ORGANIZACIONES DIDÁCTICAS MATEMÁTICAS Y CRITERIOS DE EVALUACIÓN EN TORNO A LA MULTIPLICACIÓN

RODOLFO VERGEL CAUSADO

UNIVERSIDAD PEDAGÓGICA NACIONAL
FACULTAD DE CIENCIA Y TECNOLOGÍA
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS
MAESTRÍA EN DOCENCIA DE LA MATEMÁTICA
Bogotá, Noviembre de 2004

ORGANIZACIONES DIDÁCTICAS MATEMÁTICAS
Y CRITERIOS DE EVALUACIÓN EN TORNO A LA MULTIPLICACIÓN

RODOLFO VERGEL CAUSADO

Trabajo de investigación presentado como requisito parcial para optar el título de Magíster en Docencia de la Matemática

Directora
GLORIA GARCÍA DE GARCÍA
Magíster en Filosofía

UNIVERSIDAD PEDAGÓGICA NACIONAL
FACULTAD DE CIENCIA Y TECNOLOGÍA
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS
MAESTRÍA EN DOCENCIA DE LA MATEMÁTICA
Bogotá, Noviembre de 2004

AGRADECIMIENTOS

A mis hijos, **Paula Alejandra y Santiago Andrés**, quienes constituyen el norte de mi existencia.

A **Myriam,** quien con su infinita comprensión supo apoyar mi trabajo.

A la profesora **Gloria García**, por sus acertados comentarios que siempre buscaron mejorar la calidad de este trabajo.

A la doctora **Lilia Cristina Fandiño**, quien me apoyó y brindó los espacios que necesité para realizar el trabajo de campo, hacer mis reflexiones y escribir el trabajo final.

RESUMEN ANALÍTICO

Tipo de documento: Tesis de Grado.

Acceso del documento: Universidad Pedagógica Nacional.

Título del documento: Organizaciones didácticas matemáticas y criterios de evaluación en torno a la multiplicación.

Autor: Rodolfo Vergel Causado

Publicación: Bogotá, Universidad Pedagógica Nacional. Facultad de Ciencia y Tecnología. Departamento de Matemáticas. 2004, 149 páginas.

Palabras claves: Criterios de evaluación, organización didáctica matemática (ODM), situaciones, representaciones, perspectiva sociocultural, campo conceptual multiplicativo (CCM), multiplicación, desarrollo de competencias.

Descripción: Investigación cualitativa interpretativa, que consiste en responder la pregunta; ¿Son los criterios de evaluación del aprendizaje de la multiplicación en las aulas de tercero, cuarto y quinto de la Educación Básica dependientes de las organizaciones didácticas matemáticas (ODMs) de los contenidos relativos a este concepto?

El objetivo del estudio es:

Describir y analizar cómo las organizaciones didácticas matemáticas de los contenidos relativos a la multiplicación constituyen un factor determinante de los criterios para valorar su aprendizaje.

Para la consecución de este objetivo se hace necesario:

- Describir y analizar la organización didáctica matemática (ODM) de los contenidos relativos a la multiplicación en cada uno de los grados tercero, cuarto y quinto de la Educación Básica en tres colegios de Bogotá.

- Caracterizar los criterios de evaluación del aprendizaje de la multiplicación en los grados tercero, cuarto y quinto de la Educación Básica en los mismos tres colegios.

- Establecer la relación de dependencia entre los criterios de evaluación caracterizados y las organizaciones didácticas matemáticas de los contenidos relativos a la multiplicación.

Fuentes: La clase, entrevistas realizadas a los profesores, preparaciones de clase, plan de área institucional.

Contenidos: Trabajo de investigación que aborda el análisis de la relación entre los criterios de evaluación del aprendizaje de la multiplicación en las aulas de tercero, cuarto y quinto de la Educación Básica y las ODMs en torno a este tópico matemático, con el propósito de establecer la dependencia de los primeros con respecto a estas organizaciones.

Metodología: Para operativizar el objetivo general: Describir y analizar cómo las ODMs de los contenidos relativos a la multiplicación constituyen un factor determinante de los criterios para valorar su aprendizaje, y en consecuencia intentar responder la pregunta de investigación, ¿Son los criterios de evaluación del aprendizaje de la multiplicación en las aulas de tercero, cuarto y quinto de la Educación Básica dependientes de las organizaciones didácticas matemáticas de los contenidos relativos a este concepto?, se articulan los dos siguientes focos de investigación: *Criterios de evaluación del aprendizaje de la multiplicación* (F_1) y *Estudio de la dependencia de los criterios de evaluación del aprendizaje de la multiplicación en las aulas de tercero, cuarto y quinto de la Educación Básica de las ODMs de los contenidos relativos a este concepto* (F_2). Cada foco se desglosa en una serie de subobjetivos subsidiarios del objetivo general, y para la operativización de estos subobjetivos se plantean cuestiones específicas de investigación que constituyen subpreguntas de la pregunta general de investigación.

Los niveles de investigación exigen la definición de unidades de análisis para poner de presente el carácter dependiente de los criterios de evaluación del aprendizaje de la multiplicación de las ODMs de los contenidos relativos a este concepto. Las unidades de análisis son:

Para el primer foco: las preparaciones de clase en las aulas de tercero y cuarto, las sesiones de clase de tercero, cuarto y quinto, las pruebas escritas propuestas por el profesor en el aula, las respuestas dadas por el profesor a la entrevista semiestructurada en relación con los aspectos evaluativos y el libro de texto utilizado por la profesora del grado tercero.

Para el segundo foco: las preparaciones de clase en las aulas de tercero y cuarto, el Plan de Aula institucional del grado tercero, las sesiones de clase de los grados tercero, cuarto y quinto y las respuestas a la entrevista semiestructurada en relación con los aspectos de organización de los contenidos matemáticos en torno a la multiplicación.

Posteriormente se plantean las categorías, con base en el marco teórico, para intentar responder a la pregunta de investigación formulada en este estudio.

Conclusiones: Con base en el análisis e interpretación (apartado 3.4), se puede afirmar que en las aulas estudiadas efectivamente las organizaciones didácticas matemáticas de los contenidos relativos a la multiplicación constituyen un factor determinante de los criterios para valorar su aprendizaje.

CONTENIDO

INTRODUCCIÓN 1

1. CONTEXTO DE LA INVESTIGACIÓN 3

1.1 JUSTIFICACIÓN 3
1.2 ANTECEDENTES 8
1.3 FORMULACIÓN DEL PROBLEMA 12
1.4 DELIMITACIÓN DEL PROBLEMA 13
1.5 OBJETIVO GENERAL 13
1.6 HIPÓTESIS DE INVESTIGACIÓN 14

2. MARCO TEÓRICO 15

2.1 ASPECTOS MATEMÁTICOS DE LA MULTIPLICACIÓN 15
2.1.1 UNA MIRADA DE LA MULTIPLICACIÓN EN EUCLIDES Y EN PEANO. HACIA UNA PERSPECTIVA ABSTRACTA. 16
2.2 UNA APROXIMACIÓN A LA FENOMENOLOGÍA DIDÁCTICA DE LA MULTIPLICACIÓN. 27
2.3 ORGANIZACIÓN DIDÁCTICA MATEMÁTICA (ODM) DE LA MULTIPLICACIÓN 31
2.3.1 PERSPECTIVA SOCIOCULTURAL DEL APRENDIZAJE DE LA MULTIPLICACIÓN Y LA NOCIÓN DE COMPETENCIA. 34
2.3.2 UNA MIRADA A LOS PROBLEMAS MULTIPLICATIVOS. EL PAPEL DE LAS REPRESENTACIONES. 40
2.4 EVALUACIÓN, CRITERIOS DE EVALUACIÓN Y CONTRATO DIDÁCTICO. 49
2.4.1 CRITERIOS DE EVALUACIÓN EN MATEMÁTICAS 49
2.4.2 EVALUACIÓN/VALORACIÓN 50
2.4.3 UNA APROXIMACIÓN A LA NOCIÓN DE CONTRATO DIDÁCTICO 52
2.5 LA TEXTUALIZACIÓN DEL SABER: LAS PREPARACIONES DIDÁCTICAS 55

3. METODOLOGÍA Y DESARROLLO DE LA INVESTIGACIÓN 58

3.1 METODOLOGÍA 58
3.2 PARTICIPANTES 59
3.3 PROCESO DE INVESTIGACIÓN 59
3.3.1 RECOLECCIÓN DE LA INFORMACIÓN Y UNIDADES DE ANÁLISIS 60
3.3.2 CATEGORÍAS Y PROCESO INTERPRETATIVO 61
3.4 ANÁLISIS E INTERPRETACIÓN 64
3.4.1 ANÁLISIS DE LAS SESIONES DE CLASE SOBRE MULTIPLICACIÓN EN GRADO 3º 64
3.4.2 ANÁLISIS DE LA SESIÓN DE CLASE SOBRE MULTIPLICACIÓN EN GRADO 4º 72
3.4.3 ANÁLISIS DE LA SESIÓN DE CLASE SOBRE MULTIPLICACIÓN EN GRADO 5º 77

4. CONCLUSIONES Y CUESTIONES ABIERTAS 81

BIBLIOGRAFÍA 85

ANEXOS 89

INTRODUCCIÓN

La evaluación en el aula de matemáticas es considerada actualmente un campo de estudio en la Educación Matemática. Estos estudios ponen el acento en la evaluación como un enfoque de regulación y control del aprendizaje, particularmente en matemáticas, la evaluación se concibe en la intersección del contenido matemático, la práctica de la enseñanza y el aprendizaje del estudiante (Romberg y Kilpatrick, citados por García, 2003), por lo que es posible afirmar que ésta (la evaluación) se incardina en los procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas.

No obstante, se reconoce hoy día la confusión que viven los profesores frente a la práctica de la evaluación del aprendizaje de las matemáticas, pues se ha tomado de manera instrumental y en este sentido no se problematiza, máxime si se acepta que los criterios de evaluación en el aula de matemáticas guardan estrecha relación con la manera como se organizan los contenidos relativos a un concepto matemático, es decir con lo que en este trabajo se llama las organizaciones didácticas matemáticas (ODMs).

Este estudio aborda la relación entre organizaciones didácticas matemáticas relativas a la multiplicación y los criterios de evaluación del aprendizaje de este concepto. Más precisamente, se quiere responder la siguiente pregunta: *¿Son los criterios de evaluación del aprendizaje de la multiplicación en las aulas de tercero, cuarto y quinto de la Educación Básica dependientes de las organizaciones didácticas matemáticas de los contenidos relativos a este concepto?.*

Para responder a esta pregunta, se sigue el desarrollo de los siguientes cuatro capítulos.

El primero, aborda el contexto de la investigación, en el cual se presenta la justificación, los antecedentes, la formulación del problema y su delimitación, los objetivos general y específicos y la hipótesis de investigación.

El segundo, desarrolla el marco teórico que comporta los aspectos matemáticos de la multiplicación, el análisis fenomenológico, las organizaciones didácticas matemáticas en torno a la multiplicación y las nociones de evaluación, criterios de evaluación, contrato didáctico y textualización del saber. La metodología y el desarrollo de la investigación se presenta en el capítulo tercero, que fundamentalmente aborda los focos de investigación con sus respectivos objetivos y cuestiones de investigación para dar paso a la definición de las unidades de análisis y a las categorías de investigación. Seguidamente se inicia el análisis en interpretación de los datos. En el último capítulo se describen las conclusiones y algunas cuestiones abiertas que deja esta investigación.

1. CONTEXTO DE LA INVESTIGACIÓN

1.1 Justificación

Problemática de la evaluación en el aula de matemáticas

La comunidad educativa de la Educación Básica ha iniciado un debate en torno al impacto de los resultados de pruebas externas de carácter nacional y regional (de Estado, ICFES, de calidad, Saber MEN, Censal SED), pues éstos pretenden identificar y a la vez modificar modelos pedagógicos institucionales vigentes y modelos de evaluación.

Un modelo de evaluación (García, 2003) prescribe: qué objetos se consideran par ser evaluados –variables-, de qué forma se analizan –métodos- y técnicas que se usan para recoger información sobre los objetos. Según la autora, el objeto a evaluar depende en primer lugar, de los criterios con que las distintas culturas validan lo que es conocimiento, y en segundo lugar, de los criterios que las disciplinas establecen para la validez del conocimiento (Bustamante, 1996, citado por García, 2003). En palabras de Giménez (1997), los criterios de evaluación son aseveraciones que determinan el alcance y la clase de aprendizaje que hacen posible la adquisición de las competencias deseadas.

En particular, en las aulas de matemáticas la evaluación se sigue entendiendo como medición, control, para certificar o desertificar la promoción de los estudiantes, y como criterio que garantiza la adquisición de conocimiento matemático. Los criterios de evaluación, como el de competencias por ejemplo en pruebas externas, pretenden convertirse en las orientaciones pedagógicas para modificar prácticas en el aula. García y su equipo de la Universidad Pedagógica Nacional de Bogotá, en el Programa de Formación y Actualización de Docentes (Secretaría de Educación del Distrito Capital 1998-2001) y el acompañamiento a instituciones escolares (Programa de Nivelación para la Excelencia, Secretaría de Educación del Distrito, 2000-2001), muestra que los resultados de estas evaluaciones y en particular los enfoques (de competencias, en especial) vuelven a ser asumidos por las comunidades educativas en el sentido tradicional, *escindida del proceso de aprendizaje y de la organización de los contenidos de la enseñanza*; lo único que cambia es la introducción instrumental del criterio "competencia" en las tareas de evaluación. Esto desde luego no es gratuito, pues obedece a concepciones educativas subyacentes que están fuertemente arraigadas.

Particularmente, desde el paradigma positivista se desprende el modelo conductual en matemáticas, en el que el objeto de la evaluación es medir los cambios de conducta de los estudiantes a través de los comportamientos observables para verificar si los objetivos han sido conseguidos (García, 2003). Este análisis de los resultados se elabora con base en lo que se ha denominado la métrica educacional. Este tipo de métrica influye de manera importante en las prácticas de la educación, especialmente en la evaluación. En este sentido la propuesta de currículo prescriptivo formulada por Tyler, de alguna manera garantizaba que una vez impartida la instrucción era posible aplicar los métodos de medida educacional para verificar la consecución de los objetivos preestablecidos.

En el contexto colombiano, la evaluación del conocimiento matemático ha sido tradicionalmente asumida como un aspecto externo a los problemas específicos de la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas. Esta práctica, con su fuente disciplinar en la Psicología asociacionista, construyó una organización precisa y concisa para garantizar el escenario en la consecución de los objetivos educativos, por lo que puede afirmarse que *el modelo de evaluación ha sido yuxtapuesto a las matemáticas*.

Un ejemplo, influenciado por las ideas anteriores, lo constituye las organizaciones que se presentaron en la Reforma Curricular de la década del 80, en la cual se muestra cómo la pedagogía de los objetivos fue la fuente disciplinar exclusiva para organizar la *preparación didáctica* (Chevallard, 1991). Dicha reforma estuvo basada en los supuestos curriculares tylerianos, a través de organizaciones como *definición de objetivos, indicadores de evaluación y sugerencias metodológicas*, los cuales describieron y prescribieron la práctica en el aula de matemáticas. En el caso particular de la multiplicación, la relación entre unos y otros objetivos norma en progresión lineal y atomizada el contenido:

Objetivo específico	*Indicador de evaluación*
Generalizar un algoritmo para efectuar multiplicaciones (4)	*El alumno efectuará multiplicaciones en las cuales los factores son de tres o más dígitos.*
Encontrar un procedimiento para multiplicar abreviadamente por 9, 99, 999, 11, 101, 1001 y por 5, 25, 50 (5)	*Dados algunos números, el alumno los multiplicará abreviadamente por 9, 99, 999; por 11, 101, 1001 y por 5, 25, 50.*
Aplicar en el cálculo mental los procedimientos para multiplicar abreviadamente (6)	*El alumno efectuará mentalmente algunas multiplicaciones aplicando los procedimientos para multiplicar en forma abreviada.*

De la presentación, se deduce que cada objetivo permite fijar implícitamente un tiempo puntual y terminal del aprendizaje y su respectivo control. García (2002) señala que el análisis de cómo se enuncian estos objetivos permite deducir que son enunciados asertivos y prescriptivos y a cada una de estas aserciones se subordina enunciados de evaluación que expresan el comportamiento inmediato que se debe esperar: *El alumno efectuará multiplicaciones en las cuales los factores son de tres o más dígitos; Dados algunos números, el alumno multiplicará abreviadamente...; El alumno efectuará mentalmente algunas multiplicaciones aplicando los procedimientos...*

Se colige que la relación entre unos y otros pone de manifiesto la urgencia y la inmediatez del aprendizaje. Más aún, puede afirmarse que esta práctica no toca el saber ni la forma de enseñanza. Además, a partir del planteamiento de estos objetivos, se pone el acento en el aspecto algorítmico y posteriormente se abordan los problemas de aplicación de las operaciones.

Por otra parte, estos objetivos se encuentran acompañados de sugerencias de actividades y metodología:

... "Es recomendable hacer ejercicios que sigan la misma secuencia propuesta en el programa de tercer grado:

a) Juegos y ejercicios para recordar las tablas de multiplicar.
b) Ejercicios de cálculo mental que impliquen la aplicación de los procedimientos de multiplicar abreviadamente, vistos en los grados anteriores, y también la descomposición de un factor en una suma o en una diferencia (aplicación de la propiedad distributiva**)**.
c) Multiplicaciones como:

342	**423**	**635**	**938**	**807**
x221	**x201**	**x67**	**x700**	**x609**

en las cuales pueden aplicarse algunos procedimientos abreviados, como es el caso de cero en un factor..." (MEN, 1985, p. 230).

Como puede observarse, también se pone el acento en la ejercitación-memorización de los algoritmos. Además estas sugerencias metodológicas prescriben la actuación del docente y del alumno (García, 2002), a través de actividades y preguntas; y legalizan de esta forma, la duración progresiva, acumulativa e irreversible de los tiempos de aprendizaje y sus controles.

Sin embargo, desde algunas propuestas teóricas (Romberg, 1989; Webb, 1992) y en la necesidad de superar el enfoque instrumental que la tradición le ha otorgado a la evaluación del aprendizaje de las matemáticas, se plantea la necesidad de iniciar la construcción teórica del estudio de la Evaluación en Matemáticas en un campo de estudio conectado pero diferenciado del campo general de la evaluación. Un primer argumento por el cual surge tal necesidad, obedece a las características propias del conocimiento matemático, pues los resultados de investigación cognitiva en torno a conceptos y procedimientos matemáticos (Nesher, 1982, 1988; Vergnaud, 1983, 1988; Clark, 1991; Steffe, 1994, entre otros) revelan que los sujetos desarrollan acciones cognitivas específicas determinadas por este tipo de conocimiento. De otro lado, la visión sobre la naturaleza de las matemáticas es una condicionante de los distintos modelos de enseñanza y determina formas de organización de los contenidos matemáticos y por consiguiente de evaluación.

En este sentido la evaluación empieza a considerarse como parte integral de la enseñanza e incluye el estudio de la relación entre métodos de evaluación y concepción subyacente sobre las matemáticas. Niss (1993) pone de manifiesto la disparidad de planteamientos y enfoques existentes en la comunidad internacional sobre la valoración del conocimiento matemático. Por su parte, el trabajo de Wheeler (1993), aborda el problema de la evaluación de las matemáticas desde su dimensión epistemológica, por lo que es posible afirmar que ésta tiene implicaciones importantes en los criterios de evaluación del aprendizaje de conceptos matemáticos. Webb (1992) señala que la propia naturaleza de las matemáticas y los enfoques pedagógicos para la enseñanza de las mismas, permiten considerar técnicas de valoración específicas en el área de las matemáticas, hecho que sustenta el que se debe estudiar la evaluación de las matemáticas como campo diferenciado de estudio y de investigación.

Por valoración en matemáticas Webb entiende la consideración comprensiva del funcionamiento de un grupo o individuo en matemáticas o en la aplicación de las matemáticas, lo que implica considerar la actuación del estudiante en una variedad de contextos y también obliga a ampliar las fuentes de información que permiten hacer estimaciones sobre el desempeño de los escolares, lo cual reviste importancia por las implicaciones al momento de pensar y formular criterios de evaluación en el aula de matemáticas.

Un tipo de organización didáctica matemática de los contenidos integrada al desarrollo cognitivo de los estudiantes, es propuesta por Vergnaud (1990) quien plantea analizar en el conocimiento matemático nexos horizontales y verticales entre conceptos y procedimientos sobre el supuesto de conexidad matemática entre ellos, e identificar un conjunto de símbolos y proposiciones que los representan en diferentes situaciones y problemas, junto con los procesos de pensamiento matemático asociados para construir un campo conceptual.

Si se comparte que todas estas exigencias son necesarias para una buena génesis de los conocimientos matemáticos en los niños y jóvenes, no podremos menos de reconocer que los conceptos se forman a lo largo de un gran período de tiempo, y también que necesitamos como docentes lograr un aprendizaje continuo, para organizar mejor esas situaciones que permiten hacer funcionar el conocimiento, y a la vez asumir que el pensamiento, las competencias y la comprensión se desarrollan en largos períodos de tiempo. La teoría, pues, de Vergnaud es potente, en tanto desvirtúa la organización tradicional, secuencial y atomizada de las matemáticas, junto a la definición de criterios de evaluación inmediatistas y atomizados. En este mismo sentido, del trabajo de Chevallard (1986) se infiere que el estudio de la evaluación hace parte del funcionamiento didáctico en la relación triádica profesor-saber matemático-alumno.

La teoría de los *campos conceptuales,* según García et al (2003) emerge como categoría epistémica que permite debilitar la organización del aprendizaje y la evaluación en el aula en términos inmediatistas, e incorporar desde el punto de vista cognitivo criterios de evaluación relativos a elementos situacionales, conceptúales y argumentativos. La teoría plantea que el desarrollo de competencias, por ejemplo multiplicativas, es un proceso lento y largo y en dicho proceso las competencias se tornan cada vez más complejas.

Si se comparte, entonces, la tesis que la evaluación del conocimiento matemático es parte del análisis didáctico-matemático, entonces su estudio y tratamiento involucra posiciones sobre la naturaleza de las matemáticas. Ello permite, por un lado abandonar el legado exclusivo de la teoría de los objetivos operatorios devenida de la Psicología, como única fuente de sustentación de la evaluación, y por otro, ser conscientes que cualquier modificación que se proponga o elabore externamente sobre modelos de evaluación en matemáticas y sus criterios, es inútil, puesto que la evaluación en el aula es dependiente y debe ser coherente con las concepciones sobre las matemáticas.

Con base en estos argumentos, es necesario emprender un estudio de carácter interpretativo que permita caracterizar los criterios de evaluación del aprendizaje de la multiplicación. Pero también, en consideración a que este trabajo intenta contribuir al desarrollo del proyecto de investigación *"Modelos y Prácticas Evaluativas de las Matemáticas en la Educación Básica. El Caso del Campo Multiplicativo* (Colciencias-UPN, 2002-2004) –el cual se inscribe en el marco de la línea de investigación "Una aproximación epistemológica, cognitiva y didáctica al cálculo"-, se pretende indagar por la relación entre los criterios de evaluación del aprendizaje de la multiplicación en las aulas de matemáticas de tercero, cuarto y quinto y las organizaciones didácticas matemáticas (ODMs) de los contenidos relativos a este concepto.

1.2 Antecedentes

La revisión del estado del arte se clasifica en investigaciones sobre evaluación en matemáticas asociadas a los aspectos esgrimidos en la justificación y estudios e investigaciones sobre el campo conceptual multiplicativo (CCM), interpretado como una organización didáctica matemática relativa a la multiplicación, relacionados también con el objeto de estudio en este trabajo, es decir se intenta mostrar relaciones entre los criterios de evaluación del aprendizaje de la multiplicación y las organizaciones didácticas matemáticas relativas a este concepto.

Estudios teóricos sobre la evaluación en matemáticas

En este campo se destacan los trabajos de Romberg (1989, 1992), quien fundamentalmente plantea que aún los sistemas usuales de evaluación están basados en el mismo conjunto de supuestos: visión esencialista del conocimiento matemático, teoría conductista del aprendizaje y una aproximación precaria a la enseñanza. De igual modo señala que existe una estrecha relación entre enfoques de evaluación y concepciones sobre la validez del conocimiento que se transmite.

Romberg y Carpenter (1986) presentan por primera vez la relación entre evaluación en el aula estándar de matemáticas y concepción de las mismas, y ponen de manifiesto las siguientes limitaciones:

- *Primera*: la matemática se asume como disciplina acotada estáticamente (...) la fragmentación de las matemáticas se ha divorciado de la realidad y de la autoinvestigación (...).
- *Segunda*: la adquisición de información se ha convertido en un fin en sí misma y los alumnos gastan su tiempo en lo que otros han hecho en lugar de experimentarlo por sí mismos (...).
- *Tercera*: el papel del profesor en el aula es directivo y personalista (...) su trabajo no está guiado por una concepción del conocimiento matemático a transmitir, ni por una comprensión de cómo verificar el aprendizaje.

Estas tres limitaciones se convierten en las variables de estudio de las formas como una determinada concepción de las matemáticas determina la organización de la enseñanza, y en los criterios para evaluar el conocimiento matemático en el aula.

El estudio de Suydam (1986) reconoce que toda la tecnología sobre pruebas de evaluación y criterios de valoración, elaboradas hasta el momento, resultan insuficientes para las necesidades que surgen de los nuevos currículos para la enseñanza de las matemáticas escolares, ya que los proyectos de renovación implican nuevos planteamientos sobre evaluación.

Por su parte, Rico, et al (1993) señalan que la adaptación de la evaluación en matemáticas a las condiciones óptimas de objetividad han proporcionado a la asignatura y a sus profesores y profesoras dos rasgos destacables: *respetabilidad y poder de decisión*. Por estos motivos la evaluación en matemáticas se ha considerado adecuada para satisfacer determinadas funciones relativas a la promoción y clasificación de los estudiantes. En particular, la evaluación en matemáticas durante la enseñanza secundaria, según estos autores, ha servido para:

- Proporcionar criterios de promoción de los escolares a lo largo del sistema escolar.
- Establecer criterios de selección de minorías cualificadas.
- Justificar las decisiones sobre clasificación de los escolares, según su desarrollo intelectual.
- Valorar la inteligencia de los escolares.

Por su parte el NCTM (1995) sostiene que examinar para calificar ha sido una de las formas más comunes de evaluar; sin embargo, esgrime que la evaluación es una tarea más amplia y más básica, diseñada para hallar qué saben los estudiantes y cómo piensan acerca de las matemáticas. La evaluación debe originar una "biografía" del aprendizaje de los alumnos, una base para mejorar la calidad de la docencia. En efecto, señala, la evaluación no tiene razón de ser a menos que sea para mejorar el proceso enseñanza / aprendizaje.

Scriven (citado por García et al, 2004) propone la evaluación formativa cuya función esencial para el profesor es obtener información acerca del estado de adelanto del trabajo de los estudiantes, abarca también acciones de diagnóstico de las dificultades relativas a los ejercicios propuestos a los estudiantes. Las fuentes de información se refieren a tareas realizadas, a las modalidades de trabajo (individual, en grupo) y las informaciones obtenidas enteran al profesor para que decida eventuales acciones a emprender en el desarrollo de las lecciones. De esta manera se concibe a la evaluación como un proceso mediante el cual se delimita, obtiene y proporciona informaciones útiles para juzgar las posibles decisiones, el juicio es un juicio de valor que se emite sobre un proceso.

Desde la perspectiva del currículo como producto social y cultural, en la propuesta de Bishop (citado por García, 2003), si bien no se plantean cuestiones específicas sobre la evaluación en matemáticas, se concluye que la evaluación no puede establecerse sobre principios de "universalidad" y "objetividad". Esto encuentra su sustento por cuanto el desarrollo del conocimiento cultural de las matemáticas no sólo depende de procesos cognitivos intrínsecos de cada persona, sino también es desarrollada en la colectividad del grupo cultural. En otras palabras, las matemáticas se desarrollan a través de la interacción social de sujetos que comparten normas y valores en una cultura.

Estudios en torno al Campo Conceptual Multiplicativo (CCM)

En los apartados precedentes se ha señalado, entre otros aspectos, cómo la visión sobre la naturaleza de las matemáticas determina formas de organización de los contenidos matemáticos. El concepto multiplicación, por ejemplo, tradicionalmente se reparte en niveles para los grados de primaria y fundamentalmente se presenta como suma repetida. Para los grados quinto de primaria en adelante la multiplicación comienza a ser presentada como operación binaria. Por otro lado, la proporción se le asigna el grado sexto y séptimo. En los grados octavo y noveno se aborda la función lineal, ...

Esto muestra cómo las presentaciones aparentemente simplifican la complejidad matemática y las relaciones entre los conceptos, además que se les desvincula de las situaciones que modelan.

Vergnaud (citado por Greer, 1992), ubica la multiplicación y la división dentro de un contexto más amplio que llama "el campo conceptual de las estructuras multiplicativas", sobre él afirma que consiste en:

> "Todas las situaciones que pueden analizarse como problemas de proporcionalidad simple y múltiple, para las cuales uno necesita usualmente multiplicar y dividir. Muchas clases de conceptos matemáticos se enlazan a estas situaciones y el pensamiento necesario para apropiárselos. Entre estos conceptos están las funciones lineales y no lineales, análisis dimensional, fracción, razón, tasa, número racional y multiplicación y división."

Greer (1992) señala que la multiplicación y la división de números enteros y racionales pueden considerarse como relativamente simples desde el punto de vista matemático, sin embargo muestra la complejidad psicológica que se esconde tras de esta simplicidad matemática, dicha complejidad se manifiesta sobre todo cuando estas operaciones se examinan no desde la perspectiva del cómputo sino desde cómo ellas pueden modelar situaciones.

Fischbein, Deri, Nello y Marino (1985) reportan que la manifestación más evidente de la influencia de los aspectos numéricos y de cálculo es la influencia de la concepción errónea que la multiplicación siempre agranda y que la división siempre achica, y que se divide el número mayor entre el menor.

Steffe (1994) estudia los esquemas multiplicativos, por su parte Clark (1991) reporta resultados relacionados con el pensamiento multiplicativo en estudiantes de los grados de primero a quinto de la Educación Básica; Confrey (1994) y Smith and Confrey (1994) realizan estudios en relación al uso de términos multiplicativos y estrategias utilizadas por los estudiantes en la solución de problemas multiplicativos.

Los trabajos de Nesher (1982, 1988) y Vergnaud (1983, 1988) sobre situaciones (verbales) modeladas por la multiplicación y la división, caracterizaron categorías para esas situaciones de multiplicación como: situaciones multiplicativas de correspondencia (multiplicación como suma repetida) de comparación y producto cartesiano; y para la división se establecen dos categorías: la división por cociente y la división por partición.

En términos generales, estos resultados de investigación cognitiva, de alguna manera cuestionan la forma como se presentan en el currículo actual los conceptos matemáticos relativos a la multiplicación, además que aportan para rupturar la idea que la adquisición de conceptos puede continuar siendo considerada lineal y que es asunto de presentarlos como listado de temas. En este sentido las aportaciones han sido importantes para direccionar cambios en las formas de organización de los contenidos en torno a la multiplicación. No obstante, a partir de esta revisión, puede afirmarse que hay carencia de estudios de tipo curricular que profundicen en el desarrollo y la evaluación del aprendizaje de las nociones y conceptos relacionados con el CCM.

1.3 Formulación del Problema

A partir de los planteamientos expuestos en los párrafos precedentes, es posible afirmar que el núcleo temático multiplicación se forma a lo largo de un gran período de tiempo, pues desde las investigaciones se reconoce la extensión de las raíces genéticas de la multiplicación hasta los espacios vectoriales y las transformaciones lineales. En consecuencia, el proceso de aprendizaje y el desarrollo de competencias, en este caso multiplicativas, es un proceso lento y largo y en dicho proceso las competencias se tornan cada vez más complejas.

También es posible inferir, de la teoría de Vergnaud, que una manera aislada de evaluación resultará muy limitada para calibrar el rango completo y la profundidad de lo que significa conocer la multiplicación. Más específicamente, *si se reconoce la existencia de diferentes contextos en los* *cuales subyace esta noción, debe reconocerse también que ella reviste complejidad conceptual y por tanto necesidad de múltiples evidencias ligadas a diferentes actuaciones de los estudiantes, lo que supone un desarrollo de competencias en el tiempo.* Por esta razón, desde la teoría del CCM se incorporan desde el punto de vista cognitivo criterios de evaluación relativos a elementos situacionales, representacionales, conceptuales y argumentativos.

Se evidencia entonces una tensión entre la perspectiva tradicional de la evaluación en el aula de matemáticas y la perspectiva que se infiere de las propuestas teóricas, en particular de la teoría de Vergnaud del CCM, que serían deseables y pertinentes en tanto posibilitarían una comprensión mucho más profunda de las diversas actuaciones de los estudiantes, del desarrollo de sus competencias matemáticas y del avance conceptual frente a tópicos matemáticos, en particular el de la multiplicación, lo cual permite reconocer que el aprendizaje de conceptos como éste es un proceso complejo y duradero, que no es instantáneo (Chevallard, Bosch y Gascón, 1997), es decir, no se puede concebir de manera puntual y local, lo cual necesariamente tiene implicaciones en los criterios de evaluación del aprendizaje de conceptos matemáticos en el aula, particularmente el de multiplicación.

1.4 Delimitación del problema

Con el objeto de delimitar el problema de investigación se hace necesario plantear la siguiente pregunta:

¿Son los criterios de evaluación del aprendizaje de la multiplicación en las aulas de tercero, cuarto y quinto de la Educación Básica dependientes de las organizaciones didácticas matemáticas de los contenidos relativos a este concepto?

1.5 Objetivo general

Describir y analizar cómo las organizaciones didácticas matemáticas (ODMs) de los contenidos relativos a la multiplicación constituyen un factor determinante de los criterios para valorar su aprendizaje.

Objetivos específicos

Para desarrollar el objetivo general se hace necesario centrar el estudio en:

- Describir y analizar la organización didáctica matemática (ODM) de los contenidos relativos a la multiplicación en cada uno de los grados tercero, cuarto y quinto de la Educación Básica en tres colegios de Bogotá.

- Caracterizar los criterios de evaluación del aprendizaje de la multiplicación en los grados tercero, cuarto y quinto de la Educación Básica en los mismos tres colegios.

- Establecer la relación de dependencia entre los criterios de evaluación caracterizados y las organizaciones didácticas matemáticas de los contenidos relativos a la multiplicación.

1.6 Hipótesis de investigación

En esta investigación se sostiene que *la organización didáctica matemática de los contenidos relativos a la multiplicación es un factor determinante de los criterios para valorar su aprendizaje.*

2. MARCO TEÓRICO

Con el propósito de comenzar a vislumbrar la respuesta a la pregunta de investigación planteada, se aborda en la primera parte de este capítulo un análisis de los aspectos matemáticos relativos a la multiplicación (apartado 2.1), con el fin de inferir aspectos didácticos, que permitan, en particular, analizar las tareas propuestas por los profesores en el aula, derivadas de sus preparaciones didácticas, así como interpretar procedimientos usados por los estudiantes en situaciones en las cuales subyace este concepto, procedimientos que pueden estar sustentados, quizás de manera implícita, por propiedades y teoremas matemáticos.

En el apartado 2.2 se aborda un aspecto que estructura la organización didáctica matemática de la multiplicación desde el punto de vista de Vergnaud, relacionado con diversas situaciones en las cuales subyace esta noción. El estudio de este tipo de organización didáctica se precisa aún más en el apartado 2.3, en el cual se presenta, un análisis de tipo cognitivo, que muestra una perspectiva sociocultural del aprendizaje de este concepto y una caracterización de la idea de competencia multiplicativa.

En el apartado (2.4) se intenta precisar teóricamente la noción de criterios de evaluación y las ideas de evaluación/valoración y contrato didáctico, ligados necesariamente a la organización didáctica matemática de la multiplicación abordada, pues ésta determina, por un lado, en gran medida el tipo de actividad matemática que se pone en juego en el aula, lo cual tiene implicaciones en los criterios de evaluación. Finalmente, en el apartado 2.5 se aborda la noción de textualización del saber, íntimamente ligada a la de preparación didáctica.

2.1 Aspectos matemáticos de la multiplicación

Para profundizar en el estudio de la multiplicación, es necesario analizar los aspectos matemáticos en los cuales subyace esta noción. En este sentido se presenta en este apartado un análisis de la multiplicación desde Euclides y Peano para intentar conectarla con las ideas “modernas” desde su perspectiva abstracta, lo que involucra necesariamente el estudio de conceptos asociados como medida, espacios de medida, isomorfismo, transformación lineal, entre otros.

2.1.1 Una mirada de la multiplicación en Euclides y en Peano. Hacia una perspectiva abstracta.

El concepto de multiplicación, para el caso de las magnitudes, se podría situar desde Euclides (300? ac). En su libro V, la definición 5 constituye la piedra angular de la teoría generalizada de la proporción:

> "*Se dice que están en la misma razón unas magnitudes, la primera con respecto a la segunda y la tercera con respecto a la cuarta, cuando si se toman unos equimúltiplos cualesquiera de la primera y la tercera, y unos equimúltiplos cualesquiera de la segunda y la cuarta, los primeros equimúltiplos exceden a la par, o son parejamente iguales, o resultan parejamente deficientes que los últimos equimúltiplos tomados unos y otros en el orden correspondiente".*

Según Camargo et al (2001), esta definición retoma la idea de razón entre medidas geométricas y aclara que $a/b = c/d$ si y sólo si, dados dos números naturales m y n, sucede que:

(i) si $ma \prec nb$ entonces $mc \prec nd$, o (ii) si $ma = nb$ entonces $mc = nd$, o (iii) si $ma \succ nb$ entonces $mc \succ nd$.

Por magnitud Euclides entiende abstracciones o idealizaciones de objetos geométricos que únicamente consideran la cantidad, por ejemplo, la longitud en el caso de las líneas, el área en el caso de la figuras planas, el volumen en el caso de los sólidos. Ahora bien, según la definición 2 de este mismo libro "*la mayor [magnitud] es un múltiplo de la menor cuando es medida por la menor*". En este sentido, son magnitudes susceptibles de multiplicación, esto es, si x es un m-múltiplo de y, x mide m veces y, luego,

$$x = m.y = y + y + y + \ldots + y, \ m \text{ veces},$$

de esta manera la multiplicación $m.y$ de una magnitud y equivale a una adición reiterada m veces.

Por su parte la definición 4 es una de las consideraciones básicas en la teoría; *"Se dice que tienen una razón entre sí las magnitudes que, al ser multiplicadas, una de ellas puede exceder a la otra".* En este sentido, cabe la existencia de los múltiplos de una magnitud dada, esto es: si $x \prec y$, existe una magnitud m tal que $m.x \succ y$. Esta es la condición arquimediana o postulado de continuidad, que incorpora la idea de multiplicación.

Ya en los libros VII y IX, Euclides propone una teoría de la aritmética. Según la definición 3 del libro VII, "*un número es parte de un número, el menor del mayor, cuando mide al mayor"* . En este caso se entiende en el sentido de Euclides que *parte* (o parte alícuota o submúltiplo) significa ser menor y divisor, esto es, x es *parte* de y si $x \prec y$ y x es un factor o divisor de y, siendo y a su vez múltiplo de x. El significado de *partes* es distinto al de *parte* ya mencionado; de esta manera, un número no es parte de otro sino *partes* cuando no lo mide, por ejemplo, 2 es *parte* del número 6 y 4 es *partes* del número 6, es decir, x es *partes* de y si y sólo si $x \prec y$, sin que x sea un factor o divisor exacto de y.

En su definición 15 del libro VII, se plantea una interpretación para la multiplicación de números,

> "*Se dice que un número multiplica a un número cuando el multiplicado es añadido a sí mismo tantas veces cuantas unidades hay en el otro, y así se produce algún número"*.

Esta definición es una versión clásica de la multiplicación como abreviatura de un proceso reiterativo de adición. Ya en la definición 20 establece, *"los números son proporcionales cuando el primero es el múltiplo, o la misma parte, o las mismas partes, del segundo que el tercero del cuarto".* Euclides no define la noción aritmética de razón y su idea de proporción numérica envuelve de hecho aquellos supuestos de la teoría generalizada de la proporción (Vega, 1991).

Ahora bien, en el lenguaje moderno de la teoría de conjuntos, la multiplicación axb se puede presentar de la siguiente manera:

1) Escoger un conjunto A cuyo cardinal sea a.
2) Realizar la unión del conjunto A consigo mismo tantas veces como indique el cardinal b.
3) Hallar el cardinal c del conjunto unión de todos los anteriores.

Existe otra interpretación de la multiplicación, como *la realización de un producto cartesiano.* En este caso al tener $axb = c$, se procede de la siguiente manera:

1) Escoger un conjunto A cuyo cardinal sea a.
2) Escoger un conjunto B cuyo cardinal sea b.
3) Formar el producto cartesiano AxB.
4) El cardinal de AxB es el resultado deseado, c.

Con el objeto de explicitar sus diferencias, a continuación se presenta un paralelo entre estas dos interpretaciones.

Multiplicación como suma reiterada	**Multiplicación como producto cartesiano**
Responde a una concepción unitaria de la operación puesto que los papeles de a y b son distintos.	Responde a una concepción binaria de la operación.
Los cardinales a y b corresponden a conjuntos de distinto rango en abstracción: el número a es el cardinal de un conjunto de elementos, mientras que b es el cardinal de un conjunto de conjuntos. El primero indica el número de elementos que se consideran en el conjunto A, en cambio, el segundo señala el número de veces que el conjunto A se repite.	Los conjuntos A y B tienen el mismo nivel de abstracción, esto es, refieren a conjuntos de elementos concretos.
El cardinal c refiere exclusivamente al conjunto total de elementos que se pueden contar al final.	El resultado c es el cardinal de un conjunto cuyos elementos son combinaciones de elementos de A y B

La multiplicación como producto cartesiano, como se señala en la tabla, responde a una concepción de operación binaria, y esta es generalmente la idea de multiplicación desde la teoría matemática, por lo que algunos autores prefieren hablar también de ley de composición interna o clausurativa. En otras palabras, dados dos elementos del conjunto de los números naturales, o de los enteros, o de los racionales, etc, el producto es un elemento del mismo conjunto (naturales, enteros o racionales). En términos simbólicos, si $c \in$ M y $b \in$ M entonces $ab \in$ M. En particular, si M = $\aleph$ donde $\aleph$ es el conjunto de los números naturales, entonces la multiplicación $\bullet$, en tanto operación binaria, es una función de $\aleph \times \aleph$ en $\aleph$, que envía (a,b) en $a \bullet b$, esto es:

$$\bullet : \aleph \times \aleph \rightarrow \quad \aleph$$

$$(a,b) \rightarrow a \bullet b$$

Entonces en el conjunto de los números naturales, la multiplicación además de interpretarse como operación binaria, es también interpretada como una suma iterada en la teoría de la aritmética de Euclides ya mencionada, en la cual aparece el término *veces*.

De alguna manera Peano retoma la idea euclidiana de multiplicación en los números naturales, y de esta forma hace los siguientes dos planteamientos:

1. A cada par de números x, y corresponde exactamente un número natural llamado $x \bullet y$, que se lee "veces", (sin embargo, el símbolo $\bullet$ habitualmente se omite), tal que

   i) $x+1=x^{+}$, $\forall x$
   ii) $x \bullet y^{+} = x \bullet y + x, \forall x, y$

$x \bullet y$ es llamado el producto de x y y, o el número obtenido de la multiplicación de x y y.

2. La multiplicación de números naturales también admite una definición por recurrencia, de la siguiente manera:
   i) $n \bullet 0 = 0$
   ii) $nk^{+} = nk + n$, para cualesquier números naturales n y k.

Cabe señalar que esta operación satisface las propiedades conmutativa, asociativa, modulativa y distributiva con respecto a la adición.

La siguiente cita de Bourbaki sirve de acicate para intentar dimensionar la complejidad de la multiplicación, pues al menos desborda el universo numérico de los naturales en los que se apoya Peano en su definiciones anteriores,

> "En los orígenes de las matemáticas se encuentran problemas que se resuelven por medio de una única multiplicación (o división), es decir, mediante el cálculo de una función *f(x) = ax*, o mediante la resolución de una ecuación *ax = b*; estos son problemas típicos del álgebra lineal, y no pueden tratarse, ni siquiera plantearse, correctamente, sin "pensar linealmente". (Bourbaki, 1976, p.85).

Para intentar explicitar y analizar las relaciones que se establecen entre la multiplicación y el álgebra lineal, es necesario abordar el estudio de las transformaciones lineales y las formas bilineales.

En el marco de la teoría de espacios vectoriales, el estudio de las transformaciones lineales como funciones que operan entre dos espacios vectoriales, se puede plantear de acuerdo con Lang (1976) como sigue:

Si V y V^l son espacios vectoriales sobre un campo K, entonces una aplicación lineal

$$F : V \rightarrow V^l$$

es una función que satisface las siguientes dos propiedades

- Para cualesquiera elementos u y v en V, se tiene

$$F(u+v) = F(u) + F(v)$$

- $\forall c \in K$ y $\forall v \in V$, se tiene

$$F(cv) = cF(v)$$

Es importante destacar que el producto en el espacio vectorial V no necesariamente es el mismo que en V^l, por lo que, en relación con la segunda propiedad de la transformación lineal, la operación efectuada en cv no es necesariamente la misma en la expresión $cF(v)$.

La multiplicación, en estos casos es una generalización (abstracción) y por lo tanto el producto usual, por ejemplo de escalares y vectores de $\boldsymbol{R}^2$, (donde ***R*** es el conjunto de los números reales), esto es,

$$\alpha(x,y) = (\alpha x, \alpha y),$$

es un caso particular de esta generalización. Sin embargo, en una estructura de espacio vectorial V en la cual sus objetos son n-uplas positivas (n-uplas en las que todas sus componentes son positivas) y los escalares números reales, la multiplicación puede definirse de la siguiente manera:

$$\alpha(x_1, x_2, ..., x_n) = \left(x_1^{\alpha}, x_2^{\alpha}, ..., x_n^{\alpha}\right),\ \alpha \in \boldsymbol{R}$$

Claramente esta operación se constituye en una ley de composición clausurativa, pues $x_i^{\alpha} > 0$, para todo i= 1,2,3, ... ,n; además satisface todas las propiedades para el producto de escalar por vector descritas anteriormente.

En una estructura de campo $(F, +, \bullet)$ la multiplicación $\bullet$ (el signo $\bullet$ por lo general se omite) es una operación binaria y satisface el siguiente conjunto de axiomas:

i) $xy = yx, \forall x, y \in F$.

ii) $x(yz) = (xy)z, \forall x, y, z \in F$.

iii) F contiene $1 \neq 0$, tal que $1x = x, \forall x \in F$.

iv) Si $x \in F, x \neq 0$, entonces existe $1/x \in F$, tal que $x(1/x) = 1$.

v) $x(y+z) = xy + xz, \forall x, y, z \in F$.

Ahora bien, si K es un campo y V y W son espacios vectoriales sobre K, entonces una aplicación

$g : VxW \to K$, se llama *bilineal* si satisface las siguientes propiedades:

- $\forall v_1, v_2 \in V, w \in W$, se tiene

$$g(v_1 + v_2, w) = g(v_1, w) + g(v_2, w)$$

- $\forall v \in V, w_1, w_2 \in W$, se tiene

$$g(v, w_1 + w_2) = g(v, w_1) + g(v, w_2)$$

- $\forall c \in K, v \in V, w \in W$, se tiene

$$g(cv, w) = cg(v, w) = g(v, cw)$$

Si los espacios V y W son iguales de tal manera que g aplique a VxV en K, entonces se dice que g es una *forma bilineal* sobre V.

Estas proposiciones junto con los axiomas y propiedades regulan el significado de la multiplicación y legitiman un trabajo matemático asociado con este concepto, en otros términos, los procedimientos y razonamientos tanto aritméticos como algebraicos, que involucre la multiplicación están gobernadas por los axiomas y proposiciones anteriores. Se quiere reiterar aquí, por un lado que la multiplicación no tiene sentido por si misma, debe cumplir una serie de propiedades, y por otro lado, que se haría muy difícil comprender los razonamientos y procedimientos que emprenden los estudiantes cuando abordan problemas relativos a la multiplicación, que pueden estar sustentados, implícitamente, por teoremas matemáticos (Vergnaud, 2000), si no se tiene cierta claridad conceptual del fundamento matemático que comporta el concepto multiplicación. Este fundamento, según Vergnaud, está relacionado con los espacios de medida y la idea de isomorfismo.

Vergnaud en sus diversos trabajos pone de presenta la idea de espacios de medida cuando introduce los problemas de tipo multiplicativo. En este sentido es pertinente hacer una aproximación teórica frente a los conceptos de medida, espacios de medida y espacios medibles. De esta manera se pone de manifiesto la complejidad conceptual de la multiplicación, en tanto que esta noción no puede existir de manera aislada, su estudio involucra varios conceptos a la vez. Para construir las ideas de espacios de medida e isomorfismo de medidas es necesario introducir la idea de sigma álgebra.

Una colección M de subconjuntos de un conjunto X se dice que es una *σ-álgebra* en X si M verifica:

(i) $X \in M$
(ii) Si $A \in M$, entonces $A^C \in M$, donde A^C es el complemento de A respecto a X.
(iii) Si $A = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$ y si $A_n \in M$, para *n = 1,2,3 ,...,* entonces $A \in M$.

Ahora bien, si M es una *σ-álgebra* en X, entonces se dice que X es un *espacio medible* y a los elementos de M se les llama *conjuntos medibles.*

Por otra parte, se llama *medida* (positiva) a una función μ, definida en una *σ-álgebra* M con valores en $[0,\infty]$, esto es,

$$\mu : M \to [0,\infty],$$

y que es numerablemente aditiva. En otras palabras, si $\{A_i\}$ es una colección *numerable disjunta* de elementos de M, entonces

$$\mu\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} \mu(A_i)$$

Se llama *Espacio de Medida* a un espacio medible en el que hay definida una medida positiva sobre la *σ-álgebra* de sus conjuntos medibles.

Si μ es una medida (positiva) en una *σ-álgebra* M, entonces se cumplen las siguientes propiedades:

- $\mu(\phi) = 0$.
- $\mu\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) = \sum_{i=1}^{n} \mu(A_i)$, si $A_1, A_2, ..., A_n$ son elementos de M disjuntos dos a dos.
- $A \subset B \Rightarrow \mu(A) \leq \mu(B)$, si $A, B \in M$

En este caso, se tiene por hipótesis que $A \subset B$, lo que permite afirmar que $A \bigcap (B - A) = \phi$ y
$A \bigcup (B - A) = A \bigcup B = B$.
$\Rightarrow \mu(B) = \mu(A) + \mu(B - A) \Rightarrow 0 \leq \mu(B - A) = \mu(B) - \mu(A) \Rightarrow \mu(A) \leq \mu(B)$.

- Si $A \subseteq \bigcup_{i=1}^{n} A_i$ entonces $\mu(A) \leq \sum_{i=1}^{n} \mu(A_i)$, es decir que los conjuntos no necesariamente son disjuntos.
- Si $A_i \subseteq A$ para i = 1,2,...,n, entonces $\mu(A) \geq \sum_{i=1}^{n} \mu(A_i)$.
- Si $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i \subseteq A$ entonces $\mu(A) \geq \sum_{i=1}^{n} \mu(A_i)$, en donde la unión en este caso es disjunta.

Frecuentemente se piensa en los *espacios de medida* como ternas ordenadas

$$(X, M, \mu),$$

donde X es un conjunto, M es una *σ-álgebra* en X y μ es una medida (positiva) definida en M.

A manera de ejemplo, si $X = \{1,2,3,4,5\}$ y M es el conjunto de subconjuntos de X, o el conjunto de partes de X, esto es, $M = \wp(X)$, entonces M es una *σ-álgebra* en X. Ahora bien, si se define $\mu(A) = c(A)$, $\forall A \in M$, donde $c(A)$ es el número de elementos del conjunto A, entonces μ es una medida (positiva) la cual es numerablemente aditiva.

Magnitudes y magnitudes medibles

García et al (2002) plantean que un conjunto M totalmente ordenado es una *magnitud*, y que un conjunto M es una *magnitud medible* si está provisto de:

- Una ley de composición interna llamada adición y denotada por +, la cual es conmutativa, asociativa, y admite un elemento neutro (cantidad nula).
- De esta operación se puede obtener una relación de orden total en M estableciendo $A \leq B$ si existe una cantidad $C \in$ M tal que $B = A + C$.
- La ley cancelativa: para cualquier relación $A + X = B + X$ implica $A = B$.
- La propiedad arquimediana: para todo par de cantidades A y B donde A es diferente de la cantidad nula, existe un entero positivo z tal que
$B \prec zA$.

En estas condiciones, M está dotado de una estructura algebraica de semigrupo abeliano totalmente ordenado, cuyos elementos satisfacen la ley cancelativa y la propiedad arquimediana (semigrupo abeliano arquimediano).

Fiol y Fortuny (1990) introducen otra propiedad, llamada divisibilidad, la cual consiste en que para todo *a* en M y *n* número natural existe un *b*, $b \in$ M, tal que
$a = nb$, donde $nb = b + b + b + ... + b$, con n sumandos.

En este trabajo se acogen los planteamientos de García et al y Fiol y Fortuny, para quienes los elementos de M se llaman *cantidades*. Ahora bien, siguiendo a Fiol y Fortuny, se elige en M un elemento *e* que se llama *unidad* . Cada *a* en M permite dividir a Q^+ (conjunto de los números racionales positivos), de acuerdo con su orden, en dos partes:

$$C_1 = \{q \in Q^+ / qe \leq a\}$$
$$C_2 = \{q \in Q^+ / qe \succ a\}$$

Estos dos conjuntos determinan lo que se llama una cortadura en Q^+. Esta cortadura determina un número real $r \in \mathbf{R}$, de la siguiente manera:

r = Sup C_1 , es decir, r es la cota superior mínima de C_1. Por definición r representa la *medida* de *a* con respecto a *e*, en otras palabras, el número r puede tomarse como una representación de la cantidad *a*. Esto se puede simbolizar de las siguientes formas:

$m_e(a) = r$; $a = r.e$; $r = a/e$ (razón entre cantidades). Ahora bien, si r es un número racional se dice que las cantidades *a* y *e* son conmensurables, es decir, con medida común. En caso contrario, si r es un número irracional se dice que *a* y *e* son inconmensurables.

Fiol y Fortuny plantean otro axioma para que se tenga un isomorfismo, y es el axioma de continuidad. Esto significa que si las cantidades conmensurables con una unidad *e* de una magnitud se clasifican en dos clases no vacías de modo que toda cantidad de la primera sea menor que toda cantidad de la segunda, hay una cantidad que separa a ambas, es decir, mayor o igual que cualesquiera de aquéllas y menor o igual que todas éstas, según pertenezcan a una u otra clase. En este caso, señalan los autores, la magnitud M es continua y en consecuencia $M = \mathbf{R}^+ . e$. En el caso de las magnitudes continuas, la medida establece un isomorfismo entre M y $\mathbf{R}^+$.

En realidad, lo que supone la medida es una función entre un conjunto M (magnitud medible) y un subconjunto A de números reales positivos con su suma y el orden natural definido en los conjuntos numéricos,

$$m_u : M \rightarrow A$$

Desde estos presupuestos teóricos, es posible afirmar que dos *magnitudes son proporcionales* si se puede establecer un isomorfismo entre sus cantidades $f : M \to N$, tal que

1. Si $a \prec b$ implica $f(a) \prec f(b)$, la relación de orden es monótona.
2. $f(a+b) = f(a) + f(b)$, esto es, se conserva el orden y la suma.
3. Si la magnitud es continua, entonces, si $a = re$, $f(a) = f(re) = rf(e)$. De esta manera, las medidas de cantidades correspondientes, $a, f(a)$ con unidades correspondientes, $e, f(e)$ son iguales.

Ahora bien, sean M y N son dos magnitudes proporcionales continuas y sea *f* la correspondencia entre sendas cantidades *e* y *u* dos unidades respectivas de M y N.

$$\begin{aligned} f\colon M &\longrightarrow N \\ e &\longrightarrow u \end{aligned}$$

Luego es posible escribir *f(e) = k.u.* Fiol y Fortuny plantean que *k* es lo que se llama la constante de proporcionalidad respecto de las unidades *e* y *u.*

Por su parte Vergnaud (2000) relaciona la idea teórica de medida para el caso de la suma de dos números y establece dos métodos, a saber:

(1) Reunión de dos conjuntos: $A \cup_a B$, donde $\cup_a$ representa la unión ajena.
(2) Conteo de ese nuevo conjunto: $m(A \cup_a B)$.

El segundo método puede simbolizarse del modo siguiente:

(1) Conteo de A y de B: $m(A), m(B)$
(2) Suma de los dos números: $m(A) + m(B)$
Desde luego la equivalencia de los dos procedimientos, según Vergnaud, se escribe:

$$m(A \cup_a B) = m(A) + m(B).$$

Si $A = B = \phi$ entonces $m(A \cup_a B)$ = $m(\phi)$ = $m(A) + m(B)$
= $m(\phi) + m(\phi) =$ 0 + 0, es decir, $m(\phi) = 0$.

De manera general, el mismo Vergnaud plantea que si los objetos A y B cualesquiera son mensurables o medibles, y si designa por $\oplus$ la operación de composición de los objetos entre sí, entonces

$$m(A \oplus B) = m(A) + m(B)$$

En síntesis, es posible afirmar que dos propiedades importantes de las medidas son: la de ser *ordenables* y la de poder ser *sumadas.* Es claro que los conjuntos que utiliza Vergnaud en sus problemas multiplicativos constituyen espacios de medida cuyos elementos satisfacen estas dos propiedades, aspecto que se mostrará en el apartado 2.3.

2.2 Una aproximación a la fenomenología didáctica de la multiplicación.

La fenomenología didáctica postula (Soto, 2001) que el aprendizaje de las matemáticas requiere la exploración de fenómenos o situaciones. En este trabajo, el término fenómeno se entiende en el sentido de Freudenthal (citado por Puig, 2000), luego las construcciones elaboradas desde las matemáticas constituyen fenómenos. Las situaciones citadas constituyen una parte estructurante en la organización didáctica matemática por campos conceptuales[1]. Este planteamiento hace pensar, por una parte, que el concepto multiplicación es complejo, y por tanto su aprendizaje supone un desarrollo de competencias en el tiempo, cada vez más complejas, lo que a su vez supone una actividad matemática más globalizada; y por otro lado, hace patente la idea según la cual no es suficiente una sola situación para dotar de sentido a un concepto[2], más bien se necesitan varias de ellas. Por tanto, se pone de relieve la importancia de describir distintos fenómenos o situaciones en los cuales

[1] La organización de los contenidos por campos conceptuales se precisará en el apartado 2.3; sin embargo, las situaciones (constructo estructurante de esta teoría) se abordarán en este apartado bajo el estudio fenomenológico, sólo para propósitos analíticos, pues no se puede interpretar como escindido de los demás constructos que conforman los campos conceptuales.

[2] Vergnaud (1990) señala que el sentido es una relación del sujeto con las situaciones y con los significantes, en otras palabras, son los esquemas evocados por una situación o por un significante en el sujeto individual, los que constituyen el sentido de esta situación o de ese significante para ese individuo. Por ejemplo, el sentido de la multiplicación para un sujeto individual es el conjunto de esquemas que él puede poner en marcha para tratar situaciones a las que enfrenta, y que implica la idea de multiplicación.

subyace la multiplicación, fenómenos que muestran distintas facetas de esta noción.

Los fenómenos o situaciones que van a ser organizados por los conceptos matemáticos son fenómenos del mundo real, físico, cotidiano. En particular, los fenómenos que organizan la multiplicación (y la división) constituyen los *fenómenos de ese mundo que contiene los productos de la cognición humana y en particular los productos de la propia actividad matemática, relacionada con las propiedades de estos dos conceptos, las acciones que se realizan sobre ellos y las propiedades de esas acciones*. Es claro, pues, que desde el trabajo de Freudenthal (citado por Puig, 2000) se entienda que los propios fenómenos del mundo de las matemáticas (productos de la cognición humana) contribuyen a robustecer este tipo de fenomenología. Los productos de la cognición humana se interpretan en este trabajo como los aspectos estudiados en el apartado 2.1, (aspectos matemáticos de la multiplicación). Además, esta fenomenología se amplía al analizar el significado de la multiplicación (y necesariamente el de la división) en situaciones modeladas por estas dos operaciones.

Identificar los fenómenos que permiten exhibir variadas facetas de la multiplicación y la división, o diversos fenómenos que son organizados por estos dos conceptos, significa en palabras de Greer (1992), fenómenos que son modelados por la multiplicación (y la división). De esta manera, el significado de estas operaciones se ve afectado por la experiencia de nuevos fenómenos y tipo de números. Así, los números naturales, fraccionarios y decimales están presentes en situaciones que involucran la multiplicación y la división: grupos iguales, multiplicación comparativa, producto cartesiano, área rectangular, entre otras.

En este sentido, se reconoce que si bien la multiplicación pertenece al dominio de la experiencia del niño en situaciones de compra, en contextos aritméticos, este dominio se complejiza cuando el contexto, además de abordar distintos tipos de números, incorpora otros dominios como la geometría, medición, química, física, entre otros.

A continuación, en la siguiente tabla se presentan distintas situaciones que son modeladas por la multiplicación y la división y posteriormente se hacen explicaciones en relación con algunas categorías de problemas.

Clase	Problema de multiplicación	División (por el multiplicador)	División (por el multiplicando)
Grupos iguales	3 niños tienen 4 naranjas cada uno, ¿cuántas naranjas tienen entre todos?	Tres niños se reparten 12 naranjas en igual cantidad, ¿cuántas le corresponde a cada uno?	Si usted tiene 12 naranjas, ¿a cuántos niños pueden dársele de a 4 de esas naranjas?
Medidas iguales	3 niños tienen 4.2 litros de jugo de naranja cada uno, ¿cuánto jugo de naranja tienen entre todos?	Se reparten 12.6 litros de jugo de naranja en cantidades iguales entre 3 niños, ¿cuánto jugo se le debe dar a cada uno?	Si usted tiene 12.6 litros de jugo de naranja, ¿a cuántos niños pueden dársele de a 4.2 litros de ese jugo?
Proporción	Un bote se mueve con rapidez de 4.2 metros por segundo, ¿cuánto se mueve en 3.3 segundos?	Un bote se mueve 13.9 metros en 3.3 segundos, ¿cuál es el promedio de rapidez en metros por segundo?	¿Cuánto tarda un bote en moverse 13.9 metros si tiene una rapidez de 4.2 metros por segundo?
Conversión de unidades	Una pulgada es 2.54 centímetros más o menos, ¿cerca de cuánto de largo en centímetros son 3.1 pulgadas?	3.1 pulgadas son más o menos 7.84 centímetros, ¿cuántos centímetros hay en una pulgada?	Una pulgada tiene más o menos 2.54 centímetros, ¿cuántas pulgadas hay en 7.84 centímetros?
Comparación multiplicativa	El peso del acero es 0.88 veces el peso del cobre. Si una pieza de cobre pesa 4.2 kg, ¿cuánto pesa una pieza de acero del mismo tamaño?	El peso del acero es 0.88 veces el peso del cobre. Si una pieza de acero pesa 3.7 kg, ¿cuánto pesa una pieza de cobre del mismo tamaño?	Si dos piezas de igual tamaño, una de acero y otra de cobre pesan respectivamente 3.7 kg y 4.2 kg, ¿cuánto peas el acero en relación al cobre?
Parte/todo	En una universidad pasó la cima 3/5 de sus estudiantes en un examen. Si 80 estudiantes hicieron el examen, ¿cuántos pasaron?	En una universidad pasó la cima 3/5 de sus estudiantes en un examen. Si 48 estudiantes pasaron el examen, ¿cuántos lo presentaron?	En una universidad pasaron la cima 48 de 80 estudiantes en un examen, ¿qué fracción de estudiantes pasó el examen?
Cambio multiplicativo	Se puede estirar una pieza elástica hasta 3.3 veces su longitud original, ¿cuál es la longitud de una pieza	Se puede estirar una pieza elástica hasta 3.3 veces su longitud original, ¿cuál es la longitud original de	Una pieza elástica de 4.2 metros de largo puede alargarse hasta 13.9 metros, ¿cuál es el factor de alargue?

	cuando a ésta se le alarga totalmente, si originalmente mide 4.2 metros?	una pieza que alargada totalmente mide 13.9 metros?	
Producto cartesiano	Si hay 3 rutas de A a B, y 4 rutas de B a C, ¿cuántas rutas diferentes hay de A a C pasando por B?	División Si hay 12 rutas diferentes de A hasta C vía B, y hay 3 rutas de A a B, ¿cuántas rutas hay de B a C?	
Área rectangular	¿Cuál es el área de un rectángulo de 3.3 metros de largo y 4.2 metros de ancho?	Si el área de un rectángulo es 13.9 m^2 y la longitud es de 3.3 m, ¿cuál es el ancho?	
Producto de medidas	Si un calentador usa 3.3 kilovatios de electricidad durante 4.2 horas, ¿cuántos kilovatios-hora es esto?	Un calentador usa 3.3 kilovatios por hora, ¿durante cuánto tiempo se puede usar un calentador con 13.9 kilovatios-hora de electricidad?	

En las siguientes líneas se explican algunas categorías de problemas de esta tabla.

Grupos iguales. A esta clase corresponden los problemas multiplicativos en los cuales aparecen dos expresiones, una relativa a cada uno (referida a cada grupo) y la otra expresión que refiere el número de grupos. Esta clase da lugar a dos tipos de problemas de división: la partitiva (en la que se busca el tamaño del grupo) y la cuotitiva (en la que se busca el número de grupos).

Comparación multiplicativa. Corresponden a aquellos problemas en los que está presente la expresión: "tantas veces como", y en ella se involucra un factor multiplicativo y un multiplicador, es decir, un número que indica cuántas veces se repite el factor multiplicativo.

Producto cartesiano. Involucra todos los problemas en los que la combinatoria es el modelo de interpretación del problema. Debido a que en esta clase los números que aparecen en el problemas son elementos de una pareja ordenada, y en tal sentido el papel de los números es equivalente, entonces no es distinguible el multiplicador del multiplicando, en consecuencia se puede encontrar sólo un problema de división. Esta clase de situaciones, anota Greer, corresponde a la definición formal de *mxn* en términos del número de parejas que se pueden formar cuando el primero de los miembros de la pareja pertenece a un conjunto de *m* elementos y el segundo miembro pertenece a un conjunto de *n* elementos.

Área rectangular. Se encuentran en esta categoría los problemas relacionados con hallar áreas, o hallar las longitudes de los lados de un rectángulo. Tal y como se presenta en la tabla, los problemas relativos al área rectangular pueden generalizarse a rectángulos cuyos lados tienen medidas fraccionarias. Este contexto es una forma tradicional de hacer intuitivamente aceptable la definición de la multiplicación de fracciones. Greer señala que la extensión hacia cantidades derivadas mediante mediciones incrementa la complejidad de las situaciones modeladas.

Esta clasificación no es exhaustiva (Greer, 1992) y la extensión de los conceptos de multiplicación y división se puede continuar indefinidamente hasta abordar números dirigidos, números complejos, matrices, funciones, y mucho más, además porque no se desconocen quizás construcciones relacionadas con la multiplicación, desde la investigación actual en matemáticas, que en este trabajo no se reportan. En consecuencia, esto permite vislumbrar la complejidad de eso que comúnmente se llama multiplicación. Es importante reiterar aquí también que estas *situaciones* son una parte de la estructura del concepto de multiplicación como terna de tres conjuntos: situaciones, invariantes (significado) y representaciones (Vergnaud, 1997), el cual se abordará en el siguiente apartado.

2.3 Organización didáctica matemática (ODM) de la multiplicación

Diversos investigadores en Educación Matemática como Vergnaud (1990, 1997, 2000), Chevallard, et al (1997), Espinoza (1998), Greeno (1991), proponen el estudio de distintos tipos de organizaciones matemáticas. Vergnaud propone la organización por campos conceptuales, Chevallard y sus colaboradores, y Espinoza conceptualizan sobre las organizaciones matemáticas desde una perspectiva antropológica de lo didáctico, Greeno por su parte aborda el trabajo a partir de dominios conceptuales.

En este trabajo se considerará la noción de ODM desde el punto de vista de Vergnaud. Es importante anotar que la expresión introducida en este trabajo "*organización de los contenidos relativos a la multiplicación*" se interpreta en el sentido de Vergnaud de Campo Conceptual Multiplicativo, el cual constituye un ejemplo de campos conceptuales.

La noción de campo conceptual es propuesta por Vergnaud (1990, 1997) para conectar conceptos matemáticos, competencias, símbolos y situaciones en el desarrollo a largo plazo del conocimiento matemático. El autor sostiene que la teoría de los campos conceptuales necesita un marco teórico que aporte una fuerte articulación entre los problemas que hay que resolver y el conocimiento, y también entre esquemas, conceptos y símbolos. En tal sentido el autor postula que es necesario:

- Analizar y clasificar la variedad de situaciones en cada campo conceptual.
- Describir con precisión la variedad de comportamientos, procedimientos y razonamientos que los estudiantes ponen de manifiesto al abordar cada clase de situaciones.
- Analizar las competencias matemáticas como esquemas organizados e identificar claramente las propiedades invariantes de las situaciones sobre las que se apoyan las propiedades invariantes de los esquemas (conceptos en acto y teoremas en acto).
- Analizar cómo el lenguaje y otras actividades simbólicas intervienen en tales esquemas, cómo ayudan a los estudiantes y también cómo los profesores usan tales intermediarios simbólicos.
- Trazar la transformación de los invariantes implícitos, en tanto que maneras de comprender y actuar, en objetos matemáticos bien identificados, los cuales irán haciéndose tan reales como la realidad física.
- Trazar el camino que siguen los estudiantes para llegar a ser conscientes de que los procedimientos tienen una relación de necesidad tanto con las metas que se han de alcanzar como con las condiciones iniciales, y por consiguiente, de que los teoremas pueden ser demostrados.

El mismo investigador señala que esto es un programa de investigación. La teoría de los campos conceptuales es una teoría compleja y dicha complejidad, según Vergnaud (1994), es inevitable porque se necesita incluir en una sola mirada teórica el desarrollo completo de las situaciones modeladas progresivamente, de los conceptos y teoremas requeridos para operar eficientemente en tales situaciones, y de las palabras y símbolos que pueden representar efectivamente estos conceptos y operaciones para los estudiantes, dependiendo de sus niveles cognitivos.

Esta teoría posibilita a los docentes, por supuesto mediante un proceso disciplinado y sistemático de indagación (proceso de investigación), organizar el proceso de aprendizaje de estructuras conceptuales, de tal manera que el desarrollo de las competencias de los estudiantes sea cada vez más complejo. Una organización matemática escolar por campos conceptuales, entonces, integra amplias colecciones de situaciones cuyo análisis y tratamiento requiere varios tipos de conceptos, procedimientos y representaciones simbólicas que están conectados unos con otros.

En particular, una organización en torno a la multiplicación comporta una masa variada de situaciones, de conceptos y procedimientos multiplicativos, cada situación no puede ser usualmente analizada con la ayuda de un solo concepto, se requiere más bien varios de ellos, lo que hace patente una vez más la tesis según la cual las ideas matemáticas crecen y cambian a lo largo del periodo de desarrollo cognitivo, a través de una amplia variedad de actividades y situaciones, de manera que el conocimiento formal puede ser sólo el último estado en el desarrollo del conocimiento de un estudiante.

Esta es la razón, señala Vergnaud (1997), que se tiene para estudiar el aprendizaje y la enseñanza de campos conceptuales. Por lo tanto para estudiar y comprender cómo los conceptos matemáticos se desarrollan en la mente de los niños y niñas a través de sus experiencias en la escuela y fuera de ella, este autor plantea que es necesario considerar un concepto C como una terna de tres conjuntos:

$$C = (S, I, R)$$

S: *el conjunto de situaciones que dan sentido al concepto.*

I: *el conjunto de las invariantes operacionales que pueden ser usadas por los sujetos para significar dichas situaciones.*

R: *el conjunto de representaciones simbólicas, lingüísticas, gráficas o gestuales que pueden ser usadas para representar invariantes, situaciones y procedimientos.*

En términos psicológicos, S es la realidad y la pareja (I,R) es una representación. La representación puede estar considerada por dos aspectos interesantes del pensamiento, el significado (I) y el significante (R).

A partir de esta definición de concepto introducida por Vergnaud se vislumbra una complejidad para los conceptos inmersos en el CCM, en particular para el de multiplicación, hecho que toma mayor fuerza si se comparte la tesis según la cual los *conceptos se forman a lo largo de un gran periodo de tiempo. Una sola situación no basta para instalar un concepto, son necesarias varias situaciones para que un concepto funcione en sus diversos aspectos y para que aparezca la multitud de relaciones que tiene con otros conceptos.*

La organización por campos conceptuales comporta, como ya se dijo, el conjunto de representaciones simbólicas, lingüísticas, gráficas,..., por lo tanto es necesario estudiar este aspecto.

2.3.1 Perspectiva sociocultural del aprendizaje de la multiplicación y la noción de competencia.

Una aproximación sociocultural del aprendizaje de la multiplicación considera que los procesos mentales humanos poseen una relación esencial con los escenarios culturales, históricos e institucionales. Ello posibilita identificar las nociones y los teoremas matemáticos asociados con la multiplicación como parte de un cuerpo dinámico de conocimientos reconocidos socialmente.

Desde la teoría de los campos conceptuales de Vergnaud (1994) se reconoce una posición sociocultural del aprendizaje, pues desde esta perspectiva se señala:

> "No sólo es importante que las situaciones sean clara y exhaustivamente clasificadas desde el punto de vista de la estructura conceptual, sino que también los invariantes (conceptos y teoremas) sean verbalizados, simbolizados, diagramados o graficados, y así éstos vienen a ser elementos de explicitación racional de las concepciones y no sólo elementos remanentes o sólo esquemas implícitos. Es probablemente una condición necesaria para la transferencia de conceptos y teoremas a cualquier clase de valores numéricos y cualquier dominio de experiencia."

Esta es la razón por la que la teoría de los campos conceptuales considera importante el lenguaje y los símbolos, pues la explicación y la simbolización se constituyen en una ruta importante a través de la cual se posibilita una ganancia en complejidad cognitiva. En este sentido y siguiendo a Vergnaud (2001), *escribir con palabras, así como mediante símbolos, tiene entonces una función importante: de clarificación, de generalización de análisis de las condiciones y de los límites de validez del razonamiento, así como del laconismo de las formulaciones y de las fórmulas.* Los signos, pues, una vez más desempeñan un mecanismo de mediación, por lo que el lenguaje como medio de interacción social (práctica social) cobra vital importancia.

Por lo tanto el aprendizaje de la multiplicación se concibe como el proceso por el cual el sujeto se convierte en un miembro de una cierta comunidad (el aula de clase de matemáticas). Esto impone en el sujeto la habilidad para comunicarse en el lenguaje de la comunidad y actuar de acuerdo a sus normas particulares, en este sentido las normas se negocian en el proceso de consolidación de la comunidad. Por lo que el proceso de aprendizaje se asume como el resultado de las interacciones colaborativas que ocurren en el contexto y en la negociación de las normas que regulan el discurso.

En esta misma dirección se comparte con Godino y Batanero (1994) que los objetos matemáticos, en particular el de multiplicación, *deben ser considerados como símbolos de unidades culturales, emergentes de un sistema de usos ligados a las actividades de resolución de problemas que realizan ciertos grupos de personas y que van evolucionando con el tiempo*. De este planteamiento se desprende que el significado del concepto multiplicación está íntimamente ligado a los problemas y a la actividad realizada para su resolución, en consecuencia, es imposible reducir dicho significado a su mera definición matemática. Godino y Llinares (en prensa) sostienen que las dimensiones culturales y sociales no son condiciones periféricas del aprendizaje matemático sino parte intrínseca del mismo, en otros términos, los procesos culturales y sociales son parte integrante de la actividad matemática.

Bauersfeld (citado por Godino y Llinares, en prensa) postula que la interacción sociocultural puede esquematizarse en:

- *el profesor y los estudiantes constituyen interactivamente la cultura del aula.*

- *las convenciones y convenios tanto en lo relativo al contenido de la disciplina, como en las regularidades sociales, emergen interactivamente.*
- *el proceso de comunicación se apoya en la negociación y los significados compartidos.*

Es posible afirmar, en consecuencia, que el significado del concepto multiplicación deriva del contexto en que está implicado, entendiendo por contexto en el sentido de Godino y Batanero (1998), *como el conjunto de factores del mundo extra e intralinguístico que soportan y determinan la actividad matemática, y por tanto, la forma, la adecuación y el significado de los objetos puestos en juego en la misma*. En otras palabras, y siguiendo a estos autores, el contexto se puede describir como el marco o escenario en que se desarrolla la actividad matemática, y que viene caracterizado por:

- *sus elementos interpretativos (convenciones, reglas) e instrumentales (recursos tecnológicos);*
- *su organización interna, esto es, la naturaleza sistémica de las relaciones entre sus elementos;*
- *su asociación a sistemas expresivos que requieren traducciones mutuas.*

A partir de lo anteriormente expuesto, puede afirmarse que el aprendizaje de la multiplicación no se concibe, en este trabajo, como el compromiso de la mente individual que intenta adaptarse a un entorno; por el contrario, lo que se quiere establecer aquí es que la construcción individual del significado de la multiplicación tiene lugar en interacción con la cultura de la clase, y al mismo tiempo contribuye a la constitución de esta cultura. En dicha interacción es necesario, por supuesto, el lenguaje, pero no escindido del pensamiento, esto es, el habla es una práctica social, que sirve en la comunicación para señalar experiencias compartidas y para la orientación en la misma cultura de la clase, más que un medio de transmisión cultural en el sentido de Vygotsky.

Indudablemente esta postura frente al aprendizaje de conceptos matemáticos, por ejemplo el de la multiplicación, no puede soslayar el estudio del desarrollo de las competencias. En una primera aproximación, la competencia matemática se entiende como la capacidad para realizar adecuadamente tareas matemáticas específicas. Esta caracterización de la competencia matemática está asociada, o mejor, debe complementarse con la comprensión matemática de las técnicas necesarias para realizar las tareas y de las relaciones entre los diversos contenidos y procesos matemáticos puestos en juego. Son estas relaciones entre los contenidos matemáticos las que interesa en la teoría de los campos conceptuales de Vergnaud (1990, 1997, 2000).

La competencia es resignificada por Vergnaud (1994), y toma distancia de la caracterización realizada por Piaget para quien ésta refiere a la dinámica universal de las estructuras lógicas que el sujeto ideal usa en su interacción con el mundo. Vergnaud, por su parte, señala que las *competencias complejas de los niños están ligadas a formas de conocer a fondo situaciones y problemas asociados a estructuras conceptuales y argumentativas*, pues como bien lo señala el mismo autor, las ideas matemáticas crecen y cambian a lo largo del periodo de desarrollo cognitivo, a través de una amplia variedad de actividades y situaciones, de manera que el *conocimiento formal* puede ser sólo el último estado en el desarrollo del conocimiento de un estudiante. Este conocimiento formal se corresponde con el tratamiento de la multiplicación presentado en los aspectos matemáticos (apartado 2.1).

En un trabajo posterior, Vergnaud (2001) define la competencia con criterios relativamente diferentes:

- *es más competente el que sabe tratar las situaciones y resolver los problemas, que aquellos que no los saben tratar;*
- *es más competente el que los resuelve de una manera más económica, más fiable, más rápida, más general, o conceptualmente más elaborada;*
- *es más competente el que dispone de una variedad de medios alternativos para resolver los problemas de una misma categoría, y puede escoger el método mejor adaptado en función de los valores que toman ciertos parámetros de la situación.*

En relación con el segundo criterio establecido por Vergnaud, él mismo pone de presente el siguiente ejemplo: "¿cuánto dinero necesita una abuela para dar 15 francos a cada uno de sus 7 nietos?", a partir del cual manifiesta que ciertos alumnos pueden recurrir a la adición 15 + 15 + 15 + 15 + 15 + 15 + 15 y otros a la multiplicación 7x15. El autor afirma que los dos procedimientos son buenos, pero el segundo es más potente y más económico que el primero. El último procedimiento devela en los alumnos un nivel de competencia más elaborado, planteamiento que coincide con el de Godino (en prensa), para quien la competencia matemática y la comprensión (en matemáticas) son nociones cognitivas complementarias cuyo logro implica un proceso de crecimiento progresivo que debe tener en cuenta las diversas facetas del conocimiento matemático y sus relaciones con el mundo empírico.

Este crecimiento progresivo puede interpretarse como el desarrollo de competencias matemáticas cada vez más complejas, tal y como se establece en la teoría del CCM, (Vergnaud, 1994), en la cual la noción de multiplicación se hace cada vez más compleja, por ejemplo, cuando se introducen otros universos numéricos distintos de los naturales; ello demanda una complejidad para el logro de la comprensión matemática de la multiplicación. De este análisis, no es posible afirmar que se tiene o no la competencia, se comprende o no se comprende un contenido matemático, pues hay que concebir los procesos en progresivo crecimiento y en este sentido deberían ser valorados.

Además este crecimiento está asociado a las acciones del sujeto en las cuales los conceptos y teoremas toman sentido. Estos conceptos y teoremas se transforman en conocimientos, en acto del sujeto, y son los que permiten a la acción de éste ser operatoria. Este conocimiento, según Vergnaud (citado por García, et al, 2003), puede ser tanto intuitivo como formal. En este sentido se distingue entre competencias funcionales y formales. Las primeras refieren al uso del conocimiento de manera espontánea e inconsciente por parte del sujeto, en acciones ordinarias, como las labores del hogar, de trabajo, en los juegos de los niños y adultos. La competencia formal, por su parte, hace referencia a un contenido que es analizado y reflexivo, por lo que hay necesidad de simbolizar y representar. Y es en este sentido que la representación es un aspecto fundamental vía la conceptualización, pues culturalmente juega un papel importante para la construcción de significado por parte del sujeto. En consecuencia, el desarrollo de las competencias complejas está permeado por contextos sociales y culturales.

> “[...]Los conceptos y teoremas implícitos no pueden ser naturalmente debatibles. Entonces una enorme cantidad de la discusión que se espera de los estudiantes en el aprendizaje de las matemáticas puede no tener lugar en la matemática que consta sólo de esquemas. Hay necesidad de simbolización y formalización, que hacen distintas matemáticas de una masa de esquemas dirigidos a una masa de situaciones[...]” (Vergnaud, 1994)

Este constituye un aspecto sociocultural derivado del campo multiplicativo de Vergnaud, el cual encuentra elementos coincidentes con el planteamiento de García et al (2003), para quienes

> "[...]Los procesos de mediación social y cultural, tales como la enseñanza, la variedad de situaciones, símbolos, diagramas, gráficas y el punto de vista situacional, identifican al sujeto de la competencia, como sujeto contextualizado, concreto y cambiante, es decir un sujeto social. Es entonces, gracias a la experiencia social y cultural que pueden desarrollarse las competencias matemáticas complejas, es decir, gracias a la interacción con el otro, a la adquisición de pautas sociales y al manejo de instrumentos culturales. Su modificación o desarrollo se debe también al contacto cultural, a la interacción social y a la actividad de la comunicación[...]" (García, et al, 2003, pp. 10-11)

El desarrollo de competencias complejas multiplicativas también está relacionado con la introducción de distintos universos numéricos y por la experiencia de nuevos fenómenos. Vergnaud (2001), por ejemplo, reporta que la multiplicación de un entero por un número decimal es más compleja que la multiplicación de un decimal por un entero. Por otra parte, es preciso extender el significado de "número de veces" si se quiere dar sentido a la multiplicación de fracciones o de números decimales. En este mismo sentido, una conceptualización de la multiplicación implica la comprensión del efecto de la operación sobre varios números incluyendo naturales y racionales, ello acompañado de los nuevos significados del número que comporta la multiplicación, tal y como lo establece Lamon: "[...] *las estructuras multiplicativas combinan dos magnitudes con diferentes etiquetas, para producir una cantidad cuya etiqueta no es la misma como multiplicando o como multiplicador. Por ejemplo, 5 bolsas de dulces con 6 dulces por bolsa producen 30 dulces (no bolsas de dulces ni dulces por bolsa). En algún momento el resultado es una cantidad intensiva, una nueva unidad de medida, una relación especial entre dos cantidades extensivas. Esta nueva cantidad necesita ser conceptualizada como entidad en si misma, diferente de las medidas que la componen. Por ejemplo, si un carro viaja una distancia de 207 millas en 3 horas el promedio es más o menos de 69 millas por hora (no millas, ni horas). Así, las estructuras involucran muchas capas de complejidad cognoscitiva* [...]" (Lamon, 1981).

Este planteamiento de Lamon coincide con el de Schwartz (1988) quien introduce la idea de composición que transforma o no el referente. En tal sentido Schwartz afirma que *"Componer dos cantidades, semejantes o no, para producir una tercera cantidad que es, en general, no semejante a las dos cantidades originales es referida como una composición que transforma el referente. La multiplicación y la división son composiciones que transforman el referente".*

En últimas, es posible considerar que el problema que plantea la multiplicación es un problema de cambio de unidades, como en el caso de encontrar el área de un rectángulo, en el sentido de que es difícil comprender cómo multiplicando la medida del largo cuya unidad se da en cm por la medida del ancho también en cm, se obtiene como "por arte de magia" una unidad dada en cm^2, lo que en el sentido de Schwartz significaría que las composiciones que transforman el referente dan como resultado una cantidad de una nueva clase, proceso que conceptualmente es más elaborado.

La organización didáctica por campos conceptuales también comporta variedad de situaciones que dan sentido al concepto de multiplicación. Además de las situaciones descritas en el análisis fenomenológico, se plantea ahora el estudio de la clasificación propuesta por Vergnaud, la cual contribuye a robustecer el análisis de las situaciones y a poner de relieve la importancia de las representaciones para tratarlas, sin dejar de lado su relación con los aspectos cognitivos.

2.3.2 Una mirada a los problemas multiplicativos. El papel de las representaciones.

Vergnaud (2000) clasifica en tres clases o categorías los problemas dentro de la estructura multiplicativa: *isomorfismo de medidas*, *producto de medidas* y *proporciones múltiples.*

El isomorfismo de medidas implica a todas las situaciones en donde hay una proporción directa (simple) entre dos espacios de medidas M_1 y M_2 diferentes o espacios donde las unidades de medida son diferentes; el esquema correspondiente se muestra a continuación:

$$\begin{array}{cc} M_1 & M_2 \\ a & b \\ c & d \end{array}$$

Es de observar que entre a y c y entre b y d la relación es de partes de, es una relación en el mismo espacio de medida. Además, es una *relación cuaternaria* y no ternaria, pues no se relacionan tres términos, sino cuatro; pero también, según Vergnaud, este tipo de representación ofrece ventajas para explicitar propiedades relevantes de la proporción simple.

Con el propósito, por un lado, de analizar las actividades de tipo cognitivo y el desarrollo de competencias, y por otro intentar relacionar este análisis con los aspectos matemáticos que sustentan los procedimientos efectuados, se presenta el siguiente ejemplo dentro de la categoría de isomorfismo de medidas.

Una libra de yuca cuesta $600, ¿cuánto cuestan 5 libras de yuca?,

En este tipo de situación, generalmente su solución se ha abordado a partir de la siguiente relación ternaria:

$$600x5 = 3000 \text{ o } 5x600 = 3000$$

a través de la cual se introduce la multiplicación como suma repetida. Cabe anotar que esta manera de abordar la solución del ejercicio, elude, en particular, el problema del análisis dimensional, es decir, saber por qué el resultado de la multiplicación da en pesos y no en libras de yuca.

Vergnaud señala que este tipo de situaciones corresponde a una *relación cuaternaria:*

$$\begin{array}{ccc} 1 & \longrightarrow & 600 \\ 5 & \longrightarrow & x \end{array}$$

en la cual dos de las cantidades son de un *espacio de medida* (1 y 5 son medidas de peso) mientras que las otras dos son de otro *espacio de medida* (600 y x son las medidas del valor en pesos). Ahora bien, por estar trabajando con espacios de medida, es legítimo desde lo matemático aplicar la definición y las propiedades de la medida. Para este caso, la función f presentada a continuación coincide con la función medida μ abordada anteriormente en los aspectos matemáticos (p. 22).

En efecto, esta presentación permite analizar las diferencias entre la multiplicación $600x5$ y $5x600$, lo cual muestra que las dos se basan en teoremas diferentes, que en este caso corresponden a propiedades del isomorfismo que se da entre los dos *espacios de medida* (función lineal). Así, la multiplicación $600x5$, muestra la aplicación del *operador escalar* $x5$ (como se muestra en la siguiente figura), que corresponde a aplicar dentro del espacio de medida valor en pesos, el mismo operador que transforma 1 en 5 a 600 para obtener 3000; este operador vertical no tiene dimensión, y corresponde a la propiedad aditiva de isomorfismos:

$$f(1+1+1+1+1) = f(1) + f(1) + f(1) + f(1) + f(1)$$

de la cual se deriva conceptualmente la propiedad multiplicativa de isomorfismos, $f(n \bullet 1) = nf(1)$, que para nuestro ejemplo, es $f(5 \bullet 1) = 5f(1)$, donde $f(1) = 600$.

Este caso puede interpretarse de dos maneras: (1) la unión disjunta de conjuntos del miembro de la izquierda definida en la propiedad de la medida $\mu\left(\bigcup^{n}{}_{i=1} A_i\right) = \sum_{i=1}^{n} \mu(A_i)$, se corresponde con la suma de los elementos del conjunto número de libras de yuca, $f\left(\sum_{i=1}^{5} 1\right)$, y la suma del miembro de la derecha de esta igualdad se corresponde con la suma finita $\sum_{i=1}^{5} f(1)$. (2) O bien para el caso general planteado de las medidas de objetos medibles $m(A \oplus B) = m(A) + m(B)$, y en este sentido se tiene que la operación $\oplus$ se corresponde con la suma habitual definida en el conjunto *número de libras de yuca*.

Nº libras de yuca *Valor en Pesos*

$$\begin{tikzcd} 1 \arrow[d, bend right, "(x5)"'] & 600 \arrow[d, bend left, "(x5)"] \\ 5 & 3000 \end{tikzcd}$$

El teorema $f(n \bullet 1) = nf(1)$, como lo afirma Vergnaud (1985), se encuentra implícito en las actuaciones de los estudiantes (*teorema en acto)* cuando se enfrentan a situaciones de carácter multiplicativo. Puede apreciarse, en este caso, que 5 puede escribirse como una *combinación lineal*, o, lo que es equivalente a afirmar que entre 1 y 5 existe un operador escalar $x5$.

Por su parte, la multiplicación $5x600$ permite ver la aplicación del *operador funcional* $(x600 pesos / librasdeyuca)$, como se muestra en la siguiente figura, el cual relaciona los dos espacios de medida y es el mismo que se aplica a 1 libra de yuca para obtener 600 pesos, como a 5 para obtener 3000 pesos. Este operador horizontal tiene dimensión (pesos/libras de yuca). En este caso se usa la propiedad del coeficiente constante $f(x) = ax$, lo que en el ejemplo, sería $f(5) = 600x5$. Es posible afirmar también, que el conjunto *número de libras de yuca*, Y, en tanto magnitud medible, posee una unidad de medida, 600, tal que para cualquier elemento $y \in Y$, existe un elemento $p \in P$, conjunto de *valor en pesos*, tal que $y = p \bullet 600$, es decir, $m_u(y) = p$, donde $u = 600$, y $f = m$.

Nº libras de yuca *Valor en Pesos*

$$\begin{tikzcd}[column sep=huge] 1 \arrow[r, "\text{(x600 pesos/lib de yuca)}"] & 600 \\ 5 \arrow[r, "\text{(x600 pesos/lib de yuca)}"'] & 3000 \end{tikzcd}$$

Los procedimientos emprendidos por los estudiantes para resolver uno u otro tipo de problemas puede ser muy variado dependiendo del grado de dificultad del mismo problema. Por ejemplo, los alumnos pueden abordar una solución tipo aditiva en algunos problemas en los cuales están dados a, b y $f(a), f(b)$ de dos espacios de medida A y B, respectivamente.

$$\begin{array}{cc} \text{A} & \text{B} \\ a \to & f(a) \\ b \to & f(b) \end{array}$$

En este caso, se solicita calcular $f(c)$, donde $c = a + b$, y los alumnos proceden con el siguiente teorema en acto (Vergnaud, 1990):

$$f(c) = f(a) + f(b)$$

Cabe señalar aquí que este tipo de problemas puede ser modelado a través de una tabla de correspondencia entre los dos espacios de medida. Esta representación se constituye en una buena herramienta que posibilita comprender las relaciones de proporcionalidad que están involucradas, por cuanto permite ver la dependencia de las variaciones de un espacio de medida con respecto al otro espacio de medida. En el caso del ejemplo que se está analizando, los dos espacios de medida, Número de libras de yuca (*Nº l. yuca*) y valor en pesos (*V. pesos*) se ponen en correspondencia a partir de la siguiente representación:

Nº l. yuca *V. pesos*

$$\begin{array}{l} 1 \to 600 \\ 2 \to 1200 \\ 3 \to 1800 \\ 4 \to 2400 \\ 5 \to 3000 \\ 6 \to 3600 \\ 7 \to 4200 \\ 8 \to 4800 \\ etc \end{array}$$

Es posible, entonces, que los alumnos, al pedírseles calcular el valor de 3 libras de yuca, lo encuentren de la siguiente manera:
El valor de 3 libras de yuca es $600 + 1200 = 1800$.

En este caso $a = 1, b = 2, c = 3; f(3) = f(1) + f(2)$.

El análisis presentado permite establecer una diferencia a nivel conceptual de las diferentes maneras para abordar el problema, lo cual muestra cada una un nivel de competencia diferente. En este sentido, puede afirmarse que el operador funcional se constituye en un nivel más elaborado puesto que implica no sólo la noción de relación numérica sino igualmente la de cociente de dimensiones, todo ello permeado necesariamente por una explicitación de propiedades de la función lineal con sus representaciones asociadas. En consecuencia, lo que define el desarrollo de *competencias multiplicativas* cada vez más complejas en el estudiante, al finalizar la educación básica, es el hecho que reconozca la función lineal y sus propiedades como una herramienta más potente en el tratamiento de situaciones de tipo multiplicativo; y que esté posibilitado para iniciar el estudio de ésta como objeto.

Cabe señalar aquí, que en la organización matemática por campos conceptuales las fronteras en relación con los conceptos y situaciones, por ejemplo, no se encuentran claramente delimitadas, por lo que el estudio de la función lineal encuentra, necesariamente, algunos elementos de intersección, o se relaciona, con la teoría de los espacios vectoriales y las transformaciones lineales. En particular, la función f representada por

$$f : \mathbf{R} \rightarrow \mathbf{R}, \text{ tal que } f(x) = \lambda x,$$

que representa una línea recta de pendiente λ, y pasa por el origen de un sistema de coordenadas, constituye una transformación lineal, pues se satisfacen sus dos propiedades:

(i) $f(x_1 + x_2) = \lambda(x_1 + x_2) = \lambda x_1 + \lambda x_2 = f(x_1) + f(x_2)$, con λ escalar.

(ii) $f(kx) = \lambda(kx) = k(\lambda x) = kf(x)$, con k escalar.

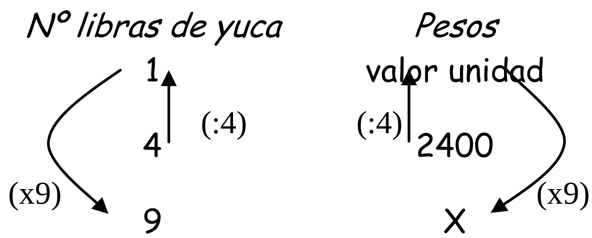
De esta manera Vergnaud, al presentar la multiplicación como una *relación cuaternaria*, evidencia la potencia de la representación, en tanto permite explicitar la presencia de la función lineal, ya que aparece un operador funcional que cumple con las propiedades de linealidad.

Ahora bien, el problema anterior se complejiza cuando no es dado el precio de la unidad, así el siguiente problema:

Cuatro libras de yuca valen $2400, ¿cuánto cuestan 9 libras de yuca?.

puede ser resuelto por los estudiantes haciendo uso de diferentes procedimientos, cada uno de los cuales muestra niveles de competencia en el tratamiento de esta situación. A continuación se muestra brevemente una aproximación al análisis del problema anterior, tomando como referencia el trabajo de Vergnaud (2000);

1. Búsqueda de la solución del problema pasando por la unidad y valor unitario.



2. Aplicación sucesiva de dos operadores (división primero): (:4) ($\times$9)
3. Escritura del operador fraccionario ($\times$9/4)
4. Aplicación sucesiva de dos operadores, multiplicación primero ($\times$9) (:4)
5. Noción de razón y de razón-operador:
   La razón entre dos cantidades: 9 libras de yuca/ 4 libras de yuca
   La razón como operador ($\times$9/4) o Multiplica por la razón
6. Proporción o igualdad de razones:
   9 libras de yuca/4 libras de yuca = x pesos/2400 pesos
7. Igualdad de razones operadores: ($\times$ 9/4) = ($\times$ x/2400)
8. Regla de tres:

$$x = 9 \times 2400 \div 4$$

La segunda categoría cubre las situaciones en las que dos espacios de medidas M_1 y M_2 se mapean sobre un tercer espacio M_3, como se presenta en la siguiente figura

M_1	M_2	M_3
a	b	c
d	e	x

En este caso, hay dos funciones lineales f y g representadas por

$$f : M_1 \to M_2 \text{ y } g : M_2 \to M_3$$

El proceso de solución se traduce en construir la función compuesta

$$gof : M_1 \to M_3$$

Vergnaud puso atención a los métodos que los niños usaban para resolver los problemas y reportó que las relaciones *dentro* de espacios de medida son más fáciles de manipular que las relaciones entre espacios de medida, lo cual pone de manifiesto una dificultad en el aprendizaje.

Finalmente, la estructura de proporción múltiple utiliza tres espacios de medida M_1, M_2 y M_3. Se caracteriza porque un espacio de medida M_3 es proporcional a dos espacios de medida diferentes M_1 y M_2 y está modelado por una función bilineal. El esquema correspondiente es el siguiente:

$$\begin{array}{lcr} M_1 & M_2 & M_3 \\ a & \xrightarrow{\qquad\qquad\qquad\qquad} & b \\ & c \xrightarrow{\qquad\qquad} & d \end{array}$$

La función bilineal queda representada por:

$$h : M_1 x M_2 \to M_3$$

Esta función h satisface las propiedades descritas anteriormente en los aspectos matemáticos de la multiplicación, relacionadas con las propiedades de las funciones bilineales.

Para finalizar, el siguiente ejemplo reportado por Vergnaud (1994) permite ilustrar la necesidad del fundamento o soporte matemático de las funciones bilineales y de esta manera teorizar acerca del conocimiento intuitivo de los estudiantes:

Dado: El consumo de flúor es en promedio 3.5 kg por semana para 10 personas.

Pregunta: ¿Qué cantidad de flúor es necesaria para 50 personas en 28 días?

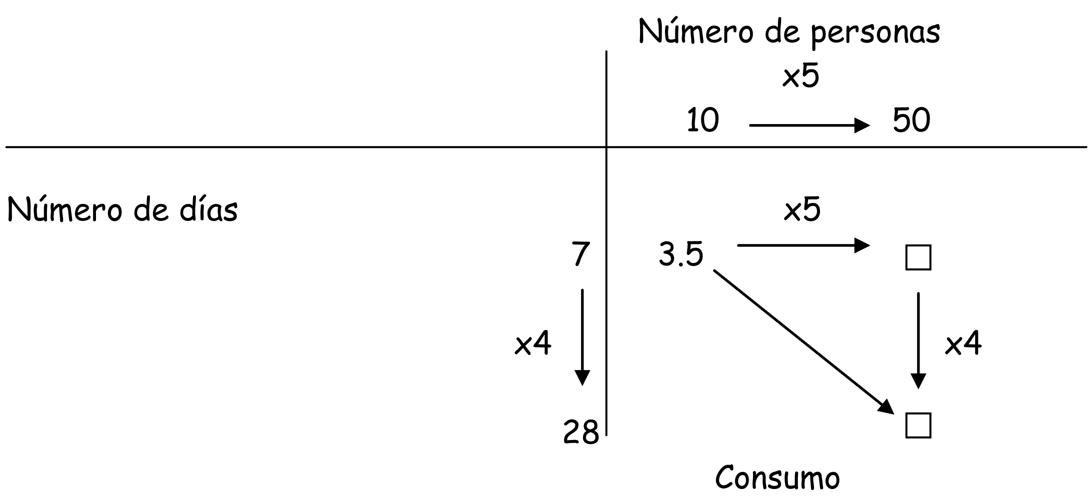
Aparece en este ejemplo posiblemente el siguiente teorema implícito en la mente del sujeto

$$f(n_1 x_1, n_2 x_2) = n_1 n_2 f(x\ , x_2) \qquad \text{Consumo}(5x10, 4x7) = 5x4\,\text{Consumo}(10,7)$$

Este teorema, dice Vergnaud, puede ser explicado en diferentes formas:

1. *En palabras*: El consumo es proporcional al número de personas cuando el número de días se mantiene constante; éste es proporcional al número de días cuando el número de personas se mantiene constante.

2. *Por una tabla de proporción doble*, como muestra la figura



3. *Por una fórmula*: C = KPD, donde C = consumo, P = número de personas, D = número de días y K = C(1,1), consumo por persona y por día,

Es claro que C es proporcional a P cuando D es constante y a D cuando P es constante. Entonces, éste es proporcional al producto.

2.4 Evaluación, criterios de evaluación y contrato didáctico.

La organización didáctica matemática del saber relativo a la multiplicación desde la perspectiva de Vergnaud "prende las alarmas" en el sentido que es importante empezar a reconocer que la evaluación no puede ser ni terminal ni puntual, al contrario, debe reconocer el desarrollo de competencias en el tiempo, es decir, reconoce que los conceptos matemáticos son complejos y por tanto su aprendizaje es lento. Por estas razones es importante entrar a estudiar los aspectos relativos al concepto de evaluación en el aula de matemáticas.

2.4.1 Criterios de evaluación en matemáticas

De acuerdo con Giménez, tal y como se esbozó en el contexto de la investigación, los criterios de evaluación "son aseveraciones que precisan el grado y tipo de aprendizaje que van a permitir adquirir las competencias deseadas" (Giménez, 1997: 53). En este sentido un criterio de evaluación debe permitir seleccionar actividades para desarrollarlos y pone de manifiesto una cierta concepción de lo que son las matemáticas y lo que es esencial en ellas, de cómo se aprenden, cómo se enseñan, en últimas, qué caracteriza la actividad matemática. Luego es importante señalar que es determinante la concepción que de las matemáticas se tenga a la hora de formular criterios de evaluación.

La organización didáctica matemática del saber relativo a la multiplicación desde la perspectiva de Vergnaud del CCM, incorpora criterios de evaluación relativos a elementos situacionales, representacionales conceptuales y argumentativos (García, 2002), lo que permite superar la pedagogía por objetivos, sustentada en una visión de significación única, terminal, puntual e instantánea del aprendizaje de la multiplicación.

Los criterios derivados de la teoría de Vergnaud tienen razón de ser, por cuanto el campo conceptual es un espacio de problemas en los que el tratamiento matemático compromete masas de conceptos y procedimientos matemáticos, de varios tipos pero en estrecha conexión, lo que pone de manifiesto una vez más *una visión a largo plazo y lenta del aprendizaje de los* *conceptos matemáticos*. Por ejemplo, la multiplicación cambia o se torna más compleja cuando ruptura la idea de suma reiterada (en 3º de primaria) al introducir otros universos numéricos distintos de los naturales, lo que posibilita posteriormente interpretarla como operación binaria (quizás en el grado 5º de primaria), es decir, pone de presente una reconceptualización del concepto. *Luego el crecimiento de la competencia multiplicativa se da gracias a esta ruptura.* Teorizar sobre criterios de evaluación implica también intentar precisar las nociones de evaluación y valoración, pues éstas influencian de manera importante al momento de formular aquéllos en el aula de matemáticas.

2.4.2 Evaluación/Valoración

Es necesario considerar la distinción entre la evaluación como juicio y la valoración como análisis comprensivo del desempeño de un estudiante, o grupo de estudiantes en la aplicación de las matemáticas. Se comparte con Webb (1992) que la valoración en matemáticas se emplea para un amplio rango de propósitos, desde proporcionar información para ayudar a un profesor a trabajar con un estudiante de modo que éste consiga una mejor comprensión del sentido de los números hasta colaborar en un estudio nacional con implicaciones de largo alcance para mejorar la educación matemática en un país. Más específicamente, la valoración significa un proceso para integrar una colección sistemática de evidencias que permita ayudar a tomar decisiones frente al aprendizaje de la multiplicación por parte de un grupo de estudiantes, a los programas, materiales, entre otros. Webb (citado por García, 2002) plantea que la valoración cumple las siguientes funciones:

- Comunicar públicamente lo que es importante conocer y hacer en matemáticas.
- Ser usada como herramienta que provee evidencias y retroalimenta lo que los estudiantes hacen y conocen.
- Proveer información para la toma de decisiones en el sistema educativo, para dar cuenta de la efectividad de éste como un todo.
- Proveer información sobre los distintos aspectos de la clase de matemáticas incluyendo la efectividad de los materiales usados.

La valoración, tal y como se esbozó en el contexto de la investigación, implica considerar la actuación del estudiante en una variedad de contextos, lo que obliga necesariamente a ampliar las fuentes de información de donde ésta se obtiene. La evaluación, por su parte es identificada como la asignación de un valor a los resultados de la valoración. Es en este sentido que el paso a la valoración del proceso, radica en superar el significado de evaluación como medida y como distancia para situarse en el campo interpretativo. García (2002) señala que como medida el énfasis de la evaluación son los resultados, el rigor de las pruebas, la "objetividad" y es externa a los procesos de enseñanza y aprendizaje. Como distancia compara la "distancia" entre objetivos propuestos y desarrollos reales del estudiante. Sin embargo, la autora afirma que como interpretación interesa el progreso de los estudiantes en el cual subyace una concepción de aprendizaje como proceso en revisión constante, e integra las relaciones profesor-estudiante, por ello un modelo basado en este enfoque precisa establecer las capacidades matemáticas que los estudiantes están desarrollando y las que se desean que desarrollen en relación con estructuras conceptuales y procedimentales.

La valoración, tal y como se ha presentado en este trabajo, está estrechamente ligada con una concepción de las matemáticas y una teoría de aprendizaje de las mismas, por lo que puede afirmarse que su propósito se encuentra asociado a la organización de los contenidos matemáticos. Más concretamente, no podría afirmarse que un estudiante de grado tercero comprenda el concepto de multiplicación cuando éste se ha presentado como una suma reiterada, pues la multiplicación se hace más compleja, por ejemplo, cuando aparece ligada a otros contextos y situaciones, que implicarían distintas representaciones y maneras de abordarla, lo que exigiría poder reconocer sus invariantes (conceptos y teoremas) en cada una de estas situaciones.

Es en este sentido que desde la organización del CCM se reconoce la complejidad de la multiplicación, por cuanto, además, esta noción se encuentra ligada con otros conceptos como división, razón, proporción, ..., tal y como se mostró en los aspectos matemáticos (apartado 2.1), por lo que emerge un cambio en el estatus cognitivo del concepto. Por tanto la valoración del aprendizaje de la multiplicación (Gascón, 1997), en tanto concepto complejo,

> "[...] implica pasar de una actividad matemática evaluable instantáneamente en el aula y absolutamente dirigida y controlada por el profesor, a una actividad matemática evaluable a medio y largo plazo, con objetivos más globales [...]" (Gascón, 1997: 20).

Estos objetivos globales mencionados por Gascón pueden entenderse en el sentido de que la actividad evaluativa lejos de referir exclusivamente a si el estudiante reproduce mecánicamente lo que se acaba de hacer en clase, tal vez "viendo" la multiplicación de manera atomizada, debe responder a una actividad más integradora en la cual se debilitan estos objetivos puntuales y terminales para dar paso a objetivos consistentes con el "lento" desarrollo de competencias, por lo que los periodos de tiempo en los cuales éstas se desarrollan se hacen largos.

En síntesis, en esta investigación se considera la idea de valoración, por cuanto permite *estimar* los desempeños de los estudiantes a partir de sus distintas actuaciones en distintos contextos, hecho que es consistente con la teoría del CCM, pues a partir de los análisis presentados en los apartados anteriores se ha puesto de manifiesto, para avanzar en el aprendizaje de la multiplicación, la necesidad de tratar variedad de situaciones en las cuales la multiplicación se vuelve más compleja, por ejemplo, al intervenir otros conjuntos numéricos distintos a los naturales, en las maneras de emprender las soluciones a problemas multiplicativos a partir de la suma reiterada y utilizando propiedades de la función lineal, en la cual es posible hacer un análisis escalar o uno funcional, etc. En consecuencia, la exploración que el profesor pueda realizar en el trabajo de aula puede proporcionar información cualificada acerca de los desarrollos alcanzados por sus estudiantes y la manera cómo han ido complejizando su competencia multiplicativa.

Por ello la valoración tiene cabida en este tipo de exploración, pues conmina al profesor en su actividad evaluativa en el aula y desde luego en la naturaleza de los criterios de evaluación, considerar distintas actuaciones de los estudiantes, ligadas a múltiples evidencias, aspectos éstos dependientes de la complejidad conceptual de la multiplicación.

2.4.3 Una aproximación a la noción de Contrato Didáctico

La idea de contrato didáctico, como una de las nociones fundadoras de la didáctica fundamental, es una noción teórica que sólo toma su sentido preciso cuando se emplea a nivel de sistema didáctico en el marco de la teoría de Brousseau de las situaciones didácticas.

Chevallard (citado por García et al, 2003) señala que el contrato didáctico fija la exigencia de la progresión dentro del saber y legitima su posesión. En consecuencia la evaluación es parte del funcionamiento en la interacción didáctica. La progresión en el saber, según este autor, es definida por una norma de avance, en un eje temporal y por momentos en el tiempo didáctico. Esta norma de avance fija el tiempo progresivo del saber y los instantes de posesión del saber en el proceso didáctico. De lo anterior se deriva, una vez más, que la evaluación no puede concebirse como una acción periférica al proceso didáctico. Por el contrario, las cláusulas del contrato didáctico están estrechamente ligadas a las características específicas de la organización de los contenidos matemáticos, en tanto éstas organizan las relaciones que alumnos y enseñantes mantienen con el saber.

Gascón (1997) sostiene que las reglas de juego de la relación didáctica (aquella que se establece entre maestro, alumno y saber matemático) están determinadas por una especie de contrato, el contrato didáctico, que rige en cada momento las obligaciones recíprocas de los alumnos y el profesor en lo que hace referencia a la matemática enseñada en una institución dada. El contrato didáctico regula con mucho detalle la cuestión. Cada noción enseñada, cada tarea propuesta se halla sometida a su legislación, más concretamente, las cláusulas del contrato didáctico fijan los criterios de validez sobre el aprendizaje de un concepto matemático, en particular el de multiplicación.

Por otra parte, se comparte con Chevallard (1991), tal y como se mencionó en el contexto de la investigación, el planteamiento según el cual el estudio de la evaluación hace parte del funcionamiento didáctico en la *relación triádica: profesor–saber matemático–alumno*, por tanto las relaciones, implícitas o explícitas, determinan responsabilidades entre los actores, y las relaciones con el saber; por eso la evaluación hace parte de las reglas, las estrategias y los procedimientos de comunicación. Este planteamiento es corroborado y ampliado por Gimeno y Pérez (citado por García et al, 2001) quienes sostienen que la evaluación no es una acción esporádica o circunstancial de los profesores o de la institución escolar, por el contrario, obedece entre otros aspectos a modelos pedagógicos implícitos o explícitos en las instituciones, a concepciones epistemológicas sobre el conocimiento que se evalúa sobre la enseñanza y sobre la naturaleza del aprendizaje.

Chevallard (citado por García et al, 2003) señala que la organización de las relaciones de los estudiantes y del profesor con el saber, así como el conjunto de comportamientos del profesor, que son esperados por los estudiantes, conforman el contrato didáctico que regula estas relaciones. En este sentido el aprendizaje es dependiente de las interacciones didácticas y del conjunto de comportamientos que el profesor fija y que espera que los estudiantes adquieran; de esta manera, las relaciones implícitas que se establecen entre profesor y alumnos en relación con el contenido matemático multiplicación constituyen relaciones que pueden estar matizadas por ciertas normas, las cuales podrían estar regulando los comportamientos de los distintos actores en el aula de clase.

Es posible afirmar, entonces, que la noción de contrato didáctico contiene el conjunto de normas, la mayoría de las cuales se mueven en el terreno de los implícitos, pero son las que se encargan de determinar las formas de actuación tanto del profesor como de los estudiantes. De acuerdo con Planas y Gorgorió (2001), es posible encontrar los siguientes tipos de normas en el trabajo de aula en matemáticas: *sociales, matemáticas,* y *sociomatemáticas*.

Si bien se reconoce la posibilidad de encontrar en el trabajo de aula los diferentes tipos de normas mencionadas, o bien intersecciones e influencias mutuas entre ellas (Cobb et al., citados por Planas y Gorgorió, 2001), en este estudio se intenta mirar sólo las normas matemáticas.

Las normas matemáticas, según los autores corresponde al *"conjunto de prácticas matemáticas en el aula y las diferentes trayectorias posibles en el comportamiento matemático de alumno y profesor ante una actividad propuesta"*. Los criterios de legitimación de procedimientos y soluciones matemáticas son una norma matemática que admite diferentes interpretaciones, por ejemplo, para los procedimientos se fijan como normas la eficiencia en el cálculo, la rapidez, la creatividad o el rigor.

En cierto modo, las normas matemáticas pueden considerarse como obligaciones establecidas en el aula por parte del profesor en tanto que ostenta la autoridad y la capacidad de legitimar. Siguiendo a Gorgorió et al (en prensa), existe siempre una distancia, de naturaleza dinámica, entre las normas establecidas en el aula y las normas interpretadas por el alumno. En síntesis, la evaluación como problema didáctico se contrapone a la manera como se ha concebido tradicionalmente (modelo yuxtapuesto a las matemáticas), pues desde distintas posiciones teóricas es claro que la evaluación del aprendizaje en el aula de matemáticas se imbrica en sus procesos de enseñanza y aprendizaje, en otros términos, el estudio de la evaluación necesariamente hace parte de los fenómenos didácticos[3].

2.5 La textualización del saber: las preparaciones didácticas

La noción de Preparación Didáctica

Chevallard (1991) señala que existen saberes enseñables (y enseñados) y saberes no enseñables, o al menos, no escolarizables. Plantea el autor que una transmisión escolar burocrática supone, en cuanto al saber:

≤ La división de la práctica teórica en campos de saber delimitados que den lugar a prácticas de aprendizaje especializadas, es decir, la *desincretización del saber.*

≤ En cada una de esas prácticas, la separación del saber y de la persona, es decir, la *despersonalización del saber.*

≤ La programación de los aprendizajes y de los controles, según las secuencias razonadas que permitan una adquisición progresiva de los conocimientos expertos, es decir, la *programabilidad de la adquisición del saber.*

En cuanto a la transmisión, supone:

---

[3] Es pertinente señalar que *fenómeno didáctico* se entiende, siguiendo a Chevallard, Bosch y Gascón (1997) como fenómeno didáctico-matemático. Todo fenómeno didáctico (en el sentido clásico de relativo a la enseñanza-aprendizaje de las matemáticas), tiene un componente matemático esencial y recíprocamente, los fenómenos relacionados con la actividad matemática no pueden ser analizados independientemente de los fenómenos relativos a su difusión y utilización. En este marco lo didáctico es denso en lo matemático de tal manera que es imposible separar empíricamente ambos aspectos de la realidad. La noción de fenómeno didáctico deja de ser exclusiva del proceso de enseñanza-aprendizaje para referirse también a la producción, la utilización y la difusión de las matemáticas.

≤ La definición explícita, en comprensión y extensión, del saber a transmitir, es decir, la *publicidad del saber.*

≤ El control regulado de los aprendizajes según procedimientos de verificación que autoricen la certificación de los conocimientos expertos, es decir, el *control social de los aprendizajes.*

Se comparte con Chevallard que en la transposición didáctica de las matemáticas (de manera muy apretada, entendida como la distancia existente entre el saber sabio y el saber objeto de enseñanza) los requisitos presentados anteriormente se encuentran tendencialmente satisfechos a través de un proceso de *preparación didáctica* que denomina la *puesta en texto del saber.*

En este mismo sentido, García (2003) señala que la puesta en texto del saber objetiva y hace público la concepción de qué significa saber, lo que posibilita el control social de los aprendizajes, así como establece y legitima la duración del tiempo didáctico. Además, la textualización del saber produce una diferenciación entre los objetos de enseñanza (nociones matemáticas) y las nociones herramientas de la actividad matemática (nociones paramatemáticas).

Pero por otra parte, se reconoce a partir de los planteamientos de Chevallard (1991) que no es posible "trasladar" los contenidos matemáticos tal y como se constituyen -se originan- en la disciplina al campo de la Didáctica de las Matemáticas, proceso cuestionado por este autor y que denomina la *Ilusión de la Transparencia*. El investigador llama la atención sobre la duda sistemática que debe existir como condición de la ruptura epistemológica, lo cual permite al didacta deshacerse de las evidencias y de la transparencia del universo de enseñanza que él vive en tanto que enseñante (o al menos, en tanto el alumno que ha sido).

En síntesis, la textualización del saber hace parte sustancial de la preparación didáctica, lo cual constituye un soporte fundamental del análisis de los criterios de evaluación, en tanto los textos explicitan discursivamente el saber a enseñar y establecen la norma de progresión en el saber. García (2003, en prensa, interpretando a Chevallard) señala que la exigencia de explicitación discursiva, o sea la preparación didáctica, al ser parte de la transposición didáctica se constituye en la publicidad del saber que se considera objeto de enseñanza, y es la que posibilita, como ya se dijo, el control social de los aprendizajes. Al mismo tiempo, el texto establece la norma de progresión en el conocimiento, por ejemplo, desde la pedagogía por objetivos el tiempo de enseñanza se considera análogo al tiempo de aprendizaje, lo que crea la ficción de una concepción de aprendizaje como isomorfa al proceso de enseñanza, al tiempo que establece una relación específica con el tiempo didáctico.

3. METODOLOGÍA Y DESARROLLO DE LA INVESTIGACIÓN

A continuación se describen los aspectos metodológicos que se siguen en este estudio. En la primera parte se describe la metodología, luego se hace mención a los participantes que prestan su colaboración para llevar a cabo el estudio. En el tercer subapartado se aborda el proceso de investigación en el cual se presentan los focos de investigación, la recolección de la información, las unidades de análisis y las categorías y el proceso interpretativo. En el último subapartado se realiza el análisis y contextualización de los focos de investigación.

3.1 Metodología

Por metodología se considera en este trabajo el sistema fundamental teórico y el conjunto de suposiciones epistemológicas y ontológicas que determinan una manera de ver el mundo, y en consecuencia, que apuntan a la selección de los métodos de investigación. En razón a que esta investigación exige una comprensión interpretativa de los contextos de la clase (García, et al, 2004) en que los procesos de enseñanza, aprendizaje y evaluación cobran significado, ésta se inscribe en el paradigma cualitativo. Se adopta el estudio de casos colectivo (Stake, citado por García et al, 2004), pues el trabajo en esta investigación da lugar a comprender y dotar de significado las relaciones entre organizaciones didácticas matemáticas y los criterios de evaluación del aprendizaje de la multiplicación en las aulas de tercero, cuarto y quinto de la Educación Básica Primaria.

El enfoque metodológico de esta investigación es cualitativo e interpretativo, lo cual implica un proceso metódico y riguroso de la información: preparaciones y sesiones de clase, planes de aula, tareas propuestas en las clases, respuestas a entrevistas, entre otras, relacionándolas, es decir se hace triangulación de datos y la triangulación con la teoría. Esto permite obtener una aproximación global de las situaciones sociales para explorarlas, describirlas y comprenderlas de manera inductiva. Sin embargo el análisis de los datos también comporta el análisis deductivo, por cuanto se propone desarrollar un sistema de categorías que permite establecer la dependencia de los criterios de evaluación del aprendizaje de la multiplicación de las organizaciones didácticas matemáticas de los contenidos relativos a este concepto.

3.2 Participantes

Para la observación de las clases (grabaciones de video) se cuenta con la colaboración de tres profesores. En general se observan once clases. Tanto a los profesores como a los grupos de estudiantes se les hace algunas recomendaciones básicamente relacionadas con la actuación lo más natural posible en sus clases, el permitir grabar algunas producciones de los estudiantes en sus cuadernos, el facilitar las preparaciones de clase y las actividades y evaluaciones escritas propuestas a los estudiantes. En general, los actores (profesores y estudiantes) acatan cordialmente estas recomendaciones. Finalmente se hace la aclaración de que en el trabajo de tesis no se mencionarán los nombres de los profesores.

3.3 Proceso de Investigación

Para desarrollar el objetivo general: Describir y analizar cómo las organizaciones didácticas matemáticas de los contenidos relativos a la multiplicación constituyen un factor determinante de los criterios para valorar su aprendizaje, y en consecuencia intentar responder la pregunta de investigación, ¿Son los criterios de evaluación del aprendizaje de la multiplicación en las aulas de tercero, cuarto y quinto de la Educación Básica dependientes de las organizaciones didácticas matemáticas de los contenidos relativos a este concepto?, se articulan los dos siguientes focos de investigación. Cada foco se desglosa en una serie de subobjetivos subsidiarios del objetivo general (García et al, 2002), y para la operativización de estos subobjetivos se plantean cuestiones específicas de investigación que constituyen subpreguntas de la pregunta general de investigación.

Primer foco (F_1): *Corresponde a los criterios de evaluación del aprendizaje de la multiplicación.*

Objetivo: *Caracterizar los criterios de evaluación del aprendizaje de la multiplicación en las aulas de tercero, cuarto y quinto de la Educación Básica en tres colegios de Bogotá.*

La pregunta que se intenta responder en este foco es la siguiente: *¿Qué caracteriza los criterios de evaluación del aprendizaje de la multiplicación en las aulas de tercero, cuarto y quinto de la Educación Básica?.*

Segundo foco (F_2): *Corresponde al estudio de la dependencia de los criterios de evaluación del aprendizaje de la multiplicación en las aulas de tercero, cuarto y quinto de la Educación Básica de las organizaciones didácticas matemáticas de los contenidos relativos a este concepto.*

Objetivo: *Establecer la relación de dependencia de los criterios de evaluación del aprendizaje de la multiplicación de las organizaciones didácticas matemáticas de los contenidos relativos a este concepto.*

La pregunta que se intenta responder en este foco es: *¿Qué caracteriza las relaciones entre las organizaciones didácticas matemáticas de los contenidos relativos a la multiplicación y los criterios para valorar su aprendizaje?*

3.3.1 Recolección de la información y Unidades de análisis

La información recogida utiliza diversas técnicas cualitativas tales como: la grabación de video, análisis documental, entrevistas semiestructuradas realizadas a los profesores, preparaciones de clase, pruebas escritas y actividades propuestas por los profesores en el trabajo de aula sobre la multiplicación.

Las grabaciones de video reportan clases de tercero, cuarto y quinto de primaria sobre el tópico matemático multiplicación.

Por su parte las entrevistas realizadas a los profesores, después de las grabaciones, se estructuran con antelación a partir de las categorías establecidas, sin embargo en el momento de la entrevista surgió la necesidad de hacer otras preguntas, además de indagar sobre algunas cuestiones observadas en los videos con el propósito de confirmar algunas interpretaciones.

Se obtiene las preparaciones de clase de los grados tercero y cuarto, mientras que no es posible obtener las preparaciones de clase del grado quinto. Asimismo se obtiene información a partir del conjunto de evaluaciones y actividades propuestas por los profesores de los grados tercero y cuarto.

La definición de unidades de análisis se hace necesaria para poner de presente el carácter dependiente de los criterios de evaluación del aprendizaje de la multiplicación de las organizaciones didácticas matemáticas de los contenidos relativos a este concepto. A continuación se definen estas unidades de análisis para cada foco de investigación.

Primer foco (F_1): Las unidades de análisis correspondientes a este foco son: las preparaciones de clase en las aulas de tercero y cuarto, las sesiones de clase de tercero, cuarto y quinto, las pruebas escritas propuestas por el profesor en el aula y las respuestas dadas por el profesor a la entrevista semiestructurada en relación con los aspectos evaluativos.

Segundo foco: (F_2): Las unidades de análisis correspondientes a este foco son: las preparaciones de clase en las aulas de tercero y cuarto, el Plan de Aula institucional del grado tercero, las sesiones de clase de los grados tercero, cuarto y quinto y las respuestas a la entrevista semiestructurada en relación con los aspectos de organización de los contenidos matemáticos en torno a la multiplicación.

3.3.2 Categorías y proceso interpretativo

El conjunto de categorías y sus respectivas posibles interpretaciones provienen de los estudios e investigaciones realizados sobre estos tópicos, algunas son reconstruidas para adaptarlas al objeto de este estudio, y pretenden contextualizar y operativizar los objetivos específicos que desarrollan el objetivo principal de este estudio. A continuación se establecen, para cada foco, las categorías y sus correspondientes posibles interpretaciones.

Primer foco (F_1): *Criterios de evaluación del aprendizaje de la multiplicación.*

Categorías	*Interpretación de posibles respuestas*
¿Qué criterios se utilizan para valorar el aprendizaje de la multiplicación?	• Memorización de la multiplicación como una suma reiterada y/o eficiencia en el cálculo de la multiplicación. • Criterios de evaluación relativos a elementos conceptuales, representacionales, situacionales y argumentativos, ligados a distintos tipos de actuaciones de los estudiantes en distintos contextos.
¿Cómo se establece el avance conceptual de los estudiantes en relación con la multiplicación?	• Hay evidencia de comparación con objetivos de contenido preestablecidos. • A través de rupturas conceptuales, lo que supone conocer a fondo situaciones y problemas asociados a esta concepto, lo cual devela un desarrollo de competencias cada vez más complejas.
¿Qué tipo de tareas en relación con la multiplicación propone el(a) profesor(a) en el aula?	• Tareas puntuales para fijar hechos, en particular: suma reiterada, términos de la multiplicación, algoritmo de la multiplicación. • Tareas en distintos contextos que posibilitan explorar distintas representaciones del concepto de multiplicación.

Este primer conjunto de categorías intenta caracterizar los criterios de evaluación del aprendizaje de la multiplicación en las aulas de tercero, cuarto y quinto de la Educación Básica. Así, por el tipo de tareas que se proponen en el aula es posible deducir qué criterios de evaluación utiliza el profesor, asimismo, la manera como establece el avance conceptual de los estudiantes en relación con la multiplicación podría arrojar indicios de aprendizajes inmediatos o a largo plazo, y si los criterios evaluativos en el aula apuntan sólo a ver la multiplicación como una suma reiterada o si dichos criterios ponen de presente el trabajo en distintos contextos lo que obliga a considerar distintas actuaciones de los estudiantes. Si bien la norma matemática no aparece explícitamente como categoría de investigación, es posible encontrar algún tipo de obligación impuesta por el(a) profesor(a) en el aula de matemáticas en torno al trabajo con la multiplicación, que podría ser interpretada de maneras distintas por parte de los estudiantes.

Segundo foco (F_2): *Estudio de la dependencia de los criterios de evaluación del aprendizaje de la multiplicación en las aulas de tercero, cuarto y quinto de la Educación Básica de las organizaciones didácticas matemáticas de los contenidos relativos a este concepto.*

Categorías	*Interpretación de posibles respuestas*
¿Cómo se organizan los contenidos matemáticos en torno a la multiplicación?	• Los contenidos en torno a la multiplicación se organizan por listado de temas atomizados. • La organización se hace por campos o dominios conceptuales, lo cual integra criterios de carácter disciplinar, cognitivo y sociocultural.
¿Cómo interpreta el profesor el concepto multiplicación?	• Lo interpreta sólo como una suma reiterada. • Lo interpreta como una terna de tres conjuntos mutuamente implicados; conjunto de situaciones, conjunto de significados y conjunto de representaciones.

¿Qué caracteriza la actividad matemática de los estudiantes en torno a la multiplicación?	• El trabajo con ejercicios rutinarios, en los cuales se otorga preponderancia a la multiplicación como suma reiterada y/o a su algoritmo. • Resolución de problemas en los cuales se da lugar al uso de distintas representaciones, símbolos, así como establecer o potenciar la conexión con otros conceptos matemáticos.

Las categorías planteadas para este foco permiten analizar la forma como se organizan los contenidos relativos a la multiplicación. De esta manera, por ejemplo, la interpretación que hace el profesor sobre el concepto multiplicación da indicios si lo considera atomizado o si establece alguna relación con otros conceptos o si al menos potencia estas relaciones, lo que podría determinar el tipo de actividad matemática desplegada por los estudiantes en el aula.

3.4 Análisis e interpretación

Una vez descrito el proceso de investigación, este subapartado aborda el análisis e interpretación de la información, bajo las categorías propuestas. En tal sentido, se presenta a continuación el análisis de las sesiones clase de grado tercero, posteriormente se realizan los análisis de las sesiones de las clases de cuarto y quinto. Estos análisis se triangulan, en cada aula, (análisis relacional mencionado) con los correspondientes a las preparaciones de clase, actividades propuestas por los profesores y el tipo de pruebas evaluativas, además con la información de las respuestas arrojada de las entrevistas.

3.4.1 Análisis de las sesiones de clase sobre multiplicación en grado 3°

La clase en torno a la multiplicación en este grado sigue el Plan de Aula Institucional

ÁREAS	LO APRENDO **(Indicadores de logro)**	LO HARÉ **(Actividades)**
MATEMÁTICAS	- *Reconoce la multiplicación como una suma reiterada.* - Representa multiplicaciones en la recta numérica, como área y encuentra combinaciones y arreglos de objetos. - Reconoce los términos de la multiplicación. - Resuelve multiplicaciones abreviadas por 10, 100, 1000, reconociendo valor posicional.	- Aprenderse las tablas de multiplicar, empezando por la del 9. - *Realizar todas las actividades de clase en el tiempo asignado.* - *Presentar a tiempo el cuaderno o talleres para revisión.* - *Diariamente hacer en casa muchos ejercicios de lo visto en clase.*

En este plan de aula, la multiplicación se organiza en torno a un contenido: multiplicación como suma reiterada, términos de la multiplicación, multiplicaciones abreviadas, organización que es coherente con las actividades que debe hacer el estudiante, memorizar tablas en el tiempo asignado en clase y hacer muchos ejercicios en casa. Las actividades (por ejemplo, d*iariamente hacer en casa muchos ejercicios de lo visto en clase)* develan una concepción de lo que significa aprender matemáticas, y en particular lo que es esencial aprender de las matemáticas, los algoritmos a través de la ejercitación lo cual en términos de García (2004), determina los criterios que legitiman la validez de las actuaciones de los estudiantes, realizar correctamente las multiplicaciones.

En particular, el tema de los *términos de la multiplicación* se aborda poniendo el acento en hechos nominales, sintácticos y de manera aislada frente a las temáticas abordadas anteriormente; sólo se quiere presentar el hecho (términos de la multiplicación) y se enfatiza su memorización, tal y como se ilustra en un extracto de la clase de agosto 27 de 2003 (P: Profesora, A_i: Alumnos, i=1, 2, 4)

P*: Estamos hablando de la tarea, la tarea del día: consultar sobre los términos de la multiplicación, quiero escuchar que consultaron.*

Algunos niños levantan la mano indicando que desean participar.
A1: Los términos de la multiplicación son multiplicador, multiplicando.
P: Multiplicando, multiplicador y producto.
La profesora le pregunta a otro de los niños que quiere participar
P: ¿Está distinto o es lo mismo?
A2: Está distinto: dos por cinco diez, multiplicando 2, multiplicador 5, producto 10.
P*. Tú lo mostraste con un ejemplo. Fíjense que en la consulta de todas formas encontramos tres términos: multiplicando, multiplicador y producto. En lo que leyó Yilver* (la cámara no alcanza a capturar la voz) *encontramos que hay otra palabrita, ¿cuál es la otra palabrita que apareció por ahí?*
A_4*: Factores.*
P*. Factores, dice que el multiplicando y el multiplicador son factores, primero y segundo factor, nos dice el papel que hace cada uno, entonces vamos a copiar en el cuaderno. Como título, términos de la multiplicación, Agosto 27 de 2003.*

Como se puede observar, se quiere fijar un hecho: los términos de la multiplicación, sólo interesa en la clase "discutir" cuáles son estos términos, "*Factores, dice que el multiplicando y el multiplicador son factores, primero y segundo factor…",* no se evidencia relación alguna con la multiplicación como suma iterada, temática que se venía tratando anteriormente. Por lo que es posible afirmar que los temas son atomizados.

En la tercera columna del Plan de Aula, con el título LO HARÉ (actividades), se describen afirmaciones tales como *"aprenderse las tablas de multiplicar, empezando por la del 9", "leer, escribir y ordenar números correctamente hasta 5000", "realizar todas las actividades de clase en el tiempo asignado", "diariamente hacer en casa muchos ejercicios de lo visto en clase"*, las cuales ponen el acento en la memorización y podrían dejar ver lo que se proyecta en el sentido de propender por una eficiencia en el cálculo de la multiplicación, lo que evidencia criterios de evaluación para valorar el aprendizaje de la multiplicación.

En relación con tareas propuestas en el aula, se propone la siguiente en una de las pruebas escritas, en la cual se pide realizar otras representaciones para la multiplicación 9x5.
Representar la siguiente multiplicación: 9x5 con:

1º) suma reiterada, 2º) recta numérica, 3º) con área, 4º) con arreglo ordenado (ciudades, rutas, entre otras),

Cabe aclarar que estos ejercicios no exigen la memorización de las tablas de multiplicar, pues las listas de las tablas del 1 hasta el 9 aparecen fijadas en octavos de cartulina en las paredes del salón de clases. En este tipo de ejercicios se observa una constante que aparece en toda la unidad relativa a la multiplicación: enfatizar la multiplicación como suma reiterada, aspecto que de alguna manera devela una actividad matemática rutinaria y que además se hace presente cuando se les exige a los estudiantes en las tareas, como a continuación se ilustra, en las cuales los estudiantes ponen primero los guiones y los signos +, y posteriormente escriben los números 2:

Escriba 9x2 = 18 como una suma reiterada

9 veces 2 =___+ __+ __+___+ __+___+ __+___+ __

9 veces 2 = 2 + 2 + 2 + 2 + 2 + 2 + 2 + 2 + 2

Esta manera de proceder de los estudiantes frente a este tipo de ejercicios evidencia una forma de trabajar de manera rápida, pues es un trabajo mecánico, sólo importa contar las veces que se repite un cierto número en la suma repetida.

Ahora bien, el "avance conceptual" parece estar regulado por los compromisos puestos en la tercera columna de este Plan de Aula, no obstante, en las preparaciones de clase de la profesora, así como en las tareas propuestas en el aula se evidencian criterios evaluativos relacionados sólo con elementos de tipo representacional, por ejemplo: *"Las siguientes multiplicaciones representarlas en las tres formas vistas y con propiedad conmutativa. Ver ejemplo"* (Preparaciones de clase, p.3). Estas representaciones a las cuales alude la tarea son la suma reiterada, la recta numérica y con arreglos, sin embargo sólo se quiere reiterar que la multiplicación es una suma reiterada.

Si bien en el trabajo de aula aparecen ciertas "discusiones" entre la profesora y algunos de los estudiantes,
A_1: *Los términos de la multiplicación son multiplicador, multiplicando.*

P: Multiplicando, multiplicador y producto.

La profesora le pregunta a otro de los niños que quiere participar

P: ¿Está distinto o es lo mismo?

A2: Está distinto: dos por cinco diez, multiplicando 2, multiplicador 5, producto 10.

éstas se caracterizan por girar en torno a preguntas y respuestas sobre nombres (factores, multiplicando, multiplicador, producto). Ello puede estar ligado al hecho de que en todas las sesiones de clase siempre se pone de presente que la profesora es quien determina cuándo una producción de los estudiantes es válida o adecuada, los estudiantes siempre están a la espera de que la profesora confirme que la solución a una tarea en particular esté bien hecha. Esta afirmación encuentra validez además por los pronunciamientos de la profesora en la entrevista, en la cual se le pregunta: *Qué objeto tienes al colocar los vistos buenos en los cuadernos de tus estudiantes, tienen algún peso en la calificación final?*

P*: Más que tener peso en la nota final es para decirle al niño si ya puede pasar como a otra cosa, que sienta él la seguridad qué tanto ha avanzado en el proceso, porque igual puede tener un visto bueno hoy y resulta que mañana puede fallar, y puede fallar por múltiples factores, entonces es para seguridad del propio alumno .*

Se observa que los estudiantes están a la expectativa de que la profesora los valide, lo que a su vez les otorga seguridad, "[...] *es para decirle al niño si ya puede pasar como a otra cosa, que sienta él la seguridad qué tanto ha avanzado en el proceso* [...]", por lo que la profesora también es quien determina el avance conceptual de los estudiantes. Este avance conceptual está relacionado con un tratamiento del tópico multiplicación matizado por una interpretación como suma reiterada, pero ello puede obedecer a que el universo numérico que se aborda en este grado es el de los naturales. Más aún, si bien se hace trabajo al representar la multiplicación en la recta numérica y con arreglos, éstas sólo pretenden reiterar el trabajo con suma de sumandos iguales, en otros términos, las distintas representaciones abordadas se convierten en elementos fundamentales para fijar la multiplicación como suma iterada. Por lo que puede estar develando en la profesora una interpretación de la multiplicación sólo como una suma repetida, o al menos no se evidencia que la profesora potencie relaciones con otros conceptos o que posibilite el trabajo en otros contextos, aspectos éstos que se corroboran en la respuesta frente a la pregunta: *¿Cómo organizas la unidad relativa a la multiplicación en 3º?: "Venía valor posicional que es el eje de nuestra... de nuestro nivel, entonces a nivel del valor posicional ellos deben aprender con el ábaco el valor que tiene cada una de las fichas de acuerdo a la posición en el ábaco, entonces necesariamente al tomar esos valores van formando ellos como esos grupos, como esos conjuntos y de ahí se parte, entonces partiendo de valor posicional y después lo que es la suma reiterada aplicada en los otros modelos".*

Los modelos aquí esbozados son la recta numérica, arreglos y área. Como se observa, el trabajo se centra en la multiplicación como una suma reiterada a partir del valor posicional, pues permite conformar una unidad de conteo conformada por unidades múltiples, por ejemplo, un grupo de diez es una unidad múltiple llamada decena. En este sentido la actividad con el ábaco busca hacer ostensivo la formación de grupos iguales para introducir la multiplicación como suma reiterada, por lo que en el trabajo de aula, entonces, sólo interesa enfatizar este hecho (suma reiterada).

Las sesiones de clase transcurren por momentos a partir de una serie de interpretaciones para una misma tarea. Tal y como se presenta en el siguiente segmentos de la clase, el ejercicio no es claro para la gran mayoría de los estudiantes, quienes interpretan de manera distinta su enunciado.

Ejercicio

Unir los factores con el producto correspondiente

9	*5*	*45*	*12*	*3*	*6*
7	*8*	*56*	*4*	*5*	*30*

P: Bueno vamos a mirar acá, dice unir los factores con el producto correspondiente y encontramos ahí números en dos renglones, entonces vamos a buscar, nos vamos despacio buscando.

La profesora se ubica cerca del tablero y oculta con su cuerpo parte de los números, sólo deja al descubierto los números 9, 5, 7, 8, 45 y 56.

P: Hasta aquí, sin mirar a este lado, ¿ahí puedo encontrar dos factores y algún producto?.

Als: Sí

P: Sí, ¿cuáles unirían?

Als: Nueve por ocho, siete por ocho.

La interacción sigue con preguntas de la profesora y respuestas por parte de los estudiantes.

P: Unir los factores con el producto correspondiente, a ver hágalo como usted cree. El estudiante escribe el signo por y el signo igual entre los números 9, 5 y 45 y entre 7, 8 y 56

9 x 5 = 45   12 3 6

7 x 8 = 56   4 5 30

P: ¿Quedaron unidos?

A_3: Yo lo uní con los signos

P: ¿A quién se le ocurre unir de otra manera? Bueno unir, ¿qué es unir?

A_6:Ajuntar.

P: ¿Ajuntar?

A_6: Juntar

A_7: Agrupar.

P: ¿Cómo se les ocurre que puedo unirlos sin acercarlos, sin borrar, cómo los puedo unir?.

Se observa que no hay consenso en relación con el término unir, por lo que no se sabe entonces qué hacer con lo números que aparecen dispuestos.

Una estudiante pasa al tablero y escribe

9 + 5 + 45

P: Ahí sí, nueve más cinco más cuarenta y cinco.

La estudiante borra los signos más que hizo. Otra estudiante pasa al tablero y encierra el 7, el 8 y el 56.

7 x 8 = 56

P: Bueno ella unió así, ¿de qué otra manera puedo unir?

A esta altura del trabajo la profesora no acepta la respuesta dada por la última estudiante, pues sigue insistiendo que hay otra manera de unir los factores con el producto correspondiente.

Otro alumno pasa al tablero y escribe:

12 veces 3   6
4   5   30

P: Doce veces tres. ¿Cuánto le da doce veces tres?

El estudiante que ha escrito esto borra la palabra veces. Pasa otro estudiante al tablero y realiza lo siguiente

9 x 5 = 45		12	3	6
7 x 8 = 56		*4*	*5*	*30*

P: Ahora vamos a parar un momentico y vamos a mirar, en esta ¿qué hizo Felipe?, ¿cuáles son los factores y cuáles los productos?. ¿Cuáles son los factores?
Als coro: Nueve y cinco
P: ¿Por qué saben que son los factores?
P: Puedo decir que este es un factor, (señala el número 56), *este es factor (*señala el número 8) *y este es el producto* (señala el 7)
Als: ¡No!
P: *Este es factor* (señala el 8), *este es factor* (señala el 7) *y este es el producto* (señala el 56).
Als: ¡Sí!
P: Entonces ¿cómo se hace la unión de los factores con el producto correspondiente. Bueno yo diría que aquí hay un grupo pero los elementos están sueltos y dice unir, ¿qué es unir?. Bueno ustedes no ponen atención.

Se observa que la profesora recurre a razones de orden disciplinarias, "*Bueno ustedes no ponen atención*" , razones que pretenden justificar el por qué los estudiantes no entienden el término *unir*, sin embargo ya son varios los estudiantes que tienen interpretaciones diferentes para la tarea en cuestión.

Finalmente, la profesora ha colocado otros ejemplos para *unir* en la parte superior del tablero

8	*32*	*4*	*6*
5	*4*	*20*	*24*

Un alumno pasa y le coloca las flechas
P: Resalta el producto.

Se observa cómo la profesora plantea la exigencia en el ejercicio *unir los factores con el producto correspondiente,* y tal vez para ella es plenamente claro lo que se tiene que hacer (lo que aparece en la última parte del ejercicio), sin embargo no pocos estudiantes han interpretado de manera distinta lo que se debe hacer. En este sentido, la *norma matemática* que puede estar originando la diversidad de interpretaciones está relacionada con el enunciado del problema, en particular con el significado del término *unir.* Muy posiblemente los estudiantes protagonistas de las distintas interpretaciones reconocen los factores y el respectivo producto -pues no tienen necesidad de hacerlo debido a que éstas tablas están fijadas- en el citado ejercicio, sin embargo el término *unir* lo han significado de manera distinta frente a la interpretación de la profesora, lo que en manera alguna incide en la comunicación profesora–estudiantes.

3.4.2 Análisis de la sesión de clase sobre multiplicación en grado 4°

La clase parte de una serie de informaciones presentadas en algunos carteles tales como:

Fábrica de escobas la Mechita:

"El gerente canceló sueldos a 37 empleados"
"Se necesita fabricar 736 traperos""
"Diariamente despachan 37 buses"

Supermercado Don Pancho:

"El sueldo de un empleado es $63600"
"Hay 1319 caja de galletas"
"Una caja de chocolate vale $256000"
"Una libra de arroz vale $750, entre o"tros mensajes,

a partir de los cuales los estudiantes plantean una serie de "problemas" en los cuales el valor unitario es dado, por ejemplo: *Don Pancho compró 19 cajas de chocolate y cada una vale $256000, ¿cuánto valieron 19 cajas de chocolate?; Una libra de arroz vale $750 y María va a comprar 23 cajas de..., 23 libras de arroz. ¿Cuánto debe pagar María?*, entre otros. De esta manera, la clase se centra en el planteamiento y la resolución de "situaciones problema", actividad en la cual la profesora valida permanentemente las producciones de los estudiantes tanto con vistos buenos puestos en sus cuadernos como con una actitud gestual afirmativa acompañada verbalmente de la expresión ¡muy bien!.

Al parecer los criterios de evaluación están determinados por la construcción, a partir de las informaciones de los carteles, de "situaciones problema" en las cuales se da el valor unitario, por lo que el avance conceptual viene dado por la habilidad de los estudiantes en la construcción de dichas situaciones y en la respectiva solución, lo que se reafirma cuando la profesora propone que los estudiantes construyan otras situaciones problema diferentes o que no se encuentre relacionadas con las informaciones de los carteles, como por ejemplo la estudiante Paola que construye la siguiente:

El pasaje Bogotá a Sogamoso vale 13.752 y boy (sic) a comprar 500 tiquetes. ¿Cuánto me valen los 500 pasajes a 13.752?

Y lo resuelve de la siguiente manera:

Análisis para saber cuánto me valen los 500 pasajes de Bogotá a Sogamoso debe multiplicar 13.752 por los 500 tiquetes que compré.
Operación:

$$\begin{array}{r} 13.752 \\ \times 500 \\ \hline 00000 \\ 00000 \\ 68760 \\ \hline 6.876.000 \end{array}$$

En relación con este ejercicio la profesora dice: *le falta, le falta....haga, haga, la respuesta ¿no?*

Paola escribe como respuesta: *los 500 pasajes de Bogotá a Sogamoso me valen 6.876.000.*

Se observa que la profesora es quien determina la validez de la producción de Paola. El problema resuelto por Paola culmina, para ella, cuando hace la operación mostrada arriba, sin embargo su validez está dada sólo cuando la profesora le dice que debe presentar taxativamente la respuesta, lo que pone de presente una vez más que la profesora es quien tiene el criterio para legitimar la respuesta dada. Se observa aquí los criterios de legitimación como ejemplo de norma matemática, en este caso para Paola la respuesta ya está dada por su eficiencia y simplicidad, interpretaciones que no coinciden con la de la profesora, para quien al parecer la respuesta "formal" *"los 500 pasajes de Bogotá a Sogamoso me valen 6.876.000",* es lo correcto. Además este tipo de situaciones se constituyen en ejercicios en los que el estudiante sabe siempre qué hacer, dado el valor unitario ($13.752 cada pasaje), debe multiplicar dicho valor por el que se pregunta (valor de 500 pasajes). No son situaciones que generen retos a los estudiantes, que los hagan pensar.

García et al (2004) señalan que de esta manera la multiplicación sólo es aprendida como una operación aritmética que permite calcular valores numéricos, y la solución del problema se alcanza aritméticamente por el conocimiento de hechos numéricos, tablas de multiplicar, multiplicaciones abreviadas, pero no por la comprensión del tipo de relaciones matemáticas entre las cantidades involucradas en el contexto de la situación.

Se observa también cómo los estudiantes al proponérseles construir "nuevos problemas" relacionados con teatros, panaderías y estadios de fútbol, por parte de la profesora, se remiten a la misma estructura relacionada con las informaciones expuestas en los carteles, sólo que esta vez cambian algunos nombres (pues antes se plantearon con el supermercado, transportes, fábricas) pero la situación sigue siendo en el fondo la misma, en la que el valor unitario es dado. A continuación se muestra la sugerencia de la profesora (*P*) para que los estudiantes intenten construir situaciones problema y la construcción realizada por dos estudiante (A_1 *y* A_2):

P. A ver alguien va a construir un problema de un estadio. A ver sentadita, y escuche,

A_1. si una boleta.... si una boleta para entrar al estadio cuesta veinte mil pesos y Lucía compra diez, cuántas debe, cuánto debe pagar por las diez boletas que compra Lucía?
P. Muy bien , muy bien ....otro problema de un estadio, a ver, tanto que les gusta el fútbol a todos.
La profesora designa a otro estudiante para hacer el problema.
A ver, vamos a escuchar todos el problema de un estadio, colócate bien.
A_2. La boletería vale ochenta y cinco mil trescientos noventa y seis pesos
¿Cuál boletería?
P. ¿La boletería o la boleta?.

En este sentido se puede afirmar que la profesora instaura una manera de construir las situaciones problema, caracterizada básicamente por utilizar una sola representación (numérica), y en las cuales tiene que darse el valor unitario, lo cual caracteriza el tipo de tareas que en este caso están relacionadas con el diseño de situaciones problema a partir de ciertas informaciones prefijadas. En este segmento no se observan situaciones en las cuales el valor unitario no sea dado, lo que en términos de Vergnaud (1994) estaría mostrando un problema más complejo y un nivel de competencia más elevado para su solución.

Ahora bien, la preparación de la clase pone el acento en *la multiplicación como sumas abreviadas y como herramienta de solución ante diversas situaciones problema (Preparación de clase de grado 4º, p.1).* Y la competencia matemática que se quiere desarrollar está planteada de la siguiente manera: *Construye y resuelva de manera efectiva situaciones problema en las que involucre la multiplicación como elemento de solución (Preparación de clase de grado 4º, p.1).* La competencia matemática planteada se puede interpretar como la meta por alcanzar, sólo que se reduce a problemas en los cuales el valor unitario es conocido y en tal sentido al no considerar o potenciar situaciones donde este valor no sea dado, no es posible el desarrollo de la competencia de *manera efectiva,* tal y como se ha afirmado.

Se puede afirmar que la interpretación sobre la multiplicación por parte de la profesora está asociada a la idea de herramienta que permite encontrar el resultado de ciertas situaciones problema planteadas, lo cual estaría mostrando una intención manifiesta según la cual la multiplicación le sirve sólo para resolver "problemas" de la vida cotidiana. Estas aseveraciones se confirman en sus declaraciones en la entrevista, *"Lo más importante es la aplicación de la multiplicación en su vida cotidiana, en casos de su vida cotidiana",* además su interpretación también está asociada al reconocimiento de que la multiplicación es más rápida que hacer una suma de sumandos iguales la suma reiterada, *"A ver, la multiplicación la enseño fundamentalmente para que el niño entienda que cuando necesita saber el valor de varias cosas que tienen el mismo valor, no se necesita hacer una suma sino que hay una forma más abreviada que es la multiplicación. De esta manera los niños van entendiendo que para solucionar situaciones problema, de su casa, de su hogar, entonces aplican la multiplicación en determinadas ocasiones".*

El nivel de complejidad de las multiplicaciones está determinado por el número de cifras que componen el multiplicando y/o el multiplicador, tal y como lo expresa taxativamente la profesora *(P)* en el siguiente diálogo:

E*: ¿Qué es lo nuevo que tú enseñas en cuarto de la multiplicación si ya en tercero se ha abordado la multiplicación?.*

P*: Ah bueno, sí, en tercero se ha abordado la multiplicación por una y dos cifras, en cuarto hago mucho énfasis en las multiplicaciones abreviadas, las multiplicaciones por 11, 12, 13, 14, 9, 99,999, por 25 por 10, 100, y fuera de eso como que hago la multiplicación más compleja...*

E*: ¿En qué sentido es más compleja?*

P*: Es más compleja por ejemplo en el número, en los números que yo les doy, que ya no van a ser de uno o de dos sino de tres cifras, por ejemplo a un número le coloco al multiplicando o al multiplicador un cero intermedio, por ejemplo, 202, o por ejemplo le coloco multiplicar por 200, para ver todas esas situaciones ¿sí?...*

E*: ¿Y eso para tí es más complejo?*

P*: ¡Claro!, eso para mi es mucho más complejo, por ejemplo un niño de tercero hace la multiplicación simplemente y sabe es el procedimiento, pero ya cuando hay una multiplicación donde haya casos especiales que en el multiplicando o en el multiplicador hay ceros, ya es un caso especial donde el niño tiene que entender esos pasos, tiene que saber esos pasos, para seguir más adelante.*

A partir de este diálogo y de las construcciones de las situaciones problemas por parte de los estudiantes validadas por la profesora,

A_1. si una boleta.... si una boleta para entrar al estadio cuesta veinte mil pesos y Lucía compra diez, cuántas debe, cuánto debe pagar por las diez boletas que compra Lucía?

P. Muy bien , muy bien

es posible afirmar que los criterios de evaluación están caracterizados por la eficiencia en la solución a las tareas que propone, relacionadas con el cálculo de la multiplicación, memorización de las reglas para multiplicar por una y dos cifras. Este último aspecto también se evidencia en el siguiente extracto de la clase: "*la multiplicación por 10 , 100, 1000, ... ¿se acuerdan cómo se multiplica abreviadamente?.... A ver aquí ya aplicaron la multiplicación abreviada por 31, se acuerdan 21, 31, 41,...".*, lo que daría cuenta del desarrollo de habilidades y destrezas en el cálculo. Estos criterios tienen razón de ser a partir de la organización de los temas, lo que en el contexto de esta clase estaría relacionado con la manera como instaura el trabajo con la multiplicación, lo cual a su vez devela un tipo de actividad matemática caracterizada por la construcción de situaciones problema en las cuales siempre se da el valor unitario.

3.4.3 Análisis de la sesión de clase sobre multiplicación en grado 5°

La clase sobre multiplicación en este grado se introduce con el siguiente problema:

El señor que vende paraguas a razón de $9.680 cada uno, ha vendido 12 paraguas, cuánto dinero le produjo esta venta
1) haciendo la suma
2) reemplazando la suma por una multiplicación
3) colocar los términos de la multiplicación

Por un lado, éste es un ejercicio en el cual se da el valor unitario, un paraguas vale $9680, y por otro las exigencias 1), 2) pretenden establecer una diferencia entre realizar la suma de los sumandos iguales (9.680 doce veces) y hacer la multiplicación, por su parte la exigencia 3) sólo quiere que los estudiantes recuerden cuáles son los términos de la multiplicación. Se enfatiza que "*la multiplicación es práctica, como más fácil, más sencilla que hacer una* *suma de varios sumandos",* esto se acompaña también del énfasis otorgado al reconocimiento de los términos de la multiplicación y en la insistencia de memorizarlos, tal y como se observa en el siguiente extracto de la clase:

..."En la multiplicación estos dos términos tienen su nombre, los vamos a bautizar. Cómo creen que se llaman esos términos (y señala los dos términos de la multiplicación)*". Distraendo,* responden algunos estudiantes*, sustraendo* responden otros. El profesor interviene de nuevo diciendo *"¿Cómo se les va a olvidar?. Se van a llamar Fac.... tores. Que no se les olvide, factores y este resultado* (señalándolo) *se llama pro... ducto".*

Se observa como se insiste en la memorización de los términos de la multiplicación, lo que se refuerza con el tipo de tareas planteadas en la clase las cuales tienen el propósito de fijar que la multiplicación reemplaza una suma reiterada y que es más fácil hacer la multiplicación, tal y como se muestra en las dos siguientes:
"Bueno, bueno qué fue........... pero ojalá que le quepan ahí las doce veces. (refiriéndose a su petición de escribir el número 9.680 12 veces). El alumno ha escrito en el tablero las cantidades

9680
9680

cuando el profesor le dice "pero ojalá que le quepan ahí las doce veces", el estudiante procede escribiendo el número 9 doce veces, luego el 6 doce veces, 8 doce veces, 0 doce veces, y simultáneamente el profesor va pronunciando: "uno, dos, tres, cuatro, cinco, seis, siete, ocho, nueve, diez, once, doce, correcto, bien.
El profesor escribe en el tablero:

2.685
2.685
2.685
2.685
2.685
2.685
2.685
2.685

Al lado derecho de la suma escribe y va diciendo. *Cuántas veces se repite el número dos mil seiscientos ochenta y cinco 2.685 ______________ aquí contestan.*

Se observa que al plantear ejercicios de multiplicación como suma reiterada, se considera como correctas las respuestas de los estudiantes en las cuales el número de sumandos corresponde al número de sumandos que el profesor establece en la tarea propuesta, en este caso al profesor tal vez no le interesa si el resultado es correcto o no, sólo si el número de veces que se repite el sumando propuesto por él coincide exactamente con el número propuesto por el estudiante en su cuaderno, de esta afirmación y de la que arroja la siguiente cita de la entrevista es posible concluir lo aludido anteriormente. Por lo que los estudiantes de esta clase reconocen al profesor como la autoridad con respecto al conocimiento, pues es él quien aprueba o desaprueba su producción, determina lo que es correcto, razonable o válido.

"La multiplicación viene a reemplazar una suma de sumandos iguales" y "la multiplicación es más práctica" son frases que hacen "carrera en la clase". Por lo que podría afirmarse que los criterios de evaluación están caracterizados por la eficiencia en el cálculo de la multiplicación. En este sentido, se devela una concepción de la actividad matemática centrada en la realización de ejercicios (tal y como se ha mostrado) en los cuales los estudiantes deben hacer siempre lo mismo: suma reiterada, multiplicar, reconocer los términos, lograr establecer que la multiplicación es más rápida que hacer la suma. En otras palabras, los criterios de evaluación son dependientes de esta actividad matemática, lo que a su vez es dependiente de la manera como se organiza la clase en torno a la multiplicación.

Es posible señalar entonces que los objetivos (de contenido) están claramente expresados por el profesor para quien le interesa que sus estudiantes desplieguen acciones tendientes a reconocer la multiplicación "como más práctica", y en ese sentido se establece el avance conceptual de los estudiantes, pues no hay indicios de rupturas conceptuales relacionadas, por ejemplo, con el conocimiento de otras situaciones.

En este sentido se establece en el aula una norma matemática (Planas, 2002) según la cual para el profesor la multiplicación es práctica, lo que en este caso resuelve el problema del grado de complejidad por la cantidad de cifras (9.680 doce veces) que se involucran en los algoritmos.

La interpretación que hace el profesor del concepto multiplicación es el de suma reiterada, sin embargo no es clara, pues frente a la pregunta *¿Siempre es posible mirar la multiplicación como una suma reiterada? o ¿existen casos en los cuales no es posible significarla como una suma reiterada?*, su pronunciamiento no deja el manejo de esta interpretación: *Pues, sí, claro, está el caso por ejemplo eh..., donde hay un solo sumando, ... 3x1 o 50x1, o también donde no existe nada, ..,. 5x0, se anula la operación ahí.* En este caso 3x1 o 50x1 puede verse también como una suma reiterada, lo mismo que en 5x0.

En síntesis, se evidencia una organización didáctica en torno a la multiplicación a partir de una serie de ejercicios que intentan enfatizar la multiplicación como una operación más práctica que realizar una suma reiterada. Se observa una clase permeada por un aprendizaje de la multiplicación de carácter puntual, instantáneo, inmediato, por lo que las prácticas matemáticas están legitimadas por criterios como por ejemplo la rapidez y la eficiencia en el cálculo de la multiplicación, aspectos que se encuentran íntimamente ligados con el tipo de tareas que se han presentados en este análisis, las cuales determinan la actividad matemática de los estudiantes.

4. CONCLUSIONES Y CUESTIONES ABIERTAS

Se presentan las conclusiones de este estudio y algunas sugerencias para continuar en la investigación sobre la evaluación en el aula de matemáticas.

Respecto al objetivo general de este estudio: Describir y analizar cómo las organizaciones didácticas matemáticas de los contenidos relativos a la multiplicación constituyen un factor determinante de los criterios para valorar su aprendizaje, según el análisis e interpretación (apartado 3.4) se puede afirmar que en las aulas estudiadas efectivamente la forma de organizar los contenidos matemáticos relativos a la multiplicación es un factor que determina los criterios para valorar su aprendizaje.

Estas organizaciones didácticas encontradas, atomizadas en el grado tercero, por "situaciones problema" (en las cuales el valor unitario siempre es dado) en el aula de cuarto, y a partir de ejercicios rutinarios en el grado quinto, determinan el tipo de tareas que se proponen en el aula, tareas que tienen la intención de fijar hechos. Esto devela una concepción inmediatista del aprendizaje de la multiplicación, soportada por criterios de evaluación caracterizados por: la eficiencia en el cálculo de la multiplicación, ver la multiplicación como una suma reiterada, reconocer los términos de la multiplicación, memorizar las reglas para multiplicar por una y dos cifras, entre otros.

En el aula de cuarto, por ejemplo, al abordar gran parte del trabajo a partir de situaciones problema, se devela cómo los criterios de evaluación están supeditados a la manera como se organiza el trabajo de aula, a partir de la construcción de situaciones problema relacionadas con la tienda del barrio, la fábrica, la empresa de transporte, etc,. En particular los criterios de evaluación dan cuenta de construcciones de situaciones problema que siguen, todas, el mismo esquema: el valor unitario es dado, tal y como fueron propuestas por la profesora y emulados por algunos estudiantes.

Por su parte, las aulas de tercero y quinto presentan similares tipos de organizaciones didácticas, lo que devela criterios de evaluación del aprendizaje de la multiplicación similares y caracterizados por reconocer la multiplicación como una suma repetida, y enfatizar que es más práctico realizar una multiplicación que efectuar una suma en donde todos los sumandos son iguales.

Todos los problemas propuestos y desarrollados en las aulas de 4° y 5°, incluso los propuestos por algunos estudiantes del grado 4° presentan una misma característica: *el valor unitario es dado*. No se presentan en estos grados, en relación con la unidad relativa a la multiplicación, problemas en los cuales este valor no sea presentado, lo que según Vergnaud (1994, 1997), estaría mostrando un mayor nivel en el desarrollo de la competencia multiplicativa.

El trabajo de aula en los grados 3° y 5° no presenta mayores diferencias, pues se abordan los mismos contenidos, esto es: *Multiplicación como suma reiterada, términos de la multiplicación, algoritmo de la multiplicación, propiedades de la multiplicación,* entre otros. En este sentido, no se sabría cuáles serían las diferencias desde el punto de vista conceptual, más específicamente en el desarrollo de la competencia multiplicativa en estas aulas. Por su parte en el aula de 4° se propicia un trabajo a partir de situaciones problema, controladas por la profesora quien instaura una forma de plantearlas, ello obliga al grupo de estudiantes a seguir el mismo esquema de planteamiento de los problemas, caracterizados por el conocimiento del valor unitario.

Hay evidencias en las aulas de 3°, 4° y 5° de una concepción inmediatista del aprendizaje de la multiplicación, determinado por los objetivos puntuales y terminales y estrechamente relacionados con la manera como se organizan los contenidos matemáticos relativos a la multiplicación. Por ello no es de extrañar criterios de evaluación caracterizados por la eficiencia en el cálculo de la multiplicación, o en enfatizar la multiplicación como una suma reiterada.

En las aulas de 3°, 4° y 5° hay presencia de normas matemáticas caracterizadas todas ellas por las distintas interpretaciones por parte de los estudiantes frente a ciertas tareas propuestas por los profesores.

En todas las aulas estudiadas emerge un hecho (categoría de investigación) que es importante destacar, según el cual quien aparece legitimando las producciones de los estudiantes es el profesor, en él los estudiantes esperan un visto bueno en sus cuadernos o una muestra de actitud positiva como ¡muy bien!, lo que les da seguridad para seguir con el trabajo propuesto en clase y a la vez puede crear en ellos el imaginario que efectivamente están avanzando significativamente en el aprendizaje de la multiplicación.

No parece evidenciarse en los profesores una visión a largo plazo del desarrollo de la competencia multiplicativa, pues los objetivos (por lo general de contenido) propuestos ya sea por ellos o por la institución, son puntuales y terminales, por ejemplo, aprender los términos de la multiplicación, memorizar las reglas para hacer multiplicaciones abreviadas, aprender que la multiplicación es una suma reiterada, aprender las propiedades de la multiplicación, entre otros, los cuales aparecen como elementos constitutivos en las tareas propuestas en el aula. En consecuencia, es muy escaso el trabajo que pretende potenciar relaciones con otros conceptos matemáticos especialmente en el grado 5º, así como también es escaso la exploración de otras representaciones y de situaciones asociadas con la multiplicación.

Finalmente es importante señalar en el análisis de la sesión del aula de 4º, cómo se hace presente un tipo de cultura escolar que permea toda la clase, en la cual se reitera la situación del supermercado (Don Pancho), la fábrica de escobas (La Mechita), entre otras, quizás distintas a las que se emplean en otras instituciones y en las que el tipo de cultura escolar difiere substancialmente.

Cuestiones abiertas

Es natural que en un estudio como éste queden abiertos interrogantes. A continuación se describen algunos:

► Continuar y profundizar el trabajo de los criterios de evaluación del aprendizaje en las aulas de sexto a noveno, en relación con los tópicos inmersos en el CCM, para intentar tener un perspectiva más compleja de estos criterios, debido a que estos tópicos están presentes hasta el final de la Educación Básica.

► Estudiar la problemática esbozada anteriormente en los grados de la Educación Media (décimo y undécimo).

► Estudiar el Álgebra como campo conceptual e indagar sobre las relaciones entre esta forma de organizar los contenidos algebraicos y los criterios de evaluación correspondientes.

BIBLIOGRAFÍA

Castro, E. (1995). *Niveles de comprensión en problemas verbales de comparación multiplicativa*. Colección Mathema. Granada.

Centeno, J. (1988). *Números decimales. ¿Por qué? ¿Para qué?.* Madrid: Síntesis.

Chevallard, Y. (1991). *La Transposición Didáctica. Del saber sabio al saber enseñado*. Madrid: Aique. Traducción al español por Claudia Gilman.

Chevallard, Y., Bosch, M., y Gascón, J. (1997). *Estudiar matemáticas. El eslabón perdido entre enseñanza y aprendizaje.* ICE-Horson. Barcelona.

Confrey, J. y Harel, G. (1994). *Historical Precedents.* En: The Development of MULTILPLICATIVE REASONING in the Learning of Mathematics. Ed by Guershon Harel and Jere Confrey.

Dickson, L, Et al. (1991). *El aprendizaje de las matemáticas*. Madrid: Labor. Traducción al español por Luis Bou.

Douady, R. (1996). *Ingeniería didáctica y evolución de la relación con el saber en las matemáticas de Collège-Seconde.* En: La enseñanza de las matemáticas: Puntos de referencia entre los saberes, los programas y la práctica. Paris: Topique, p. 241-256.

Fiol, M. y Fortuny, J. (1990). *Proporcionalidad directa. La forma y el número.* Madrid: Síntesis.

García, G. (2003). *El contrato didáctico y la evaluación del conocimiento matemático*. En prensa. Universidad Pedagógica Nacional.

García, G. (2002). *Criterios de evaluación y concepciones epistemológicas de las matemáticas escolares*. Universidad Pedagógica Nacional.

García, G. et al. (2001). *Modelos y prácticas evaluativas de las matemáticas en la Educación Básica. El caso del campo multiplicativo*. Universidad Pedagógica Nacional, Colciencias. Impreso.

García, G. et al (2003). *La dimensión socio-cultural en el criterio de competencia: el caso de matemáticas*. Universidad Nacional de Colombia. Impreso.

García G., et al. (2002). *La aproximación. Una noción básica en el cálculo. Un estudio en la Educación Básica.* Universidad Pedagógica Nacional: Bogotá.

García, G. et al. (2004). *Modelos y prácticas evaluativas de las matemáticas en la Educación Básica. El caso del campo multiplicativo*. Universidad Pedagógica Nacional, Colciencias. Informe final.

Gascón, J. (1997). *Cambios en el contrato didáctico: el paso de estudiar matemáticas en secundaria a estudiar matemáticas en la Universidad*. En: Revista SUMA. Vol 26, pp 11-21.

Giménez, J. (1997). *La evaluación en matemáticas. Una integración de perspectivas.* Madrid: Síntesis.

Giménez, J. et al. (1997). *¿Por qué y para qué evaluar en matemáticas?*. En: Giménez, J. Evaluación en matemáticas. Una integración de perspectivas. Síntesis: Madrid, p. 29-31.

Godino, J. y Batanero, C. (1994). *Significado institucional y personal de los objetos matemáticos*. En: Recherches en Didactique des Mathèmatiques, Vol. 14, nº 3: 325-355.

Greer, B. (1992). *La Multiplicación y la División como Modelos de Situaciones*. En D. GROUWS (Eds). Handbook of researhc on mathematics teaching and learning Macmillan: N. Y. Pg vii-xxviii.

Lamon, S. J. (1982). *Ratio and Proportion: Cognitive Foundations in Unitizing and Norming.* Edit. Guerson Harel and Jerey Confrey. pp. 89-120. State of New York Press.

Lang, S. (1976). *Álgebra Lineal.* México: Fondo Educativo Interamericano.

Ministerio de Educación Nacional. (1985). *Programas Curriculares. Cuarto grado de educación básica.*

National Council of Teachers of Mathematics. (N.C.T.M.) (1991). *Mathematics Assessment: miths, models, good questions and practical suggestions*. Stemark (ed). University of California.
Planas, N. y Gorgorió, N. (2001). *Estudio de la diversidad de interpretaciones de la norma matemática en un aula multicultural*. En: Enseñanza de las Ciencias, 19 (1), 135-150.

Puig, L. (2000). *Análisis fenomenológico*. En: La Educación Matemática en la enseñanza secundaria. Rico, L. (coord..) Barcelona: Horsori.

Rico, L. (1990). *Diseño curricular en Educación Matemática. Elementos y evaluación.* En: Llinares, S. Y Sánchez, M. (Eds). Teoría y práctica en Educación Matemática. Sevilla: Alfar. P. 117-172.

Romberg, T., A. (Edit). (1992). *Mathematics Assessment and Evaluation Imperatives for Mathematics Educators*. Library of Congress.

Secretaría de Educación Distrital (1999). *Resultados Evaluación de Competencias Básicas en Lenguaje, Matemáticas y Ciencias*. Alcaldía Mayor Santa Fe de Bogota D. C.

Vergnaud, G. (2000). *El niño, las matemáticas y la realidad*. México: Trillas.

Vergnaud, G. (1997). *The nature of mathematical concepts*. En: Nunes, T. y Bryant, P. (Eds). Learning and Teaching Mathematics, An Interactime Perspective. Hove Psychology. Press Ltd.

Vergnaud, G. (1993). *La Teoría de los Campos Conceptuales*. En: Lecturas en Didáctica de las Matemáticas Escuela Francesa. Sección de Matemática Educativa del CINVESTAV- IPN. México. Pg. 88-117.

Vergnaud, G. (1994). *Multiplicative Conceptual Field: What and Why?* En: The Development of MULTILPLICATIVE REASONING in the Learning of Mathematics. Ed by Guershon Harel and Jere Conferí. Pg 41-60.

Vergnaud, G. (1990). *Epistemología y Psicología de la Educación Matemática.* En: Mathematics and Cognition: A Research Synthesis by the International Group for the Psicology of Mathematics Education. Ed por Pearla Nesher y

Jeremy Kilpatrick. Cambridge University Press. Traducción de Moisés Coriat Benarroch.

Webb, N. (1992). *Assessement of Student's Knowledge of Mathematics: Steps Toward a Theory.* Capitulo 26 del Handbook of Research on Mathematics and Learning Mathematics D. A. Grouws editor. MacMillan. New York.

ANEXOS

Entrevista realizadas a los profesores[4]

Colegio: Federico García Lorca (Escuela Betania)
Grado: 3°

Entrevistador: *¿Qué consideras más importante que los estudiantes aprendan de la multiplicación?*

Profesora: En 3° lo fundamental es su inicio ¿no?, prepararlos desde cómo empieza la estructura multiplicativa. Con esto quiero decir que no se puede descuidar la suma, porque de ahí ellos empiezan a hacer y conformar sus grupos para saber llegar a utilizar los diferentes modelos, sea la recta numérica, sea área, el ábaco, y puedan saber que cada vez que cuando están pasando una cantidad es un grupo que lo puedo repetir varias veces.

E: ¿*Qué objeto tienes al colocar los vistos buenos en los cuadernos de tus estudiantes, tienen algún peso en la calificación final?*

P: Más que tener peso en la nota final es para decirle al niño si ya puede pasar como a otra cosa, que sienta él la seguridad qué tanto he avanzado en el proceso, porque igual puede tener un visto bueno hoy y resulta que mañana puede fallar, y puede fallar por múltiples factores, entonces es para seguridad del propio alumno. Y quienes tenían el visto malo precisamente era para que supiera hay que corregir, se le ponían los ejercicios aparte para que él supiera en qué estaba fallando; entonces más que por dar la calificación final era en sí por su proceso de aprendizaje como tal, porque pienso yo que un alumno se siente más seguro cuando dice supe cuál es mi error y qué debo hacer que cuando me pusieron insuficiente y nunca supe qué fue lo que pasó o excelente y tampoco supe por qué lo saqué.

E: ¿*Qué otros instrumentos utilizas para evaluar, además de las previas escritas?*

---

[4] Se transcriben las entrevistas realizadas a los profesores de tercero, cuarto y quinto, tal y como ellos contestaron, es decir con las pausas, muletillas, ciertas expresiones muy coloquiales, como por ejemplo "pelao" para referirse a estudiante, "profe" para referirse a profesor, entre otras.

P: Ah sí claro, toda la misma clase, en ocasiones cuando uno se queda en el salón con ellos, que ellos le comentan algo a uno, como por ejemplo no fui capaz de hacer esto, entonces yo les digo déjeme ver qué es lo que estuvo haciendo. Eso hace parte del proceso y de la evaluación que es a cada momento, no necesariamente lleva lo que es la pura evaluación escrita, también miro las pasadas al tablero, el hecho de que estén trabajando, cuando hay ocasiones que tengo que nivelar los niños en otra área y los coloco a ellos a que hagan esto mientras miro a los demás, o cuando ellos voluntariamente arrancan con algo,... todo eso me va dando a mí indicadores para evaluarlos.

E: *En ese mismo sentido, ¿qué haces con los resultados de la evaluación?*

P: Pues la evaluación me permite establecer en qué parte van ellos del proceso, entonces cuando llega al final uno en la libreta puede escribir tal cosa o llamar antes al papá y decirle necesito que me traiga esto, que trabajen con sus hijos x cosa para uno saber si realmente va a conseguir todo el proceso.

E: *¿Por qué y para qué enseñas la multiplicación en 3º?*

P: De acuerdo al plan de estudios establecido por la institución se tomó estructura multiplicativa para cuarto grado. Entonces en tercero se tomó esta parte básica para que cuando lleguen a cuarto ellos puedan trabajar mejor el resto de temáticas.

E: *¿Cómo organizas la unidad relativa a la multiplicación en 3º?*

P: Venía valor posicional que es el eje de nuestra... de nuestro nivel, entonces a nivel del valor posicional ellos deben aprender con el ábaco el valor que tiene cada una de las fichas de acuerdo a la posición en el ábaco, entonces necesariamente al tomar esos valores van formando ellos como esos grupos, como esos conjuntos y de ahí se parte, entonces partiendo de valor posicional y después lo que es la suma reiterada aplicada en los otros modelos.

E: *De esa manera como organizas la unidad, ¿logras establecer relación con otros contenidos matemáticos?*

P: Bueno, sí en este caso, los niños de verdad que me dieron satisfacción porque en el momento en que empezamos a ver fracciones, entonces ellos mismos dijeron, en el momento de dividir la unidad mirando el denominador, entonces ellos dijeron ¡ah profe como el área en la multiplicación!, y tomaban las partes de ese conjunto que necesitaban, entonces, no todos pero sí ve uno que alcanza a dejarles determinadas bases, determinados fundamentos para otros temas.

E: *Cómo logras establecer el avance conceptual de los niños frente a la multiplicación?*

P: Cuando uno va pasando al siguiente aspecto ellos mismos le van... por la cara, por expresiones, en la misma evaluación escrita, en las tareas, en los trabajos, simplemente porque ellos son aquí muy espontáneos y se acercan y dicen... profe ya pasamos a tal cosa y no he entendido lo anterior, entonces por la misma observación que hace uno de ellos, por el mismo seguimiento, uno se va dando cuenta, esto no... no puede entender todavía porque no ha quemado lo anterior. Ya después, ellos terminaron, por ejemplo, haciendo escalas, multiplicando y dividiendo, escalas grandes, y quienes tenían esas dificultades anteriores ahí inmediatamente se veía, porque como ellos tienen que utilizar ahí toda la estructura multiplicativa, entonces no hay cosas perfectas porque el proceso de verdad es muy difícil llevarlo a cabo como tal, por tiempo, por muchas otras cosas, pero sí ve uno que quienes uno había dicho este quedó flojo en tal cosa ahí volvía y se demostraba, entonces hubo necesidad en las semanas de reposición de sentarse uno con ellos.

E: ¿*Cómo concibes la competencia multiplicativa y cómo crees tú que se desarrolla ese tipo de competencia en los niños?*

P: Pues yo veo en unas ocasiones que eso se ha dado como de memoria y sin embargo desde ese punto de vista que se ha dado como sin el proceso, entonces encuentra uno que el niño al momento de enfrentarse a una evaluación de éstas le hace falta como ese desarrollo del pensamiento. Paralelo al trabajo que se hizo aquí con matemáticas usted mismo se dio cuenta que tenía yo algunas evaluaciones viejas de estas que les aplican en el distrito para que ellos las trabajaran, fuimos tomando puntos, los fuimos comentando y para mi fue muy gratificante ver que cogieron sus evaluaciones muchos niños y no tuvieron necesidad ni de que uno explicara qué era lo que había qué hacer, entonces hay que formar grupos, o lo que sea porque uno dice estas bases les han quedado como bien a esos niños que realmente han estado dentro del proceso; lógicamente hay niños con bastante dificultad y entonces les ve uno que les quedan estos procesos como truncados y en el momento de esas evaluaciones dice uno no tienen como esa capacidad de análisis porque no han superado esos procesos. Entonces yo sí soy como muy amiga de que ellos quemen esos procesos y esas etapas, de ahí que me parecía importante que vieran eso en tercero para que ya en cuarto aunque no se logre como tal la estructura multiplicativa, sí tengan una buena base.

E: *Si en tercero se trabaja la multiplicación como suma reiterada, ¿qué es lo que se trabaja en cuarto y en quinto de la multiplicación?*

P: Bueno me tocaría pensar lo que yo iría a trabajar en cuarto, porque la verdad no se en este momento cómo han trabajado en cuarto, eso varía mucho dependiendo del docente. Pero sí tiene uno que hacer nuevamente ese empalme, no la puedo dejar allá atrás, no, igual ellos la tienen que seguir utilizando así porque si no, de todas maneras esa falta de práctica uno ve que aquí en el sector ellos lo que no practican lo olvidan con mucha facilidad, y estoy casi segura porque a una misma le pasa, después de mitad de año llegan como si no hubieran visto nunca nada, entonces sencillamente es hacer el enlace y que ya uno pueda dedicarse únicamente lo que son problemas, problemas como ejercicio y problemas cotidianos, de análisis, de inferencias, porque ellos este año los problemas que vieron fueron unos poquito a nivel de ejercicios como mecánicos prácticamente, y los otros problemas que ya eran de análisis, de apropiarse del texto y poder decir me tocaría aquí tantos saltos da la rana. Entonces ya que en cuarto se dedicaran más a esa parte que es a la que ellos le tienen más miedo. Entonces desde que a ellos les quede claro lo que es realmente multiplicar y dividir, y cómo yo puedo dividir a partir de formar estos grupos de cuántas veces está este en este, entonces que la estructura multiplicativa son las dos cosas al tiempo, entonces que ya puedan ellos aplicarlos en esos problemas cotidianos que es lo que más se les dificulta.

E: *En el plan de área se establecen unas temáticas relacionadas con la multiplicación y al final aparecen problemas de aplicación. ¿Qué caracteriza estos problemas y cómo los trabajaste con los niños?*

P: Bueno, se aplicaron como de dos formas: el problema-ejercicio, el que ellos hacen como estructura básica de análisis, operación y respuesta y que saben ellos que deben hacer la multiplicación. Entonces para evitar que supieran inmediatamente la multiplicación, se ponían problemas con suma con resta, o sea repasando lo anterior y después iban ahí los de multiplicación, para no colocarlos de una vez que supieran que eran de multiplicación, simplemente por el hecho de que estamos viendo multiplicación, esos por una parte, y los otros los estilo pulse, que son como de lógica, de pistas, de búsqueda, de por ejemplo si mi hermano tiene ocho bolsillos en el pantalón y en cada bolsillo empieza echando de a dos y en el otro el doble y en el otro el triple, entonces cuántos tiene en total, cosas así, o de repartir, de dividir, pero de esos de estilo pulses trabajaron bastante. Ellos saben y notan la diferencia entre el uno y el otro.

Colegio: Tomás Carrasquilla
Grado: 4º

Entrevistador: *¿Qué consideras más importante que los estudiantes aprendan de la multiplicación?*

Profesora: Lo más importante es la aplicación de la multiplicación en su vida cotidiana, en casos de su viada cotidiana.

E: *¿Qué objeto tienes al colocar los vistos buenos en los cuadernos de tus estudiantes, tienen algún peso en la calificación final?*

P: Generalmente cuando uno manda a hacer algún trabajo en el cuaderno como maestro a uno le gustaría que todo mundo trabajara, entonces el visto bueno a mi me indica que el alumno trabajó sobre el tema que estábamos viendo.

E: *¿Qué otros instrumentos utilizas para evaluar, además de las previas escritas?*

P: Fuera de la previa escrita paso los niños al tablero, a veces les doy hojas para que ellos propongan cosas, les doy oportunidad para que ellos construyan un poquito porque es muy difícil construir, y ese día les dí la oportunidad para que ellos plantearan problemas de lo que ellos quisieran.

E: *¿Qué haces con los resultados de la evaluación?, ¿qué función tienen?*

P: Siempre nosotros tenemos sistemas evaluativos, entonces cada uno de esos resultados a mi me indican qué grado de comprensión ha tenido el niño en el tema, entonces eso me da un acumulativo para saber hasta qué grado de comprensión el niño ha tenido de determinado tema, eso es lo que estamos evaluando.

E: *¿Por qué y para qué enseñas la multiplicación en 4º?*

P: A ver, la multiplicación la enseño fundamentalmente para que el niño entienda que cuando necesita saber el valor de varias cosas que tienen el mismo valor, no se necesita hacer una suma sino que hay una forma más abreviada que es la multiplicación. De esta manera los niños van entendiendo que para solucionar situaciones problema, de su casa, de su hogar, entonces aplican la multiplicación en determinadas ocasiones.

E: *Qué es lo que concibes por situación problema?*

P: Es algo que se le presenta al niño en la casa, por ejemplo que la mamá lo manda a traer unos huevos y le da, digamos $10000, entonces el niño va y compra los huevos y él debe saber cuánto debe pagar. Yo les he dicho que si uno no sabe eso pues lo más seguro es que va a recibir las vueltas mal o que le cobren más de la cuenta.

E: *¿Cómo organizas la unidad relativa a la multiplicación en 4º?*

P: Bueno, primero para iniciar la clase les hice una clase de exploración, donde yo les ponía situaciones problema, donde ellos tenían que hacer una suma cuando las cantidades eran de diferente valor, y le ponía situaciones donde era un solo valor, entonces los puse a comparar, por ejemplo cuánto gastaba aquí haciendo este problema, por ejemplo sumando todas las cantidades, y cuánto gastaba de la otra forma, que era haciendo la multiplicación y ellos se dieron cuenta y analizaron y dijeron ¿verdad? Pues la multiplicación es más rápida, para que nos ponemos a sumar todo eso, en lugar de multiplicar, ellos se dieron cuenta de eso. Bueno eso fue con problemas suavecitos, problemas de tercerito, después les expliqué ya que era la multiplicación, lo que era la parte formal de la multiplicación, sus componentes, multiplicando, multiplicador y resultado, después de hacer multiplicaciones muy sencillitas fuimos avanzando en las multiplicaciones más avanzadas, ya con multiplicaciones abreviadas, y por último hicimos una programación de problemas, porque a mi lo que me interesa no es que sepa la parte procedimental sino la aplicación de la multiplicación en su vida, eso es lo que me interesa.

E: *¿Con cuáles conceptos crees tú se relaciona la multiplicación?*

P: A ver, yo diría que se relaciona por ejemplo con geometría, por ejemplo para hallar las áreas, ehh... y fundamentalmente se relaciona con la suma, con la suma se relaciona muchísimo.

***E**: ¿Siempre es posible mirar la multiplicación como una suma abreviada? o ¿existen casos en los cuales la multiplicación no es una suma abreviada y cuáles son esos casos?*

P: Pues yo la he visto como suma abreviada, aunque por ejemplo uno cuando plantea situaciones problema que son de combinación de suma y de multiplicación, donde tiene que hacer una multiplicación de valores que son reiterados y tiene que hacer una suma de valores que son diferentes, entonces ellos como que ven esa diferencia.

E: *¿Qué es lo nuevo que tú enseñas en cuarto de la multiplicación si ya en tercero se ha abordado la multiplicación?*

P: Ah bueno, sí, en tercero se ha abordado la multiplicación por una y dos cifras, en cuarto hago mucho énfasis en las multiplicaciones abreviadas, las multiplicaciones por 11, 12, 13, 14, 9, 99,999, por 25 por 10, 100, y fuera de eso como que hago la multiplicación más compleja...

E: *¿En qué sentido es más compleja?*

P: Es más compleja por ejemplo en el número, en los números que yo les doy, que ya no van a ser de uno o de dos sino de tres cifras, por ejemplo a un número le coloco al multiplicando o al multiplicador un cero intermedio, por ejemplo, 202, o por ejemplo le coloco multiplicar por 200, para ver todas esas situaciones ¿sí?...

E: *¿Y eso para tí es más complejo?*

P: ¡Claro!, eso para mi es mucho más complejo, por ejemplo un niño de tercero hace la multiplicación simplemente y sabe es el procedimiento, pero ya cuando hay una multiplicación donde haya casos especiales que en el multiplicando o en el multiplicador hay ceros, ya es un caso especial donde el niño tiene que entender esos pasos, tiene que saber esos pasos, para seguir más adelante.

E: *¿Cómo concibes la competencia multiplicativa y cómo crees tú que se desarrolla ese tipo de competencia en los niños?*

P: A ver, primero le informo que el año pasado se elevó en el colegio el nivel de competencia matemática, según los resultados. A raíz de tantas capacitaciones que nos han hecho, yo me he cuestionado, ¿sí?, digo bueno de qué le sirve al niño saber ese procedimiento, de qué le sirve si no sabe dónde aplicarlo, entonces yo me coloqué en la investigación de mirar todas las pruebas, entonces yo dije, bueno, qué es tanto lo que buscan aquí y qué es lo que quieren que el niño sepa. Y relativamente me di cuenta que el niño lo que debe saber es aplicar la multiplicación, aplicarla,... el procedimiento es importante, pero lo importante es la aplicación de la multiplicación en casos que se dan, porque en las pruebas de competencias no le dicen haga esta multiplicación, ni le dicen mire haga los pasos para hacer esta multiplicación, le preguntaron cosas donde tenía que aplicar la multiplicación, con razonamiento lógico ¿no?.

E: *¿Cuáles son los criterios de construcción de los problemas multiplicativos que trabajaste con los niños?*

P: Miro la lógica que tiene el niño, por ejemplo yo veía casos en mis alumnos por ejemplo que dicen un saco vale $500, eso no tiene lógica, entonces yo los llevo como que se ubiquen en algo real, esos precios y todo lo dieron los niños, porque sabían cuánto valía un transporte, sabían cuánto valía una panela, les expliqué cómo era la fabricación de una escoba, de un trapero, ellos me dieron valores de lo que valía un trapero en un negocio, entonces todos esos valores los hicimos reales.

E: *Miras la lógica en esos problemas, ¿qué otros criterios de construcción miras?*

P: Ahí miro un poquito como la parte gramática también, de redacción del problema, que el niño entienda qué es lo que está preguntando, qué es lo que se propone conseguir, y qué es la pregunta, porque a veces plantean un problema y la pregunta no coincide.

E: *¿Cómo logras establecer el avance conceptual de los niños frente a la multiplicación?*

P: El avance lo miro así: primero vemos el conocimiento, el desarrollo del tema, todo eso, bueno, eh... yo les doy mi clase de una forma en que el niño conozca, en que el niño interprete, en que el niño argumente y proponga, y pienso que por ejemplo en cuarto se deben desarrollar todas esas etapas del conocimiento, el niño no se puede quedar sólo en el conocer o en el interpretar solamente, el niño debe argumentar lo que está haciendo, decir por qué lo hizo, por qué preguntas, por qué haces ese problema así, y como el niño ya conoce, interpreta, argumenta, pues puede proponer con más facilidad, eh...claro que para medir esas etapas del conocimiento es difícil, no crea, ¿eh?... cuando uno está evaluando a los niños uno dice, bueno este chico ¿sí propone?, ¿sí me argumenta lo que hace él en el tablero o en su cuaderno?. Generalmente me he dado cuenta que en primaria casi el niño llega es como a conocer, identifica, argumenta y le queda como difícil proponer, entonces yo he luchado mucho para que el niño proponga y por eso le ha dado mucha oportunidad al niño para que opine, y eso me ha dado buenos resultados.

La verdad es que uno como que lleva el grupo, y tanto que los alumnos llegan a aprender como el procedimiento de uno, ¿sí?, por ejemplo yo les ponía un problema o les decía de otro tema por ejemplo de fraccionarios, y ellos decían profesora, ¿proponemos un problema?, entonces yo ya veía que ellos como que iban con mi hilo, con lo que a mi me gustaba, entonces ya no me decían profesora díctenos un problema, sino ¿proponemos un problema profesora?, eso era un avance para mi.

Colegio Manuela Ayala de Gaitán Sede B
5º de primaria

Entrevistador: *Tú dices durante la clase que la multiplicación es práctica. ¿Qué quieres significar con esta frase?*

Profesor: Bueno, la frase práctica es que es como más fácil, más sencilla que hacer una suma de varios sumandos, diga usted por ejemplo que una suma tenga diez o quince sumandos, entonces la multiplicación me va a dar la oportunidad de hacerla más fácil, de hacer la operación más fácil y de hacerla como... el resultado sea más veraz, hay menos oportunidad de que yo me equivoque haciendo una multiplicación que no una suma larga.

E: *¿Qué consideras más importante que los niños aprendan de la multiplicación?*

P: Bueno, lo más importante que el pelao aprenda de la multiplicación es que viene a resumir como una suma, para mi lo más importante, que el niño sepa que la multiplicación me va a reemplazar una suma.

E: *En los cuadernos de tus estudiantes tú les colocabas vistos buenos a los ejercicios que ellos hacían. ¿Con qué objeto pones esos vistos buenos? o ¿qué es lo que miras cuando colocas esos vistos buenos?, ¿para qué colocas esos vistos buenos? ¿tiene algún peso en la nota final?*

P: Bueno, el estudiante siempre busca algo, una nota, una calificación, un estímulo. Entonces yo siempre acostumbro a colocar el visto bueno al chico, así la multiplicación o la operación no esté bien; entonces yo le digo aquí le coloco el visto bueno o el regular para que el chico se sienta estimulado a seguir trabajando, ellos entre más vistos buenos tengan se sienten como mejores. Yo me doy cuenta que los niños tienen sus rivalidades allá y que esas rivalidades vienen a ser sanas, unos tienen cinco buenos, otros tiene cuatro, otros tienen tres, entonces esa rivalidad existe y yo la aprovecho, pues para que se superen, a pesar de que hay rivalidad, pero ellos siguen ahí compartiendo las cosas.

E: *¿Qué otros instrumentos, además de las previas escritas, utilizas para evaluar?*

P: Bueno, por lo general yo no hago previas. Ehh...las tareas que pongo tampoco las califico, porque la mayoría de las tareas se las puede hacer el papá, la mamá, en la casa. Entonces yo pongo la tarea, al día siguiente yo hago un ejercicio parecido al de la tarea, los niños lo hacen, entonces a medida que lo van terminando y van pasando, y yo les voy corrigiendo, les voy calificando, y también me da la oportunidad como para hacer eso como más personal, porque el niño se equivocó por ejemplo en una cantidad, entonces yo le digo aquí se equivocó, aquí sumó mal, aquí multiplicó mal, pero ya como más individual, el niño va, cae en cuenta del error y la hace, corrige.

E: *¿Qué haces con los resultados de la evaluación?*

P: Bueno, la mayoría de esos resultados quedan en los cuadernos. Al final del periodo yo cojo los cuadernos, miro pues tantos vistos buenos tiene, tantos malos, tantos regulares; también lo hago para que en la casa el papá se de cuenta del progreso o de la eficiencia del niño y él en la casa tiene que colaborarle; si sacó mal entonces el papá tiene que hacer que el chico haga otra vez el ejercicio, que lo corrija; pero no solamente esos vistos buenos van a sustentar la calificación definitiva. La participación en clase, las pasadas al tablero, el interés que el chico coloca, el que levantó la mano, que yo quiero hacer... Entonces todas esas participaciones las tengo en cuenta para la nota final.

E: *¿Para qué y por qué enseñas la multiplicación en 5º?*

P: Bueno, en 5º de primaria los chicos todavía no manejan la multiplicación... algunos sí, otros no, entonces me gusta que ya en 5º de primaria el chico o los chicos salgan como todos parejitos, que todos con el mismo concepto, todas con la misma habilidad, todos con la misma práctica para la multiplicación, porque es que en bachillerato ya el maestro no se va a poner con esa paciencia de enseñar que la multiplicación es una operación en la cual me va a resolver o me va a reemplazar una suma, sino el maestro de bachillerato ya supone que el niño de primaria ya está ducho en las cuatro operaciones. Ahora, para entrar a la división es importante que el chico sepa multiplicar, sin esos parámetros tiene... para dividir tiene que saber multiplicar, saber sumar y saber restar muy bien, mentalmente, entonces por eso la multiplicación es una antesala para la división.

E: *En este sentido, ¿tiene la multiplicación alguna relación con otros conceptos?, ¿con cuáles?*

P: Claro, la multiplicación tiene relación con otros conceptos, con la división, con la potenciación, con la radicación, con el porcentaje, con la regla de tres,... es que la multiplicación está en todas partes (ja ja ja ...).

E: *¿Cuáles son los criterios que tienes para organizar el contenido multiplicación? o ¿cómo organizas el contenido multiplicación?*

P: A nivel de primaria, lo más elemental es que la multiplicación viene a reemplazar una suma donde los sumandos son todos iguales, de tal forma que el niño cuando va a resolver un problema lo lee, lo entiende, lo analiza, entonces él hace como procesos mentales, y entonces él se va a imaginar una suma y en lugar de hacer esa suma tan largotota, entonces tiene la posibilidad de hacerlo por medio de la multiplicación. Ya más adelante, ya ... temas adelante se relacionan como dije antes con la radicación, la potenciación, logaritmación, esto de... mínimo común múltiplo, máximo común divisor, todas estas cosas, no; pero por el momento eso, que el niño entienda e interiorice bien que la multiplicación le va a reemplazar una suma de varios sumandos.

E: *Has venido insistiendo en que la multiplicación es una suma reiterada. ¿Siempre es posible mirar la multiplicación como una suma reiterada? o ¿existen casos en los cuales no es posible significar la multiplicación como una suma reiterada?*

P: Pues, sí, claro, está el caso por ejemplo eh..., donde hay un solo sumando, ... 3x1 o 50x1, o también donde no existe nada, ... 5x0, se anula la operación ahí.

E: *Y en el caso de $\frac{1}{2}$ x 2/3, ¿es posible ver la multiplicación como suma reiterada?*

P: No, ahí si ya no; para mi eh... eso tal vez se da únicamente en los números naturales porque $\frac{1}{2}$ x 2/3 significaría... bueno ahí sí queda complicado.

E: *¿Qué es lo nuevo de la multiplicación que se aprende en 5º sabiendo que en 4º y en 3º ya se ha abordado la multiplicación?*

P: Bueno, en 5º pues casi no se aprende nada, lo único es que se viene como afianzar, se viene como a dilucidar ciertas dudas que el chico trae y 3º y 4º el chico lo hacen en forma como mecánica. Ya en 5º el chico tiene que hacerlo como más razonablemente.

E: *¿Puedes explicar eso de más razonablemente?*

P: Pues, en los cursos 3º y 4º el chico puede hacer la multiplicación como una forma mecánica, sin darse cuenta que hay una... que le viene a reemplazar una suma de sumandos iguales. Ya en 5º de primaria el chico tiene ya que interiorizar eso porque en bachillerato ya no va a tener esa oportunidad, y va a tener problemas más graves después.

E: *En las pruebas censales (externas) que se han aplicado en escuelas y colegios, se habla mucho de la competencia (multiplicativa). ¿Cómo concibes tú la competencia multiplicativa? o ¿cómo se desarrolla esa competencia multiplicativa?*

P: La competencia multiplicativa es más que todo que el chico sepa multiplicar y segundo que sepa emplear la multiplicación en la solución de problemas, que no vaya a tener ninguna duda en resolver algún problema donde tenga que aplicar la multiplicación; aunque en 5º de primaria yo me he dado cuenta, hoy en día por ejemplo, hay chicos que al resolver un problema ellos hacen la suma porque todavía no han interiorizado que esa suma se puede reemplazar por una multiplicación y a lo mejor así van a ir al bachillerato.

E: *¿Cómo preparas la clase, qué textos utilizas?*

P: Bueno, pues, yo la clase... tengo varios textos a nivel de primaria

E: *¿Cuáles?, por ejemplo.*

P: Tengo Constructiva, Canicas, tengo eh... la aritmética de Baldor, tengo competencias matemáticas, tengo Ingenio Matemático, hay varios libros, unos talleres de norma, entonces todos esos recursos me sirven y ya pues con la práctica y la experiencia yo pues puedo preparar la clase y adaptar pues al nivel y a la exigencia del grupo, que eso también depende del grupo que tenga.

E: *¿Tú crees que en 5º el estudiante tiene la multiplicación?*

P: En 5º de primaria el chico ya tiene que saberse las cuatro operaciones muy bien, no solamente saberlas realizar sino también saberlas aplicar.

Transcripción de las clases sobre multiplicación grado 3°
L. E. FEDERICO GARCÍA LORCA[5]

La cámara hace un paneo por el aula de clase y enfoca un documento que está colocado en una cartelera el cual contiene el plan de aula correspondiente al 3° periodo del 2003

P. Vamos a mirar

Los niños están hablando y algunos están parados

P. Ya, ya, muchas personas han terminado, entonces ponemos atención, vamos a hacer la corrección en el tablero y ya saben ustedes van mirando, comparando, a ver que pasó con el trabajo de ustedes.

Hay una pausa, los niños siguen hablando, se ve que todos están discutiendo sobre el trabajo. La profesora se dirige al tablero donde está escrito:

EJERCICIO

Representar la siguiente multiplicación: 5X 4 con:

1° Suma reiterada 5X4=
2° Recta numérica cinco veces cuatro
3° Con área
4° Con arreglo ordenado
* Ciudades
P. * Rutas

Listo, representar la siguiente multiplicación: cinco por cuatro con
Als. Coro suma reiterada.
P. Reiterada
Als. Vamos sumando ¿Quién pasa y hace la suma reiterada?
P. Yo, yo, yo.......
A ver
Pasa un niño al tablero, la profesora le entrega el marcador y el
P. niño comienza a escribir. Se oye hablar a los alumnos.
Los demás estamos poniendo atención, ¡Felipe!
El alumno que está en el tablero observa el ejercicio sin hablar y

[5] La transcripción de las clases de tercero así como las de los grados cuarto (anexo 3) y quinto (anexo 4) se presentan tal y como se capturaron las imágenes y sonidos en cada una de las sesiones, por ejemplo algunas expresiones no académicas que surgen de manera espontánea en la interacción de la clase, especialmente por parte del profesor.

A_1 se queda pensando

No sabe

El alumno escribe al frente de

Suma reiterativa 5X4 =

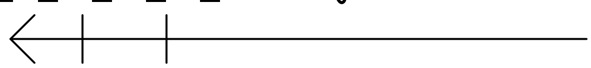
Recta numérica 5 veces cuatro =

A_2 mira a su compañero y vuelve a mirar al tablero lo que escribió.

Haga la suma reiterativa

El alumno señala con su dedo señala 5 veces 4 que escribió en el tablero y escribe ____+____+____+____+____+ Primero hace las cinco rayas y luego escribe el signo más, luego sobre cada raya escribe

4 + 4 + 4 + 4 + 4 = debajo de esta hace:



P.

El niño no continua

Javier haga la suma

Se oye a los alumnos que piden a la profesora los pase al tablero. El alumno que pasa al tablero borra la flecha que había hecho su compañero y sin decir nada coloca el resultado a las operaciones que están planteadas

Suma reiterada 5X4 = 20

Recta numérica 5 veces 4 = 20

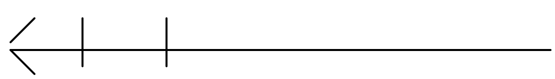
4 + 4 + 4 + 4 + 4 = 20

Se observan niños parados y se oye hablar a varios
P. moderadamente, sin la profesora preguntar nada al niño que está
A_3 en el tablero, pasa a otro niño.

¿Cuál vas a hacer Richard?

Eh,.......la recta

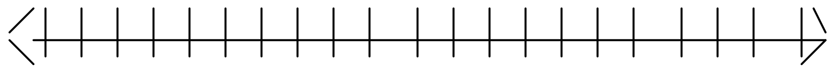
El niño sin hablar traza



Mientras el alumno trabaja en el tablero, la cámara hace un paneo
A_4 por el aula y se ven los niños unos hablando, otros están fuera de
su lugar y otros están trabajando en sus cuadernos

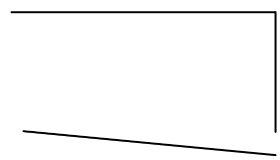
Profe, ese cinco parece una jota.

La cámara muestra el tablero y el niño ha hecho la siguiente gráfica:



0 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15 16 17 18
19 20

Mientras el niño realiza esta gráfica no dice nada sobre lo que está haciendo. Los niños hablan y se escucha algarabía, en medio de ella se oye a la profesora que orienta a los niños en su trabajo individual. Una niña se dirige al tablero y el niño que estaba se sienta. La niña sin decir nada comienza a realizar esta gráfica



La niña borra la línea de abajo y vuelve a hacerla

P.

P.

¿Inés la figura te va a quedar así?

La niña que está en el tablero suspende lo que está haciendo, mira
P. a la profesora y no dice nada. El bullicio sigue.

A ver, brazos arriba todos, abajo.

La profesora palmotea queriendo llamar la atención de todos, pues
Als coro sólo unos pocos levantan los brazos.

P. Brazos arriba, a los lados, al frente. Vamos a poner atención al tablero. Inés de una vez está haciendo allá una figura, (la profesora hace una pausa corta) ¿Será que podemos de una vez hacer la figura?

Noooo

P. Entonces ¿cómo hacemos? A ver que figura me resulta? Porque habíamos quedado en que a veces me daba cuadrado y a veces rectángulo.

Los niños siguen hablando, la niña que está en el tablero borró la

P. figura que había hecho.

Als Inés ¿cómo haces tú? ...pausa No usted Richard lo que está

P. diciendo es para separar. Pero mira, Inés, ¿cómo haces tú para que te salga una figura, ¿qué tienes en cuenta, de dónde sale?

P. La alumna mira a la profesora, sonríe, pero no dice, ni escribe nada ¿De dónde tenemos que partir para poder sacar la figura?

P. Cinco veces cuatro, se oye decir en medio de varias voces.

Als Cinco veces cuatro o sea que miro qué?

P. La profesora señala en el tablero la multiplicación escrita 5X4= Cinco veces cuatro

Als Luego escribe debajo de la gráfica dibujada por un niño 5X4= Cinco veces cuatro y ¿qué es lo que se hace con esa multiplicación?

P. La multiplicamos

Als Inés ¿qué hacemos con eso? Inés, que es la niña que está en el tablero, no responde

P. La multiplicamos La niña que está en el tablero no dice, ni hace nada.

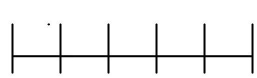
A_5 A ver quién pasa Yo, yo, yo,...yo

P. Pasa un niño al tablero A ver, qué vas a hacer El niño responde, pero no se entiende Inés no estudió

P. El alumno que está en el tablero escribe Eso que estás haciendo qué es La cámara muestra a Inés que se desplaza a su puesto. El alumno que está sentado detrás de ella la llama y trata de explicarle. La profesora llama la atención. Inés, ¿lo está haciendo? Hay una pausa. ¿Ahí qué hizo? Pare, pare,

A_6 Inés ponga cuidado, ¿qué hizo?

P. La cámara enfoca el tablero donde el niño realizó esta gráfica



P.

A_6 Cinco cuadritos

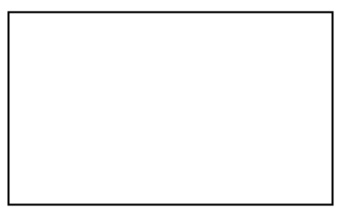
P. Cinco cuadritos, ¿por qué cinco cuadritos? La cámara enfoca al niño que está en el tablero, quien explica lo

que está haciendo, pero lo dice muy pasito y no se alcanza a captar.
De para bajo cuántos?
Cuatro (muestra con los dedos de la mano)
¿Por qué? A que corresponde ese cuatro
El alumno sigue haciendo la gráfica

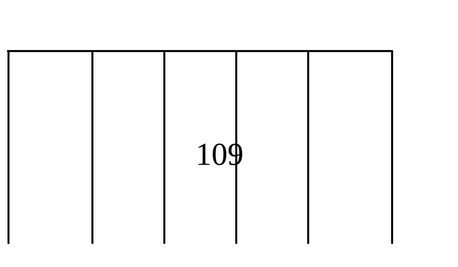
P.

Se oye mucha algarabía. La profesora palmotea duro
Por eso vean, ¡como están de necios hoy! Vean ahora que estaba Inés en el tablero, Richard le decía con los dedos, porque Richard utiliza los dedos para que el espacio de aquí arriba le coincida al de acá y le coincidan los cuadritos, porque en el tablero no hay cuadrícula.
El alumno borró lo que había hecho y realizo la figura así

P.



P.
Als
P.
Als Vean, miramos a ver si les quedó así la figurita. ¿si está bien?
La cámara muestra los cuadernos de los niños donde están trabajando este ejercicio.
Vean, miramos, revisen a ver si con área les quedó así la figurita
Si sí sí sí
Cinco por cuatro
Sí sí sí sí
La cámara muestra el tablero, el alumno ya terminó la gráfica



* Ciudades: Bogotá

Pasto, Cartagena,
Bu/manga

P. * Frutas Manzana,

Als Pera

Naranja, Lulo

Alguien iba a pasar a hacer algo?

Yo, yo yo

El alumno continúa escribiendo

P. Arreglos

A_7

P.

Als

P.

Als

P.

1) B con M	1) P con M	1) C con M	1) B con M	1) C con M
2) B con P	2) P con P_1	2) C con P	2) B con P	2) C con P
3) B con N	3) P con N	3) C con N	3) B con N	3) C con N
4) B con L	4) P con L	4) C con L	4) B con L	4) C con L

Als Bueno, qué significa la B

P. Bogotá

Als coro Mirando al tablero, van a contestarme por favor, cuántos grupos salieron

P. Cuatro, dicen unos, cinco, dicen otros

¿Cuántas combinaciones en cada uno?

Cuatro, cuatro

¿Y el total de combinaciones?

A_8 Veinte, veinte

A_9 Veinte, porque cinco por cuatro .....

Veinte

P. Bueno,......... en este ejercicio no teníamos propiedad conmutativa, a algunos les cuesta aplicar la propiedad conmutativa, entonces cuando yo recoja el cuaderno, ustedes saben que yo reviso.

La profesora les habla sobre la experiencia de la grabación y les pregunta cómo se sintieron en ella.

Feliz

Als coro Felices

P. La profesora se refiere luego a los niños que estuvieron muy atentos durante la actividad y a los que no lo estuvieron y les pregunta

¿Cómo se sentirían los papás de estos niños, que se portaron mal, al ver el video? Porque hay niños que no hicieron nada. Escuchen,

P. quienes tenían mal el ejercicio, si en este momento se acerca Rodolfo con una hojita y los pone a trabajar porque los va a grabar otra vez, ¿cómo les quedaría el ejercicio?

Bien

Por ejemplo, Diego, no déjenlo a él, porque él sabe. Por ejemplo, yo te paso al tablero en este momento y te digo haz una recta numérica, representa en recta numérica la multiplicación tres por tres, ¿cómo la harías?

Se oyen las voces de varios alumnos que hablan

Déjenlo a él.

El alumno pasa y escribe

3 X 3 =

P. 3 veces 3

$\underline{3}$ $\underline{3}$ $\underline{3}$

P.

En el tablero esta otra vez la alumna Inés quien ha escrito

2 x 4 =

¿Qué quiere decir dos por cuatro

La alumna no responde

P. Vean, de ahí la importancia de uno hacer las correcciones y las tareas. Miremos esas personas que ni cuaderno tienen, que no hacen tareas, que no tiene ni el título de la evaluación, que no ponen atención en clase, ¿qué les está pasando?. Luego se dirige al alumno que está en el tablero. ¿qué va aquí?

El alumno procede a colocar el signo más entre cada uno de los números tres y el resultado

$\underline{3} + \underline{3} + \underline{3} = 9$

Bueno, ahora mismo Diego dice: tres veces el tres. ¿Cuántos saltos tiene que dar?

El alumno ya ha realizado el gráfico

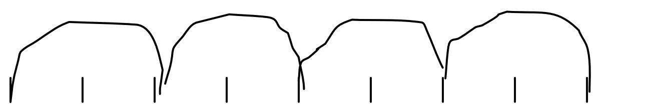
Als

P.

A_{10}

P.

A_{10}



0 1 2 3 4 5 6 7 8 9

De a tres

Dice tres veces ¿cuántas vas a saltar?

Tres

¿Saltaste tres veces?

No

El alumno procede a borrar la gráfica que había realizado. La cámara enfoca a la alumna Inés quien está realizando un ejercicio

P. en el tablero

2 X 4 =

2 veces 4 =

Ahora la cámara enfoca al alumno que está en el otro lado del

P. tablero quien ha vuelto ha construir la gráfica

La profesora se dirige a Inés:

Dos por cuatro ocho, dos veces cuatro ocho y cuatro más cuatro ocho.

2 X 4 = 8

2 veces 4 = 8

4 + 4 = 8

Los niños hablan al tiempo se forma algarabía

Déjenla a ella, Richard, donde está la suma, Qué era lo que decías que no podías hacer?

P. El alumno contesta pero no se entiende. La profesora se acerca al tablero y pasa un alumno a realizar el ejercicio siguiente:.

3 X 5 =
3 veces 5 =
3 + 3 + 3

Mientras la alumna Inés hace la multiplicación 2 X 4, la profesora
P. le ayuda al niño a trazar la gráfica utilizando los cuatro dedos de
la mano para medir la distancia entre cada número

Bueno, tres veces cinco, entonces tres veces cinco, entonces este
es el cinco y señala el 3. la profesora señala la suma 3 + 3 + 3
El alumno borra esta suma y escribe 5 + 5 + 5

P.

VIERNES 22 DE AGOSTO, 10:35 A.M. GRUPO 302

Lo primero que vamos a hacer es la serie del dos, serie del dos,
sumas reiteradas.
Parte de los alumnos están organizados en semicírculo, la otra
P. parte están como siempre. La profesora va a trabajar con los niños
que están organizados en semicírculo, pasa por los puestos
A_1 revisando lo que están escribiendo en el cuaderno.

A_2

P. No, segundo no, ahí en sumas reiteradas, serie del dos, van a
A_3 escribir, van a hacer la serie del dos, digo la serie del dos, yo no
P. dije tabla, serie del dos.
La cámara muestra el cuaderno de un niño

Refuerzo de Matemática

Suma reiterada Serie del 2

La serie del dos, pero únicamente la van a hacer hasta veinte, no
Als más, cómo empieza, cómo empezamos nosotros la serie del dos.
Dos veces
P. Dos por uno
No,....serie, serie
Dos, cuatro, seis, ocho, diez, doce.......
Serie del dos, rápido, Santiago serie del dos, empieza, no me vayan

P. a hacer montonera.

La cámara muestra otro cuaderno

Refuerzo de matemática

P.

Suma reiterada Serie del 2

2 = 4 = 6 = 8 = 10 = 12 = 14 = 16 = 18 = 20

Pero al frente le hacemos la suma reiterada.

La cámara sigue mostrando el mismo cuaderno donde el alumno sigue trabajando, debajo de la serie del dos escribe

Tabla del 2

Dejen de a dos cuadritos de por medio para que eso no les quede en montonera.

La cámara en foca a la profesora que está escribiendo en el tablero:

P.

Tabla del 2

A2 2 X 1 = Primero la profesora escribe los números, luego le

P. 2 X 2 = coloca el signo por y el igual con marcador rojo.

2 X 3 =

2 X 4 =

2 X 5 =

2 X 6 =

P. 2 X 7 =

2 X 8 =

2 X 9 =

2 X 10 =

Por la suma reiterada, que quiere decir dos por uno, a ver los de este lado, dos por uno que quiere decir.

Dos veces uno

Dos veces uno, entonces acá

La profesora escribe en el tablero

2 X 1 = 2 veces 1

2 X 2 =

2 X 3 =

Dos veces uno y hacen ahí la suma y aquí siguen

La profesora continúa escribiendo en el tablero

2 X 1 = 2 veces 1 = 1 + 1 =

2 X 2 =
2 X 3 =
2 X 4 =
2 x 5 =
2 X 6 =
2 X 7 =
2 X 8 =
2 X 9 =
2 X 10 =
La cámara sigue enfocando el cuaderno del niño que veníamos viendo
2 X 1 = 2 veces =
2 X 2 =
2 X 3 =
2 X 4 =
2 x 5 =
2 X 6 =
P. 2 X 7 =
2 X 8 =
2 X 9 =
2 X 10 =
La cámara muestra otro cuaderno
Agosto 22 del 2003
Refuerzo
1) Suma reiterada
Serie del 2. 4. 6. 8. 10. 12. 14. 16. 18. 20
Tabla del 2
2 X 1 = 2 veces 1 = 1 + 1 = 2
La cámara muestra a la profesora revisando y corrigiendo el trabajo de cada alumno y donde está bien les coloca el visto bueno
Aquí, dos veces uno, muy amontonado y aquí?
La cámara muestra otro cuaderno
Serie del 2
P. 2 – 4 – 6 – 8 – 10 – 12 – 14 – 16 – 18 – 20
Tabla del 2
2 X 1 = 2 veses (sic) 1 = 1 + 1 = 2
2 X 2 = 4 veses (sic)
2 X 3 =

2 X 4 =
2 X 5 =
2 X 6 =
2 X 7 =
2 X 8 =
¿Y aquí?
La profesora señala lo que ha escrito el alumno en la tabla del 2
2 x 2 = 4 veses (sic)
¿Dos por dos cuatro? No señor, es que yo no le estoy pidiendo acá un resultado, sino esto qué significa, y señala con el esfero 2 X 2.
La profesora mira otro cuaderno

P. 2 = 4 = 6 = 8 = 10 = 12 = 14 = 16 = 18 = 20
Tabla del 2
2 X 1 = 2 veses (sic)1 = 1 + 1 = 2
2 X 2 = 4
2 X 3 = 6
2 X 4 = 8
2 X 5 = 10
2 X 6 = 12
2 X 7 =
2 X 8 =
2 X 9 =
La profesora revisa la tabla del 2 de este niño que acabamos de presentar.
No señor, está copiándose de él, sin saber por qué, y tu escribiste eso (señala el resultado 4 veces) ¡ah bueno tiene que corregir!
La cámara enfoca otro cuaderno

P. Agosto 22 del 2003

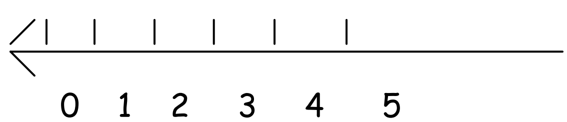
Refuerzo

1) Suma reiterada
Serie del 2 – 4 – 6 – 8 – 10 – 12 – 14 – 16 – 18 – 20
La profesora le corrige, escribe el 2 y coloca dos puntos así:
Serie del 2: 2 – 4 – 6 – 8 – 10 – 12 – 14 – 16 – 18 – 20
La profesora revisa la tabla del 2
Tabla del 2
2X1 =2veces1=1+1=
2X2=
2X3=

2X4=
P. 2X5=
Que viva la montonera no? Yo no se porque ahora hace el dos así. (la profesora corrige el número que el alumno ha escrito como una zeta z, más separaditos esos números. La profesora revisa otro cuaderno:
Serie del 2
2, 4, 6, 8, 10, 12, 14, 16, 18, 20
Tabla del 2
P. 2X1 =2veces1=1+1=
2X2=
2X3=
2X4=
2X5=
La profesora pregunta al alumno al que le está revisando
Estamos trabajando suma reiterada, ¿de dónde salió esto? La
P. profesora señala este enunciado
2X1 =2veces1=1+1=
La cámara sigue enfocando los cuadernos de los niños en los cuales han trabajado durante toda la actividad el ejercicio. Todos los
P. cuadernos tienen el mismo encabezamiento, al revisar otro
Als. cuaderno encuentra la tabla del dos escrita así:
2 X 1 = 2 veces 1 = 2 + 2 =
Dos veces el uno y tu cuál estás poniendo aquí (señala 2+2 =
Katerine, qué significa, por qué significa
Katerine no contesta, la alumna dirigida por la profesora vuelve a escribir
Tabla del 2
2X1 =2veces1=1+1= 2
P. 2X2= 2 veces 2=
Entonces ahora colócale dos veces
Als Tabla del 2
2X1 =2veces1=1+1= 2
P. 2X2= 2 veces 2= 2 + 2 = 4
Y ahí sigue, ¿qué significa el por?
Veces
P. La profesora pasa a revisar otro cuaderno
Serie del 2

P: 2 – 4 – 6 – 8 – 10 – 12 – 14 – 16 – 18 – 20
Als. Tabla del 2
P. 2 X 1 = 2 veces 1 = 1 + 1 = 2
A_7 2 X 2 = 2 veces 2 = 2 + 2 = 2
P. 2 X 3 = 2 veces 3 = 3 + 3 =
Dos por uno qué significa? Dos veces uno, uno más uno dos, dos
P. veces dos y dos más dos, ¿cuánto es?
Cuatro
A_7 Revisa otro cuaderno
P. ¿Y aquí qué dice?
La alumna corrige el resultado de la suma <u>2</u> + <u>2</u> = 2 y coloca el
A_7 cuatro como resultado
¿ Y dos veces tres, tres más tres.
La alumna recurre al ábaco para hallar el resultado de tres más tres
¿Cuántos grupos tiene que sacar de a tres, grupos de a tres
Dos
Dos grupos, en cada grupito cuántos tienes que pasar
Tres
P. Entonces hazlo
Als. La alumna procede a hacerlo y selecciona el primer grupo
A_7 Entonces va uno, vamos a la otra, haz la otra, ¿cuántas tienes que
P. pasar?
Tres
P: ¿Cuánto te da?
A_8 La alumna cuenta las fichas
Seis
P. Y lo escribe en su cuaderno
La cámara enfoca el tablero donde la profesora ha escrito
P. Tabla del 2

2 X 1 =



¿En la otra?
Dos
P. De a dos, por cada salto aquí avanzo
Uno

La profesora se refiere al primer enunciado 2 X 1 =

A_9 Aquí en un salto avanzo

Als Dos

A_{10} La profesora se refiere al segundo enunciado 2 X 2 =

Aquí, señala 2 X 3 =

P. Tres, cuatro, cinco.........

Als Ah bueno, hacen la multiplicación la recta, la multiplicación la

P. recta, ya vengo, me llamaron.

A_{11}

A_{12}

LUNES 27 DE AGOSTO DE 2003, 10:30 A.M. GRADO 3

P. La profesora realiza un ejercicio de atención con los alumnos

A_{13}

Estamos hablando de la tarea, la tarea del día: consultar sobre los

P. términos de la multiplicación, quiero escuchar que consultaron.

Algunos niños levantan la mano indicando que quieren participar

Los términos de la multiplicación son multiplicador, multiplicando

P. Multiplicando, multiplicador y producto

Yo profe, yo profe

La profesora se acerca al puesto de un niño y lee la tarea

P. Ahí dice resultado, pero como se llama el resultado

Als. Producto

P. Bueno alguien encontró algo distinto

Yo profe

Yo profe

La profesora le pregunta a uno de estos dos niños

¿Está distinto o es lo mismo?

Está distinto: dos por cinco diez, multiplicando dos, multiplicador 5, producto 10.

Tu lo mostraste con un ejemplo. A ver Yílver.

Yílver lee pero lo hace en voz baja que la cámara no alcanza a captar su voz.

Entonces fíjense que en la consulta de todas formas encontramos tres términos: multiplicando, multiplicador y producto. En lo que leyó Yílver encontramos que hay otra palabrita, ¿cuál es la otra palabrita que apareció por ahí?

Factores

P. Factores, dice que el multiplicando y el multiplicador son factores, primero y segundo factor, nos dice el papel que hace cada uno, entonces vamos a copiar en el cuaderno. Como título términos de la multiplicación, agosto 27.

La cámara enfoca un cuaderno

P. Agosto 27 / 2003

Términos de la multiplicación

La Cámara enfoca a la profesora que está escribiendo en el tablero:

Términos

P.

	7	→ 1º Factor multiplicando
Als	X 8	→ 2º Factor multiplicador
P.		→ Producto

Als.

P. Ejercicios

Als Unir los factores con el producto correspondiente

P.

1)	9	5	45	12	3	6
	7	8	56	4	5	30

P.

Als.

P. Bueno vamos a mirar acá, dice unir los factores con el producto
Als. correspondiente y encontramos ahí números en dos renglones, entonces vamos a buscar, nos vamos despacio buscando.

P. La profesora se para cerca del tablero y tapa con su cuerpo parte de los números, sólo deja al descubierto 9, 5, 7, 8, 45 y 56

Hasta aquí, sin mirar a este lado, ahí puedo encontrar dos factores y algún producto?

Si

Si, cuáles unirían

Nueve por ocho, siete por ocho

Hasta ahí encuentran algo

Si

Als. A ver los de este lado

Als. La profesora descubre los otros números

Als A ver Santiago, a ver Felipe tu que encontraste.

A_{15} Los dos factores

P. Qué les falta

El producto

Un niño pasa al tablero

Unir los factores con el producto correspondiente, a ver hágalo como usted cree. El niño escribe el signo por y el igual entre los números 9, 5, y 45 y entre 7,8 y 56

1) 9 X 5 = 45 12 3 6

7 X 8 = 56 4 5 30

¿Quedaron unidos? Dice él (se refiere al alumno) yo los uní con los

P: signos, ¿A quién se le ocurre unir de otra manera? Bueno unir, qué es unir

P. Ajuntar

¿Ajuntar?

Juntar

Agrupar

Cómo se les ocurre que puedo unirlos sin acercarlos, sin borrar,

P. cómo los puedo unir

Una niña pasa al tablero y escribe

9 + 5 + 45

P. Ahí si, nueve más cinco más cuarenta y cinco.

La niña borra los signos más que hizo. Otra niña pasa al tablero y en cierra el 7, el 8 y el cincuenta y seis

1) 9 X 5 = 45

P.

7 X 8 = 56

Bueno ella unió as... ...era puedo unir

Pasa un alumno al tablero

Als Ya están este y este (los señala en el tablero) ahora tengo que

P. buscar los que queden por unir.

Als El alumno que pasó al tablero escribe:

P. 12 veces 3 6

4 5 30

Als Doce veces tres. ¿Cuánto le da doce veces tres.

P. El niño que ha escrito esto borra la palabra veces. Pasa otro niño al tablero.

Als 1) 9 X 5 = 45 12 3 6

P.

7 X 8 = 56 4 5 30

Ahora vamos a parar un momentico y vanos a mirar, en esta qué
P. hizo Felipe, Cuáles son los factores y cuáles los productos. ¿Cuáles
son los factores
Nueve y cinco
Por qué saben que son los factores
P. No se entiende
Puedo decir que este es un factor, señala el número 56, este es
factor, señala el número 8 y este es el producto, señala el número
7
A_{15} No
P. Este es factor, señala el 8; este es factor, señala el 7 y este es
producto, señala el 56.
Si
P. Entonces ¿cómo se hace la unión de los factores con el producto
Als. correspondiente. Bueno yo diría que aquí hay un grupo pero los
elementos están sueltos y dice unir, ¿qué es unir? Bueno ustedes
no ponen atención.
P. Se oye mucha algarabía, todos hablan al tiempo.
Als. coro Se sientan y dejan ver
P. Una niña pasa al tablero y escribe la palabra unir al lado del
Als. número 7, mira a la profesora y como no tiene aprobación borra la
P. palabra. Pasa otra niña al tablero y no escribe ni dice nada.
Als. A ver estamos pensando que se les ocurre para unirlo y poder
P. demostrar en donde empecé, en donde termina, cuál es el orden de
Als. esto.
P. Pasa un niño al tablero.
Colocándole los signos profe.
Es que allá me dicen unir y no me dicen nada de signos.
Una de las niñas que sigue en el tablero borró el número 30 y
escribió el número 20.
P. ¿De dónde me sacó ese veinte, ese veinte estaba ahí?
No
La alumna vuelve a escribir el número 30. la niña se sienta y no hizo
Als. nada más.
P. Miremos que hizo Aldana, ¡están mirando todos al tablero!
Si
Maicol qué hace por allá, me sirve, no me sirve?

P. Si, Si
¿Cómo me está demostrando para donde va, con que?
Con flechas
Con el sentido que van las flechas, ¿partió de dónde?
Del siete
Bueno que se nos ocurre para resaltar el producto correspondiente de la unión, qué hacemos para resaltar el producto.
Un niño pasa al tablero y lo encierra en un círculo, otro pasa y lo
P. subraya, otro niño pasa y lo encierra en un cuadrado. La profesora se acerca al tablero.
Vea de pronto hay otras personas como Helber que no han entendido la instrucción que dice: unir los factores, ¿qué es lo que primero tenemos que buscar?
Factores
Los unimos con el producto y después resaltamos el producto. Johan, pase al tablero y después la mamá viene y llora detrás de uno y uno que hace.
La profesora ha colocado otros ejemplos para unir en la parte
P. superior del tablero.

8	32	4	6
5	4	20	24

Un alumno pasa y le coloca las flechas
P. Resalta el producto Ven, Camilo, los pilosos en matemáticas andan en cero, cuando habían visto ustedes a Maicol en estas
P. ....ah... es que están distraídos
Als coro La profesora escribe en el tablero
P. Unir teniendo en cuenta que el producto sea el doble

F	P
4	16
	8
	12

P.. ¡Ojo! Tengo este señor, un factor , ya no hay dos factores, me dan el producto, tres opciones de producto para buscar el doble de
P. cuatro.

Un niño pasa al tablero y escribe

P. F P Porque:

F	P
4	16
	8
	12

A ver Deimi tu dices que es cuatro, Deimi escribe porque: es el doble de 4

Por qué es doble de cuatro'

Porque es el doble de cuatro

Pero por qué es el doble de cuatro

La niña no sabe responder. Pasa otra niña al tablero y escribe porque si uno 2 grupos de a 4 me da 8

Esto que escribió Deimi aquí yo lo quiero ver en multiplicación, entonces como queda.

Varios niños quieren pasar, la profesora designa a uno

Al fin resucita mi ayudante.

El niño escribe debajo del enunciado de porque 2 X 4 = 8

¿De qué otra manera lo puedo expresar?

Otro niño pasa y escribe debajo de dos por cuatro ocho 4 + 4 = 8

¿de qué otra manera puedo expresar?

Transcripción de la clase sobre multiplicación grado 4°
COLEGIO TOMÁS CARRASQUILLA

TIEMPO DE INICIO 32' 28"

Comenzamos a grabar en el grado 4° de Primaria del Colegio Tomás Carrasquilla.

La cámara hace un paneo por el salón

¿El señor hace algún producto de los que está vendiendo?

P. Noo

Als. Él los compra para venderlos, cierto? Solamente se venden ahí. Se

P. venden productos ya terminados, ahí no fabrican, ni hacen el producto. Ahora vamos a la parte de atrás.

La cámara muestra los carteles que la profesora ha colocado en las paredes del aula.

EL GERENTE CANCELO SE NECESITA
FABRICAR
SUELDOS A 37 736 TRAPEROS
EMPLEADOS

DIARIAMENTE DESPACHAN
37 BUSES

FABRICA DE ESCOBAS LA MECHITA

P. Fábrica de escobas, una fábrica, la mechita....... pausa.. fábrica una palabra nueva ¿qué será fabricante? ....pausa

Als. Donde fabrican, (dicen unos) crear, (dice otro)

P. Donde fabrican, donde crean, donde hacen cosas, donde hacen cosas. Sí fábrica de escobas la mechita, ¿qué harán acá? Escobas. ¿Aquí las venderán ya terminadas?

Als Síí

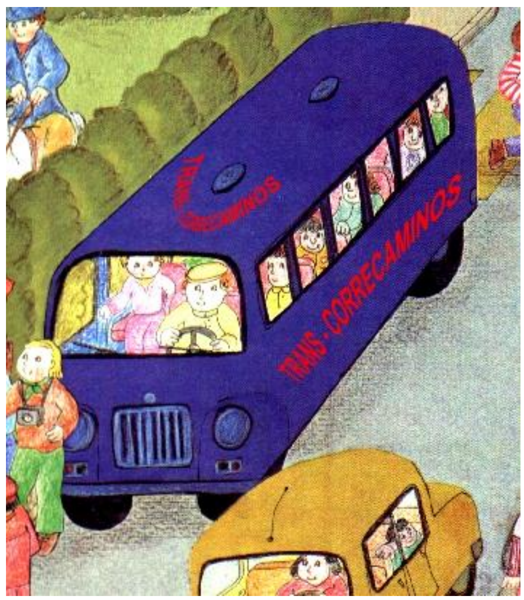
P. Terminadas.......... pero antes tienen que haber hecho un proceso de fabricación, tienen que comprar el palo, la mecha, tienen que comprar muchas cosas para fabricar el pro.............

Als. ducto

P. Este se parece a lo de allá (la profesora señala los carteles que están al otro lado del salón)

Als. Nooo

P. Porque aquí hay que fabricar el producto. Vamos al otro lado, leamos detenidamente cada uno de los mensajitos, lo que dice el gerente, cuál es el logotipo de la empresa.... pausa........ya........pausa ¿qué harán en esa empresa?



Transportar, (dicen unos) transporte, (dicen otros)

Transportar, ¿qué es?

Transportar gente, (dicen unos)

¿Solamente se transportan personas?

Als. Noo, se puede, se puede alquilar, (dicen unos) se puede comprar para......(dicen otros)

P. Bueno eso que nos están, eso que, eso que nos transportan de un

Als. lugar a otro ¿cómo se llama eso?

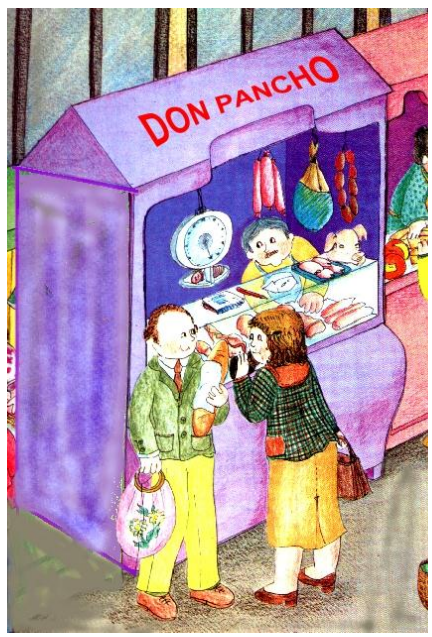
P. Transporte, (dicen unos) bus (se oye que dicen otros)

Servicio, un servicio, me están prestando un.........pausa

Als. Servicio

P. Para irme para Zipaquirá, me están prestando un servicio, entonces

podemos decir que aquí nos prestan un servicio, pero nos están vendiendo pro......(la profesora señala los mensajes de la empresa de
Als. transportes)
P. ductos
Aquí nos están vendiendo cosas que fabrican (la profesora se dirige a la pared donde están los mensajes de la fábrica de escobas y los
Als. señala) y aquí nos están vendiendo un ser..............pausa
P. vicio
Ahora nos vamos a detener en los mensajitos que hay, vamos para donde don Pancho. ¿qué sucede ahí? Ahí suceden muchas cosas, por ejemplo, don Pancho vendió doscientas treinta y nueve libras de arroz en un mes. ¿qué sucede también? Don Pancho compró diecinueve cajas de chocolate, ¿qué otra cosa puede suceder allí en el supermercado de don Pancho?



Don Pancho compró diecinueve libras de chocolate, Bien, qué más
Als. sucede, a ver, cuéntenme ¿qué más sucede allá?
P. Hablan varios al tiempo y no se entiende.
Habla durito, habla durito
La cámara muestra los mensajes escritos que están colocados en las paredes.

¿Vende qué? Una libra de arroz vale ... pausa
La cámara muestra los mensajes que están escritos en forma de cartel:

EL SUELDO DE UN DON PANCHO HAY
1.319 CAJAS
EMPLEADO ES EL QUE MAS DE
GALLETAS
$636.00 BARATO VENDE

UNA CAJA DE CHOCO DON PANCHO SE
NECESITA FABRICAR
LATE VALE $256.000 EL QUE MAS 736
TRAPEROS
BARATO VENDE

DON PANCHO LA EMPRESA TIENE DON
PANCHO COMPRO
TRABAJA DIA 278 RECOGEDORES 19
CAJAS DE CHOCO
RIAMENTE 8 PARA VENDER LATE
HORAS DIARIAS

UNA LIBRA DE ARROZ DON PANCHO HOY
NO FIO MAÑA
VALE $750 VENDIO 239 LIBRAS NA
SI
DE ARROZ EN UN
MES

Otra cosa que sucede allá.
Hay 1.319 cajas de galletas.
Todo eso sucede en el supermercado de don Pancho, pero don
Als. Pancho está vendiendo ahí el arroz, está vendiendo las cajas de
P. chocolate ¿por qué quiere venderlas? ¿o por qué............? pausa

Porque quiere ganar plata
¿Por qué quiere? Pausa
A_1 Ganar
P. Allá necesitarán ganar plata?
Sííí
Aquí en Cogua, si don Pancho se ingenia para ganarse esa plata,
A_2 entonces tiene él que comprar y también vende, ¿venderá al mismo
P. precio?
Nooo
Als. A él se lo venden con menor precio y él lo vende a mayor precio A
P. mayor precio y ese mayor precio es la utili......... pausa
lidad
Entonces con esos mensajitos que tenemos allá (la profesora señala los mensajes que están escritos y distribuidos por todo el aula) vamos a construir situaciones que presenta el supermercado de don Pancho, en una fábrica o en la empresa de transportes. ¿Por qué se presentan esas situaciones problema?.........Pausa
Contesta la misma profesora
Als. Porque él dice: si yo compro, no puedo vender al mismo precio, yo
P. tengo que.............pausa
Ganar
Si aquí viene a comprar cosas que yo no tengo, tengo que surtir mi almacén para poderlas vender, entonces vamos a establecer una situación problema que todos ustedes han visto, que cuando se
Als presenta un problema en cualquier parte, en la calle, en cualquier
P. parte, tiene que alguien venirlo a solu.............pausa
cionar
Als. Y tiene que solucionarlo, si no se siguen agarrando las personas no?
P. Entonces esas situaciones que surgen en la comunidad, en el ... pausa supermercado de don Pancho
Supermercado de don Pancho. Lo dicen al tiempo con la profesora)
Tienen que solucionarse, deben solucionarse, tiene que tener una solución y por consiguiente debe haber una res................pausa
puesta.
Siempre la situación problema sucede de las cosas que suceden en ese espacio, entonces, vamos nosotros, ya hicimos nuestro procedimiento de la multiplicación y nosotros sabemos cuando utilizar la multiplicación. Un mensajito de lo que sucede en ese

espacio y me van a construir una situación problema, entonces,
primero van a mirar, observamos, el supermercado, y cada uno va a
mirar un mensaje de los que sucedieron. Pausa
Don Pancho compró diecinueve cajas de chocolate y cada una vale
doscientos cincuenta y seis mil pesos, ¿cuánto valieron
19..........pausa
P. ¿Cuánto valieron las diecinueve cajas de chocolate? ¿Quién estaba
A_3 comprando eso? Pausa
P. Don Pancho
¿Y quién es el que tiene que sacar la plata?
Don Pancho
Als Si don Pancho es el que tiene que sacar la plata, Aquí se corta la
P. grabación por un segundo. Eso es una situación problema que tiene
Als coro que solu............pausa
P. cionar
¿Y como lo soluciona él? ....pausa
Als Hablan al tiempo y no se entiende
P. Entonces vamos a ver cuánto valen las diecinueve cajas de
Als. chocolate, coge un papelito y multi..............pausa
P. plica
¿Qué multiplica?
Diecinueve por doscientos cincuenta y seis
Als. Doscientos cincuenta y seis, que vale la caja, por diecinueve cajas,
esa es la solución y él ya va a saber cuánto tiene que pagar
........pausa ¿Sí?
P. Bueno. Otra situación problema.
Una libra de arroz vale setecientos cincuenta y María va a comprar
Als. veintitrés cajas de, veintitrés libras de arroz. ¿Cuánto debe pagar
P. (Martha) María?
María, dijiste María. Muy bien, ya es una persona que fue a
P. comprar. ¿qué compró?..... pausa
Als. Arroz
P. Arroz, ¿a cómo la libra?
A_4 A setecientos cincuenta
P. ¿Cuántas libras de arroz compró María?
Veinticinco
¿Cómo hace para saber María cuánto debe pagar por el número de
libras de?

A5 Arroz, multiplica

P. Perfecto, ya, aquí cada uno de estos mensajes que ustedes ven allá y qué suceden en ese espacio, con cada uno de esos mensajes podemos construir un pro...........pausa

blema

Vámonos y miremos la fábrica (la profesora se dirige a la parte de atrás del salón en donde están los mensajes de la fábrica, todos los alumnos se voltean para mirar hacia atrás) Miren, miren allá, algo que no conozcan, que ustedes no sepan que es

PARA FABRICAR
UN RECOGEDOR
SE NECESITAN
127CM DE PALO

COSTO DE FABRICA
CIÓN $2.98

SE VENDIERON SE NECESITA FABRICAR EL
GERENTE GANA
27 ESCOBAS 736 TRAPEROS $2'721.000
DE

A5 SUELDO

P. MENSUAL

A5

P. Bueno, les ayudo, ustedes conocen qué es un costo de fabricación .

Sííí

¿Qué es un costo de fabricación?......pausa

Lo que tiene que gastar la fábrica para fabricar una escoba.

Entonces el costo de fabricación es lo que gasta la empresa para hacer un trapero, por ejemplo, aquí habla del costo de fabricación

A5 (la profesora señala el mensaje alusivo a esta situación) de un trapero dos mil novecientos ochenta y nueve pesos.

Ochenta y nueve pesos

P. ¿Ustedes conocen un trapero?

Hablan al tiempo: con palo (dicen unos) y mechas (dicen otros)

Con palo y tiene

Mechas.

Entonces qué hace el gerente. El gerente va a donde venden palo y

Als. dice: necesito tanto palo para construir tantos traperos y va donde

P. venden mecha y compra la mecha para hacer los traperos y eso en una empresa es lo que se llama materia prima. Materia prima es lo que el señor gerente tiene que comprar para fabricar sus produc........pausa

ductos

Eso es materia prima, entonces ya saben qué es un costo de fabricación de un trapero. Bueno, ahora vamos a observar los mensajes, vamos a observar mensajes y cada uno vamos a construir

Als. una situación problema. Pausa

La cámara muestra los mensajes que hay en el aula

P. Mírenlos, analícenlos y digan cómo pueden hacer una situación problema. ...... pausa a ver,............pausa

La cámara muestra una niña que la profesora designa

El costo de un trapero es 2.989 pesos y se necesita fabricar 736 traperos. ¿Cuánto dinero se necesita para hacer los 736 traperos?

Muy bien, muy bien, y ella cogió los dos mensajes, fíjense, dos mil novecientos ochenta y nueve pesos. Se necesita fabricar 736 traperos, ¿cuánto gasta la empresa para fabricar esos 736...pausa

Traperos

Entonces el gerente cómo hace para saber cuánto necesita, qué hace, qué hace? ....pausa

Multiplica

¿Qué multiplica? ....pausa

setecientos treinta y seis por dos mil novecientos ochenta y nueve .

Muy bien, casi siempre para que se le facilite a uno, uno multiplica el número mayor por el número me.......... pausa

Als. Menor

P. Y así él sabe cuanto se le va a gastar para fabricar esos........pausa

Traperos

Vamos con otra situación problema. ¿Será que ese señor no les paga a los empleados para que fabriquen?... Pausa

Sííí

A ver, (designa a una alumna para que intervenga).

La cámara muestra el siguiente mensaje:

EL SUELDO DE
UN EMPLEADO

Als ES $527.000

P.

Y hay treinta y siete empleados. ¿cuánto dinero necesita el gerente para pagarle a treinta y siete empleados? ¿Cuánto necesita de dinero el gerente para pagarle a treinta y siete ....pausa

Empleados

Als. ¿Estaba treinta y siete empleados? Pausa ... No, no, pero ella dijo

P. treinta y siete empleados, ella se inventó, hay treinta y siete empleados y si el sueldo de cada uno es quinientos veintisiete mil, pues cuánto dinero necesita el gerente para pagarle a esos treinta y siete emple.....pausa

pleados

¿Por qué tiene uno que hacer todas esas operaciones? ¿Qué tal si los gerentes no hicieran eso, qué pasaría? ....pausa

Silencio, nadie contesta.

¿Qué pasaría?

La cámara muestra los mensajes alusivos a la empresa de transportes

Las empresas que prestan un servicio uno dice: ¡ay, yo no me voy por esta empresa, porque eso se varan los carros, no lo llevan puntual , eso en las empresas deben haber mensajes que van a atraer a los clientes. Yo ...cuando uno va a la empresa, al terminal, uno dice me voy en esta porque esta va puntual, me voy en esta porque esta si no para en todas partes no? Entonces vemos un mensajito, La profesora lee los mensajes

SUS QUEJAS NOS
PERMITEN MEJORAR
EL SERVICIO

Als. SERVIMOS CON RESPONSABILIDAD
Y CUMPLIMIENTO

Los servicios tienen que ser buenos para uno utilizarlos. Ahora vamos a ver los mensajes de esa empresa, los mensajes ....pausa

¿Ahí se fabrica algo?

Noo

La cámara muestra los mensajes:

UN COLEGIO ALQUILA 9
FLOTAS PARA UN PASEO

UN BUS RECORRE
3.499 KM EN UN DIA

LA EMPRESA GANA MENSUALMENTE
$ 2'318.419

LA EMPRESA VENDIO
895 PASAJES EN 1
DIA A SOGAMOSO

EL GERENTE CANCELO
SUELDOS A 37 EMPLEADOS

¿Qué se hace ahí?
Se presta un servicio
Se presta un ....pausa
Servicio
La cámara sigue mostrando mensajes:

EL PASAJE DE BOGOTA A
ZIPAQUIRA VALE $7.850

P:

CADA BUS LLEVA
49 PASAJEROS

SERVIMOS CON RESPONSABILIDAD Y CUMPLIMIENTO

A ver David
El pasaje vale no se entiende ....y compré 15 pasajes. ¿Cuánto me valen los 15 pasajes?
Si tu no te hubieras planteado esa situación problema ¿Tu sabrías

Als. cuánto tienes que llevar allá al terminal para pagar esos pasajes, pausa, ¿si tu no te hubieras planteado ese problema? O lleva plata

así sin saber, no planea la plata que va a llevar. ¿Planea?.....pausa
Si (y afirma con la cabeza)
Si claro que hay que planear la plata para saber cuanto tiene que pa...pausa
gar
Un alumno levanta la mano para intervenir
Yo profe
Sigue insistiendo
Yo profe, el pasaje de Bogotá a Zipaquirá vale siete mil setecientos cincuenta y seis y cada tiquete (corrige)
Y cada tiquete vale once mil...........-
Siete mil ......(corrige) Siete mil ochocientos cincuenta y seis. ¿Cuánto tengo que pagarle al gerente?

P. ¿Cuánto debe pagarle al gerente? Claro que el gerente estará allí sentado en una sala muy bonita, que nadie va a tocar, no cierto? A quién tiene que pagarle? ......pausa al cajero al que está en la caja, no cierto?

Un niño y una niña levantan la mano para participar.
No se entiende lo que dice al comienzo....diariamente despacha treinta y siete buses, cada bus lleva cuarenta y nueve pasajeros
A ver diariamente la empresa despacha treinta y siete buses
Cada bus lleva cuarenta y nueve pasajeros
Cada bus lleva cuarenta y nueve pasajeros, muy bien
Y el pasaje, el tiquete cuesta y (el alumno duda) y cuanto, cuantos pasajeros van en los treinta y siete buses que despachan.
¿Qué despachan? Para que le servirá ese dato a la empresa, cuénteme ...pausa.... mire, si diariamente despacha treinta y siete buses y en cada bus van cuarenta y nueve pasajeros........ pausa el gerente debe tener disponibles treinta y siete
Buses
La cámara muestra varios niños y niñas con la mano levantada indicando que quieren participar, enfoca otro dos mensajes:

DON PANCHO TIENE
7 EMPLEADOS

EL ALQUILER DE UNA
FLOTA VALE $537.000

¿Qué pasaría si no tuviera treinta y siete sino quince?
No podría llevarlos
No podría llevar toda esa
Gente
¿Y ganaría más o ganaría ....pausa
Menos
En todas las empresas y en todo sitio uno debe planear sus cosas,
P. planear, si uno no las tiene planeadas es un fracaso, inclusive en el
estudio, ustedes deben planear las cosas, si tengo la previa tal día
Als. debo estudiar. Acuérdense, uno debe planear, planear, bueno
P. quieren decir algún otro.
Un colegio alquila nueve flotas para un paseo, el alquiler de una flota vale quinientos treinta y siete mil pesos. ¿Cuánto tiene que pagar el colegio por el alquiler de las flotas?
Perfecto, muy bien , lo aprueban
P. Si
La profesora se dirige al tablero y escribe y dice al mismo tiempo

CONTRUCCIÓN DE PROBLEMAS DE MULTIPLICACIÓN

A_7 Se oyen los niños trabajar en orden, hablan en tono bajo sobre el tema. La profesora termina de escribir, se retira del tablero y se dirige a los puestos de los niños a revisar sus trabajos
A ver ....pausa
La cámara muestra el cuaderno de un niño en donde está escribiendo el siguiente problema :
P. El colegio alquila 9 flotas para un paseo, el alquiler de una flota vale (duda)
Als. Mientras tanto se oyen los comentarios de los niños sobre los
P. problemas que están construyendo. El niño del cuaderno comenta con otro:
A_7 Quinientos cincuenta y siete mil
P. ¿Hay diferencia entre el costo de fabricación y el costo de venta? ¿si hay?......pausa
Síí
Claro ¿cuál será la diferencia?...... Pausa ...nadie dice nada. El costo
A_7 ¿qué será?
Hablan muy bajo, no se entiende.
Muy bien, o sea, el costo lo que gastaron para fabricarlo más la

ganancia, la suma de esas cositas me da el costo de venta o sea por lo que voy a vender, eso en el caso de la fábrica.
La cámara enfoca otros cuadernos:

P. *Nancy Karen Parra Rojas Curso 402, aquí la cámara no muestra más. Enfoca otro cuaderno*

Als. *Nombre Cristian David Guzmán Curso 4-2*

P. *Un colegio alquila 9 flotas para un paseo el alquiler de una flota vale*

Als. *$557.000.*

P. Mientras los niños trabajan la profesora dice
¿Hay diferencia entre el costo de fabricación y el costo de venta?........pausa ¿Si hay?
Sííí
¿Cuál será la diferencia?
Responde pero en voz muy baja, no se le entiende
Muy bien, o sea el costo, lo que gastaron para fabricarlo, más la ganancia. La suma de esas cositas nos da el costo de venta o sea lo que voy a vender. Léanlo primero para que esté bien construido.
Continúa la cámara enfocando el cuaderno de la niña
Nancy karen Parra Rojas Curso 4-02
El pasaje de Bogotá a Zipaquirá vale $7.850, si voy a invitar a 8 amigos y les voy a gastar el pasaje ¿Cuánto debo gastar por los 8 pasajes?
Análisis: para saber cuánto debo pagar debo multiplicar lo que cuesta cada pasaje por mis 8 amigos
Operación 7.850
X8
La profesora pasa revisando el trabajo de los alumnos
Con v pequeña, ojo a la ortografía.........Pausa... Todos van a tener como supermercados por qué no les gusta la fábrica...Pausa ...Se gana más en una fábrica, ...pausa, yo pondría una fábrica
Se oye el murmullo de los niños trabajando y la profesora recorre los puestos de los niños corrigiendo.
Por ejemplo, ella no cogió ningún mensaje, (señala el cuaderno de una niña) lo está inventando ella solita con sus mensajes, ¿no es cierto? Me encanta.
La cámara sigue mostrando el cuaderno de la alumna Nancy, que está realizando la multiplicación
7.850

X8
00

la alumna duda al realizarla.

Se oye mucho ruido pero es por fuera del salón de clase. La cámara enfoca otro cuaderno:

Diariamente despachan 37 buses cada bus lleva 49 pasajeros ¿cuántos pasajeros llevan 37 buses?

Análisis para saber cuántos pasajeros lleva en total multiplico el número de buses con los pasajeros.

Operación 37

X49

333

148

1.813

Rta lleva en total 1.813 pasajeros

La profesora vuelve al tablero y el lado derecho de este y en la parte de arriba escribe y dice

De Once 11, doce 12, trece 13,................hasta diecinueve 19

De nueve 9, noventa y nueve 99, novecientos noventa y nueve 999

De diez 10, cien 100, mil 1.000 etc. apliquen las reglas de las multiplicaciones abreviadas.

La profesora sigue revisando los trabajos en los cuadernos de los niños, la cámara enfoca otro cuaderno

Nombre Héctor Yesid Céspedes

Desarrollo

El pasaje de Bogotá a Sogamoso vale 13.752 y compre 50 tiquetes. Cuánto valen los 50 tiquetes

Operación 13.752

X50

00000

69760

697.600

Bueno, ya . .....pausa...levanten la manito los que ya terminaron, bueno, los que ya terminaron, los que ya terminaron. Ahora por la otra hoja, por el otro lado de la hoja (la profesora tomando un cuaderno hace la demostración) por este lado, ya no van a ver mensajes, van a construir un problema que sea de una panadería, de

Als.	un teatro, de un estadio.
P.	¿Por qué lado
	Del otro lado, si claro.
	La profesora escribe en el tablero y dice
	Panadería Teatro Estadio
	Sí aquí, aquí lo haces.
	Los niños hablan pero sin que se llegue al desorden.
	Se les olvidó aplicar las multiplicaciones abreviadas, la multiplicación por diecinueve es abreviada.
	Mientras la profesora dice esto la cámara enfoca otro cuaderno
	Nombre Paola Andrea Aragón Peralta Curso 402
	Transportes Corre caminos
	El pasaje Bogotá a Sogamoso vale 13.752 y boy a comprar 500 tiquetes ¿Cuánto me valen los 500 pasajes a 13.752?
	Análisis para saber cuánto me valen los 500 pasajes de Bogotá a Sogamoso debo multiplicar 13.752 por los 500 tiquetes que compré.
	Operación 13.752
	500
	00000
	00000
	68760
	6.876.000
	La multiplicación por diez, cien, mil, pausa ¿se acuerdan como se multiplica abreviadamente?.........Pausa A ver aquí ya aplicaron la multiplicación abreviada por treinta y uno, se acuerdan veintiuno,
P.	treinta y uno, cuarenta y uno.....Pausa
	La profesora sigue revisando y haciendo observaciones
Als.	La respuesta! Le falta, le falta.........haga, haga, la respuesta no?
P.	La cámara enfoca de nuevo el problema visto anteriormente, ya terminado con la respuesta
	Rta los 500 pasajes de Bogotá a Sogamoso me valen 6.876.000
	Cada uno escriba el espacio donde va a trabajar, si es una
Als.	panadería, si es un teatro o si es un estadio.
P.	Profe se puede en un teatro
	Si, se puede en un teatro, apliquen las reglas para multiplicar abreviadamente.
P.	La cámara enfoca el cuaderno de Cristian David Guzmán ya calificado por la profesora con una B.

Se oyen las voces de los alumnos que trabajan en sus cuadernos.

P. A ver alguien va a construir un problema de un estadio.

Los niños hablan, no se entiende.

A ver sentadita,y escuche, si una boleta.....Pausa

Si una boleta para entrar al estadio cuesta veinte mil pesos y Lucía compra diez, cuántas debe, cuánto debe pagar por las diez boletas que compra Lucía?

Muy bien , muy bien ....otro problema de un estadio, a ver, tanto que les gusta el fútbol a todos.

A mi no

A mi no

A mi tampoco

Se dirige a un niño

A ver, a ti te gusta el fútbol?

No

No? A ver, a quien le gusta el fútbol

Un niño levanta la mano

P. A mi

La profesora lo designa para hacer el problema. Los niños hablan todos al tiempo y no dejan escuchar lo que el niño lee en su

Als. cuaderno.

A ver, vamos a escuchar todos el problema de un estadio, colócate bien.

La boletería vale ochenta y cinco mil trescientos noventa y seis pesos

¿Cuál boletería?

De duda no sabe que decir

p. La boletería o la boleta.

La boleta vale ochenta y cinco mil (se interrumpe la grabación)

A8 Entonces tengo, la multiplicación cumple la propiedad conmutativa o sea cómo quedaría la multiplicación.

P. Un alumno levanta la mano

Als. Profesora ahí pues por cinco, pero si yo multiplico por veinticinco, cinco por veinticinco,

Hagámoslo, pasa y lo haces, a ver.

El niño pasa al tablero y escribe

25

X5
125

Duro, para que tus compañeros te oigan.

Cinco por cinco veinticinco, llevo dos, cinco por dos diez y dos que

P. llevaba doce, me dio ciento veinticinco.

A_9 Ciento veinticinco

Ahora cambio el resultado

P. Cinco 5

por veinticinco X25

cinco por cinco veinticinco,

el alumno sólo escribe el 5 en el resultado y dice

llevo dos

A_9 Y qué tienes arriba, ya no tienes más

No

Entonces sigue con la multiplicación.

Entonces paso acá y digo el dos

No aquí tu dijiste cinco por cinco veinticinco, entonces escríbelo, (señala en el tablero)

El alumno escribe en el tablero

5
X25
25

luego dice

dos por cinco diez

y lo escribe adelante del primer resultado de la multiplicación o sea de 25 quedando así

5
X25

P. 125

y el cero

Als. El alumno coloca el cero entre el uno y el dos quedando así

5

A_{10} X25

1025

A_{10} Y se dirige a la profesora y le dice

Si ve que no da.

Por qué? Donde está? Donde correspondería. Acá, en qué, está en que casilla está?

En las unidades
Y está en
P. En las decenas
A_{10} Entonces donde corresponde el dos
En las decenas
P. La profesora borra el diez que había escrito el alumno delante del número 25, queda así

```
  5
X25
 25
```

Entonces bájalo, dos por cinco
Diez
P. El niño vuelve a tratar de escribir adelante del número 25, pregunta
¿Aquí?
Dónde corresponde, a ver, quien le dice donde corresponde.
Nadie responde.
A ver,...................... Carol.... pasa a ver. Debajo de qué. Escríbelo
La niña lo va a volver a escribir mal
Carol, tu sabes?
La profesora coge el marcador
Tengo, aquí empecé con las unidades, cinco por cinco veinticinco, ya no tengo más acá, más números, entonces donde lo ubico Carol
La profesora muestra la multiplicación que se está trabajando. La alumna señala que se debe ubicar adelante del cinco.
Sí, donde la ubicó, estamos multiplicando dos por cinco diez.
A_{11} El niño que estaba en el tablero al comienzo de la clase dice
P. Acá (vuelve y señala que se debe ubicar adelante del 25)
A_{11} Estamos, cinco por cinco veinticinco, ya terminamos ahí, pasamos a
P. las decenas dos por cinco diez.
A_{11} La profesora lo va escribiendo en el tablero así

```
   5
 X25
  25
 10
125
```

P ¿Qué hacemos ahora?
Sumar
Entonces sume
A_{11} Cinco más nada cinco, dos más cero dos y uno.

¿Cuánto dio Carol?

P. Ciento veinticinco

Y aquí cuánto dio

Als. La profesora muestra la multiplicación hecha primero de veinticinco por cinco.

Entonces tu preguntabas que con el número pequeño, esto daba, (señala en el tablero) pero que con un número grande, entonces, él nos dijo veinticinco por cinco ciento veinticinco?

Ciento veinticinco

La profesora escribe en tablero

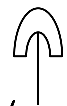
Veinticinco por cinco igual a cinco por veinticinco

$$\underbrace{25 \text{ X } 5}_{125} = \underbrace{5 \text{ X } 25}_{125}$$

veinticinco por cinco ciento veinticinco y cinco por veinticinco ciento veinticinco. ¿cuánto nos dio?

Transcripción de la clase sobre multiplicación grado 5°
COLEGIO MANUELA AYALA DE GAITÁN SEDE B

En el tablero está escrito el siguiente problema



El señor que vende paraguas a razón de $9.680 cada uno, ha vendido 12 paraguas, cuanto dinero le produjo esta venta. (el profesor no utiliza signo de interrogación)

1) *haciendo la suma*
2) *reemplazando la suma por una multiplicación*
3) *colocar los términos de una multiplicación*

TIEMPO: 3' 11"(Tres segundos, once segundos)

P. Entonces hágalo (le dice al alumno que está en el tablero) números grandecitos, que se vean, porque aquí de lejitos no se ven bien.

Se oye unos alumnos molestando y formando desorden.

Con voz fuerte: bueno, bueno que fue..................*pero ojalá que le quepan ahí las doce veces.

El alumno ha escrito en el tablero la cantidad 9680
9680

cuando el profesor le dice lo anterior * escribe 9 doce veces, luego 6 doce veces, 8 doce veces, 0 doce veces es decir no escribe la cantidad 9680 completa sino número por número.

P. Uno, dos, tres, cuatro, cinco, seis, siete, ocho, nueve, diez, once, doce, correcto, bien

El profesor se oye revisando el trabajo en los cuadernos y dice

P. Bien, pausa, bien, pausa, bien

Pausa

P. ¿Hasta ahora Usted va ahí?

La cámara enfoca el tablero

P. Reemplazando la suma por una multiplicación.

Se oyen las voces de los alumnos que discuten

P. Uno, dos, tres, cuatro, cinco, seis, ocho, nueve, diez, once, doce,....correcto, pausa correcto

Pausa

P. Correcto, pausa correcto, a ver........ se interrumpe la grabación En cambio la multiplicación es practica.

Pausa

La cámara muestra al profesor agachado sobre el pupitre de un alumno revisando el trabajo que ha hecho.
TERMINA TIEMPO 4' 40"

TIEMPO 6' 31 "(seis minutos, treinta y un segundos)
El profesor escribe en el tablero y va repitiendo lo que escribe en voz alta

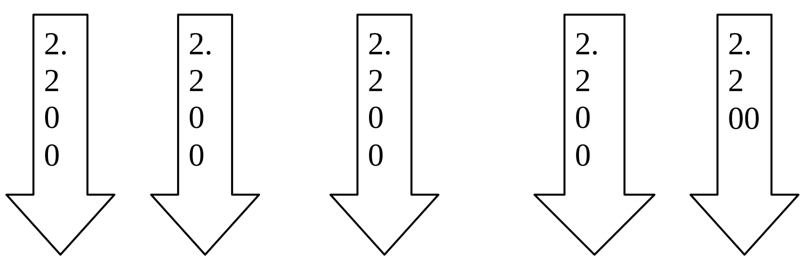
Un marcador vale $2.200, se compran 5 marcadores y se paga con 2 billetes de $5.000, cuánto dinero me devuelven o me sobra?
Pausa
Mientras el profesor borra el procedimiento del anterior problema dice:

P. Este es un poquito más complicadito que este (se refiere al que está borrando) se dirige a todos los alumnos: multiplicamos.

P. Seguro, hágalo como ayer.
Pausa

P. Común y corriente.
El profesor está pintando después del texto del problema los marcadores cuando intervienen los alumnos.
Un marcador vale $2.200, se compran 5 marcadores y se paga con 2 billetes de $5.000, cuánto dinero me devuelven o me sobra?

A2



No alcanza
No alcanza profesor.

A1 ¿No alcanza?

Als El profesor se dirige al texto del problema y borra en donde no es,

P. se da cuenta que no es ahí, borra el 2 y escribe 3
Pónganle tres
Quince!

P. El profesor mira el texto del problema y decide borrar el 3 que había

A3 escrito y coloca un 6.

P. Pónganle seis billetes

P. El profesor termina de pintar los marcadores y colocarle el precio a cada uno.

Cada uno.

P. La cámara muestra el tablero y luego se dirige al cuaderno de un niño

Cuaderno	2.200	5.000
	X5	X6
	11.000	30.000

TERMINA TIEMPO 8' 44

TIEMPO 11' 10" (once minutos, diez segundos)

El profesor escribe en el tablero y va repitiendo en voz alta

Tarea

Reemplazo las siguientes sumas por multiplicación

P. Trescientos cuarenta 340
Trescientos cuarenta 340
Trescientos cuarenta 340 340 trescientos cuarenta por y colocan
Trescientos cuarenta + 340 X el número aquí
Trescientos cuarenta 340

Hacen la suma aquí

Hacen la suma y hacen la multiplicación, (señala la suma cuando dice suma y la multiplicación cuando dice multiplicación). Enseguida divide el tablero con una raya vertical

Otro

P. Para hacer ya

Als No, de tarea (y escribe en el tablero)

P. 2.685
2.685
2.685 El profesor escribe las cantidades en silencio
2.685
2.685
2.685
2.685
2.685

Al lado derecho de la suma escribe.

P. Cuántas veces se repite el número dos mil seiscientos ochenta y cinco 2.685 _______aquí contestan.

TERMINA TIEMPO 12' 54"

TIEMPO 15' 54" (quince minutos, cincuenta y cuatro segundos).

Un alumno pasa al tablero y hace la suma

1200
1200
1200
1200
4800

Correcto, cuánto dinero tiene que pagar?

P. Cuatro mil ochocientos.

A1 Se inventaron una operación para reemplazar esta suma, donde todos

P. los sumandos son iguales, es el mismo sumando. ¿cuántas veces se repite el mil doscientos?

Cuatro, multiplicando por cuatro.

Als Mil doscientos se repite cuatro veces o escribe aquí así, vea (habla y

P. escribe en tablero)

Cuatro veces mil doscientos 4 veces 1.200

↓

Esta palabra veces puedo reemplazarla por la Palabra por 4 por 1.200

↓

Esta palabra por la puedo reemplazar por el signo Matemático del por 4 X

P. 1.200

Ahora efectuemos esa operación 1.200

Als. X4

P. Pase al tablero, a ver si el resultado me da igual o me da diferente.

Yo, yo ,yo yo .

Niña, números grandecitos que se vean.

La niña pasa y efectúa la multiplicación.

1.200

P. X4

4.800

A_2 Cuánto nos dio?

Pausa

P. Cuatro mil ochocientos.

Entonces, prueba esta niña, que esta multiplicación que está acá, la va a reemplazar esta suma que está aquí. Este mil doscientos, (lo señala ene el tablero) es el sumando que se repite y cuatro el número de veces que se repite ese sumando (lo señala en el tablero en las operaciones que efectuaron) En la multiplicación estos dos términos

P. tienen su nombre, los vamos a bautizar.

Cómo creen que se llaman estos términos y señala los dos términos de la multiplicación 1.200

Als. X4

P. Distraendo, dicen unos, sustraendo, dicen otros.

Als. Cómo se les va a olvidar. Se van a llamar Factores

P. Que no se les olvide factores, y este resultado se llama

Pausa, el profesor muestra el resultado dela multiplicación

1.200
X4
.800

Se llama pro

Ducto.

P. El profesor lo escribe en el tablero.

Als. Entonces, sacamos en conclusión, niño, que una multiplicación es una operación por la cual reemplazo una suma cuyos sumandos son iguales,

P. de acuerdo?

Si

Y sacamos el cuadernito

Als coro El profesor escribe en el tablero y habla a l tiempo que escribe

P Trece 13	quince 15	no habla	235
Trece 13	quince 15		235
Trece +13	quince 15		235
....	+ quince 15		+ 235

1.¿Qué particularidad tienen las sumas anteriores_____________________

A ver, señala un niño para que conteste.

Que todos sus, que todos sus, pausa breve, números que se suman

A_3 son iguales .

Son iguales, quince es igual, es el mismo sumando (lo señala en el

P. tablero) y aquí también (señala el 235) es el mismo sumando

Aquí contestan esto (señala la línea que trazó al finalizar la primera pregunta) en su cuaderno.

2. ¿Qué número se repite en cada suma? 1º____________

2º____________

3º____________

Y si no se repite profesor

A_4 ¡Cómo no se va a repetir! (lo dice en tono como enojado) aquí cuál se

P. repite? (señala la suma del trece)

el trece

A_5 Ah bueno el trece. Aquí cuál se repite, (señala el quince)

P. El cinco

A_6 Cuál cinco

P. El cuatro, dicen unos, otros dicen el quince.

Als Este es el número quince (lo señala en el tablero)

P. Aquí cuál se repite (señala el doscientos treinta y cinco)

P. El doscientos treinta y cinco.

Als El profesor escribe en el tablero y repite

3. ¿cuántas veces se repite el número 13 ___________
4. ¿cuántas veces se repite el número 15 ____________
5. ¿cuántas veces se repite el número 235 ____________

esto que está aquí arriba lo escriben, no?

TERMINA TIEMPO 21' 29"