objetos de estudio.
- Los decimales como herramienta para resolver los problemas de las matemáticas (aproximación, definición de los reales); se designan como herramientas internas de las matemáticas.

Además, hace un análisis desde la enseñanza apoyado en la revisión de los programas oficiales correspondientes a estos dos niveles de enseñanza básica, a partir del cual establece cuatro concepciones sobre los decimales:

- El decimal es un número fraccionario.
- El decimal es fracción donde el denominador es una potencia de 10.
- El decimal es un número con coma.
- El decimal es útil en la resolución de problemas cotidianos.

Por otra parte muestra el análisis de las respuestas de los cuestionarios lo que se constituye en algunas pautas para el análisis de esta investigación, dado que se encontraron concepciones de los decimales que la autora no había previsto, tales como:

- "Número que es dividido o que uno puede dividir por una potencia de 10", sería el resultado de una débil comprensión de la definición de decimal como fracción con denominador potencia de 10, el numerador será asumido como decimal en sí mismo.
- "Número inferior a 1", es errónea y es probablemente debido a la definición de decimal como fracción y de ésta como parte de la unidad.
- "Número no entero", se deriva de la concepción de número con coma pues caracteriza los decimales en relación con los enteros y la existencia de una parte decimal no nula.
- "Número comprendido entre dos enteros naturales", ésta es aceptable por la autora, en la medida en que todo decimal está comprendido entre dos enteros positivos consecutivos, excluyendo a los enteros positivos como decimales.
- "Resultado de una división de residuo no nulo", al efectuar la división entre dos enteros cuando se obtiene un residuo no nulo y un cociente entero, se continúa la división usando la coma para diferenciar la parte entera de dicho cociente, entonces esta concepción coincide, de cierta, manera con la de número con coma.
- "Número siempre positivo", ésta se deriva de la práctica escolar en la que solamente los decimales positivos son objeto de estudio.

El documento establece que, la concepción predominante de los profesores de 5º y 6º es que el decimal es *"un número con coma"*; concepción que es el origen de la confusión entre un decimal y un racional no decimal y el no reconocimiento de los enteros como decimales. También, encuentra que es frecuente la concepción de decimal como fracción cuyo denominador es una potencia de diez y el no reconocimiento de los decimales escritos en forma de una fracción cuyo denominador es diferente de una potencia de diez.

Finalmente en este estudio se considera que las dificultades de los profesores están derivadas de las deficiencias en los conocimientos matemáticos que tienen sobre la estructura del conjunto D (la autora asume los decimales como un conjunto numérico, subconjunto del conjunto de los números racionales), así como de nociones de notación de infinitesimales, de límite, cota inferior, etc.; la concepción sobre números decimales no se construye solamente por la posición del agente del sistema de enseñanza, sino que hay una visión personal sobre los números, sobre la manera de representarlos y sobre su utilización en la cotidianidad.

Abrougui hace el análisis de las concepciones de los docentes a la luz de aspectos epistemológicos y de la enseñanza, en contraste para la presente investigación se tuvieron en cuenta características formales de los decimales en las matemáticas y aspectos relacionados con su enseñanza.

b. El documento: *Las concepciones escolares de los decimales*, de Gómez (2001) muestra una caracterización de las concepciones sobre los decimales construidas en relación con los contextos escolares utilizados para la introducción de este tema, parte de la idea de que "las concepciones que los estudiantes construyen de los conceptos matemáticos dependen de los acercamientos o enfoques escolares con que la enseñanza los pone a su alcance" (p. 1), toma el significado de la palabra concepción en el sentido de Artigue y basándose en Brousseau identifica las concepciones como conocimientos que, en algunos casos, se constituyen en obstáculos para el aprendizaje, en torno a los cuales se reagrupan los errores recurrentes. La caracterización de las concepciones de los decimales que se derivan de las prácticas usuales de enseñanza y algunos de sus efectos es:

a) Los decimales en el contexto de la medida de magnitudes construidos a partir de la expresión de cantidades en términos de unidades y subunidades; donde, la coma decimal indica el cambio de unidad o el paso de la unidad entera a la unidad fraccionaria. En este contexto para los estudiantes no es clara la relación de orden entre los decimales, usan sus conocimientos de orden entre los números naturales lo que no les permite identificar que dado un decimal no es posible hallar su siguiente.

b) El *contexto algorítmico*, el estudio de las operaciones con decimales se hace en forma mecánica, en este se refuerza el traspaso de las propiedades de los números enteros a los decimales, el denominar parte entera a la de la izquierda de la coma y decimal a la de la derecha, lleva a que algunos estudiantes consideren decimal sólo a esta última.

c) Al introducir los decimales como una nueva forma de escritura, a partir de las fracciones decimales, se encubre la existencia de los decimales no racionales, es decir, los irracionales, y se dificulta la comprensión de la relación entre las fracciones y los decimales pues se da la idea de que sólo se trata de un cambio de sistema de representación.

d) Cuando se prolonga el sistema de numeración posicional de los números naturales hacia la derecha colocando una coma que señala un cambio de sentido, para los números a la derecha de la coma (parte decimal) el valor de posición está dado por las potencias negativas de la base de numeración decimal.

e) Al ampliar los campos numéricos, el paso de los racionales a los reales implica la construcción de nuevos decimales que representen los irracionales, es decir, las expresiones decimales infinitas y no periódicas, aunque los estudiantes las consideran como números no racionales, no las ven como aproximaciones mediante fracciones decimales.

Para esta investigación el artículo de Gómez aporta elementos para la caracterización de las concepciones sobre decimales y para el análisis de la información recogida.

c. En el artículo *Sistemas de representación de números racionales positivos. Un estudio con maestros en formación*[4] de Gairín (2001), se presenta una investigación que busca responder a la pregunta *"¿de qué modo se pueden modificar los conocimientos sobre los Números Racionales de los estudiantes para maestro?"*, la búsqueda de respuestas a la pregunta formulada fue realizada en dos etapas: en la primera a través de la metodología de investigación acción se elaboró e implementó una propuesta didáctica que buscaba incrementar la comprensión de un grupo de estudiantes, futuros maestros, sobre los números racionales positivos mediante el fortalecimiento de las conexiones entre las notaciones fraccionaria y decimal. En la segunda etapa a través de entrevistas, a estudiantes participantes de la primera etapa, se indagó sobre las relaciones entre las producciones previas de estos estudiantes y su actuación como profesores.

Esta investigación centra su interés en el estudio de las representaciones externas, es decir, en la forma de lenguaje oral, símbolos escritos, dibujos u objetos; en los modos de representación empleados y en los significados que se asignan a estas representaciones, dado que los sistemas de representación son esenciales para conocer el grado de comprensión de los estudiantes, los caracterizan de la siguiente manera:

- los objetos matemáticos no deben confundirse con la representación que se hace de ellos.
- Las representaciones no son aisladas, tienen un carácter sistémico.
- Las representaciones no tienen un carácter universal, cada una destaca un aspecto del concepto mientras que oscurece otros.
- La comprensión de un concepto matemático comporta el dominio coordinado de dos o más sistemas de representación.

Las conclusiones de la primera etapa, que para el presente trabajo aportan datos para la caracterización de las concepciones sobre decimal como representación de los números racionales, muestran que sí es viable una propuesta didáctica que mejore las conexiones entre las notaciones fraccionaria y decimal de los estudiantes para maestros, aunque el

[4] Este artículo corresponde a un resumen de la Memoria de la Tesis Doctoral del autor.

proceso es dispendioso puesto que los estudiantes están más acostumbrados a usar técnicas de cálculo que a hacer la evaluación semántica de las expresiones que emplean; entre los aspectos positivos detectados a lo largo del proceso encontraron que los estudiantes que conectaron la notación decimal con la expresión polinómica decimal fueron capaces de: trasladar los resultados obtenidos bajo otras representaciones respecto de los decimales finitos y periódicos; y de dar significado, dentro del modelo, a operaciones entre notaciones decimales. Dentro de las dificultades detectadas señala que los conocimientos previos de los estudiantes sobre la fracción como relación parte todo obstaculiza el proceso de establecer conexiones entre otros significados para esta misma representación simbólica (bajo la representación fraccionaria los racionales también tienen significados desde el contexto de medida, como operadores y como razones); y que los conocimientos previos sobre la noción de infinitésimo dificulta la comprensión de los procesos de reparto en infinitas partes, sobre todo cuando el análisis se hace a través de situaciones de medida.

Las conclusiones de la segunda etapa de la investigación caracterizan la actuación profesional de los estudiantes para maestros de acuerdo con el dominio conceptual que lograron de los números racionales positivos durante la primera etapa de la investigación, en la que se estudiaron siguiendo el modelo de enseñanza diseñado por los investigadores, están dadas desde tres aspectos:

- Desde la revisión de las tareas de los escolares. Si la comprensión del modelo por parte del estudiante para maestro es débil, la detección de los errores cometidos por los estudiantes es deficiente.
- Desde las explicaciones que ofrecen a los escolares. Si la comprensión del modelo por parte del estudiante para maestro es adecuada, sus explicaciones superan la simple exposición de los resultados correctos se centran más en el origen de los errores.
- Desde las actividades que proponen a los escolares. Se encontró que los futuros maestros tienden a reproducir la secuencialización del aprendizaje con la que ellos aprendieron.

d. Broitman, Itzcovich & Quaranta (2003) en su artículo: *La enseñanza de los números decimales, el análisis del valor posicional y una aproximación a la densidad*, presentan una reflexión acerca de la enseñanza y aprendizaje de los números decimales, hacen un análisis sobre el significado del valor de las cifras en diferentes posiciones y sobre el manejo de la densidad. El documento presenta una propuesta de actividades en el aula centrada en la resolución de problemas y en el trabajo en equipos generando discusiones entre los estudiantes. Identifica que los estudiantes tienen concepciones sobre la escritura de los decimales a partir del trabajo no escolar relacionado con el uso del dinero y la medida, en Argentina, el manejo del dinero incluye la utilización de centavos, lo que hace que los alumnos tengan diversos recursos y notaciones espontáneas para escribir los "números con coma"; encontraron que algunos niños, para distinguir en la escritura pesos de centavos, utilizan notaciones en las que no aparece escrita la coma, aunque tienen en cuenta que no se mezclen las diferentes unidades de medida en los cálculos; los autores muestran las dificultades que tienen los niños sobre el tema y la posibilidad de utilizarlas como punto de partida de nuevos aprendizajes. Los investigadores se refieren a los decimales como "números con coma" sobre los cuales los niños realizan un cálculo mental que les permite ver si los resultados obtenidos de manera escrita son correctos, a pesar de tener escrituras incorrectas de dichos números, para los autores es claro que esta identificación es punto de partida para promover intervenciones de los docentes e interacciones entre los estudiantes que provoquen la construcción de nuevos conocimientos; en las conclusiones sobre esta parte de la investigación se enuncia que los problemas relacionados con el manejo de dinero tienen límites en la profundización del estudio del valor posicional y su relación con los decimales, puesto que en esta clase de situaciones el uso de los decimales sólo va hasta las décimas y no generan la necesidad de usar decimales infinitos (ya sean periódicos o no), lo que hace necesario hacer una descontextualización de estas primeras relaciones para favorecer el aprendizaje de aspectos esenciales de los decimales.

La densidad es el otro aspecto abordado en esta investigación, como ya se mencionó, los investigadores afirman que éste es a veces ignorado en la escuela, proponen abordarlo de manera intuitiva; igual que en el aspecto anterior, establecen que los problemas sobre dinero y medidas tienen límites, pues la relación de orden que se trabaja en éstos es de carácter discreto como en los naturales, el documento finaliza argumentando que profundizar en el funcionamiento de los números decimales es una base para la comprensión de los problemas de interpretación, producción, orden y operaciones con estos números.

Este artículo aporta a la presente investigación datos sobre las concepciones y conocimientos que tienen los maestros de básica secundaria sobre los decimales y que permiten el análisis de la información obtenida mediante la encuesta aplicada en Bogotá.

Los decimales en la escolaridad

Un texto de lectura obligatoria para la realización de este trabajo es el de Centeno (1988), *Números decimales. ¿Por qué? ¿Para qué?*. En éste, la autora presenta un estudio sobre los decimales, dividido en cuatro partes, la primera dedicada al examen de los usos sociales de estos números y su situación en la enseñanza obligatoria española; la segunda, dirigida a su estudio desde la historia y las matemáticas; la tercera, orientada al análisis de los problemas de su enseñanza; y la cuarta a proponer diversas situaciones para su estudio en la escuela.

Para la realización de este trabajo ha sido de importancia el análisis que hace Centeno de las diferentes formas como pueden introducirse los decimales en la enseñanza elemental y las consecuencias de cada forma de presentación.

Primero, Centeno muestra cómo en las orientaciones de los programas oficiales de su país se pasa de interpretar el decimal como una forma de escribir medidas (metros, centímetros o monedas), a interpretarlo como un subconjunto del conjunto de los números racionales, o en otros casos, a introducirlos como un sistema de numeración, para finalmente, a partir de la noción de fracción interpretarlos como el cociente de dos números. Luego expone, de autores diversos, distintas formas de presentación de los decimales: como extensión del sistema de numeración decimal, como una forma de codificar una medida, como una "función numérica" que lleve a la necesidad de crear nuevos sistemas numéricos y a través del uso de materiales didácticos. Después de esta presentación, la autora concluye que aunque cada propuesta permite que los estudiantes den significados a los decimales, éste queda incompleto e incluso puede dar lugar a errores; propone que:

> […] es posible que debamos aceptar esta limitación. Que debamos presentarlos primero de forma incompleta (como escrituras con coma, por ejemplo) y que sólo mas tarde podamos introducirlos realmente como números decimales con todas sus propiedades. No que lo hagamos así, si estamos seguros que después podremos corregir las concepciones erróneas que hayan podido producirse (p. 93).

Para finalizar el estado del arte se incluye el reporte de la investigación *Elaboración de una encuesta para el estudio de las creencias de los profesores de matemáticas sobre evaluación* de Luis Rico y Francisco Gil (2003), el cual aportó un modelo metodológico y pautas para la elaboración del cuestionario.

El reporte muestra el proceso de construcción de un cuestionario de escala de valoración para detectar concepciones y creencias de los profesores de matemáticas sobre evaluación. En éste se presenta un método de elaboración de cuestionario diferente al empleado usualmente en las investigaciones sobre este tema, la diferencia radica en que las preguntas del cuestionario surgieron de la identificación empírica de las opiniones, juicios y valoraciones dadas por los profesores como respuestas a una encuesta abierta, las cuales, a través de un proceso inductivo, se organizaron en un sistema de categorías que se fundamentó teóricamente; a partir de esa primera categorización y revisión de información se elaboró el cuestionario definitivo. Para dar fiabilidad a la clasificación realizada se pidió a *investigadores externos* ubicar la información recogida en las categorías previamente establecidas, este procedimiento de validación se conoce como *"proceso de control por expertos"*. A partir de estas categorías se establecieron las variables para caracterizar el pensamiento del profesor. El cuestionario así elaborado conjugó la reflexión teórica y analítica usual, lo cual aseguró tanto la validez de la información recogida como de la categorización establecida.

Estas investigaciones aportan elementos que justifican la realización de este trabajo y al mismo tiempo brindan pautas para la elaboración de las preguntas de los cuestionarios y la comprensión del número racional en busca de la cualificación del proceso de categorización.

1.1.2 Justificación y formulación del Problema

Actualmente se hace mayor uso de los decimales en disminución del uso de las fracciones, esta situación está motivada por el empleo creciente de calculadoras y programas de computador que hacen las operaciones con ellos. En la vida diaria, se usan los decimales en contextos como: procesos de medición, reportes de economía, de deportes, de salud, etc. Los decimales dan la posibilidad de acercarse tanto como se quiera o se pueda a las medidas de magnitudes continuas.

En la escuela la introducción del concepto de decimal se hace con fines prácticos, no sólo en el estudio de las matemáticas sino también en otras áreas del conocimiento como las ciencias naturales; los estudiantes los aprenden para representar cantidades relacionadas con intereses, porcentajes y diferentes medidas; generalmente su estudio se hace a través de problemas relacionados con la medida y el dinero, lo que permite una relación entre lo que los alumnos ya conocen y los nuevos significados que se quiere que aprendan. En la secuencia de enseñanza la relación de los decimales con los números reales, en forma particular con los racionales, y las situaciones en que están implícitos los conceptos de infinito y de continuo no son lo suficientemente exploradas (Centeno, 1988), así como tampoco se muestra la densidad del conjunto de los números racionales (Broitman, 2003), estos dos aspectos se constituyen en obstáculos[5] para el aprendizaje de los números reales.

En el proceso de enseñanza el paso de fracciones y fracciones decimales a decimales es visto sólo como una simplificación de los algoritmos que los convierte en números muy parecidos a los naturales, constituyéndose este hecho en otro obstáculo para avanzar en su comprensión como sistema de representación, y en la comprensión del objeto matemático que representan: los números reales (Rey, 1952). Al respecto, Centeno (1988) señala que: "[...] Usar los decimales en contextos cotidianos es fácil pues se parecen a los naturales, ese uso no exige mayor conocimiento sobre ellos mismos al contrario, esa primera comprensión se convierte en obstáculo para su comprensión como objeto matemático [...]" (p. 13).

Como señala Gómez (2001), de las prácticas usuales de enseñanza se derivan concepciones de los decimales que traen consigo más obstáculos para la posterior comprensión del número racional, como por ejemplo: la coma decimal marca un cambio de unidad de la parte entera a la parte fraccionaria, la parte decimal es sólo la que está a la derecha de la coma, los decimales son vistos como una nueva forma de escritura para las fracciones, los decimales se construyen prolongando el sistema posicional hacia la derecha y la coma marca el cambio de sentido, se construyen nuevos decimales que no proceden de fracciones y los estudiantes los asumen como números determinados.

[5] Se asume en este trabajo el significado de obstáculo dado por Bachelard y Brousseau (como se cita en Centeno, 1988, p. 145): "En matemáticas, un obstáculo es un conocimiento que es válido en un determinado contexto, que como tal puede durar mucho tiempo mientras no aparezca un conflicto. Éste llega cuando aparece una situación que parece semejante a aquellas en las funcionaba el concepto, pero que aplicándolo a ellas conduce al error. El conocimiento se releva insuficiente frente a la nueva situación y para resolverlo es preciso reestructurar el conocimiento anterior".

Estas dificultades y obstáculos que se presentan en el proceso de enseñanza de los decimales también se perciben en Colombia, el Ministerio de Educación Nacional (MEN), consciente de éstos, a través de los Estándares básicos de competencias matemáticas (MEN, 2006), plantea desde lo intuitivo hasta lo formal una propuesta que busca cambios en dicho proceso de enseñanza: iniciando su estudio en los grados cuarto y quinto de Educación Básica a partir de su uso en diferentes contextos; avanzando en los grados sexto y séptimo hasta su representación y operatoria; analizando los procesos infinitos de las notaciones decimales en los grados octavo y noveno; para finalmente llegar a su formalización como representación de los números racionales y los números reales en los grados décimo y décimo primero de Educación Media Vocacional. Se presentan a continuación los estándares, relacionados con el aprendizaje de los números racionales y su representación decimal, propuestos por niveles para los grados de cuarto a undécimo:

Para los grados cuarto y quinto

- *Utilizo la notación decimal para expresar fracciones en diferentes contextos y relaciono estas dos notaciones con la de los porcentajes.* (p. 82)

Para los grados sexto y séptimo

- *Utilizo números racionales, en sus distintas expresiones (fracciones, razones, decimales o porcentajes) para resolver problemas en contextos de medida.*
- *Justifico la extensión de la representación polinomial decimal usual de los números naturales a la representación decimal usual de los números racionales, utilizando las propiedades del sistema de numeración decimal.*
- *Reconozco y generalizo propiedades de las relaciones entre números racionales (simétrica, transitiva, etc.) y de las operaciones entre ellos (conmutativa, asociativa, etc.) en diferentes contextos.* (p. 84)

Para los grados octavo y noveno, en el pensamiento variacional

- *Analizo los procesos infinitos que subyacen en las notaciones decimales.* (p.87)

Y para los grados décimo y undécimo

- *Analizo representaciones decimales de los números reales para diferenciar entre racionales e irracionales.*
- *Reconozco la densidad e incompletitud de los números racionales a través de métodos numéricos, geométricos y algebraicos.* (p. 88)

A pesar de las políticas del MEN, en la escuela, hasta grado octavo los decimales se presentan como una clase de números, haciendo énfasis en el uso de los algoritmos para las operaciones de suma, resta, multiplicación y división. Su estudio se hace a partir de: situaciones de medida, extensión de la división no exacta entre números naturales (forma algorítmica), representación de fracciones, ampliación de los campos numéricos y prolongación del sistema posicional, esto se evidencia a través de los libros de texto que son una herramienta en la que se apoyan los maestros[6], no se hace énfasis en elementos como: la relación de los decimales con los números reales, o los números racionales, los procesos infinitos, la densidad, entre otros; en los cursos superiores, noveno a undécimo, se supone que los estudiantes, en general, tienen un buen dominio de los números racionales, por lo tanto, el estudio de los decimales no se aborda de forma explícita, se continúa con el estudio de los conjuntos numéricos, desconociendo su importancia e incidencia en el aprendizaje de los números reales.

De otra parte, la Ley General de Educación (1994), en los Artículos 77 y 78, muestra la importancia de flexibilizar el currículo escolar de manera que se tengan en cuenta las necesidades reales de la comunidad a la que atiende cada institución; para responder con

[6] En algunos de los libros de texto revisados, los decimales se presentan a partir de situaciones de medida, en donde se usan fracciones decimales que después se escriben con su expresión decimal (Lozano, Forero, Vela, Fernández – Aliseda, J. 2004a,b; Cubillos, Salgado, Nivia, Torres, Acosta, & Orjuela, 2004; Mejía, 2001; Millán, Neira, Ochoa, Bautista, Herrera, 2002a,b; Camargo, García, Leguizamón, Samper, Serrano, 2004) y en otros textos se presentan a partir de la división no exacta de naturales (Leguizamón, Guerrero, López, 2004a,b). La secuencia que siguen, en general, después de la presentación es la siguiente: conversión de fracciones a decimales y de decimales a fracciones, ampliación del sistema posicional hacia la derecha, orden en los decimales, operaciones con decimales y problemas que se resuelven con decimales.

calidad a este reto, es necesario revisar los factores que inciden en los procesos educativos y plantear acciones que lo permitan, uno de éstos tiene que ver con la formación y las acciones de los maestros. Es para los centros de formación y actualización docente importante conocer, no sólo las necesidades de los maestros sino también sus concepciones y creencias respecto de su labor y el área de conocimiento en que se especializan, para poder ofrecer programas de formación que promuevan cambios reales que incidan en la escuela; además, porque, como lo mostró Gairín (2001) en su investigación, si la comprensión conceptual de un objeto matemático por parte del estudiante para maestro es adecuada, su desempeño en las actividades de revisión de tareas escolares y explicaciones a los estudiantes, superan la simple explicación de los resultados correctos y se centran más en el origen de los errores.

La formación y actuación de los docentes lleva implícitas concepciones acerca de las matemáticas, su enseñanza y su aprendizaje, las cuales son determinantes en las decisiones que toman respecto al contenido y la forma de presentarlo en el salón de clase. (Santos, 1993). Unos de los aspectos que tienen mayor influencia sobre el quehacer de los maestros y en consecuencia sobre lo que los estudiantes aprenden, son su conocimiento de la materia y sus experiencias cotidianas (Gairín 2001, Luelmo 2004). Las concepciones que los profesores tienen sobre las matemáticas se pueden evidenciar en su práctica y en la medida en que son concientes de éstas las pueden o no modificar lo cual llevaría a modificar también la práctica, al respecto Ernest (1994) afirma:

> Mathematics teachers' beliefs have a powerful impact on the practice of teaching. During their transformation into practice, two factors affect these beliefs: the constraints and opportunities of the social context of teaching, and the level of the teacher's thought. Higher level thought enables the

> teacher to reflect on the gap between beliefs and practice, and to narrow it. (p. 4)[7]

Para que los docentes reflexionen y hagan conciencia sobre sus concepciones y la influencia que tienen en el desarrollo de su actividad en el aula, es esencial que conozcan las concepciones de otros docentes con las que puedan confrontar las propias, bajo esta perspectiva esta investigación aporta a la caracterización de las diferentes concepciones sobre los decimales y su relación, como representación, con los números racionales.

También puede constituirse en un insumo para el diseño de material de apoyo de programas de formación docente, que promuevan cambios en la forma como los docentes orientan el aprendizaje de número racional y número real en el aula escolar, asimismo brinda elementos para orientar el currículo, tanto en los cursos donde se estudia la temática – con el ánimo de movilizar las concepciones que tienen los futuros profesores – como en aquellos espacios donde se dan pautas para la organización y planeación de tareas de enseñanza y aprendizaje.

Dada la importancia y pertinencia de estudiar las concepciones de los maestros sobre los decimales como representación de los racionales, se plantea la siguiente pregunta:

> ***¿Cuáles son las concepciones manifestadas por los maestros acerca de los decimales y su relación, como representación, con los números racionales?***

[7] Las creencias de los profesores de matemáticas tienen un fuerte impacto en la práctica de la enseñanza. Durante su transformación hacia la práctica, hay dos factores que afectan sus creencias: las limitaciones y las oportunidades del contexto social de la enseñanza, y su nivel de pensamiento. Altos niveles de pensamiento , permiten, reflexionar sobre la brecha entre creencias y práctica, y cerrarla. (Traducción libre de las autoras)

1.2 Objetivos

1.2.1 Objetivo General

Identificar y caracterizar las concepciones que tienen algunos maestros de matemáticas, de básica secundaria, sobre los decimales y su relación***, como representación,*** con los números racionales.

1.2.2 Objetivos Específicos

Para el alcanzar el objetivo general se plantean los siguientes objetivos específicos, que están en estrecha relación con las fases de la investigación, los objetivos primero y segundo se consiguen a través del estudio y exploración de documentos; el tercer y cuarto objetivos implican la creación de instrumentos de recolección y análisis de información.

1. Identificar, en las matemáticas, las diferentes representaciones de los números racionales.
2. Identificar, desde la historia de las matemáticas, los obstáculos, dificultades y aciertos en el proceso de construcción de los decimales como representación de los números racionales.
3. Reunir afirmaciones, expresiones, ideas y respuestas de maestros, que permitan identificar sus concepciones sobre los decimales y su papel como representación de los números racionales.
4. Analizar y organizar la información recolectada, por medio de categorías de análisis para caracterizar las concepciones de los docentes sobre los decimales y su relación con los números racionales.

1.3 Hipótesis de Investigación

Las hipótesis surgieron a partir de la revisión de investigaciones sobre el tema de interés, del estudio de las historia del desarrollo de la noción de número racional y su representación decimal y de la experiencia como formadoras de profesores de las investigadoras, estas son:

Los maestros:

- Consideran que los decimales son equivalentes a las fracciones decimales.
- No son conscientes que en bases diferentes a la decimal es posible utilizar la representación n - mal.
- Asocian los decimales con los números fraccionarios.
- Aunque conocen la propiedad de la densidad de los números racionales no son conscientes de que la representación decimal facilita su comprensión.
- Dependiendo de la concepción que tengan sobre los decimales ven los decimales como una representación de los números racionales o como un subconjunto de éstos.

2 MARCO DE LA INVESTIGACIÓN

Las investigaciones sobre concepciones de los profesores, acerca de temas puntuales de las matemáticas, hacen aportes a la Educación Matemática en campos como la investigación en la formación de profesores, el aprendizaje y enseñanza de las matemáticas, la toma de decisiones para proponer cambios de currículo, entre otros; estas investigaciones muestran que el quehacer de los docentes en el aula está fuertemente influenciado por sus concepciones sobre las matemáticas, su enseñanza y su aprendizaje (Thompson, 1992; Ernest, 1988/1994). En esta investigación se busca identificar las concepciones que tienen algunos docentes sobre la representación decimal de los números racionales, para lo cual, en este capítulo, se presentan los aspectos teóricos que son marco de referencia para su planteamiento, organización e interpretación, y están relacionados con: las concepciones de los maestros y la representación desde la Educación Matemática, la representación de los números racionales en particular la representación decimal, las concepciones sobre los decimales y su relación con los números racionales que se van a tener en cuenta para el análisis de la información recogida, el desarrollo histórico de los números racionales y por último su construcción formal.

2.1 De las concepciones

En la literatura revisada acerca de la noción de *concepción* se encuentra que en las investigaciones sobre concepciones de maestros y estudiantes, relacionadas con conceptos matemáticos, se hace una revisión de este término a partir de la década de los 80, los autores más citados son Ernest, Thompson, Artigue, Vergnaud, Brousseau, Llinares y Balacheff quienes han estudiado y teorizado sobre este tema y proponen caracterizaciones para el término *concepción* en el campo de la Didáctica de las

Matemáticas. Para esta investigación se asume como concepción lo propuesto por Thompson (1992):

> It seems more helpful for researchers to focus their studies on teachers' conceptions –mental structures, encompassing both beliefs end any aspect of the teachers' knowledge that bears on their experience, such as meanings, concepts, propositions, rules, mental images, and the like – (p. 141)[8]

Propuesta que está acorde con las siguientes caracterizaciones planteadas desde la didáctica de las matemáticas*:*

1. Gran parte de los autores antes mencionados aceptan como características de las concepciones del sujeto:

> […] su existencia previa a la instrucción formal; su carácter a veces resistente, que no puede ser modificado con la instrucción expositiva; y, en particular, la estrecha relación con las situaciones en las que un concepto se dota de sentido. (Ruiz, 1993, p. 72)

2. A partir de la definición de concepto, que Vergnaud propone (como se cita en Ruiz, 1993, p. 73), la noción de *concepción* da cuenta del estado de los conocimientos de un individuo en relación a un concepto, y se caracteriza por:

    i. los invariantes que el sujeto reconoce como notas esenciales que determinan el objeto;

[8] Parece más útil para los investigadores centrar sus estudios en las concepciones de los profesores – sus estructuras mentales, uniendo las creencias y algunos aspectos de su conocimiento que fortalecen su experiencia, tales como significados, conceptos, proposiciones, reglas, imágenes mentales y similares – . (Traducción libre de las autoras)

ii. el conjunto de representaciones simbólicas que le asocia y utiliza para resolver las situaciones y problemas ligados al concepto;
iii. el conjunto de situaciones, problemas, etc. que el sujeto asocia al objeto, es decir, para las cuales encuentra apropiado su uso como herramienta. (Ruiz, 1993, pp. 73 - 74)

En el conocimiento didáctico hay dos puntos de vista desde donde dar significado al término *concepción*: uno cognitivo, que hace referencia al conocimiento del sujeto sobre un objeto y se origina de los procesos de enseñanza y aprendizaje y, otro epistemológico, que se refiere a la evolución histórica del saber matemático, considerado de carácter institucional pues está asociado a determinadas instituciones culturales y sociales[9]. El interés de esta investigación es estudiar las concepciones de los maestros de básica secundaria, asumiendo la perspectiva cognitiva, por lo tanto se indaga sobre aspectos de su experiencia en la enseñanza de los decimales y sobre sus conocimientos del tema.

Dado que los decimales son una representación de los números racionales e irracionales es importante revisar, desde la didáctica, algunas elaboraciones teóricas respecto al papel de la representación en el aprendizaje de las matemáticas.

2.2 La representación en el aprendizaje de las matemáticas

Un aspecto fundamental en los procesos de aprendizaje y en forma especial en el aprendizaje de las matemáticas está relacionado con la representación, ésta es parte inherente del contenido matemático y de las cogniciones asociadas a la actividad matemática, permite mostrar y avanzar en la comprensión del conocimiento, como lo afirman Duval y Janvier:

[9] Estudios más detallados sobre las concepciones se pueden ver en: Ruiz (1993); Mora & Torres (2007); Rico & Gil (2003); Abrogui (2003).

> No hay conocimiento que un sujeto pueda movilizar sin una actividad de representación. (Duval, 1999, p. 25)

> We incline to believe that understanding is a cumulative process mainly based upon the capacity of dealing with and “ever – enriching” set of representations. (Janvier, 1987, p. 67)[10]

En matemáticas la representación se considera una herramienta para operar sus objetos; contar con esta herramienta ofrece la posibilidad de hacer un manejo operatorio del objeto independiente de su significado para después hacer la interpretación y la relación de los resultados (Kaput, 1987). Los conceptos matemáticos adquieren sentido completo para los estudiantes, cuando logran pasar de la parte operatoria a la comprensión del significado de los símbolos.

Duval (1999) señala tres clases de representaciones: mentales, computacionales y semióticas. Las primeras permiten mirar el objeto en ausencia total de significante perceptible, cubren un dominio más amplio que las imágenes mentales puesto que en estas se incorporan los conceptos, las nociones, las ideas, las creencias y las fantasías. Las segundas son aquellas cuyos significantes, de naturaleza homogénea, no requieren de la mirada al objeto y permiten una transformación algorítmica de una serie de significantes en otra serie, no son representaciones conscientes. Y las representaciones semióticas, que son a la vez consientes y externas, permiten acceder al objeto a través de la percepción de estímulos (trazos, caracteres, sonidos) que tienen el valor de significantes. Son ejemplos de representaciones semióticas: figuras, esquemas, gráficos, expresiones simbólicas, expresiones lingüísticas, etc; se clasifican en dos grupos dependiendo de si conservan o no algunas propiedades del objeto que representan: las *representaciones analógicas* que conservan relaciones de semejanza entre los elementos del modelo, como las imágenes, y las *representaciones no-analógicas* que no conservan

[10] Nos inclinamos a creer que la comprensión es un proceso acumulativo basado principalmente en la capacidad de manejar un enriquecido conjunto de representaciones. (Traducción libre de las autoras)

relación con el modelo pero pueden representar operaciones o transformaciones de éste, como las lenguas.

Las representaciones semióticas permiten tener una variedad de representaciones para un mismo objeto, se considera propiedad fundamental de estas representaciones “su transformabilidad en otras representaciones que conservan ya sea todo el contenido de la representación inicial, o bien sólo una parte de este contenido”. (Duval, 1999, p. 40)

Se puede afirmar que el dominio de un concepto matemático requiere que las personas empleen diferentes representaciones del objeto estudiado y puedan pasar de una representación a otra de forma automática, al respecto Duval (1999) dice:

> Para los sujetos una representación puede funcionar verdaderamente como representación, es decir, permitirles el acceso al objeto representado, sólo cuando se cumplen dos condiciones: que dispongan de al menos dos sistemas semióticos diferentes para producir la representación de un objeto, de una situación, de un proceso... y que “espontáneamente” puedan convertir de un sistema semiótico a otro las representaciones producidas, sin siquiera notarlo. Cuando estas dos condiciones no se cumplen, la representación y el objeto representado se confunden, y no se pueden reconocer dos representaciones diferentes de un mismo objeto como representaciones de ese mismo objeto. (p.30)

Una representación puede permitir efectuar ciertos procedimientos de una manera mucho más eficaz que otra, de ahí que la facilidad con que se utilicen conocimientos matemáticos depende de la representación escogida, por ejemplo, al ordenar de menor a mayor un grupo de números racionales como $\frac{3}{5}, \frac{7}{10}, \frac{5}{8}$ es más fácil si se usa su representación decimal: 0,6 ; 0,7 y 0,625 respectivamente.

Un concepto matemático puede tener diversas representaciones externas que se interconectan entre sí, ninguna de éstas lo agota totalmente, sino que lo enriquece puesto que cada representación muestra un aspecto relevante de éste. En el ejemplo anterior la representación decimal privilegia la comprensión de la propiedad de densidad de los números racionales pero no la construcción de su definición formal. Desde la didáctica, esta posibilidad de diferentes representaciones y de pasar de una a otra ofrece variedad de interpretaciones para un concepto, permitiendo que el maestro, en la planeación de su curso, tenga diferentes posibilidades para introducir y trabajar un tema, por ejemplo para la enseñanza de los decimales, Castro (2001) propone tener en cuenta la representación gráfica como partición de un todo continuo (recta numérica) y como parte de un todo discreto (conjunto de objetos).

Entre las diferentes representaciones semióticas para los números racionales está la decimal; que el maestro conozca las posibilidades, los límites y la efectividad de esta representación le permite orientar su trabajo en el aula de manera que sus estudiantes la vean como una herramienta matemática, la utilicen concientemente de acuerdo al problema que estén solucionando y sean capaces de pasar a otras representaciones, en últimas que comprenda el objeto matemático en juego.

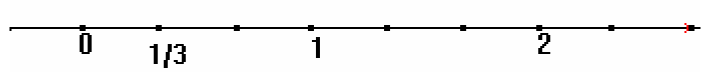
2.3 Representación de los números racionales

Las estructuras numéricas se expresan mediante una pluralidad de sistemas de representación (Rico, 1996), no son la excepción los números racionales, por lo tanto es pertinente hacer una breve presentación de otras representaciones de estos números antes de centrarse en la exposición de la representación decimal; pues, aunque autores como Abrouguí (2003), Godino y Batanero (2004) y Centeno (1988) consideran a los decimales finitos como conjunto numérico, basados en la revisión de textos de matemáticas de la educación superior (Apóstol, 1977; Rey, 1952; Takeuchi, 1974) estos decimales no son un conjunto numérico, se habla de expresión decimal o representación decimal de los números reales, en particular de los números racionales.

a. Representación como fracción.

- Simbólica: Corresponde a la escritura de la forma $\frac{m}{n}$, con *m, n* números enteros y $n \neq 0$. A esta forma de escritura también se le denomina, en este trabajo de investigación, escritura fraccionaria.
- Gráfica: En la recta numérica todo punto que represente un número racional se le llama *punto racional*, y al número representado, *abscisa del punto*. (Rey, 1952, p. 70)

  Ejemplo: Para representar el número racional $\frac{1}{3}$ se divide la unidad en tres partes iguales, y se cuenta una de ellas a partir del origen hacia la derecha.



Gráfica 1. Representación de un número racional

Aunque se pueda asignar un punto de la recta a cada número racional, estos no llenan la recta, puesto que entre dos números racionales, además de existir infinitos números racionales, también existen infinitos números irracionales.

b. Fracciones continuas finitas simples. Una *fracción continua* es una expresión de la forma:

$$a_1 + \cfrac{b_1}{a_2 + \cfrac{b_2}{a_3 + \cfrac{b_3}{a_4 + \dots}}}$$

Con a_i y b_i que pertenecen a Z, si $b_i=1$ para todo $i \geq 1$, la fracción continua se denomina *fracción continua simple* y si hay último término, se llama *fracción continua simple finita.* Toda fracción puede representarse por una fracción continua simple finita y una fracción continua simple finita puede ser expresada como un racional. (Luque & Mora, 2001, pp. 81-87)

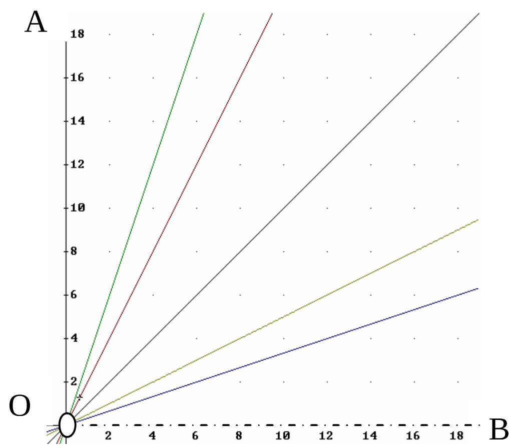
Ejemplo:

$$\frac{19}{7} = 2 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2}}}$$

c. Una forma de representación gráfica se obtiene a partir de la siguiente construcción:
   - Se trazan dos semirrectas perpendiculares[11] $\vec{OA}, \vec{OB}$, concurrentes en *O*.
   - Se divide cada uno de estos en partes iguales y se marcan con números naturales desde 1.
   - Se marcan dentro del ángulo AOB los puntos correspondientes a las parejas ordenadas que surgen de relacionar todos los números marcados en $\vec{OA}$ con los números marcados en $\vec{OB}$
   - Se toman las cifras de $\vec{OA}$ como numeradores y las de $\vec{OB}$ como denominadores. De esta manera los puntos al interior del cuadrado de lados $\vec{OA}$ y $\vec{OB}$, representan las fracciones con los primeros números naturales, combinándolos de dos en dos.
   - Si se trazan segmentos de recta desde el vértice *O* hasta cada punto, se forman familias de rectas que representan algunas de las clases de equivalencia que forman los números racionales. El punto más cercano a

[11] Las dos rectas también pueden formar un ángulo cualquiera y la construcción no cambia.

> *O* sobre cada recta corresponde a la fracción irreducible que es la representante de cada clase. (Luque & Mora, 2001, pp. 61- 62)



Gráfica 2. Representación de las clases de equivalencia
para los números racionales (Luque & Mora, 2001, p. 61).

d. Representación decimal. Llamada así porque es en base diez y es la extensión hacia la derecha del sistema de numeración posicional que se usa para los números enteros[12], todos los números reales se pueden expresar en forma decimal, los decimales finitos y los decimales infinitos periódicos representan números racionales y los decimales infinitos no periódicos representan irracionales[13]. Autores como Godino y Batanero (2004) y Centeno (1988) llaman "números decimales" a los racionales para los cuales se puede encontrar una fracción decimal representante y los asumen como subconjunto de los números

[12] Es posible establecer un desarrollo similar cuando la base es diferente de 10, por ejemplo se utiliza en algunos campos de la ciencia la base 2 y en otros la base 60. La representación decimal se puede generalizar sustituyendo el entero 10 en la expresión: $r = \frac{a}{10^n}$ por otro entero $b > 1$, en donde a es un entero en base b. (Apóstol, 1977b; Takeuchi, 1974)

[13] Rey (1952) señala la siguiente definición: "número" es una expresión decimal infinita, pudiéndose considerar la fracción decimal como caso particular de expresión periódica que acaba en …000… o en …999… (0,25000 … = 0,24999 …). Entonces, los números racionales resultan las expresiones decimales periódicas, y los números irracionales, las expresiones decimales no periódicas.

racionales, sin embargo, en este trabajo no se usa la expresión: “números decimales”, pues no se consideran un conjunto numérico como los números reales o los números racionales si no que son una representación de éstos, se usa “decimales” o “expresiones decimales”. Además, no se restringen los decimales a las fracciones decimales, se incluyen los decimales infinitos periódicos y los infinitos no periódicos. A continuación se presentan dos posibles notaciones decimales de los números racionales:

- Representación decimal **finita** de número racional *r*

Números como 3,24; 4,6 y 7,5 son los que se denominan decimales finitos, a continuación se muestra la notación matemática general de esta representación.

Sea *r* un número racional de la forma

$$r = a_0 + \frac{a_1}{10} + \frac{a_2}{10^2} + \ldots + \frac{a_n}{10^n}, \quad (1)$$

donde a_0 es un entero no negativo, y $a_1, a_2, \ldots, a_n$ son enteros que satisfacen $0 \leq a_i \leq 9,$ se escribe corrientemente de la forma más breve siguiente:

$$r = a_0, a_1 a_2 \ldots a_n$$

Esta expresión recibe el nombre de *representación decimal finita de r.* Todos los racionales de esta clase son de la forma $r = \frac{a}{10^n},$ donde a es un número entero.

La forma $r = \frac{a}{10^n}$, con a un número entero se denomina fracción decimal.

$\frac{324}{100}, \frac{46}{10}$ y $\frac{75}{10}$ son las fracciones decimales correspondientes a 3,24; 4,6 y 7,5

No todos los números racionales pueden expresarse por medio de una representación decimal finita, pero cualquier número racional $r > 0$ puede aproximarse con un error tan pequeño como se desee por medio de una suma de la forma (1) como se muestra a continuación.

- Representación decimal **infinita periódica** de un número racional *r*

En este caso los números que se asocian a la representación infinita de un número racional son por ejemplo: 3,55555….; 6,2525252525….. y 14,8245624562456….. la escritura se simplifica utilizando una señal que cubra la parte decimal que se repite o que forma el ciclo repetido, es decir, $3,\overline{5}$; $6,\overline{25}$ y $14,8\overline{2456}$ respectivamente, la generalización matemática correspondiente se da de la siguiente manera:

Sea *r* un número racional no entero, entonces *r* está comprendido entre dos enteros consecutivos, es decir, $a_0 < r < a_0 + 1$, donde $a_0 \in Z$. El segmento que une a_0 y $a_0 + 1$ puede subdividirse en diez partes iguales. Si *r* no coincide con uno de estos puntos de subdivisión, *r* debe estar comprendido entre dos de ellos. Esto da lugar a un par de desigualdades de la forma:

$$a_0 + \frac{a_1}{10} < r < a_0 + \frac{a_1 + 1}{10},$$

donde a_1 es un entero entre 0 y 9. Se divide ahora, el segmento que une $a_0 + \frac{a_1}{10}$ y $a_0 + \frac{a_1 + 1}{10}$, en diez partes iguales (cada una de longitud 10^{-2}) y se continúa el proceso, si después de un número finito de subdivisiones, uno de los puntos coincide con *r, r* es un número de la forma (1), si no es así, el proceso se continúa indefinidamente hasta que los a_i se repiten en el mismo orden de forma cíclica y se genera un conjunto de infinitos enteros $a_1, a_2, a_3 ... a_1, a_2, a_3 ...$ en este caso se dice que *r* tiene la representación infinita

$$r = a_0, a_1 a_2 a_3 ... a_1 a_2 a_3 ...$$

después de *n* subdivisiones, *r* satisface las desigualdades:

$$a_0 + \frac{a_1}{10} + ... + \frac{a_n}{10^n} < r < a_0 + \frac{a_1}{10} + ... + \frac{a_n + 1}{10^n}$$

las cuales dan dos aproximaciones de *r*, una por exceso y otra por defecto, por medio de decimales finitos que difieren en 10^{-n}. Por tanto, se puede lograr el grado de aproximación deseado tomando *n* tan grande como se desee.

Ejemplo:

$$0 < \frac{3}{11} < 1$$
$$0{,}2 < \frac{3}{11} < 0{,}3$$
$$0{,}27 < \frac{3}{11} < 0{,}28$$

Todo decimal que proviene de una fracción es infinito periódico, se pueden considerar las fracciones decimales como un caso particular de expresión periódica que acaba en ...000... ó en ...999... (Rey, 1952, p. 97)

Ejemplos:

0,25000... = 0,24999....

$$\tfrac{1}{2} = 0.5 = 0.4\overline{9}$$

Por lo anterior, todo número racional tiene representación decimal infinita periódica, también se puede decir que todo número racional tiene expresión decimal finita en alguna base *k, k>1.* La representación decimal permite comprender con mayor facilidad la noción de densidad en los números racionales y en algunos casos agiliza la operatoria con éstos.

2.4 Historia de la representación decimal de los números racionales

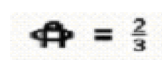
Dado que la escritura decimal es una representación de los números racionales se considera pertinente para este trabajo hacer una revisión sobre la historia de la construcción de los números racionales y sobre el surgimiento y evolución de las notaciones fraccionarias y decimales, con el ánimo de comprender el proceso de evolución de los decimales, como representación de los números racionales, principalmente.

2.4.1 Ausencia de la representación decimal

En lo que se conoce hasta el momento, la historia del número racional tiene su inicio en los logros de los egipcios y los babilonios, sus conocimientos sobre fracciones y las operaciones que realizaron con éstas han sido consideradas como una primera etapa en la construcción de este objeto matemático.

En la época Potámica (4.000 a.C. – 800 a. C.), durante la edad de bronce, aparecieron las primeras representaciones de fracciones, los egipcios usaron fracciones unitarias, la fracción $\frac{2}{3}$ y algunas fracciones especiales que representaron la generalización $\frac{n}{n+1}$. En la escritura jeroglífica simbolizaron las fracciones unitarias colocando un óvalo, que significaba "parte", sobre el número, por ejemplo[14]:

$$\frac{1}{30} = \cap\cap\overset{\circ}{\cap},$$

Para la fracción $\frac{2}{3}$ utilizaron una notación especial $\overset{\circ}{\mathrm{II}}$ o 

.

En el sistema de escritura hierático[15], el óvalo se reemplazó por un punto sobre la cifra o sobre la cifra ubicada más a la derecha si el número era de varios dígitos, y hubo una nueva notación para la fracción $\frac{2}{3}$:

Gráfica 3. Notación para fracciones en símbolos egipcios

[14] ∩ representaba el número 10 y se podía repetir hasta 9 veces para representar los múltiplos de 10.

[15] La escritura hierática o "sagrada" fue la empleada por los escribas egipcios para hacer registros sobre papiro, era menos majestuosa que los jeroglíficos pero más fluida.

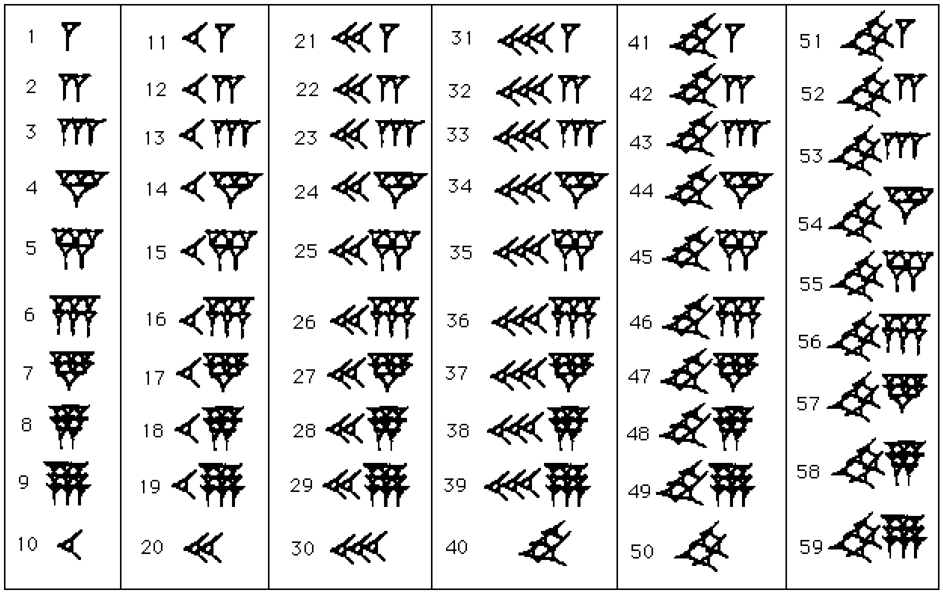
La creación y uso de éstos números resultó de la posibilidad de partir una unidad en partes iguales y de la necesidad de repartir los productos de manera proporcional a las posiciones jerárquicas de los individuos.

Construyeron tablas de fracciones que utilizaron en la solución de problemas, en el Papiro de Rind (Campiglio, 1992) se presentan fracciones de la forma $\frac{n}{10}$, donde n es un número de 1 a 9, y la fracción se escribe como la suma de fracciones unitarias y la fracción $\frac{2}{3}$:

$$\frac{9}{10}=\frac{1}{30}+\frac{1}{5}+\frac{2}{3}$$

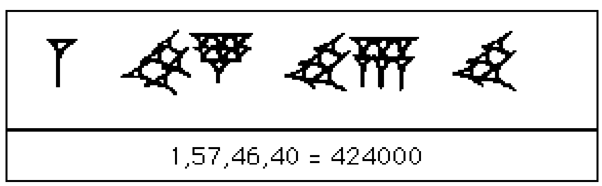
En los escritos se evidencia un alto grado en el uso práctico y de cálculo numérico de las fracciones unitarias, los aspectos teóricos que se encuentran hacen referencia a las técnicas más que al entendimiento teórico del concepto mismo. (Boyer, 1986)

La cultura babilónica (5.700 - 600 a.C.), cuyos avances se conocen por medio de los grabados de las tablillas de arcilla encontradas en la región que se extiende entre los ríos Tigris y Eufrates donde surgió la antigua cultura mesopotámica, desarrolló un sistema de numeración posicional en base sesenta utilizado especialmente en textos científicos, con él representaron números enteros y fracciones sexagesimales; los signos para escribir los números fueron grabados sobre arcilla húmeda con un punzón, lo que les daba una forma de cuña. Para representar los números usaron: la cuña en posición vertical para las unidades, que se podía repetir hasta nueve veces y la cuña en posición horizontal para las decenas que se repetía hasta cinco veces, los números de 1 a 59 formaban las unidades de primer orden, las unidades de segundo orden eran las sesentenas, los múltiplos de 60 las unidades de tercer orden y así sucesivamente cada signo tomaba su valor al multiplicarlo por la potencia correspondiente de sesenta.



Gráfica 4. La numeración Babilonia [16]

En la gráfica 4 se muestran los números hasta el 59 y en la gráfica 5 el número 424.000



$$1 \text{ x } 60^3 + 57 \text{ x } 60^2 + 46 \text{ x } 60^1 + 40 \text{ x } 60^0 = 424000$$

Gráfica 5[17]. Descomposición sexagesimal del número 424.000

Para representar las fracciones sexagesimales utilizaron una cuña doble inclinada antes del número, o la expresión *IGI-GAL-BI* que significaba denominador. Un ejemplo tomado de la tablilla de Nippur que data del año 2400 a. C. (Cajori, 1993), se muestra en la Tabla 1:

[16] O'Connor J. y Robertson E. (2000) *La numeración Babilonia.* Recuperado el 25 Agosto de 2007, en http://ciencia.astroseti.org/matematicas/articulo.php?num=3650
[17] Ibid.

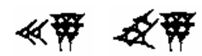
	Notación decimal actual		Notación sexagesimal		Símbolos cuneiformes
Línea 1.	125	720	2x60 + 5	12x60 + 0	
Línea 2.	*IGI-GAL-BI*	103.680	*IGI-GAL-BI*	$28x60^2+48 \text{ x } 60$	

Tabla 1. Ejemplo de la tablilla Nippur

Los primeros números que aparecen en cada línea impar, de las tablillas, forman una progresión ascendente, se encuentran de la siguiente manera: línea 1: 125, línea 3: 250, línea 5: 500, y así sucesivamente hasta la línea 15, y pueden ser representados por una fracción con numerador 12.960.000 y el denominador correspondientes en las líneas pares: línea 2: 103.680, línea 4: 51.840, línea 6: 25.920. Para la Tabla 3. se tendría $125 = \frac{12.960.000}{103.680}$, los denominadores, a su vez, forman una progresión geométrica descendente. Aún no es claro su significado del otro número que se encuentra en las líneas impares, el 720 del ejemplo de la *gráfica 3*. El significado que se encuentra para esta relación es que el número $12.960.000 = 60^4$ (Cajori, 1993).

2.4.2 Nacimiento de las expresiones decimales: fracciones sexagesimales y fracciones decimales.

En algunas tablillas se encuentran listas de números que corresponden a tablas de múltiplos, divisores, cuadrados, cubos, inversos y recíprocos, las cuales muestran que los babilonios usaron un sistema en el que hacia la izquierda cada número adquiría su valor multiplicado por una potencia positiva de sesenta y hacia la derecha por una potencia negativa de sesenta, es decir, una notación para las fracciones sexagesimales similar a la que se usa hoy para los decimales (Aaboe, 1964). En la tablilla catalogada con el código CBS 8536 del Museo de la Universidad de Pensilvania, que data del año 2000 a.C. se muestran operaciones en las que los resultados están expresados con notación sexagesimal, el número 44; 26 $40_{(60)}$ que tiene dos cifras sexagesimales multiplicado por sí mismo da como resultado 32 55; 18 31 6 $40_{(60)}$ que tiene cuatro cifras sexagesimales[18]. Los babilonios no utilizaron marca alguna para hacer distinción entre la parte entera y la parte sexagesimal, debido a esta razón y a la ausencia de un símbolo para el cero, la interpretación de la posición de los números se ha hecho a partir del contexto. (Cajori, 1993)

En las tablas de inversos o recíprocos de los números utilizaron cocientes formados por un entero dado y una potencia de sesenta, por ejemplo: aparece el número 8 escrito en una columna y al frente, en otra columna, los números 7 y 30 lo cual se interpreta como

$$\frac{7}{60}+\frac{30}{60^2}=\frac{1}{8}$$

A diferencia de la cultura egipcia, los babilonios sí utilizaron notaciones diferentes para las fracciones con denominadores sexagesimales y para la representación sexagesimal de los números que tenían una parte menor que la unidad, para la segunda utilizaron una ampliación hacia la izquierda del sistema posicional.

En la India (s. V d.C.) surgió el sistema de numeración cifrada que usa el principio posicional, es de base diez y tiene diez símbolos incluyendo uno para el cero, como la que se usa actualmente. Los indios utilizaron y operaron con fracciones decimales, usaron la decimalización de las fracciones, que consistía en convertir cualquier fracción a una equivalente cuyo denominador fuera una potencia de diez, y algunas maneras decimales para aligerar su manipulación. Para escribir números mixtos escribieron la parte entera encima de la parte decimal. Cajori (1993) narra que Alnasavi (d. C 1300)

[18] El punto y coma que separa la parte entera de la parte sexagesimal, no corresponde a la notación de los babilonios, se usa frecuentemente para mayor claridad.

propuso escribir un cero en el lugar de la parte entera cuando la fracción fuera propia, por ejemplo para escribir $\frac{1}{11}$ se escribía así:

$$\begin{array}{c}{\scriptstyle 0}\\ 1\\ {\scriptstyle 11}\end{array}$$

2.4.3 Usos de la representación decimal

Centeno (1988) señala que a comienzos del siglo IX el califa abasí alMa´mun fundó en Bagdad una academia, *La casa de la sabiduría*, que favorecía intercambios culturales con la India, fue por este camino que conocieron los árabes las cifras indias. El matemático Al-Jwarizmi (780- 850), bibliotecario de la corte del califa, redactó los libros: *Libro de álgebra, De al-muqabala, Libro sobre la suma y la resta* y un *Libro de cálculo indio*. Las traducciones de estos textos del árabe al latín (hechas en Toledo) contribuyeron al conocimiento y desarrollo de la aritmética en occidente. Parte de la aritmética de Al-Jwarizmi trata de las fracciones, emplea nombres particulares para las fracciones que tienen por numerador la unidad hasta la fracción $\frac{1}{10}$; describe en particular las fracciones sexagesimales y los cálculos de duplicación y división usados en las matemáticas egipcias, sin embargo, no parece que conociera las fracciones decimales.

Al – Uglisidi (aprox. 952) quien hizo una recopilación de toda la aritmética de su tiempo, tanto de origen indio como griego o árabe, utilizó las fracciones decimales y empleó una notación muy cercana a la actual, con un signo de separación entre la parte entera y la parte fraccionaria de un número, ejemplo: 2’35 el cual designa 2 unidades y 35 centésimas.

El astrónomo y matemático Al – Kashi en el segundo libro de “*La llave de la aritmética*” introduce, basándose en las fracciones sexagesimales, fracciones compuestas de las potencias sucesivas de un décimo, a las que llama: décimas, segundos decimales, terceros decimales, etc., y a las fracciones, fracciones decimales y explica un sistema para efectuar todas las operaciones como con los números enteros, pero apoyándose en la base diez. En el tercer libro trata el sistema sexagesimal de numeración de posición, las fracciones decimales y las operaciones con éstas. Presta especial atención a la conversión de fracciones sexagesimales en fracciones decimales y viceversa. Establece reglas muy concisas para expresar por medio de fracciones sexagesimales números decimales de la forma:

$$a_k \times 10^n,\ para\ -10 \leq n \leq 10\ y\ \ a_k = 1,2,...,9$$

En occidente, en el siglo XIII, dos escritores dan impulso a la aritmética árabe y sus formas de notación: Fibonacci, en el año 1202 con la publicación del *Liber Abaci,* fue el primer matemático europeo en usar la barra de fracción como es usada actualmente y en escribir, al estilo árabe, la fracción a la izquierda del entero (Cajori, 1993), y Sacrobosco en su libro *Algorisme* empleó los símbolos árabes y la numeración de posición. A pesar de haberse aceptado el sistema posicional de numeración, se continúo usando fracciones sexagesimales.

La introducción de las fracciones decimales en lugar de las sexagesimales fue atribuida a Regiomontano (1436-1476), quien en la división 85869387 por 60000 separó los últimos cuatro dígitos y realizó la división por 6 como sigue:

8586 | 9387
1431

En 1484 Pietro Borgi usa la barra en la división 123456 por 300 así:

"*per* 300
1234 | 56
411
$411\frac{156}{300}$"

En 1492 Francesco Pellos (Pellizzati), en su *Aritmética Comercial*, usa un punto como signo de separación entre las unidades enteras y los decimales, pero solamente para separar cifras del dividendo cuando el divisor terminaba en cero o eran múltiplos de 10 (Smith, 1958). Cajori (1993) dice que Pellos "Utilizó el punto decimal inconscientemente por primera vez en una obra impresa" y que no "reconoció la trascendencia del punto decimal", es decir, que Pellos estuvo cerca de la invención de las fracciones decimales.

Christoff Rudolff en 1525 divide 652 por 10. Sus palabras son: *"Por ejemplo, yo divido 652 por 10. Esto da 65/2; el cociente es 65 y el resto es 2. Si el número se divide por 100 se cortan las primeras dos cifras, si por 1000 las primeras 3 y así por cada 0 del divisor"* (Cajori, 1993). En 1530 Rudolff hace la multiplicación de 375 $(1+\frac{5}{100})^n$ para *n=1, 2,…10*. Para *n*=1 escribe 393|75, que actualmente se nota como 393,75. Según Cajori (1993), estos hechos se pueden interpretar como el comienzo de las fracciones decimales.

Hasta el momento el origen de los decimales se da por la necesidad de expresar el cociente de divisiones cuyos divisores son múltiplos o potencias de 10.

En 1525 en un trabajo del francés Orontius Fineus se encuentra un resultado de la raíz cuadrada de 10, el autor inicia usando 3.162 como una aproximación de la raíz de 10'000.000, separa el número 162 y lo convierte, como es costumbre de la época, en fracciones sexagesimales, expresa la raíz de 10 como:

3 9\` 43\`\` 12\`\`\`, que es lo mismo que $3+\frac{9}{60}+\frac{43}{3600}+\frac{12}{216000}$.

Concluye el capítulo de su libro declarando que en el número 162, el 1 es una décima, el 6 representa seis centésimas, etc. Más tarde Tartaglia, escribe el resultado de Orintius como $3\frac{162}{1000}$. (Brooks, 1880)

La revisión realizada hasta el momento permite ver que el surgimiento de las representaciones sexagesimales y decimales, se da para facilitar la escritura de las fracciones sexagesimales y decimales, así como para facilitar el operar con éstas; sólo hasta el siglo XV nace la necesidad de estructurar una teoría que suministre información sobre el manejo de los decimales, y es en ese sentido que se le atribuye a Stevin y a Viéte el desarrollo fundamental de los decimales, como se expondrá a continuación.

2.4.4 Construcción de una teoría para el uso de los decimales

A mediados del siglo XV (1579), el francés Francois Viète publicó "*Canon mathematicus seu ad triangula*" una obra en la que hizo un uso sistemático de las fracciones decimales presentando diferentes notaciones, por ejemplo, para expresar la apotema de un polígono regular de 96 lados inscrito en un círculo de diámetro 2.000 utilizó tres expresiones:

$$99946 \mid 45875; \qquad 99946^{45875/10000}; \qquad 99946^{45875}$$

Viète defendió el uso de las fracciones decimales sobre el uso de las fracciones sexagesimales:

> Los sexagesimales y los sesentas han de ser usados raramente o nunca en la matemática, mientras que los milésimos y los miles, los centésimos y los cientos, los décimos y los dieces, y las progresiones semejantes, ascendentes y descendentes, deben usarse frecuentemente y aún exclusivamente (Viète, 1579 citado en Villegas, 2004).

Sin embargo, el autor a quien se le atribuye su invención es Simon Stevin (1548–1642) quien también defendió el uso de las fracciones decimales sobre el uso de las fracciones sexagesimales, en su libro *"La Disme"*, publicado en 1585, Stevin pretendía mostrar cómo efectuar con facilidad cálculos en la vida diaria por medio de enteros sin la utilización de los fraccionarios, para lo que propuso una notación para las fracciones decimales, escribía dentro de un círculo encima o a continuación de cada dígito la potencia de diez que debería llevar como divisor, así el número que hoy se escribe como 8,937 fue escrito por Stevin como:

8 ⓪ 9 ① 3 ② 7 ③

y leído por él como: 8 "comienzo" 9 "primeros", 3 "segundos", 7 "terceros". (Sarton, 1927)

La Disme estaba dividido en dos partes en las cuales definió los decimales y mostró cómo realizar las cuatro operaciones. En la primera parte planteó las siguientes cuatro definiciones que establecen las características de la escritura de los decimales:

> **"Definición 1**. Los decimales son una clase de aritmética con la cual todas las cuentas y las medidas se pueden escribir de manera completa sin usar fracciones, es decir, sólo con enteros.
>
> **Definición 2**. Todo número propuesto comienza con el signo 0.
>
> **Definición 3**. Los lugares de la sucesión decimal se denominan así: las décimas como "primeros" se designan por el número (I), las centésimas son llamadas segundas y se designan por (2), etc.
>
> **Definición 4**. Los números determinados en las definiciones 2 y 3 son llamados números decimales." (Sarton, 1935*)*

En la segunda parte de *La Disme*, se presentan las operaciones con los decimales, teniendo en cuenta, para cada una de estas, la organización: proposición, construcción, prueba y conclusión.

- Las proposiciones plantean la operación a realizar.
- Las construcciones muestran la organización de los números para la realización de la operación y la operación en sí misma.
- La prueba se realiza a través de: escribir cada decimal como fracción decimal, operar estas fracciones, y luego escribir el resultado en forma decimal.
- La conclusión se limita a comparar los resultados obtenidos con los dos métodos, decimal y fraccionario, y si daban lo mismo expresar que la operación estaba bien hecha. (Sarton, 1935)

Este libro fue traducido al inglés en 1608, por Richard Norton, en el que la notación dada por Stevin fue cambiada por:

$$\overset{(0)}{8}\,\overset{(1)}{9}\,\overset{(2)}{3}\,\overset{(3)}{7}$$

Posterior a Pellos, los matemáticos utilizaron diferentes símbolos para separar la parte entera de la decimal, algunos de éstos fueron: la coma, las comillas (una, dos, tres,…) superiores según el lugar decimal de cada cifra, la combinación de la raya vertical y la notación de Stevin, entre otras. Sin embargo el uso del punto decimal se hizo popular cuando Napier lo usó más de veinte años después, en su libro *“Descriptio”* publicado en 1614, en donde introduce las fracciones decimales tal como se conocen hoy en día, con un punto para separar la parte entera de la decimal.

2.4.5 De los decimales a la formalización de los números racionales

En el siglo XVII, Fermat, Descartes, Roberval y Pascal, entre otros, usaron los racionales en cuestiones de aritmética infinita y cálculo infinitesimal. Se llega al siglo XIX con el concepto de número racional como: “el que puede representarse por medio de una expresión decimal periódica” (Sánchez, 1987). Sin embargo, esta concepción como representación no definía formalmente a los números racionales.

A comienzos del siglo XIX, Cauchy (1789-1857) y Bolzano (1781-1848) hicieron aportes a la fundamentación de los números racionales, en la búsqueda de la formalización de los números reales, pues hasta ese momento se utilizaban algunas propiedades de los números reales que no se podían justificar solamente desde la aritmética, para esto era necesario formalizar el conjunto de los números racionales; fue Weierstrass (1815-1897) quien más avanzó en este aspecto, usando las ideas concebidas por Hamilton para la construcción de los números complejos como parejas de números enteros positivos, presentó los números racionales como pares de números naturales, los enteros negativos como otro tipo de pares de números naturales y los racionales negativos como pares de enteros negativos. El problema clave para la construcción del sistema de números racionales consistía en fundamentar los enteros ordinarios y establecer sus propiedades.

Weierstrass presentó la idea de obtener un "modelo" de los números racionales positivos y de los enteros negativos como clases de pares de números naturales, supuso conocidos los números enteros positivos y definió la igualdad entre ellos como: dos números enteros son iguales si están compuestos del mismo número de unidades. Designó esta relación como $a = b$ y afirmó que debía ser tal que $a = b$ y $b = c$ entonces $a = c$. Consideró los racionales positivos a partir de la noción de partes exactas de la unidad: es la enésima parte exacta de la unidad si y sólo si $k\ (\frac{1}{n}) = 1$. Estableció que un número racional es una combinación lineal de partes de la unidad con coeficientes enteros y $\frac{1}{n}$ formalizó la igualdad entre racionales usando las transformaciones: k elementos de la forma pueden ser reemplazados por la unidad y, todo número racional puede ser reemplazado por sus partes exactas. Un número racional está representado por un agregado entendido como un conjunto finito de racionales cuya suma es el número representado, por ejemplo $\frac{4}{3} = \left\{\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right\}$ o $\left\{\frac{1}{6}, \frac{1}{6}, \frac{1}{6}, \frac{1}{6}, \frac{1}{6}, \frac{1}{6}, \frac{1}{6}, \frac{1}{6}\right\}$, entre las muchas posibilidades de representarlo. (Sánchez, 1987)

Dedekind (1831 – 1916), para la construcción de los números reales, supuso la aritmética de los números racionales los cuales, según él, forman un cuerpo de números en el sentido de que las cuatro operaciones fundamentales son cerradas en Q con la restricción de la división por cero; este sistema se extiende infinitamente en ambas direcciones y cumple las propiedades del orden entre racionales:

1) Si $a < b$ y $b < c$ entonces $a < c$.
2) Si a y c son dos números racionales diferentes, existe un número infinito de racionales entre ellos. (Sánchez, 1987)

Para Dedekind (1898) los racionales son un instrumento de completud infinitamente mayor. Cumplen la propiedad:

> Si los signos *a* y *b* representan un mismo número racional, se pondrá tanto $a = b$ como $b = a$.
>
> Si *a* y *b* son diferentes se muestra en la diferencia $a – b$ tiene un valor positivo o negativo, entonces para el primer caso *a* es mayor que *b*, y *b* menor que *a*, lo que se indicará también con los signos $a > b$, $b < a$. Y para el segundo caso $b – a$ es un valor positivo será $b > a$, $a < b$. Respecto a esta doble posibilidad en el modo de ser diferente valen las siguientes leyes.
>
> I. Si $a > b$ y $b > c$, entonces $a > c$. Siempre que *a, c* sean dos números distintos (o desiguales) y que *b* sea mayor que uno de ellos y menor que el otro [...].
>
> II. Si *a* y *c* son números distintos, existen siempre infinitos números *b* que están entre *a* y *c*. (pp. 81, 82)

Sin embargo Belna (1996) afirma que en la publicación de 1872, *Stetigkeit und irrationale Zahlen*, en la cual Dedekind presentó su construcción de los números reales como extensión de los racionales, no dio a conocer su concepción de números naturales ni el paso de éstos a los números racionales, solamente hizo algunas indicaciones de la extensión de *N* a *Z* por la constatación de que la sustracción no es siempre posible en *N* y de la extensión de *Z* a *Q* por que la división no siempre es posible en Z. Es en una carta a Weber en 1886, en donde Dedekind expone en detalle la extensión de *N* a *Z* y de *Z* a *Q* introduciendo los pares de números e indicando el paso para las extensiones restantes.

En el siglo XIX, Peano (1858 – 1932) hace una aproximación a los enteros a partir de los axiomas para los números naturales, a partir de los números naturales se pueden definir los números enteros como un par ordenado de números naturales: el par *(a,b)* significa intuitivamente $a – b$ cuando $a > b$ representa un número entero positivo y cuando $a < b$ un número entero negativo. De la misma manera, a partir de los números enteros se introducen los números racionales como pares ordenados de enteros. Para Peano un número racional $\frac{a}{b}$ es aquel que representa la operación compuesta "multiplicar por *a* y dividir por *b*" (Villegas, 2004)

En el siglo XX surge la propuesta estructuralista planteada por Bourbaki, que pretende unificar las teorías matemáticas mirándolas desde la noción de estructura lo que "garantiza una visión de conjunto con un objeto y un método propios. El objeto son las estructuras y el método es el *método axiomático*" (Anacona, 2004, p. 2). Desde esta mirada estructuralista construye el conjunto de los números reales para lo cual primero presenta la formalización de las estructuras de orden, algebraicas y topológicas de los números racionales.

Se ha mostrado en esta parte el tránsito desde los primeros usos de la representación fraccionaria hasta la formalización de los números racionales, pasando por el tema de interés de esta investigación: el decimal como representación de los números racionales. Como se mostró en los párrafos anteriores sólo hasta el siglo XIX se empieza a consolidar dicha formalización, la cual se presenta en la siguiente sección.

2.5 Números Racionales

2.5.1 Construcción

Una construcción de los números racionales se hace a partir de parejas ordenadas de números enteros, de la siguiente forma:

Se definen el conjunto ***B*** de parejas ordenadas de números enteros, cuya segunda componente no es cero, dos operaciones con los elementos de ese conjunto y una relación de equivalencia,

$$\boldsymbol{B} = Z \text{ X } Z^* = \{(m, n) / m, n \in Z \wedge n \neq 0\}. \quad \text{Con } Z^* = Z - \{0\}$$

$$(m, n) \oplus (p, q) = (mq + np, nq)$$

$$(m, n) \otimes (p, q) = (mp, nq)$$

y la relación de equivalencia $\approx$:

$$(m, n) \approx (p, q) \text{ si y sólo si } mq = np.$$

Luego se establecen las operaciones $\oplus$ y $\otimes$ que son compatibles con la relación $\approx$, es decir:

si $(m,n) \approx (p,q)$ y $(c,d) \in \boldsymbol{B}$, entonces

$$(m, n) \oplus (c, d) \approx (p, q) \oplus (c, d), \quad \text{y}$$

$$(m, n) \otimes (c, d) \approx (p, q) \otimes (c, d),$$

De esta manera, al conjunto cociente de $\boldsymbol{B}$ partido la relación $\approx$ se le denomina Q el conjunto de los números racionales,

$$Q = \boldsymbol{B}/\approx \; = Z \text{ X } Z^*/\approx$$

Los elementos de Q son clases de equivalencia pues cada pareja ordenada de $\boldsymbol{B}$ pertenece a una familia de parejas equivalentes entre sí mediante la relación $\approx$. La representante de cada clase de equivalencia $[(m, n)]$ es una pareja (m, n), que pertenece a $\boldsymbol{B}$, donde m y n son primos relativos.

Las operaciones $\oplus$ y $\otimes$ se pueden pasar al cociente y definirlas entre las clases de equivalencia de la siguiente manera:

$$[(m,n) \oplus (p,q)] = [(mq + np, nq)]$$

$$[(m,n) \otimes (p,q)] = [(mp, nq)]$$

Las operaciones de suma y multiplicación así definidas en el conjunto de los números racionales cumplen las propiedades: asociativa y conmutativa, existencia de módulo para la suma y para la multiplicación, existencia de elemento inverso para la suma y para multiplicación, excepto para la clase $[(0,1)]$ y distributiva de la multiplicación con respecto a la adición lo que asegura que el conjunto de los racionales con las operaciones suma y producto forman un campo. (Muñoz, 1983, pp. 195 - 199).

Existe un isomorfismo entre los números enteros y una parte de los racionales, si se consideran las clases de los números racionales de la forma $[(m, 1)]$, y se establece una correspondencia entre cada una de las clases y el entero que está como primer elemento, la correspondencia así establecida es biunívoca y conserva la adición y la multiplicación. Por lo tanto, el conjunto de los números enteros Z es un subconjunto de Q.

También se puede establecer una biyección de Q con N que a cada elemento n de N asocia un elemento de Q, haciendo de los números racionales un conjunto numerable, además por ser $Q \leq N$ es un conjunto contable.

Usualmente se emplea para los números racionales, en lugar de $[(m, n)]$, la notación fraccionaria $\frac{m}{n}$, donde m se denomina numerador y n denominador, la cual se usará en adelante.

2.5.2 Estructura de Orden en los Números Racionales

La relación de orden de los números racionales se define a partir de la relación de orden usual establecida para los números enteros; esto es: dados $\frac{m}{n}$ y $\frac{p}{q}$ racionales cualesquiera con denominadores positivos, $\frac{m}{n} \leq \frac{p}{q}$ sí y sólo si $mq \leq np$, siendo esta última la relación de orden definida en Z.

Esta relación cumple las siguientes propiedades:

a. Como mq y np son enteros, según la ley de tricotomía válida para el orden entre números enteros, se cumple una única de las relaciones: $mq < np$, $mq = np$, $np < mq$, lo cual implica la validez de la tricotomía en Q:

$$\frac{m}{n} < \frac{p}{q}, \qquad \frac{m}{n} = \frac{p}{q}, \qquad \frac{p}{q} < \frac{m}{n}.$$

$$\text{Si } \frac{m}{n} < \frac{p}{q} \text{ y } \frac{p}{q} < \frac{r}{s}$$

b. La relación de orden en *Q* satisface las propiedades de monotonía:

$$\text{Si } \frac{m}{n} < \frac{p}{q} \text{ entonces } \frac{m}{n} + \frac{r}{s} < \frac{p}{q} + \frac{r}{s}$$

$$\text{Si } \frac{r}{s} > 0 \text{ y } \frac{m}{n} < \frac{p}{q} \text{ entonces } \frac{m}{n} \cdot \frac{r}{s} < \frac{p}{q} \cdot \frac{r}{s}$$

$$\text{Y si } \frac{r}{s} < 0 \text{ entonces } \frac{m}{n} \cdot \frac{r}{s} > \frac{p}{q} \cdot \frac{r}{s}$$ (Muñoz, 1983. pp. 199 - 200).

c. Dados $\frac{m}{n}$ y $\frac{p}{q}$ números racionales, existe siempre una fracción $\frac{r}{s}$ tal que $\frac{m}{n} < \frac{r}{s} < \frac{p}{q}$.

Es decir, entre dos números racionales por próximos que estén se pueden encontrar tantos racionales como se quiera. El conjunto de los números racionales es *denso* en todo intervalo.

Hasta aquí se contemplan los aspectos teóricos que desde la Educación Matemática y las Matemáticas son los fundamentos que orientan el análisis de los datos recolectados que se presenta en el capítulo tres.

3 CARACTERIZACIÓN DE LAS CONCEPCIONES DE LOS MAESTROS

En este capítulo se presentan los aspectos centrales de esta investigación, como son el tipo de investigación, las categorías de estudio y el análisis de los resultados, para finalizar con las concepciones identificadas en los docentes y las conclusiones.

3.1 Tipo y fases de la investigación

Esta investigación se enmarca dentro del paradigma interpretativo (Hernández, Fernández & Baptista, 1991) puesto que con base en las respuestas de los docentes se hizo una caracterización de sus concepciones acerca de los decimales y su relación con los números racionales.

La metodología empleada fue interpretativa y se usó la encuesta como técnica cuantitativa (Marqués, 2006). No se hizo intervención o cambio en algún ambiente. En el análisis se emplea estadística descriptiva, que junto con el análisis teórico hecho respaldan el proceso de categorización.

La investigación se desarrolló en tres fases: elaboración teórica, recolección de información y análisis descriptivo.

3.1.1 Elaboración teórica

La fase de elaboración teórica incluyó el estudio de los números racionales y sus representaciones desde las matemáticas en particular de la representación decimal y su historia; el estudio de la representación en la didáctica de las matemáticas y la revisión de literatura sobre concepciones de los docentes acerca de los decimales, lo que se expuso en el capítulo 2. También comprendió el diseño de un cuestionario de respuesta abierta (Anexo 1) para recoger información sobre las concepciones de los profesores.

3.1.2 Recolección y organización de la información

Se tuvo en cuenta la propuesta metodológica utilizada por Rico y Gil (2003) en su trabajo: *Elaboración de una encuesta para el estudio de las creencias de los profesores de matemáticas sobre evaluación*, en la que describen la manera como diseñaron el cuestionario con el que recogieron información acerca de las creencias de los profesores.

Para la elaboración del primer cuestionario que permitiera recoger información sobre las concepciones de los docentes se organizó una primera propuesta de categorías de análisis (Anexo 2) que tuvo en cuenta: *(i)* el esquema usado por Tirosh (1998) en el que considera que el conocimiento matemático de un grupo de personas está articulado en un sistema de conexiones entre las dimensiones algorítmicas, intuitivas y formales del conocimiento; *(ii)* la representación como aspecto clave de interés en este trabajo; y *(iii)* las actuaciones didácticas, puesto que como afirma Thompson (1992) es en este ámbito donde se reflejan las concepciones de los docentes.

Se aplicó el cuestionario inicial a 14 maestros de matemáticas que ejercen en educación básica secundaria[19], con preguntas de respuesta abierta a través de las cuales se indagó acerca de:

1. Aspectos relacionados con la didáctica de las matemáticas en relación con los números racionales y su representación decimal.
2. Ideas sobre conceptos relacionados con los números racionales.
3. Identificación de diferencias entre las representaciones y el concepto de número racional.

La parte del cuestionario correspondiente a los conocimientos de números racionales y ampliada con preguntas sobre procedimientos algorítmicos en las representaciones decimal y fraccionaria de los números racionales (Anexo 3), también se aplicó a 17

[19] Los encuestados fueron profesores de Matemáticas de Educación Básica en ejercicio, en Colombia se permite que profesionales de distintas áreas se vinculen al magisterio como maestros de matemáticas, en el cuestionario no se indagó por la formación profesional.

estudiantes para maestros de la Licenciatura en Matemáticas de la Universidad Pedagógica Nacional, que cursaban tercer semestre durante 2007-1(Anexo 2), lo que permitió recopilar información de diversos colectivos y replantear la primera propuesta de categorías de análisis.

Teniendo en cuenta las respuestas obtenidas y la primera propuesta de categorías de análisis se reorganizaron las categorías y se elaboró el cuestionario definitivo (Anexo 4) que consta de once preguntas: tres de respuesta abierta, siete de respuesta cerrada y una de tipo mixto, en la cual los encuestados debían organizar, según su importancia, una lista de temas; este cuestionario fue aplicado a 45 profesores de Matemáticas de Educación Básica Secundaria, de cinco colegios del sector privado y dos del sector oficial de Bogotá, diferentes a los participantes en la prueba piloto. Inicialmente se repartieron 120 cuestionarios, muchos de los maestros que lo recibieron se negaron a contestarlo argumentando que se sentían evaluados, a pesar de que en el cuestionario no se solicitó información personal (se contestaba de forma anónima), otros no dieron argumentos, simplemente lo ignoraron. Cabe resaltar que en esta clase de investigaciones es difícil que los docentes participen, debido a que se sienten miedo de ser juzgados.

3.1.3 Descripción y análisis

La descripción de la información y su correspondiente análisis se realizó a partir de la organización de las respuestas y su comparación con las categorías de análisis establecidas, no se hizo confrontación con entrevistas ni sesiones en profundidad debido a lo reacios que se mostraron, en general, los maestros para participar. Usando gráficas estadísticas se muestra la información recogida haciendo, para cada pregunta, un análisis descriptivo a la luz de las investigaciones sobre este tema y el marco teórico propuesto, que permitió llegar a las conclusiones.

3.2 Categorías de estudio y análisis de las respuestas

Para identificar y caracterizar las concepciones de los maestros, en esta investigación se asumió la perspectiva cognitiva, por lo tanto se indagó sobre aspectos relacionados con sus *conocimientos formales* concernientes a la representación decimal de los números racionales y las *acciones didácticas* que tienen en cuenta para su enseñanza. En este orden de ideas, se definieron estos dos aspectos como variables de investigación:

1. Conocimientos formales: hace referencia a las nociones que tienen los docentes de decimal y densidad y, al tipo de relaciones que establecen entre decimales, fraccionarios y algunos conjuntos numéricos como naturales, enteros y racionales.
2. Acciones didácticas: corresponden a los aspectos que permiten a los maestros tomar decisiones para la enseñanza de los decimales: prioridad en los contenidos relacionados con los decimales, conocimientos que considera deben dominar sus estudiantes para iniciar su estudio y formas de introducir el tema.

Las preguntas del cuestionario se organizaron en categorías atendiendo a las dos variables descritas, como se muestra en la siguiente tabla:

Variables	Categorías	Preguntas
Conocimiento formal	Significado de los decimales.	1, 3 y 9
	Noción de densidad.	4 y 6
	Relación entre decimales, fraccionarios y conjuntos numéricos.	8 y 11
Acciones didácticas	Conocimientos que deben saber los estudiantes para aprender decimales.	2
	Significados que utilizan los docentes para introducir los decimales.	7
	Organización jerárquica que hacen los docentes de los aspectos a aprender sobre decimales.	10

Tabla 2. Variables y categorías de análisis

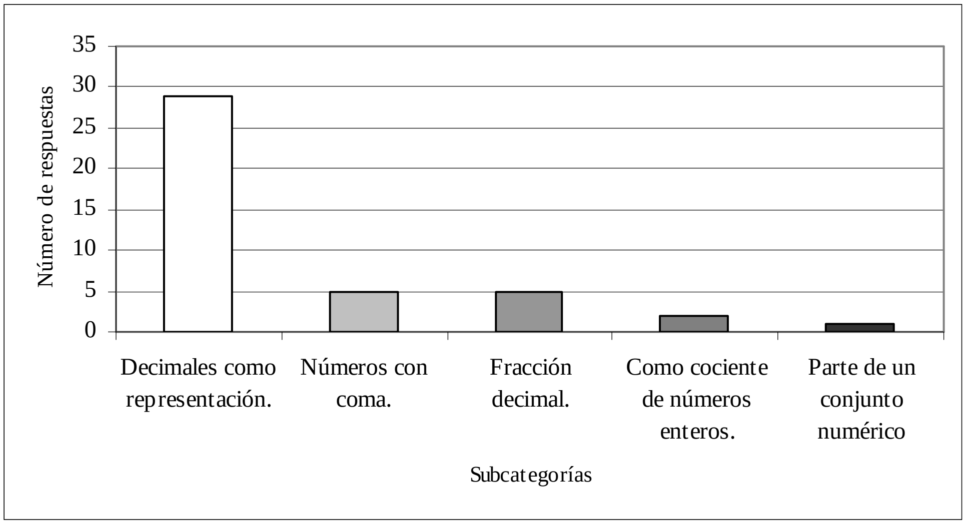
El análisis se hizo de manera descriptiva e interpretativa obteniendo la caracterización de las concepciones de los maestros sobre la representación decimal de los números racionales. Para cada pregunta se realizó un diagrama de barras que muestra los datos obtenidos en los 45 cuestionarios aplicados. En algunas respuestas la totalidad no corresponde a la cantidad de encuestados puesto que para esas preguntas se podía marcar más de una opción.

De las once preguntas formuladas en el cuestionario se analizaron diez, debido a que la pregunta 5 con la cual se esperaba recoger información sobre si los profesores reconocían que los números enteros también tienen representación decimal quedó mal formulada, y no aportó datos válidos para el propósito de esta investigación. A continuación se presenta el análisis estadístico, pregunta por pregunta, organizado según las categorías antes mencionadas.

3.2.1 Conocimiento formal

3.2.1.1 Significado de los decimales

Esta categoría recogió las interpretaciones que tienen los maestros de los decimales, se encontró que los decimales, según los profesores que respondieron el cuestionario, pueden ser: representación de números, números con coma, cocientes, fracciones decimales o parte de un conjunto numérico. Atendiendo a esto, las respuestas a la pregunta 1 (de respuesta abierta) - **interpretación de los docentes sobre los decimales** - se organizaron en cinco subcategorías,



Gráfica 6. Interpretación de los decimales

1. **Decimales como representación.** En esta subcategoría, correspondiente al 64% de las respuestas, se incluyen frases como las siguientes:

   "Un número decimal es una representación de un número racional"

   "Es una forma de representar un número racional, no existen como objeto matemático"

   "Es una representación de un número racional como sucesión de números naturales o, si se quiere como serie de la forma $....\, a10^2 + b10^1 + c10^0 + d10^{-1} + e10^{-2} + ...$ *"*

   "Es otra forma de representar racionales, acudiendo a herramientas y características de la base 10"

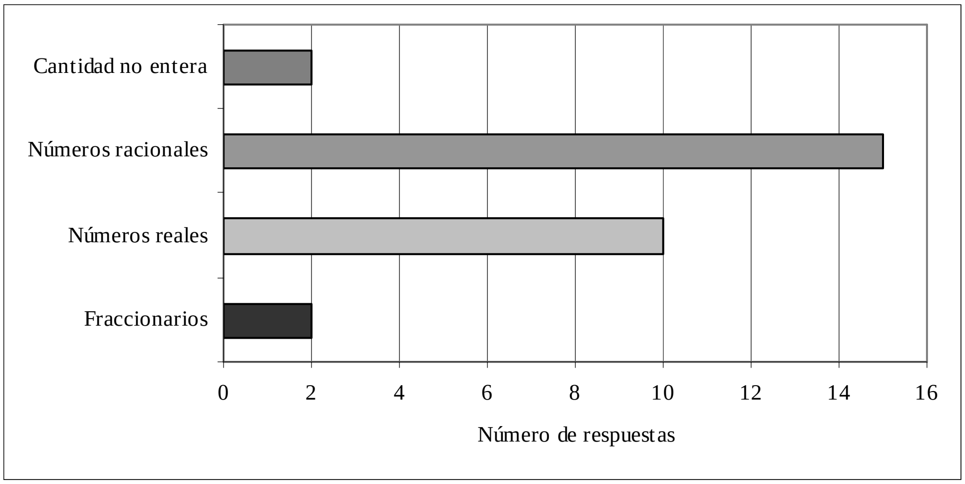
   "Es una representación numérica de un número racional en el que se tiene en cuenta el sistema posicional de numeración"

   "Es la representación de los números racionales y de los números irracionales"

   "Es aquel que representa medidas que no son exactas"

Estas frases evidencian la concepción propuesta por Gómez (2001) acerca de los decimales como una nueva forma de escritura, es decir, solamente es un cambio en el sistema de representación.

Las respuestas de esta subcategoría se clasificaron en cuatro conjuntos de acuerdo a lo que los maestros escribieron que representaban los decimales: fraccionarios, números reales, números racionales y cantidades no enteras, se muestra a continuación la gráfica correspondiente a esta clasificación:



Gráfica 7. Decimales como representación

De los maestros que consideran a los decimales como una representación, son más los que los señalan como representación de los números racionales e incluso que como representación de los números reales en contraste con quienes consideran que son una representación de los fraccionarios o de una cantidad no entera.

El encontrar que hay maestros que consideran los decimales como representación de los números racionales y no como representación de los números reales muestra que éstos maestros no reconocen que existen decimales que representan números no racionales. Gómez (2001) plantea que esta situación se debe a la introducción de los decimales como otra forma de escritura para las fracciones.

La expresión *"representación de una cantidad no entera"* deja la duda de si estos docentes reconocen que los números enteros y los números mayores que 1 (uno) también tienen representación decimal. Abrouguí (2003) encontró en su investigación que es probable considerar los decimales como números inferiores a 1, consideración que estaría incluida en este conjunto, se desprende de la definición de decimal como fracción y ésta como parte de una unidad.

2. **Números con coma.** El 11% de los encuestados da a los decimales este significado, algunas de las respuestas de esta subcategoría son:
   "Es un número donde existe una parte entera y una parte decimal separadas por una coma"
   "En matemáticas se refiere a cada uno de los dígitos que aparece a la derecha de la coma"
   Frases como la segunda indican que no se reconoce como decimal a la expresión completa, si no sólo a las cifras que están a la derecha de la coma, como lo señala Gómez (2001):

   > se suele denominar parte entera a la de la izquierda de la coma y decimal a la de la derecha, lo que hace que algunos estudiantes sólo consideran decimal a ésta última, y por lo tanto, lo que es menor que uno. Esto lleva a pensar que la parte entera es la importante y la parte decimal vale poco y se puede despreciar (p. 2).

   Abrouguí (2003), encontró que la concepción de decimal como número con coma, es la más común entre los maestros y que es el origen de la confusión entre un decimal y un decimal no racional; a diferencia de esta estudio, donde esta concepción es una de las menos relevantes.

3. **Fracción decimal.** El 11% refleja una interpretación de los decimales como fracción decimal, ejemplos de las respuestas son:
   "Son partes de un entero y que según nuestro sistema decimal se puede en $\frac{1}{10}, \frac{1}{100}, \frac{1}{1000} \ldots$ *etc"*

"Es un número que tiene parte entera y decimales que representa las fracciones con denominador de potencias de 10".
"Un número exponencial con potencias negativas de 10"

Gairín (2003-2004) encuentra que en España, la tendencia de los manuales escolares es construir las fracciones decimales positivas como una restricción de los números racionales, considerando solamente aquellos números racionales que pueden expresarse mediante una fracción decimal, para luego introducir el convenio que permite pasar de las fracciones decimales a la notación decimal, esta preferencia es promovida por autores como Abrouguí (2003), Godino y Batanero (2004) y Centeno (1988) para quienes los "números decimales" D son un subconjunto de Q, es decir, no se tienen en cuenta los que conocemos como decimales infinitos periódicos que también son representación de los números racionales. Gairín afirma que esta interpretación de los decimales "oculta una relación entre fracciones ordinarias y fracciones decimales que, históricamente, no fue sencilla de establecer y que tuvo dificultades de aceptación" (p. 251).

4. **Como cociente de números enteros.** Sólo el 4% escribe que son resultado del cociente entre dos números enteros, aquí se incluyen respuestas como:

   "Es la expresión resultante del término de la forma $\frac{a}{b}, b \neq 0$ "

   "Se genera como el resultado del cociente entre dos enteros"

   Esta interpretación de los decimales como cocientes de números enteros puede coincidir con la de números con coma, puesto que al efectuar la división entre dos enteros cuando se obtiene un residuo no nulo y un cociente entero, se continúa la división usando la coma para diferenciar la parte entera de la parte decimal de dicho cociente (Abrouguí, 2003; Gómez, 2001).

5. **Parte de un conjunto numérico.** El 2%, un encuestado, responde que los decimales son parte de un conjunto numérico, la frase que escribe es:

> *"Es un número que hace parte de los R"*
>
> Esta respuesta muestra que no se reconocen los decimales como representación de los números reales, se consideran como subconjunto de los reales, aunque no aclara cómo se caracteriza ese subconjunto.

Una persona no respondió a esta pregunta del cuestionario y se encontraron algunas frases que no se ubicaron en alguna de las subcategorías anteriores por considerarse ambiguas, muy generales o sin claridad, éstas son:

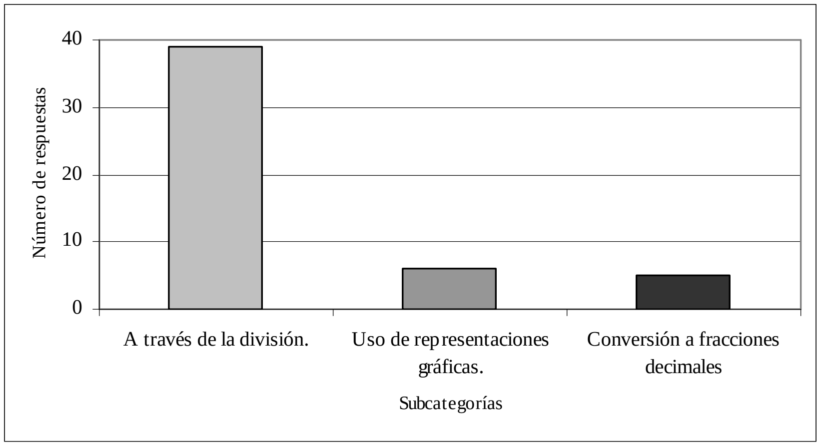
> *"Un número decimal representa una cantidad cualquiera"*
>
> *"Un número que hace parte de un número entero"*

El 36% de los encuestados no marcaron los decimales como una representación, sino como números con coma, como el resultado de una división, como fracciones decimales o como parte de algún conjunto numérico. Se observa que de los 29 maestros que identifican los decimales como una representación, 25 lo hacen de los números racionales y reales, y los demás los ven como representación de los fraccionarios y de cantidades no enteras. Se resalta que ninguno de los encuestados los asocia con un conjunto numérico diferente a los números enteros, números racionales o números reales.

Las respuestas a la pregunta 3 (de respuesta cerrada) - **forma que usa para expresar fraccionarios como decimales** - se organizaron en tres subcategorías[20]:

1. A través de la división. Las que marcaron la opción b.
2. Conversión a fracciones decimales. Correspondiente a la opción a.
3. Uso de representaciones gráficas. Opción c.

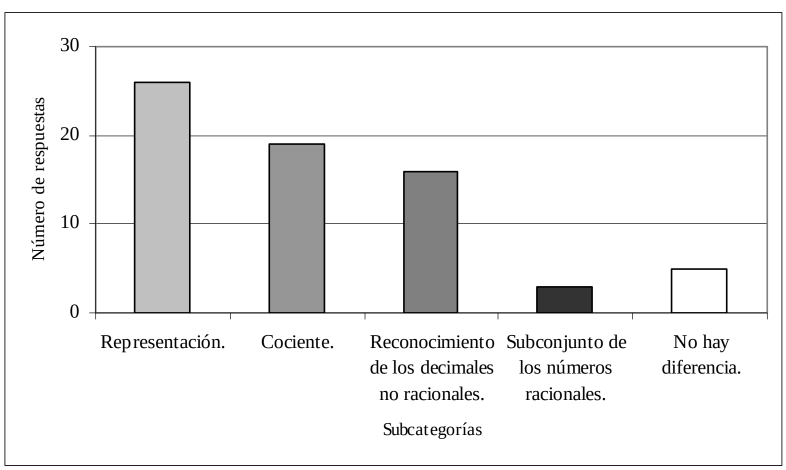
[20] Las opciones de repuesta a la pregunta 3 son: a. Convertir fracciones a fracciones decimales y luego expresarlas a forma decimal. b. Dividir numerador entre denominador. c. Dibujar o imaginar alguna representación gráfica.



Gráfica 8. Forma usada para expresar fraccionarios como decimales

Como se observa en la gráfica 8, la mayoría, 78%, hace la división entre el numerador y el denominador de la fracción para encontrar su expresión decimal, el 12% usa representaciones gráficas como dibujos o rectas numéricas y el 10% busca fracciones decimales equivalentes a la fracción inicial. Se podría conjeturar que esto se debe al énfasis excesivo, que tradicionalmente se hace en la escuela, en la mecanización de procedimientos algorítmicos y la poca reflexión sobre las representaciones de este objeto matemático.

Las respuestas al punto 9 - **diferencia entre los números racionales y los decimales** - se dispusieron en cuatro subcategorías:



Gráfica 9. Diferencia entre números racionales y decimales

1. **Representación.** En esta subcategoría se incluyeron las respuestas de las opciones e. y f., que hacen referencia a que los números racionales son un objeto matemático y los decimales son una representación de este objeto y, un número racional puede estar en una base k ($k > 1$), no necesariamente en base 10, los decimales son en base 10.
2. **Cociente entre enteros.** Se incluyeron las respuestas de la opción d. en la que se afirma: el número racional se expresa de la forma $\frac{a}{b}$ con a,b enteros con $b \neq 0$ y al cociente de *a y b* se le denomina decimal.
3. **Reconocimiento de los decimales no racionales.** Se tuvieron en cuenta las respuestas de la opción c. en la que se expresa que los decimales no periódicos no son números racionales.
4. **Subconjunto de los racionales.** En esta subcategoría se incluyen los cuestionarios donde marcaron a. y c. simultáneamente, inicialmente estos enunciados parecieran contradictorios pues primero señalan que todo decimal se puede representar como número racional y luego que los decimales infinitos no periódicos no son números racionales, sin embargo, si los docentes tienen la concepción de que los decimales son solamente los finitos, que representan fracciones decimales, que son un subconjunto de los números racionales no habría tal contradicción, tan sólo no se consideran los decimales infinitos periódicos.
5. **No hay diferencia.** Esta subcategoría comprendió las respuestas a las opciones a. y b., en donde se encontraban las afirmaciones: todo decimal se puede representar como número racional y todo número racional como decimal y, no hay diferencia entre números racionales y decimales.

De los encuestados, 17 marcaron sólo una opción en esta pregunta, 17 marcaron dos opciones, 8 marcaron tres opciones, dos marcaron cuatro opciones, una persona marcó cinco opciones y 4 personas no respondieron.

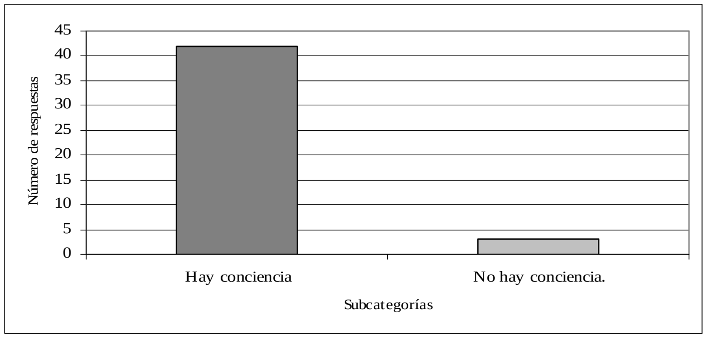
En este ítem el 36% de las respuestas señalan a los decimales como representación de los números racionales, reafirmando lo encontrado en la pregunta No. 1 que muestra la concepción de decimal como representación, que tienen la mayoría de los maestros; el 26% los asume como el cociente entre el numerador y el denominador de una fracción, lo cual coincide con la concepción del decimal como cociente; el 22% reconoce que los decimales infinitos no periódicos no son racionales; el 4% los considera como subconjunto de los números racionales, en concordancia con la concepción de decimal como fracción decimal; y el 7% no establece diferencias entre los decimales y los números racionales. Estas coincidencias con las respuestas de la pregunta 1 reafirman las concepciones expresadas por los docentes en relación con los decimales.

Con respecto a las preguntas que indagaban por el significado de los decimales, se encontró que la concepción de decimal como representación es la que predomina; seguida por la concepción de decimal como cociente que se relaciona con la de decimal como número con coma como lo afirman Abrouguí (2003) y Gómez (2001). Las concepciones de decimal como fracción decimal y como parte de un conjunto numérico son las menos contempladas por los docentes encuestados.

3.2.1.2 Noción de densidad

En esta categoría se incluyeron las preguntas que indagaban acerca de la conciencia de los maestros sobre la propiedad de densidad de los números racionales, y las ventajas de trabajar esta noción a partir de la representación decimal.

Las respuestas a la pregunta 4 (de respuesta cerrada) - **conciencia sobre la densidad de los números racionales desde su representación decimal** - se organizaron en dos subcategorías:

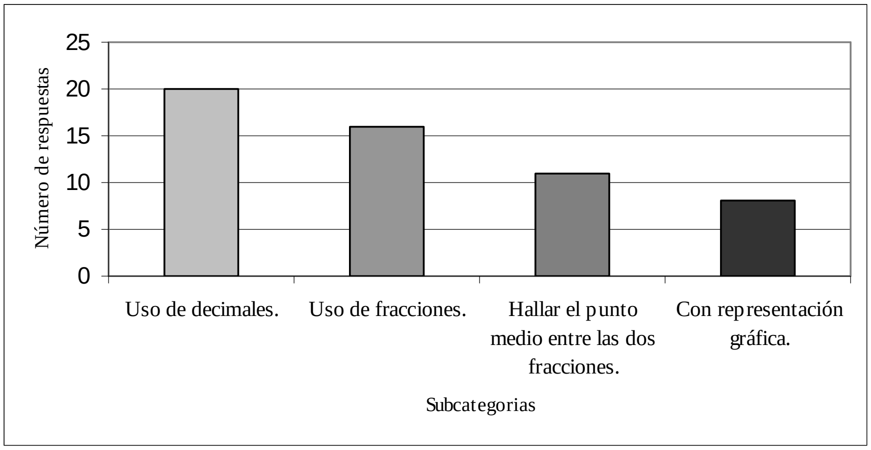


Gráfica 10. Conciencia sobre la densidad de los números racionales

1. **Hay conciencia.** Se consideró la opción b. que afirmaba la existencia de infinitos números entre los dos decimales dados.
2. **No hay conciencia.** Se tuvieron en cuenta las opciones a. y c. donde se señalaba la existencia de algunos números o la no existencia de números entre los decimales dados.

La mayoría, 93% de los docentes son conscientes de la existencia de la propiedad de densidad de los números racionales, frente al 7% (tres maestros) que contestaron que no hay, o sólo hay algunos, números entre los dos números dados. Por lo tanto, si hay un conocimiento matemático sobre la propiedad de densidad que es fundamental en los números racionales.

Las respuestas a la pregunta 6, representación de los números racionales usada con más frecuencia en ejercicios en los que se indaga por aspectos relacionados con la densidad, se organizaron en cuatro subcategorías:



Gráfica 11. Representación de los números racionales más usada

1. **Uso de decimales.** Se incluyeron los cuestionarios en que marcaron la opción a., en donde la preferencia es expresar cada fracción en forma decimal y buscar un decimal que este entre los dos obtenidos.
2. **Uso de fracciones.** Las opciones c. y d., en donde señalaron que usan con más frecuencia expresar cada fracción como fracción decimal, y escribir una fracción decimal entre las dos obtenidas y buscar por amplificación un par de fracciones equivalentes, no necesariamente decimales, y escoger varias fracciones.
3. **Hallar el punto medio entre las dos fracciones.** Las respuestas que señalaron la opción b: hallar el punto medio entre las dos fracciones.

   Centeno (1988) señala que siempre es posible encontrar un racional entre dos números racionales a y b solamente hallando $\frac{a+b}{2}$.
4. **Con representación gráfica.** Las opciones e. y f. que hacían referencia a representaciones gráficas como el mecanismo para encontrar un número entre dos números racionales dados.

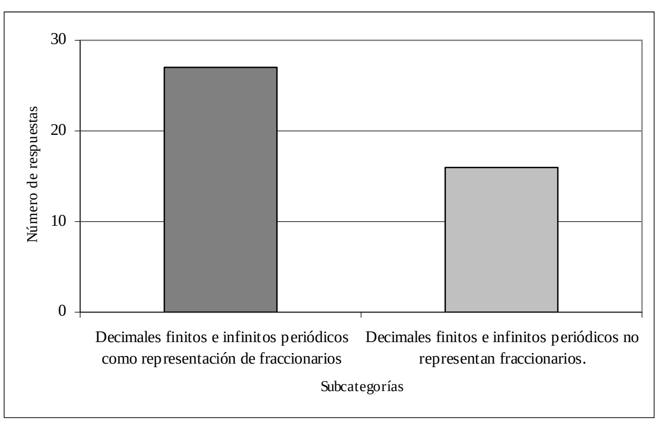
La mayoría de los docentes, el 64%, usan representaciones diferentes a la decimal cuando realizan ejercicios en los que se indaga por aspectos relacionados con la densidad: el 29% recurre al uso de fracciones equivalentes; un 20% de las respuestas muestra como mecanismo hallar el punto medio entre las dos fracciones y el 14% emplea la representación gráfica que incluye ubicación en la recta numérica. Solamente el 36% usa la representación decimal en estos casos.

Broitman (2003), Godino y Batanero (2004) y Tirosh et al. (1998) afirman que el aprendizaje de la propiedad de densidad de los números racionales se facilita cuando se trabaja con la representación decimal; sin embargo, a pesar de que los docentes son concientes de esta propiedad de los números racionales la encuesta mostró que para ellos no es evidente que su aprendizaje y uso se facilitan a través de la representación decimal.

3.2.1.3 Relación entre decimales, fraccionarios y conjuntos numéricos

En esta categoría se incluyeron las respuestas que permitieron observar si los maestros identifican la existencia de decimales que no representan números racionales, y si reconocen que los decimales que representan números racionales tienen representación fraccionaria. También las que permitieron conocer si los docentes diferencian los conjuntos numéricos de sus representaciones y las relaciones que establecen entre éstos.

Las respuestas a la pregunta 8 **- relación entre las representaciones decimal y fraccionaria de números racionales -** se organizaron en dos subcategorías:



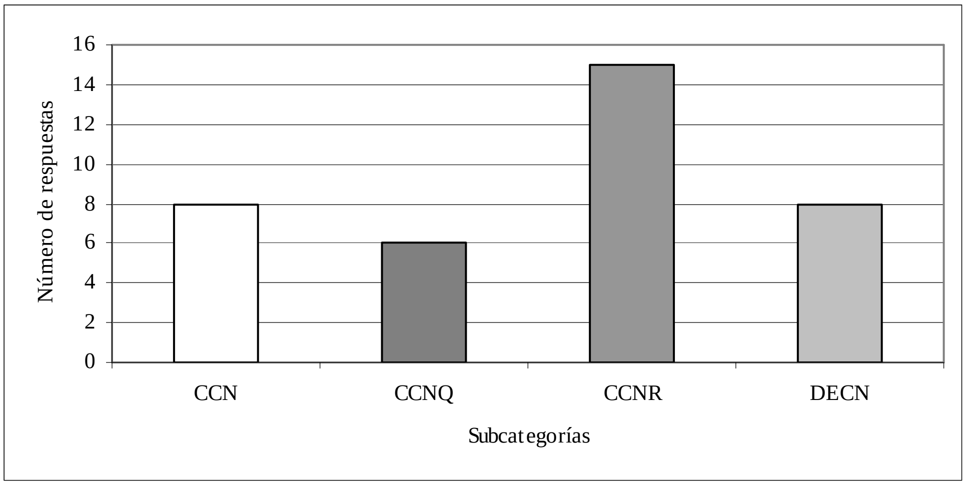
Gráfica 12. Relación entre representación decimal y fraccionaria

1. **Decimales finitos e infinitos periódicos como representación de fraccionarios.** En esta subcategoría se consideraron los cuestionarios que marcaron las opciones a. d. o f.: “los decimales infinitos periódicos se pueden representar como fracción”, “las fracciones representan cocientes y algunos de estos son decimales periódicos” o “sólo a los decimales finitos y a los decimales infinitos periódicos les corresponde una fracción”.
2. **Decimales infinitos periódicos no representan fraccionarios.** En esta subcategoría se consideraron los cuestionarios en donde marcaron las opciones b., c. o e., donde las afirmaciones eran: “sólo los decimales finitos se pueden representar como fracción”, “los decimales infinitos periódicos no se pueden representar como fracción” o “a todo decimal corresponde una fracción” y se cuentan además los cuestionarios que señalaron como verdaderos de manera simultánea los numerales e. y f., d. y e. o a. y e.

   Sin embargo, de las respuestas que marcaron la opción e. (a todo decimal corresponde una fracción), no se puede establecer en este estudio si los profesores encuestados están considerando los decimales como el subconjunto D de los números racionales para los cuales se puede encontrar una fracción decimal representante como lo plantean Godino y Batanero (2004), Centeno (1988) y Abrougui (2003); o si erróneamente están pensando que todos los decimales tienen representación fraccionaria ignorando los irracionales.

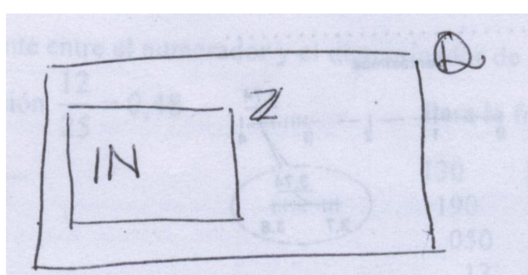
El 60% de los maestros, que es la mayoría, reconocen los decimales como representación de todos los fraccionarios, es decir, como una representación de los números racionales; y el 35% no identifica los decimales infinitos periódicos como representación de los fraccionarios, lo que corrobora la noción de decimal como fracción decimal. No se consideraron dos cuestionarios en los que marcaron simultáneamente las opciones a., c. y f. pues son contradictorias: las opciones a. y f. dicen que los decimales infinitos periódicos se pueden representar como fracción, la opción c. dice que no.

Los diagramas respuestas a la pregunta 11 - **organizar los conceptos: números naturales, números enteros, números racionales, fraccionarios, decimales, decimales finitos, decimales infinitos, decimales periódicos** - se organizaron en cuatro subcategorías:



Gráfica 13. Diagramas de conceptos

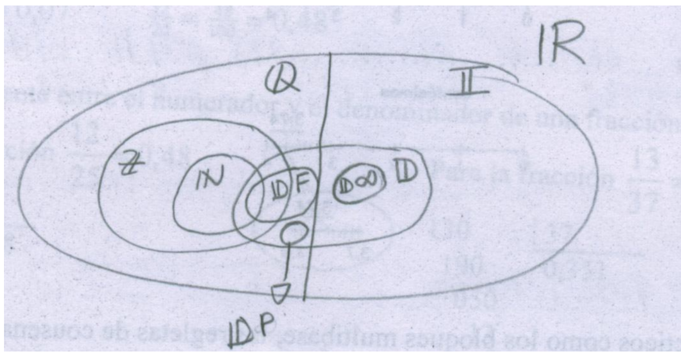
1. Los diagramas (gráfica 14) que incluyen únicamente la contenencia entre conjuntos numéricos (CCN) y no utilizaron los conceptos relacionados con representación (fraccionarios, decimales, decimales finitos, decimales infinitos, decimales periódicos), un ejemplo es el siguiente (elaborado por un maestro)



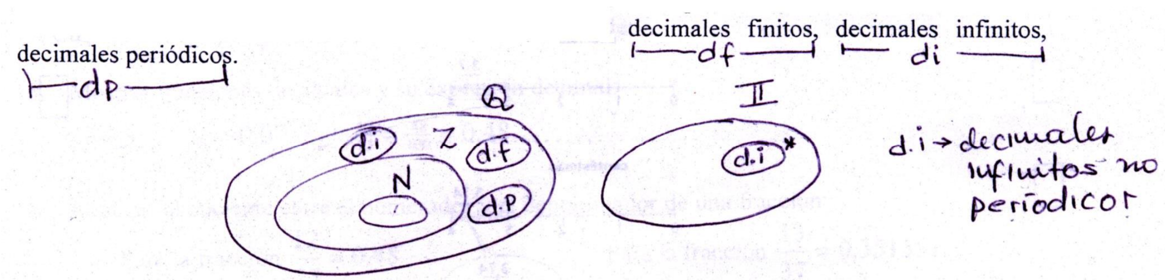
Gráfica 14.

2. Los diagramas (gráficas 15a y 15b) que incluyen la contenencia entre los conjuntos numéricos y además consideran los fraccionarios, los decimales finitos

e infinitos y los decimales periódicos como subconjuntos dentro del conjunto de los racionales y no como sus representaciones (CCNQ). Dos de las gráficas ubicadas en esta subcategoría son:

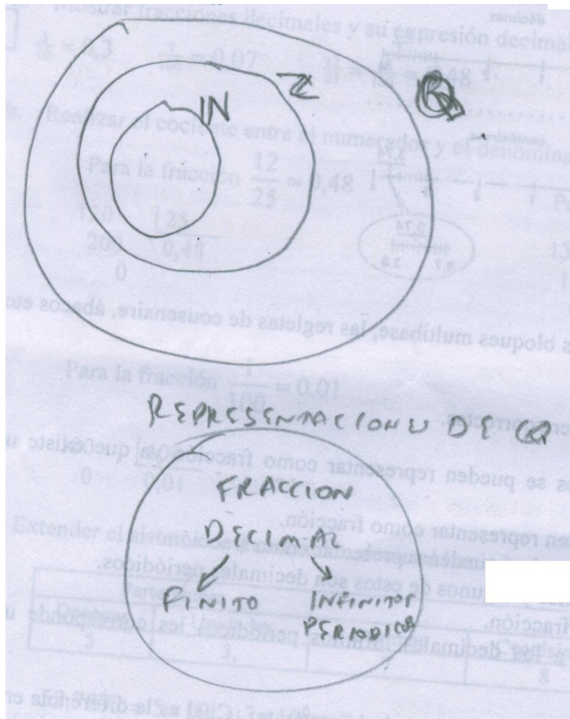


Gráfica 15a.

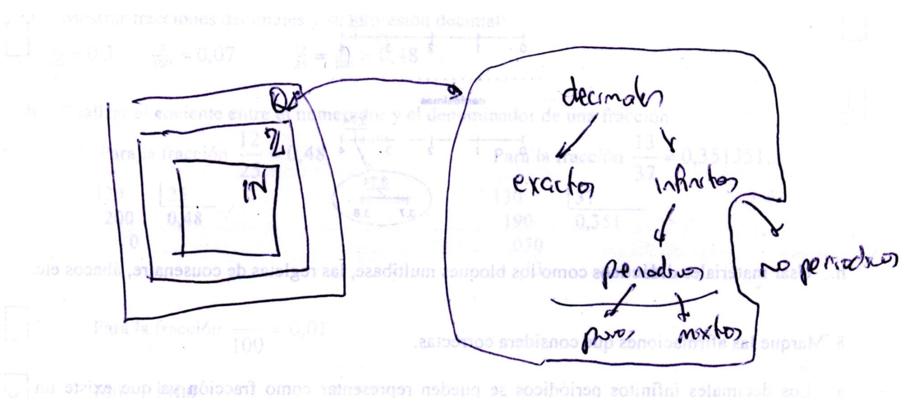


Gráfica 15b.

3. Los diagramas (gráficas 16a y 16b) que incluyen la contenencia entre los conjuntos numéricos y los conectan con un bosquejo en el que organizan los conceptos relacionados con representación (CCNR). Estos son dos ejemplos:

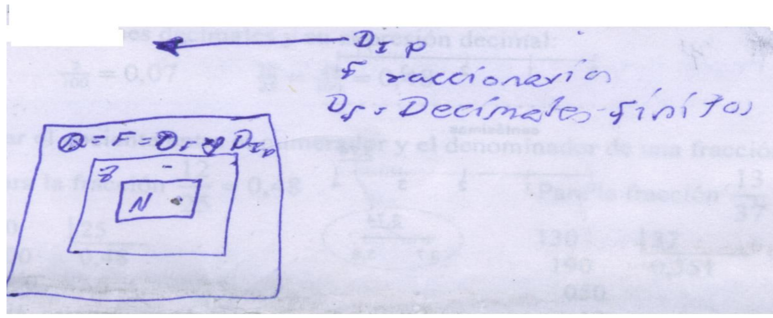


Gráfica 16a.

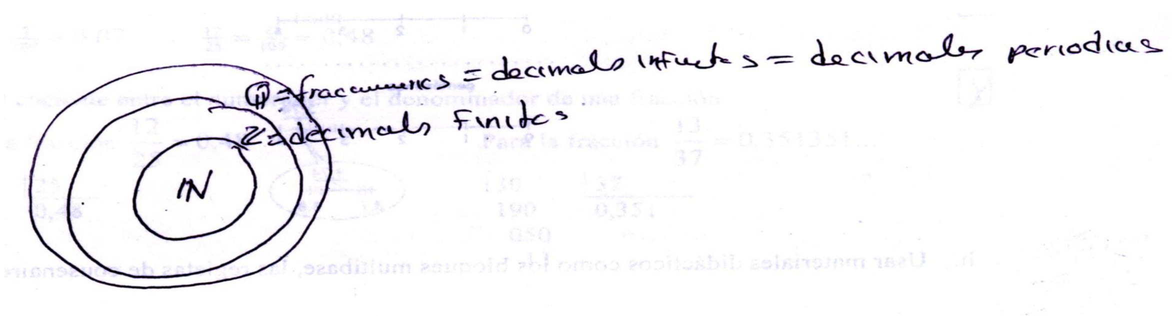


Gráfica 16b.

4. Los diagramas (gráficas 17a y 17b) en los que escriben los decimales como equivalentes a un conjunto numérico (DECN). Estos son dos ejemplos:



Gráfica 17a.



Gráfica 17b.

Sólo 37 profesores de los 45 encuestados realizaron el diagrama. De los diagramas elaborados por los docentes, el 41% organiza los conceptos dados en dos partes, conjuntos numéricos y representaciones, aunque los ubican en diagramas separados establecen un vínculo entre los dos (gráficas 16a y 16b). En el caso en que consideran los términos sobre representación como subconjuntos dentro del conjunto de los números racionales (CCNQ), (gráficas 15a y 15b) se encuentran 6 profesores (16%). El 22% de los encuestados sólo tuvo en cuenta los conjuntos numéricos para hacer el diagrama. Otro 22% consideran los fraccionarios o los decimales como equivalentes a los números racionales no como su representación.

Contrastando en cada cuestionario las respuestas a las preguntas 8 y 11, se encuentra que en 17 de las 37 encuestas hay contradicción entre estos dos puntos, pues en el punto 8 se evidencia que los decimales finitos e infinitos periódicos tienen representación fraccionaria pero en los diagramas del punto 11 se muestran los fraccionarios y los decimales como subconjuntos disjuntos de los números racionales o no se incluyen los fraccionarios. En 12 de las encuestas hay concordancia entre estos dos puntos y en 8 no se puede establecer ningún tipo de comparación pues no incluyeron en el diagrama los conceptos relacionados con representación (fraccionarios y decimales).

De otra parte, las repuestas a la pregunta 11 en las que se consideran los decimales y los fraccionarios como equivalentes a los conjuntos de los números racionales o reales o como subconjuntos de éstos (gráficas 15a, 15b, 17a y 17b) abren la posibilidad de incluirlas en la subcategoría: "parte de un conjunto" establecida en la categoría "significado de los decimales"; a la vez se observa nuevamente una contradicción, pues en la pregunta 1 sólo una persona los considera equivalentes a un conjunto numérico, mientras que en la pregunta 11, catorce de los diagramas muestran los decimales como conjuntos equivalentes a los números racionales o reales o subconjuntos de éstos.

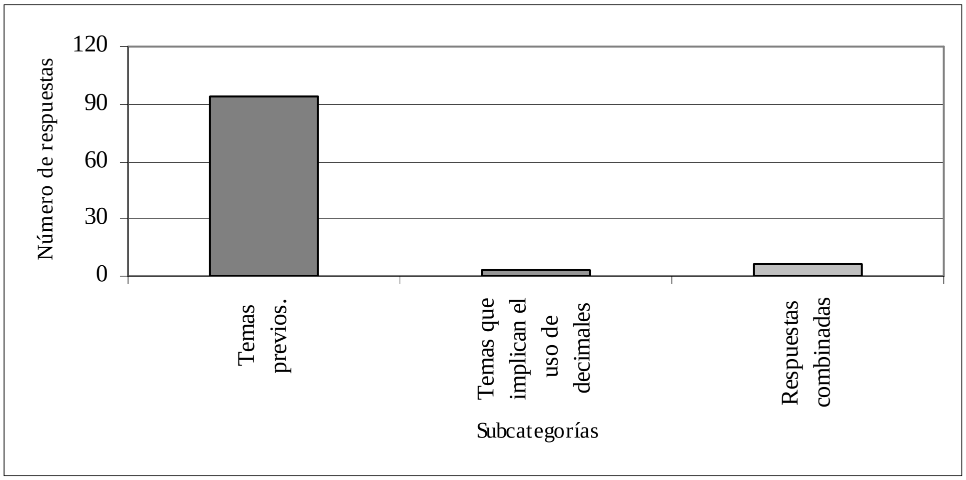
Con respecto a esta categoría, se encuentra que no todos los maestros encuestados identifican la existencia de decimales que no representan números racionales, tampoco reconocen que los decimales que representan números racionales tienen representación fraccionaria. Además, la mayoría no hace diferencia entre los conjuntos numéricos (números naturales, números enteros y números racionales) y sus representaciones (fraccionaria y decimal).

3.2.2 Acciones didácticas

3.2.2.1 Conocimientos que deben saber los estudiantes para aprender decimales

En esta categoría se incluyeron las respuestas que permitieron identificar los temas que los docentes consideran pre- requisitos, en el currículo, para el aprendizaje de los decimales. Es decir, los temas de aritmética escolar que los niños deben conocer anticipadamente para iniciar el estudio de los decimales.

Con la pregunta 2 - **temas que consideran los docentes deben conocer previamente los estudiantes para aprender decimales** - las respuestas que consistieron en listas de temáticas escolares se organizaron en tres subcategorías:



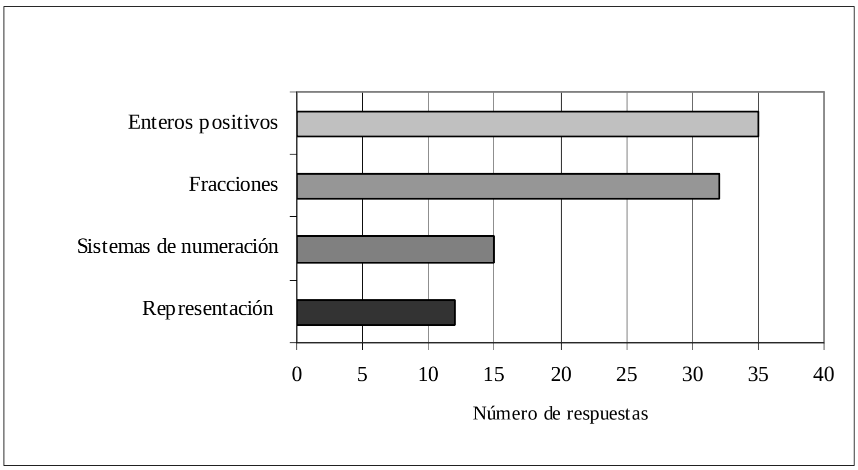
Gráfica 18. Conocimientos que deben saber los estudiantes para aprender decimales

1. **Temas que son previos en el orden curricular**, los cuales incluyeron conocimientos relacionados con *representación* (ubicación de números enteros y fracciones sobre la recta numérica, representaciones gráficas, partes de una unidad, ubicación en el plano cartesiano, representación de no enteros); *sistemas de numeración* (representación en diferentes bases, sistema decimal, valor posicional, sistema de numeración posicional, potencias y descomposición); *fracciones* (fracción decimal, complificar fracciones, fracción como cociente, fracciones propias, unidades enteras, diferencia entre una repartición y una unidad completa, densidad, aplicaciones y usos de los fraccionarios como medición, sistema métrico decimal, múltiplos y submúltiplos, medida de longitudes) y; *enteros positivos* (números enteros, operaciones básicas, números naturales, orden de los naturales, potencias de diez y sus propiedades).
2. **Temas o conocimientos que ya implicaban la utilización de decimales** (definición, conversión a decimales, concepto de decimal como representación

de fracción, números racionales, representaciones de los racionales, sistemas numéricos)

3. **Respuestas que contenían temas tanto del numeral 1. como del 2.**

El 9% incluye, dentro de los conocimientos previos para el aprendizaje de los decimales, la definición y parte de su manejo operatorio. En contraste el 91% identifican los temas que se estudian antes: 12 hacen referencia a las representaciones gráficas de los números enteros positivos y las fracciones, 15 a los sistemas de numeración, 23 tienen en cuenta conocimientos relacionados con fracciones y 35 con las operaciones y propiedades de los números enteros positivos, lo cual se muestra en la gráfica siguiente:



Gráfica 19. Conocimientos previos

El manejo de los conocimientos relacionados con los números naturales es claramente uno de los temas que se establece como requisito para el aprendizaje de los decimales, primero es necesario aprender a contar, luego surge la necesidad de crear unos números que permitan expresar cantidades no enteras pero que no excluyan a los números enteros positivos: los números racionales positivos.

Un alto porcentaje de los docentes considera el estudio de las fracciones como paso previo al estudio de los decimales replicando el desarrollo histórico y comprobando de este modo la influencia de los planes curriculares y de los estándares en los cuales se plantea primero el estudio de las fracciones; sin embargo, cabe resaltar que para algunos autores la iniciación de los decimales se puede dar a través de problemas en que los niños los utilicen como nuevos números y que esto sea simultáneo o paralelo con el trabajo de los fraccionarios, al respecto, Brousseau (2007) afirma:

> It is not necessary to learn fractions in order to learn decimals. On the contrary, the latter can be understood at the same time as decimal numeration, supported by the decimal system of measurement and allowing all practical measurement problems to be resolved more easily. This solution has many advantages for teaching, especially in countries where children are already used to measuring with the metric system. (p. 2)[21]

Otro de los aspectos que los docentes consideran previos al aprendizaje de los decimales es que los estudiantes dominen el sistema de numeración posicional usado en la escritura de los números enteros positivos, a propósito Cid, Godino y Batanero (2004) señalan:

> Para iniciar con éxito el estudio de la representación decimal de las fracciones es necesario que el niño tenga soltura y comprensión en los convenios del sistema decimal de representación de los enteros y comprenda el principio del valor de posición. (p. 243)

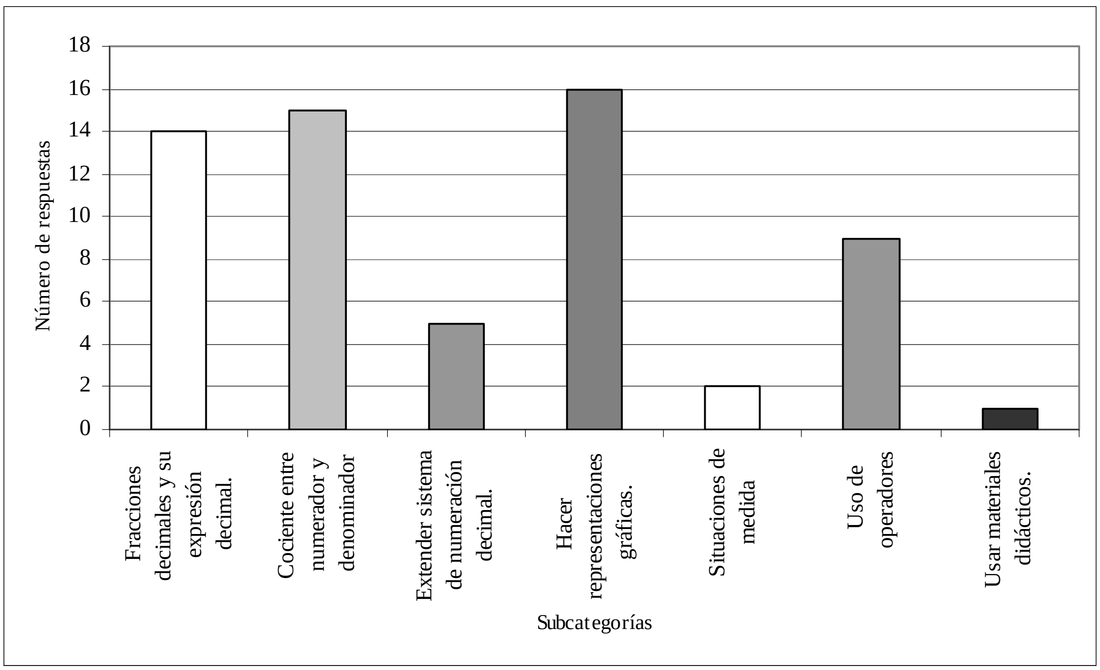
Los docentes también consideran que previo al aprendizaje de los decimales se deben conocer y manejar representaciones de los fraccionarios como ubicación en la recta numérica, representación gráfica usando unidades continuas y discretas. Castro (2001) considera que el alumno debe comprender el significado de decimal como fracción lo que implica que los decimales se pueden representar de manera gráfica como la partición de unidades continuas o discretas y ubicando puntos sobre la recta numérica.

[21] No es necesario aprender fracciones para aprender decimales. Sin embargo, estos últimos se pueden entender al mismo tiempo, como la numeración decimal, apoyada por el sistema decimal de medida, haciendo que los problemas prácticos de medición sean resueltos más fácilmente. Esta alternativa tiene muchas ventajas para la enseñanza, especialmente en países donde los niños ya están acostumbrados a medir con el sistema métrico. (Traducción libre de las autoras)

3.2.2.2 Significados que utilizan los docentes para introducir los decimales

Esta categoría incluye las respuestas que llevaron a conocer la forma en que los docentes introducen el tema de los decimales.

Las repuestas a la pregunta 7 - **formas de iniciar el estudio de los decimales** - se organizaron en siete subcategorías.



Gráfica 20. Introducción a los decimales

1. **Mostrar fracciones decimales y su expresión decimal**. Correspondiente a la opción a., señalando los decimales como una forma de expresar las fracciones decimales (Abrouguí, 2003; Gómez, 2001).
2. **Realizar el cociente entre el numerador y el denominador de una fracción**. Correspondiente a la opción b. A partir de la división, se puede iniciar el estudio de los decimales diciendo que una fracción se puede expresar como decimal dividiendo el numerador entre el denominador (Abrouguí, 2003; Gómez, 2001).

3. **Extender el sistema de numeración decimal hacia la derecha**. Opción c. Extendiendo el sistema de numeración posicional hacia la derecha, teniendo en cuenta que cada lugar representa una décima parte del lugar precedente y separando, con una coma, la parte entera de lo que se denomina “parte decimal” (Centeno, 1988; Gómez, 2001).
4. **Hacer representaciones gráficas**. Corresponde a las opciones d. y g., representación gráfica de fracciones decimales y ubicación en la recta numérica (Castro, 2001).
5. **Situaciones de medida.** Opción e. A partir de situaciones sobre medición que hacen necesario crear los decimales, en términos de unidades y subunidades en donde la coma señala el paso de la unidad entera a la unidad fraccionaria. (Centeno, 1988; Gómez, 2001).
6. **Uso de funciones numéricas (operadores).** Opción f. A partir de funciones numéricas (operadores) en donde se genera la necesidad de emplear los decimales (Centeno, 1988).
7. **Usar materiales didácticos** como los bloques multibase, las regletas de cuisenaire, ábacos, calculadoras, etc. (Centeno, 1988), opción h.

El 26% recurre a las representaciones gráficas de fracciones decimales para introducir el tema de los decimales en la escuela, el 24% prefiere iniciar por el cociente entre numerador y denominador, el 23% usa fracciones decimales y su expresión decimal, el 18% presenta situaciones en donde es necesario utilizar nuevos números, el 8% extiende el sistema de numeración decimal hacia la derecha y solamente el 2% usa materiales didácticos.

Aunque, investigaciones asociadas con esta problemática y enmarcadas en la didáctica de la matemática (Centeno, 1988; Broitman et al., 2003) proponen el inicio de los decimales a partir de contextos de medida, que son los más familiares para los estudiantes, los resultados en la encuesta muestran que éste no es uno de los puntos de partida más usado por los docentes. Se privilegian, en su lugar, el cambio de expresión de las fracciones decimales a la decimal y sus representaciones gráficas.

3.2.2.3 Organización jerárquica que hacen los docentes de los aspectos a aprender sobre decimales

En esta categoría se buscaba identificar los aspectos de los decimales a los que los docentes dan prioridad en el proceso de la enseñanza.

En las respuestas a la pregunta 10 - **ordenar algunos temas que deben aprender los estudiantes sobre decimales** - los aspectos a los que dan prioridad los docentes en el proceso de enseñanza se organizaron en la siguiente tabla:

<table>
<tr><th>Nivel de Prioridad
Temas</th><th>1°</th><th>2°</th><th>3°</th><th>4°</th><th>5°</th><th>6°</th></tr>
<tr><td rowspan="2">Representaciones gráficas</td><td>10</td><td>12</td><td>10</td><td>7</td><td>4</td><td>0</td></tr>
<tr><td colspan="2">22</td><td colspan="2">17</td><td colspan="2">4</td></tr>
<tr><td rowspan="2">Definición</td><td>13</td><td>7</td><td>5</td><td>5</td><td>3</td><td>10</td></tr>
<tr><td colspan="2">20</td><td colspan="2">10</td><td colspan="2">13</td></tr>
<tr><td rowspan="2">Relaciones y diferencias con los conjuntos numéricos.</td><td>9</td><td>8</td><td>9</td><td>3</td><td>5</td><td>9</td></tr>
<tr><td colspan="2">17</td><td colspan="2">12</td><td colspan="2">14</td></tr>
<tr><td rowspan="2">Aplicaciones en la resolución de problemas</td><td>8</td><td>5</td><td>2</td><td>8</td><td>9</td><td>11</td></tr>
<tr><td colspan="2">13</td><td colspan="2">10</td><td colspan="2">20</td></tr>
<tr><td rowspan="2">Algoritmos de las operaciones</td><td>1</td><td>6</td><td>10</td><td>9</td><td>12</td><td>5</td></tr>
<tr><td colspan="2">7</td><td colspan="2">19</td><td colspan="2">17</td></tr>
<tr><td rowspan="2">Propiedades</td><td>2</td><td>5</td><td>7</td><td>11</td><td>10</td><td>8</td></tr>
<tr><td colspan="2">7</td><td colspan="2">18</td><td colspan="2">18</td></tr>
</table>

Tabla 3. Aspectos prioritarios en la enseñanza de los decimales

Los niveles de prioridad se unieron formando tres grupos así: niveles 1º y 2º mayor prioridad, niveles 3º y 4º prioridad media y niveles 5º y 6º menor prioridad; por ejemplo el tema de representaciones gráficas 10 maestros lo ubicaron en prioridad 1º y 12 en prioridad 2º, por lo tanto queda en el grupo de mayor prioridad con 22 puntos. A diferencia del tema de propiedades para el cual 2 maestros lo ubicaron en el nivel 1º y 5 en el nivel 2º para un total de 7 puntos en el grupo de mayor prioridad en contraste con 10 y 8 maestros que lo ubicaron en los niveles 5º y 6º respectivamente quedando ubicado en el grupo de menor prioridad con 18 puntos. Cabe anotar que dos personas no contestaron esta pregunta. De acuerdo a la información de la tabla el tema al que mayor prioridad dan los docentes es el de la representación gráfica, seguido por la definición de decimal, en contraste los temas a los que dan menor prioridad son aplicación en resolución de problemas y propiedades. Los algoritmos y las relaciones con los conjuntos numéricos son temas que se estudian, pero no son prioritarios.

A pesar de que los lineamientos, los estándares oficiales y las investigaciones en didáctica de las matemáticas proponen promover el aprendizaje a partir de *situaciones problema*, en la encuesta las respuestas de los docentes muestran que usan los problemas para aplicar los conocimientos y no como punto de partida, en su quehacer no han modificado las formas de enseñar en este sentido.

3.3 Concepciones de los docentes

Al realizar el análisis de las respuestas a las preguntas correspondientes a la categoría “significado de los decimales” surgieron unas concepciones sobre los decimales y su relación***, como representación,*** con los números racionales, que se fueron reafirmando a medida que se avanzó en el análisis de las demás preguntas, a continuación se presentan las concepciones que predominan entre los docentes que participaron en la encuesta:

3.3.1 Representación decimal como cociente

La división entre dos números enteros con residuo no nulo y cociente entero genera un decimal, basta con continuar dividiendo el residuo y usar una coma para diferenciar, en el cociente, la parte entera de la parte decimal, cuando esta división se hace sin comprender que significa agregar ceros al residuo para continuar la operación y escribir la coma en el cociente, se acentúa la idea de que la coma separa dos números enteros. Además, se excluye la representación decimal para los números enteros. Esta concepción coincide con la de *número con coma* propuesta por Abrouguí (2003).

La interpretación del decimal como *número con coma*, refuerza la idea de que un decimal es un par de números enteros separados por una coma lo que produce errores al operar y al ordenar decimales: 0,8 + 0,2 = 0,10 y 0,24 es mayor que 0,3 pues 24 es mayor que 3. El no tener en cuenta que los enteros también tienen representación decimal, genera que no se sepa como ubicar un número entero para operarlo con un decimal no entero: 5 + 3,2 = 3,7.

3.3.2 Representación decimal como fracciones decimales

Sólo se consideran como decimales las fracciones que tienen como denominador una potencia de diez. En la escuela, éstos se introducen como otra forma de escribir la fracción decimal, en la cual la cantidad de ceros que haya en el denominador indica la cantidad de cifras que se deben escribir a la derecha de la coma (parte decimal). En este caso las fracciones cuyos denominadores no son potencias de diez no tienen expresión decimal.

Por un lado, bajo esta concepción no se tiene en cuenta la conexión que hay entre las fracciones y los decimales, pues en este caso las fracciones decimales son un subconjunto de los fraccionarios y solamente éstas tienen escritura decimal, desconociendo que las fracciones que no son fracciones decimales también tienen expresión decimal; por otro lado, cuando no se hace explícita la noción de valor posicional, extendida hacia la derecha en los decimales, se puede escribir erróneamente $\frac{37}{1000}$ como 37,000, ó, 0,370, ó, escribir correctamente 0,037, sin embargo, la escritura correcta no asegura la comprensión del valor de posición.

3.3.3 Decimales como representación de los números racionales

Los decimales son una nueva forma de escritura para las fracciones, entonces se tienen dos escrituras para los números racionales, la fraccionaria y la decimal. Cuando se introduce el tema en la escuela usualmente se inicia por el estudio de las fracciones decimales, pues su expresión decimal es inmediata, y se ejercita el paso de estas fracciones a la expresión decimal y viceversa reforzando la concepción de decimal como fracción decimal, luego se muestra que las otras fracciones, que no son fracciones decimales, también se pueden expresar en forma decimal a través de realizar el cociente entre su numerador y su denominador en el sentido de la concepción representación decimal como cociente, haciendo, en este proceso, explícita la relación de la escritura decimal con el sistema de numeración posicional y el hecho de que estas dos representaciones tienen los mismos significados. De esta manera, se abarca la representación decimal de todos los números racionales.

3.3.4 Decimales como parte de un conjunto numérico

En las gráficas elaboradas por los maestros en el punto 11 de la encuesta se encuentra que utilizaron relaciones de contenencia entre los diferentes conjuntos numéricos y entre éstos y las formas de representación, esto permite afirmar que algunos de ellos asumen que los decimales finitos son un subconjunto de los números racionales, en concordancia con autores como Godino y Batanero (2004), Centeno (1988) y Abrouguí (2003) quienes asumen a los números decimales D como subconjunto de los números racionales Q, los elementos del conjunto D son los números racionales que tienen como representante una fracción decimal. Esta concepción se ve reforzada cuando en la escuela sólo se trabaja la representación decimal de las fracciones decimales y las operaciones con decimales finitos.

Esta concepción también genera dificultades pues excluye a los decimales infinitos periódicos como representación de una parte de los racionales, la que corresponde a las fracciones no decimales; además, el asumir los decimales como un subconjunto de los números racionales oculta la noción de decimal como representación de los números racionales establecida en las matemáticas formales.

3.4 Conclusiones y sugerencias

3.4.1 Respecto a los objetivos específicos

Desde las matemáticas, se identificaron diferentes representaciones de los números racionales: como fracción, como fracciones continuas finitas simples, como representación gráfica y como representación decimal.

Desde la historia de las matemáticas, se hizo el seguimiento del proceso de construcción de los números racionales y sus representaciones fraccionaria y decimal, identificando el momento en el que se da el cambio de la notación fraccionaria a la notación decimal. Se evidenció a través de la encuesta aplicada a los docentes que en la escuela, en el proceso de enseñanza de los decimales, se reproduce el orden de construcción histórica: primero las fracciones y luego el paso a los decimales.

A través de las encuestas se recogieron diversas afirmaciones, expresiones, ideas y respuestas de los maestros, que permitieron identificar sus concepciones sobre los decimales y su papel como representación de los números racionales, para el análisis de esta información se establecieron seis categorías, tres para la variable de conocimiento formal: significado de los decimales, noción de densidad y relación entre decimales, fraccionarios y conjuntos numéricos; y tres para la variable acciones didácticas: conocimientos que deben saber los estudiantes para aprender decimales, significados que utilizan los docentes para introducir los decimales y organización jerárquica que hacen los docentes de los aspectos a aprender sobre decimales.

3.4.2 Respecto al objetivo general

Los maestros de matemáticas, de básica secundaria, que participaron en la encuesta sobre los decimales y su relación***, como representación,*** con los números racionales mostraron cuatro clases de concepciones: representación decimal como cociente, representación decimal como fracciones decimales, decimales como representación de números racionales y decimales como parte de un conjunto numérico.

Aunque una de las concepciones predominante es la de decimal como representación de los números racionales, no se observó que los maestros la usen para lograr mayor comprensión de la propiedad de densidad. La mayoría de los docentes usan representaciones diferentes a la decimal cuando se enfrentan a ejercicios relacionados con esta noción.

El encontrar que hay maestros que consideran los decimales como representación de los números racionales y no como representación de los números reales muestra que éstos maestros no reconocen que existen decimales que representan números no racionales.

En el estado del arte se reportan investigaciones en los que se establecen diferentes concepciones sobre los decimales como: "decimales como herramienta", "decimales como números sobre los que se efectúan operaciones", "decimal como fracción, "decimal como número con coma", "como cociente", "como número no entero", "decimales como prolongación del sistema de numeración posicional", "como ampliación de campos numéricos", "decimal en contextos de medida", "como fracción decimal" y "como nueva forma de escritura", sin embargo, en este trabajo sólo se identificaron las cuatro antes mencionadas. Y además, no se hizo diferencia entre las concepciones "número con coma" y "decimal como cociente".

Aunque los docentes señalan relaciones, como representación de números racionales, entre los fraccionarios y los decimales, en el momento de usar estas relaciones, por ejemplo para elaborar diagramas y resolver ejercicios, no las tienen en cuenta.

Establecer las concepciones que tienen algunos docentes sobre los decimales y su relación, como representación, con los números racionales posibilita la apertura de espacios en los cuales los maestros reflexionen sobre las propias concepciones buscando la posibilidad de efectuar cambios en las mismas que generen cambios en su quehacer en el aula.

3.4.3 Respecto a las hipótesis

Se confirmó la siguiente hipótesis:

- Aunque los maestros conocen la propiedad de la densidad de los números racionales no son concientes de que la representación decimal facilita su comprensión. Como se evidenció en el análisis de la categoría “noción de densidad”.

Las otras hipótesis planteadas no fueron confirmadas, pues sólo un bajo porcentaje de los maestros entrevistados muestran las características allí planteadas, es decir, la información recogida no permite afirmar o negar que los maestros interpretan los decimales como un subconjunto de los números racionales; o que asocian los decimales con los números fraccionarios; o que los consideran equivalentes a las fracciones decimales; tampoco que conocen que la escritura decimal se puede establecer en diferentes bases.

3.4.4 Comentarios finales

El cuestionario se repartió a más de cien docentes, sin embargo, sólo 45 lo contestaron, entre los argumentos de algunos de los docentes que no lo contestaron estaba el que se sintieron cuestionados y evaluados frente a sus conocimientos, pues evidenciaron que les tocaba estudiar para contestar, en esa medida este trabajo generó en los maestros la necesidad de reflexionar sobre sus saberes respecto del tema.

Esta es una investigación cuyos resultados pueden contribuir a mejorar el sistema educativo, puesto que proporciona resultados que sirven para la toma de decisiones, tanto en planes y programas de estudio en la formación de docentes y en la educación básica, como en el diseño y elaboración de material de apoyo y cursos de actualización docente, para los cuales se sugiere se tengan en cuenta aspectos relacionados con incrementar el aprendizaje de las propiedades y operaciones con los decimales periódicos, profundizar en el estudio de la densidad y el orden de los números racionales a partir del uso de los decimales, hacer mayor énfasis en las relaciones entre las representaciones fraccionaria y decimal de los números racionales.

Se encontró que las concepciones: *decimales como parte de un conjunto numérico, representación decimal como fracciones decimales* y *representación decimal como cociente* podrían generar errores y dificultades que obstaculizan el aprendizaje de los números racionales, ya que no se abarca la representación decimal de la totalidad del conjunto de los números racionales, se forman ideas erróneas acerca de lo que es la parte entera y la parte decimal de un decimal.

La presente investigación permitió a las investigadoras profundizar y ampliar sus conocimientos sobre los números racionales, en particular sobre su representación decimal y sobre las diferentes concepciones con que se puede abordar ésta representación.

Conocer las diferentes concepciones sobre el objeto matemático abordado da pautas para modificar el quehacer en el aula de las investigadoras y diseñar propuestas de formación para futuros profesores de matemáticas.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Aaboe, A. (1964). *Matemáticas: Episodios históricos desde Babilonia hasta Ptolomeo*. Cali: Editorial Norma.

Abrougui, H. (2003). Conceptions d'enseignants de l'école de base sur les nombres décimaux. Quaderni di Ricerca in Didattica, 13, 7 – 31.

Anacona, M. (2004). El estructuralismo Bourbakista en los Textos de Cálculo. El caso de los Números Reales. (Formación de cultura científica en Colombia: el caso de las matemáticas y la física). Cali, Colombia: Universidad del Valle, Instituto de Educación y Pedagogía.

Apostol, T. (1977a). Análisis Matemático. Editorial Reverté, S. A. España.

________ (1977b). Calculus. Editorial Reverté, S. A. España.

Belna, J. P. (1996). La notion de nombre chez Dedekind, Cantor, Frege. Francia: Librairie Philosophique J. VRIN.

Boyer C. (1986). Historia de la matemática. Madrid: Alianza Editorial S.A.

Brekke, G. (1996). A decimal number is a pair of whole numbers. Proccedings of 20th conference of the international group for the psychology of Mathematics Education. PME 20. Vol 2. 137 - 143.

Broitman, C., Itzcovich, H. & Quaranta, M. (2003). La enseñanza de los números decimales: el análisis del valor posicional y una aproximación a la densidad. Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa. 1(6), 5 - 26.

Brooks, E. (1880). Philosophy of arithmetic. As developed from the three fundamental processes of synthesis, analysis, and comparison, containing also a history of arithmetic. Washington: Editorial Lancaster.

Brousseau, G., Brousseau, N. & Warfield, V. (2007). Rationals and decimals as required in the school curriculum, Part 1: Rationals as measurement. Journal Mathematical Behavior. En: doi:10.1016/j.jmathb.2007.09.001

Cajori, F. (1993). A history of Mathematical Notation. New York: Dover Publications, Inc.

Camargo, L., García, G., Leguizamón, C., Samper, C. & Serrano, C. (2004). Alfa 7 con estándares. Bogotá. Grupo Editorial Norma.

Campiglio, A. y Eugeni, V. (1992). De los dedos a la calculadora. Barcelona: Ediciones Paidós.

Castro, E. (2001). Números decimales. En E. Castro (Ed.), Didáctica de la matemática en la educación primaria. (pp. 315 – 345). Madrid: Síntesis Educación.

Centeno, J. (1988). "Números decimales". ¿Por qué?, ¿Para qué?". España. Editorial Síntesis.

Cid, E. Godino, J. & Batanero, C. (2004). Números y expresiones decimales. En J, Godino (Ed) Didáctica de las matemáticas para maestros. (pp. 239 - 258). Distribución en Internet: http://www.ugr.es/local/jgodino/edumat-maestros/.

Cubillos, C., Salgado, D., Nivia, L. F., Torres, W., Acosta, M. & Orjuela, J. (2004). Aritmética y geometría I. Bogotá. Editorial Santillana.

Dedekind, R. (1898). ¿Qué son y para qué sirven los números? Madrid: Alianza Editorial.

Duval, R. (1999). Semiosis y pensamiento humano. Cali. Universidad del valle.

Ernest, P. (1988/1994). The Impact of Beliefs on the Teaching of Mathematics. En Bloomfield, A. and Harries, T. (Eds.) *Teaching and Learning Mathematics*, Derby: Association of Teachers of Mathematics.

Font, V. (2002). Una organización de los programas de investigación en Didáctica de las Matemáticas. Revista EMA, 2(7), 127-170.

Gairín, J. M. (2001). Sistemas de representación de números racionales positivos. Un estudio con maestros en formación. Contextos Educativos. 4, 137 - 159.

___________ (2003 – 2004). Estudiantes para maestros: reflexiones sobre la instrucción en los números racionales positivos. Contextos Educativos. 6 –7, 235 - 260.

Godino, J. & Batanero, C. (2004). Fracciones decimales. Números decimales. En J. Godino (Ed.) *Matemáticas para maestros*. (pp.127 – 134). Recuperado el 23 de noviembre de 2007 en http://www.ugr.es/local/jgodino/edumat-maestros/.

Gómez, B. (2001). Las concepciones escolares de los decimales. En XX Jornadas para el aprendizaje y la enseñanza de las Matemáticas (XX JAEM). Zaragoza. Pp. 43-59.

Hernández, R., Fernández, C. & Baptista, P. (1997). Metodología de la investigación. México: Mc Graw Hill.

Janvier, C. (1987). Representation and Understanding: The notion of function as an example. En: C. Janvier (Eds.), Problems of Representation in Teaching and Learning or Mathematics. (pp. 67 –71). New Jersey: Lawrence Erlbaun Associates, Inc.

Kaput, J. (1987). Sistemas de representación y matemáticas. En C. Janvier (Eds.), Problems of Representation in Teaching and Learning or Mathematics. Traducción libre de la Universidad del Valle. Págs. 19 – 26.

Leguizamón, C., Guerrero, M. & López, N. (2004a). Espiral 4. Bogotá. Grupo Editorial Norma.

_______, (2004b). Espiral 5. Bogotá. Grupo Editorial Norma.

Lozano, J., Forero, J., Vela, P., Corbalán, F., Fernández – Aliseda, A., Hans, J. et al. (2004a). Sigma 6. Matemáticas. Bogotá. Editorial Vincens Vives.

______, (2004b). Sigma 7. Matemáticas. Bogotá. Editorial Vincens Vives.

Luelmo, M. (2004). Concepciones matemáticas de los docentes de primaria en relación con la fracción como razón y como operador multiplicativo. Revista del centro de investigación. Universidad La Salle. México. 22 (6), 83 – 102.

Luque, C. y Mora, L. (2001). Una aproximación a los números racionales positivos. Universidad Pedagógica Nacional. Bogotá.

Llinares, S. (1996). Conocimiento profesional del profesor de matemáticas: conocimiento creencias y contexto en relación a la noción de función. En J.P. Ponte, C. Monteiro, M. Maia, L. Serrazina y C. Loureiro (Coord.) Desenvolvimento Professional dos Professores de matemática. Que Formaçao?. Sociedade Portuguesa de Cieˆncias da Educaçao, Secçao de Educaçao Matemática: Lisboa. pp.47-82. Recuperado el 8 de Agosto de 2007, en http://www.spce.org.pt/sem/96Llinares.pdf

Marqués, P. (2006). Metodologías de investigación en tecnología educativa. En metodologías de investigación. Modelo para el diseño de una investigación educativa. "A propósito del uso didáctico de un programa multimedia en el aula". Recuperado el 17 de diciembre del 2007 del sitio web del Departamento de Psicología de la Universidad Autónoma de Barcelona: http://dewey.uab.es/PMARQUES/uabinvte.htm

Mejía, C. (2001). Desafíos 6. Matemáticas. Bogotá. Grupo Editorial Norma.

Millán J., Ochoa C. & Herrera H. (2002a). Matemática en Construcción 6. Bogotá. Editorial Oxford University Press.

________, (2002b). Matemática en Construcción 7. Bogotá. Editorial Oxford University Press.

Ministerio de Educación Nacional de Colombia. (1994). Ley 115. Ley general de Educación. Bogotá.

__________, (2006). Estándares Básicos de Competencias en Matemáticas. Bogotá.

Mora, L. & Torres, J.. (2007). Concepciones de estudiantes de Licenciatura en Matemáticas sobre números reales. Bogotá. Universidad Pedagógica Nacional.

Muñoz, José. (1983). Introducción a la Teoría de Conjuntos. Bogotá: Universidad Nacional de Colombia.

O'Connor J. y Robertson E. (2000). La numeración Babilonia. Recuperado el 25 de Agosto de 2007, en http://ciencia.astroseti.org/matematicas/ articulo.php?num=3650

Ortiz, M., Hernández, F. & Cruz, C. (2005). De las fracciones como parte todo al racional como cociente. En Instituto para la Investigación y el Desarrollo Pedagógico (Ed.), Proyecto Innovación e Investigación de las Matemáticas en el aula. (pp. 81 –122). Bogotá. Editor.

Rey, P. (1952). Análisis Matemático. Vol. 1. Buenos Aires: Kapeluz.

Rico, L. (1996). Pensamiento Numérico. En Investigaciones en matemática educativa. (pp. 27 – 53). México: Grupo Editorial Iberoamérica.

Rico, L. y Gil, F. (2003). Elaboración de una encuesta para el estudio de las creencias de los profesores de matemáticas sobre evaluación. En E. Filloy (Ed.), Matemática Educativa, aspectos de la investigación actual. México: Fondo de Cultura Económica.

Romero, I. (1997). La introducción del número real en la enseñanza secundaria: Una experiencia de investigación acción. Granada: Ed. Comares.

Ruiz, L. (1993). Concepciones de los alumnos de secundaria sobre la noción de función: análisis epistemológico. Tesis doctoral. Universidad de Granada. España.

Sánchez, C. (1987). Construcción de los Reales. Revista Matemática Enseñanza Universitaria. 40. 3 -28. Bogotá: Universidad Nacional.

Santos, L. (1993). La naturaleza de las matemáticas y sus implicaciones didácticas. Mathesis. Filosofía e historia de las matemáticas. 4(9), 419 – 432.

Sarton, G. (1927). Introduction to the History of Science. Carniegie Institution of Washington Publication. No. 376.

________, (1935). The first explanation of decimal fractions and meassures (1585). Together with a history of the decimal idea and a facsimile (no. XVII) of Stevin`s Disme. En ISIS.

Smith, D. (1958). History of mathematics. Vol.II. New York: Dover Publications.

Takeuchi, Y. (1974). Análisis Matemático I. Ed: Universidad Nacional de Colombia.

Thompson, A. (1992). Teachers` beliefs and conceptions: a symthesis of the research. En Grouws, D. (Ed.), Handbook of research on mathematics teaching and learning. (pp. 127 – 146). New York: Macmillan.

Tirosh, D., Fischbein, E., Greaber, A. & Wilson, J. (1998). Prospective Elementary Teachers' Conceptions of Rational Numbers. Recuperado el 8 de mayo de 2006 en: http://jwilson.coe.uga.edu./Texts.Folder/Tirosh/Project.html

Villegas, P. (2004). Números decimales. En Historia de los números. Recuperado el 26 de abril de 2008, en http://www.iesmurgi.org/matematicas/materiales/numeros/node7.html

ANEXOS

Anexo 1: Cuestionario inicial para docentes

UNIVERSIDAD PEDAGOGICA NACIONAL
Educadora de educadores

FACULTAD DE CIENCIA Y TECNOLOGÍA
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS
MAESTRÍA EN DOCENCIA DE LAS MATEMÁTICAS

CONCEPCIONES DE LOS MAESTROS DE MATEMÁTICAS, DE BÁSICA SECUNDARIA, SOBRE LA REPRESENTACIÓN DECIMAL DE LOS NÚMEROS RACIONALES

1. ¿Qué es lo más importante que deben aprender sus estudiantes sobre números racionales y sobre decimales?

2. ¿Qué tipo de actividades, ejemplos o ejercicios usa para introducir en el aula escolar el tema de los decimales? De algunos ejemplos

3. Haga un diagrama en donde ubique los siguientes conceptos: números naturales, números enteros, números racionales, fraccionarios, decimales, decimales finitos, decimales infinitos, decimales periódicos.

4. ¿Es cierto que todo decimal periódico se puede expresar como fracción? Explique.

5. ¿Hay diferencia entre número racional y decimal? Explique.

6. ¿Todas las fracciones corresponden a un decimal? Explique.

7. ¿Los enteros tienen representación decimal? Explique.

8. ¿Puede haber un decimal cuyo período tenga más de nueve cifras? Explique.

Anexo 2: Propuesta de Categorías de Análisis.

Para la elaboración del cuestionario inicial se tuvo en cuenta la siguiente propuesta de categorías de análisis:

3. CONOCIMIENTO ALGORÍTMICO: Se examina si conocen los algoritmos para convertir fracciones a decimales y viceversa.
4. CONOCIMIENTO FORMAL: En las que se indaga sobre qué es el decimal respecto del número racional, la relación entre decimales y los conjuntos numéricos, la densidad en los números racionales, la ampliación del sistema de numeración posicional a los decimales.
5. REPRESENTACIÓN: Se identifica si los maestros tienen claro los decimales como representación de los números racionales, que otras representaciones identifican de este conjunto numérico.
6. CONOCIMIENTO DIDÁCTICO: Se consulta sobre los aspectos que privilegian los profesores en la enseñanza de los decimales.

A partir de la revisión de las respuestas del cuestionario inicial, aplicado a un grupo de estudiantes de la Universidad Pedagógica Nacional y a un grupo de profesores, se amplía la categorización, quedando de la siguiente manera:

<table>
<tr><th colspan="4">Preguntas de respuesta abierta</th></tr>
<tr><th>Aspecto por el que indaga.</th><th>Pregunta</th><th>Posibles tipos de respuesta</th><th>Categorías de análisis de respuestas
(Posibles concepciones)</th></tr>
<tr><td rowspan="4">Conocimiento formal</td><td rowspan="4">1. ¿Qué es un decimal?</td><td rowspan="4">1. Con respecto a la noción de decimal</td><td>Resultado de una división entre enteros con divisor diferente a 0 (Como cociente)</td></tr>
<tr><td>Números con coma.</td></tr>
<tr><td>Fracción decimal</td></tr>
<tr><td>Extensión del sistema de numeración decimal posicional hacia la derecha.</td></tr>
</table>

			Representación de cantidad no entera
			Números menores que la unidad.
			Decimal como fraccionario sin distinguir racional de irracional.
		2. Con respecto a la relación de los decimales con los conjuntos numéricos	Subconjunto de los racionales.
			Equivalente a **Q** Y **I**
			Divididos en dos grupos: los finitos que pertenecen a **Q** y los infinitos a **I**
			Equivalente a **Q** - **Z**
			Equivalente a **Q**
			Equivalente a **R** – **Z**
Conocimiento didáctico	8. Ordene las siguientes frases desde la que considera es lo más importante que deben aprender sus estudiantes sobre decimales hasta lo menos importante (numerándolas de 1 al 9, asigne 1 a la más importante). 1. Definición. 2. Aplicaciones en la resolución de problemas. 3. Representación. 4. Algoritmos de las operaciones. 5. Propiedades 6. Escritura y lectura. 7. En que se diferencian de otros conjuntos numéricos. 8. Las relaciones que establecen con otros conjuntos numéricos. 9. Lo que representan.	Da prioridad a la definición, lectura y escritura y a los algoritmos y a las propiedades.	Concepción algorítmica.
		Da prioridad a la resolución de problemas.	Se usan para solucionar problemas cotidianos y de otras áreas del conocimiento.
		Dan prioridad a establecer diferencias y relaciones con otros conjuntos numéricos.	Concepción de ampliación de los campos numéricos.
		Dan prioridad a la representación.	Concepción de los decimales como representación de los números racionales y reales.

Conocimiento didáctico	11. Escriba los temas o conocimientos que considera deben saber los niños para aprender decimales.	Conocimientos relacionados con los números naturales y el sistema de numeración posicional.	Concepción como extensión del sistema de numeración decimal hacia la derecha.
		Conocimientos relacionados con fraccionarios.	Representación de números racionales y reales.

Preguntas de respuesta cerrada			
Aspecto por el que indaga.	**Pregunta**	**Opciones de respuesta**	**Categorías de análisis de respuestas (Posibles concepciones)**
Conocimiento Algorítmico	2. La forma que usted más usa para escribir 3/5 y 1/3 en forma decimal es:	a. Convertirlas a fracciones decimales y luego la expresarlas en forma decimal.	Fracciones decimales.
		b. Dividir numerador entre denominador.	Cociente.
		c. Dibuja o imagina alguna representación como una recta numérica o un dibujo rectangular.	Parte de una unidad.
Conocimiento formal	3. Marque la(s) afirmación(es) que considera correcta(s).	a. Los decimales infinitos periódicos se pueden representar como fracción ya que existe un algoritmo para hacerlo.	No hay análisis del argumento.
		b. Sólo los decimales finitos se pueden representar como fracción.	Fracciones decimales.
		c. Los decimales infinitos periódicos no se pueden representar como fracción.	Sólo reconoce los decimales finitos como representación de fracciones.
		d. Las fracciones representan cocientes y algunos de estos son decimales periódicos.	Cociente.

		e. A todo decimal corresponde una fracción.	No muestra diferencia entre los decimales que representan racionales y los que representan irracionales.
		f. Sólo a los decimales finitos y a los decimales infinitos periódicos les corresponde una fracción.	Hay claridad en cuanto a la relación entre los decimales los racionales y los irracionales.
Conocimiento formal	4. Marque la justificación más completa para la siguiente afirmación "Los decimales periódicos se pueden representar como fracción"	a. Porque existe un algoritmo para hacerlo.	No hay análisis del argumento.
		b. Porque a todo decimal le corresponde una fracción.	No muestra diferencia entre los decimales que representan racionales y los que representan irracionales.
		c. Porque surgen de la división entre el numerador y denominador de fracciones con denominador diferente a potencias de diez.	Cociente.
Conocimiento formal y representación	5. La diferencia entre un racional y un decimal es:	a. Que todo decimal se puede representar como número racional y todo número racional como decimal.	No tiene en cuenta que los decimales infinitos no periódicos no son racionales.
		b. No hay diferencia.	Considera los decimales equivalentes a los racionales. No los ve como una representación.
		c. Que los decimales no periódicos no son números racionales.	Hace la distinción entre decimales infinitos periódicos y no periódicos.
		d. El número racional se expresa de la forma $\frac{a}{b}$ con a, b, enteros y al cociente de a y b se le denomina decimal.	Cociente de la fracción.

		e. Los números racionales son un objeto matemático y los decimales son una representación de este objeto.	Decimal como representación.
		f. Un número racional puede estar en una base k (k > 1), no necesariamente en base 10, los decimales son en base 10.	Maneja una mayor generalización de número decimal.
Conocimiento formal	6. Los números de la forma $a{,}000..$ $(a \in Z)$ son:	a. Enteros, racionales, reales, decimales.	Reconoce la representación decimal para los números enteros.
		b. Racionales, reales, decimales.	Desconoce que los enteros tienen representación decimal.
		c. Enteros, reales, decimales.	
		d. Enteros, racionales, decimales.	
		e. Naturales, enteros, racionales.	
Conocimiento didáctico	7. Cuando enseña decimales empieza su estudio a partir de:	a. Mostrar fracciones decimales y su expresión decimal: $\frac{3}{10}=0{,}3$ $\frac{7}{100}=0{,}07$ $\frac{12}{25}=\frac{48}{100}=0{,}48$	Fracciones decimales.
		b. Realizar el cociente entre el numerador y el denominador de una fracción: $12 \div 25 = 0{,}48$ $13 \div 37 = 0{,}35135...$	Cociente.
		c. Cómo extensión natural del sistema de numeración decimal hacia la derecha.	Extensión natural del sistema de numeración.
		d. Representando fracciones decimales en cuadrados divididos en 10, 100, etc. partes.	Fracciones decimales.

		e. A partir de la medida, para pasar de una expresión de medida en dos o más unidades a una expresión en la que sólo intervenga una unidad. 3 m y 56 cm = 3,56 m. 4 Kg, y 75 g. = 4,75 Kg.	Enteros separados por una coma.
		f. A partir de funciones numéricas, es decir, de situaciones en las que se pone en evidencia la necesidad de nuevos números, como calcular la mitad de 5, la décima parte de 45, etc.	Nuevos números.
		g. Ubicar números sobre la recta numérica. Con ejercicios como determinar el valor de los puntos A, B, C	Uso de la representación lineal
		Usando materiales didácticos como los bloques multibase, las regletas de cousenaire, ábacos etc	Números con coma.
Conocimiento formal y algorítmico.	9. Cuando busca números que estén entre: $\frac{2}{5}$ y $\frac{3}{5}$, usted prefiere:	Expresar cada fracción en forma decimal y buscar un decimal que este entre los dos que obtuvo.	Conciencia del uso de otra representación.
		Halla el punto medio entre las dos fracciones.	Conoce el proceso algorítmico.
		Expresa cada fracción como fracciones decimales, y escribe una fracción decimal entre las dos obtenidas.	Concepción de decimal como fracción decimal.
		Busca por amplificación un par de fracciones equivalentes, no necesariamente decimales, y escoge varias fracciones.	Conocimiento sobre fraccionarios.
		Representa cada fracción en la recta numérica y busca un punto intermedio.	Uso de la representación lineal.
		Representa gráficamente cada fracción.	Uso de la representación gráfica.

		Considera que sólo hay un número entre los dos.	No hay conocimiento de la densidad de los números racionales.
		Considera que hay infinitos números.	Hay conocimiento de la densidad de los números racionales.
		Considera que no hay números entre las dos fracciones.	No hay conocimiento de la densidad de los números racionales.

Anexo 3: Cuestionario inicial para estudiantes

UNIVERSIDAD PEDAGOGICA NACIONAL
Educadora de educadores

FACULTAD DE CIENCIA Y TECNOLOGÍA
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS
MAESTRÍA EN DOCENCIA DE LAS MATEMÁTICAS

CONCEPCIONES DE LOS MAESTROS DE MATEMÁTICAS, DE BÁSICA SECUNDARIA, SOBRE LA REPRESENTACIÓN DECIMAL DE LOS NÚMEROS RACIONALES

Apreciados estudiantes, de antemano les agradecemos el diligenciar este cuestionario piloto, el cual constituye una de las herramientas para recoger información relacionada con sus concepciones sobre los números racionales y algunas de sus representaciones, buscamos tener una amplia base de datos que nos permita cualificar las categorías de análisis de la información y diseñar el cuestionario a aplicar a los docentes en ejercicio.

Por favor registre por escrito los procedimientos y cálculos que realice para contestar las siguientes preguntas.

1. ¿Cuál es la representación decimal de los siguientes números $\frac{3}{5}, \frac{1}{3}$?

2. Escriba todas las representaciones que conozca del número racional 0,25.

3. ¿Es cierto que todo decimal periódico se puede representar como fracción? Justifique su respuesta.

4. ¿Hay diferencia entre número racional y decimal? Justifique su respuesta.

5. Represente en forma de fracción los siguientes números 2,8 y 3,616161...

6. ¿Todas las fracciones corresponden a un decimal? Justifique su respuesta.

7. ¿Los enteros tienen representación decimal? Justifique su respuesta.

8. ¿Los decimales periódicos tienen representación fraccionaria? Justifique su respuesta.

9. ¿Puede haber un decimal cuyo periodo tenga más de nueve cifras? Justifique su respuesta.

10. Escriba un número que esté entre $\frac{2}{5}\, y \,\frac{3}{5}$.

11. Escriba números que sean mayores que 2,71 pero menores que 2,72.

12. ¿Qué valor relativo tiene el número 7 en los decimales 0,2478 y 0,248671?

13. Al hacer la división de 1 entre 6, cuando el cociente es 0,16 ¿cuál es el residuo?, ¿qué valor relativo tiene ese residuo?
    Cuando el cociente es 0,1666 ¿qué valor relativo tiene el residuo?
    Si se continúa dividiendo, ¿cómo es el comportamiento de los residuos?

14. Haga un diagrama en donde ubique los conceptos siguientes: números naturales, números enteros, números racionales, fraccionarios, decimales, decimales finitos, decimales infinitos, decimales periódicos.

Agrademos sus respuestas, estamos seguras que serán un valioso aporte al desarrollo de nuestro trabajo.

Cristina Cruz F. Amalia C. Torres

Anexo 4: Cuestionario definitivo

UNIVERSIDAD PEDAGOGICA NACIONAL
Educadora de educadores

FACULTAD DE CIENCIA Y TECNOLOGÍA
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS
MAESTRÍA EN DOCENCIA DE LAS MATEMÁTICAS

CUESTIONARIO

Respetados profesores, agradecemos su disposición para diligenciar este cuestionario. El objetivo de este es recoger información que contribuya a la realización de la investigación titulada “*Concepciones de algunos maestros de matemáticas, de básica secundaria, sobre la representación decimal de los números racionales*”.

I. Escriba en las siguientes líneas:

1. ¿Qué es para usted un decimal?

____
____
____
____

2. ¿Cuáles son los temas o conocimientos que considera deben saber los niños para aprender decimales?

____
____
____
____

II. Marque una X en las casillas que correspondan a sus respuestas.

3. La forma que usted más usa para escribir $\frac{3}{5}$ y $\frac{1}{3}$ en forma decimal es:

a. Convertir las fracciones a fracciones decimales y luego expresarlas en forma decimal. ☐
b. Dividir numerador entre denominador. ☐
c. Dibujar o imaginar alguna representación gráfica como una recta numérica o un dibujo rectangular. ☐

4. Entre $0,\overline{8}$ y $0,9$

a. No hay otros números.
b. Hay infinitos números.
c. Hay algunos números

5. Los números de la forma a,000.... ($a \in \square$) son:

a. Enteros, racionales, reales.
b. Racionales, reales.
c. Enteros, reales.
d. Enteros, racionales.
e. Irracionales, racionales.
f. Naturales, enteros, racionales.

6. Cuando busca números que estén entre: $\frac{2}{5}$ y $\frac{3}{5}$, usted prefiere:

a. Expresar cada fracción en forma decimal y buscar un decimal que este entre los dos que obtuvo.
b. Hallar el punto medio entre las dos fracciones.
c. Expresar cada fracción como fracción decimal, y escribir una fracción decimal entre las dos obtenidas.
d. Buscar por amplificación un par de fracciones equivalentes, no necesariamente decimales, y escoger varias fracciones.
e. Representar gráficamente cada fracción.
f. Representar cada fracción en la recta numérica y buscar un punto intermedio.

7. Cuando enseña decimales empieza su estudio a partir de:

a. Mostrar fracciones decimales y su expresión decimal:

$\frac{3}{10} = 0{,}3$ $\quad \frac{7}{100} = 0{,}07$ $\quad \frac{12}{25} = \frac{48}{100} = 0{,}48$

b. Realizar el cociente entre el numerador y el denominador de una fracción:

Para la fracción $\frac{12}{25} = 0{,}48$

$$\begin{array}{r|l} 120 & 25 \\ \cline{2-2} 200 & 0{,}48 \\ 0 & \end{array}$$

Para la fracción $\frac{13}{37} = 0{,}351351...$

$$\begin{array}{r|l} 130 & 37 \\ \cline{2-2} 190 & 0{,}351 \\ 050 & \\ 13 & \end{array}$$

Para la fracción $\frac{1}{100} = 0{,}01$

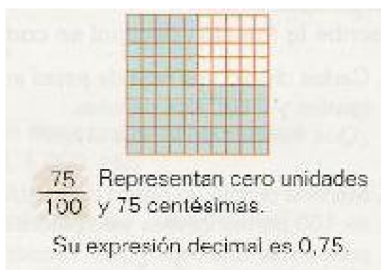
$$\begin{array}{r|l} 100 & 100 \\ \cline{2-2} 0 & 0{,}01 \end{array}$$

c. Extender el sistema de numeración decimal hacia la derecha

Parte entera		Parte decimal			
Decenas	Unidades	Décimas	Centésimas	Milésimas	Diezmilésimas
5	3,	7	8	9	2

$$53{,}7892 = 5\times 10^1 + 3\times 10^0 + 7\times \tfrac{1}{10^1} + 8\times \tfrac{1}{10^2} + 9\times \tfrac{1}{10^3} + 2\times \tfrac{1}{10^4}$$

d. Representar fracciones decimales en cuadrados divididos en 10, 100, etc. partes.



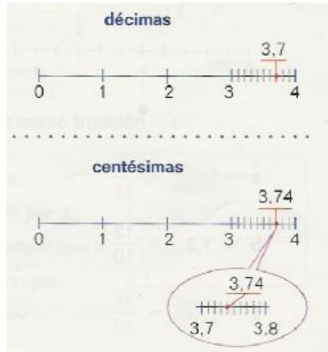
e. Pasar de una expresión de medida en dos o más unidades a una expresión en la que sólo intervenga una unidad.

3 m y 56 cm = 3,56 m.
4 Kg, y 75 g. = 4,75 Kg.

f. Partir de situaciones en las que se pone en evidencia la necesidad de nuevos números, como:

La mitad de 5 es 2 y medio que equivale a escribir 2,5
La décima parte de 45 es 4 y medio que equivale a escribir 4,5
La quinta parte de 6 es 1 y un pedacito que se puede escribir 1,2

g. Ubicar números sobre la recta numérica.



h. Usar materiales didácticos como los bloques multibase, las regletas de cousenaire, ábacos etc.

8. Marque las afirmaciones que considera correctas.

a. Los decimales infinitos periódicos se pueden representar como fracción ya que existe un algoritmo para hacerlo.
b. Sólo los decimales finitos se pueden representar como fracción.
c. Los decimales infinitos periódicos no se pueden representar como fracción.
d. Las fracciones representan cocientes y algunos de estos son decimales periódicos.
e. A todo decimal corresponde una fracción.
f. Sólo a los decimales finitos y a los decimales infinitos periódicos les corresponde una fracción.

9. Marque las afirmaciones que considere correctas para la pregunta: ¿Cuál es la diferencia entre un número racional y un decimal?

a. Todo decimal se puede representar como número racional y todo número racional como decimal.
b. No hay diferencia.
c. Los decimales no periódicos no son números racionales.
d. El número racional se expresa de la forma $\frac{a}{b}$ con a, b, enteros y al cociente de *a* y *b* se le denomina decimal.
e. Los números racionales son un objeto matemático y los decimales son una representación de este objeto.
f. Un número racional puede estar en una base *k* (*k* > 1), no necesariamente en base 10, los decimales son en base 10.

10. Ordene los siguientes temas desde el que considera es lo más importante que deben aprender sus estudiantes sobre decimales hasta lo menos importante (numerándolas de 1 al 6, asigne 1 a la más importante).

- ______Definición.
- ______Aplicaciones en la resolución de problemas.
- ______Representaciones gráficas.
- ______Algoritmos de las operaciones.
- ______Propiedades
- ______Relaciones y diferencias con los conjuntos numéricos.

11. Haga un diagrama en donde ubique los siguientes conceptos: números naturales, números enteros, números racionales, fraccionarios, decimales, decimales finitos, decimales infinitos, decimales periódicos.

CRISTINA CRUZ FONSECA
AMALIA CRISTINA TORRES MONTIEL