Isometrias del Plano

Estela Olivera, eolivera@unsl.edu.ar

Universidad Nacional de San Luís

San Luís Argentina

1. Introducción

Las transformaciones isométricas es un tema que aparece de manera implícita desde que comenzamos a desarrollar nuestras habilidades relacionadas con el sentido espacial, a través de la exploración, sistematización y la comprobación. Todas las culturas han utilizado figuras geométricas como elementos decorativos a través de manifestaciones artísticas y arquitectónicas. Hoy si salimos a la calle la presencia de la geometría es tan familiar que pasa desapercibida ante nuestros ojos, a menudo no se utiliza una sola figura geométrica aislada sino que se repite una misma figura moviéndose a lo largo del plano. Al observar la realidad todos tenemos una idea intuitiva de lo que se traslada, gira, refleja o se deforma. Esto es lo que se le denomina geometría dinámica o geometría del movimiento

Para poder explicar que se entiende por geometría del movimiento podríamos decir que es cuando una figura geométrica se fija en un punto en el espacio y esta comienza a experimentar cambios a través de un eje o en torno a un centro, estos cambios pueden estar dados por secuencia, transformaciones, rotaciones, etc. Podemos, con seguridad, afirmar que a través del movimiento de una figura geométrica se generan nuevas formas, un simple ejemplo de esto es: Si se tiene una circunferencia a la cual hacemos rotar a lo largo de su diámetro que sería su eje en este caso, este movimiento genera una imagen que la llamamos esfera.En definitiva Palabras como traslación, reflexión, giro se utilizan para describir los movimientos.

Por otro lado es un tema que aparece en los contenidos curriculares actuales, motivo suficiente para contribuir al desarrollo del mismo.En este artículo, se presenta un enfoque metodológico para la enseñanza de las transformaciones isométricas del plano dirigida a alumnos del profesorado en matemática y a profesores de matemática, a través de una sucesión de actividades con el propósito de explorar los conocimientos intuitivos y con el objetivo de favorecer el desarrollo disciplinar docente desde el análisis de estrategias e innovaciones en el aula.

2. Marco de referencia

El modo de enfocar el estudio de las transformaciones isométricas está basado en el modelo de Van Hiele. Las componentes principales de este modelo son los "Niveles de conocimiento geométrico" en el cual se proponen cinco niveles, donde cada nivel se construye a partir del anterior de un modo recursivo. De acuerdo a este modelo si el estudiante es dirigido a través de una secuencia graduada de actividades es posible provocar el paso de un nivel a otro comenzando con la visualización de imágenes, seguida del análisis de las propiedades particulares de las figuras, de la clasificación de las figuras por sus propiedades y de la deducción de propiedades a partir de otras, finalizando con un estudio riguroso de sistemas axiomáticos. Van Hiele propone una serie de fases de aprendizaje para el paso de un nivel a otro. Las fases de aprendizaje son: Información, Orientación dirigida, Explicitación, Orientación libre e Integración, considerando que una vez que se ha pasado esta última fase un nuevo nivel de conocimiento es adquirido.

3. Metodología y desarrollo

Para desarrollar el tema se proponen distintas actividades, promoviendo la discusión de los resultados para formular conclusiones.

Actividad 1. Manipulación de figuras. Esta primera actividad tiene como objetivo a través de la visualización y exploración de distintas figuras geométricas descubrir qué tipo de movimientos podemos realizar, una vez realizados estos movimientos observar: si se producen cambios entre la figura original y su imagen, preguntarnos ¿qué sucede si realizamos el movimiento inverso?, ¿qué ocurre con la imagen, si consideramos algunos elementos de la figura original, tales como puntos alineados, segmentos, distancias?, etc.

A partir de la discusión grupal de resultados, se puede establecer que: "Las transformaciones isométricas (o rígidas) son funciones puntuales que cumplen los siguientes postulados:

- Conservan la distancia, la alineación, el orden y la pertenencia.
- No transforman ni segmentos ni ángulos en subconjuntos propios de sí mismo.
- La inversa de una transformación rígida es una transformación rígida.
- La composición de dos transformaciones rígidas es una transformación rígida".

De acuerdo a lo anterior podemos decir que existen tres tipos de transformaciones rígidas: la simetría, la traslación y la rotación.

Una propiedad importante que podemos ir analizando en cada transformación es la conservación o no de la orientación. Para lo cual diremos que "una transformación rígida conserva la orientación si transforma un semiplano que está a la derecha (izquierda) de una semirrecta en un semiplano que está a la derecha (izquierda) de la semirrecta transformada, en caso contrario se dice que no conserva la orientación"

A continuación vamos a considerar cada transformación en particular para caracterizarla, explorar sus propiedades a través de la observación y de la experimentación, investigaremos la conservación de la orientación, la posición relativa de rectas homólogas, la transformación inversa, elementos dobles.

Simetría. Tenemos dos tipos de simetría, la simetría axial y la simetría central.

Simetría axial. Esta simetría como su nombre lo indica queda caracterizada por una recta que llamaremos eje y que lo indicaremos con "*e*".

Actividad 2. Dado el eje e y un punto *A*, se pide:

a) Hallar el transformado de *A* respecto de *e* e indicarlo con A'.
b) Hallar la distancia de *A* a *e* y de *e* a A'.
c) Considerar un punto *P* cualquiera sobre *e* y hallar la distancia de *P* a *A* y de *P* a A'.
d) Obtener conclusiones.

El objetivo de esta actividad es llegar a definir el concepto de simetría axial. Nos permitirá reforzar las construcciones geométricas, ya que puede colocarse como actividad, determinar el eje, dando un punto y su homólogo.

Actividad 3. Dado el eje *e* y una recta cualquiera *m* determinar geométricamente el transformado de *m* respecto de *e* si:

a) *m* coincide con *e*
b) *m* es paralela a *e*
c) *m* es perpendicular a *e*
d) *m* interseca a *e*
e) Obtener conclusiones de cada uno de los ítem anteriores
f) Analizar la orientación.

Actividad 4. Dado el eje *e* y una circunferencia de centro *o* y radio *r*. Se pide determinar el transformado de la circunferencia si:

a) *e* no pasa por el centro

b) *e* pasa por el centro

c) Sacar conclusiones.

El objetivo de las actividades 3 y 4 es guiar a los alumnos a deducir algunas de las propiedades particulares de la simetría axial.

"El eje es mediatriz de puntos homólogos"

"El eje, las rectas perpendiculares a los ejes, las circunferencias cuyos centros están situados sobre el eje son elementos dobles".

"La transformada de una recta paralela al eje es también paralela".

"Si una recta corta al eje, su transformada la corta en el mismo punto, resultando el eje bisectriz de dos de los ángulos formados por la recta y su transformada"

"La simetría axial no conserva la orientación"

Estas actividades nos permiten decir que "una figura es simétrica respecto de un eje si es un elemento doble respecto del eje, llamado eje de simetría"

Actividad 5. Determinar cuántos ejes de simetría poseen las siguientes figuras y trazarlos en caso de ser posible: triángulo equilátero, triángulo isósceles, triángulo escaleno, cuadrado, rectángulo, circunferencia, rombo,

Actividad 6.

a) Probar que si un triángulo no es isósceles no tiene ejes de simetría.

b) Probar que los ejes de simetría de un triángulo equilátero son las alturas del mismo.

Simetría central. La simetría central está caracterizada por un punto al cual llamaremos centro y lo indicaremos con "*O*".

Actividad 7. Sea *A* un punto del plano y sea *O* el centro, se pide

a) Hallar la imagen de *A* respecto de *O* e indicarla con A'.

b) Calcular la distancia de *A* a *O* y de *O* a A'.

c) Obtener conclusiones y discutirlas.

Actividad 8. Sea *O* el centro

a) Dada una semirrecta de origen *O* y uno de los semiplanos que ella determina, se pide determinar su imagen respecto de *O*.

b) Dada una recta r, encontrar su transformada respecto de *O*, analizando si $O \in r$ o si $O \notin r$.

c) Obtener conclusiones y discutirlas con el grupo.

El objetivo de estas actividades es que podamos concluir que el centro O es punto medio del segmento $\overline{AA'}$, lo cual nos llevará a definir el concepto de simetría central y nos permitirán guiar a los alumnos a deducir algunas de las propiedades particulares de la simetría central.

"Las semirrectas con origen en el centro tienen como transformadas las semirrectas opuestas"

"Preserva la orientación"

"Las rectas que pasan por el centro son dobles"

"Si una recta no pasa por el centro se transforma en una recta paralela"

Actividad 9. Probar que los ángulos opuestos por el vértice son congruentes.

También podemos hablar de figuras simétricas respecto de un centro. Y por ejemplo puede proponerse como actividad encontrar el centro de simetría de un cuadrado, de un rombo, de una circunferencia, de una corona circular.

Traslación. Para poder hablar de traslación podemos regresar a la actividad 1, y considerar los casos en donde hemos realizado este movimiento para resaltar el hecho de que es necesario disponer de una dirección, un sentido y una distancia para poder realizar este movimiento, es decir que el elemento característico es un vector. Este vector lo indicaremos con "$\mathbf{v}$".

Actividad 10. Sea $\mathbf{v}$ el vector traslación y sea A un punto del plano, se pide

a) Determinar el transformado de A respecto de $\mathbf{v}$ e indicarlo con A'.

b) Obtener conclusiones.

Actividad 11. Sea $\mathbf{v}$ el vector traslación y sea m una recta cualquiera, observar, deducir e investigar

a) ¿quién es la transformada de m? (analizar m paralela a $\mathbf{v}$ y m no paralela a $\mathbf{v}$)

b) Si el segmento $\overline{AB} \subset m$, encontrar su transformado respecto de $\mathbf{v}$. (Analizar m paralela a $\mathbf{v}$ y m no paralela a $\mathbf{v}$)

c) Una vez que realizó la parte b) determine los segmentos $\overline{AA'}$, $\overline{BB'}$ y trace sus mediatrices.

d) Obtenga conclusiones y discútalas.

El objetivo de estas actividades y de otras complementarias es que podamos concluir que una traslación definida por un vector dado $\mathbf{v}$ es una transformación que hace corresponder a cada punto A un punto A' tal que el vector definido por A y A' tiene el mismo sentido, dirección y modulo que el vector $\mathbf{v}$, y nos permitirán guiar a los alumnos a descubrir y deducir algunas de las propiedades particulares de la traslación.

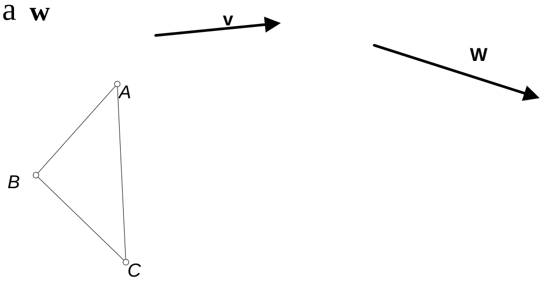
“Las rectas paralelas al vector traslación son dobles”.

“Las rectas que contienen segmentos homólogos son paralelas, coincidentes o no”.

“Preserva la orientación”.

“Las mediatrices de segmentos que unen puntos homólogos son paralelas”.

Actividad 12. Dado el triángulo *ABC* trasládelo primero con respecto a $\mathbf{v}$ y luego con respecto a $\mathbf{w}$



¿Podría obtenerse la imagen trasladada, de otra manera?

¿Qué vector de traslación debería usar en ese caso?

Rotación. Como podemos observar en la actividad 1 al rotar una figura lo realizamos alrededor de un punto fijo, o centro de rotación que lo indicaremos con *O*, tal que para todo punto *A* de la figura que se transforma en el punto A' por la rotación, el ángulo $A\hat{O}A'$ es el mismo. Este ángulo se denomina ángulo de rotación.

Esta observación nos permitirá afirmar que la rotación queda caracterizada por el centro y un ángulo orientado (sentido contrario a las agujas del reloj).

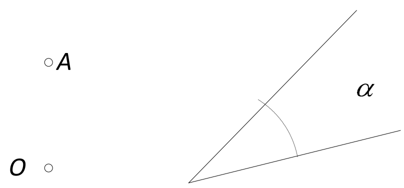
Actividad 13. Sea *O* el centro de rotación, α el ángulo de rotación y sea *A* un punto del plano, se pide

a) Hallar la imagen de *A* e indicarla con A'.

b) Calcular la distancia de *A* a *O* y de *O* a A'.

c) Trazar la mediatriz del segmento $\overline{AA'}$.

d) Obtener conclusiones y discutirlas.



Actividad 14. Sea *O* el centro de rotación, α el ángulo de rotación se pide

a) Determinar la imagen de la semirrecta $\overrightarrow{OP}$.

b) Determinar la imagen de la semirrecta $\overrightarrow{AP}$, si $O \notin \overrightarrow{AP}$.

c) Determinar la imagen de una recta cualquiera.

d) Sacar conclusiones.

El objetivo de estas actividades es que podamos elaborar la definición constructiva de rotación, es decir que "Dado un punto *O* y un ángulo orientado α, llamaremos rotación de centro *O* y ángulo α a la transformación que hace corresponder a cada punto *A* un punto A' tal que la distancia $|\overline{OA}| = |\overline{OA'}|$ y $A\hat{O}A' \equiv \alpha$ y de igual signo" y a la vez se puedan considerar algunas propiedades particulares de la misma.

"Preserva la orientación"

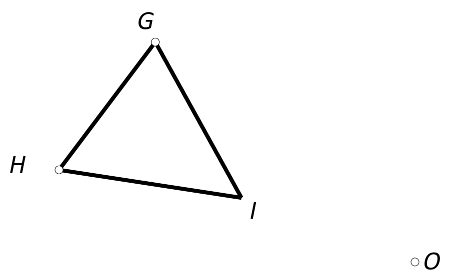
"El centro pertenece a la mediatriz del segmento definido por un punto cualquiera y su homólogo"

"El ángulo determinado por un punto *A*, el centro *O* y el homólogo de *A*, es congruente con el ángulo de rotación y de igual sentido".

"El centro equidista de una recta y su homóloga, el cual se encuentra en una de las bisectrices de los ángulos formados por estas rectas".

"El centro es un elemento doble, cualquiera que sea el ángulo de rotación"

Actividad 15. Rotar el $\overset{\Delta}{ABC}$, siendo *O* el centro de rotación y el ángulo de rotación $\alpha = 180^{\circ}$



¿Esta rotación cuyo ángulo de giro es de 180° es una simetría central?

¿Esto se cumplirá siempre, es decir una rotación es siempre una simetría central? Compruebe con otros ejemplos, con otro ángulo de giro. O será que ¿Toda simetría central es una rotación?

Posteriormente a estas actividades, se pueden considerar otras en donde se relacionen a través de la composición dos o más transformaciones isométricas para obtener la transformación resultante, analizar conmutatividad, preservación de la orientación.

4. Conclusión

Esta forma de abordar el tema isometrías motiva y hace ameno el estudio del mismo. Las representaciones geométricas confeccionadas por el docente o realizadas por los propios alumnos no sólo sirve para evidenciar conceptos e imágenes visuales, sino también son medios de estudio de propiedades geométricas, sirviendo de base a la intuición y a procesos inductivos y deductivos de razonamiento.

Es un tema rico en aplicaciones ya que no solo podemos buscar isometrías en matemática sino en química, física, en la naturaleza, etc. Por lo tanto podemos tratarlo de diferentes puntos de vista, adecuándolo al nivel de enseñanza que se imparte.

Bibliografía

Alsina, C., Burgués, C. y Fortuny, J.M. (1988). *Materiales para construir la geometría*. Madrid: Síntesis.

Coxeter, Harold (1971). *Fundamentos de Geometría*. México: Limusa-Wiley.

Coxford, Arthur (1971). *Geometry A Transformation Approach*. USA: Laidlaw Brothers, Publishers.

Pastor Jaime R. y otros (1996). *El grupo de las isometrías del plano.* Madrid: Síntesis

Puig Adam, Pedro (1980). *Curso de Geometría Métrica*. Madrid: Euler ed..

Siñeriz, Liliana y Santinelli, Raquel (2005). *Inducción y formalización en la enseñanza de las transformaciones rígidas en entorno CABRI*. Educación Matemática, Santillana, 17(1), 149-162.