CONCEPCIONES DE ESTUDIANTES DE LICENCIATURA EN MATEMÁTICAS SOBRE NÚMEROS REALES

LYDA CONSTANZA MORA MENDIETA
JOHANA ANDREA TORRES DÍAZ

UNIVERSIDAD PEDAGÓGICA NACIONAL
FACULTAD DE CIENCIA Y TECNOLOGÍA
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS
MAESTRÍA EN DOCENCIA DE LAS MATEMÁTICAS

BOGOTÁ, D. C.
2004

CONCEPCIONES DE ESTUDIANTES DE LICENCIATURA EN MATEMÁTICAS SOBRE NÚMEROS REALES

LYDA CONSTANZA MORA MENDIETA
JOHANA ANDREA TORRES DÍAZ

Tesis de grado para optar al título de
Magíster en Docencia de la Matemática

Asesor
CARLOS JULIO LUQUE ARIAS

____

UNIVERSIDAD PEDAGÓGICA NACIONAL
FACULTAD DE CIENCIA Y TECNOLOGÍA
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS
MAESTRÍA EN DOCENCIA DE LAS MATEMÁTICAS
BOGOTÁ, D. C.
2004

A mi mami, por su gran apoyo y colaboración constante.
A mi hija, motivo principal de mi esfuerzo diario; espero que el tiempo que no te he dedicado lo pueda multiplicar con especial dedicación.
A mi esposo, por la comprensión y amor que me brinda.
A mi papi y a mi hermana.

Lyda

A mi Familia.
Su apoyo, motivación y comprensión han hecho posible que cumpla con todas las metas que me he propuesto y con cada peldaño que he escalado en mi formación como persona y profesional. Espero recompensar con intensidad los momentos que dejé de compartir con ellos.

Johana

AGRADECIMIENTOS

Este trabajo es resultado de nuestro esfuerzo y dedicación y, de la amistad y confianza que nos une; pero además, de las contribuciones de varias personas a quienes sólo nos resta agradecerles, por supuesto, esta mención no salda completamente la deuda de gratitud que tenemos hacia ellos.

Agradecemos inicialmente a Dios, por permitirnos la realización y culminación exitosa de este trabajo y con él, la consumación de nuestra Maestría.

Expresamos nuestros más sinceros agradecimientos a nuestro asesor, maestro, compañero y amigo, Carlos Julio Luque Arias, por su apoyo incondicional, sus críticas constructivas y pertinentes observaciones, pero sobre todo por su voto de confianza.

Al profesor Emiliano Palacios por su colaboración para aplicación de uno de los instrumentos de esta investigación.

A los estudiantes del Departamento de Matemáticas, que actualmente cursan séptimo semestre de Licenciatura, quienes nos colaboraron para la ejecución de la fase de verificación de este estudio, por su disponibilidad y tiempo; en especial, a Juan Carlos Ávila, Sergio Beltrán, Jeisson Garzón y Diego Rodríguez.

A nuestras familias, por su preocupación, su valiosa ayuda y tolerancia, han sido fundamentales en el desarrollo de este trabajo.

RAE No. 001

TÍTULO: Concepciones de Estudiantes de Licenciatura en Matemáticas sobre Números Reales.

AUTORES: MORA Mendieta, Lyda Constanza. TORRES Díaz, Johana Andrea.

TIPO DE DOCUMENTO: Tesis de Maestría.

PUBLICACIÓN: Bogotá D. C., Universidad Pedagógica Nacional. 2004

UNIDAD PATROCINANTE: Universidad Pedagógica Nacional. Facultad de Ciencia y Tecnología. Departamento de Matemáticas. Maestría en Docencia de la Matemática.

PALABRAS CLAVES: Número real, concepciones, representaciones, seguimiento historiográfico, análisis de contenido, número racional, número irracional, inconmensurabilidad, conmensurabilidad, axioma de completez.

DESCRIPCIÓN: En este trabajo de investigación se presentan las concepciones que poseen futuros profesores de Matemáticas sobre el número real; para ello, se hace un seguimiento historiográfico del número real y una revisión de algunos textos donde se presenta este concepto, con el fin de caracterizar las concepciones encontradas en los estudiantes a partir de sus respuestas a ciertas cuestiones relacionadas con el tópico.

FUENTES: Se obtuvo información de ciento un fuentes, entre éstas cincuenta y tres libros (o capítulos de libros), nueve documentos institucionales, una tesis doctoral, dos tesis de maestría, dos artículos de páginas de Internet, treinta y cinco artículos de revista (dos de éstos virtuales) y un documento de trabajo no publicado (talleres). En el cuerpo del trabajo hay noventa y ochos notas al pie de página.

CONTENIDOS: El trabajo comienza con la exposición de los aspectos específicos de la investigación, el planteamiento del problema, los objetivos, las hipótesis y la metodología de trabajo (capítulo 1). Posteriormente, se presenta un marco teórico conformado por tres partes.

En la primera parte (capítulo 2) se hace una presentación de los constructos teóricos para los términos concepción y representación, contextualizados en diferentes teorías de la Didáctica de las Matemáticas, mostrando inicialmente un panorama de esta disciplina científica, en términos de algunos de sus objetos de estudio; como conclusión de este capítulo se asume la propuesta de Anna Sfard, para definir concepción en este estudio.

En la segunda parte (capítulo 3) se presenta un seguimiento historiográfico del número real, incluyendo la evolución histórica de este concepto, dividida en cuatro etapas de acuerdo con cada momento histórico, los intereses, preocupaciones y saberes de la comunidad matemática en cada uno de ellos. Al final del capítulo se incluye el estatus matemático del concepto de número real de acuerdo con la teoría de Chevallard –como protomatemático, paramatemático o matemático– y, la descripción de las concepciones más representativas asociadas a la evolución histórica de este concepto desde la perspectiva teórica de Sfard, señalando para cada concepción identificada, el momento histórico, las situaciones y representaciones asociadas al concepto, además de su caracterización como estructural u operativa.

En el cuarto capítulo, se muestra un análisis de contenido de los programas de asignaturas y algunos textos universitarios, empleados en la formación inicial de profesores de Matemáticas de la Universidad Pedagógica Nacional, donde se incluye el concepto número real; en esta sección se evidencia el tratamiento didáctico dado al número real y las concepciones, de los autores, que subyacen a estas presentaciones.

En el último capítulo de este trabajo (capítulo 5), se exponen las actividades realizadas en la fase de verificación de la investigación y los resultados obtenidos de ella, con lo cual se señalan las concepciones encontradas en los estudiantes de Licenciatura en Matemáticas, caracterizadas en términos de representaciones, situaciones asociadas y diferenciación entre operacional o estructural.

METODOLOGÍA: Este trabajo de investigación es de tipo básico, seccional, microsocial, práctico, interpretativo, exploratorio–descriptivo y cualitativo–cuantitativo. Para su desarrollo se establecieron tres fases. En primer lugar se realizó la consolidación del marco teórico; para ello, se consultaron libros, tesis y artículos relacionados con los objetivos del trabajo, con el fin de caracterizar los términos a emplear en el estudio, en particular concepción y representación y, ubicar las concepciones de número real presentes en la historia del concepto y en los textos o programas universitarios. La segunda fase, denominada de verificación, consistió en la selección de la muestra, el diseño de los instrumentos de observación y la categorización, codificación y tabulación de los datos recogidos, para describir los resultados del trabajo; es decir , las concepciones de los estudiantes de Licenciatura en Matemáticas sobre el número real. La última fase fue la determinación de las conclusiones de la investigación.

CONCLUSIONES: Se establecieron las concepciones que tienen los estudiantes de la muestra, como son: *Los números reales como campo ordenado*, *Los números reales como unión entre conjuntos numéricos* y *Los números reales como puntos de la recta*. Estas concepciones no corresponden exactamente a alguna de las concepciones históricas, descritas en el capítulo 3, o a las de los textos, descritas en el capítulo 4. Contrario a otras investigaciones, presentes en el estado del arte, los individuos de nuestra muestra no asocian los números reales con el significado coloquial del adjetivo real y de hecho no le atribuyen a este concepto, usos prácticos en la cotidianidad. Por otra parte, como se observa en los resultados, los estudiantes seleccionados para esta investigación, no muestran tendencia hacia alguna de las variables establecidas, los porcentajes promedio en los elementos incluidos en cada una permiten ratificar esta afirmación. Por último, si bien es cierto que los estudiantes tienen sus propias imágenes conceptuales, éstas se ven influenciadas por la enseñanza, sería entonces oportuno, por ejemplo, conocer cuáles son las concepciones de los profesores del Departamento de Matemáticas de la Universidad Pedagógica Nacional; de hecho, sería conveniente conocer las concepciones que tienen los profesores de matemáticas que ejercen en la Educación Básica y Media en el país, pues se ha visto la permanencia, en los estudiantes, de las concepciones inducidas por la enseñanza inicial y los textos escolares.

M. M. L. C.
T. D. J. A.

TABLA DE CONTENIDO

LISTA DE ANEXOS

INTRODUCCIÓN

En esta Tesis de Maestría presentamos un trabajo de investigación sobre las concepciones que poseen algunos estudiantes que cursaban VI semestre del Proyecto Curricular Licenciatura en Matemáticas de la Universidad Pedagógica Nacional, en el segundo período de 2003, acerca de los números reales. En el capítulo 1 de este documento están los antecedentes, la justificación, el planteamiento del problema, el estado del arte, los objetivos y las hipótesis de esta investigación, al igual que la metodología utilizada.

Mediante la revisión de escritos relacionados con el tema de investigación consolidamos un marco teórico que consta de tres partes: (1) un estudio de la teoría didáctica subyacente al objeto de estudio, concepciones, para comprender así la importancia de este fenómeno para la Didáctica de la Matemáticas, (2) un seguimiento historiográfico del concepto de número real atendiendo a los momentos más significativos de tal evolución –complementario al estudio elaborado por Romero (1997)–, para determinar las concepciones asociadas a la evolución histórica del mismo y por último, (3) un análisis de contenido de los programas curriculares vigentes del Proyecto Curricular de la Licenciatura en Matemáticas, a partir de los cuales la población, objeto de investigación, trató el concepto en cuestión; cada una de estas partes puede verse en los capítulos 2, 3 y 4 respectivamente.

Del seguimiento historiográfico señalamos seis concepciones relativas al concepto de número real caracterizadas en términos de representaciones, situaciones asociadas y tipificación como operacional o estructural, siguiendo la noción de concepción elaborada por Sfard (1991) , ello puede verse en el capítulo 3 de este trabajo; con base en ellas determinamos las concepciones inducidas por los textos y programas curriculares revisados en el análisis de textos y por otro, comprender las manifestadas los estudiantes.

Con respecto al análisis de contenido hallamos que el concepto de número real hace parte de los programas de formación para profesores de matemáticas en el Proyecto Curricular Licenciatura en Matemáticas, pues se propone para el estudio, específicamente en dos espacios académicos: Sistemas Numéricos y Cálculo Diferencial.

Con base en las conclusiones que presentamos en los capítulos 3 y 4, diseñamos un cuestionario que permitiera dar cuenta de las concepciones de los estudiantes; sin embargo, vale aclarar que la determinación de las preguntas del cuestionario es sólo una muestra de las tantas situaciones posibles que involucran al concepto y por tanto, las manifestaciones de los estudiantes sólo muestran una expresión parcial de sus concepciones; además, porque en la contestación de un cuestionario no se explicitan todas las ideas que tienen; por último, los análisis que presentamos, resultados y conclusiones, son producto de una interpretación de los datos suministrados por los sujetos de la muestra. Este proceso constituye las fases de verificación y conclusiones de la investigación que describimos en el capítulo 5.

1. PRELIMINARES

El concepto de número real es una de las ideas matemáticas más útiles e importantes, por cuanto sobre él se construye todo el edificio del cálculo, a nivel de la enseñanza en la escuela secundaria y en la universidad; además, el conjunto de los números reales es el único campo ordenado completo (salvo isomorfismos); y, sin embargo, es un concepto complejo y abstracto que tardó más de 2000 años en formalizarse como tal, mostrando diferentes representaciones, usos y concepciones, en diversos contextos socio-culturales y científicos a lo largo de su evolución histórica. Debido a estas características, es evidente la inclusión de este tópico en los programas de formación de profesores de matemáticas y la aparición de concepciones diversas, incluso erróneas, acerca del número real en los futuros maestros[1], además porque en la secundaria también lo han tratado. Precisamente, nuestro tema de interés son las concepciones que tienen los estudiantes de licenciatura en matemáticas acerca del número real.

En este apartado establecemos los aspectos específicos de la investigación; presentaremos, inicialmente, el estado del arte de trabajos realizados alrededor del tema que nos interesa abordar en nuestro estudio, a partir del cual plantearemos el problema y

[1] En esta tesis las expresiones estudiantes de Licenciatura en Matemáticas, futuros maestros, futuros profesores, estudiantes para profesor serán utilizadas indistintamente.

justificaremos su pertinencia desde el punto de vista investigativo, sumado con otros elementos de tipo teórico de la Didáctica de las Matemáticas. Finalmente, expondremos los objetivos que pretendemos alcanzar, las hipótesis y el tipo de metodología que utilizaremos, los instrumentos y las fases que tendremos en cuenta. El contenido de este capítulo es resultado de una revisión y reelaboración del anteproyecto de tesis, sustentado públicamente en el primer semestre de 2003.

1.1. *ANTECEDENTES DE INVESTIGACIÓN.*

De acuerdo a las revisiones bibliográficas realizadas, los trabajos existentes sobre concepciones de número real en estudiantes para profesores de matemáticas son *muy escasos*; de hecho, dentro del período 1990–2002, encontramos sólo una investigación al respecto (Costa, Farias, Cavalcanti, 1999), otra que estudia las concepciones de futuros profesores sobre los números racionales (Tirosh, Fischbein, Graeber y Wilson, 2000) y una última que trata el concepto de número real y concepciones de éste, pero en estudiantes de secundaria, sin ser éste su objeto principal de investigación (Romero, 1997).

Hay algunos estudios asociados con nuestro tema de interés, aunque no tan recientes, como Robinet (1986), Arcavi, Bruckheiner y Ben-Zvi (1987), Monaghan (1988) y Burn (1990), quienes intentaron conocer concepciones de estudiantes sobre nociones subyacentes al concepto de número real: representación decimal, densidad, la recta real, el continuo numérico, números irracionales, inconmensurabilidad, entre otros. Enseguida presentamos, de forma un poco más detallada, los trabajos de los autores mencionados anteriormente.

- Robinet (1986) diseña un cuestionario sobre el concepto de número real, la densidad de R, la diferencia entre decimales y racionales, y la recta real, aplicado a estudiantes universitarios de primer año. Los resultados de la aplicación de dicho cuestionario muestran que los estudiantes reconocen los números reales como un conjunto numérico sin considerarlos en el ámbito geométrico y asocian cada *subconjunto* de los números reales a una forma de escritura mediante la cual *los diferencian*.

- Arcavi, Bruckheiner y Ben-Zvi (1987) estudian los números irracionales en su desarrollo histórico con un objetivo didáctico, para la formación de profesores. A partir de dicho estudio histórico, diseñan y desarrollan un curso de números irracionales para profesores, con el fin de fortalecer su conocimiento matemático y pedagógico y crear su imagen de matemática como una ciencia desarrollada a través del esfuerzo creativo humano.

- Monaghan (1988) hace un estudio sobre las concepciones que tienen los alumnos del número real en su representación decimal. Hace énfasis en la importancia de la comprensión de este concepto –el de número real– para la comprensión del cálculo, al igual que la aceptación de los números con infinitas cifras decimales como números reales para la compresión de la completitud de R, resalta además que los estudiantes, en su mayoría, tienen la noción de infinito potencial sin llegar a la de infinito actual, básica, esta última, para aceptar dichos números como entidades.

- Burn (1990) presenta un artículo que resume una investigación en la cual estudia las creencias de los alumnos, que inician sus estudios de matemáticas en la universidad, respecto a la recta real. Manifiesta la dificultad de los estudiantes para pasar de un conjunto de números discreto a uno denso y de éste a uno continuo.

Estas investigaciones, aunque contribuyen al desarrollo de cualquier trabajo sobre el tema en cuestión, no reflejan los adelantos obtenidos en investigaciones más recientes en el campo de la Educación Matemática. Mostramos ahora los trabajos encontrados sobre número real y concepciones que mencionamos en el primer párrafo de esta sección y que aportan elementos para nuestro estudio, por lo cual los describiremos de manera más detalladas.

Tirosh, Fischbein, Graeber y Wilson (2000) realizaron una investigación titulada *Prospective Elementary Teachers' Conceptions of Racional Numbers* en la cual presentan, por una parte, las concepciones que tienen los futuros profesores de la escuela elemental sobre los números racionales y por otra, una propuesta para la enseñanza de los números racionales para esa misma población; de acuerdo con esto, dividieron el estudio en dos proyectos, "*Conceptual Adjustments in Progressing from Whole to Non-negative Rational Numbers*" y "*Using Multiple Representations to Enhance Teachers' Mathematical,* *Pedagogical and Curricular Knowledge of Rational Numbers*", respectivamente. Por ser de interés para nuestra tesis, ahondaremos únicamente en el primero de éstos.

Los objetivos principales de este proyecto fueron (1) entender las concepciones, de los profesores en formación de la escuela elemental, sobre los números racionales, (2) desarrollar acercamientos didácticos que ayuden a los futuros maestros a ampliar sus concepciones acerca de los números racionales y su conocimiento sobre las concepciones de los niños a este respecto, (3) involucrar a los futuros maestros en actividades que les permitan extender su noción de matemática como una actividad humana, y (4) ayudar a los futuros maestros a disminuir su temor hacia la matemática y elevar su confianza para hacer matemáticas. Para alcanzar estos objetivos, los investigadores desarrollaron una estructura conceptual que les permitiera analizar el conocimiento matemático de los futuros profesores acerca de los números racionales, asumiendo que el conocimiento matemático de los estudiantes (en este caso para profesores) consta de una red de conexiones entre tres dimensiones, algorítmica, formal e intuitiva (Fischbein, 1983).

La dimensión algorítmica consiste básicamente en las reglas para hacer "operaciones" y la capacidad de explicar los pasos sucesivos en un procedimiento; la dimensión formal incluye las definiciones, axiomas, teoremas (y sus pruebas) de un dominio específico y, la dimensión intuitiva comprende las ideas y creencias acerca de los conceptos, aceptadas directamente, por cada individuo, como obvias. Cabe anotar que estas tres dimensiones no son excluyentes entre sí, pues las tres se integran y solapan constantemente en el trabajo matemático; de hecho, la inconsistencia entre las relaciones entre algún par de éstas, o las tres, pueden ser la fuente de las dificultades y errores de los estudiantes.

Con base en estos planteamientos se diseñó una prueba aplicada a 147 futuros profesores de la escuela elemental, de primer año de universidad, 26 de los cuales escogieron matemáticas como énfasis en su formación y los otros 121, otras especialidades (biología, inglés, etc.). Posteriormente, se realizaron entrevistas a algunos de los sujetos, con el fin de establecer explicaciones para ciertos procedimientos o respuestas suministradas a las preguntas de la prueba, para lo cual se pedía a los entrevistados desarrollar preguntas similares a las de la prueba y luego, explicar la razón de los procedimientos de cada algoritmo. Para cada una de las dimensiones se tuvieron en cuenta los siguientes aspectos:

DIMENSIÓN	**ASPECTOS**
ALGORÍTMICA	Habilidad para calcular con números racionales y explicar los pasos de los algoritmos usuales con decimales y fracciones, incluido el paso de una representación a la otra.
FORMAL	Habilidad para definir números racionales e irracionales, relacionar números naturales, enteros, racionales, irracionales y reales y reconocer propiedades como la densidad de los números racionales y la conmutatividad, asociatividad y distributividad de las operaciones.
INTUITIVA	Habilidad para generar modelos que representen el concepto de número racional y las operaciones entre estos y evaluar afirmaciones acerca de las operaciones entre números racionales[2], como falsas o verdaderas.

Como resultado de este proceso se encontró que, en general, el conocimiento matemático de los futuros maestros, respecto al número racional es insuficiente, rígido y segmentado y se hicieron evidentes varias inconsistencias entre las tres dimensiones descritas, especialmente entre la algorítmica y la intuitiva.

Aunque los futuros maestros con énfasis en matemáticas mostraron un mejor desempeño que los demás, en razón a que ellos tienen una formación matemática más fuerte desde la secundaria y que muestran actitudes y aptitudes más positivas hacia ésta, la mayoría de los estudiantes, de los dos grupos, operó correctamente con los algoritmos usuales, pero eran incapaces de justificar los pasos sucesivos de éstos, y no pudieron producir representaciones

[2] Por ejemplo, "La división genera cocientes cada vez más pequeños" o "La multiplicación genera productos cada vez más grandes"

adecuadas de los conceptos de los números racionales y operaciones con ellos, excepto por áreas de figuras geométricas (relación parte-todo). Asumen la matemática como una colección de técnicas operacionales, a menudo intuitivas, e injustificadas formalmente, no conciben la matemática como un cuerpo de conocimientos estructurado y organizado.

Respecto a los números reales, se encontraron resultados como los siguientes, aunque algunos no señalan datos específicos en cuanto a porcentajes:

- La mayoría de los futuros maestros identifica números reales con números positivos; en consecuencia, -3, por ejemplo, no es un número real.
- Otros afirman que los números reales son "números buenos" como -3, 0.42, $\frac{23}{49}$ o $\frac{0}{2}$, mientras que números como 0 o 0.121221222…, no lo son.
- Sólo el 24% de los futuros maestros son conscientes de la densidad de los números racionales y el 30% señala que $\frac{1}{4}$ es el sucesor de $\frac{1}{5}$.
- El 92% de los estudiantes para profesores de la escuela elemental con énfasis en Matemáticas define correctamente números racionales e irracionales, mostrando un conocimiento formal de éstos; sólo el 23% de estudiantes con otras especialidades, lo hace correctamente – en los resultados hallados no se muestran ejemplos de las definiciones propuestas por los estudiantes –.
- El 81% de los estudiantes que eligen profundizar en Matemáticas dibujan un diagrama de Venn adecuado para describir las relaciones entre números naturales, enteros, racionales, irracionales y reales; mientras que únicamente el 25% de los estudiantes del otro grupo, lo hicieron.

La conclusión principal del trabajo señala que este tema, los números racionales, debe ser incluido en el plan de estudios de las universidades que forman maestros, pero con una perspectiva diferente, intentando hacer interacciones entre las dimensiones intuitiva, algorítmica y formal, mostrando la evolución histórica del concepto y explorando los procedimientos, explicaciones y errores de ellos mismos, animándolos a analizar su propio pensamiento como un preámbulo al análisis de éste en sus estudiantes.

Precisamente, referida a los estudiantes de la escuela, *Romero* (1997) en su tesis titulada *La introducción del Número real en enseñanza secundaria* presenta una experiencia de investigación-acción mediante la cual pretende explorar vías para la introducción al concepto de número real en el currículo de secundaria y detectar, analizar y evaluar las dificultades y potencialidades que se pueden presentar en el desarrollo de la comprensión matemática de los alumnos en un contexto escolar (el aula como un escenario natural y complejo); bajo el supuesto de que los problemas de la matemática del continuo tienen su raíz en el concepto de número real y que no existe un conocimiento suficiente y organizado de este campo conceptual. Otro objetivo de su estudio consistió en determinar concepciones[3] de los estudiantes de 1º de B.U.P. (Bachillerato Unificado Polivalente)[4] sobre la noción de número real, o sea la extensión y profundidad de las representaciones internas asociadas a la notación decimal y al modelo de la recta, sistemas de representación simbólico y gráfico, respectivamente.

Estos dos sistemas de representación se constituyeron en Focos de Investigación:

> *El Primer Foco estudia los problemas didácticos implicados en las notaciones numéricas usuales para representar los números reales, así como las potencialidades que el trabajo con este tipo de notaciones tiene para la comprensión del concepto; el Segundo Foco estudia, a su vez, los problemas que surgen de las representaciones geométricas de los números reales y las potencialidades que éstas presentan en el terreno didáctico* (Romero, 1997).

Cada uno de estos focos fue analizado mediante tres tipos de unidades de análisis, generadas a partir de los datos obtenidos y fundamentadas en la relación entre los tres componentes del sistema didáctico, así:

---

[3] Entendiendo concepción como el estado de conocimiento de un individuo respecto a un concepto, que evoluciona a lo largo de procesos de aprendizaje; tales estados de conocimiento están definidos por el grado de dominio de los sistemas de representación asociados al concepto. Es decir, una concepción es "*toda la red de representaciones internas y asociaciones evocadas por el concepto a través de sus representaciones externas*" (Sfard, 1991 citada por Romero, 1997 p. 71, 114)

[4] Las edades de los estudiantes de este curso oscila entre los 14 y 15 años, equivalente a los estudiantes de grado octavo de Educación Básica Secundaria en nuestro país.

RELACIONES SISTEMA DIDÁCTICO	TIPOS DE UNIDADES DE ANÁLISIS
Profesor – Contenido	Análisis de la organización del contenido
Profesor – Estudiante	Análisis de la interacción didáctica
Contenido – Estudiante	Análisis de la comprensión del contenido

A su vez, para cada uno de estos tipos, en cada foco, se señalaron una serie de unidades de análisis que dieran cuenta de cuestiones específicas a observar en cada caso; las cuales, constituyeron el sistema de categorías empleado para describir y evaluar la manera de organizar el contenido, la dinámica de trabajo en el aula y caracterizar la comprensión[5] de los estudiantes.

Son de nuestro interés, únicamente, las Unidades de Análisis para la Comprensión del Contenido, puesto que mediante éstas se interpretaron las concepciones que los alumnos tienen acerca del número real y tópicos asociados a este concepto. Dichas unidades son:

Foco de Investigación I

1. *Números racionales*
   - Interpretación sobre la notación decimal.
   - Interpretación del paso de la notación fraccionaria a la decimal.
   - Interpretación del paso de la notación decimal a la fraccionaria.
   - Comprensión de la correspondencia entre número decimal finito o periódico, fracción y decimal.
2. *Números reales*
   - Aceptación y uso de la notación decimal para representar números.
   - Criterios empleados y consistencia con los que se emplean, para aceptar expresiones decimales como números.

[5] Romero acoge la idea de comprensión propuesta por Hiebert y Carpenter (1992), según la cual "*Las matemáticas son comprendidas si su representación mental es parte de una red de representaciones. El grado de comprensión viene determinado por el número y la fuerza de las conexiones. Una idea, procedimiento o hecho matemático es comprendido a fondo si se liga a redes existentes con conexiones más numerosas o más fuertes*"

Comprensión del concepto de número real a partir de la notación decimal.

Foco de Investigación II

Números racionales

1.1 Comprensión sobre la medida de longitudes.

1.2 Manejo de la correspondencia números racionales y puntos de la recta.

1.3 Manejo de la correspondencia anterior como una aplicación bien definida.

1.4 Manejo de la correspondencia números racionales – puntos de la recta como aplicación inyectiva.

1.5 Manejo de la correspondencia números racionales – puntos de la recta como aplicación sobreyectiva.

2. Números reales

2.1 Capacidad para conectar la conmensurabilidad de una longitud con su expresión racional.

2.2 Capacidad para aceptar la existencia de segmentos con medida irracional.

2.3 Capacidad para aceptar el conflicto entre el carácter acotado de un segmento y la infinitud de su expresión irracional.

2.4 Capacidad para interpretar la imposibilidad física de longitudes irracionales.

2.5 Manejo de la correspondencia entre números reales y puntos de la recta.

2.6 Manejo de la correspondencia entre números reales y puntos de la recta como aplicación bien definida.

2.7 Manejo de la correspondencia entre números reales y puntos de la recta como aplicación inyectiva.

2.8 Manejo de la correspondencia entre números reales y puntos de la recta como aplicación sobreyectiva.

2.9 Diferenciación de la correspondencia entre números reales y puntos de la recta (en el sentido del continuo lineal).

Con base en las categorías de análisis señaladas anteriormente y otros puntos de interés no previstos en el sistema de categorías, se observaron avances significativos, a juicio de la investigadora, después de desarrollar la propuesta didáctica, en las concepciones de número real en los estudiantes; inicialmente, veían los números como simples conjuntos de dígitos útiles para contar o efectuar operaciones aritméticas, después del desarrollo de la propuesta, los estudiantes consideran los números como entidades con distintas representaciones, usos y características. También hubo avance en la concepción de algunos estudiantes alrededor de la conmensurabilidad e inconmensurabilidad de ciertas longitudes, respecto a otra tomada como unidad.

Mientras Romero (1997) realiza una investigación con estudiantes de secundaria entorno al concepto de número real, estableciendo categorías de análisis para determinar la comprensión sobre dicho campo conceptual; *Costa, Farias y Cavalcanti* (1999), al considerar que los estudiantes que ingresan a la licenciatura en matemáticas en Brasil no tienen una visión teórica sobre los números reales y además, poseen una experiencia escolar de varios años a lo largo de la cual construyen ciertas "imágenes conceptuales" que constituyen su saber sobre los números reales, llevaron a cabo un trabajo con estudiantes de licenciatura en matemáticas de UFMG y de UFSC[6] con el fin de conocer mejor esas imágenes conceptuales, basados en que detectarlas es muy importante desde el punto de vista didáctico y pedagógico puesto que se pueden convertir en obstáculos para el aprendizaje.

Se describieron y analizaron en forma cuantitativa y cualitativa, las pre-concepciones[7] e imágenes de los futuros profesores pensando en que es necesario conocer y analizar las imágenes que tienen respecto al número real para establecer una secuencia de enseñanza didáctica-pedagógica eficaz en la formación de profesores de matemáticas, que lleve a una visión global de este concepto y pueda ser instrumentalizada para la enseñanza.

A diferencia de Romero, quien utilizó diferentes técnicas para la recolección de datos, Farias, Costa y Cavalcanti emplearon como único instrumento un cuestionario que consta de 11 preguntas abiertas que dieron lugar a respuestas informales, las cuales fueron analizadas una por una señalando las respuestas dadas por los estudiantes con la frecuencia relativas sin hacer categorías explícitas, pues agruparon las respuestas de acuerdo a características

[6] Universidad Federal de Minas Gerais y Santa Catalina (Brasil)

[7] En el trabajo realizado por estos autores se emplean los términos imágenes conceptuales, representaciones conceptuales y concepciones como sinónimos.

comunes[8]. A partir del estudio realizado se estableció, como conclusión general, que los estudiantes para profesores de matemáticas "*poseen sus imágenes, a veces simplistas, a veces ingenuas, mas todas, resultantes de su vivencia escolar"*, la mayoría de ellos diferencian número racional de irracional básicamente desde la representación decimal de éstos, asocian los decimales finitos con los números racionales y los decimales infinitos con los irracionales pero sin constatar si son periódicos o no periódicos, obviando el significado de la inconmensurabilidad de segmentos y el sentido de los irracionales.

En este trabajo se llama la atención sobre la importancia de que los estudiantes para profesores de matemáticas tengan una formación matemática sólida dentro de la Licenciatura, pues ellos van a ser profesores en la escuela básica, esto significa, entre otras cosas, que deberán ayudar a los estudiantes a construir, criticar y reformular sus propios modelos intuitivos.

1.2. *JUSTIFICACIÓN Y FORMULACIÓN DEL PROBLEMA.*

Las concepciones y creencias se han convertido en un tópico de relieve para las investigaciones en educación. En particular, para la Didáctica de la Matemática, en los últimos años ha sido de interés comprender los procesos de adquisición de los conocimientos, en donde han tomado relevancia términos como concepción y otros asociados a éste como creencias, imágenes conceptuales, representaciones, entre otros. Se podría decir que la inclinación por este tópico de investigación, radica en que el estudio acerca de la concepción permite (Artigue, 1990):

---

[8] Por ejemplo, para la pregunta seis que consta de tres ítems: "*a) Encuentre un número racional y uno irracional entre* $\frac{2}{3}$ *y* $\frac{3}{4}$ *, b) Encuentre tres números racionales y tres irracionales entre* $\frac{2}{3}$ *y* $\frac{3}{4}$ *y c) ¿Cuántos números irracionales existen entre* $\frac{2}{3}$ *y* $\frac{3}{4}$*? ¿E irracionales?. Explique su respuesta*" , se realizó el siguiente análisis: "*Apenas, el 42% de los alumnos afirmaron que existen infinitos racionales e infinitos irracionales entre* $\frac{2}{3}$ *y* $\frac{3}{4}$ *con justificación o sin justificación correcta. Nueve alumnos (cerca del 10%) presentaron una justificación correcta para el caso de dos racionales y apenas tres estudiantes para el caso de los irracionales. Sólo el 25% de los estudiantes consiguieron escribir tres irracionales entre* $\frac{2}{3}$ *y* $\frac{3}{4}$*, en cuanto que el 44% escribieron tres racionales*".

- *Poner en evidencia la pluralidad de los puntos de vista posibles sobre un mismo objeto matemático, diferenciar las representaciones y modos de tratamiento que están asociados a ellas, poner en evidencia su adaptación más o menos buena a la resolución de ésta u otra clase de problemas,*
- *Ayudar al didáctico a luchar contra la ilusión de transparencia de la comunicación didáctica presente en los modelos tomados del aprendizaje, permitiendo diferenciar el saber que la enseñanza desea transmitir y los conocimientos efectivamente construidos por los estudiantes*

La concepción se constituye en una herramienta para el análisis del saber y el diseño de situaciones didácticas que permitan analizar las actuaciones de los estudiantes en relación con un concepto matemático. En la medida en que el profesor conozca las concepciones de los estudiantes, propondrá ciertos problemas o situaciones que conlleven a que se evidencien, modifiquen o completen tales concepciones, de tal manera que éstas se aproximen cada vez más al concepto en cuestión (Brousseau, 1983).

Otro de los intereses por estudiar las concepciones que tienen los estudiantes sobre temas matemáticos radica en que mediante éstas es posible "*distinguir aquellas que pueden constituir obstáculos para la producción de otros conocimientos y clarificar las condiciones en las que estas concepciones, a veces muy resistentes, pueden se modificadas"* (Ruiz, 1993).

Margolinas (1993) muestra la concepción como una herramienta útil que permite al investigador describir los procedimientos, definiciones y modelos de comportamiento, entre otras manifestaciones de los estudiantes frente a una situación.

Además, "*... los maestros estarán mejor equipados para enseñar matemáticas si ellos pueden entender cómo el tema es mirado desde la perspectiva de sus estudiantes*" (Farfán, 199?).

Estas razones son más que suficientes para evidenciar la importancia del estudio de concepciones asociadas a un objeto matemático. En particular, consideramos importante conocer las concepciones respecto al número real, puesto que:

- "*El concepto de número real es, sin duda, un concepto matemático complejo"*(Feferman, 1989, citado por Romero, 1997, pp.13), de hecho, su evolución ha implicado más de dos mil años de esfuerzo y arduo trabajo por parte de varias generaciones de matemáticos.
- Es un concepto básico para el estudio de las matemáticas. El conjunto de los números reales, es el más conocido y la más útil de todas las construcciones en matemáticas, por una parte se encuentra asociado a otros conceptos matemáticos fundamentales como límite, continuidad, inconmensurabilidad, infinito, etc. y por otra, la abstracción y generalización de sus propiedades es la base de conceptos como álgebras, espacios vectoriales, espacios métricos, etc. (Rey, 1958)
- Los antecedentes de investigaciones realizadas revelan la existencia de concepciones incorrectas o inconsistentes o incompletas (de los estudiantes) en cuanto a número real se refiere.
- El concepto de número real ha evolucionado progresivamente en la historia presentando varios matices de acuerdo a los diversos contextos donde surgió y ha sido tratado; lo cuales, en cierta medida, se reflejan en las concepciones de los profesores y estudiantes de este siglo.

Dada la importancia de este concepto, ha sido introducido en los currículos escolares desde los primeros cursos de la educación secundaria, razón por la cual es necesario que los profesores de matemáticas tengan un sólido conocimiento de éste, pues son ellos quienes tienen la responsabilidad de contribuir a la elaboración o consolidación de una buena *transposición didáctica* (Chevallard, 1991) que generará concepciones, inducidas por la enseñanza, más próximas al concepto en sus estudiantes, en la medida en que sus concepciones (las de los profesores) estén más cercanas a él.

En consecuencia, estudiar las concepciones que tienen los estudiantes en formación para profesores de matemáticas respecto al número real es pertinente, entre otras razones, porque:

- Son pocas las investigaciones desarrolladas en torno al conocimiento profesional del profesor de matemáticas en lo disciplinar y específicamente en este tema, tal como lo evidencian los antecedentes presentados.

- Las concepciones que tienen los futuros profesores constituyen un referente para determinar qué tan próximos están ellos del concepto (Artigué, 1990) o qué elementos son los más sobresalientes sobre el tópico en consideración.
- Partiendo del supuesto de que el conocimiento disciplinar[9] de los futuros profesores de matemáticas debe partir fundamentalmente de las concepciones que se tienen sobre el concepto para adquirir una visión teórica más amplia de éste (Farias, et al., 1999), teniendo en cuenta que el estudiante, como es obvio, incluso para profesor, aprende en contra de sus concepciones; un estudio acerca de las concepciones contribuiría para tal fin.

Por otra parte, la Universidad Pedagógica Nacional como institución líder en la formación de profesores en Colombia se ha visto en la necesidad de responder a las nuevas exigencias sociales, políticas y culturales que enfrenta el país, razón por la cual se están llevando a cabo reformas educativas en cada uno de los proyectos curriculares que ofrece. En este proceso, el Departamento de Matemáticas ha elaborado una nueva propuesta curricular para la Licenciatura en Matemáticas con la que se pretende formar un profesional de la educación matemática

- *Dinamizador de propuestas educativas y de innovaciones curriculares en la institución en la cual se desempeñe,*
- *Generador de ambientes y propuestas didácticas que eleven la cultura matemática del ciudadano colombiano,*
- *En cuyo que hacer diario esté presente la reconstrucción y/o construcción de matemáticas y la construcción de matemáticas escolares y*
- *Que integre al desarrollo de sus proyectos los avances pedagógicos, disciplinares, científicos y tecnológicos.* (Programa curricular de la Licenciatura en matemáticas, UPN, 1999);

para lo cual, el estudiante para profesor de matemáticas, dentro de su formación, debe adquirir, entre otros componentes, una fundamentación matemática consistente, que le sirva como base para su desempeño profesional.

[9] Entendemos conocimiento disciplinar como aquel que Llinares (1998) denomina conocimiento del contenido matemático, como un elemento del conocimiento profesional del profesor de matemáticas.

Dentro del conocimiento de contenido matemático para el profesor de matemáticas se destaca, entre otros conceptos, el de número real, razón principal que ha llevado a incluir este tópico en el ciclo de fundamentación de la Licenciatura en matemáticas de la UPN, en particular, en las líneas de álgebra[10] y cálculo[11], áreas que se han encargado de presentar el concepto desde una perspectiva diferente respecto al programa de formación anterior (Proyecto Curricular de la Licenciatura en matemáticas, 1999 y programas de las asignaturas, 1994 - 2001).

Además, en nuestro país el número real se incluye como núcleo conceptual en la educación básica y media; los Lineamientos curriculares (1998) dan importancia a este tema porque a él está asociado el pensamiento variacional; también, en la resolución N° 2343 de Junio 5 de 1996 se enuncian como indicadores de logro curriculares para la educación media los siguientes:

- "*Da razones del porqué de los números reales y explica porqué unos racionales y otros irracionales"* y
- *"Utiliza el sentido de las operaciones y de las relaciones en el sistema de los números reales"*,

lo cual indica que el profesor de matemáticas debe tener un saber profesional[12] sólido acerca del número real, no sólo axiomático sino que también debe conocer cómo se ha generado este saber, por qué y para qué, y así tener elementos que le permitan proponer actividades que conlleven a que sus estudiantes se apropien de éste.

De acuerdo con todo lo expuesto anteriormente deseamos saber,

---

[10] Área encargada de atender a aspectos relativos a la construcción del número y los conceptos de operación y estructura (Proyecto curricular de la Licenciatura en Matemáticas, 1999)

[11] Área encargada de atender a los problemas relacionados con la construcción de los conceptos de variación y aproximación. (Proyecto curricular de la Licenciatura en Matemáticas, 1999).

[12] "*el saber profesional es producto de una actividad profesional caracterizada por la acumulación de una experiencia práctica en un dominio dado y que será tanto más eficaz cuando más se pueda referir a conocimientos de orden científico*" (Ponte, 1992 citado por Llinares, 1995)

> *después de que los estudiantes de la Licenciatura en Matemáticas de la Universidad Pedagógica Nacional, han estudiado y utilizado este concepto durante el ciclo de Fundamentación del Proyecto Curricular,* ***cuáles son las concepciones que tienen sobre número real.***

1.3. *OBJETIVOS.*

Después de haber hecho claridad sobre la importancia y pertinencia que tiene un estudio de las concepciones de los estudiantes sobre un tópico matemático, presentamos el objetivo general de nuestra investigación:

> *Determinar y caracterizar las concepciones que manifiestan estudiantes de Licenciatura en matemáticas sobre el concepto de número real, con base en las representaciones del número real, su desarrollo histórico y su presentación en algunos textos.*

Objetivo que se hará posible con la consecución de los siguientes objetivos específicos:

- Realizar un seguimiento historiográfico del concepto de número real atendiendo a los momentos más significativos de su evolución.
- Determinar las concepciones asociadas a la evolución histórica del número real.
- Describir e interpretar los programas curriculares vigentes, a partir de los cuales la población, objeto de investigación, estudia el concepto de número real.
- Determinar las concepciones que inducen los programas curriculares actuales y algunos textos consultados por los estudiantes.
- Diseñar y aplicar un cuestionario y una sesión en profundidad que lleven a los estudiantes a explicitar sus concepciones sobre el número real.
- Interpretar y caracterizar las concepciones manifestadas por los estudiantes de Licenciatura en Matemáticas (después de haber finalizado el ciclo de fundamentación) sobre el número real.

Para llevar a cabo estos objetivos partimos del supuesto de que los estudiantes de Licenciatura en Matemáticas tienen concepciones, espontáneas o propias (inducidas por la enseñanza), sobre los números reales; pues, por una parte, no tiene sentido suponer que el sujeto sea tabula rasa, él tiene algunas ideas (correctas o no) de los conceptos matemáticos, derivadas de las asociaciones que hace respecto a su entorno social y cultural (por ejemplo, los significados coloquiales de las palabras, en este caso *número* y *real*); y por otra, los estudiantes tienen una experiencia escolar (secundaria y universitaria) en la cual han abordado este concepto haciendo énfasis en diferentes elementos constitutivos de este tópico, lo que implica que aparezcan concepciones, no sólo por su contacto con los cursos donde han tratado el tema sino por su relación con los libros, observaciones de clases y su propia experiencia y estudio; tales concepciones, se hacen manifiestas por los estudiantes en la manera de abordar y resolver ejercicios, problemas, etc., participar en discusiones, justificar y argumentar sus procedimientos o afirmaciones, relativas, en este caso, al concepto que nos ocupa.

1.4. *HIPÓTESIS DE INVESTIGACIÓN*[13].

Definimos como hipótesis de nuestro trabajo de investigación que los estudiantes, quienes finalizan el ciclo de fundamentación de la Licenciatura en Matemáticas:

1. Ven los números reales como un conjunto con una estructura algebraica ordenada y completa.
2. Asocian el concepto de número real con el proceso (o problema) de medir y en particular, el número irracional con la inconmensurabilidad referida a objetos matemáticos ideales.
3. Conciben los números reales como un conjunto numérico, cuyo estado actual es resultado de uno o varios procesos de construcción y formalización.
4. Aceptan que los números con infinitas cifras decimales no periódicas son números irracionales y lo justifican.

[13] *Las hipótesis indican lo que estamos buscando o tratando de probar y pueden definirse como explicaciones tentativas del fenómeno investigado formuladas a manera de proposiciones*. (…) *son sólo proposiciones sujetas a comprobación empírica*. (Hernández, R. et al, 1998, p. 74)

5. Diferencian entre conjuntos numéricos como los naturales, enteros, racionales, irracionales y reales de acuerdo a las propiedades y procesos asociados a éstos, salvo subconjuntos isomorfos.
6. Aceptan la existencia de los números reales como un conjunto no numerable; sin embargo, tienen dificultad para argumentarlo de manera formal (demostrar a partir de axiomas y reglas establecidas) y basan sus explicaciones en consideraciones informales.

1.5. ***METODOLOGÍA.***

Nuestro estudio está enmarcado en la investigación social, entendida ésta como un proceso orientado a conceptuar la realidad con el fin de obtener información, lo más exacta posible, sobre algún fenómeno social específico, que contribuya a ampliar los conocimientos respecto a dicha realidad (Sierra, 1985, p. 37). Específicamente, la investigación en Didáctica de las Matemáticas se considera social, por cuanto ésta está inmersa en las ciencias sociales y los tipos y métodos de investigación establecidos para ellas se ajustan al trabajo realizado al interior de esta disciplina científica.

Nuestro estudio corresponde a las investigaciones centradas en descifrar aspectos puntuales de un tema específico, según Gutiérrez (1991) uno de los tipos de trabajo investigativo en Educación Matemática. Para nuestro caso particular, el fenómeno social que nos interesa estudiar es la presencia de concepciones alrededor de un tema concreto de las matemáticas, el concepto de número real.

El estudio que realizaremos consta de tres fases, propias de las investigaciones sociales:

> *La primera se refiere a la formación de las ideas supuestamente científicas, hipótesis, y a su preparación para contrastarlas con los hechos. La segunda consiste en la verificación de estas ideas o su prueba con la realidad. Por último, la tercera atañe a la elaboración y exposición científica de las ideas, resultado de la investigación realizada* (Sierra, op cit., p. 43);

no obstante, la caracterización específica de dichas fases y las actividades puntuales a realizar (la estrategia de investigación), dependen, además, de la tipificación particular de nuestro trabajo, al interior de los estilos de investigación social.

Siguiendo a Sierra (1985), Hernández, et al (1998) y Gutiérrez (199?), ésta es una investigación de tipo básico, seccional, microsocial, práctico, interpretativo, exploratorio–descriptivo y cualitativo–cuantitativo;

- es *básica* porque el interés es comprender un fenómeno social, no mejorarlo;
- *seccional* y *microsocial* pues se recolectan los datos en un momento único y en un grupo social pequeño;
- *práctico* porque está apoyada en la interacción directa con los estudiantes;
- *interpretativa* porque con base en una serie de tareas desarrolladas por los estudiantes se caracterizan las concepciones manifestadas por ellos;
- *exploratoria - descriptiva* dado que, como se muestra en el estado del arte, nuestro problema de investigación ha sido poco estudiado y en contextos diferentes al nuestro; además, no nos interesa explicar las causas o consecuencias de estas concepciones, sólo especificar las propiedades del grupo que nos permitan caracterizar el fenómeno;
- y *cuantitativa–cualitativa* pues para el análisis de los datos obtenidos (concepciones de los estudiantes) emplearemos inicialmente técnicas de estadística descriptiva, a partir de las cuales interpretaremos las concepciones de quienes participan en la investigación como sujetos de estudio, nuestro interés es darle significado a la realidad particular del contexto que muestran los resultados organizados cuantitativamente.

Por ser de tipo cuantitativo consideramos otro criterio de clasificación, la posibilidad de controlar las variables y las situaciones relacionadas con el fenómeno a estudiar (Briones, 1997), de acuerdo con el cual este trabajo presenta un diseño no experimental, pretendemos observar un fenómeno tal y como se da en su contexto natural, para después analizarlo, sin provocarlo ni constituir el grupo de estudio intencionalmente (Hernández, et al, op cit. p. 132).

Gutiérrez (199?), además de clasificar las investigaciones en Educación Matemática por tipos, también las clasifica por metodologías. Según él, dentro de la investigación práctica existen cuatro métodos, experimentación, estudio de casos, cualitativo y cuantitativo, los dos primeros relacionados con la fase de obtención y los otros, con la fase de análisis de la información, ya señalados anteriormente como tipos de investigación. Por último, emplearemos el estudio de casos porque es un método propio para organizar y presentar información sobre las acciones, creencias o concepciones de una persona o un grupo de personas inscritas en una situación determinada (Farfán, 199?), es importante tener en cuenta que este método permite comprender a profundidad lo estudiado, contribuye para planear investigaciones más extensas y no es útil para generalizar.

El proceso de observación se realizará mediante encuesta, en el sentido de interrogar a los sujetos de la muestra; en este caso, la observación no es directa pues los hechos se hacen evidentes a través de las manifestaciones presentadas por los sujetos estudiados frente a ciertas tareas. Específicamente, emplearemos un *cuestionario* y una *sesión en profundidad* como instrumentos de recolección de datos; nos valdremos de la triangulación de técnicas, es decir el empleo de más de un instrumento de recolección, como un mecanismo para obtener mayor seguridad en los datos y darle confiabilidad a la observación, dado que

Todo método de recopilación de datos, incluyendo la encuesta, constituye una aproximación al conocimiento. Cada uno proporciona una visión distinta de la realidad y todos tienen limitaciones al ser utilizados en forma aislada (Lininger y Warwick, 1978, citados por Sierra, op cit. p. 115)

La sesión en profundidad toma como punto de partida los resultados obtenidos en algunas tareas presentes en un *cuestionario exploratorio* , de carácter individual, aplicado a estudiantes de VI semestre del Proyecto Curricular Licenciatura en Matemáticas de la Universidad Pedagógica Nacional, con el fin de obtener, de la muestra, en forma organizada y sistemática la información relacionada con nuestro objeto de estudio. Después del análisis del cuestionario e identificación de ciertas tendencias, se seleccionarán algunos estudiantes, con quienes se realizará la sesión en profundidad para contrastar las respuestas y argumentaciones dadas ante ciertas situaciones planteadas, en el cuestionario y en ella; precisamente, la discusión en grupo a que da lugar esta técnica de recolección de datos nos proporcionará más elementos para caracterizar, con mayor precisión, la concepción que poseen los estudiantes.

El análisis de los resultados, tanto del cuestionario como de la sesión en profundidad y de estos dos instrumentos relacionados, se realizará con base en las conclusiones del análisis de textos y análisis histórico-epistemológico del número real, claro está que cabe la posibilidad de incluir otras concepciones que no se haya identificado en el desarrollo del marco teórico, pero que surjan de las respuestas de los estudiantes.

A continuación describiremos las etapas que llevaremos a cabo en nuestra investigación y las actividades puntuales a realizar en cada una de ellas:

1. Consolidación del marco teórico.

1.1. Estudio comprensivo acerca de la educación matemática como disciplina científica, específicamente lo relacionado con su enfoque sistémico, el sistema didáctico y la teoría de la transposición didáctica.

1.2. Caracterización de los términos representación, concepción y otros asociados a éstos, a partir de los cuales delimitaremos lo que vamos a entender por concepción en nuestro estudio.

1.3. Estudio comprensivo de la historia del número real (seguimiento historiográfico) y de las teorías matemáticas acerca de este concepto, que nos permitan entender -y complementar- el análisis epistemológico realizado por Romero (1997) y a partir de éste señalar las concepciones del número real que se han presentado a través de la historia y en diferentes civilizaciones.

1.4. Análisis de contenido de currículos y algunos textos, que incluyen el tratamiento del número real, empleados en la Licenciatura en Matemáticas de la Universidad Pedagógica Nacional, en el proyecto curricular vigente.

2. Proceso de verificación.

2.1. Establecimiento de las variables a observar con base en los aspectos relacionados con el concepto de número real, como sus representaciones.

2.2. Diseño del primer instrumento de recolección de datos (cuestionario), con base en las hipótesis de investigación, las variables establecidas y las concepciones identificadas en el seguimiento historiográfico y en el análisis de contenido.

2.3. Selección de la muestra de estudiantes para realizar el cuestionario. Aplicación del primer instrumento.

2.4. Tabulación de los resultados obtenidos de la aplicación del cuestionario. Establecimiento de las categorías de análisis con base en ésta.

2.5. Análisis de los resultados obtenidos con el primer instrumento de recolección de datos. Selección de la muestra de estudiantes para realizar la sesión en profundidad.

2.6. Diseño y aplicación del segundo instrumento de recolección de datos (Sesión en profundidad).

2.7. Análisis de los resultados obtenidos con el segundo instrumento de recolección de datos. Contraste entre los resultados obtenidos de los dos instrumentos.

3. Conclusiones del estudio, proyecciones y recomendaciones.

2. REFERENTES TEÓRICOS DESDE LA DIDÁCTICA DE LAS MATEMÁTICAS

Este trabajo hace parte de la investigación en Didáctica de las Matemáticas, dado que pretendemos determinar y caracterizar las concepciones de un grupo de estudiantes alrededor de un tema específico; esto aporta a la Didáctica de las Matemáticas, en la medida que permite analizar los procesos y dificultades en el aprendizaje de conceptos y estrategias, que se reflejan en la forma como los estudiantes desarrollan ciertas tareas o responden a determinadas preguntas, también se constituye en un instrumento para determinar factores esenciales para el diseño de propuestas curriculares. Según Gutiérrez (1991), estos aportes son tipos de investigación en Educación Matemática; y en razón a esto, es necesario delimitar el objeto de estudio de la Didáctica de las Matemáticas y los elementos teóricos que, desde esta disciplina, sustentan nuestro trabajo.

Precisamos que a lo largo de este escrito asumiremos los términos Didáctica de las Matemáticas y Educación Matemática como sinónimos porque estas denominaciones obedecen principalmente a la ubicación geográfica de su establecimiento, la primera, empleada por la Escuela Francesa (dos de sus representantes son Brousseau y Chevallard), bien puede considerarse como equivalente a la segunda, usada por el grupo T.M.E. (Theory of Mathematics Education), pues la actividad investigativa sustancialmente es la misma, salvo pequeñas diferencias que no ameritan la distinción.

En este capitulo esbozaremos de manera general, y atendiendo a varios referentes teóricos, lo que entendemos por Didáctica de las Matemáticas, como disciplina científica en sí misma y como campo de investigación, consolidado durante las últimas cinco décadas; abordaremos el estudio de algunos componentes de la Didáctica de las Matemáticas, considerada desde un enfoque sistémico y, por último, caracterizaremos los términos aprendizaje, representación y concepción. Salvo en los últimos apartados de este capitulo, no estamos interesadas en asumir alguna postura frente al significado de los demás constructos empleados, por no ser pertinente para el desarrollo de este trabajo.

2.1. *DIDÁCTICA Y DIDÁCTICA DE LAS MATEMÁTICAS.*

En primer lugar, señalamos que la Didáctica de las Matemáticas es una disciplina científica relativamente reciente; aunque el interés por la enseñanza, la transmisión y el aprendizaje de conceptos o ideas matemáticas, es tan antigua como la vida en sociedad y ha estado vinculada con la evolución misma de las matemáticas, su reflexión sistemática y el desarrollo de teorías e investigaciones ha tenido un tratamiento especial a nivel mundial sólo desde mediados del siglo pasado.

La Didáctica, en general, es asumida como la ciencia encargada del estudio de un proceso educativo específico, la Enseñanza, y en este sentido aporta a la Pedagogía, entendida esta última como la ciencia de la Educación. Según Brousseau (1990), la palabra didáctica puede considerarse desde tres perspectivas, complementarias entre sí:

(i) como una palabra culta para designar la enseñanza; es decir, la didáctica como un proyecto social cuyo fin es hacer que un alumno se apropie de un saber, así el didacta se constituye en un "*enseñante que hace esfuerzos particulares para determinar el objeto y los métodos de su enseñanza*" (Brousseau, op. cit., p. 260),

(ii) como la preparación de lo que sirve para enseñar; es decir, la palabra didáctica vista como adjetivo que se refiere a las técnicas que son útiles para la enseñanza, en este caso, el didacta es un técnico o creativo que produce o ingenia medios para la enseñanza, o

(iii) como el conocimiento del arte de enseñar; es decir, la didáctica concebida como un campo de investigación dado que trata del estudio reflexivo de la enseñanza, el didacta es, entonces, un investigador.

Plantea además que, en los últimos treinta años, ha aparecido bajo el nombre didáctica "*un intento de constituir una ciencia de la comunicación de los conocimientos y de sus transformaciones*; *una epistemología experimental que intenta teorizar la producción y la circulación de los saberes…Esta ciencia se interesa, en lo que estos fenómenos tienen de específico del conocimiento que se tiene en el punto de mira…* " (Brousseau, op cit. p. 260).

Otra acepción, más reciente, es la propuesta por Chevallard et al (2000, p. 47), para quienes lo didáctico se identifica "*con todo lo que tiene relación con el estudio y con la ayuda al estudio*" y "*los fenómenos didácticos con los fenómenos que emergen de cualquier proceso de estudio*"; así, el interés de la Didáctica es describir y caracterizar los procesos de estudio, entre los cuales, la enseñanza aparece como un medio para éste y el aprendizaje, como su objeto.

Hasta ahora hemos tratado la Didáctica desde su ámbito general siendo esta visión la más difundida y acogida en la formación de profesores; sin embargo, en los últimos años se ha encontrado que la Didáctica no es independiente del contenido de la enseñanza. Los procesos de adquisición de los saberes y las situaciones de aprendizaje no son universalmente los mismos, dado que los humanos no aprendemos bajo las mismas circunstancias, esto ha hecho que la Didáctica Moderna se vuelva específica y que, en este sentido, aparezca, por ejemplo, la Didáctica de las Matemáticas y de manera más especializada, la Didáctica del Álgebra, de la Geometría, de la Probabilidad, etc. (Brousseau, 2003)

De acuerdo con los constructos teóricos antes descritos, la Didáctica de las Matemáticas, bien puede entenderse como:

i. el estudio de "*las actividades didácticas, es decir las actividades que tienen por objeto la enseñanza, evidentemente en lo que tienen de específicas respecto de las matemáticas*" (Brousseau, 1986, p. 5),
ii. una disciplina del conocimiento que se ocupa del estudio de los fenómenos didácticos relacionados con el saber matemático (Cantoral, et al, 2003 p. 204),
iii. "*un campo de estudio de la comunicación de los conocimientos matemáticos y de sus transformaciones en el ámbito escolar y extraescolar, que se da con la intención de que éstos sean aprendidos por la sociedad en general*" (Guacaneme, 2002),
iv. "*la ciencia del estudio y de la ayuda al estudio de las matemáticas*" (Chevallard et al, op. cit., p. 60);

independientemente de estas definiciones y de otras que puedan existir o surgir, nuestro interés, para este trabajo, no está en la ontología de la Didáctica de las Matemáticas, sino en su carácter científico e investigativo.

A lo largo del proceso de consolidación de esta disciplina, han aparecido otras que influencian, o apoyan, el campo de la investigación en Didáctica de las Matemáticas, entre ellas, las Matemáticas, la Pedagogía, la Psicología Cognitiva y Educativa, la Sociología, la Epistemología y la Historia de las Matemáticas; esto en razón a la historia de la evolución de la Educación Matemática, específicamente en las problemáticas fundamentales a tratar por ella y en el establecimientos de métodos de investigación y validación.

Según Cantoral, et al (2003), inicialmente una de las tareas de la Didáctica de las Matemáticas era el establecimiento de medios de enseñanza para la presentación de contenidos matemáticos específicos, para lo cual los profesionales de la matemática eran considerados como los indicados para hacer una adaptación del conocimiento matemático en la escuela. Posteriormente, en la década de los ochenta, surgieron otras preguntas, en la comunidad académica de los educadores matemáticos, relacionadas con el aprendizaje, específicamente ¿cómo aprenden las personas? y ¿cómo es posible aprender a observar procesos de aprendizaje?, complementando el interés inicial de la Didáctica de las Matemáticas y generando un nuevo paradigma de investigación apoyado en la Psicología

Cognitiva, disciplina que intentaba responder preguntas respecto a los procesos cognitivos que se llevan a cabo en el individuo que aprende para, a partir de ello, hacer propuestas para la enseñanza y, de manera más amplia, para el diseño curricular. En este paradigma se incluyen trabajos como los desarrollados por Tall y Vinner (1981) acerca de los constructos imagen conceptual y definición del concepto, los estudios de concepciones, entre otros.

Otra perspectiva de investigación aparece pensando en la utilidad de los conceptos matemáticos, donde surge la resolución de problemas. Desde este enfoque, se considera importante el estudio de la historia de los conceptos matemáticos, fundamentalmente desde el punto de vista fenomenológico, de tal manera que haya algún aporte para el diseño y desarrollo curricular, empleando los mismos problemas que dieron origen a dichos conceptos. Por último, se encuentra un enfoque integrador de las componentes anteriores junto con otros elementos epistemológicos de la historia de los conceptos matemáticos y la dimensión socio-cultural de las situaciones de enseñanza y aprendizaje.

En la Educación Matemática, al igual que en cualquier disciplina científica se presenta la necesidad de plantear teorías que le proporcionen sustento y mecanismos de sistematización de los resultados que se obtienen como producto de investigaciones; la teorización permite explicar y predecir los eventos y finalmente, darle un estatus científico. A este respecto, Godino (1991) considera que la actividad de teorización no debe ser interpretada como un componente de la Educación Matemática sino como una estructura global constituida por el sistema social y, en consecuencia, por las ciencias referenciales para la Educación Matemática y por el sistema de enseñanza de las Matemáticas.

La Educación Matemática se encuentra en proceso de definir su propia identidad investigativa, sus objetos de estudio, métodos de trabajo, validación de resultados y en general, niveles mínimos de calidad. En este sentido, cada vez hay más líneas de investigación mejor constituidas que, desde diversos enfoques e intereses, aportan a la teorización de esta disciplina y desde las cuales, surgen inquietudes que generan nuevas investigaciones; condición importante para cualificar la profesionalidad de los estudiosos y para consolidarla como disciplina científica.

De acuerdo con Lesh (1979, citado por Godino, 1991), la investigación en Educación Matemática tiene como objetivo

> *desarrollar un cuerpo de conocimientos útiles relacionados con temas importantes de la didáctica de las matemáticas. Desarrollar conocimientos útiles significa: a) identificar problemas importantes para la enseñanza de las matemáticas, b) plantear conjuntos de cuestiones concretas relacionadas entre sí y que contribuyan a mejorar el conocimiento disponible sobre el tema subyacente, c) encontrar respuestas a esas cuestiones que sean útiles en una diversidad de contextos, eliminando la información poco válida o inútil y d) comunicar los resultados y conclusiones, de forma que sean comprensibles por profesores e investigadores*.

Así, la investigación en Didáctica de las Matemáticas ha encontrado un campo propicio y "abonado", esto en razón a la importancia que se le da a las matemáticas en la sociedad y a los conflictos que se suscitan alrededor de su enseñanza y aprendizaje. Existen grupos de investigadores o *programas de investigación* dedicados a producir teorías propias en esta disciplina científica; entre ellos, el T. M. E., el P. M. E. y la Escuela Francesa (Godino, 1991).

El grupo T. M. E. (Theory of Mathematics Education) ha tenido como interés desde su creación la construcción de las bases teóricas de la didáctica de las matemáticas, vista ésta como "*un campo académico y como un dominio de interacción entre la investigación, el desarrollo y la práctica*".

El grupo P. M. E. (Psychology of Mathematics Education) parte de la psicología como herramienta importante para justificar el proceso educativo, pues se ha visto que la influencia de la psicología es tan amplia, que ha llegado a considerarse como el paradigma de la Educación Matemática, específicamente en lo relacionado con el análisis de la conducta del estudiante y, en general, de todos los actores que intervienen en el proceso.

Por último, dentro de los grupos más destacados, se encuentra la Escuela Francesa, el cual se ha esforzado por reflexionar, desde la teoría, acerca del objeto y métodos de investigación, específicos de la Didáctica de las Matemáticas. Este grupo le ha dado un enfoque sistémico a los fenómenos de enseñanza y aprendizaje en relación con los elementos que los constituyen, es decir, saber matemático, estudiante y profesor, éstos inmersos en un medio. La escuela francesa, liderada por académicos como Brousseau y Chevallard, se ha ido consolidando como grupo de investigación.

Además de estos grupos reconocidos, existen otras comunidades académicas interesadas por la Didáctica de las Matemáticas que día a día constituyen gran aporte al campo de estudio de esta disciplina científica, como muestra están las variadas editoriales y revistas especializadas y los numerosos eventos organizados, alrededor de los tópicos que le conciernen a la Didáctica de la Matemáticas, como ICME, RELME, CAREM, CEAM, NCTM, entre otros y en nuestro país, los liderados por grupos de profesores de universidades, colegios y entidades como ASOCOLME (Asociación Colombiana de Matemática Educativa) y el Ministerio de Educación Nacional; donde participan investigadores individuales o pequeños grupos, centrados en parcelas de temas relacionados con propuestas curriculares, producción de materiales para la enseñanza y el aprendizaje, uso de herramientas tecnológicas en el aula, estudios históricos cortos sobre temas específicos de las matemáticas o aportes de matemáticos, etc.

2.2. *ENFOQUE SISTÉMICO DE LA DIDÁCTICA DE LAS MATEMÁTICAS.*

El enfoque sistémico de la Didáctica de las Matemáticas ha sido establecido por la Escuela Francesa de la Didáctica de la Matemáticas, con investigadores como: Brousseau, Chevallard, Artigué, Vergnaud, Douady, Godino y D'Amore, quienes, con sus escritos han ejercido una fuerte influencia en Latinoamérica.

Godino (1991, p. 132) señala, con base en los planteamientos de Chevallard (1982), que el funcionamiento global de un hecho didáctico, de los fenómenos de enseñanza y aprendizaje, no puede ser analizado estudiando aisladamente cada uno de sus elementos; al respecto Chevallard, en su modelo teórico establece tres elementos fundamentales: profesor, estudiante y saber matemático, que constituyen, junto con las interacciones entre ellos, el

sistema didáctico primario, siendo éste y su funcionamiento, el objeto de estudio de la Didáctica de las Matemáticas. No obstante, este sistema, al que hemos llamado primario, está inmerso en un medio social que, en cierta medida, da cuenta de lo que ocurre al interior del sistema, dado que debe responder al proyecto de sociedad por el cual cobra sentido.

El entorno inmediato del sistema didáctico está constituido por el *sistema de enseñanza*, que se encuentra en otro entorno, la *sociedad*. Entre estos dos entornos está la *noosfera*, el lugar donde se encuentran los representantes de la sociedad con los representantes del sistema de enseñanza, es allí donde se piensa el funcionamiento didáctico. Los elementos mencionados y sus interrelaciones, como se muestra en la siguiente figura, es lo que se denomina ***sistema didáctico***.

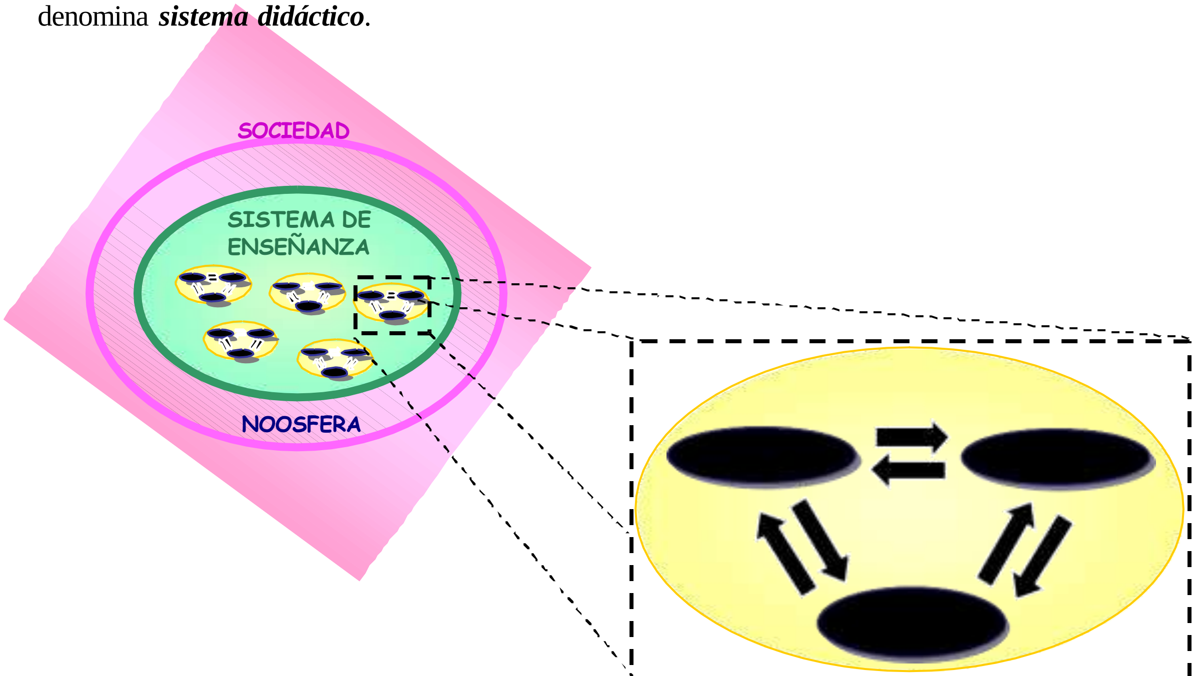


Figura 1

2.2.1. ***Transposición didáctica***

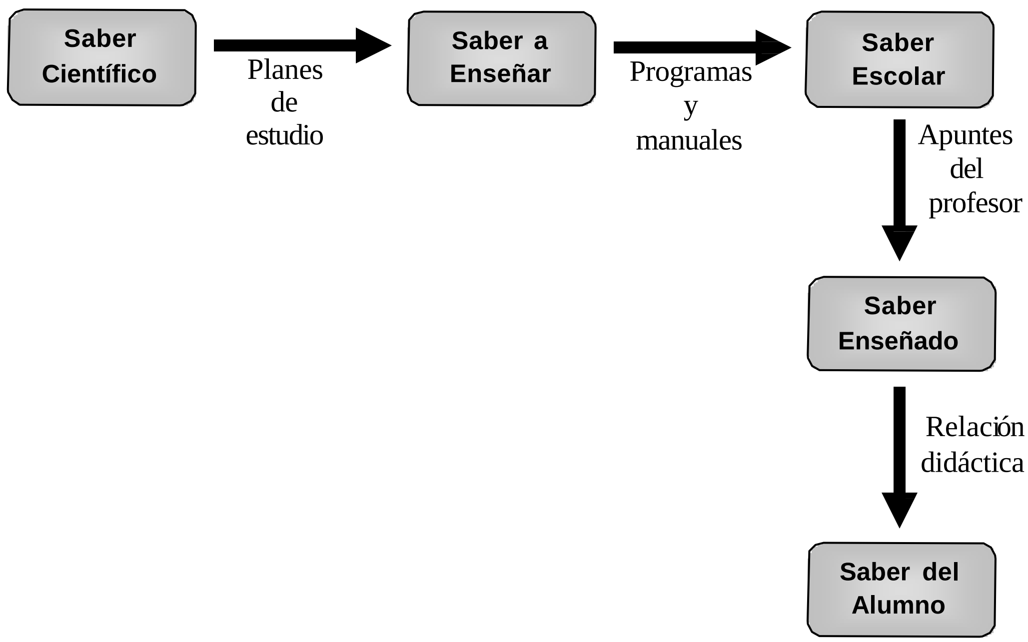
Transposición didáctica es el término con el cual Chevallard señala el fenómeno didáctico correspondiente al paso del conocimiento matemático o saber científico, al saber matemático enseñado; es decir, la adaptación del conocimiento matemático, de manera que al transformarlo, sea accesible y apropiado para los estudiantes, en palabras de Chevallard (Ibid., p. 45), "*El 'trabajo que transforma de un objeto de saber a enseñar en un objeto de enseñanza, es denominado la transposición didáctica*", reconociendo que entre estos dos saberes hay otro intermedio, el saber a enseñar.

El saber científico se refiere al saber erudito, al conocimiento matemático aceptado, publicado y reconocido por la comunidad académica de los matemáticos, el saber a enseñar corresponde al saber designado por la noosfera para ser enseñado, explícito en los programas y manuales, y por último el saber enseñado corresponde al saber a enseñar que se lleva al aula.

La transposición didáctica debe entenderse como un proceso que se constituye de dos fases (Figura 2), en la primera se pasa del saber sabio (o saber científico) al saber a enseñar y en la segunda, del saber a enseñar al saber enseñado.

En la primera de éstas, los integrantes de la noosfera eligen los elementos del saber sabio que serán designados como saber a enseñar; es decir, los contenidos y los métodos, con los cuales ejercen control sobre el sistema de enseñanza (Ibid., pp. 35-36). En la segunda etapa se incluye la adaptación de los conocimientos del profesor sobre los objetos a enseñar para introducirlos y organizarlos en el ámbito escolar para que, por medio de la relación didáctica con los estudiantes, estos últimos se apropien de dicho saber.

No es suficiente con saber que existe la transposición didáctica, se requiere una actitud optimista frente a los descrito, de reflexión, de crítica y de acción, en búsqueda de "*una "buena" transposición didáctica*" (Ibid., p. 54). Como es de deducir, este proceso contiene gran responsabilidad, entre otras razones porque requiere la participación de diferentes actores del sistema de enseñanza y debe responder a dos aspectos, el primero, satisfacer las expectativas y necesidades de la sociedad y el segundo, no desvirtuar el conocimiento matemático. El saber enseñado debe ser lo suficientemente cercano al saber sabio y alejado del saber banalizado de la sociedad (Ibid., p.30), esto significa que debe constituirse en un saber más completo que el necesario para enfrentar los problemas cotidianos, debe tener un sentido académico y científico.



Tomado de Medina, 2001, p. 22

Figura 2

2.2.2. *Estatus matemático de los conceptos.*

El proceso de institucionalización de los conceptos matemáticos, visto en su evolución histórica, genera una estatificación de diferentes tipos de nociones en el campo de las matemáticas. Chevallard (1991), en su teoría de la transposición didáctica, muestra tres posibles estatus de una noción, de acuerdo con su presencia, uso y estudio en la comunidad matemática, los cuales constituyen una herramienta importante en el análisis epistemológico de un concepto; de hecho, el paso de un estatus a otro muestra la actividad de la comunidad matemática y su reflexión sobre ésta en diferentes épocas y culturas.

Una noción es considerada *matemática* cuando se define y estudia bajo una teoría matemática, en la cual es posible establecer sus propiedades y relaciones con otras ya establecidas. Si se observa la evolución de los conceptos matemáticos, la asignación del estatus matemático a una noción constituye la fase final del proceso, la aceptación del concepto como un objeto de estudio en sí mismo por la comunidad científica.

En el estatus *paramatemático* de una noción, ésta es considerada como una herramienta útil, un objeto familiar y, de cierta manera, reconocido, del cual se usan sus características y propiedades, pero del que aún no se ha teorizado pues no se considera como un objeto de estudio en la comunidad científica; como señala Chevallard (1991), son nociones-herramienta de la actividad matemática. En este caso, los conceptos son instrumentos que responden a ciertas necesidades y, pese a la falta de teorización, son utilizados de manera consciente y eficaz por los matemáticos, los conocen bien aunque no los hayan definido.

Por último, o mejor, en primer lugar se encuentran las nociones protomatemáticas; éstas son más bien de carácter implícito en el sentido que corresponden a su presencia silenciosa en los procesos y razonamientos empleados en un momento dado, para resolver ciertos problemas, en términos de Brousseau (1986), "*Se trata entonces de una cierta coherencia de hecho en las preocupaciones de los matemáticos de una época, de puntos de vista, de métodos, de elecciones de preguntas que se articulan más claramente en un concepto hoy identificado pero que, en su época, no lo estaba*."

Vale la pena señalar que esta tipificación no constituye una clasificación, en el sentido estricto de la palabra, pues una misma noción puede ser considerada en los tres estatus, de acuerdo con el nivel en el que se esté estudiando, por ejemplo en la escuela, y vista también en su evolución histórica.

2.3. *APRENDIZAJE Y CONCEPCIONES*

Actualmente, dada la especificidad de la Didáctica y en particular, de la Didáctica de las Matemáticas, algunas de las investigaciones en este campo, buscan teorizar sobre el aprendizaje de determinados conceptos matemáticos; no obstante, este interés -sobre el aprendizaje de las matemáticas y fenómenos asociados a él- no es reciente, pues desde hace ya varios años, incluso antes de consolidarse la Didáctica de las Matemáticas como disciplina, existía la preocupación por explicar la forma en que se produce el aprendizaje de las matemáticas, claro está, que las explicaciones a este respecto son derivadas de teorías generales. La psicología como pionera en esta labor, ha formulado varias teorías del aprendizaje.

De acuerdo con ciertas características comunes entre esta multitud de teorías, se pueden tipificar dos grandes teorías de aprendizaje, conocidas como Conductismo y Cognitivismo, las cuales siguen influyendo en las concepciones de los implicados en el proceso educativo, a pesar de haber surgido en la primera mitad del siglo pasado. En el cuadro de la Figura 3, contrastamos las características más sobresalientes de estas dos teorías.

En cuanto al aprendizaje, resaltamos que, para las teorías conductistas,

> *es el cambio de conducta que experimentan las personas a lo largo de su vida como adquisición de conocimientos (…) la adquisición de conocimientos se contempla como la acumulación de unidades o piezas de información aisladas, de tal modo que el nivel de acumulación o de almacenamiento que alcanzan los individuos se toman como indicativo de su nivel de conocimientos (…) el aprendizaje consiste en establecer y mantener las asociaciones o vínculos entre los estímulos y las respuestas estipuladas y que estos vínculos o asociaciones se estampan en la mente por repetición* (Gómez, 1991, pp. 77, 90).

Mientras que para las cognitivistas, el aprendizaje se fundamenta en la comprensión de los conceptos donde la repetición deja de jugar un papel importante en este proceso; el aprendizaje

> *es un proceso constructivo (…) que se apoya en la actividad cognitiva del sujeto para reorganizar y ampliar el conocimiento previo. Este proceso de reorganización supone que todo nuevo conocimiento se relaciona, más o menos sensiblemente, con algún aspecto relevante y ya existente del conocimiento previo y se hace sitio en la estructura cognitiva modificando su configuración previa* (Gómez, 1991, p. 94).

Una de las teorías más sobresalientes dentro de este tipo, es el constructivismo, teoría que en las últimas décadas ha presentado dos tendencias. En una de éstas, el aprendizaje se relaciona con la adaptación del individuo, por medio de la actividad, a la experiencia de su entorno tanto físico como social; para Piaget, "*el aprendizaje consiste en el pasaje de un*

	CONDUCTISTA	COGNITIVISTA (CONSTRUCTIVISTA)
APRENDIZAJE	• Concebido de manera general. • Cambio de conducta en función de conductas anteriores, la mayoría de las cuales se concretan en la adquisición del conocimiento. Basado en repeticiones, revisiones y memorizaciones. (Gómez, 1991)	• Se analiza el aprendizaje de conceptos matemáticos específicos y significativos para el estudiante. • Proceso de construcción que se da a partir de la asimilación y acomodación de las nuevas experiencias del sujeto a las estructuras cognitivas existentes (Luis Moreno, 1997)
ENSEÑANZA	Directa: Se determina explícitamente lo que el profesor desea que los estudiantes aprendan con base en una exposición "clara", que debía seguir los siguientes pasos: Introducción, exposición, ejercitación, práctica y evaluación.	Por descubrimiento: Los nuevos conceptos se relacionan con concretos del estudiante (pre-conceptos); por lo general, el profesor presenta una situación didáctica que involucra el concepto (o conceptos) a introducir, luego los estudiantes desarrollan estrategias para resolver la situación, finalmente el maestro formaliza el concepto mediante la participación activa de los estudiantes, relacionando el "nuevo" concepto con otros (Waldegg, 1998)
PAPEL DEL PROFESOR	• Centro de atención. • Transmisor del conocimiento. • Sigue un programa determinado por otros. • Recitador de las definiciones presentes en los libros. • No actúa en el diseño del currículo. • Juzga y reprime.	• Proporciona a los estudiantes situaciones didácticas significativas. • Anima la discusión en el aula. • Construye el currículo. • Se cuestiona frente a sus acciones en el aula. • Hace que el error sea concebido como producto de una forma inadecuada de conocimiento (Moreno, 1997) •
PAPEL DEL ESTUDIANTE	• Receptor pasivo. • Sumiso. • Obediente. • Recitador de lo enseñado por el profesor.	• Centro del proceso de aprendizaje. • Toma conciencia de qué hace y para qué lo hace. • Discute, reflexiona, propone. • Es activo respecto a la construcción de su conocimiento. • Aprende con base en sus conocimientos previos.
CONCEPCIÓN DE LA MATEMÁTICA	Colección de objetos pre-existentes en los libros, esperando ser descubiertos (Gómez, 1991).	Constituida por objetos que elabora la mente como consecuencia de la actividad matemática, dichos objetos que deben ser reinventados por los estudiantes, de tal manera que contribuyan al desarrollo de capacidades y habilidades que le permitan interpretar la realidad y mejorar sus niveles de abstracción (Moreno y Waldegg, 1992)
CURRÍCULO	Fragmentado en islas, estándar y planificado instruccionalmente.	Conecta procedimientos, se diseña a partir de las necesidades de los estudiantes y del medio en el que interactúan.
EVALUACIÓN	El estudiante debe responder memorísticamente el conocimiento transmitido por su profesor, prevalece la respuesta. Es un medio sancionador, clasificador.	Prevalece el procedimiento y la comprensión que el estudiante tenga frente al conocimiento, su comunicación y razonamiento. Es vista como un proceso que permite revisar y reencauzar el proceso de aprendizaje.
¿QUÉ ES LO PRIMORDIAL?	El objeto de enseñanza (Moreno y Waldegg, 1992)	El objeto de aprendizaje (Moreno y Waldegg, 1992)

Figura 3

estado de menor conocimiento a un estado de mayor conocimiento" (Moreno y Waldegg, 2001) y en la otra, el aprendizaje depende directamente de la interacción social; para Vygotsky (1978), *"...el aprendizaje despierta una variedad de procesos de desarrollo que son capaces de operar sólo cuando el niño interactúa con otras personas de su ambiente y en colaboración con sus compañeros"* (Ursini, 1996).

Sin embargo, el antagonismo que parecía existir entre estas dos perspectivas, se está diluyendo en investigaciones realizadas en torno a él, donde parece vislumbrarse una compatibilidad entre ellas (Valdemoros, 1996).

De acuerdo con las ideas expuestas en los párrafos anteriores, los procesos, tanto de enseñanza como de aprendizaje, no ocurren dentro de un "territorio virgen", pues siempre se parte de una estructura cognitiva, las concepciones, que se van transformando y acercándose cada vez más al concepto, y de ahí la importancia de establecer claramente las diferencias entre concepción y concepto.

2.3.1. ***Caracterización del término representación.***

Para nuestro trabajo es indispensable describir el significado del término representación[14], puesto que éste se encuentra asociado a algunas nociones de concepción, por ejemplo la propuesta por Sfard.

Los estudios de cognición en matemáticas, desde la década de los ochenta, han girado en torno a los sistemas de representación del mundo, puesto que se basan en la simbolización, una de las funciones centrales del sistema cognitivo, y conducen a la construcción de las estructuras cognitivas. Una representación es adecuada, en la medida en que refleje con fidelidad el objeto o concepto representado, simule su estructura, muestre sus propiedades o características y prevea efectos positivos o negativos para provocarlos o evitarlos; por ende

[14] La teoría sobre las representaciones surge en el ámbito de la comprensión y ésta a su vez en el estudio del aprendizaje, dado que "*la comprensión es un aspecto fundamental del aprendizaje y los modelos de aprendizaje deben atender a los resultados de la comprensión*" (Hiebert y Carpenter, 1992, p. 1)

las representaciones no son únicas sino múltiples y de niveles diferentes de acuerdo al plano de representación.

El término representación ha sido asociado con la palabra *modelo*, al ser considerada como una imagen de algún proceso o de la realidad. Algunos investigadores han usado esta expresión en vez de concepción, como R. Douady, A. Besset, F. Richard (1977) y Robert (1989) (Ruiz, 1993, pp. 44 -45)

Bruner (1973) afirma que existen tres tipos de representaciones mentales de un concepto: las primeras se conocen como representaciones enactivas, las cuales pueden ser medidas a través de las acciones, las otras son las representaciones icónicas, observables a través de cuadros, dibujos, diagramas, etc, por último las representaciones simbólicas, relacionadas con los símbolos o el lenguaje.

Las *representaciones mentales*, también llamadas representaciones internas, son *"las formas que toman las intuiciones y las conceptualizaciones transitorias de un conocimiento que se está construyendo"* (Moreno y Sacristán, 1996)

éstas le permiten a la mente operar con las ideas matemáticas en cuestión; sin embargo, este tipo de representaciones sólo pueden ser comunicadas a través de *representaciones externas*, tales como dibujos, expresiones verbales (orales o escritas), símbolos, gráficos, objetos físicos, etc., a partir de las cuales es posible "observar" tales representaciones internas. Al respecto, Hiebert y Carpenter (1992) señalan que estos dos tipos de representación, las externas[15] y las internas, están relacionadas entre sí, ya que las representaciones externas afectan la naturaleza de las internas; a su vez, las representaciones internas proporcionan herramientas para ampliar la visión de las externas, de tal manera que las representaciones externas son el medio para comunicar y observar las representaciones internas, que nos permiten pensar sobre ideas matemáticas.

[15] Según Gunttenplan (1994, citado por Romero, 1997), en matemáticas, las representaciones externas son de dos tipos: simbólica o digital (símbolos abstractos, notaciones aritméticas y algebraicas, etc.) y gráfica o analógica (imágenes visuales, dibujos, gráficas geométricas, etc).

Plantean también que las representaciones internas se relacionan generando redes de conocimiento. Estas redes pueden organizarse jerárquicamente, cuando unas representaciones están inmersas en otras más generales, o en forma de tela de araña, es decir, cuando las representaciones se relacionan entre sí, a un mismo nivel (los nodos equivales a las representaciones y sus conexiones son los hilos). Claro está que constantemente estas dos estructuras se "mezclan" generando redes de conocimiento más complejas, por la misma naturaleza compleja del conocimiento y de la mente humana.

En consecuencia, la comprensión ocurre cuando las representaciones se conectan en redes que se estructuran y cohesionan[16]. Un conocimiento matemático es comprendido cuando sus representaciones se integran a una red interna de conocimientos, por lo que el grado de comprensión está determinado por la cantidad de consistencia de las conexiones. Así, la comprensión aumenta en la medida que las redes se vuelven más grandes y mejor estructuradas, haciendo que estas se reordenen constantemente y su cohesión sea más fuerte con la llegada de nuevas representaciones, teniendo en cuenta que "*la gente continuamente trata de comprender y de pensar acerca de lo nuevo en términos de lo que ya conoce*" (Glaser, 1984).

Partiendo de las ideas de Hiebert y Carpenter, Kaput y Duval (1993) describen las actividades cognitivas relacionadas con los sistemas de representación; dichas actividades son: la formación de representaciones de un sistema, la transformación dentro de un sistema de representación, la traducción entre sistemas de representación, la consolidación de relaciones y/o procesos y la construcción y prueba de modelos matemáticos.

Duval además, resalta la importancia del dominio y coordinación entre los sistemas de representación, señalando que el manejo de diferentes sistemas permite seleccionar o complementar los más adecuados para determinadas situaciones, ofreciendo una información más completa del objeto desde diversos puntos de vista. Así pues, la comprensión se caracteriza por la coordinación de, por lo menos, dos sistemas de representación y de las actividades cognitivas, la cual se pone de manifiesto por la rapidez y naturalidad de la traducción, como habilidad cognitiva.

[16] Esta es la idea de comprensión dada por Hiebert y Carpenter.

Se suelen distinguir dos grandes familias de representaciones externas, las digitales o simbólicas y las analógicas o gráficas (Romero, 1999, pp. 123-124), para nuestro estudio, hemos incluido otro tipo de representaciones que si bien no están definidas, las caracterizaremos en términos de los posibles registros.

Denominaremos *representaciones simbólicas* a expresiones, para los números reales, que contengan:

- Notación decimal (exactas o infinitas)
- Notación operatoria; es decir términos: en forma de fracción, en forma de fracciones continuas (finitas o infinitas), con series, con radicales o con letras del alfabeto griego o del abecedario.

Representaciones geométricas[17], cuyos registros pueden ser gráficos (dibujos) o propios del lenguaje geométrico, a magnitudes o la recta real.

Y por último, *representaciones verbales* a aquellas donde se usa el lenguaje común, generalmente, en forma retórica

2.3.2. ***Caracterización del término concepción***

Teniendo en cuenta que el objetivo primordial de nuestro trabajo es caracterizar las concepciones que tienen los estudiantes para profesor de matemáticas acerca del número real, es necesario estudiar la noción de concepción, desde los aportes que han hecho a este respecto diferentes investigadores en Didáctica de las Matemáticas y tomar postura frente al constructo de concepción que fundamentará nuestra investigación. Pese a que se han desarrollado numerosas investigaciones respecto a concepciones, aún no hay consenso en el significado de esta expresión; es un esfuerzo fútil buscar una caracterización definitiva para

[17] Llamamos representación geométrica no necesariamente a un dibujo sino a la representación de un objeto matemático como una entidad geométrica.

este término, dados los diferentes enfoques y contextos en que ha sido empleado por varios autores. Enseguida, enunciaremos algunos constructos teóricos alrededor del término concepción y palabras asociadas.

Siguiendo a Ruiz (1993) y Flores (1998) se puede establecer una tipología de las concepciones diferenciando las cognitivas (individuales o subjetivas) de las epistemológicas (también conocidas como colectivas). Las cognitivas o subjetivas se refieren al conocimiento interno del sujeto, pueden surgir de manera espontánea o inducidas por procesos de enseñanza y/o de aprendizaje, aunque estas últimas se originan de las espontáneas, tal como lo describe detalladamente Cornu (1998, citado por Medina, 2001) empleando los términos concepciones iniciales y propias, respectivamente. Dentro de las concepciones propias, Duroux (1982, citado por Medina, 2001) establece dos tipos: controladas y no controladas por la enseñanza diferenciadas porque unas son intencionalmente provocadas por la enseñanza mientras que las otras no (Figura 4).

Por su parte, las epistemológicas o colectivas se relacionan con los tipos de conocimientos de "una comunidad", que existen en un determinado período histórico o en los textos, programas, currículos escolares para algún nivel. Estas concepciones se refieren a problemas dentro de la propia disciplina, relacionados con otras disciplinas y a la manera en que se accede al saber (Figura 4).

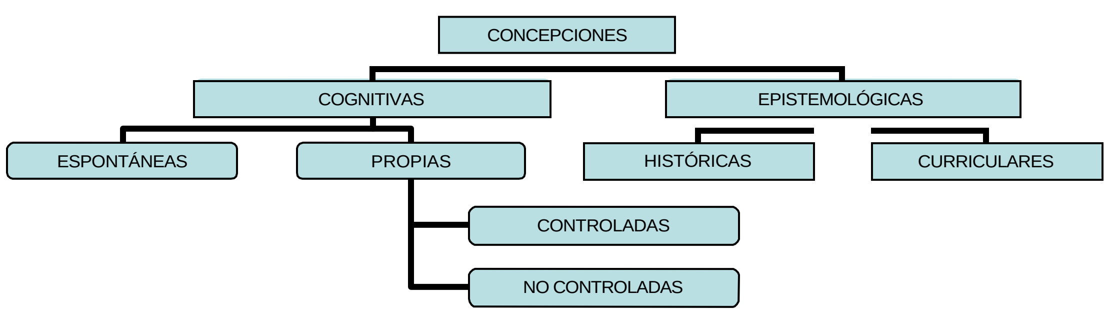


Figura 4

También se hace una diferenciación entre concepción global y concepción local, para ambos tipos de concepciones mencionados antes (cognitivas y epistemológicas), al respecto las concepciones globales *"describen holísticamente las concepciones ligadas a un concepto u otro objeto matemático*" (Ruiz, 1994, p. 47)", mientras que las locales "*tienen en cuenta aspectos parciales de los sistemas anteriores"* (Ibid., p. 47).

Estas son las dos tipologías más generales, encontradas, sobre concepciones sin querer decir que, son las únicas o que no se puedan mezclar; por ejemplo, Bodin (1992, citado por Ruiz, 1993) considera que existen concepciones accidentales, provisionalmente estables, concepciones que se constituyen en obstáculos, entre otras.

Precisando el término concepción, algunos autores no diferencian explícitamente concepción de *creencia*, existe una diferencia sutil, no siempre lo suficientemente evidente. Thompson (1992), por ejemplo, en su trabajo acerca de las concepciones y *creencias* de los profesores de matemáticas, señala que una concepción de un sujeto sobre un objeto puede verse como *creencia*, concepto, significado, regla, imagen mental, punto de vista y preferencia, consciente o inconsciente del sujeto en relación al objeto; constituyendo éstas, los rudimentos de una filosofía de las matemáticas.

De manera similar, Confrey (1990), al referirse al término concepción hace alusión a las *creencias*, teoría, explicaciones y significados que los estudiantes dan respecto a conceptos matemáticos.

Por el contrario, Ponte (1992) diferencia *creencias* de concepciones, en el sentido que las primeras son una base del conocimiento, mientras que las otras son organizadoras de éste; al respecto indica que las concepciones tienen una función cognitiva como

> *organizadoras de nuestro conocimiento, formando un "substrato conceptual" anterior a los conceptos. Funcionan como filtros, es decir, son simultáneamente condición y límite de nuestro conocimiento de la realidad. Pero además permiten interpretar esta realidad a la vez que son elementos bloqueadores de esta interpretación. (...) Ellas constituyen como "miniteorías", o sea cuadros conceptuales que desempeñan un papel semejante a los presupuestos teóricos de los científicos*. (citado por Flores, 1998, p. 33).

Este autor, precisa la relación entre concepción y concepto, relación que se hace más explicita en otros autores como Vergnaud, Balacheff y Artigué.

Para Gerard Vergnaud (1982), la concepción es un objeto global relacionado con un concepto matemático, en el sentido en que puede asumirse como el estado de un concepto en un momento específico (que puede ser histórico) aceptado por una comunidad, en palabras textuales:

> *El concepto matemático, está determinado por una terna (S, I, s), donde S representa el conjunto de situaciones que dan sentido al concepto; I, el conjunto de invariantes operatorias asociadas al concepto y s, el conjunto de representaciones simbólicas usadas para representar el concepto, sus propiedades y las situaciones a las que se refiere. (...) Análogamente una concepción estaría formada por esa misma terna, pero considerándola en un momento dado de la evolución del concepto* (Vergnaud, 1982b citado por Ruiz, 1993).

Balacheff (1984) define concepción de una manera similar a la propuesta por Verganaud, señalando que es

> *un estado cognitivo corriente de los estudiantes con respecto a algún concepto matemático. Más de una concepción puede estar asociada al mismo tiempo a un concepto. Una concepción puede estar caracterizada por: (i) Un conjunto de problemas específicos, (ii) Un sistema de representaciones simbólicas asociadas al concepto y a las propiedades y situaciones a las que se refieren y (iii) Un conjunto de reglas de acción y sus atributos relativos.* (citado por El Bouazzaoui, 1988).

Sin embargo, esta acepción no especifica términos como "estado cognitivo corriente" por lo cual puede considerarse vaga; además que la expresión "puede estar caracterizada" conlleva a que la caracterización de concepción sea imprecisa.

Michele Artigué, enfatiza en la importancia de distinguir entre el objeto matemático y las significaciones que se le pueden asociar, para lo cual emplea el término concepción. Al igual que los dos anteriores autores, define la concepción en relación con el concepto, al respecto ella escribe:

> *Como lo distinguimos en un concepto matemático: La noción matemática, cualquiera que sea, está definida dentro del contexto del saber a una época dada; el conjunto de significantes asociados al concepto; la clase de problemas dentro de la resolución de aquellos que toman sentido; las herramientas: teoremas, técnica algorítmicas específicas del tratamiento del concepto. Distinguiremos en las concepciones de los temas, sus diversos componentes y en particular: la clase de situaciones problema que dan sentido al concepto para los estudiantes; el conjunto de significantes que es capaz de asociársele, en particular las imágenes mentales, las expresiones simbólicas; las herramientas, teoremas, algoritmos que el dispone para manipular el concepto* (Artigué, 1990).

En estas tres últimas ideas de concepción se percibe que todas tienden a ver la concepción sobre algún objeto matemático como un concepto personal que tiene en cuenta la totalidad de la estructura del objeto, en un momento dado. De acuerdo con esto, la concepción da cuenta de los procesos mentales en la formación de un concepto, es decir la parte subjetiva respecto a la dimensión objetiva del conocimiento.

Otro término, como ya lo hemos mencionado, relacionado con concepción, es *concepto imagen*, de hecho, Artigué (1989) afirma que "*la noción de concept image está muy próxima a la de concepción del sujeto en su sentido más global"*, idea con la cual estamos de acuerdo, pues Tall y Vinner definen *concept image* de esta manera: *"We shall use the term concept image to describe the total cognitive structure that is associate with the concept, which incluyes all mental pictures and associated properties and processes. It is build up over the years through experiences of all kinds, changing as the individual meets news stimuli and matures"* (Tall & Vinner, 1981, p. 152)

Esta definición es netamente cognitiva y hace énfasis en que la imagen conceptual evoluciona mediante las experiencias; es decir, que está en permanente cambio, lo cual implica que es necesario diferenciar el *concepto imagen* como *estructura cognitiva total*, y *la parte de esa estructura* que el sistema cognitivo activa ante una situación particular en un momento dado, esta es llamada *imagen conceptual evocada*[18].

---

[18] Tall y Vinner (1981) escriben: *"We shall call the portion of concept image which is activated at a particular time evoked concept image".*

Al igual que la concepción está relacionada con el concepto, por lo que hay que diferenciarlos explícitamente, la *imagen conceptual* al encontrarse asociada al *concepto* , debe distinguirse de éste, para lo cual Tall y Vinner introducen dos nuevos términos: *definición personal* y *definición formal, de un concepto* , ya que consideran que todos los conceptos matemáticos, salvo los primitivos, poseen definición; a este respecto señalan que:

> *The definition of concept (if it has one) is quite a different matter. We shall regard the concept definition to be a form of words used to specific that concept. It may be learnt by an individual in a rote fashion or more meaningfully learnt and related to a greater o lesser degree to the concept as a whole. It may also be a personal reconstruction by the student of a definition. It is then the form of word that the student uses for this own explanation of his evoked concept image. In this way a personal the concept definition can differ from a formal concept definition* (Tall & Vinner, 1981, p. 152),

de donde se concluye que las definiciones personales son parte integrante del concepto imagen, en ocasiones, diferentes de las definiciones formales del concepto.

Las imágenes conceptuales están vinculadas con las *representaciones*, específicamente con las *representaciones mentales*, estas últimas hacen parte de la estructura cognitiva total a la cual se refieren Tall y Vinner, cuando usan la expresión *concept image*.

El término representación, específicamente en el sentido expuesto por Hiebert y Carpenter, es retomado por Sfard (1991), al definir concepto y concepción como sigue:

> (...) *se mencionará la palabra "concepto" (algunas veces reemplazada por "noción") siempre que se considere una idea matemática en su forma "oficial" –como un constructo teórico dentro de "el universo formal del saber ideal"-; el grupo total de representaciones y asociaciones internas evocadas por el concepto –la contraparte del concepto en el "universo del saber humano" interior y subjetivo- será referido como una "concepción"*

esta acepción hace referencia a las representaciones internas y por ende a las estructuras cognitivas, que se van organizando y modificando a medida que el individuo se enfrenta a diversas situaciones donde debe poner en juego todos sus esquemas mentales con miras a la construcción de un concepto matemático.

Sfard señala que, a partir de las diferentes representaciones y definiciones de las nociones matemáticas, se pueden distinguir dos tipos de concepción: operacional (como proceso) y estructural (como objeto), consideradas complementarias y no dicotómicas.

Una noción matemática concebida operacionalmente, en la evolución del concepto mismo, es considerada como una entidad potencial, asociada con un proceso, como resultado de éste o como él mismo; según Sfard (1991) esta concepción aparece en la mayoría de nociones matemáticas en la primera parte de su evolución histórica; las representaciones predominantes en esta concepción son de carácter verbal.

Mientras que concebir un concepto matemático estructuralmente significa que éste es reconocido como un objeto real (no en su dimensión física), como una estructura estática, atemporal, instantánea e integrada; este enfoque corresponde al estado más avanzado del desarrollo de un concepto y aparece, históricamente, en la fase final (siglo XX) -esto se halla asociado a la idea de estatus matemático de una noción- después de haberse concebido operacionalmente. Las representaciones internas relacionadas con esta concepción son "*imaginerías mentales*" que corresponden a objetos abstractos que aparecen en nuestra mente como concretos.

La dualidad entre estas dos clases de concepciones se evidencia en el proceso de desarrollo de un concepto, que consta de tres etapas: interiorización, condensación y reificación; la primera se lleva a cabo cuando la persona se familiariza con los procesos asociados al concepto en juego, a partir de los cuales va abstrayendo sus propiedades características hasta llegar a solidificarlo como un objeto, como una estructura matemática abstracta, que sólo puede percibirse a través de los ojos de la mente; esta acción tiene lugar en la reificación.

Esta manera de estudiar las concepciones también ha sido abordada por otros investigadores como: Dubinsky, Hawks y Nichols (1989), quienes emplean las palabras *concepción objeto* y *concepción proceso*, para referirse a concepción estructural y concepción operacional, respectivamente.

Otros términos análogos a *concepción* vs. *concepto* son los de *imaginario* vs. *teoría*. Los imaginarios, al igual que las concepciones, son representaciones mentales relacionadas con un concepto, inmerso éste en una teoría:

> *Los imaginarios personales o populares, hay que imaginárselo, son representaciones que surgen de la interacción espontánea, son individuales o colectivas respectivamente, son como una narración pero, muy pocas veces son formuladas explícitamente o de una manera completa, tienen una estructura cognoscitiva moldeable y cierto grado de permanencia pero, pueden desaparecer. ... Las teorías, por el contrario, nunca desaparecen* (...) (Pérez, et al., 2002, p. 6)

Los individuos generan imaginarios, en el sentido que el cerebro elabora imágenes internas en el proceso de conocer y en el proceso de construir representaciones asociadas con situaciones internas o externas; estas imágenes mentales se rigen por un sistema de reglas, pero están influenciados por la fantasía y por representaciones: personales, del hogar, la comunidad, la ciudad, la escuela, los medios de comunicación, etc. Los imaginarios (imágenes mentales) pueden constituirse en obstáculos para la constitución de representaciones rigurosas y elaboradas como lo son las teorías; no obstante, dichas imágenes son necesarias para el conocimiento científico y las teorías mismas.

Investigaciones, como por ejemplo, el estudio realizado por el Doctor Francisco Rubia en el año 2000, muestran que el sistema nervioso tiene como función proporcionar bienestar al individuo, no la generación de conocimiento; en este sentido, la creación de imaginarios es tarea de este sistema, dado que produce satisfacción y tranquilidad en la persona pero, no necesariamente, conocimiento; sin embargo, algunos imaginarios se constituyen en teorías erróneas que individuos, incluso grupos sociales, asumen como teorías. Aún así, los imaginarios no siempre se oponen a éstas, en muchas situaciones existe coincidencia entre ellos, aunque explícitamente no se evidencien.

Este planteamiento, de imaginarios y teorías, es pertinente para la educación, dado que uno de los fines de las instituciones educativas es hacer y desarrollar teorías, se hace necesario entonces distinguirlas de los imaginarios.

Después de presentar este panorama, para nuestra investigación, emplearemos el término concepción atendiendo los planteamientos elaborados por Ana Sfard, por cuanto considera la evolución histórica del concepto (enfoque ontológico-epistemológico) en relación con el desarrollo de éste en el individuo (enfoque psicológico-cognitivo) y tiene en cuenta que las concepciones se hacen explícitas a través de diferentes situaciones. Sin embargo, es importante señalar que, atendiendo a la evolución histórica de los conceptos matemáticos, es claro que éstos no existen independientemente de las teorías, de hecho son ellas las que le dan los matices que caracterizan el concepto en determinado momento histórico o cultural.

Analizaremos las concepciones locales – vinculadas a situaciones específicas que dan un sentido parcial del concepto – de los estudiantes en torno al concepto de número real. Para ello, utilizaremos las respuestas de los estudiantes a ciertas preguntas concretas que permitan evidenciar las representaciones empleadas por ellos y a partir de esto, inferir sus concepciones, de acuerdo con la correspondencia, señalada por Godino y Batanero (1993), entre las concepciones referidas a un concepto matemático, problemas o situaciones que dan sentido al concepto y las prácticas empleadas por los sujetos en la resolución de estos problemas.

3. UN SEGUIMIENTO HISTORIOGRÁFICO DEL NÚMERO REAL

La estructura formal del número real, como la conocemos en la actualidad, es resultado de un proceso evolutivo a través de diferentes conflictos y aproximaciones ocurridos durante un periodo de más de 2000 años y en el marco de variadas civilizaciones y culturas. Realizaremos en este apartado un seguimiento historiográfico del número real con el fin de analizar su evolución y desarrollo.

En el marco de esta investigación estimamos importante realizar este capítulo por cuanto un seguimiento historiográfico de un concepto matemático permite conocer y profundizar en los procesos (individuales y sociales) que se dieron para la construcción de cierta noción, lo cual es de mucha ayuda cuando se realiza un análisis conceptual. En este sentido, dicho seguimiento suministra información respecto a la evolución del concepto, las etapas y los puntos cruciales en su desarrollo, caracterizadas en términos de situaciones, representaciones y personajes que aportaron a su consolidación, dando origen a diversas concepciones –en este caso, del número real– de acuerdo con cada momento histórico, los intereses, preocupaciones y saberes de la comunidad matemática en cada uno de ellos. Además, este seguimiento historiográfico se constituye en una herramienta útil para establecer relaciones entre las concepciones históricas y las respuestas de los estudiantes.

En un primer momento estudiaremos el desarrollo histórico del concepto de número real, con base en el estudio realizado por Isabel Romero (1997) en su tesis y complementado con libros de historia de las matemáticas, como Kline (1972), Boyer (1986), Bell (1999) y Smith (1958). Es importante señalar aquí que, el seguimiento historiográfico que realizaremos, salvo en la formalización del concepto de número real (etapa cuatro), corresponde únicamente al número real positivo; la aceptación y evolución de los números negativos constituye otra historia, que no abordaremos en este trabajo.

Posteriormente, realizaremos una interpretación de tal historia, en la cual incluiremos dos aspectos: el estatus matemático del concepto de número real de acuerdo con la teoría de Chevallard acerca de las nociones matemáticas, paramatemáticas y protomatemáticas y la descripción de las concepciones más representativas asociadas a la evoluc ión histórica de este concepto, desde la perspectiva teórica de Sfard, por lo cual señalaremos, para cada concepción, el momento histórico, las situaciones y representaciones asociadas al concepto, además de su caracterización como estructural u operativa.

3.1. *ESTUDIO HISTÓRICO DEL NÚMERO REAL.*

Consideraremos el conjunto de los números reales positivos como aquel conformado por el conjunto de los números racionales y el de los números irracionales, ambos positivos; el primero, a su vez, incluye el conju nto de los números naturales[19]; por lo cual, al estudiar la historia de los números reales se debe tratar la historia de estos conjuntos numéricos.

La historia de los números naturales es la más antigua, en cuanto a sistemas numéricos se refiere, data de muchos siglos atrás, al parecer desde que el hombre comienza a representar con marcas en troncos de árboles o huesos de animales objetos que cuenta, nace la idea de número natural, idea que se va desarrollando, de manera más o menos especializada, según las necesidades y dominio intelectual de cada cultura.

---

[19] En sentido estricto, sabemos que estos conjuntos numéricos no son subconjuntos del conjunto de los números reales, sino isomorfos con algunos subconjuntos de éste; sin embargo, omitiremos esta precisión porque no es relevante para este trabajo.

Varios son los sistemas de notación conocidos para los números naturales; los más sencillos son de tipo aditivo, el ejemplo más conocido es el sistema de los egipcios, basado en la secuencia 1, 10, 100, 1000, 10000 y 1000000, con la cual representaban todos los números que requerían colocando tantas potencias de 10 y unidades, seguidas unas de otras en orden descendente, como fuera necesario. Para ello a cada potencia de 10, incluido el número 1, asignaron un símbolo específico, uno en notación jeroglífica y otro en hierática. En la figura 1 se halla representado en notación jeroglífica el número 1274351. Otro sistema de notación popular es el romano, basado en la adición y en la sustracción de acuerdo a posición de ciertos símbolos respecto a otros.

Figura 1

Por último están los sistemas de tipo posicional, que muestran un mayor grado de desarrollo en las culturas que los originaron, como el babilónico, el maya, el chino-japonés y el hindú-árabe. De acuerdo al alcance de cada sistema, diferentes culturas idearon formas para hacer operaciones; por ejemplo, los egipcios idearon algoritmos para multiplicar y dividir, al igual que los babilonios, mientras que de los romanos no son conocidos algoritmos para realizar adiciones o multiplicaciones, pues su sistema posee dificultades para ello.

Los números naturales fueron los preferidos por varias culturas durante largo tiempo, incluso se evadía el uso de otros números, a veces, no sólo por cuestiones prácticas sino ontológicas como ocurrió con los griegos; sin embargo, su formalización sólo ocurrió hasta el siglo XIX, en 1881, con la primera axiomatización publicada de los números naturales debida Charles Sanders Peirce, no tan célebre como la de Giusseppe Peano en 1889[20].

[20] Para mayor información al respecto, consultar las Memorias del XIII Encuentro de Geometría y sus Aplicaciones y I de Aritmética (Universidad Pedagógica Nacional, 2002) cuyo tema central fue El Concepto de Número Natural.

Respecto a la evolución histórica de los números racionales, inicia con el uso de las fracciones sexagesimales o unitarias; las primeras creadas por los babilonios, las segundas por los egipcios, las cuales fueron las más utilizadas hasta el siglo XVI[21]. Los números racionales se formalizan debido a la necesidad de fundamentar matemáticamente a los números reales.

El conjunto de los números reales, como un objeto matemático, se consolida sólo cuando logran definirse los números irracionales, pues son éstos los que le dan el carácter de completez. Dicha completez, llamada también continuidad, por Dedekind o Cantor, es esencial para la construcción de, por ejemplo, las ecuaciones diferenciales o la teoría de la medida.

Aunque con los números racionales basta para expresar cuestiones experimentales, con ellos es posible representar cualquier medida física, parecerían innecesarios los números irracionales –si a cuestiones de necesidades prácticas se redujeran las matemáticas–; sin embargo, la predicción de ciertos comportamientos físicos, biológicos, económicos, sociológicos, etc. se hace mediante ecuaciones diferenciales, éstas describen los rasgos de la vida: crecimiento, desarrollo y decadencia y éstas, al ser ecuaciones que implican una o más derivadas, requieren de la continuidad, en suma, de la completez de los números reales. Por otra parte, la teoría de integración se fundamenta en la teoría de la medida y ésta a su vez, en los números reales; sin embargo, el conjunto de los números racionales no aporta a la medida de un conjunto pues, por ser numerable, tiene medida cero; esto significa que dos conjuntos que difieran entre sí por un conjunto numerable tienen la misma medida, de manera que los números que generan alguna medida son los números irracionales.

Los números irracionales, además, constituyen la mayor dificultad para caracterizar las operaciones, ya que su comportamiento es sustancialmente diferente al de los otros números; por ejemplo, al multiplicar dos números irracionales, el resultado no necesariamente es un número irracional. Debido a esto, el énfasis en este estudio histórico del número real se encuentra, fundamentalmente, alrededor de los números irracionales, por cuanto constituyen el punto álgido en la aceptación y teorización de los reales, como números.

[21] Este tema se tratará, con un poco más de detalle, en el apartado 1.2. de este capítulo.

En el desarrollo histórico del concepto de número real, se pueden señalar, de manera diferenciada, cuatro etapas claves, de acuerdo con los problemas, representaciones, preguntas y avances más significativos de cada momento. A continuación describiremos cada una de estas etapas, teniendo en cuenta el orden cronológico, la evolución conceptual y las culturas y personajes más representativos.

3.1.1. *PRIMERA ETAPA: Descubrimiento de la inconmensurabilidad (irracionalidad).*

Los antiguos habitantes de la llanura mesopotámica, entre los ríos Tigris y Eufrates, desarrollaron una civilización con grandes adelantos a nivel científico, especialmente en lo que a matemáticas se refiere. Todo lo que se conoce de la matemática babilónica, ha llegado a nosotros en unas 400 tablillas de arcilla, encontradas a finales del siglo XIX en las ruinas de Mesopotamia y que datan del año 2000 a.C. aproximadamente, las cuales revelan el desarrollo de un sistema de numeración sexagesimal y algunas ideas de aritmética, álgebra y geometría, aplicadas en la solución de problemas que para ellos eran cotidianos (astronomía, comercio, construcción, repartos, entre otros).

Al igual que en otras civilizaciones antiguas, el principal interés de los babilonios era la astronomía, específicamente la realización de cálculos que les permitiera predecir el comportamiento de los astros, para lo cual construyeron varias tablas que les facilitara la realización de operaciones aritméticas con su sistema sexagesimal; así, la aritmética babilónica estuvo al servicio de la astronomía, más aún, fue la que impulsó su desarrollo. Un ejemplo notable de esto es la construcción del calendario, en el que es evidente el uso de los resultados de sus trabajos en aritmética, en particular el manejo de su sistema de numeración.

Los babilonios poseían tablas de productos, inversos, cuadrados, cubos, potencias sucesivas de algunos números y raíces cuadradas y cúbicas. En estas últimas tablas, se daban valores exactos si la raíz era un número natural y aproximaciones sexagesimales en los demás casos, como señala Kline (1972): "*lo más plausible es que creyeran que los irracionales* *también se podían expresar de manera exacta en forma sexagesimal, prolongando la expresión hasta donde fuera necesario*".

De esta manera, obtuvieron el valor 1,414213 para $\sqrt{2}$. Pero, los babilonios trabajaron con aproximaciones de algunos irracionales cuadráticos sin tener conciencia del carácter diferente de estos números; sólo hasta el siglo VI a.C., en el marco de la matemática griega, se empezó a vislumbrar la necesidad de otras entidades numéricas con la aparición de las magnitudes inconmensurables.

3.1.1.1. El Número en la Escuela Pitagórica. Aparición de Segmentos Inconmensurables.

Pitágoras (569 a.C. – 500 a.C. aprox.) es, sin lugar a dudas, uno de los personajes más sobresalientes en el ámbito de la matemática griega, no sólo por estar entre los primeros, cronológicamente hablando, sino además por su influencia dominante en el pensamiento matemático de la antigüedad. Originario de Samos, estableció su escuela en Crotona, donde se instaló desde el año 529 a.C., después de viajar por Egipto, Babilonia y, probablemente, la India; viajes en los que obtuvo amplios conocimientos en matemáticas.

Con sus discípulos constituyó una sociedad o una especie de hermandad religiosa en la que todos sus integrantes compartían las mismas creencias, costumbres e investigaciones y se comprometían con un pacto de silencio que no les permitía revelar los secretos y descubrimientos de la comunidad. Puede ser ésta una de las razones por las cuales muchos aspectos sobre la escuela, y el mismo Pitágoras, permanecen en la incertidumbre. Los pitagóricos hicieron grandes progresos en matemáticas, como señala Aristóteles "*los llamados pitagóricos se dedicaron por de pronto, e hicieron progresar esta ciencia. Embebidos en este estudio creyeron que los principios de las matemáticas eran los principios de todos los seres*" (Aristóteles, 350 a. C. aprox., p. 25).

Pitágoras descubrió las progresiones armónicas de las notas musicales, hallando la relación entre la longitud de una cuerda y el tono de la nota producida por la vibración; este hecho lo motivó a plantear que los números eran el elemento de todas las cosas, la materia prima de la que está hecha la realidad y de ahí, la principal consigna de su escuela "*Todo es número*"; en palabras de Aristóteles,

> *Por último, veían en los números las combinaciones de la música y sus acordes. Pareciéndoles que estaban formadas todas las cosas a semejanza de los números, y siendo por otra parte los números anteriores a todas las cosas, creyeron que los elementos de los números son los elementos de todos los seres, y que el cielo en su conjunto es una armonía y un número.* (Ibid., p. 26).

Los pitagóricos, concebían los números como una especie de átomos, con existencia propia, y que relacionados entre sí constituían el mundo real, además del carácter y propiedades místicas atribuidas a ellos. El número estaba compuesto de unidades colocadas de acuerdo con cierta composición espacial determinada; así, se generan las líneas por yuxtaposición de unidades (puntos [22]), las superficies por yuxtaposición de líneas y el espacio por yuxtaposición de superficies[23]. Con estos elementos se componen todos los cuerpos del universo, razón por la cual deben ser considerados como números.

De esta forma, el número, tal como lo consideraban los pitagóricos, era una arquitectura discontinua de unidades–puntos (mónadas), indivisibles, reales, constitutivas del ser mismo de las cosas. Según Nicómaco, pitagórico tardío del primer siglo de nuestra era y una de nuestras fuentes más precisas de la aritmética pitagórica, el número es "*un agregado compuesto de unidades*" (Ibid., p. 39), con lo cual, sólo los números naturales tienen sentido en la teoría pitagórica; las fracciones, entonces, no eran consideradas números[24].

Este hecho es importante en la medida que llevó a conclusiones falsas, al llevarlo al ámbito de la geometría; en particular la idea según la cual todas las razones entre cantidades geométricas (longitudes o segmentos) podían expresarse mediante razones entre números naturales, lo cual se traduce en encontrar una medida común para dos longitudes cualesquiera, en cuyo caso dichas longitudes se dicen conmensurables: "*Dadas dos*

---

[22] Se supone que los pitagóricos no distinguían los números de los puntos; de hecho, representaban los números mediante puntos distribuidos en formas geométricas, dando origen a los números triangulares, cuadrados, pentagonales, etc.

[23] Los pitagóricos identificaron el punto con el uno, la línea con el dos, la superficie con el tres y el volumen con el cuatro.

[24] En el comercio se utilizaron las fracciones, pero los usos comerciales de la aritmética quedaban fuera del marco de la matemática griega propiamente dicha (Kline, op. cit., 1972)

magnitudes AB y AC, se trata de buscar una unidad de longitud AD, común a ambas, de tal manera que AB se pueda expresar como un número a entero de veces AD y AC se exprese como un número entero b de veces AD, entonces la relación entre AB y AC se puede expresar en términos de una razón $\frac{a}{b}$ *de números enteros"*[25] (Ibid., p. 39).

No obstante, el número que resulta de este proceso de medida, ciertamente no es el número de los pitagóricos. En el primer caso, el número es un múltiplo de la unidad (sentido operatorio) y en el otro caso, es una multiplicidad de unidades (sentido ontológico); además, la unidad-medida, difiere de la unidad-mónada, la primera es continua y la otra es discreta, como lo hará notar Aristóteles años después (ver sección 3.1.1.3.).

Pero, realmente esta última anotación no constituyó un problema para las teorías pitagóricas respecto al número como esencia de todas las cosas; el verdadero problema, que los sorprendió desagradablemente, fue el descubrimiento de segmentos inconmensurables; es decir, razones entre longitudes que no podían expresarse con números naturales; descubrimiento que prácticamente demolía las bases del credo pitagórico, por cuanto los números naturales y sus razones resultaban inadecuados o insuficientes para expresar ciertas relaciones geométricas entre segmentos, precisamente porque éstos no son colecciones discretas de unidades, como ellos lo pensaban.

No existe certeza respecto al momento y a la situación que dio lugar a este hallazgo. Las teorías apuntan a que fueron los pitagóricos tardíos (finales del siglo V a.C.) quienes descubrieron las razones inconmensurables, específicamente Hipaso de Metaponto; incluso, hay una leyenda que señala que "*los pitagóricos se encontraban navegando en el mar en esa época y que lanzaron a Hipaso por la borda como castigo por haber introducido en el*

[25] Para obtener esta unidad común, se suele emplear el algoritmo de Euclides que consiste en, dadas dos magnitudes a y b, suponemos que b es el mayor de los dos segmentos, si existe una medida común entre a y b, colocamos a a desde un extremo y a lo largo de b tantas veces como sea posible, sin que sobrepasemos la longitud de b; es decir, dividimos b entre a; si las longitudes coinciden entonces a es la medida común. Si en el proceso queda un residuo, digamos r_1, este residuo debe ser conmensurable con a, para que a y b sean conmensurables; entonces repetimos el proceso anterior con r_1 y a, si el residuo es 0, entonces r_1 es la medida común; si no, obtenemos un residuo r_2, y así sucesivamente hasta obtener un residuo 0. El penúltimo residuo es la máxima medida común. (Luque, et al. 2004)

universo un elemento que negaba la teoría pitagórica de que todos los fenómenos del universo se podían reducir a números enteros y sus razones" (Kline, op. cit., p. 58).

En cuanto a las circunstancias que determinaron el reconocimiento de la existencia de longitudes inconmensurables, hay dos hipótesis. Por una parte, al considerar un segmento *a* dividido en media y extrema razón[26], generando los segmentos *b* y *c*, se puede verificar que dichos segmentos no son conmensurables, pues al aplicar el algoritmo de Euclides[27], se da lugar a un proceso infinito que nunca permite hallar la medida común deseada; esta situación se presenta en la estrella pentagonal, símbolo de la hermandad pitagórica, pues las cinco líneas que la conforman, se encuentran divididas en media y extrema razón.

La otra hipótesis está relacionada con la aplicación del teorema de Pitágoras a un triángulo rectángulo isósceles o la razón entre el lado de un cuadrado y su diagonal, situación en la que el algoritmo de Euclides, también genera un proceso infinito. Según Aristóteles, los pitagóricos procedieron con el método de reducción al absurdo para demostrar la inconmensurabilidad de estos segmentos; dicha demostración puede reconstruirse, en términos actuales, como sigue:

> *Si la razón de la diagonal al lado es conmensurable, supongamos que sea p: q, donde p y q son números enteros primos entre sí. Entonces p y q simbolizan el número de subdivisiones iguales en el lado y la diagonal del cuadrado respectivamente. Pero, puesto que el cuadrado de la diagonal es el doble que el del lado, se sigue que* $p^2 = 2q^2$*. Luego* p^2 *es un número par, y p también debe ser par. Por tanto, puede considerarse a p como 2r, siendo* $p^2=4r^2$*, y, por consiguiente,* $q^2 = 2r^2$*. Esto exige que q sea par; lo cual es imposible porque dos números p y q primos entre sí no pueden ser ambos pares. Así el supuesto originario es insostenible; no puede existir ninguna medida común y la razón es, por tanto, irracional* (Newman, 1997, p. 17).

En todo caso, la revelación de la existencia de longitudes inconmensurables, haya sido con $\sqrt{5}$ o $\sqrt{2}$, echó por tierra los planteamientos pitagóricos respecto a la posibilidad de expresar los fenómenos del universo mediante números (naturales) y de paso, la fe de los

---

[26] La división en media y extrema razón también se conoce división áurea, con ésta un segmento queda dividido en dos partes desiguales tales que el segmento es a la parte mayor como la parte mayor es a la parte menor.

[27] Ver nota 25.

matemáticos griegos en esta teoría. La palabra αλογοζ (*alogos*: *a* = sin, *logos* = razón), con la cual se designaron las razones entre segmentos inconmensurables, puede ser entendida en dos sentidos: o como razón no expresable en términos de números naturales o como algo que pone en peligro la coherencia del discurso; de ahí el uso actual de la palabra irracional para denominar estas razones. Matemáticos posteriores como Zenón de Elea y Eudoxo, buscaron explicaciones y soluciones racionales para el asunto de la inconmensurabilidad revelada por los pitagóricos.

3.1.1.2. Escuela Eleática. Continuo vs. Discreto.

Una de las preocupaciones de los científicos griegos, a raíz del descubrimiento de los segmentos inconmensurables, fue la búsqueda de justificaciones para los problemas relacionados con el establecimiento de la relación entre lo continuo y lo discreto, es decir: *(a)* l*a prolongación ilimitada del proceso de búsqueda de una medida común;(b) lo indefinidamente pequeña de la última; (c) que ésta debe estar contenida un número infinito de veces en las magnitudes que se comparan* (Romero, op. cit., p. 42).

Cantidades como el tiempo, la longitud, el área, el volumen, entre otras, son continuas y por tanto, la idea de considerar todo como colecciones discretas de unidades llevaba a conflictos, en particular a la aparición de las longitudes inconmensurables; pero esto sólo se puso en evidencia con la obra de Zenón de Elea (nacido entre el 495 y 480 a.C.), filósofo fundador de la escuela eleática.

Zenón propuso un cierto número de paradojas, las más famosas relacionadas con el movimiento[28], con la cuales se puso de manifiesto el problema con las cantidades discretas para describir el universo. No se conocen con certeza las exposiciones exactas de Zenón; los datos que poseemos son con base en citas de Aristóteles acerca de él:

[28] Las paradojas del movimiento de Zenón son cuatro, distintas entre sí, pero unificadoras al considerarlas en bloque. Las dos primeras atacan la idea de que el espacio y el tiempo son indefinidamente divisibles, en cuyo caso el movimiento resultaría continuo y "liso"; las otras dos atacan la idea que el espacio y el tiempo están formados por intervalos indivisibles, en cuyo caso el movimiento consistiría en una sucesión de minúsculos saltos. La primera paradoja de cada caso considera el movimiento de un único cuerpo y la segunda, el movimiento relativo de un cuerpo respecto al otro (Kline, 1972)

> *Supongamos que la realidad consta de unidades. Estas unidades, o tienen magnitud o no la tienen. En el primer caso, consideremos por ejemplo una línea como formada por unidades de magnitud: esta línea será infinitamente divisible, puesto que, por más que se la divida sus unidades seguirán teniendo magnitud y, por tanto, seguirán siendo divisibles. Más, en tal caso, la línea constará de un número de unidades infinito, y cada una de esas unidades estará dotada de magnitud. Así pues, esa línea tendría que ser infinitamente grande, como compuesta de un número infinito de partes extensas. Por consiguiente, todas las cosas del mundo habrán de ser infinitamente grandes, y el mundo habrá de ser infinitamente grande. Supongamos por el contrario que las unidades elementales carecen de magnitud. En este caso, también el universo entero carecerá e magnitud, ya que, por más unidades que añadamos y juntemos, si ninguna de ellas tiene magnitud, tampoco la reunión de todas ellas tendrá magnitud alguna. Mas si el universo carece en absoluto de magnitud, ha de ser infinitamente pequeño, y todas las cosas del universo habrán de ser infinitamente pequeñas (Simplicio, citado por Kiri y Raven). Se plantea así el siguiente dilema: o todas las cosas del mundo son infinitamente grandes o bien cada una de ellas es infinitamente pequeña. La conclusión que Zenón quiere que saquemos de este argumento es, naturalmente, que la suposición de donde deriva semejante dilema es absurda, a saber, la de que el universo y todas las cosas que hay en él están compuestas de unidades* (Ibid., p. 43).

Los planteamie ntos de Zenón llevaron a la conclusión de la imposibilidad de hacer coincidir la pluralidad discontinua y la pluralidad de puntos de los pitagóricos, con la realidad concreta y continua del mundo sensible. Se hace necesario, entonces, incluir nuevos métodos y elementos para abordar adecuadamente el asunto de lo infinitamente pequeño. El primer paso en esta dirección lo dio Eudoxo con su método de exhaución.

3.1.1.3. Escuela Platónica. Primera Teoría sobre los Irracionales.

Hacia el año 387 a.C., Platón fundó su Academia en Atenas. Consideró a la matemática como fundamental para entender el universo y estudiar filosofía; es probable que por esta razón, varios de los grandes matemáticos griegos como Eudoxo, Teeteto, Menecmo, Dinostrato, entre otros, fueran inicialmente sus discípulos.

Platón consideraba que los objetos de la matemática, números y figuras geométricas, son independientes de la realidad y no tienen en sí nada material, pues son distintos de los objetos físicos. De hecho, Platón distingue entre número numerado y número aritmético; el primero, útil contar y el segundo, un ente ideal de naturaleza abstracta, formado por la agrupación de unidades iguales; por tanto, los números deben estudiarse simplemente como números en sí mismos y no como entes incorporados a la realidad sensible[29]. De esta manera, fue posible incluir a los irracionales (inconmensurables) como números, por lo menos entre Platón y sus discípulos, como se muestra en algunos de sus escritos. En el dialogo de Platón titulado *El Teeteto*[30], se presenta el trabajo de Teodoro de Cirene, maestro de Platón, y Teeteto, alrededor de los irracionales, en una discusión entre estos dos y Sócrates.

Teodoro (nacido hacia el 470 a.C.), pitagórico nativo del norte de África, estimuló el estudio de la aritmética superior en Atenas y contribuyó al desarrollo de la teoría de longitudes inconmensurables; a él se le atribuye el descubrimiento o, mejor dicho, la demostración de la inconmensurabilidad de $\sqrt{3}$, $\sqrt{5}$, $\sqrt{6}$, $\sqrt{7}$, $\sqrt{8}$, $\sqrt{10}$, $\sqrt{11}$, $\sqrt{12}$, $\sqrt{13}$, $\sqrt{14}$, $\sqrt{15}$ y $\sqrt{17}$ con la unidad. No se sabe cómo lo hizo, ni tampoco porqué se detuvo en $\sqrt{17}$, aunque es probable que haya seguido las líneas de la demostración de la inconmensurabilidad de $\sqrt{2}$ con la unidad.

Teeteto, por su parte, investigó y clasificó, con base en ciertas propiedades, otros tipos de raíces cuadradas que también son irracionales; por ejemplo, radicales como $\sqrt{3}$ son inconmensurables, con la unidad, en longitud, pero al cuadrado son conmensurables con ella, mientras que radicales como $\sqrt{1+\sqrt{3}}$, son inconmensurables, con la unidad, en longitud y en cuadrado. Con este trabajo aparecieron otros números irracionales, originados todos como longitudes en construcciones geométricas, estudiados con más detalle en el libro X de los Elementos de Euclides.

Esta aclaración, de que los irracionales surgen como longitudes en construcciones geométricas, se convierte en un obstáculo para aceptar los irracionales como números, por

[29] Esta precisión fue sugerida por el profesor Luis Cornelio Recalde.

[30] Teeteto (414 a.C.– 369 a. C.), murió en Atenas de disentería y por las heridas recibidas en una batalla contra los corintios.

cuanto se establece una separación entre la geometría y la aritmética[31]. Aristóteles (384 a.C.– 322 a.C.), discípulo de Platón originario de Macedonia y fundador del Liceo, hace la distinción entre magnitud y cantidad, continuo y discreto.

Señala que el número (a los que hoy llamamos números naturales, excepto el cero y el uno[32]) es una pluralidad de unidades, mientras que las longitudes, y demás ideas geométricas, son magnitudes continuas; es decir, que en la aritmética no hay continuo y éste es propio de la geometría; esta concepción se mantiene incluso en Euclides, como se muestra en su obra. De acuerdo con esto, las razones entre longitudes, conmensurables o no, no son números, ni objeto de estudio de la aritmética; aunque las magnitudes conmensurables pueden expresarse mediante números y de alguna manera, pueden asumirse como cantidades. Así, empezó el trabajo con magnitudes inconmensurables, con lo cual se hizo un tratamiento de los irracionales, pero sin asumirlos como números, gracias también a la teoría de las proporciones de Eudoxo.

3.1.1.4. Escuela de Eudoxo. Teoría de proporciones.

Eudoxo es, sin lugar a dudas, el personaje más sobresaliente en lo que podría llamarse la reforma de las matemáticas. Originario de Cnido (408 a.C. aprox.) y discípulo de Platón, afrontó el problema de las magnitudes inconmensurables, con una nueva teoría de las proporciones, que, de paso, aportaría los elementos necesarios para formalizar los números reales, aunque la sutileza y profundidad de sus planteamientos sólo fue comprendida por Dedekind en el siglo XIX.

Eudoxo introdujo la idea de magnitud continua, diferente de cantidad (número), como ciertas entidades a las que no se les asignaban valores numéricos y que variaban de manera continua y no por saltos, como ocurría con los números (segmentos, áreas, volúmenes,

---

[31] Los pitagóricos, inicialmente, habían identificado aritmética (número) con geometría, pero la aparición en escena de los irracionales generó una distinción en entre estas disciplinas y restringió el estudio de las razones a la geometría, de manera independiente al estudio de los números.

[32] Para Aristóteles el uno y el cero no son números pues no están constituidos por unidades; además, para el caso del cero, existían cuestiones filosóficas que impedían la aceptación del *no ser*. Esta precisión fue sugerida por el profesor Luis Cornelio Recalde.

tiempo, etc.). Definió entonces razón entre magnitudes y proporción, incluyendo razones conmensurables e inconmensurables, es decir, números racionales e irracionales; claro está, sin emplear números para expresar tales razones, con lo cual, estos conceptos, al igual que con Aristóteles, quedaron vinculados únicamente a la geometría: las razones y proporciones no son números, sino relaciones entre magnitudes y, en algunos casos, entre números.

La idea de razón de Eudoxo excluye el cero y darifica lo que debe entenderse por magnitudes del mismo tipo; ésta se enuncia en la definición 4 del libro V de los *Elementos* de Euclides de la siguiente manera: "*Dos magnitudes se dice que tienen una razón una a la otra si se puede encontrar un múltiplo de una cualquiera de ellas que supere a la otra*"[33] (Euclides, traducido por Vera, 1970, p. 787).

Más importante aún, es la definición 5 del mismo libro, a partir de la cual, se introduce la teoría de las proporciones:

> *Se dice que magnitudes están en la misma razón, la primera a la segunda y la tercera a la cuarta, cuando, tomados cualesquiera equimúltiplos de la primera y la tercera y cualesquiera equimúltiplos de la segunda y la cuarta, entonces los primeros equimúltiplos ambos exceden, son iguales o son menores que los segundos equimúltiplos, tomados en el orden correspondiente* (Ibid., p. 787).

En símbolos modernos, $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ si y sólo si dados dos números naturales m y n, si

$ma > nb$, entonces $mc > nd$, ó

$ma = nb$, entonces $mc = nd$, ó

$ma < nb$, entonces $mc < nd$.

Con base en esta definición, se abordó el asunto de los inconmensurables, específicamente con la primera y tercera de las afirmaciones anteriores, que resultan sorprendentes, por cuanto se obtienen razones iguales a partir de dos desigualdades. Además,

[33] Esta formulación se conoce como Axioma de Arquímedes, pero Arquímedes mismo, atribuía esta propiedad a Eudoxo.

si cambiamos *a*, *b*, *c* y *d* por números como $\sqrt{2}$, el producto cruzado no tienen sentido en relación con el significado griego de número, pero esto en cambio, si fue usado muy inteligentemente por Dedekind en su teoría sobre cortaduras.

Realmente, respecto a una visión actual, lo que hizo Eudoxo fue evitar los números irracionales como números, abordándolos como magnitudes[34]; de hecho, lo que hoy llamamos número, Eudoxo lo trataba desde la geometría –como magnitud–. Ello contribuyó a la distinción entre aritmética y geometría [35], generando grandes avances en la segunda, dado que la mayor parte del álgebra se convirtió en geometría. Aunque el estudio de los números naturales y sus razones siguió haciéndose desde la aritmética, la geometría, como lo señala Kline (1972), *se convirtió en la base de casi toda la matemática rigurosa durante los dos mil años siguientes*.

3.1.1.5. Euclides de Alejandría. El expositor de la matemática elemental griega.

Hacia finales del siglo IV a.C., Alejandría se constituyó en el centro cultural y científico del mundo griego, de manos de Alejandro Magno y Ptolomeo I. Este último gobernante estableció un museo y una biblioteca en Alejandría, semejante a una universidad, a la cual llamó a célebres sabios para que fueran maestros en ella; entre éstos, Euclides, el autor de *Los Elementos*. Es muy poco lo que se sabe acerca de la vida de Euclides, ni siquiera su lugar de nacimiento[36], se destacó por su habilidad expositiva y capacidad pedagógica, más que por algún descubrimiento nuevo atribuido a él; precisamente, los Elementos se constituyeron en un libro de texto que cubría todas las matemáticas elementales de su tiempo (aritmética, geometría y álgebra), descritas y organizadas lógicamente[37]. Los Elementos de Euclides muestran el estado de gran parte de las matemáticas de la época, las ramas de estudio y los

---

[34] No existe en los planteamientos de Eudoxo alguna referencia a números racionales o irracionales, sus teorías están elaboradas sobre las magnitudes; sin embargo, las magnitudes inconmensurables constituyen los antecedentes históricos de los, que hoy denominamos, números irracionales.
[35] Para esta época, las matemáticas no eran más que el estudio de los números y de la forma, dejaron de ser un conjunto de técnicas para contar o medir, tenían un interés intelectual (Devlin, 2003, p.12)
[36] Es conocido como Euclides de Alejandría, porque fue llamado a enseñar en el museo.
[37] Aunque Euclides haya tomado la obra de sus antecesores, sin asumirla como suya, se cree que el orden lineal de los Elementos, si es original de él.

resultados que se habían obtenido; además, esta obra ha ejercido gran influencia en todos los tiempos, es tal vez, junto a la Biblia, el libro más editado e impreso.

Los Elementos constan de trece libros: los cuatro primeros tratan sobre geometría plana, los libros V y VI sobre la teoría de magnitudes, los libros VII, VIII y IX de aritmética (teoría de números), el libro X sobre los inconmensurables y los últimos tres sobre geometría del espacio, precedidos todos por 5 postulados y 5 nociones comunes.

En el libro V, uno de los más admirados y estudiados, porque se encuentra expuesta en detalle la teoría de las proporciones de Eudoxo. No hay, de manera explícita, una definición de magnitud, pero se pretende incluir magnitudes conmensurables e inconmensurables, poniendo el énfasis en las razones y proporciones que se pueden establecer entre éstas. Pero las generaciones de matemáticos posteriores a Euclides, consideraron la teoría de las proporciones sólo aplicable a la geometría, quedando en el tintero la posibilidad de fundamentar lógicamente una teoría de los números reales a partir de ésta[38].

Los libros VII y VIII constituyen el estudio de la aritmética, es decir de los números (naturales desde el uno) y sus razones; para ello, Euclides representa los números mediante líneas horizontales indivisibles cada una, una seguida de la otra. Los argumentos de las demostraciones en estos libros no son de tipo geométrico, las pruebas son verbales y Euclides no emplea los resultados de los libros anteriores. En estos libros, Euclides demuestra muchas de las proposiciones que ya habían sido demostradas en el libro V para las magnitudes, tal vez influenciado por las ideas de Aristóteles respecto a la oposición entre lo discreto y lo continuo, o porque para lo números ya existía una teoría de proporciones, anterior a la de Eudoxo. Por ejemplo, la proposición 12 del libro V, que enuncia (Figura 2): "*Si de cualquier número de magnitudes cada una de las antecedentes tiene la misma razón con cada una de las consecuentes, en la misma razón estarán todas las antecedentes y todas las consecuentes*"[39](Euclides traducido por Vera, op. cit., p. 797), tiene su equivalente en el libro VII, con la proposición 12: "*Si varios números son proporcionales, la razón de un*

[38] Realmente, no había en los Elementos una fundamentación, ni siquiera para los números racionales.

[39]Lo cual se escribe en términos modernos como "*Si es* $a1 : b1 = a2 : b2 = ... = an : bn$ *se verifica* $a1 + a2 + a3 + ... + an : b1 + b2 + b3 + ... + bn : ai = bi$"

antecedente a su consecuente es igual a la de todos los antecedentes a todos los consecuentes” (Ibid., p. 836).

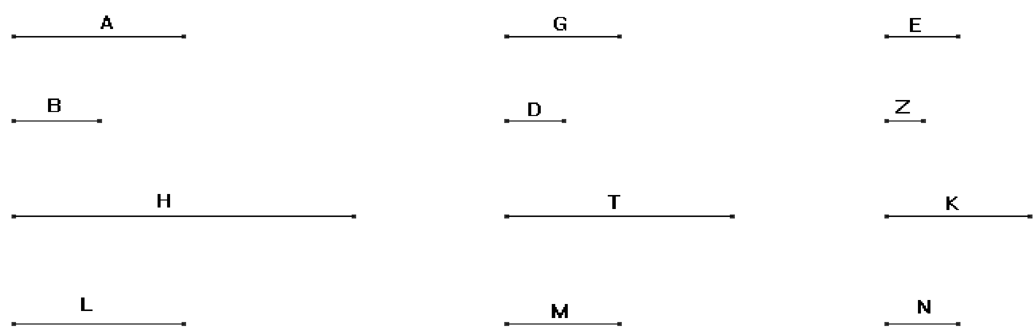


Figura 2

Pese a esta situación, hay algunas proposiciones en las que Euclides relaciona magnitud y número, como la proposición 5 del libro X: “*Las magnitudes conmensurables tienen entre sí la razón de un número a otro*” (Ibid., p. 863). Es precisamente en este libro donde se emprende la tarea de clasificar, desde la geometría, los inconmensurables de las formas $a \pm \sqrt{b}$, $\sqrt{a} \pm \sqrt{b}$ y $\sqrt{\sqrt{a} \pm \sqrt{b}}$.

En el panorama de esta época, respecto a los números reales, se observa, entonces, los antecedentes de los irracionales cuadráticos y algunos bicuadráticos, estudiados únicamente desde la geometría y no aceptados como números. Esto fue interpretado por los sucesores de Euclides como la priorización del razonamiento geométrico en detrimento del razonamiento aritmético y algebraico.

3.1.1.6. Matemáticos orientales.

Los matemáticos hindúes y árabes, sucesores de la hegemonía matemática griega de la antigüedad, dieron importantes avances en el estudio de la aritmética, la geometría y el álgebra, al manejar los números irracionales como si fueran números naturales; esto es, entidades con las cuales era posible operar siguiendo reglas o procedimientos válidos para los números naturales, y tratar de atenuar la distinción entre aritmética y geometría, impuesta por los griegos.

Los hindúes consideraban también como números las raíces irracionales de otros números e idearon métodos para operar con ellos. Sin embargo, como señala Boyer (1986, p. 285) "*la contribución hindú fue el resultado de una inconsciencia de tipo lógico, más que de una profundidad matemática*"; efectivamente, los hindúes estuvieron interesados en actividades de cálculo, más que en cuestiones de tipo filosófico o deductivo, lo cual hizo que pasaran por alto las dificultades lógicas implícitas en la aceptación de los números irracionales y que los griegos creían fundamentales; así pues, para ellos no había impedimento alguno en aceptar los números irracionales, contribuyendo en gran medida al desarrollo de las matemáticas, con métodos de cálculo que aunque no demostraron resultan correctos.

Bhaskara (1114 – 1185), por ejemplo, dice "*Llamemos la suma de dos irracionales al mayor número irracional, y dos veces su producto al menor de ellos. La suma y la diferencia de ellos se efectúa como si fueran números enteros*" (Kline, op. cit., p. 251), es decir, dados los irracionales $\sqrt{3}$ y $\sqrt{2}$, por ejemplo, la suma se obtiene así:

$$\sqrt{2}+\sqrt{3}=\sqrt{(2+3)+2\sqrt{2\cdot 3}}=\sqrt{5+2\sqrt{6}}$$

De manera similar, Bhaskara, da reglas para multiplicar, dividir y extraer la raíz cuadrada de expresiones irracionales. Otra regla de Bhaskara para la suma de dos irracionales, es la siguiente: "*La raíz del cociente del mayor irracional dividida por el menor, aumentada en una unidad; la suma elevada al cuadrado y multiplicada por la menor cantidad irracional es igual a la suma de las dos raíces irracionales*" (Ibid., p. 252), para nuestro ejemplo:

$$\sqrt{2}+\sqrt{3}=\sqrt{\left(\sqrt{\frac{3}{2}}+1\right)^{2}\cdot 2}=\sqrt{5+2\sqrt{6}}$$

Los árabes, al igual que los hindúes, trabajaron libremente con los irracionales; "*De hecho, Omar Khayyam (1048? – 1122) y Nasir – Edwin (1201 – 1274) afirman claramente que toda razón de magnitudes, tanto conmensurables como inconmensurables, puede ser considerada como un número, aseveración que Newton se vio obligado a reafirmar en su Aritmética Universal de 1707*" (Ibid., p. 259), con lo cual se observa que los árabes aceptaron el número como colección de unidades, como magnitud continua y como razones entre éstas. La inconmensurabilidad entre magnitudes geométricas se asoció con la irracionalidad numérica, con lo que se hizo posible asignar valores numéricos a los segmentos y demás magnitudes, importante resultado que llevó a la aceptación de la coexistencia mutua entre el álgebra y la geometría y la desaparición de la distinción entre números racionales e irracionales, en lo que a las operaciones y propiedades de éstas se refiere. Sin embargo, esta aceptación tardó bastante tiempo, sólo logró consolidarse hasta el siglo XIX, como veremos más adelante.

Es interesante la manera algebraica como los árabes manejaron los irracionales. Ejemplos de esto se pueden observar en la obra de Al–Karkhi y Al–Baki, quienes introdujeron varias transformaciones de expresiones irracionales y comentaron el libro X de los Elementos, ilustrando algunas de sus proposiciones con ejemplos numéricos, y de Al–Khowarizmi, quien realizó operaciones con irracionales cuadráticos y empleó las expresiones números audibles y números sordos, para referirse a los números racionales e irracionales (no expresables), respectivamente.

Los árabes emplearon los métodos que habían introducido los hindúes para operar con números irracionales y agregaron transformaciones como $\sqrt{a^2b} = a\sqrt{b}$ y $\sqrt{ab} = \sqrt{a}\sqrt{b}$, todas ellas como resultado de procedimientos similares verificados con números enteros. Así, los números irracionales empezaron a aceptarse y a manejarse como números, sobre la base de lo que ya estaba aceptado para los números naturales; es la primera vez que aparece una amplia concepción de número como cantidad, magnitud y razón, la de número real (positivo).

Otro aporte importante de los árabes fue el cambio en el carácter de las matemáticas, dada fundamentalmente por la aceptación de los números irracionales, o mejor dicho, la ampliación de la concepción de número. Esto contribuyó al desarrollo de la aritmética, su integración con la geometría y la creación de un álgebra más trascendente, donde los símbolos y las operaciones pueden ser aplicados a cualquier clase de números.

3.1.2. ***SEGUNDA ETAPA: Fracciones decimales***[40] ***y fracciones continuas.***

A finales de la edad media, declinó el trabajo científico en el oriente y empezó a tomar impulso en Europa, gracias al saber heredado de la antigüedad europea y oriental y a los movimientos conquistadores en oriente. A comienzos del siglo XIII, Fibonacci de Pisa, da el primer paso en el estudio de los irracionales en Europa, con la aproximación de la raíz de un número sordo (número que no tiene raíz cuadrada), por medio de una fracción sexagesimal. Es aquí donde se inicia un nuevo enfoque y una nueva etapa en el estudio de los números irracionales con el uso de fracciones.

3.1.2.1. Fracciones sexagesimales, unitarias y comunes.

El concepto de fracción[41] se dio relativamente tarde; las culturas primitivas no tuvieron necesidad de usar números de este tipo, los evadían creando unidades más pequeñas, por lo menos, en lo relacionado con las medidas; aún los romanos establecieron un sistema de medidas con submúltiplos para no utilizar los números fraccionarios[42].

Al parecer, una de las culturas que trabajó con fracciones fue la babilónica, que como es bien sabido, desarrolló un sistema de numeración posicional base sesenta alrededor de los años 2400 a.C., sistema que extendió a las fracciones, conociéndose éste como sistema

[40] Utilizaremos indistintamente el término fracción y fraccionario para referirnos a expresiones de la forma $\frac{a}{b}$, donde a y b son números naturales y $b \neq 0$.

[41] La palabra fracción viene del latín frangere (romper, quebrar), se refiere a un número quebrado y así fue llamado frecuentemente.

[42] La unidad principal era el *as*, $\frac{1}{12}$ del *as* era llamado *uncia* cuyo símbolo era –, $\frac{2}{12}$, un *sextans*, representado por =; entre otros. Para más información, consultar SMITH, David, *History of mathematics*, vol. II, Dover, New York, 1958, p. 208.

sexagesimal; por ejemplo, ␣␣ ␣␣ podía bien significar 122 (es decir, $2 \cdot 60 + 2$) o $\frac{61}{30}$ (es decir, $2 + 2 \cdot 60^{-1}$) o cualquier otra fracción que se pueda derivar de esta notación (Boyer, op.cit., p. 51)

Aaboe (1964, p. 25) señala que los babilonios poseían tablas para los recíprocos de algunos números con las cuales realizaban divisiones partiendo del hecho de que:

$$\frac{x}{y} = x \cdot \frac{1}{y}$$

Dice además que elaboraron tablas para aproximaciones de $\frac{1}{7}$, $\frac{1}{11}$ y $\frac{1}{13}$ entre otras (se destaca que estas fracciones tienen expresiones sexagesimales infinitas periódicas).

Smith (1994, p. 33) expone algunos símbolos, que utilizaban los babilonios para expresar fracciones, como se muestra a continuación:

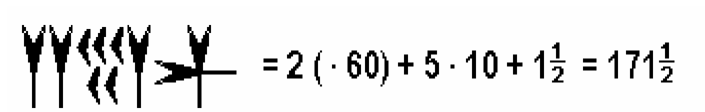


Figura 3

Sin embargo, el mismo Smith en su obra *History of Mathematics* (1958, p. 230) afirma que si bien es cierto que los babilonios tenían un sistema base sesenta no hay razón para creer que esta es una prueba del uso de las fracciones sexagesimales por los babilonios, pues aunque en tablillas que datan de aproximadamente 2000 a.C. se encuentra, por ejemplo, que el cuadrado de 44 26 40 es 32 55 18 31 6 4, esto puede ser interpretado como el cuadrado de $44 \cdot 60^2 + 26 \cdot 60 + 40$ o de $44 + \frac{26}{60} + \frac{40}{60^2}$, lo último originado, tal vez, de una interpretación en relación con el sistema numérico utilizado por esta civilización.

Según autores como Boyer y Smith, un concepto cercano al de fracción apareció por primera vez en la cultura egipcia; los egipcios, mediante sus numerales jeroglíficos (que datan aproximadamente del año 3000 a.C.) notaron fracciones, particularmente, fracciones unitarias; esto es, fracciones cuyo numerador es el uno, algunos ejemplos de las fracciones escritas en la notación jeroglífica son:

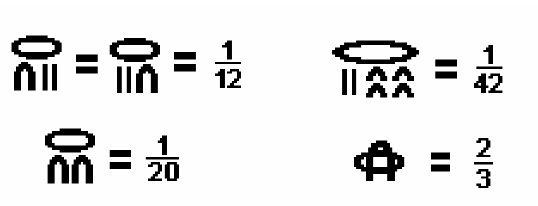


Figura 4

Los anteriores numerales indican que el óvalo representaba el uno de la fracción unitaria, el cual se colocaba sobre el número escrito en sistema jeroglífico; no obstante, los egipcios tenían símbolos especiales para algunas fracciones, algunas de la forma $\frac{n}{n+1}$ como $\frac{2}{3}$. Los egipcios utilizaron otro sistema de numeración, el hierático, debido a la facilidad para escribirse sobre los papiros, pues era cursivo; en éste, las fracciones unitarias eran escritas de manera un poco distinta, como se muestra enseguida:

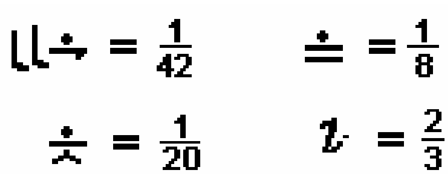


Figura 5

Según los historiadores, el punto es el equivalente al óvalo en el sistema jeroglífico[43]; esta notación para las fracciones es hallada en uno de los instrumentos egipcios reconocidos como de mayor importancia, el *Papiro de Ahmes* (conocido también como el *papiro de Rhind*), documento que data de aproximadamente 1500 años a.C., en cuya primera sección aparece una tabla para dividir por dos y por los números impares, desde $\frac{2}{3}$ hasta $\frac{2}{101}$, además se encuentra, como ya se había dicho antes, el interés de los egipcios por la s fracciones unitarias, en el papiro se hallan fracciones comunes escritas como suma de fracciones unitarias, de varias formas, por ejemplo:

$$
\begin{aligned}
\frac{2}{43} &= \frac{1}{42}+\frac{1}{86}+\frac{1}{129}+\frac{1}{301} \\
&= \frac{1}{24}+\frac{1}{258}+\frac{1}{1032} \\
&= \frac{1}{30}+\frac{1}{86}+\frac{1}{645} \\
&= \frac{1}{36}+\frac{1}{86}+\frac{1}{645}+\frac{1}{172}+\frac{1}{774} \\
&= \frac{1}{40}+\frac{1}{860}+\frac{1}{1720}
\end{aligned}
$$

así, desarrollaron numerosas reglas para formar fracciones unitarias; sin embargo, no existe una aplicable a todos los casos[44]; además, preferían unas representaciones más que otras[45].

---

43 El punto fue usado como un símbolo para la fracción aún en la época moderna, tal como se encuentra en copias de libros ingleses del siglo XVIII, en los cuales $\frac{1}{2}$ y $\frac{1}{4}$ se representaban como $\frac{\bullet}{2}$ y $\frac{\bullet}{4}$ respectivamente.

44 Si $b + c = ka$, se tiene que $\frac{a}{b} = \frac{1}{b\frac{b+c}{a}} + \frac{1}{c\frac{b+c}{a}}$, resultado usado por Ahmes en algunos casos, pero no en todos.

45 Es conocido que Ahmes y sus predecesores referían, para dos tercios, las dos primeras representaciones mostradas.

Si bien los egipcios trataron las fracciones de manera sistemática y definieron reglas y métodos generales para la escritura de fracciones mediante fracciones unitarias (Boyer, op. cit., pp. 34-37), lo cual representa un avance en el desarrollo de las matemáticas, no contribuyeron al conocimie nto matemático en sí, pues el avance que alcanzaron fue más por necesidades prácticas que por intereses abstractos, como sí lo fue en la cultura griega.

Aunque en Grecia no denominaban a las fracciones como tal sino como razones, los griegos siguieron los métodos egipcios para representarlas, Herón (50?) y otros, por ejemplo, descomponían las fracciones comunes en fracciones unitarias y hasta entrado el siglo X, esta tradición se mantenía, según lo muestra el Papiro de Akhmin (que data, aproximadamente del siglo VIII) y escritos hebreos de Rabbi Sa´adia ben Joseph al-Fayyumî (citado por Smith, op. cit., p. 212). Los griegos, crearon un simbolismo para las fracciones, usando las letras de su alfabeto; escribían, por ejemplo, $\frac{1}{3}$ como $\overset{o\varpi}{\Gamma}$ o $\overset{II}{\Gamma}$, donde Γ es el símbolo griego[46] para el tres, o $\frac{1}{4}$ como $^{II}\Delta$ y para las fracciones comunes, escribían la fracción a la inversa; es decir, $\frac{4}{19}$ para $\frac{19}{4}$, como lo hacían Herón y Diofanto (275?); otros escritores griegos, como Aristarco (260 a.C.?), escribían la palabra para el numerador y el símbolo del número para el denominador, otros repetían el numeral para el denominador; esto es, para $\frac{2}{5}$, en símbolos modernos, 2’ 5’’ 5’’; sin embargo, cuando los científicos griegos necesitaban un sistema preciso de aproximación acudían al sistema sexagesimal como lo hacía Ptolomeo.

Nuestra simbología actual para las fracciones es debida, a los hindúes, aunque ellos no usaban el vínculo; Brahmagupta (620) y Bhaskara (1150) escribían, por ejemplo, $\times$ para $\frac{3}{2}$; al parecer, fueron los árabes quienes lo introdujeron, pero sólo se usó de manera general hasta en el siglo XVI[47]. Fibonacci (1180-1250) usaba con propiedad el sistema decimal derivado de

---

[46] Los símbolos griegos usados son modernos.

[47] La barra oblicua es el resultado del deseo por simplificar la escritura y las formas impresas, se cuenta que fue De Morgan quien la instituyó en 1845.

los numerales hindú-arábigos al igual que el vínculo para las fracciones, pero extrañamente, éstas las escribía como sexagesimales, como comunes o como unitarias sin extender el sistema decimal a las fracciones.

3.1.2.1. Fracciones decimales.

Los chinos, por su parte, también usaron las fracciones y según se cuenta, sin dificultad desde épocas remotas, el Chou Pei (aprox. 1105 a. C.) contiene problemas que involucra números como $247\frac{933}{1460}$, no escrito simbólicamente, pero sí verbalmente (Ibid., p. 215). Los chinos fueron los pioneros de las fracciones decimales (siglo XIV a.C.), tal vez, derivadas del sistema decimal de pesos y medidas que usaban. En un comentario a los *Nueve Capítulos* (segundo milenio a.C. aprox.) realizado en el primer siglo de esta era, hay algunas reglas que son hoy consideradas como precursoras de la invención de las fracciones decimales, estas son (Boyer, op. cit., p.264):

$$\sqrt{a} = \frac{\sqrt{100a}}{10} \quad \text{y} \quad \sqrt[3]{a} = \frac{\sqrt[3]{1000a}}{10}$$

Dichas reglas se usaron en el siglo XV y XVI para la extracción de la raíz cuadrada y fueron resumidas posteriormente en una sola: $\sqrt[n]{a} = \frac{\sqrt[n]{a \cdot 10^{kn}}}{10^k}$, la consecuencia más importante de esta regla, en relación con la fracción decimal, es su uso para la elaboración de tablas con muy buenas aproximaciones de algunas raíces cuadradas como puede verse en la tabla de la Figura 6 de Adam Riese's Rechnung auff der Linien vnd Federn (1522).

La segunda influencia más importante en el desarrollo de la fracción decimal fue la regla para dividir números de la forma $a \cdot 10^n$, atribuido a Regiomontano (1436 -1476), por el matemático italiano Girolamo Cardano (1501-1576) y que aparecen algunos ejemplos en la obra de Chuquet (1484) como $470 \div 10 = 47$ y $503 \div 10 = 50\frac{3}{10}$ y en la de Pellos (1492), quien usa el punto decimal, por primera vez, para separar un entero de la fracción decimal (ver Figura 7) pero sin comprender la naturaleza de los decimales.

Den ersten Punct setz 1. vnd setze dafür drey nolla / ziehe dan Radicem quadratam daruon so kommen 1000. Dann preponir dem anderen Puncten / das ist der Ziffern 2. auch sechs o / vnd ziehe Radicem quadratā dauon / so komen 414.
Den dritten Punct mach auch also. Setz 1. vñ darnach sechs o. Extrahir dann Radicem quadratam dauon / kommen 832. Also thū mit allen Puncten / so machstu die Tafel selber. Es ist aber groß mühe vnd verdrossen arbeyt / Darum hab ich dir hie ein Tafel außgezogen / die gehet biß vff 240. Punct der tieffe / der man gnūg hat vff groß oder kleyne vaß.

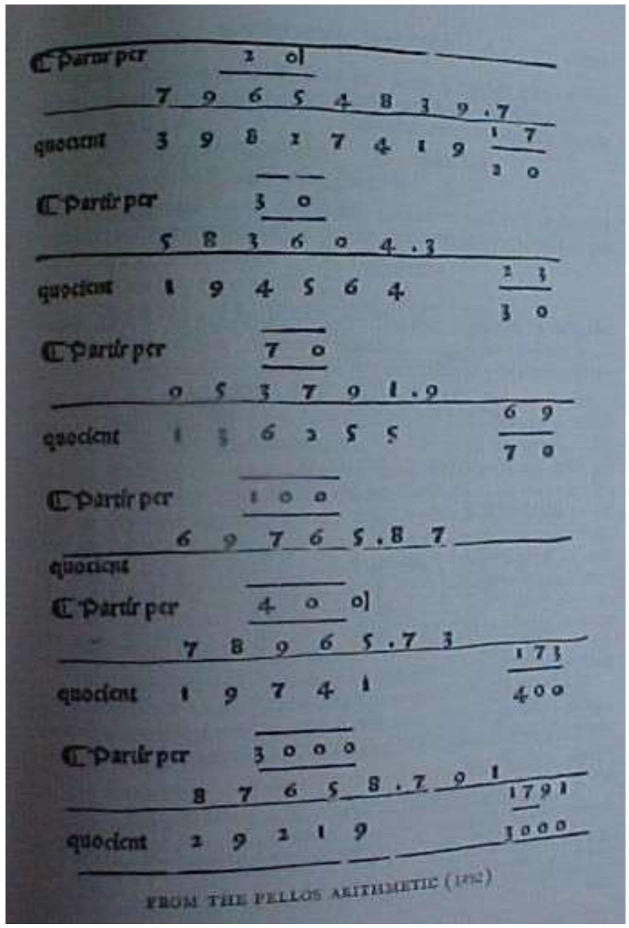
Tabula Radicum quadratarum.

1	1	1000		17	123		33	747
	2	414		18	242		34	831
	3	732		19	358		35	917
2	4	2000		20	472	6	36	1000
	5	234		21	584		37	82
	6	449		22	692		38	164
	7	645		23	767		39	244
	8	[illegible]		24	900		40	324
3	9	[illegible]	5	25	1000		41	403
	10	162		26	98		42	481
	11	316		27	195		43	558
	12	446		28	290		44	634
	13	606		29	384		45	709
	14	741		30	477		46	783
	15	873		31	567		47	856
4	16	1000		32	659		48	928

Tomada de SMITH, D., op. cit. p. 237

Figura 6

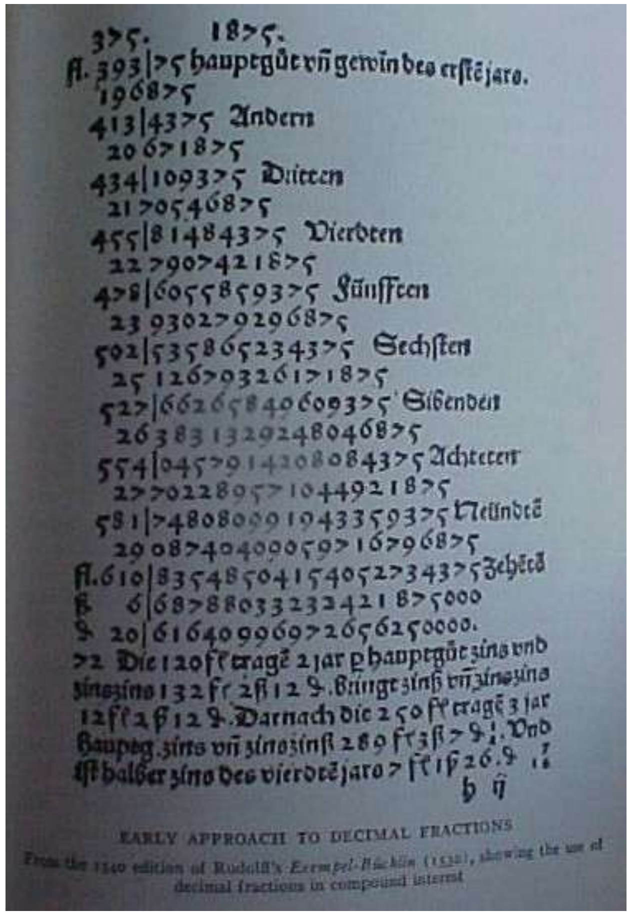
El uso del punto decimal propuesto por Pellos no tomó trascendencia, pues escritores posteriores a él utilizaban una línea vertical para este propósito, como Rudolff (1530), Cardano (1539), Cataneo (1546), Viète (1579), entre otros; el primero de éstos, Christoph Rudolff (1500–1545?), trabajó sistemáticamente con fracciones decimales y sus operaciones pero no escribió teoría sobre ellas (ver Figura 8), y es debido a esto que algunos historia dores como Klein y Smith, consideran que este hombre es el inventor de las fracciones decimales ya que su obra Coss (1525) es una de las primeras impresiones donde aparecen las fracciones decimales.



Tomada de SMITH, D., op. cit. p. 239

Figura 7

Viète fue uno de los más prominentes defensores del uso de las fracciones decimales en vez de las sexagesimales como lo manifiesta en su obra *Canon-mathematicus* (1579) y utilizó tanto números en negrita como barras horizontales y verticales para notar las fracciones decimales; por ejemplo, escribía 314.159. $\frac{26535}{100000}$ o 314.159.265.36 o 99.946|458.75.


EARLY APPROACH TO DECIMAL FRACTIONS
From the 1540 edition of Rudolff's *Exempel-Büchlin* (1530), showing the use of decimal fractions in compound interest

Tomada de SMITH, D., op. cit. p. 241

Figura 8

No obstante, en Oriente se usaba, un poco antes de Pellos, la fracción decimal. Al-Kashi (aprox. 1436) se auto consideró el inventor de las fracciones decimales ya que, aunque utilizaba principalmente fracciones sexagesimales, atribuía a las decimales la misma exactitud que las primeras y las usó para dar un valor de π, así:

sah-hah

3 1415926535898732

lo cual, en nuestros guarismos actuales corresponde a 3,1415926535898732; que como puede verse es una muy buena aproximación de este número irracional.

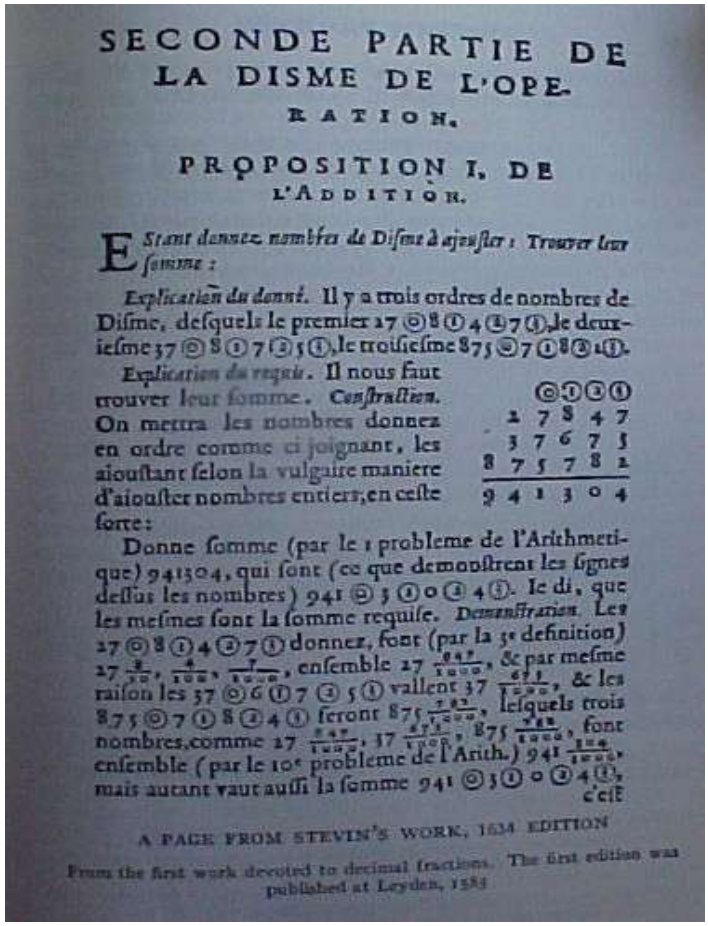
Lo que si es conocido por muchos es que hasta 1585 aparece un libro que contiene por primera vez toda la teoría sobre las fracciones decimales y éste es *De Thiende*, titulado así en flamenco, pero más célebre como *La Disme* y escrito por Simon Stevin de Brujas (1548–1620), quien obviamente, no fue el inventor de los números decimales ni mucho menos el que desarrolló un mejor simbolismo para éstos, pero sí quizás quien los comprendió totalmente.

Su reconocimiento es debido a que, por una parte, mediante su cuadernillo, explica de manera sencilla cómo usar la notación decimal y su operatividad sin recurrir a los fraccionarios, y lo hace accesible a cualquier comerciante de la época, que era lo que pretendía Stevin, difundir los decimales entre las personas corrientes para que fuesen utilizados en la ejecución de problemas prácticos de manera similar a como manejaban los números naturales, en palabras de Klein (1968, p. 186), Stevin *"(...) pone su experiencia en la práctica comercial, financiera e ingenieril al servicio de sus preocupaciones "teóricas" e inversamente, su "teoría" se pone en marcha dentro de su "actividad práctica"*; y por otra, Stevin contribuyó a un cambio en la concepción de la matemática, más específicamente en la concepción de número, identificando en un solo concepto las magnitudes continuas y las cantidades discretas.

Como se señaló anteriormente, el simbolismo usado por Stevin para los decimales fue tan pobre como elemental; para representar las posiciones de cada número, escribía al lado o sobre cada numeral la potencia que 10 debía llevar en el denominador si fuese representado como fraccionario; así, Stevin notaba, por ejemplo, 27,847 de la siguiente manera

27 8 4 7

o 27 8 4 7 , como puede observarse en la Figura 9.



SECONDE PARTIE DE LA DISME DE L'OPERATION.

PROPOSITION I. DE L'ADDITION.

Estant donnez nombres de Disme à ajouster : Trouver leur somme :

Explication du donné. Il y a trois ordres de nombres de Disme, desquels le premier 27 ⓪ 8 ① 4 ② 7 ③, le deuxiesme 37 ⓪ 8 ① 7 ② 5 ③, le troisiesme 875 ⓪ 7 ① 8 ② 2 ③.

Explication du requis. Il nous faut trouver leur somme. *Construction.* On mettra les nombres donnez en ordre comme ci joignant, les aioustant selon la vulgaire maniere d'aiouster nombres entiers, en ceste sorte:

⓪	①	②	③
27	8	4	7
37	6	7	5
875	7	8	2
941	3	0	4

Donne somme (par le 1 probleme de l'Arithmetique) 941304, qui sont (ce que demonstrent les signes dessus les nombres) 941 ⓪ 3 ① 0 ② 4 ③. Ie di, que les mesmes sont la somme requise. *Demonstration.* Les 27 ⓪ 8 ① 4 ② 7 ③ donnez, font (par la 3e definition) $27 \frac{8}{10}, \frac{4}{100}, \frac{7}{1000}$, ensemble $27 \frac{847}{1000}$, & par mesme raison les 37 ⓪ 6 ① 7 ② 5 ③ vallent $37 \frac{675}{1000}$, & les 875 ⓪ 7 ① 8 ② 4 ③ feront $875 \frac{782}{1000}$, lesquels trois nombres, comme $27 \frac{847}{1000}$, $37 \frac{675}{1000}$, $875 \frac{782}{1000}$, font ensemble (par le 10e probleme de l'Arith.) $941 \frac{304}{1000}$, mais autant vaut aussi la somme 941 ⓪ 3 ① 0 ② 4 ③, c'est

A PAGE FROM STEVIN'S WORK, 1634 EDITION

From the first work devoted to decimal fractions. The first edition was published at Leyden, 1585

Tomada de SMITH, D., op. cit. p. 243

Figura 9

Como es de suponerse, este simbolismo no fue utilizado por mucho tiempo; el mejoramiento en la notación decimal fue debido a matemáticos posteriores como Jobst Bürgi[48] (1552–1632), G. A. Magini (1555–1617), Christoph Clavius[49] (1537–1612) y Johann Hartman Beyer[50] (1563–1625). Pero John Napier (1550-1617), fue quien popularizó el uso del punto decimal en sus tablas de logaritmos; aunque él inicialmente no lo usó, en la edición de su obra, hecha en 1616 por Edward Wright, aparecen los números decimales tal como los

[48] A quien Kepler, en su obra de 1616 atribuyó la fracción decimal.

[49] El uso del punto decimal se le atribuye a Magini o a Clavius, ambos amigos de Kepler (Boyer, C., op cit., p. 386).

[50] Beyer, en una carta a Kepler escribió 314, 1' 5'' 9''' 2'''' 6''''' 5'''''' para 314.15926 (Smith, D., op cit, p. 245).

escribimos en la actualidad. Además en la obra *Rhabdologiae* de 1617, Napier hace referencia a los decimales de Stevin y propone usar punto o coma para indicar separación entre la parte entera y la decimal; sin embargo, en escritos posteriores se encuentra multitud de representaciones para los números decimales (Smith, Op. cit., p. 246) y aún, en nuestros días no hay acuerdo entre el punto decimal, la coma o superíndices subrayados para la escritura de números decimales.

3.1.3.3. Las fracciones continuas.

El desarrollo de la notación decimal no sólo contribuyó a la representación de números racionales sino también a la representación de los irracionales. Aunque a principios del siglo XVI, los irracionales se usaban con cierto grado de libertad, no estaba establecido si eran o no números, algunos personajes de ese siglo los consideraban como tal, por ejemplo Stevin los aproximaba mediante números racionales y afirmaba: "*QUE CUALQUIER NÚMERO PUEDE ser cuadrado, cúbico, etc. Así como cualquier raíz es un número"* (Stevin, 1585, p. 8, citado por Waldegg, 1996, p. 13);

sin embargo, matemáticos como Michael Stifel (1486?-1567) no les atribuía el carácter de números, pues para él los números eran o enteros o fraccionarios y obviamente, los irracionales no están incluidos en esta tipificación, esto en razón de que al representarlos como decimales no encontraba periodicidad; en términos de Stifel,

> (...) *otras consideraciones nos obligan a negar que los números irracionales sean números en absoluto. Esto es, cuando tratamos de someterlos a numeración... hallamos que se escapan continuamente, de forma que ninguno de ellos puede ser aprehendido precisamente en sí mismo .Por consiguiente, de la misma forma que un número infinito no es un número, un número irracional no es un número verdadero, sino que yace oculto en una especie de nube de infinitud* (Stifel, citado por Kline, op. cit., p. 337).[51]

[51] Esta nota indica, al parecer, que para Stifel, expresiones como 0,222… , además de los irracionales, no eran números.

Es así, como los matemáticos de los siglos XV y XVI, preferían en general, usar otras notaciones para los irracionales, por ejemplo, Cardano, Viète y el mismo Stifel[52] los representaban a la manera de los hindúes y los árabes, incluyendo cada vez, más expresiones como $\sqrt[3]{\frac{287}{2} - \sqrt{\frac{80449}{4}}}$, $\sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}}}$, entre otras.

Las fracciones continuas surgen, como una representación para algunos números irracionales cuadráticos, aunque ya habían sido usadas para representar números racionales siguiendo el algoritmo de la división de Euclides (Smith, Op. cit., pp. 418-419). La teoría moderna de las fracciones continuas es debida al algebrista italiano Rafael Bombelli (1526-1573), quien en el capítulo correspondiente a la raíz cuadrada en su *Álgebra* (1572) expone la fracción continua de $\sqrt{2}$ (Kline, op. cit., p. 341), en notación moderna:

$$\sqrt{2} = 1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{1}{2 + \dots}}}$$

O también se escribe como:

$$\sqrt{2} = 1 + \frac{1}{2+}\,\frac{1}{2+}\,\frac{1}{2+}\dots$$

Según cuenta Kline, Bombelli mostró otros ejemplos de cómo obtener fracciones continuas infinitas para otros irracionales cuadráticos, pero no se cuestionó si ellas convergían o no a los números dados. Y aunque Bombelli presentó tales fracciones continuas no es a él a quien se le atribuye la teoría sobre este tema, es Pietro Antonio Cataldi (1548-1626) quien se lleva los honores, aunque usó el mismo método de Bombelli, expresó otras raíces cuadradas como la de 18, así:

---

[52] Stifel trabajaba con números irracionales de la forma $\sqrt{a+\sqrt{b}}$.

$$4. \& \frac{2}{8.} \; \& \frac{2}{8.} \; \& \frac{2}{8.}$$

Un paso, un poco más importante en la evolución de las fracciones continuas es dado por Lord Brouncker quie n a partir de la fórmula dada por Wallis para π halla, no se sabe de qué manera, una expresión en fracción continua infinita del número π:

$$\frac{4}{\nu} = 1 + \cfrac{1}{2 + \cfrac{9}{2 + \cfrac{25}{2 + \cfrac{49}{2 + \ldots}}}}$$

El primer escrito importante acerca de este tema fue elaborado por Euler en 1737, en el cual representa como fracción continua infinita el número *e*, número del cual hablaremos más adelante. Lagrange y Galois fueron los últimos matemáticos que aportaron a la teoría de las fracciones continuas[53].

3.1.3. ***TERCERA ETAPA: Distinción de los números trascendentes.***

A mediados del siglo XVII, el panorama en cuanto a los números irracionales no era muy alentador; aún no había algún acuerdo respecto a si éstos eran o no números, ni mecanismos para estudiarlos, caracterizarlos u operar con ellos. Aunque los cálculos con números irracionales se efectuaban con cierta libertad, el problema de si tales expresiones eran realmente números, era aún fuente de inquietud en la comunidad matemática de la época. Durante los siglos XVII y XVIII se presentaron diversos contrastes y posiciones encontradas, que contribuyeron notablemente al desarrollo de las matemáticas, especialmente de la aritmética, el álgebra y el análisis y que, finalmente, generaron el ambiente propicio para la consolidación del concepto de número real.

[53] Para mayor información, consultar en la bibliografía de SMITH, D., op. cit., p. 421.

Para un selecto grupo de matemáticos, entre quienes pueden señalarse el francés Blaise Pascal (1623–1662) y el inglés Isaac Barrow (1630–1667), los números irracionales no eran aceptados como tales, sino como magnitudes geométricas: "*los números irracionales son meros símbolos que no tienen existencia independiente de la magnitud geométrica continua, y la lógica de las operaciones con números irracionales debe justificarse por el método eudoxiano de las magnitudes*" (Pascal, citado por Romero, op. cit., p. 52).

Este punto de vista se mantuvo, por lo menos un siglo más, como puede observarse en la *Aritmetica Universalis*, del también matemático inglés y discípulo de Barrow, Isaac Newton (1642 – 1727), publicada en 1707, aunque, de cierta manera, acepta los irracionales como números:

> *Por número entenderemos, no tanto el conjuntos de unidades como la relación abstracta de cualquier magnitud hacia otra magnitud, tomada por nosotros como unidad. Los números los hay de tres tipos: entero, fraccionario e irracional. El número entero es aquello que se mide con unidades; el fraccionario, con partes múltiples de la unidad; los números irracionales no son conmensurables con la unidad* (Newton, citado por Kline, op. cit., p. 337).

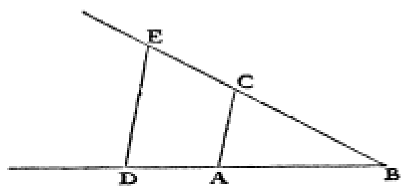
En contraste con estas afirmaciones, y junto al trabajo desarrollado por Stevin sobre los decimales, aparecen posiciones como las de Descartes (1596–1650) y Wallis (1616–1703), quienes admitían los números irracionales en su pleno sentido, con los cuales se pueden representar magnitudes continuas[54]. El matemático y filósofo francés René Descartes, en el segundo capitulo, titulado "*Cómo pueden efectuarse geométricamente la multiplicación, la división y la extracción de raíces cuadradas*", de su obra *La géométrie*, publicada como apéndice de su *Discours de la méthode* de 1637, presenta el segmento unidad desde un punto de vista diferente al de Euclides, no sólo como unidad de medida ó como unidad indivisible, sino como la unidad elemento neutro de la multiplicación, con lo cual cambia el papel de ésta en la teoría de las proporciones permitiendo la aceptación de los números racionales e irracionales, al menos los construibles, como tales; en términos de Descartes (1637, citado por Smith, 1954):

---

[54] WALLIS, J (1685), *Àlgebra* y DESCARTES, R (1628), *Reglas para la dirección del espíritu*.

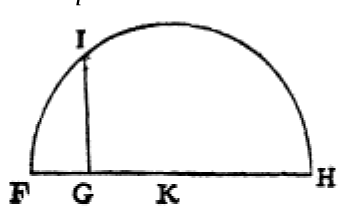
Cualquier problema en geometría puede ser fácilmente reducido a términos tales que un conocimiento de las longitudes de ciertas líneas rectas es suficiente para su construcción. Así como la aritmética consiste sólo de cuatro o cinco operaciones, a saber, adición, substracción, multiplicación, división y la extracción de raíces, la cual puede ser considerada una clase de división, así en la geometría, para encontrar líneas requeridas es simplemente necesario sumar o substraer otras líneas; o de otra parte, tomar una línea la cual llamaré unidad para relacionarla lo más cercanamente posible a los números, y la cual puede en general ser escogida arbitrariamente, y teniendo dadas otras dos líneas, encontrar una cuarta línea, que será a una de las líneas dadas como la otra es la unidad (lo cual es lo mismo que la multiplicación); O, de nuevo, encontrar una cuarta línea que es a una de las líneas dadas como la unidad es a la otra (lo cual es equivalente a la división); o finalmente, encontrar una, dos o varias medias proporcionales entre la unidad y alguna otra línea (lo cual es lo mismo que extraer la raíz cuadrada, raíz cúbica, etc., de la línea dada). Y yo no vacilaré en introducir estos términos aritméticos en la geometría, en el interés de obtener una mayor claridad.

Por ejemplo, tomemos AB como unidad, y que ella sea requerida para multiplicar BD por BC. Yo sólo tengo que unir los puntos A y C, y trazar DE paralela a CA, entonces BE es el producto de BD y BC.



Si se requiere dividir BE por BD, yo uno E y D, y trazo AC paralela a DE, entonces BC es el resultado de la división.

Si se desea la raíz cuadrada de GH, yo adiciono a lo largo de la misma la misma línea recta, FG igual a la unidad; entonces bisecando FH en K, describo el círculo FIH tomando a K como centro, y trazo desde G una perpendicular que se extienda hasta I, y GI es la raíz requerida.



Yo no hablo aquí de raíz cúbica, o de otras raíces, ya que después hablaré de ellas más convenientemente.

También aparecen los intentos de matemáticos, como Viète, Wallis y Euler, por obtener mejores aproximaciones y demostrar la irracionalidad de ciertos números

Es importante resaltar de esta época, el paulatino avance en la imposición del álgebra sobre la geometría. En la obra *Tractatus de sectionibus conicis*, de 1655, Wallis "*reemplazó sistemáticamente los conceptos geométricos por conceptos numéricos en todas las partes en que ello fuera posible*" (Boyer, op. cit., p. 478) y en su *Álgebra*, de 1685, dedujo algebraicamente todos los resultados del libro V de los Elementos de Euclides, el gran bastión de la geometría antigua. Así, hacia el siglo XVIII, el álgebra había ganado su reconocimiento como una rama fundamental de las matemáticas y era empleada con cierta confianza, pese a la carencia de fundamentos lógicos como los de la geometría; este elemento fue importante en el proceso de aceptación y manipulación de los números reales.

Las ideas respecto a los números reales, se fueron transformando durante estos dos siglos, con la aparición de los números trascendentes y la distinción entre tipos de irracionales. No obstante, el problema de fundamentar lógicamente el sistema numérico, constituido con los nuevos tipos de números (irracionales y enteros) además de los números naturales y de las fracciones, era un trabajo difícil que habría de aguardar hasta el siglo XIX para tomar la forma que hoy conocemos.

3.1.3.1. Las series como aproximación a algunos números irracionales.

El problema de la cuadratura del círculo instó a varios matemáticos a calcular el valor de la razón entre una circunferencia y su diámetro, el número π, obteniendo, por diversos métodos, mejores aproximaciones, desde épocas muy antiguas y en varias civilizaciones[55]. No obstante, estas proezas de cálculo no tienen mayor significado teórico, por cuanto no se obtiene una expresión numérica exacta para π.

El primer matemático que dio un paso en esta dirección fue el francés François Viète (1540–1603), miembro del consejo real de Enrique III y Enrique IV y dedicado a las matemáticas en sus ratos de ocio. Viète fue el primero que obtuvo una expresión analítica

[55] Se tienen datos de aproximaciones de π en el papiro de Rhind, que data de 1700 años A. C., pasando por Grecia (Arquímedes), China (Liu-Hu), India (Bhaskara) y Europa en la edad media (Fibonacci de Pisa).

para π, como un producto infinito, que "*se puede obtener fácilmente inscribiendo un cuadrado en un círculo dado y aplicando la fórmula trigonométrica recursiva* $a_{2n} = a_n \sec \frac{\pi}{n}$*, donde* a_n *es el área del polígono regular inscrito de n lados, y haciendo finalmente crecer n indefinidamente*." (Ibid., p. 407):

$$\frac{2}{\pi} = \cos\frac{90}{2}\ \cos\frac{90}{4}\ \cos\frac{90}{8}.$$

De donde:

$$\frac{2}{\pi} = \sqrt{\frac{1}{2}}\cdot\sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}}}\cdot\sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}}}}\ .$$

La importancia de este resultado radica en el cambio sustancial de abordar lo infinitamente pequeño desde la aritmética, el álgebra y la trigonometría, y no únicamente con la geometría, como se hacía desde la época de los griegos, con lo cual, Viète se aproximó a un punto de vista más moderno en el estudio de las matemáticas.

Tan importante como este reconocimiento, es la obra de John Wallis, sin duda el matemático inglés más brillante, anterior a Newton. En su *Aritmética infinitorum*, de 1655, se encuentra una aproximación de π como un producto infinito, uno de sus resultados más conocidos, en su intento por encontrar la cuadratura del círculo:

$$\frac{2}{\pi} = \frac{1\cdot 3\cdot 3\cdot 5\cdot 5\cdot 7\cdot}{2\cdot 2\cdot 4\cdot 4\cdot 6\cdot}$$

basada, seguramente, en el uso de sus principios de inducción e interpolación, aplicados a la integral $\int_0^1 \sqrt{1-x^2}\,dx$. Sin embargo, este resultado no lo dejó del todo satisfecho, pues por ser un producto infinito, realmente no obtenía un valor exacto[56].

Es de resaltar en este siglo, la discusión entre Huygens y Gregory acerca de la posibilidad de expresar π algebraicamente. El escocés James Gregory (1638 – 1675) en su obra *Vera circuli hyperbolae quadrature*, amplió el algoritmo de Arquímedes a la cuadratura de elipses e hipérbolas y encontró una sucesión para las áreas inscritas y otra para las circunscritas, ambas convergentes al área de la región deseada, obteniendo de esta manera una buena aproximación de estas cónicas. Con este procedimiento intentó demostrar la imposibilidad de cuadrar el círculo por métodos algebraicos. A raíz de esto surgió una "rivalidad" con Huygens, quién consideraba que π podía expresarse algebraicamente; poniendo en cuestión, de paso, los métodos de Gregory. El asunto fue resuelto dos siglos después al demostrarse la trascendencia de π, en contra posición con las afirmaciones de Huygens.

En el siglo XVIII, las series fueron consideradas como un tema de estudio fundamental del cálculo infinitesimal. Una de las principales aplicaciones de las series consistió en el cálculo de números especiales como π y *e*; tal es el caso de la famosa expresión:

$$\frac{\pi}{4}=1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\frac{1}{7}+\frac{1}{9}-$$

obtenida por Leibniz en 1674[57].

Entre los matemáticos más importantes que realizó trabajos en esta dirección, se encuentra el suizo Leonard Euler (1707–1783), el genio tuerto de las matemáticas, nacido en Basilea y amigo y compañero de estudio de los Bernoulli, aunque la mayor parte de su trabajo lo desarrolló en Rusia, como maestro en la academia de San Petersburgo.

[56] Como ya se mencionó en el numeral anterior, William Brouncker (1620 – 1684), obtuvo una expresión para π con una fracción continua infinita, manipulando la expresión obtenida por Wallis.
[57] Realmente esta expresión no es muy útil, pues para obtener una aproximación de π, con la precisión de la obtenida por Arquímedes, se requerirían unos 100000 términos de la serie.

Euler es conocido como uno de los más grandes matemáticos de la historia, gran calculista, escritor[58] y estudioso de diversas ramas de las matemáticas, entre ellas, topología, álgebra y análisis. A él se debe la popularización del símbolo *e* para el "número cuyo logaritmo hiperbólico es igual a 1", la base del sistema de logaritmos naturales, y de π, para la razón de la circunferencia al diámetro[59].

Pero, su trabajo más destacado es en el estudio de las series infinitas, su convergencia o divergencia y, en particular, el uso de éstas para expresar algunos números irracionales. Entre los resultados obtenidos por Euler se encuentra la expresión:

$$\nu = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} - \frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8} + \frac{1}{9} - \frac{1}{10} +$$

donde el signo del término se determina así: si el denominador es primo de la forma $4m + 1$, el signo es menos, si es primo de la forma $4m - 1$, el signo es más y si es compuesto, el signo es el resultado del producto de los signos de sus factores primos.

Euler, aplicando injustificadamente reglas para polinomios finitos a polinomios infinitos, obtuvo resultados como

$$\frac{1}{6} = \frac{1}{\nu^2} + \frac{1}{(2\nu)^2} + \frac{1}{(3\nu)^2} + \qquad \text{o} \qquad \frac{\nu^2}{6} = \frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} +$$

fórmulas que habían burlado los esfuerzos de los hermanos Bernoulli, años atrás. De manera análoga descubrió otras expresiones; en su *Introduction in analysis infinitorum*, de 1748, aparecen los siguientes resultados:

---

[58] Se calcula que las obras conocidas de Euler abarcan unos 866 trabajos; tanto así, que casi medio siglo después de su muerte seguían publicándose memorias matemáticas inéditas de él, producía, en promedio, unas 800 páginas anuales de investigación matemática, a pesar de quedar tuerto a los 28 años y ciego totalmente, los últimos 17 años de su vida.

[59] Este símbolo fue usado por primera vez en 1706 por William Jones, para expresar la razón mencionada

$$\frac{1}{1^2}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{5^2}+ \quad =\frac{\pi^2}{8}$$

$$\frac{1}{1^3}+\frac{1}{3^3}+\frac{1}{5^3}+ \quad =\frac{\pi^3}{32}$$

$$\frac{1}{1^4}+\frac{1}{3^4}+\frac{1}{5^4}+ \quad =\frac{\pi^4}{96}$$

$$\frac{1}{1^5}+\frac{1}{3^5}+\frac{1}{5^5}+ \quad =\frac{5\pi^5}{1536}$$

$$\frac{1}{1^6}+\frac{1}{3^6}+\frac{1}{5^6}+ \quad =\frac{\pi^6}{960}$$

$$\frac{1}{1^2}+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{4^2}+ \quad =\frac{\pi^2}{90}$$

$$\frac{1}{1^4}+\frac{1}{2^4}+\frac{1}{3^4}+\frac{1}{4^4}+ \quad =\frac{\pi^4}{6}$$

$$\frac{1}{1^2}-\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}-\frac{1}{4^2}+ \quad =\frac{\pi^2}{12}$$

obtenidos a partir de las series de potencias para el seno y el coseno, y relacionando las raíces y coeficientes de una ecuación algebraica, con el polinomio de grado infinito

$$1-\frac{x}{y}+\frac{x^3}{3!y}-\frac{x^5}{5!y}+ \quad =0$$

Por otra parte, Euler demostró la manera de sumar un número finito de términos de la serie armónica, empleando para ello la función logarítmica. Tomó como punto de partida la fórmula:

$$\log\left(1+\frac{1}{x}\right)=\frac{1}{x}-\frac{1}{2x^2}+\frac{1}{3x^3}-\frac{1}{4x^4}+$$

con lo cual,

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\quad+\frac{1}{n}=\log(n+1)+C$$

esta C es conocida como constante de Euler, la sexta constante matemática importante, notada con la letra griega γ y definida por las expresiones

$$\psi = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\quad+\frac{1}{n}-\log n\right),$$

$$\psi = \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n^{x}}-\frac{1}{x^{n}}\right),$$

$$\psi = -\int_{0}^{\infty} e^{-x}\, Ln\, x\, dx\,,$$

constante de la cual aún no se sabe si es racional o irracional, pese a que una cifra tan complicada como γ no parece racional[60]; de hecho, el mismo Euler señaló que determinar el carácter de γ era un asunto importante; no obstante, este asunto sigue siendo un problema no resuelto, "*su irracionalidad universalmente aceptada, no ha sido demostrada*" (Dunham, 1999).

3.1.3.2. Demostraciones de irracionalidad y trascendencia.

Durante el siglo XVIII, se dieron eventos importantes en camino de la aceptación de los números irracionales, aunque no hubo mayores avances para formalizar el concepto de número irracional. Los números irracionales, nunca introducidos adecuadamente en el mundo matemático, fueron ganando su espacio entre la comunidad matemática de la época, aunque nadie se preocupó realmente por su fundamentación lógica, porque las propiedades de las

[60] Las primeras diez cifras de γ son 0,5772156649. Se han calculado cientos de cifras de este número, pero no se conoce alguna otra expresión analítica más simple; por ejemplo, el geómetra italiano Lorenzo Mascheroni (1750-1800), quien introdujo el símbolo γ para este número, lo cálculo con 19 cifras decimales precisas, en su obra *Adnotaciones ad calculum integrale Euleri*, y F. B. G. Nicolai (1793-1846) calculó el valor de γ con 40 cifras decimales exactas. (Dunham, 1999)

operaciones eran intuitivamente seguras y evidentes para los números conocidos (racionales) y fácilmente se extendían para los nuevos números y además, porque no tenían herramientas teóricas para abordarlos; en lugar de esto, el interés se centró en la demostración de la irracionalidad de ciertos números.

Euler, en un artículo titulado *De fractionibus continuis* (1744), dedujo que todo número racional se puede expresar como una fracción continua finita y probó, sustancialmente, que e y e^2 son irracionales, mostrando que éstos se pueden expresar con fracciones continuas infinitas, así:

$$e-1=1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{4+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{6+\cfrac{1}{1+}}}}}}}}}$$

$$\frac{e+1}{e-1}=2+\cfrac{1}{6+\cfrac{1}{10+\cfrac{1}{14+}}}$$

A partir del trabajo de Euler con fracciones continuas, el matemático suizo-alemán Johann Heinrich Lambert (1728–1777) demostró que si x es un número racional diferente de cero, e^x y $\tan x$ no son racionales. Que e^x sea irracional, lleva a que el logaritmo natural de un número racional sea irracional y, que $\tan x$ sea irracional lleva a que $\frac{\pi}{4}$ y π no sean racionales; resultados demostrados, también por Lambert, en 1761.

En 1768, Joseph Louis Lagrange (1736 – 1813) demostró que una raíz real de una ecuación cuadrática es una fracción continua infinita periódica, con lo cual se puede demostrar la irracionalidad de los números irracionales cuadráticos, encontrando su fracción infinita.

El matemático francés Adrien-Marie Legendre (1752 – 1833) conjeturó que π no podía ser la raíz de una ecuación polinómica de grado *n* con coeficientes racionales. Dicha observación llevó a una distinción entre tipos de números irracionales; por una parte, los números algebraicos, raíces de una ecuación algebraica con coeficientes racionales, y por la otra, los números trascendentes, denominados de esta manera por Euler en 1744, por "*trascender el poderío de los métodos algebraicos*". Pese al reconocimiento de esta distinción, no se conocía algún número trascendente a finales del siglo XVIII y ni siquiera se había mostrado su existencia, salvo algunas conjeturas de Legendre y Euler[61].

En 1873, Cantor escribió una carta a Dedekind donde planteaba la posibilidad de que el conjunto de los números reales fuera numerable, pero en 1874 presentó dos demostraciones mediante las cuales mostraba lo contrario. Basado en esto, se demuestra que si el conjunto de los números reales no es numerable y el conjunto de los números algebraicos sí lo es, entonces deben existir números no algebraicos, los llamados números trascendentes, y además deben ser mucho más numerosos que los algebraicos, puesto que su unión con los algebraicos nos completan los números reales. Esta demostración, aunque garantiza la existencia de los números trascendentes, no muestra algún número trascendente.

El matemático francés Charles Hermite (1822 – 1901) demostró, en 1873, que *e* es trascendente, pero no demostró la trascendencia de π, por considerarlo un trabajo que requería gran esfuerzo. Esta trascendencia fue finalmente demostrada en 1882, por el matemático alemán Ferdinand Lindemann (1852–1939) en el artículo titulado "*Über die Zahl*

[61] Euler conjeturó que el logaritmo de una base racional debía ser racional o trascendente. (Kline, Op. cit.)

ν', cerrando además, cualquier posibilidad de encontrar la cuadratura de un círculo, pues todos los números construibles son algebraicos y π no entra en este conjunto[62].

En el congreso internacional de matemáticas de 1900, celebrado en Paris, Hilbert presentó un listado de 23 problemas importantes que deberían ocupar la atención de los matemáticos durante el siglo XX. En el problema siete, relacionado con números trascendentes, Hilbert pregunta si el número α^{β}, con α algebraico diferente de cero y uno y β irracional cuadrático, es un número trascendente[63]. En 1934 el matemático Alexander Osipovich Gelfond (1906–1968) resolvió el problema y la demostración de la trascendencia de este número se conoce como teorema de Gelfond. Empleando este teorema con la expresión

$$e^{\nu} = \frac{1}{e^{-\nu}} = \frac{1}{i^{2i}}$$

se demuestra que e^{π} es trascendente; sin embargo, la trascendencia de e^{e}, π^{π}, π^{e} y, en general, de α^{β}, para α y β trascendentes, aún no se ha podido demostrar (Ibid., p.749)

La aparición de los números trascendentes trajo consigo conclusiones importantes en la comprensión de los números irracionales, el descubrimiento de que los números algebraicos son sólo una clase particular frente a la cantidad inmensa de los números trascendentes y la intención de integrar estos números, racionales e irracionales o algebraicos y trascendentes, en una sola entidad, es decir un solo tipo de número, idea que sería, materializada y formalizada de manos de matemáticos como Cantor, Cauchy, Dedekind, Weierstrass y Hilbert, hacia finales del siglo XIX, con sus teorías de los números reales.

---

62 Las demostraciones de Hermite y Lindemann son complicadas; en ellas se hace uso de la famosa identidad $e^{i\nu}+1=0$, atribuida a Euler. Dichas demostraciones pueden verse en NIVEN, I., *Números racionales e irracionales*, The Carus mathematical monographs, The mathematical association of America, 1967, pp. 124-131 y 142-149.

63 "*En forma geométrica alternativa, Hilbert expresó esto mismo preguntando si en un triángulo isósceles la razón de la base a uno de los lados iguales es trascendente, si se sabe que la razón del ángulo opuesto a la base del ángulo básico es algebraica e irracional* " (Boyer, op. cit., p. 749)

3.1.4. CUARTA ETAPA: Formalización del número real.

El desarrollo del álgebra y el análisis durante el siglo XIX, al margen de una estructuración clara y precisa de los números reales, llevaba a una falta de rigor en sus teorías; cuestiones como el estudio de los límites, la continuidad de funciones y las aproximaciones por series de Fourier requerían una comprensión de los números reales y sus propiedades, para justificar, en forma detallada y suficiente, teoremas y demostraciones relacionadas con dichas cuestiones; esta es una de las razones que implicaría un enorme esfuerzo, de parte de prestigiosos matemáticos, por la formalización de los números reales.

Otra razón que motivaría a los matemáticos a fundamentar los números reales, "*fue el deseo de asegurar la verdad de la matemática. Como consecuencia de la creación de las geometrías no euclídeas, la geometría había perdido su status de verdad, pero parecía todavía que la matemática construida sobre la aritmética ordinaria debía ser una realidad incuestionable en cierto sentido filosófico*" (Kline, op. cit., p. 1293).

Un primer intento de reducir el análisis a la aritmética fue desarrollado por Martin Ohm (1792–1872) en su obra *Versuch eines vollständing konsequenten Systems der Mathematik*; sin embargo, la falta de confianza en el manejo de operaciones con series infinitas y la preocupación por una definición precisa del número real, retrasó este proceso de aritmetización y, en consecuencia, se requería una teoría de los números reales que se constituyera en la base aritmética del análisis y el álgebra.

En 1867, Hermann Hankel (1839–1873), alumno de Riemann y profesor en Leipzig, publicó un libro, titulado *Theorie der komplexen zahlensysteme*, donde plantea que "*la condición para construir una aritmética universal es por lo tanto la de una matemática puramente intelectual, separada de todo tipo de percepciones sensibles*" (Boyer, op. cit., p. 693); efectivamente, y al igual que con la geometría[64], sólo cuando los matemáticos consideraron los números reales como *estructuras intelectuales* –no reales, en el sentido de

[64] La revolución de la geometría, y con ella la aparición de las geometrías no euclidianas, de manos de matemáticos como Gauus, Lobachewsky y Bolyai se dio gracias a la liberación de las ideas intuitivas del espacio, preconcebidas desde los griegos.

concretas físicamente- y no como las magnitudes intuitivas de Euclides, se logró la aritmetización plena y correcta del análisis.

A finales del siglo XIX, específicamente en 1872, aparecen las teorías formales sobre los números reales, desarrolladas y publicadas por el francés Charles Meray (1835–1911) y los alemanes Karl Weierstrass (1815–1897), Eduard Heine (1821–1881), Georg Cantor (1845–1897) y Richard Dedekind (1831–1916), presuponiendo, para ello, una comprensión del significado y propiedades de los números racionales, a partir de los cuales caracterizaron los números irracionales, los que realmente suponían la principal dificultad en la estructuración formal del número real.

3.1.4.1. El tránsito hacia la formalización.

Una primera idea acerca del número real fue publicada por uno de los más grandes matemáticos, el francés Agustín-Louis Cauchy (1789-1857), en 1821, en el *Cours*, donde afirmaba que, *"(...) un número irracional es el límite de diversas fracciones que toman valores cada vez más aproximados a él"*, lo cual fue interpretado como una definición de los números irracionales a partir de la noción de límite (Kline, Op. cit., p. 1255) y utilizada por varios matemáticos de la época para relacionar límite con número irracional, lo cual, después de 48 años fue señalado por Méray como un grave *lapsus* de razonamiento, al definir "*el límite de una sucesión como un número real y después, a su vez, definir un número real como el límite de una sucesión de números racionales*" (Boyer, op. cit., p. 693).

Alrededor de 1830, Bernhard Bolzano, a partir del límite de sucesiones de números racionales, hizo un intento para axiomatizar los números reale s y logró establecer la existencia de una cota superior mínima para un conjunto acotado de números reales[65]; su trabajo no fue reconocido, quizá porque, *"si el límite es irracional no tiene existencia lógica hasta que se hayan definido los números irracionales"* (Kline, op. cit., p. 1297).

---

65 Teorema base del que hoy se conoce como el Teorema Bolzano-Weierstrass: "todo conjunto acotado S que contenga infinitos elementos (tales como puntos o números), tiene al menos un punto de acumulación o punto límite"(Boyer, Op. cit., p. 692)

Sin embargo, el primer matemático en divulgar una construcción para los números irracionales fue Sir William Hamilton, quien leyó dos artículos, uno en 1833 y otro en 1835, ante la Royal Irish Academy, artículos que fueron publicados posteriormente con el título *Álgebra as the science of pure time*; en ellos definió los números irracionales como una partición de números racionales (como los definió Dedekind posteriormente); pero no culminó su trabajo.

En 1869, Charles Méray publicó un artículo; en él definió los números reales basado en los números racionales, constituyéndose ésta en la primera teoría sobre los números reales, y precisada en 1872, en su obra *Nouveau precis d'analyse infinitésimale* .

En el mismo año (1872), aparece una obra de H. Kossak, quien trató de presentar la teoría de Karl Weierstrass, sobre los números reales, pero él la desaprobó. Fueron Ferdinand Lindenmann y Eduard Heine quienes dieron a conocer las ideas de Weierstrass, ya que habían sido sus alumnos en Berlín, lugar donde este famoso matemático había dado, en sus clases, una teoría de los números irracionales, desde 1859. Weierstrass, al igual que Méray, se dio cuenta de que para fundamentar el análisis únicamente en el concepto de número, necesitaba definir los números irracionales independientemente del concepto de límite; así, los define, de una manera general, como *conjuntos de racionales más que como meras sucesiones ordenadas*.(Boyer, op. cit., p. 694).

George Cantor había iniciado, en 1871, un trabajo sobre la aritmetización, similar a los de Weierstrass y Méray, al cual Heinrich Heine aportó algunas ideas que conllevaron la presentación de un artículo publicado por Heine en el *Journal für Mathematik*, en 1872, titulado *Die Elemente der Funktionenlehre*, en el cual se expone el trabajo desarrollado por Cantor y Heine. La teoría, es similar a la Méray, soportada en el conjunto de los números racionales, con base en el cual forma *sucesiones fundamentales* y una relación de equivalencia entre ellas; esto le permite definir los números irracionales y en términos generales, números reales[66].

[66] Para ver una explicación un poco más amplia sobre estas teorías, la de Weierstrass y Cantor, ver: SÁNCHEZ, C., *La construcción de los números reales*, XIV Coloquio Distrital de Matemáticas y Estadística, UPN, Bogotá, 1997, pp. 8-12

Una teoría de los números reales, esencialmente distintas a las hasta ahora enunciadas[67], fue presentada en el mismo año (1872) por Richard Dedekind, quien la publica en su libro *Stetigkeit und irrationale Zahlen* (en castellano, *Continuidad y números irracionales*); la teoría de Dedekind es la más sistemática, la más abstracta y a su vez, la más simple de las presentadas. Ella demuestra que todo teorema del álgebra, puede expresarse como un teorema sobre números naturales.

Las teorías de Cantor y Dedekind están basadas en las operaciones de los números racionales; ambas construyen los números reales con entes compuestos de infinitos elementos, ambas comparan la geometría con la aritmética, ambas comparten la idea de que la continuidad del espacio no se puede demostrar y por tanto debe tomarse como axioma.

Las construcciones de Weierstrass, Cantor-Heine y Méray, comparten el uso de las series o las sucesiones para la construcción de los números irracionales, mientras que Dedekind usa conjuntos y orden. Las sucesiones son objetos con una estructura más compleja que las cortaduras, y en el caso de las *sucesiones fundamentales* se presuponen también ciertas propiedades topológicas.

Aunque todas las construcciones de los números reales son equivalentes, si las construcciones de Cantor, Weierstrass y Dedekind se hacen usando un conjunto distinto al de los números racionales, los resultados ya no coinciden.

3.1.4.2. Construcción de los números reales como límite de sucesiones de números racionales: Cauchy-Méray.

Como ya se enunció, Cauchy definió el límite de una sucesión como un número real y el número real como el límite de una sucesión de números racionales; es decir, identifica el número real con el valor al cual converge la sucesión; sin embargo, en la actualidad se encuentra una presentación de los números reales atribuida a él, en la cual se asocia el

[67] Salvo a la iniciada por Hamilton.

número real a la sucesión misma, pero tal vez[68], esta precisión es realizada posteriormente por Méray quien utilizó solamente el criterio Bolzano-Cauchy[69],

> *En un sentido general, Méray consideraba que una sucesión convergente determinaba o bien un número racional como límite o un"número ficticio" como su "límite ficticio". Estos números ficticios pueden ordenarse, como demostraba, y son esencialmente lo que conocemos como los números irracionales. Méray no es muy preciso acerca de si su sucesión convergente es o no el número mismo* (Ibid., p. 694).

Esta construcción de números reales está basada en sucesiones de Cauchy de números racionales, fundamentadas en la teoría de convergencia de sucesiones de números.

Una sucesión, digamos $\{x_n\}$, es de Cauchy en el conjunto de los números racionales si y sólo si para todo $\varepsilon > 0$, ε racional, se puede encontrar un número entero $N > 0$ tal que si $m > N$, $n > N$, entonces $|x_n - x_m| < \varepsilon$, criterio equivalente a la definición usual de convergencia de sucesiones[70], que enuncia:

Una sucesión $\{x_n\}$ converge a un número real[71] l, si y sólo si para todo $\varepsilon > 0$, existe $N > 0$ tal que si $n \geq N$ entonces $|x_n - l| < \varepsilon$.

Como ya se indicó, las sucesiones consideradas por Cauchy eran de números racionales; sin embargo, el número al cual convergen no es necesariamente un número racional; por ejemplo:

$$1, \frac{3}{2}, \frac{7}{5}, \frac{17}{12}, \ldots, \frac{a_{n+1} + 2b_{n-1}}{a_{n-1} + b_{n-1}}, \ldots \quad \text{donde } a_1 = b_1 = 1$$

---

[68] Esta construcción no aparece reconocida en los libros consultados de historia de la matemática ni en textos afines, pero si es presentada en libros de análisis matemático o cálculo como construcción de Cauchy (Spivak, 1996, p. 825; Lelong, 1980, pp. 2 - 9)

[69] El criterio Bolzano-Cauchy, conocido como Criterio de Cauchy para series, enuncia que *"La serie* Σa_n *converge si y sólo si, para cada ϒ: > 0 existe un entero N tal que n > N implica que* $|a_{n+1} + \ldots + a_{n+p}| <$ *ϒ:, para cada p* = 1, 2, …*"* (Apóstol, 1977, p. 227)

[70] Para la demostración de esta equivalencia, ver, por ejemplo, Donado A., et al. (1997) *Sucesiones de números reales*, Universidad Pedagógica Nacional, o Lelong (1980)

[71] Pues el conjunto de los números reales es completo.

converge a $\sqrt{2}$. Así, toda sucesión de Cauchy de números racionales converge a un número real, incluso, dos o más sucesiones pueden converger a un mismo número real; esto es:

$$\left\{2, 3, \frac{8}{3}, \frac{30}{11}, \frac{144}{53}, \ldots\right\} \text{ converge a } e \text{, al igual que } \left\{2, \frac{5}{2}, \frac{16}{6}, \frac{65}{24}, \frac{326}{120} \ldots\right\}$$

de hecho, es posible hallar infinitas sucesiones que convergen a un mismo número. Con base en esto, es necesario determinar cuándo dos de estas sucesiones son equivalentes; es decir, convergen al mismo número real, para ello se enuncia, en términos modernos, que:

$\{x_n\} \approx \{y_n\}$ si y sólo si para todo $\varepsilon > 0$, ε racional, se puede encontrar un número entero $N > 0$ tal que para $n > N$, entonces $|x_n - y_n| < \varepsilon$.

De donde se define el conjunto de los números reales como aquel formado por las clases de equivalencia determinadas por la anterior relación; en otras palabras, un número real es una familia de sucesiones de Cauchy equivalentes entre sí; simbólicamente, si α es un número real al que convergen una clase de sucesiones, de las cuales se elige como representante a la sucesión $\{x_n\}$, se escribe $\alpha = [\{x_n\}]$.

Si $\alpha = [\{x_n\}]$ y $\beta = [\{y_n\}]$ son números reales, $\alpha + \beta = [\{x_n + y_n\}]$ y $\alpha \times \beta = [\{x_n \times y_n\}]$

de manera análoga se define el producto. Con base en estas definiciones, las propiedades de los números racionales y de las sucesiones, se demuestran las propiedades de los números reales, con dichas operaciones.

3.1.4.3. Construcción de Weierstrass.

Weierstrass, al igual que Méray consideraba que la definición de número irracional debía ser independiente del concepto de límite, identificando para ello una sucesión convergente con el número límite; afirma que un número no es el límite de una sucesión $\{a_n\}$ sino es la sucesión misma asociada a la serie Σa_n.

Más precisamente, Weierstrass parte de un conjunto de números racionales, al que denomina un agregado, de tal forma que al sumar cualquier cantidad de elementos del conjunto, su suma no supera un límite dado (Romero, op. cit., p.62). Podemos decir que esta construcción es similar a de Méray y las diferencias con ella son sutiles.

3.1.4.4. Construcción de Cantor-Méray-Heine: intervalos encajados

Una construcción, también basada en sucesiones de números racionales, es debida a Cantor, que como ya se indicó, fue quien inventó una teoría, similar a la propuesta por Méray, basándose en la de Cauchy; sin embargo, Heine la publicó haciendo algunas simplificaciones, por ello hacemos tal reconocimiento. Cantor define número real a partir de clases de equivalencia de intervalos encajados, basándose en sucesiones de números racionales, así: *Un par de sucesiones monótonas contiguas*[72] *de números racionales definen un número real* $\alpha = \{a_i; a'_i\}$, *con la condición de que* $\{a_i; a'_i\} = \{b_j; b'_j\}$, *si* $a_i \leq b'_j$, $b_i \leq a'_j$ *para cualquier par de subíndices i, j.* (Rey, 1958, p. 100, pie de página nuestro).

donde, dos *sucesiones monótonas son contiguas* si, para un par de sucesiones cualesquiera de números racionales, se cumplen las siguientes tres condiciones:

i) Una de las sucesiones es monótona creciente, digamos $\{a_i\}$, y la otra, $\{a'_i\}$, es monótona decreciente.
ii) Para todo a_i, se tiene que $a_i < a'_i$.
iii) $a'_i - a_i < \varepsilon$, para cualquier número positivo ε, a partir de algún i.

Con dichas condiciones tenemos que los términos correspondientes en cada una de las sucesiones determinan intervalos encajados $I_i = \{a_i; a'_i\}$, tales que su amplitud puede ser tan

[72] La presentación de la teoría de Cantor para los números reales expuesta aquí, a partir de sucesiones monótonas contiguas, es la versión actual de dicha teoría, debida, en parte, a exposiciones de R. Lipschitz (1877), C. Arzelà (1883) y P. Bachmann (1892) (Pastor, 1958, p. 106).

pequeña como se desee para algún *i* suficientemente grande, como se muestra en la siguiente figura:

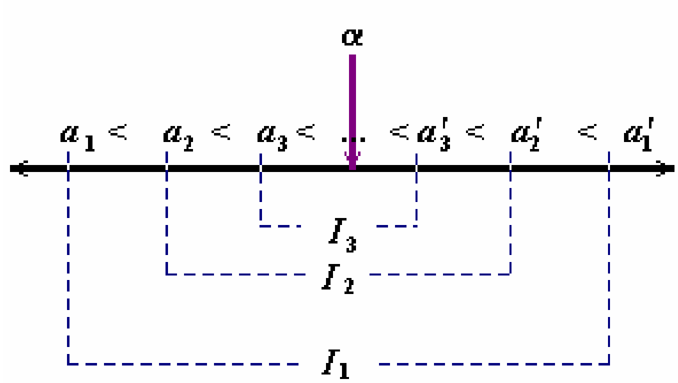


Figura 10

Y existe un único número α, mayor o igual a cada uno de los a_i y, a su vez, menor o igual a cada uno de los a'_i, de cada uno de los intervabs encajados definidos por las sucesiones, que bien puede ser un número racional o no, lo cual llevó a Cantor a la creación del número irracional y con ésta, a la definición de número real. Precisamente en esta sutileza se encuentra la esencia de la continuidad, conocido como postulado de continuidad de la recta: *Dada una sucesión de intervalos encajados* $I_i = \{a_i;\ a'_i\}$*, existe siempre un punto* α *perteneciente a todos ellos*. (Ibid., p. 101)

En palabras de Cantor:

> *Si esta distancia tiene una relación racional con la unidad de medida, entonces se expresa mediante una cantidad numérica en el dominio A [de los racionales]; en otro caso, si el punto se conoce a través de la construcción, siempre es posible dar una sucesión* $a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$*, que tenga la propiedad* lím $(a_{n+m} - a_n) = 0$[73] *y que se relacione con la distancia en cuestión de tal manera que los puntos de la recta a los que se asignan las distancias* $a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$ *se aproximan infinitamente al punto a determinar, conforme n aumenta. Esto lo expresamos diciendo la distancia desde el punto 0 al punto a determinar, es igual a b, donde b es la cantidad correspondiente a la sucesión. Para completar la conexión presentada en el dominio de las cantidades con la geometría de la línea recta, sólo debemos añadir un axioma que simplemente diga que,*

[73] Esta propiedad corresponde a la condición iii), enunciada para las sucesiones monótonas contiguas.

recíprocamente, toda cantidad numérica también tiene un punto determinado de la recta, cuya coordenada es igual a esa cantidad (en el sentido que hemos precisado más arriba). Llamo a esta proposición axioma porque su naturaleza no puede ser universalmente probado (Cantor, citado por Crossley, 1987, p. 147, el pie de página es nuestro)

El número real 0 es un punto fijo sobre la recta que determina dos direcciones sobre ella, una positiva y una negativa, de tal manera que las aproximaciones por defecto son negativas y las aproximaciones por exceso son positivas. Un número $\alpha = \{a_i; a'_i\}$ es positivo ($\alpha > 0$), si existe $a_i > 0$ para algún i, y negativo ($\alpha < 0$), si existe $a'_i < 0$ para algún i y $\alpha > \beta$ si $\alpha - \beta > 0$.

Finalmente, y a partir de lo anterior, se definen las operaciones como sigue: Para dos números reales cualesquiera, $\alpha = \{a_i; a'_i\}$ y $\beta = \{b_i; b'_i\}$,

$\alpha + \beta$ corresponde al número $\gamma = \{a_i + b_i; a'_i + b'_i\}$

$\alpha \times \beta$ corresponde al número

$$\gamma = \{a_i \times b_i;\ a'_i \times b'_i\},\ \text{si } \alpha > 0 \ \text{ y } \beta > 0$$
$$\gamma = -\{|a'_i| \times b_i;\ |a_i| \times b'_i\},\ \text{si } \alpha < 0 \ \text{ y } \beta > 0$$
$$\gamma = -\{a_i \times |b'_i|;\ a'_i \times |b_i|\},\ \text{si } \alpha > 0 \ \text{ y } \beta < 0$$
$$\gamma = \{|a'_i| \times |b'_i|;\ |a_i| \times |b_i|\},\ \text{si } \alpha < 0 \ \text{ y } \beta < 0$$
$$0,\ \text{si } \alpha = 0 \ \text{ o } \ \beta = 0$$

Y con base en estas definiciones, se verifican las propiedades algebraicas y de orden, de los números reales; la completez se da con el axioma de continuidad de Cantor.

3.1.4.5. Un camino distinto para la formalización: Cortaduras de Dedekind

La propuesta de construcción de los números reales de Richard Dedekind inicia con una comparación entre los números racionales y la recta geométrica, para lo cual hace una breve presentación de los números racionales:

1. Las cuatro operaciones fundamentales están definidas para todo par de números racionales con excepción de la división por cero.
2. Dados dos números racionales cualesquiera está definido un orden entre ellos.
3. Dado cualquier número racional existen infinitos números racionales mayores que él e infinitos números racionales menores que él.
4. Cada punto P de una línea recta produce una separación de la misma en dos porciones, de manera que cada punto de una parte a la izquierda de cada punto de la otra parte.

La recíproca de la última afirmación permitió a Dedekind cuestionarse sobre la diferencia entre los números racionales y las magnitudes geométricas continuas; en esencia, sobre el significado de la continuidad geométrica, y se dio cuenta de que la idea que tenían matemáticos contemporáneos y anteriores como Galileo, Leibniz y Bolzano, sobre continuidad, estaba errada, ya que ellos llamaban continuidad a lo que hoy conocemos como densidad; esto es, que entre dos puntos cualesquiera siempre hay otro entre ellos.

A raíz de esta distinción, Dedekind encuentra que el secreto de la continuidad está en que si todos los puntos de una línea recta se sitúan en dos clases tales que cada punto de la primera clase se encuentra a la izquierda de cada uno de los puntos de la segunda clase, entonces *existe un único punto* que produce esta separación de la línea recta en dos pedazos; reconoce además que esta afirmación es indemostrable y la toma como axioma.

Seguidamente, copia esta noción de continuidad al conjunto discontinuo de los números racionales (Newman, op. cit., pp. 119-128) para completarlo hasta formar un conjunto *continuo* como la recta; es decir, que los números racionales se pueden extender para construir el conjunto continuo de los números reales, suponiendo lo que ahora se conoce como axioma de Cantor-Dedekind[74].

Dedekind hace una separación de **Q** en dos clases disyuntas A_1 y A_2, las cuales nota como (A_1, A_2), a lo cual llama cortadura, tal que todos los elementos de A_1 son menores que

[74] El axioma de Cantor-Dedekind dice: "Los puntos de una recta se pueden poner en correspondencia biunívoca con los números reales" (Boyer, op. cit., p. 695)

los elementos de A_2; sin embargo existen cortaduras en las cuales A_1 no tiene máximo y A_2 no tiene mínimo. Dedekind da como ejemplo todas las cortaduras definidas por los enteros D tales que no son cuadrados de números enteros y dice que para cada D existe un n natural tal que:

$$n^2 < \mathrm{D} < (n+1)^2$$

Considerando $A_1 = \{r \in \mathbf{Q} \text{ tales que } r^2 \in \mathrm{D}\}$

$A_2 = \{r \in \mathbf{Q} \text{ tales que } r^2 \in \mathrm{D}\}$

Así, A_1 y A_2 no tienen elemento máximo ni elemento mínimo respectivamente, luego esta cortadura no pudo ser generada por un racional. Con esto, Dedekind crea un nuevo número al que denomina irracional y simboliza por α, y lo denota como (A_1, A_2); a partir de esto, Dedekind define con cortaduras a los números reales, bien sean racionales o irracionales; así:

- Si p es un número racional, éste se representa como (A_1, A_2) de tal manera que:

  $A_1 = \{r \in \mathbf{Q} \text{ tales que } r < p\}$

  $A_2 = \{r \in \mathbf{Q} \text{ tales que } r \geq p\}$

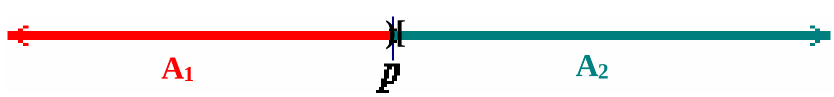


Figura 11

O bien, $A_1 = \{r \in \mathbf{Q} \text{ tales que } r \therefore; p\}$

$A_2 = \{r \in \mathbf{Q} \text{ tales que } r > p\}$

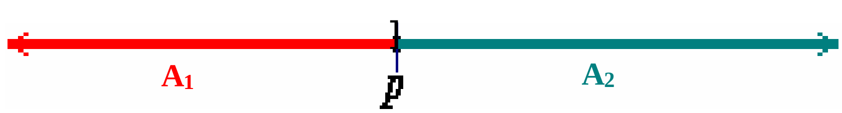


Figura 12

- Si p es un número irracional, éste se representa como (A_1, A_2) de tal manera que:

$$A_1 = \{r \in \mathbf{Q} \text{ tales que } r < p\}$$

$$A_2 = \{r \in \mathbf{Q} \text{ tales que } r > p\}$$

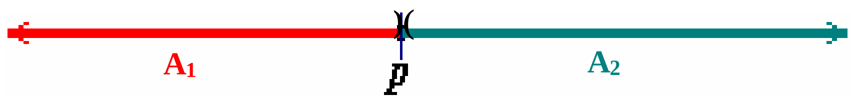


Figura 13

Además da las siguientes definiciones:

i. *Dos cortaduras son iguales si sus componentes son iguales; esto es:*

$$(A_1, A_2) = (B_1, B_2) \text{ si y sólo si } A_1 = B_1 \text{ y } A_2 = B_2$$

ii. *Orden:*

Si $(A_1, A_2) \neq (B_1, B_2)$ existen dos posibilidades:

a) $(A_1, A_2) < (B_1, B_2)$ si existe un elemento de B_1 que no está en A_1.

b) $(A_1, A_2) > (B_1, B_2)$ si existe un elemento de A_1 que no está en B_1.

iii. *Suma:*

$(A_1, A_2) + (B_1, B_2) = (A_1 + B_1, A_2 + B_2)$; siendo

$A_i + B_i = \{x + y \text{ tales que } x \in A_i, y \in B_i\}$ i =1,2.

iv. *Producto:*

Dado el orden, puede definir lo que es una cortadura α (o número real) positiva; simplemente es una mayor que cero. Con esta noción se puede introducir la función valor absoluto como es usual y así el producto se define por casos así:

$$1) \text{ si } \alpha = 0, \ \beta = 0 \text{ entonces } \alpha\beta = 0 \cup \{st \mid s \in \alpha, t \in \beta\}$$

2) si $\alpha = 0,\ \beta \leq 0$ entonces $\alpha\beta =$
$-\alpha\,|\,\beta\,|$ 3) si $\alpha \leq 0,\ \beta = 0$
entonces $\alpha\beta = -\,|\,\alpha\,|\,\beta$ 4) si
$\alpha \leq 0,\ \beta \leq 0$ entonces $\alpha\beta =$
$|\,\alpha\,|\,|\,\beta\,|$

Dedekind demuestra que se cumplen las propiedades en R análogas a I, II, III de Q y además afirma y demuestra la continuidad de la recta con su famoso teorema *"Si el sistema R de todos los números reales se rompe en dos clases U_1U_2 tales que todo número **a_1** de la clase U_1 es menor que cada número **a_2** de la clase U_2 entonces existe uno y solo un número por el cual esta separación se produce"* (Dedekind,, 1888, p. 90).

Dedekind hace énfasis en que "*el número irracional no es la cortadura misma, sino algo distinto, que corresponde a la cortadura y que la produce. De modo parecido, aunque los números racionales generan cortaduras, no son lo mismo que ellas*" (Kline, op. cit., p. 1301).

3.1.4.6. Presentación axiomática de los números reales.

Las anteriores teorías formales del número real se basan en las operaciones y propiedades de los números racionales, los cuales, a su vez, se fundamentan en los números naturales; el matemático alemán David Hilbert (1862–1943) denominó esta manera de acceder a los números reales método genético, diciendo que aunque fuera un buen camino desde el punto de vista pedagógico (Kline, op. cit., p. 1306) él prefería otro enfoque, más seguro desde el punto de vista lógico y planteó, a finales del siglo XIX (1899), un sistema de axiomas[75] para caracterizar a los números reales, en el Apéndice VI de su obra Fundamentos de Geometría.

Hilbert supone la existencia de un sistema de entes –números– y de unas relaciones entre ellos que se ajustan a ciertas condiciones, los axiomas, los cuales distribuye en cuatro grupos,

[75] Una presentación axiomática consta de unos *términos no definidos*, *conceptos primitivos* no susceptibles de definición y un *conjunto de axiomas* o *proposiciones primeras* (Rey, 1952, p. 10), relaciones entre los términos no definidos que se aceptan como ciertas; éstos constituyen el punto de partida de una teoría matemática en la cual se plantean otras afirmaciones que se deducen de dichos axiomas, los teoremas; dicho de otra forma, los teoremas se demuestran a partir de los axiomas

siguiendo una manera de razonar, basada en la lógica, generalmente, la lógica bivalente o lógica clásica.

a saber: Axiomas de Enlace (6), Axiomas de Cálculo (6), Axiomas de Ordenación (4) y Axiomas de Continuidad (2)[76].

I. Axiomas de enlace

I_1. A partir del número a y el número b se obtiene por adición un determinado número c; simbólicamente

$$a + b = c \qquad \text{o} \qquad c = a + b$$

I_2. Si a y b son números dados, existe uno y sólo un número x y existe también un y sólo un número y tales que:

$$a + x = b \qquad \text{o} \qquad y + a = b$$

I_3. Hay un número determinado, denotado por 0, tal que para cualquier a

$$a + 0 = a \qquad \text{o} \qquad 0 + a = a$$

I_4. A partir del número a y el número b se obtiene por otro método, la multiplicación, un número determinado c; simbólicamente

$$ab = c \qquad \text{o} \qquad c = ab$$

[76] En la presentación axiomática actual de los números reales, los axiomas se clasifican en tres grupos: *Axiomas de campo* que hacen referencia a las propiedades básicas que cumplen las dos operaciones definidas: la adición y la multiplicación (equivalentes a los *axiomas de enlace* y *de cálculo*); *axiomas de orden* que establecen los criterios para comparar números, identificando cuándo un número es mayor, menor o igual que otro y *axioma de completitud*, con el cual se introducen los números irracionales y se establecen las propiedades de continuidad de los números reales (Para mayor información sobre los axiomas ver p.ej. Apóstol T. (1988), Calculus, pp. 22-34). No tenemos vestigios de quien o quienes formularon esta presentación axiomática de R, aunque parece ser de autoría del grupo Bourbaki, fundamentados en los de Hilbert, dado que ellos fueron sus discípulos.

I_5. Dados dos números arbitrarios, a y b, si a no es 0, existe uno y sólo un número x, y también uno y sólo un número y, tales que

$$ax = b \qquad \text{o} \qquad ya = b$$

I_6. Existe un número determinado, denotado por 1, tal que para cada a tenemos

$$a \cdot 1 = a \qquad \text{o} \qquad 1 \cdot a = a$$

II. Axiomas de cálculo

II_1. $a + (b + c) = (a + b) + c$

II_2. $a + b = a + b$

II_3. $a\ (bc) = (ab)\ c$

II_4. $a\ (b + c) = ab + ac$

II_5. $(a + b)\ c = ac + bc$

II_6. $ab = ba$

III. Axiomas de orden

III_1. Si a y b son dos números diferentes, entonces uno de ellos es siempre mayor que el otro; este último se dice que es más pequeño que el primero; simbólicamente

$$a > b \qquad \text{y} \qquad b < a$$

III_2. Si $a > b$ y $b > c$, entonces $a > c$

III_3. Si $a > b$, entonces siempre es cierto que

$$a + c > b + c \qquad \text{y} \qquad c + a > c + b$$

III_4. Si $a > b$ y $c > 0$, entonces $ac > bc$ y $ca > cb$

IV. Axiomas de continuidad

IV_1. (Axioma de Arquímedes) Si $a > 0$ y $b > 0$ son dos números arbitrarios, entonces es posible siempre sumar a consigo mismo un número suficiente de veces para tener

$$a + a + a + \ldots + a > b$$

IV_2. (Axioma de completitud) No es posible añadir al sistema de los números ninguna colección de cosas de manera que la colección resultante siga satisfaciendo los axiomas precedentes; dicho en pocas palabras, los números forman una colección de objetos que no pueden ampliarse sin que deje de cumplirse alguno de los axiomas precedentes.

Como se observa, con el último axioma, Hilbert impone la completez de los números reales aduciendo a que "*los números forman un sistema de entes que no es susceptible de ampliación alguna*" (Campos, 1994, p. 487) diferente a las presentaciones usuales –incluyendo la axiomática actual– de este axioma o principio, en las cuales se agregan nuevos elementos a los números racionales para caracterizar el conjunto completo de los números reales.

Hilbert había señalado en sus *Fundamentos de Geometría* que un sistema axiomático se caracterizaba por la compleción, la sencillez y la compatibilidad e independencia de los axiomas. Sin embargo, respecto a los axiomas de los números, muestra que éstos no son del todo independientes, por ejemplo, a partir de las propiedades asociativa de la adición, modulativa de la multiplicación y distributiva de la multiplicación respecto a la adición, demuestra la propiedad conmutativa de la adición, como sigue (Ibid., p. 488):

$$(a + b)(1 + 1) = (a + b)1 + (a + b)1 = (a + b) + (a + b)$$

Por otro lado,

$$(a + b)(1 + 1) = a\,(1 + 1) + b\,(1 + 1) = (a + a) + (b + b)$$

de donde,

$$(a+b)+(a+b)=(a+a)+(b+b)$$
$$a+(b+a)+b=a+(a+b)+b$$
$$b+a=a+b$$

Pese a la eficacia del sistema axiomático para fundamentar la aritmética, el álgebra y el análisis, la demostración de la no contradicción (consistencia) del sistema axiomático constituyó un problema, planteado por Hilbert, en París, en 1900 (segundo problema) y que sólo fue resuelto, en 1931, por el matemático austriaco Kurt Gödel, con lo cual los números reales existen desde el punto de vista matemático (Kline, Op. cit., p. 1308).

En términos modernos, un conjunto, con dos operaciones y una relación de orden, que cumpla los axiomas de campo, orden y completez, se denomina el conjunto de los Números Reales, y es *un campo ordenado y completo*; de hecho, es el *único* conjunto con estas tres propiedades, salvo isomorfismos.

3.2. *ESTATUS MATEMÁTICO DEL CONCEPTO DE NÚMERO REAL.*

Dada la evolución histórica del concepto de número real y su relación con diversas situaciones y otros conceptos matemáticos, es evidente la lentitud en el proceso de institucionalización del número real como concepto matemático, presentando, a través de la historia tres estatus diferenciados, de acuerdo con la perspectiva teórica de Chevallard, a saber:

3.2.1. *El número real como noción protomatemática.*

En este estatus, respecto a nuestro objeto de estudio, se pueden distinguir dos contextos. El primero corresponde a la matemática griega de la antigüedad, en la cual, se reconocía la existencia de unos entes diferentes a los números naturales, no aceptados como números, sino asociados a la geometría como magnitudes inconmensurables con la unidad. En esta época la idea de número real (irracional) no emerge, pues el problema de la inconmensurabilidad fue abordado únicamente desde la geometría, aunque, en esencia, ésta corresponde al concepto de número irracional en una de sus representaciones, la geométrica. Esta idea se mantuvo por unos 2000 años (s. VI a.C. – s. XIX) y fue motivo de controversias en la comunidad matemática, pues varios personajes usaron esto como argumento para justificar la no aceptación de los irracionales como números.

El segundo, aparece en el Oriente, civilizaciones como las de los babilonios, egipcios, chinos, indios y árabes usaron además de los números naturales, las fracciones y los irracionales, en actividades de cálculo y solución de problemas, sin ocuparse de reflexiones de tipo ontológico acerca de la naturaleza del número; así hallaron propiedades, aproximaciones y maneras de operar con los números irracionales sin reconocer su carácter distinto (respecto a otros tipos de números).

3.2.2. *El número real como noción paramatemática.*

El estatus paramatemático del número real es difícil de determinar, ya que en una misma época hay características de estatus tanto para como protomatemático; sin embargo, consideramos, por ubicar algún período histórico, que este nivel se inicia en la edad moderna, puesto que desde principios del siglo XVI se empiezan a usar los irracionales (con representaciones simbólicas: operatorias, "decimales" o geométricas: magnitudes) con aparente libertad, sin tener acuerdo frente a si éstos eran números o no, pues ya en esta época estaba dicha discusión.

En primer lugar, cuando se vio la necesidad de cambiar la notación para las fracciones -sexagesimales, unitarias o comunes- usadas en los cálculos de mercaderes y comerciantes de diferentes lugares durante muchos años [77], la concepción sobre número se amplía, incluyendo ahora, además de los enteros, las fracciones decimales popularizadas con la obra de Stevin, quien no sólo las usa con fines meramente comerciales, sino que además las emplea como herramienta en lo matemático, para aproximar irracionales, pues Stevin los consideraba como números, cuestión que otros matemáticos de la misma época no aceptaban aún.

En segunda instancia, matemáticos como Cardano utilizaban irracionales como solución de ecuaciones cúbicas y cuárticas, empleando básicamente la notación algebraica, también halló numerosas propiedades para algunos números irracionales, por ejemplo, racionalizaba fracciones con raíces cúbicas; sin embargo, no hallamos muestras de sí este genio matemático aceptaba o no a las raíces inexactas (cuyo resultado no es un número natural) como números.

A lo largo de este siglo y el siguiente, se mantuvieron las dos posturas frente a la aceptación de los irracionales como números, mientras algunos los consideraban como tales otros continuaban asociándolos con las magnitudes geométricas; sin embargo, estas posiciones encontradas no impidieron que se desarrollaran variadas representaciones para los números irracionales como las fracciones continuas, aproximaciones decimales y series, las cuales posteriormente sirvieron de base para la teorización de los números reales.

Durante el siglo XVIII eran más quienes reconocían los irracionales como números que los que no; algunos de los matemáticos a favor definían el número desde la geometría, con lo cual incluían los naturales, las fracciones positivas y los irracionales. Aun así, durante este siglo se demostró la irracionalidad de algunos números basados principalmente en cuestiones algebraicas y analíticas; de hecho en este período histórico el álgebra ganó su reconocimiento como rama fundamental de las matemáticas; este elemento fue importante en el proceso de aceptación y manipulación de los números reales, pues ante la desconfianza en el

[77] En la edad antigua, en general, las fracciones eran evadidas en la realización de cuentas, preferían crear submúltiplos, por ejemplo en lo que respecta a las unidades de medida, para usar solamente números enteros; luego se usaban las fracciones unitarias, sexagesimales o comunes para realizar cálculos.

razonamiento geométrico con la aparición de las geometrías no euclidianas, el álgebra se convirtió en la única opción para fundamentar las matemáticas.

Por otra parte, en el desarrollo del cálculo se emplearon los números reales con cierta soltura, como herramienta en diversos desarrollos analíticos, pese a la carencia de una definición formal para ellos; precisamente esto llevó a una falta de rigor en las teorías del cálculo y a la preocupación por formalizar el concepto de número real, asunto que fue consolidado a finales del siglo XIX.

3.2.3. ***El número real como noción matemática.***

El número real como noción matemática tiene dos partes, una *constructiva* y otra *axiomática*; la primera, aparece a finales del siglo XIX (1872) con las teorías formales presentadas por Cauchy, Méray, Cantor, Weierstrass y Dedekind, en su intento por aritmetizar el análisis. Para esta época, los números reales eran ya totalmente aceptados como números en sí mismos y existía la preocupación por definirlos, independientemente de la geometría, de manera que sirvieran de fundamento al análisis y al álgebra; así, se constituyeron como un objeto de estudio en las matemáticas, de hecho, todas las construcciones presentadas eran meramente intelectuales, aisladas de toda percepción sensible. No obstante, no se lograron desprender totalmente de la intuición geométrica, pues tanto Cantor como Dedekind reconocieron que la continuidad de la recta era un buen modelo para expresar la completez de los números reales.

La segunda parte muestra el máximo nivel de estatus matemático del número real con la formalización axiomática, caracterizando los números reales como entes abstractos que cumplen ciertas propiedades, independientes incluso de la percepción geométrica, y tomando un sitio central dentro de los conceptos básicos del análisis y del álgebra.

3.3. *CONCEPCIONES HISTÓRICAS DEL NÚMERO REAL*[78].

A partir del estudio anterior, es posible determinar dos concepciones generales, que describen el punto coyuntural de la evolución histórica de los números reales, la aceptación y la no aceptación de los irracionales como números; sin embargo, es complejo ubicarlas, pues en una misma época se encuentran ambas concepciones, entrecruzadas en diferentes contextos matemáticos y socio-culturales; además, en varias ocasiones es imposible decidir, con cierto grado de certeza, si permanecía una concepción o la otra en algún personaje o cultura. Establecimos entonces cinco concepciones históricas, más específicas, no necesariamente en orden cronológico ni disyuntas entre sí, que como es obvio, están permeadas por las dos anteriores.

3.3.1. *Tratamiento aritmético de los números reales (C1)*

Esta concepción abarca las edades antigua y media en las civilizaciones Orientales y el renacimiento italiano con el *Ars Magna* de Cardano.

Según cuenta la historia, civilizaciones como la babilonia, egipcia, china, india y árabe no se preocuparon por el significado de los números (naturales, fraccionarios e irracionales) aunque los usaban muy eficientemente en la realización de cálculos aritméticos y algebraicos, los primeros, generalmente estaban ligados a solución de problemas de tipo astronómico, comercial y de medición (de tiempo, longitudes) y los otros, en la solución de ecuaciones, principalmente, de segundo grado. De manera similar Cardano utiliza números irracionales algebraicos (incluso complejos) como raíces de ecuaciones de tercer y cuarto grado, pero no tenemos vestigios de si él los aceptaba como números o consideraba dichas expresiones como cantidades, operaciones sin resolver o si no eran de su interés estas acepciones. De esta descripción se deduce que, de acuerdo a la tipificación de Sfard (1991), C1 corresponde a una concepción operacional.

[78] Sugerimos que el lector no aborde esta sección sin haber leído antes el Estudio histórico del número real y el Estatus matemático del concepto en cuestión.

Las representaciones asociadas a esta concepción son de tipo simbólico y corresponden a la notación operatoria, específicamente a:

- Expresiones en forma de fracción (unitaria, sexagesimal y común) en las diferentes notaciones mostradas en el apartado 3.1.2.1.
- Expresiones con radicales

3.3.2. *Números reales como magnitudes geométricas (C2).*

Inicia en la antigua Grecia y se extiende hasta el trabajo desarrollado por Stevin en la edad moderna, pasando por la época de oro de las matemáticas griegas; sin embargo, en años posteriores se halla aún esta concepción en matemáticos como Pascal.

La idea de número como cantidad discreta, de los pitagóricos, llevó a la distinción entre números naturales, las fracciones y los irracionales, los dos últimos considerados como magnitudes geométricas; esta idea llevó a consideraciones de carácter filosófico apareciendo así, cuestiones como las paradojas de Zenón las cuales mostraban la imposibilidad de hacer coincidir la pluralidad discontinua y la pluralidad de puntos de los pitagóricos, con la realidad concreta y continua del mundo sensible. De hecho, en la obra de los clásicos griegos, excepto Platón y algunos de sus discípulos, se encuentra la diferencia entre la cantidad de la aritmética (números naturales) y la magnitud de la geometría (fracciones y números irracionales)[79], razón por la cual los números reales, como tales, no tuvieron cabida en este contexto. Esta concepción aún se presenta en el siglo XVII, con las posiciones de matemáticos como Pascal y Barrow (sección 3.1.3) y en el siglo XVIII con la definición de número de Newton en su *Aritmetica Universalis*.

Como se puede dilucidar, el concepto de número real en C2 está asociado al proceso de medir, obteniendo segmentos conmensurables o inconmensurables con la unidad según sea

---

[79] ver, p. ej., secciones 3.1.1.4. y 3.1.1.5.

fracción o irracional; y al de contar si se trata de números naturales; es así como esta concepción es de tipo operacional.

Las representaciones presentes en C2 son verbales y geométricas; las obras griegas utilizan la retórica para expresar propiedades de las magnitudes al igual que dibujos para representar expresiones como puede verse en el apartado 3.1.1.5.

3.3.3. *El número real como cantidad continua y discreta (C3).*

Este punto de vista se presentó, fundamentalmente, en el siglo XVI con la obra del matemático flamenco Simon Stevin y persiste en matemáticos como Wallis (1685) y Descartes (1628), defensores de los irracionales como números. No obstante, en la obra de Platón y algunos de sus discípulos se vislumbra ya esta posición (ver apartado 3.1.1.3)

Stevin, en su obra *Le premier livre d'arithmetique* (1634), señala que "*El número es aquello por lo cual se expresa la cantidad de cada cosa*" y más adelante que *"El número no es una cantidad discontinua"* (Stevin, 1585, pp. 1-2, citado por Waldegg, Op. cit., p. 9), con esto el número aparece asociado a la idea de cantidad discreta y continua, eliminando la dicotomía entre continuo y discreto presente en los escritos griegos; además Stevin establece la unidad como número y la posibilidad de dividirlo e introduce una nueva idea de número en relación con sus operaciones, pues para él, la naturaleza del número está determinada por las operaciones que se realizan entre ellos; podría decirse que éste es un primer acercamiento a la idea de número del álgebra moderna.

Dado que, como afirma Waldegg (op. cit., p. 8), *"Stevin extrae su concepto de número de la experiencia cotidiana y profesional, como una extensión de la práctica generalizada de medir"*, esta concepción, al igual que las anteriores, es operacional.

En cuanto a las representaciones, prima la notación simbólica, debido a los trabajos predecesores y posteriores a Stevin, en especial, la notación decimal que, como se lee en el apartado 3.1.2.1., tuvo un sinnúmero de presentaciones.

3.3.4. *Expresiones algebraicas y analíticas para números irracionales (C4).*

C4 corresponde a los siglos XVII y XVIII cuando, matemáticos como Bombelli, Cataldi, Brouncker, Viète, Wallis y Euler, usan fracciones continuas y series para expresar algunos números irracionales, incluso al siglo XIX cuando en 1844 y 1873 aparecen las demostraciones de la trascendencia de algunos de ellos.

Aquí ya se consideran los irracionales como números aunque no se encontraran definidos oficialmente, la historia no evidencia discusiones al respecto; en cambio sí muestra sorprendentes e ingeniosas expresiones para varios números irracionales como los famosos trascendentes π y e y algunos cuadráticos; algunas de las cuales fueron útiles para demostrar su irracionalidad.

Al ser expresados los números irracionales como series o fracciones continuas infinitas, pueden ser interpretados como el resultado de un proceso en relación con el infinito potencial, razón por la cual ubicamos a esta concepción como operacional.

Las representaciones usadas en este caso son simbólicas en su notación operatoria con las fracciones continuas, las series y el uso de letras o caracteres especiales para nominar algunos números.

3.3.5. *Número real como objeto matemático (C5)*

Esta concepción se manifiesta a finales del siglo XIX con las teorías formales de los números reales, de tipo constructivo, y en el siglo XX con la axiomatización de éstos (ver apartado 3.1.4). Mediante estas teorías el número real es ya un objeto matemático en sí mismo y definido ofic ialmente, en consecuencia esta concepción es de tipo estructural.

Las representaciones usadas para los números reales varían para cada una de las teorías presentadas, aunque, como es obvio, todas son simbólicas:

- En el caso de Dedekind, cortaduras representadas con letras griegas o como pares de conjuntos y éstos mediante letras del abecedario.
- Con Cauchy, sucesiones.
- En la teoría de Weierstrass, agregados (conjuntos de números racionales)
- Para Cantor, intervalos encajados.
- Y en la presentación axiomática, caracteres o letras que representan los números.

Vale señalar que tanto Cantor como Dedekind usaron, además, la interpretación geométrica de la recta para caracterizar la continuidad de los números reales.

En la siguiente figura se muestra un esquema que resume los aspectos más importantes de las concepciones históricas, antes descritas:

Figura 14

4. EL NÚMERO REAL COMO OBJETO DE ENSEÑANZA

Teniendo en cuenta que el objetivo primordial de nuestro trabajo es caracterizar las concepciones que tienen los estudiantes para profesor de matemáticas acerca del número real, es necesario identificar las relaciones entre los elementos del sistema didáctico en torno a esta temática. A este respecto, un análisis de contenido entendido éste como *"una técnica de investigación para la descripción objetiva, sistemática y cuantitativa del contenido manifiesto de las comunicaciones con el fin de interpretarlas"* (Sierra, 1985, p. 247) resulta útil utilizarla con el fin de reconocer el estado de la enseñanza de determinado(s) objeto(s) matemático(s), en este caso, del número real, en un contexto específico (de lugar o tiempo) y las concepciones subyacentes.

Uno de los aspectos que puede incluirse en un análisis de contenido es el análisis de textos y currículos, teniendo en cuenta que los libros de texto y programas curriculares son una fase de la transposición didáctica (del saber sabio al saber escolar) que condiciona, en cierta medida, el funcionamiento del sistema didáctico. Así, los textos se convierten en una herramienta importante en la manipulación del saber, además que permiten determinar algunas concepciones que manifiestan los profesores y por ende, los estudiantes, no porque éstas sean transmitidas directamente, sino porque las concepciones de los estudiantes se ven influenciadas, de alguna manera, por las que tienen sus profesores; al respecto, Medina (2001), en su tesis de maestría, señala que "*las concepciones que portan los textos, inducen concepciones institucionales acerca de tratamientos didácticos, las cuales pueden ser origen de obstáculos didácticos. Por esto, el análisis de los libros de texto, nos permite hacer inferencias acerca de la enseñanza y el aprendizaje de los conceptos matemáticos*".

En seguida nos interesa hacer un análisis de textos y currículos, de tipo descriptivo-interpretativo, que nos permita evidenciar el tratamiento didáctico dado al número real en la formación inicial de profesores de matemáticas en la Universidad Pedagógica Nacional y las concepciones que subyacen a estas presentaciones, con lo cual aportaremos otros elementos teóricos para la interpretación de las concepciones que tienen los estudiantes respecto a este concepto matemático.

4.1. *ANÁLISIS DE TEXTOS.*

De acuerdo con el problema que nos interesa tratar, decidimos analizar la presentación que se hace sobre los números reales en los programas y textos más representativos de las asignaturas donde se abordaba y aborda esta temática en los dos últimos currículos para el programa de la licenciatura en matemáticas de la Universidad Pedagógica Nacional (escritos en 1995[80] y 1999).

La primera de estas propuestas curriculares toma como base el documento "La Matemática en la UPN – Planteamientos sobre el Currículo" realizado en 1982 por el profesor Edgar Pérez, modificado y presentado en 1983 a la comisión evaluadora del ICFES, con el fin de obtener la renovación de la aprobación de la Licenciatura en Matemáticas. En febrero de 1984 se consolida un documento escrito muy similar al de 1982, salvo algunas modificaciones en la redacción. En 1995 se construye un documento como informe al

[80] Realmente este programa fue implementado desde 1984, pero en 1990 se integraron nuevas asignaturas para estar acorde con las tendencias actuales, en cuanto a una aceptable componente de la aplicabilidad de las matemáticas y su poder en las nuevas tecnologías. No obstante, los principales supuestos teóricos se mantuvieron.

Consejo Superior de la Universidad Pedagógica Nacional, en el cual se describe el Programa de Licenciatura en Matemáticas junto con su plan de estudios, aprobado en 1985 por el Consejo Académico; a partir de tal fecha, como resultado de un proceso permanente de evaluación, se realizaron modificaciones adjetivas que no implicaron cambio en su estructura ni en su orientación (Programa Licenciatura en Matemáticas, 1995, p.3).

La misión del Departamento, en relación con el Programa, se cumplía "*formando docentes con un conocimiento profundo de la matemática y de su didáctica, de la informática y de su aplicación en los procesos educativos y comprometidos con la formación y avance de los sujetos de la educación; investigando sobre educación matemática e informática educativa y proyectando sus logros a la comunidad*" (Ibid, pp. 8-9).

Hacia este fin, el currículo del Programa está formado por tres áreas: área de formación pedagógica y didáctica, área de formación específica (matemáticas) y área de integración, cuyos porcentajes respecto al plan de estudios son 27.2%, 53.8% y 19%, respectivamente. Se nota en esta propuesta curricular una fuerte inclinación hacia la formación matemática de los futuros profesores.

Desde 1998, en el Departamento de Matemáticas, algunos profesores reconocen a la Educación Matemática como una disciplina científica que aporta a la reflexión en torno a la formación y perfeccionamiento del profesor de matemáticas, ya que éste constituye un campo de investigación en esta disciplina. Al respecto, algunos de los avances señalados son que el profesor es un sujeto reflexivo que genera conocimiento práctico propio de su desarrollo profesional y que las estrategias didácticas de los docentes son muy diferentes según la materia a enseñar (Marcelo, 1987; Shulman, 1986; Stodolsky, 1991 citados por DMA-Elementos para la acreditación previa, 1999, p.3). Con base en estos resultados, integrados a la crítica que la sociedad hace sobre la función social del profesor de matemáticas y teniendo en cuenta la coyuntura de la acreditación previa y los avances de la Educación Matemática como disciplina científica, se consolida el Proyecto Curricular de la Licenciatura en Matemáticas en 1999 (Ibid, p.2).

Desde este punto de vista, se considera la Educación Matemática como disciplina que soporta el proyecto curricular para la Licenciatura en Matemáticas, compuesto por seis ambientes educativos (disciplinar, pedagógico, investigativo, científico-tecnológico, deontológico y lingüístico) y dos ciclos de formación (fundamentación y profundización). Se considera lo pedagógico como disciplina fundante y el ambiente que lleva su título, como aquel que permea todas las actividades de formación del futuro profesor de matemáticas quien debe tener un saber matemático sólido y útil que fundamente las matemáticas que va a llevar al aula, para lo cual, en su formación, debe experimentar *"cómo se genera el conocimiento matemático contextualizándolo dentro de un por qué y un para qué..."*, todo esto para que sea un profesional de la educación matemática capaz de generar cambio social y de dar muestra de la función social y cultural que tienen las matemáticas.

Teniendo en cuenta los fundamentos de estas propuestas curriculares, la primera centrada, básicamente, en el Conocimiento Matemático y la otra, en la Educación Matemática, seleccionamos los siguientes documentos a revisar en este análisis descriptivo-interpretativo de textos, dado que se hallan en las bibliografías de los diverso programas de cada asignatura o espacio académico; en los anexos A y B se encuentran los programas y talleres mencionados:

- Programa para la asignatura *Fundamentos de Matemática I* (1994).
- Programa para el espacio académico *Sistemas Numéricos* (2003).
- Programa para el espacio académico *Cálculo Diferencial* (2003)
- Talleres para el espacio académico *Cálculo Diferencial* (2003).
- ARDILA, Raquel; JIMÉNEZ, Rafael y VILLAMIZAR Armando. *Fundamentos de Matemática I.* Universidad Pedagógica Nacional. Septiembre de 1985.
- SWOKOWSKI, Earl. *Álgebra y Trigonometría con Geometría Analítica.* Segunda Edición. Grupo Editorial Iberoamérica. 1988.
- SPIVAK, Michael. *Cálculo infinitesimal.* Segunda Edición. Editorial Reverté. 1996.
- APOSTOL, Tom. *Calculus*. Volumen 1. Segunda edición. Editorial Reverté. 1988.
- LUQUE, Carlos y MORA, Lyda. *Una Aproximación a los Números Racionales Positivos.* Universidad Pedagógica Nacional. Noviembre de 2001.
- LUQUE, Carlos, MORA, Lyda y TORRES, Johana. *Una Construcción de los Números Reales Positivos.* Universidad Pedagógica Nacional. 2004.

Para dicho análisis, emplearemos las unidades y categorías de análisis, señaladas en la siguiente tabla:

UNIDADES DE ANÁLISIS	***CATEGORÍAS DE ANÁLISIS***
1. Enfoque de los objetivos.	a. Objetivos centrados en la actividad matemática. b. Objetivos centrados en el conocimiento matemático.
2. Organización del contenido. 2.1. Ubicación del concepto de número real en la secuencia temática.	a. De acuerdo con la especialización de estructuras algebraicas. b. De acuerdo con la utilidad del concepto para las nociones de cálculo.
2.2. Forma de introducir y tratar el número irracional.	a. A partir de la medida de longitudes inconmensurables (representación geométrica). b. A partir de expresiones decimales infinitas no periódicas ó de la notación operatoria (representación simbólica[81])
2.3. Forma de desarrollar el concepto de número real.	a. De acuerdo con el desarrollo histórico del concepto. b. De acuerdo con la formalización axiomática del concepto.
3. Ejemplos y ejercicios propuestos.	a. Proposición, justificación y uso de procedimientos, propiedades y definiciones. b. Demostración y verificación de propiedades, mediante axiomas o teoremas.

[81] En el domino de las notaciones simbólicas se incluyen la notación decimal y la operatoria. La primera hace referencia a la representación numérica finita, periódica o no periódica y la segunda, a las fracciones, raíces cuadradas, raíces *n*-ésimas, entre otras.

4.1.1. ***Programa curricular de la licenciatura en matemáticas (1984 – 1999).***

En el programa curricular de la Licenciatura de 1984, se introduce el número real en el primer semestre, en la asignatura Fundamentos I, considerado éste como un "*concepto de la matemática elemental*" (Programa de Fundamentos de Matemática I, 1994) necesario para abordar los cursos de cálculo y de álgebra abstracta. Aunque se consideraban importantes aspectos como la comunicación, los hábitos de estudio, la curiosidad intelectual, entre otros, se nota gran énfasis en el manejo de conceptos matemáticos y la adquisión (mas no el desarrollo) de destrezas. Para el desarrollo del curso se proponen las siguientes temáticas:

1. Nociones de conjuntos y lógica.
2. El sistema de los números reales.
3. Inducción Matemática.
4. Funciones.
5. Relaciones.

presentes en un texto elaborado por profesores de la Universidad Pedagógica Nacional y usado como texto guía para este primer curso: *Fundamentos de Matemáticas I. Notas de clase* (Ardila, Jiménez, Villamizar, 1985)

El texto de Ardila, et al. (1985) consta de cuatro capítulos. En el primero se da una introducción a las nociones básicas de la Teoría de Conjuntos y de la Lógica, el segundo es dedicado a los números reales, este capítulo se titula: "*El Sistema de los Números Reales*", los siguientes tratan las nociones de función y relación, específicamente, algunas funciones reales como la lineal y cuadrática. El segundo capítulo inicia con la siguiente afirmación: "*La forma más práctica de introducir el sistema de los números reales es presentando un conjunto de axiomas a partir de los cuales se pueden deducir todas sus propiedades*" (Ardila, et al., 1985, p. 23); con base en esto se presentan axiomas, definiciones y teoremas; primero se enuncian los axiomas de campo, luego los de orden y finalmente el axioma de completitud.

Antes de mencionar los axiomas de orden, se muestran ejemplos de simplificación de fracciones algebraicas y operaciones entre éstas, empleando los teoremas demostrados, ejercicios similares aparecen propuestos para ser desarrollados por el lector, junto con algunas demostraciones y problemas de aplicación de ecuaciones de primer grado y sistemas de ecuaciones lineales. Posterior a los axiomas de orden, se presentan algunas demostraciones de los teoremas relacionados con éstos (otros se dejan como ejercicio para el lector), los cuales se emplean en el desarrollo de desigualdades.

Previo al axioma de completitud está la sección denominada: Distintas clases de números, en ella se describen "*brevemente ciertos subconjuntos de $\mathbb{R}$ que tienen propiedades especiales*"; inicia con los números enteros positivos, construidos a partir del número 1 sumándole repetidamente 1, pero al considerarse esto como demasiado impreciso se introduce la definición del conjunto de los números enteros positivos, denotado por $\mathbb{N}$, como un conjunto que cumple tres propiedades a saber: (1) $1 \in \mathbb{N}$, (2) Si $n \in \mathbb{N}$ entonces $n + 1 \in \mathbb{N}$, (3) El principio de inducción matemática (el cual se estudia en el capítulo 3 del texto). Después se describe que el conjunto de los números racionales constituye un campo ordenado y se pueden escribir de la forma $\frac{a}{b}$, donde $b \neq 0$ y a y b no tienen factores comunes distintos de 1.

Se hace una breve mención al conjunto de los números irracionales, con la siguiente frase: "*En el próximo teorema, demostraremos que hay números que no son racionales. El conjunto de los números reales que no son racionales, lo llamamos el conjunto de los números irracionales. Teorema 26: El número $\sqrt{2}$ no es un número racional*" (Ibid., p. 58), se hace la demostración clásica, por contradicción, y al finalizar la sección se presentan algunos ejercicios referentes a demostraciones y preguntas relacionadas con los conjuntos numéricos señalados en la sección, de los cuales se destaca el ejercicio 2: *¿Es la suma (el producto) de dos números irracionales un número irracional?*

Por último, con el fin de determinar el conjunto de los números reales como el único campo ordenado y completo, se enuncia el axioma de completitud, presentando antes dos definiciones, las correspondientes a cotas, supremo e ínfimo; además se incluyen seis teoremas demostrados a partir de las definiciones y los axiomas presentados hasta ahora. En los ejercicios para el lector se incluyen interpretaciones de la definición de cota, suprema e ínfima y prueba de algunas consecuencias del axioma de completez y la propiedad arquimediana.

El texto de Swokowski (1988) consta de 11 capítulos. En el primer capítulo, titulado "*Conceptos Fundamentales de Álgebra*", se aborda lo concerniente a los Números Reales; los siguientes capítulos tratan acerca de ecuaciones, desigualdades, funciones, tipos especiales de ellas, matrices, sucesiones, series y una parte de geometría analítica. El capítulo I inicia comentando acerca de la importancia del álgebra, específicamente en lo relacionado con el lenguaje, notación y fórmulas (enfoque simbólico), de ahí, la "*fuerza de las técnicas algebraicas en matemáticas y otros campos"* (Swokowski, op. cit.).

Posteriormente, se hace el estudio de los números reales, de nuevo, dando importancia a lo simbólico: *"Los números reales se emplean en todas las fases de las matemáticas y es importante estar familiarizado con los símbolos que los representan, por ejemplo: 1, 73, -5, 49/12,* $\sqrt{2}$ *, 0,* $\sqrt[3]{-85}$*, 0.33333... y 596, 25"* (Ibid, p. 3).

Luego aclara que el conjunto es cerrado para la adición y la multiplicación y señala las propiedades que cumplen estas operaciones (tratadas como axiomas en el otro libro) y algunas leyes que se derivan de ellas (teoremas), hace un breve recuento acerca de los números enteros y los números racionales, mostrando cómo se obtienen o definen, e introduce los números irracionales afirmando "*A los números reales que no son racionales se les llama números irracionales*" (Ibid., p. 7), da como ejemplos π y $\sqrt{2}$ y afirma que algunas raíces cuadradas son racionales y otros no. Menciona brevemente la notación decimal de los números reales, resaltando que "*las representaciones decimales de los números irracionales siempre son expresiones infinitas y no repetitivas*" (Ibid., p. 7), pero no hay ejemplos al respecto.

Después, sin conectar con lo anterior, comenta la correspondencia biunívoca entre los números reales y los puntos de una recta, explica rápidamente cómo representar ciertos números en la recta y muestra una gráfica. A partir de la recta coordenada o recta numérica real define los números reales positivos como los que están a la derecha de cero y los números reales negativos, como los que están a la izquierda y con base en esto, define las relaciones mayor y menor que, en términos de números positivos y de éstas, la ley de la tricotomía, las leyes de los signos y el valor absoluto de un número real.

Los ejercicios propuestos consisten, básicamente, en emplear símbolos correctamente; se pide por ejemplo, completar expresiones entre números reales con: >, <, =, $\neq$, representar simbólicamente afirmaciones verbales, representar gráficamente los números π y $\sqrt{2}$ y demostrar algunas de las reglas planteadas en el transcurso de la presentación del tema.

Dedica una sección para exponer lo correspondiente a exponentes y radicales, indicando todas las leyes para cada caso, tratando los irracionales algebraicos como un símbolo con el cual se puede operar cumpliendo ciertas reglas, sin reflexionar sobre el significado de los resultados obtenidos, ni de los procedimientos empleados. En la última parte del capítulo, se aborda la factorización como un procedimiento algebraico, no sin antes definir expresión algebraica y polinomio.

4.1.2. *Proyecto curricular de la licenciatura en matemáticas (2000).*

El proyecto curricular actual de la Licenciatura en Matemáticas concibe, en el ciclo de fundamentación, dos espacios académicos en los que se aborda el estudio de los números reales, el espacio académico *Sistemas Numéricos*, en el área de álgebra, y el espacio académico *Cálculo Diferencial*, en la línea de cálculo, del segundo y tercer semestre, respectivamente[82]. Los objetivos (y metodología) del primero de estos espacios conllevan, en general, a formar al futuro profesor en la actividad matemática misma, en el quehacer y saber matemático, construyendo los conceptos y en particular, el de número real. Para ello se propone la siguiente secuencia de actividades:

[82] La ubicación de estos espacios académicos en el plan de estudios del Proyecto Curricular de la Licenciatura en Matemáticas tuvo esta forma hasta 2003-I.

1. Construcción de un sistema de números para medir: los números *n*-males[83]
2. Las fracciones desde su representación geométrica.
3. Las fracciones continuas finitas y los números racionales positivos.
4. De las fracciones continuas infinitas a los números irracionales positivos.
5. Construcción de algunos números algebraicos y aparición de números trascendentes.
6. Formalización del conjunto de los números reales positivos.
7. Procesos inversibles: Los números negativos.
8. Formalización del conjunto de los números reales.
9. Caracterización de otras estructuras algebraicas

de las cuales hay publicación de las seis primeras en el módulo *Una aproximación a los números racionales positivos* (que incluye las actividades 1, 2 y 3) y el libro *Una construcción de los números reales positivos* (que incluye las actividades 4, 5 y 6).

El módulo mencionado anteriormente consta de cuatro capítulos, todos dedicados a los números racionales positivos, en el primero, con base en el proceso de medir y en la necesidad de representar medidas se propone un sistema de números en base *n*, al cual se le denomina números *n*-males (inicialmente, *n*-males finitos), en él se estudian algoritmos para efectuar operaciones básicas, a partir de una de ellas, la división, surgen los números *n*–males periódicos, lo que exige extender los procedimientos para operar con éstos. Posteriormente, como otra representación de las medidas surgen los números fraccionarios, con los cuales se proponen algoritmos para realizar operaciones, es en ese momento cuando surge la representación gráfica de los fraccionarios como herramienta para interpretar los procedimientos al realizar operaciones.

Es en el tercer capítulo cuando se presenta una construcción de los números racionales positivos como clases de equivalencia de parejas de números naturales y se demuestran todas

[83] Los números n-males pueden contrastarse con los números decimales, sólo que los primeros no se encuentran expresados, necesariamente en base diez. Es de resaltar, que estos números no son una nueva teoría matemática, únicamente se ha cambiado la base para representar algunos números con cifras decimales finitas y periódicas con el fin de que al tratar algunos problemas éstos conlleven a buscar estrategias de solución variadas y justificadas, lo cual, en el plano de la expresión decimal no siempre es posible, pues corresponde al sistema usual, que en ocasiones manejamos mecánicamente sin saber el porqué.

las propiedades de las operaciones básicas entre números racionales con base en las propiedades de los números naturales.

Por último, en el cuarto capítulo, se aplica la construcción anterior a los números racionales positivos; así se obtienen fracciones cuyo numerador y denominador son números racionales, a partir de esto se estudian las fracciones continuas finitas, lo cual lleva a otra representación de los números racionales como fracciones continuas simples finitas.

El libro, por su parte, consta de cuatro capítulos. En el primero de éstos se retoma el trabajo realizado con fracciones continuas finitas para, a partir de ellas, iniciar el estudio de las fracciones continuas infinitas a partir de las cuales se abordan los números irracionales; se proponen procedimientos generales para hallar el irracional que representa una fracción continua infinita dada, y encontrar la fracción continua infinita que representa un irracional cuadrático determinado; aparece aquí el problema de representar mediante fracciones continuas infinitas otros números irracionales que no sean cuadráticos, se recurre a la aproximación decimal de algunos de estos números para encontrar la fracción continua pero las representaciones encontradas (fracciones continuas) son, obviamente, aproximaciones a dichos números, no los números en sí mismos; finalmente, se generan mecanismos para sumar y multiplicar números irracionales cuadráticos, representados como fracciones continuas infinitas. En el proceso se realizan algunas demostraciones de la irracionalidad de ciertos números, por reducción al absurdo o encontrando la fracción continua simple infinita que los representa, y se propone a los estudiantes generalizar que la raíz cuadrada de p cuando p es primo es irracional.

En el siguiente capítulo se tratan los números construibles, empleando, fundamentalmente, la Geometría de Euclides, con la cual se construyen con regla y compás segmentos que representan los números naturales, racionales los irracionales cuadráticos y aparecen otros números irracionales no considerados antes. Se generan procedimientos para operar con estos números, empleando procedimientos geométricos y por último se realizan extensiones cuadráticas de los números construibles encontrando, de paso, números que no lo son.

En el tercer capítulo se presentan algunos números no construibles a partir de los problemas clásicos de la geometría; después se estudia la naturaleza de las soluciones de ecuaciones polinómicas de grado *n* con coeficientes naturales, a partir de lo cual se distinguen dos tipos de números, los números algebraicos, en los cuales se incluyen los números construibles, y los números trascendentes; con esta distinción y el trabajo de los dos primeros capítulos se ve cómo el concepto de número irracional es más complejo de lo que usualmente se supone.

Luego, en el capítulo cuatro, se estudia la construcción formal de los números reales positivos a partir de las cortaduras de Dedekind[84], con una variación respecto a la construcción original, dado que hasta el momento sólo se han estudiado números positivos; se demuestran las propiedades de la adición y la multiplicación con base en las definiciones dadas por este personaje y las propiedades de las operaciones de números racionales ya demostradas.

De acuerdo al programa del espacio académico sistemas numéricos, posterior a los números reales positivos se introducen los números negativos, para lo cual se estudian los procesos inversibles y entes opuestos, tratando inicialmente los números enteros, se opera entre ellos proponiendo algoritmos que se justifican con argumentos intuitivos o procedimientos convenidos.

Finalmente, se hace la construcción formal de los números reales presentados como clases de equivalencia a partir de parejas ordenadas de números reales positivos, se demuestran las propiedades de las operaciones entre números negativos a partir de las propiedades demostradas en el conjunto de los números reales positivos. Por otra parte, se hace la presentación axiomática usual de los números reales, se demuestran los teoremas relacionados con los axiomas de campo, orden y eventualmente, el axioma de completez, con base en dichos axiomas y las definiciones determinadas, también se estudian procedimientos para resolver ecuaciones de primer, segundo y tercer grado; al igual que ecuaciones simultáneas.

---

[84] Cabe anotar que aunque se hace mención a otras construcciones como la de Cantor o Cauchy, no se profundiza en su estudio por carecer de elementos para ello.

Inicialmente, los ejercicios están enfocados a justificar procedimientos, explicar algoritmos, hallar regularidades, hacer conjeturas frente a diversas situaciones, para finalmente, hacer demostraciones formales, entendidas éstas como razonamientos válidos para justificar afirmaciones que constituyen una construcción formal (propiedades de las operaciones entre números racionales), con base en definiciones y relaciones establecidas previamente, a partir de aproximaciones intuitivas (Luque, Mora, 2001).

En el programa de cálculo diferencial (2003) se incluye el estudio del orden y la completez de los números reales y las representaciones decimal y por fracciones continuas, como primer tema del espacio académico, enlazando con el trabajo algebraico iniciado en Sistemas Numéricos y como primer paso para el estudio de funciones reales. Se espera que los estudiantes empleen las representaciones antes señaladas, para los números reales, que resuelvan desigualdades con una variable real y que usen el axioma de completez para resolver situaciones matemáticas; para ello, el énfasis en este espacio académico es la solución de problemas, llevando a cabo con los estudiantes procesos de discusión, socialización y validación (Programa del espacio académico Cálculo Diferencial, 2003).

Entre los libros sugeridos en la bibliografía, el cálculo de Spivak y el cálculo de Apóstol dedican una o varias partes al abordaje de los números reales, por esta razón, los describiremos con más detalle.

Michael Spivak, en el capítulo primero de la parte I (Prólogo) de su libro Cálculo infinitesimal (segunda edición), presenta doce propiedades básicas de los números con las operaciones adición y multiplicación sin indicar a qué números se refiere, ni a qué denomina número. Estas propiedades corresponden a los axiomas de campo y de orden de los números reales, que según Spivak, evita intencionadamente llamar axiomas; con base en ellas demuestra otras propiedades que son útiles para manipula r algunas igualdades y desigualdades de tipo algebraico.

En el mismo capítulo, Spivak escribe que las propiedades mostradas no son suficientes, que es necesario añadir una propiedad profunda y sutil y que para descubrirla hace falta todo el trabajo de la parte II del libro, la cual contiene funciones, gráficas, límites, funciones continuas, algunos teoremas para funciones continuas y cotas superiores mínimas, y es en este capítulo, el octavo, donde establece la última propiedad de los números reales, que denomina Propiedad de la cota superior mínima y corresponde al axioma conocido como de completitud; con ella hace las demostraciones de los teoremas para funciones continuas expuestos en el capítulo siete[85].

En el capítulo dos, perteneciente a la Parte I, titulado: Distintas clases de números, Spivak presenta inicialmente, como es costumbre, los números naturales y los caracteriza de una manera muy superficial, cuestión que acepta más adelante, como los "*números de contar*", dice que éstos no cumplen varias de las propiedades enunciadas; luego, expone el Principio de Inducción Matemática, como propiedad fundamental de $\mathbb{N}$, y muestra ejemplos de su aplicación; seguidamente, habla de los números enteros, como un conjunto más amplio que el de los números naturales, sistema que cumple propiedades que los otros números no satisfacían; dice que existe un sistema más amplio que $\mathbb{Z}$, el de los números racionales, el cual satisface las doce propiedades presentadas al igual que la colección de los números reales; no obstante, enuncia que ésta es más amplia y que incluye otros números a parte de los racionales, los irracionales.

Aquí Spivak hace referencia a la representación de los número irracionales, estableciendo que se pueden escribir como decimales infinitos; además enuncia que $\sqrt{2}$ es un símbolo que significa que existe algún número irracional cuyo cuadrado es 2; da como ejemplos de números irracionales a π y al ya mencionado $\sqrt{2}$, manifiesta que demostrar la irracionalidad del primero no es sencillo mientras que la del segundo sí y la desarrolla. Spivak pone de manifiesto dos aspectos importantes, uno que la existencia de los números irracionales no se puede demostrar con base en las propiedades hasta ahora estudiadas y que existe una propiedad en $\mathbb{R}$ que no se satisface en $\mathbb{Q}$, la cual no ha sido aún presentada y finaliza este apartado así: *"Para estudiar los números reales de manera más profunda, debemos estudiar*

[85] Entonces lo que es útil es la propiedad de completitud para la demostración de teoremas que involucran funciones continuas, como el del valor intermedio, mas no son éstos útiles -ni los tópicos precedentes (funciones límites, gráficas)- para la presentación de tal propiedad como lo manifiesta el autor en el primer capítulo del libro.

más que los números reales" (Ibid., p. 35); pero no dice específicamente qué tópicos deben ser estudiados[86].

Después de que Spivak desarrolla las funciones, las derivadas, las integrales y las series infinitas, presenta una última parte, la parte V, que corresponde al epílogo del libro y consta de tres capítulos: cuerpos, construcción de números reales y unicidad de los números reales. Al inicio de esta parte Spivak acepta que hasta ahora no ha definido algún sistema de números y que una manera de hacerlo es definiendo $\mathbb{N}$, luego $\mathbb{Z}$ en términos de éste, $\mathbb{Q}$ a partir de $\mathbb{Z}$ y $\mathbb{R}$ con base en $\mathbb{Q}$, que esta última construcción es la que realizará suponiendo definido el sistema de los números racionales. A partir de esto, afirma que los números reales solos no son de interés, éstos son importantes con la suma y la multiplicación, y se introduce en el estudio de los cuerpos donde cita a los números reales como ejemplo. Spivak enfatiza en las estructuras algebraicas de ciertos conjuntos numéricos, pues afirma que los números son de importancia sólo con sus operaciones.

Y lo que tanto habíamos esperado, la definición de número real, la presenta Spivak en el capítulo 28, así:

> *"Un **número real** es un conjunto α, de números racionales, con las cuatro siguientes propiedades:*
>
> *(1) Si x está en α e y es un número racional con $y < x$, entonces y está también en α.*
>
> *(2) $\alpha \neq \varnothing$.*
>
> *(3) $\alpha \neq \mathbf{Q}$.*
>
> *(4) No existe ningún elemento máximo en α; dicho de otro modo, si x está en α, entonces existe algún y en α con $y > x$.*
>
> *El conjunto de todos los números reales se designa por $\mathbf{R}$"* (Ibid., p. 810)

[86] Aunque Anacona (199?), en su escrito *El estructuralismo Bourbakista en los Textos de cálculo: El caso de los números reales,* afirma que en Spivak se encuentra que para estudiar la propiedad de completitud se requiere un análisis profundo de la noción de función, aspecto que no hallamos en su obra.

Da un ejemplo de número real y dice que "un número racional (un miembro de **Q**) **no** es un número real; sin embargo, todo número racional x tiene una contrapartida natural que es un número real" (Ibid., p. 811); con esto Spivak pone de manifiesto un punto clave, pues admite que los números racionales no son números reales, sino que existe un subconjunto en $\mathbb{R}$ isomorfo a $\mathbb{Q}$, aspecto muy sutil. Luego, define + de la siguiente forma: *"Si α y β son números reales, entonces $\alpha + \beta = \{x: x = y + z$ para algún y de α y algún z de $\beta\}$"* (Ibid., p.813) y·, como sigue, después de definir el valor absoluto de un número real:

$$\text{Si } \alpha \text{ y } \beta \text{ son números reales, entonces}$$

$$\alpha \cdot \beta = \begin{cases} 0, & \text{si } \alpha = 0 \text{ o } \beta = 0 \\ |\alpha| \cdot |\beta|, & \text{si } \alpha > 0,\ \beta > 0 \text{ o } \alpha < 0,\ \beta < 0 \\ -(|\alpha| \cdot |\beta|), & \text{si } \alpha > 0,\ \beta < 0 \text{ o } \alpha < 0,\ \beta > 0 \end{cases} \qquad \text{(Ibid., p.820)}$$

y **P** para el conjunto de los números reales y con ello demuestra que $\mathbb{R}$ es un campo ordenado completo.

Si comparamos la construcción de los números reales presentada por Spivak es en esencia, la construcción que hace Dedekind, sólo que Spivak considera únicamente la clase A_1 de la cortadura (A_1, A_2) determinada por el alemán.

Dentro de los problemas del capítulo Spivak comenta que los números reales construidos pueden ser llamados "*números reales de los algebristas*" y que existe otra construcción de $\mathbb{R}$, la cual hace que estos números sean llamados "*números reales de los analistas*" y corresponde a la construcción de Cauchy, hace una breve presentación de esta construcción y propone al lector realizar algunas demostraciones en torno a ésta.

Finaliza Spivak, el tópico de los números reales, y su obra, con el capítulo 29 donde demuestra que $\mathbb{R}$ es el único cuerpo ordenado completo salvo isomorfismos.

En suma, Spivak va presentando los números reales de manera implícita en los primeros capítulos, los usa a lo largo de su obra sin haberlos definido explícitamente y culmina con una construcción algebraica formal de éstos mencionando la existencia de una construcción un poco más analítica, desde el punto de vista matemático.

Por su parte, el libro de Apóstol (1988) consta de 17 capítulos, el primero de los cuales es una introducción general, los once siguientes tratan de cálculo en una variable y los cinco restantes sobre álgebra lineal. La introducción está dividida en cuatro partes: una introducción histórica a los dos conceptos fundamentales del cálculo (integral y derivada), un estudio de algunos conceptos básicos de cálculo, la presentación axiomática de los números reales y el estudio del principio de inducción matemática.

En la primera de estas partes, Apóstol señala que el estudio del cálculo, en su libro, comienza con los números reales como elementos primitivos, tomando algunas de sus propiedades fundamentales como axiomas, entre los cuales señala el axioma de continuidad como el más importante:

> *Muchas de las propiedades de los números reales que se han tomado como axiomas son probablemente familiares al lector, por sus estudios de álgebra elemental. Sin embargo, hay algunas propiedades de los números reales que no se suelen tener en cuenta en el álgebra elemental, pero que juegan un papel importante en el cálculo. Estas propiedades son consecuencia del llamado axioma del extremo superior* (Apóstol, 1988, p. 12).

Luego, en la tercera parte de la introducción, Apóstol describe una construcción de los números reales a partir de los números naturales y señala los autores de las tres principales construcciones formales: Weierstrass, Cantor y Dedekind. Posteriormente explica el punto de vista que empleará en su libro, mucho más avanzado que el constructivo, pues considera los números reales como conceptos primitivos que satisfacen diez axiomas, divididos en tres grupos: axio mas de cuerpo, de orden y del extremo superior, y establece la diferencia entre esta presentación y una constructiva: "*Cuando los números reales se definen mediante un proceso constructivo, las propiedades que se toman como axiomas tendrán que demostrarse como teoremas*" (Ibid., p. 21).

Con base en este punto de vista, presenta los axiomas, teoremas y algunas demostraciones de campo y de orden, las demostraciones de los demás teoremas se dejan como ejercicio para el lector.

En la siguiente sección Apóstol hace una discusión alrededor de la definición y algunas propiedades de los números enteros y racionales[87] y la interpretación geométrica de los números reales como puntos de la recta. Finalmente, presenta el axioma del extremo superior y algunos teoremas que se derivan de éste como la propiedad arquimediana, los ejercicios para el lector consisten en demostraciones de teoremas relacionados con la completez de los números reales.

Aparecen, además, tres temas opcionales para finalizar el estudio del número real. En los dos primeros se aborda el asunto de las raíces cuadradas y, en general, de las potencias racionales de los números reales y en la tercera, la representación decimal de los números reales, sin estudiar sus propiedades con detalle, la manera de obtener aproximaciones decimales por exceso y por defecto de un número[88] y la definición analítica de expresiones decimales con el axioma de completez.

Con esta presentación, y las otras tres partes de la introducción, se considera preparado el terreno para iniciar el estudio del cálculo en un variable, primero integral y luego, diferencial.

Además de estos textos, los profesores de la línea de cálculo han formulado algunos talleres para desarrollar con los estudiantes del espacio académico Cálculo Diferencial, entre ellos, los cinco primeros talleres tratan de los números reales, precedidos de un taller diagnóstico, que consta de seis puntos; el primero corresponde a un cuadro que los estudiantes deben completar y hace alusión a algunas representaciones (fracción decimal, forma decimal, notación científica) de los números racionales; el segundo muestra algunas

[87] Apóstol define los números enteros como los números enteros positivos, sus opuestos y el cero, y los números enteros positivos como los números reales que pertenecen a todo conjunto inductivo. Los números racionales los define como los cocientes de números enteros $\frac{a}{b}$ con $b \neq 0$.

[88] "*Esto es un ejemplo del llamado encaje de intervalos, concepto que se utiliza algunas veces como base para construir los números irracionales a partir de los racionales*". (Apóstol, 1988, p.39)

secuencias numéricas con el fin de que los estudiantes hallen el término general y el tercero busca que los estudiantes hallen una representación decimal para el número $\sqrt{5}$ usando adiciones y multiplicaciones; los demás puntos no serán descritos por cuanto, consideramos, no contribuyen a nuestro estudio.

El Taller Nº 1 es, esencialmente de carácter argumentativo, consta de 13 tareas, de las cuales, seis son preguntas que invitan al estudiante a cuestionarse sobre algunos comportamientos de los números racionales e irracionales, en relación con las operaciones usuales, y las otras siete tareas solicitan demostraciones acerca de la irracionalidad de algunos números y teoremas que incluyen números naturales y son útiles para argumentar las primeras.

El tema del segundo taller es Fracciones Continuas, inicia con la definición de fracción continua y señala algunos teoremas, sin demostración, que involucran fracciones continuas simples finitas e infinitas como representaciones de números racionales e irracionales cuadráticos, respectivamente; además, señalan que "*Las fracciones continuas se utilizan para obtener aproximaciones racionales de los números reales por medio de los convergentes o reducidos de la fracción continua simple…"* (Espitia, et al., 2002); con base en esto, las actividades del taller son ejercicios que consisten en expresar algunos racionales e irracionales como fracciones continuas y viceversa y encontrar algunas aproximaciones para el número $\sqrt{7}$.

El tercer taller se titula: Representación decimal de un número real, inicialmente presenta la Propiedad arquimediana de los números reales, y se dice que a partir de ella se puede demostrar que:

> *Para todo par de números reales* $\Upsilon{:}$ *y x, con* $\Upsilon{:} > 0$*, existe un único número entero p que satisface*
> *Primera versión* $p\Upsilon{:} \leq x < (p+1)\Upsilon{:}$
> *Segunda versión* $p\Upsilon{:} < x \leq (p+1)\Upsilon{:}$
> *Tercera versión* $(p-1)\Upsilon{:} < x \leq p\Upsilon{:}$
> *Cuarta versión* $(p-1)\Upsilon{:} \leq x < p\Upsilon{:}$
> (Ibid.),

aunque no lo demuestran; sin embargo, usan la primera versión para mostrar, con un ejemplo, cómo obtener una representación del número real por medio de sucesiones de números enteros. En los ejercicios se pide encontrar representaciones de algunos números racionales dados como sucesiones de números enteros utilizando las cuatro versiones descritas.

El siguiente taller aborda la cuestión del orden de los números reales, consta, principalmente, de dos actividades; la primera, resolver desigualdades –algunas que involucran valor absoluto- y la segunda, demostrar algunos teoremas derivados de los axiomas de orden para los números reales. El quinto y último taller se titula: Supremo e ínfimo de subconjuntos de números reales; la presentación de este taller es distinta a la de los anteriores, mediante ejercicios a desarrollar por los estudiantes se les introduce en los conceptos de cota superior, cota inferior, ínfimo y supremo.

4.2. *CONCEPCIONES INDUCIDAS POR LOS CURRÍCULOS Y TEXTOS.*

Con base en lo presentado anteriormente, se observa que los escritos correspondientes al programa curricular de los ochenta y noventa se basan en la presentación axiomática usual, lógico-deductiva del concepto de número real, derivada de la propuesta por Hilbert, sin mostrar otras maneras de acceder a los números reales, por ejemplo, las de carácter constructivo; para después usar los números reales en el estudio de otros conceptos, propios del cálculo, como el de función.

El número irracio nal no surge por necesidad alguna, es introducido, desde su representación simbólica, como un tipo de número real que no es racional, haciéndose énfasis en los cálculos con expresiones radicales, mas no en la complejidad que existe al operar números reales, para lo cual la notación simbólica operatoria es la propicia.

Concluimos así que en este currículo priman las categorías b), en cada una de las unidades de análisis descritas al iniciar este capítulo.

Decimos que la filosofía existente, quizás de manera implícita, en la época, es formalista, pues como afirma el personaje más representativo de esta filosofía: "*...el objeto de estudio de las matemáticas son los símbolos mismos concretos"*(David Hilbert). Argumentamos este hecho debido a que en el programa curricular de la Licenciatura, se entendía la subárea de Fundamentos (en la cual se encontraba la asignatura Fundamentos I) como un espacio en donde se debía *"ubicar al estudiante en el nivel que debe tener para <u>iniciar con seriedad el estudio de la Matemática</u>.* (subrayado nuestro)*"*(Programa de Licenciatura en Matemáticas, 1984 pp. 18), de manera formal y lógica.

En consecuencia, las concepciones de número real, que derivamos de lo anterior son: ***El número real como ente matemático definido axiomáticamente*** y ***El número real como símbolo aritmético***, no disyuntas entre sí, dado que se define el número real como un objeto que cumple ciertas propiedades útiles para efectuar operaciones y realizar procedimientos algebraicos, especialmente, para el tratamiento de algunos temas del cálculo. De acuerdo con esto, la representación que prima, para los números reales, es la notación operatoria (simbólica), puesto que se usan expresiones con fracciones, radicales y letras del alfabeto griego o del abecedario. Según la teoría de Sfard sobre concepciones, presentada en el capítulo 2, ésta es una concepción de tipo operacional.

Por otra parte, y teniendo en cuenta que en el nuevo Proyecto curricular se concibe, como fundamental, que el estudiante de la Licenciatura "*experimente en su formación, cómo se genera el conocimiento matemático"*, afirmamos que teóricamente, dentro de los marcos generales que sustentan el proyecto, se consideran las matemáticas como una ciencia que está siempre en proceso de creación y descubrimiento y por tanto falibles y conjeturables, de ahí que el mismo sentido de la demostración, se supone, adquiere en este currículo una nueva connotación, más allá del rigor, la certeza y la infalibilidad con la que siempre se han asociado las matemáticas, haciéndose énfasis en las *"explicaciones, justificaciones, elaboraciones que hacen una conjetura ... más convincente,..."* (Davis y Hersh, 1982, pp. 253).

De hecho, en las propuesta de los cursos de Aritmética y Sistemas numéricos se observa la introducción a los números reales en el siguiente orden: números naturales, números racionales positivos, números irracionales positivos, números reales; partiendo de la intuición, el descubrimiento y la creación de los estudiantes para dar significado a los diferentes sistemas numéricos y crear la necesidad de formalizarlos; finalmente se hace la presentación axiomática de los números reales, con lo cual se muestra que éstos no tienen sólo una manera de presentarlos, sino que es posible construirlos por diferentes caminos. Se hace hincapié en la reconstrucción de saber matemático tomando como base la historia de las matemáticas[89]; es decir, la evolución histórica del concepto.

El trabajo realizado en los espacios anteriores se complementa con el desarrollo del espacio académico Cálculo Diferencial, donde se retoman algunos temas abordados en Sistemas Numéricos, profundizando en los axiomas y teoremas relativos al orden y la completez de los números reales, con lo cual, además de considerar el número real como objeto matemático en sí mismo, se estudia desde otra perspectiva, como herramienta en el tratamiento (usual) de algunos tópicos del cálculo.

Determinamos que en este currículo priman las categorías a), en cada una de las unidades de análisis y las concepciones de número real, que definimos de lo anterior son:

- El número real representado a partir de expresiones algebraicas y analíticas, dado que tanto en los espacios de cálculo como en los de álgebra, se consideran diferentes representaciones de los números reales de tipo algebraico, como las fracciones continuas, o analítico, como las sucesiones, para inferir propiedades que caractericen los números reales y dotar a los estudiantes de múltiples representaciones y estrategias que les permitan abordar problemas matemáticos.

- El número real como objeto matemático formal, resultado de un proceso de evolución, porque se estudia primero de forma constructiva (desde alguna teoría matemática

[89] Actualmente, en la Educación matemática, se observa una fuerte tendencia al estudio histórico de los conceptos matemáticos, tal vez porque "*la historia es una fuente de inspiración, ya que aporta cuestiones de interés para explorar con los alumnos y para la elaboración de situaciones didácticas en torno a ellas"*(Romero, 1997)

establecida) y luego, axiomáticamente, siendo esta última presentada como una forma de definir los números reales, no la única, pero sí la elegida para continuar el estudio del álgebra y del cálculo.

De acuerdo con lo anterior, las dos concepciones definidas, dentro de los marcos de la teoría de Sfard, son de tipo operacional, la primera y estructural, la segunda.

Así, concluimos que la presentación que se hace de los números reales en el programa curricular antiguo y los textos sugeridos para el desarrollo de la asignatura Fundamentos I, conlleva a pensar en que el conocimiento matemático es un producto ya finalizado y al que sólo es posible estudiar, en cuanto se presenta únicamente la formalización axiomática; entre tanto, en la segunda presentación (nuevo proyecto curricular) se percibe que para el estudio de las matemáticas es importante, la creación, el descubrimiento, la proposición, la argumentación, la comunicación, etc., luego se hace un trabajo similar al que han realizado los matemáticos a lo largo de la historia.

5. CONCEPCIONES DE ESTUDIANTES DE LICENCIATURA EN MATEMÁTICAS SOBRE NÚMEROS REALES

En este capítulo haremos una descripción de las actividades realizadas durante el proceso de verificación, segunda etapa de nuestra investigación. En primera instancia, señalaremos los criterios y elementos tenidos en cuenta en la selección de la muestra y en el diseño de los instrumentos para la recolección de los datos (cuestionario y sesión en profundidad), el establecimiento de los criterios de validez y confiabilidad para ellos, las variables consideradas y las categorías de análisis dispuestas para el análisis de las respuestas de los estudiantes incluidos en la muestra.

Luego, presentaremos los resultados obtenidos a partir de la tabulación, análisis y codificación de las respuestas de los estudiantes en la aplicación de los instrumentos de medición, empleando para ello gráficos, tortas o barras. Finalmente, con base en el proceso anterior, determinaremos cuáles son las concepciones sobre el número real que tienen los estudiantes de la Licenciatura en Matemáticas de la Universidad Pedagógica Nacional, después de estudiar y utilizar este concepto durante el ciclo de Fundamentación del Proyecto

Curricular, con base en las concepciones identificadas en el estudio histórico del número real y el análisis didáctico de textos y currículos.

5.1. *SELECCIÓN DE LA MUESTRA.*

La población objeto de nuestro estudio, está constituida por los estudiantes del Proyecto Curricular de la Licenciatura en Matemáticas de la Universidad Pedagógica Nacional que estaban finalizando el ciclo de fundamentación; es decir, los estudiantes que cursaban VI semestre, en el segundo período académico de 2003, y que han estudiado y utilizado el concepto de número real, en diferentes espacios académicos, especialmente los correspondientes a las líneas de álgebra y cálculo, como se muestra en los programas descritos en el capítulo anterior (sección 4.1.2.). Este grupo consta, actualmente, de 38 jóvenes que ingresaron a la Universidad para el primer semestre de 2001, constituyéndose en la segunda cohorte que ingresó al Proyecto Curricular Licenciatura en Matemáticas.

Para la selección de la muestra no empleamos técnicas probabilísticas o aleatorias, decidimos elegir una *muestra dirigida* (no probabilística) con base en la pregunta de investigación dado que, más que representatividad en la muestra, se requiere que los elementos de la población estén sujetos a ciertas características fijadas previamente en el planteamiento del problema y, en este caso, es más conveniente este tipo de muestreo (Hernández, et al, 1998, p.226). Entre los tipos de muestras no probabilísticas (sujetos voluntarios, expertos, sujetos tipo y muestra por cuotas), elegimos *una muestra de sujetos tipo* ya que ésta nos proporciona riqueza, profundidad y calidad en la información suministrada a través de los instrumentos de medición.

Específicamente, optamos por los estudiantes que cursaban el espacio académico Teoría de Conjuntos, durante el segundo semestre de 2003 en el grupo 02, en razón a que este curso se halla en VI semestre dentro del plan de estudios del Proyecto Curricular Licenciatura en Matemáticas. Este grupo estaba conformado por 32 estudiantes, de los cuales a 29 se les aplicó el primer instrumento de observación, los restantes no asistieron a la clase de teoría de conjuntos el día en que se aplicó el cuestionario. Para la aplicación del segundo instrumento se seleccionaron 5 estudiantes de este grupo, quienes presentaron una prueba –cuestionario- más completa en relación con las demás, esto significa que las respuestas fueron dadas explicando o describiendo con detalle sus apreciaciones, a dicha sesión asistieron 4 estudiantes.

5.2. *INSTRUMENTOS DE OBSERVACIÓN.*

Con el fin de obtener, de la muestra, en forma organizada y sistemática la información relacionada con nuestro objeto de estudio, preparamos un *cuestionario simple*, en el cual los encuestados responden por escrito un conjunto de preguntas sin la intervención directa del investigador (Sierra, 1985, p. 264) y una *sesión en profundidad*, para discutir con un grupo de estudiantes, seleccionados de la muestra inicial, en relación con las variables de investigación formuladas (Hernández, et al., op. cit., p. 316).

Las respuestas de los estudiantes, de la aplicación de ambos instrumentos, se constituyen en indicadores empíricos que nos permiten inferir constructos teóricos subyacentes (Fox, 1980, citado por Ruiz, 1993, p. 287); para nuestro caso, los datos analizados son las respuestas de los estudiantes frente a diversas situaciones asociadas al concepto de número real, en términos de definiciones, argumentaciones, gráficas, procesos, etc. y asumiendo que sus respuestas provienen de prácticas significativas para ellos, dichas respuestas constituyen los indicadores empíricos de sus concepciones.

5.2.1. *Determinación de variables.*

Fundamentadas en la noción de concepción expuesta por Sfard, tomada como base para este estudio, y en las hipótesis de investigación establecidas, las variables que definimos son las siguientes:

1. *Representaciones del número real*: específicamente la s representaciones simbólicas, geométricas y verbales, descritas en el apartado 2.3.1.
2. *Situaciones asociadas al concepto número real*: en relación con el porqué (procesos referentes al origen) y para qué (procesos referentes al uso) de los números reales.
3. *Definición de número real*: hace referencia a los enunciados que establecen los estudiantes sobre los números racionales, irracionales y reales; al igual que las características o propiedades de los números reales que los hacen diferentes de otros conjuntos numéricos.

Estas variables fueron analizadas en forma descriptiva, con el fin de caracterizar las concepciones de los estudiantes en relación con éstas, en ambos instrumentos.

5.2.2. ***Confiabilidad y validez de los instrumentos.***

Según autores como Hernández et. al.(1998), Sierra (1985), López (1986, citado por Ruiz, 1993), Messick (1992, citado por Ruiz, 1993), la confiabilidad y la validez son dos elementos indispensables para la elaboración y aplicación de cualquier instrumento de medición, porque ambas condiciones hacen que los resultados de la investigación puedan ser tomados en serio en la medida que se acercan más a la representación de las variables a medir.

5.2.2.1. Confiabilidad.

Entendida la confiabilidad de un instrumento como "*el grado en que su aplicación repetida al mismo objeto produce iguales resultados*" (Hernández, et al., op. cit., p. 235) y teniendo en cuenta que existen diversos procedimientos para determinar la confiabilidad, a saber: medida de estabilidad, método de formas alternativas o paralelas, método de mitades partidas, coeficiente alfa de Cronbach y coeficiente KR-20, decidimos emplear el segundo esto es, *Método de formas alternativas o paralelas;* es decir, como ya se ha manifestado, no aplicamos un solo instrumento, elaboramos una segunda herramienta para la recolección de datos, *sesión en profundidad*, que constituye una versión equivalente al primero, para lo cual seleccionamos un subgrupo de la muestra inicialmente elegida. Se dice que el instrumento es confiable si las respuestas obtenidas con ambos instrumentos son similares, esto se puede corroborar más adelante en la presentación de los resultados.

Se considera también que la confiabilidad es directamente proporcional al número de ítems incluidos en el instrumento de medición, por esta razón, nuestro instrumento tiene mayor confiabilidad.

5.2.2.2. Validez.

Siendo la validez "*el grado en que un instrumento realmente mide la* (s) *variable* (s) *que pretende medir*" (Ibid, p. 236) y sabiendo que existen tres tipos de evidencia de validez: de contenido, de criterio y de contexto; para nuestra investigación la validez de contenido es la más apropiada, dado que las preguntas planteadas, tanto en el cuestionario como en la sesión de profundidad, fueron elaboradas así:

1. *Recopilación de posibles preguntas a incluir en los instrumentos*: Tuvimos en cuenta los ítems planteados por Farias et al. (1999) y Tirosh et al. (2000) y, ejercicios incluidos en libros de texto universitarios que tratan el tópico en cuestión; además, elaboramos otras preguntas con base en las hipótesis y concepciones históricas de número real establecidas en el capítulo tres de este trabajo.

2. *Selección de preguntas que constituirían la primera versión del cuestionario*: En este paso revisamos las preguntas seleccionadas anteriormente y elegimos aquellas que se hallaran más relacionadas con las tres variables a observar.

3. *Elaboración de la prueba piloto:* Las preguntas elegidas en el paso 2. fueron presentadas al asesor del proyecto, a dos profesores del Departamento de Matemáticas y a cinco profesores de matemáticas de Educación Básica, con el fin de que valoraran la pertinencia de las preguntas, en cuanto a su redacción, contenido y el orden de éstas en la prueba, con respecto al objetivo, las hipótesis y las variables de investigación y, la

extensión del cuestionario, estimando que los estudiantes emplearan, a lo más, dos horas en su solución. Atendiendo a sus sugerencias consolidamos la prueba piloto (Anexo C).

4. *Aplicación de la prueba piloto:* Administramos la prueba piloto a 11 estudiantes del Programa Licenciatura en Matemáticas de la Universidad Pedagógica Nacional, a partir de lo cual detectamos algunas imprecisiones en la redacción de los enunciados y constatamos que el tiempo dispuesto era suficiente para el desarrollo del cuestionario.

Con base en el proceso anterior, establecimos el cuestionario definitivo.

Es decir, que las preguntas seleccionadas para la elaboración del instrumento constituyen una muestra representativa de, por un lado, los contenidos y situaciones relacionados con el tema en cuestión, para este caso, número real y por otro, los ítems que dan cuenta de las variables a medir.

En razón a que, para la sesión en profundidad se consideraron, fundamentalmente, preguntas del cuestionario, este instrumento ya posee validez de contenido.

5.2.3. *Cuestionario.*

El cuestionario consta de once preguntas, de las cuales, sólo dos son cerradas, privilegiamos las preguntas abiertas y la solicitud de explicaciones y argumentos a los encuestados con el fin de obtener información que nos permitiera describir con mayor precisión las concepciones que tienen los estudiantes de la muestra sobre los números reales.

Cada pregunta está asociada a alguna variable, como se observa en la siguiente tabla:

VARIABLES	***PREGUNTAS***
1. Representaciones del número real	1f, 2, 4, 9, 10 y 11
2. Situaciones asociadas al concepto número real	1d, 1e, 2 y 3
3. Definición de número real	1a, 1b, 1c, 1f, 5, 6, 7, 8.

A continuación presentamos cada una de las preguntas del cuestionario, describiendo brevemente el objetivo de cada una de ellas:

1. *¿Qué significa para usted*
   a. *un número racional?*
   b. *un número irracional?*
   c. *un número real?*
   d. *¿A qué se debe la existencia de los números irracionales?*
   e. *Los números naturales son utilizados, por ejemplo, para contar; los números racionales, para medir, y ¿los números irracionales para qué sirven?*
   f. *¿Cuál es la necesidad del Axioma de Completitud*[90] *en el conjunto de los números reales?*

Con esta pregunta pretendemos conocer explícitamente qué entienden los estudiantes por número real, número racional y número irracional y caracterizar su concepción como estructural u operativa. Estamos interesadas en conocer las definiciones y representaciones de las cuales se valen los estudiantes para explicar lo que entienden por estos conceptos y las situaciones, matemáticas o cotidianas, con las cuales los relacionan. Consideramos que la precisión, los términos empleados y las propiedades que atribuyen a tales números nos mostrarán una faceta, tal vez la más importante, de las concepciones de los estudiantes.

Además, analizaremos si los estudiantes emplean, para sus respuestas, algunas de las ideas de número real presentes en la historia, incluso, en las teorías formales expuestas por Cantor, Weierstrass, Dedekind, Hilbert o Cauchy.

[90] Todo subconjunto A de números reales no vacío, acotado superiormente posee supremo.

2.

a. *Considere un segmento AB y un punto C en su interior. Divida el segmento AB en 2 partes iguales, después divida cada una de ellas en 2 partes iguales y así sucesivamente. Después de un número finito de veces, tal vez un número muy grande, ¿coincide el punto C con algún punto de las divisiones realizadas? Justifique.*

b. *Considere un segmento AB, divídalo en dos partes iguales, cada una de ellas, divídala en dos partes iguales y repita el proceso con cada uno de los segmentos resultantes, ¿este proceso puede ser continuado de manera indefinida?, ¿es mayor el número de pasos si la longitud del segmento es mayor? Justifique.*

3. *Considere cuatro rectángulos cuyas dimensiones a y b, están dadas por:*

a. $a = 15$ *y* $b = 35$

b. $a = 1{,}5$ *y* $b = 3{,}5$

c. $a = 15\sqrt{3}$ *y* $b = 35\sqrt{3}$

d. $a = 15\sqrt{3}$ *y* $b = 35$

¿Cuáles de estos rectángulos pueden ser divididos en un número entero de cuadrados iguales, trazando rectas verticales y horizontales? ¿Cuántos cuadrados se obtienen?

Mediante estas preguntas esperamos observar si los estudiantes asocian el proceso matemático de medir con los números reales, en particular si asocian el número irracional con la inconmensurabilidad referida a objetos matemáticos ideales y el número racional, con la conmensurabilidad. También, pretendemos saber si los estudiantes se percatan de que, irracionalidad no necesariamente equivale a inconmensurabilidad; para ello, hemos dispuesto el numeral 3.c. en el cual se presentan dos magnitudes expresadas con números irracionales que son conmensurables entre sí.

En las respuestas a estas preguntas esperamos que prime la representación geométrica en el sentido señalado por Rico (1996, p. 47), como "*el arte de los razonamientos ciertos sobre figuras falsas*" y junto con esto, argumentos en la relación inconmensurabilidad–procesos infinitos, que nos permitan vislumbrar el sentido que poseen los estudiantes sobre el infinito.

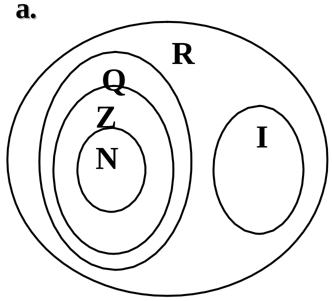
4.

a. *¿Es el número* 0,0100110011001*..., un número racional? Justifique.*
b. *¿Es el número* 0,01001000100001*..., un número racional? Justifique.*
c. *¿Es* $\frac{\sqrt{8}}{\sqrt{2}}$ *un número irracional? Explique su respuesta.*

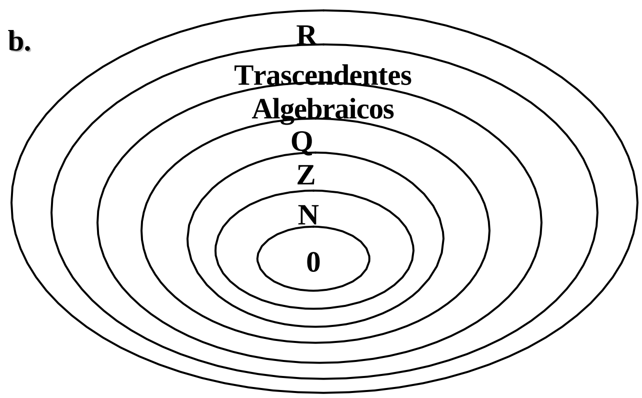
El interés de este ítem está en determinar si los estudiantes diferencian números racionales de números irracionales, a partir de representaciones simbólicas, decimal y operatoria.

5. *Considere los siguientes diagramas de Venn, en su interpretación usual, y decida si son correctos o no; en el último caso, justifique y construya un diagrama que, a su criterio, sea correcto.*

a.



b.



Usualmente, en diversos textos de enseñanza universitaria se expone que el conjunto de los números reales contiene otros conjuntos numéricos, sin hacer claridad en que si bien existen subconjuntos de números reales isomorfos a otros conjuntos como los números naturales, enteros, racionales e irracionales, esto no significa que haya, directamente, una relación de inclusión entre tales conjuntos y $\mathbb{R}$ y, que ello constituya una manera para definir matemáticamente los números reales.

6.

a. *Determine, si se puede, tres números racionales y tres números irracionales entre* $\frac{1}{2}$ *y* $\frac{2}{3}$.

b. *¿Cuántos números racionales hay entre* $\frac{1}{2}$ *y* $\frac{2}{3}$*?, ¿cuántos números irracionales? Explique su respuesta.*

8. *Considere el conjunto* $A = \{x \in \mathbf{R} : 0 < x < \sqrt{7}\}$.

a. *¿Tiene el conjunto A cotas superiores*[91] *en* ***Q****? Si las tiene, dé dos ejemplos.*
b. *¿Tiene el conjunto A cotas superiores en* ***R****? Si las tiene, dé dos ejemplos.*
c. *¿Existe el Supremo de A*[92] *en* ***Q****? Si existe, ¿cuál es?*
d. *¿Existe el Supremo de A en* ***R****? Si existe, ¿cuál es?*
e. *¿Existen diferencias entre las respuestas* ***c.*** *y* ***d.****? Si las hay, ¿a qué cree que se deban?*

9. *Señale si los siguientes enunciados son verdaderos o falsos.*

a. *A cada punto de la recta le corresponde un número real y viceversa.*
b. *Se pueden marcar en la recta todos los números racionales y quedan sobrando algunos puntos.*
c. *Existe un intervalo (a, b), donde a y b son números reales, que sólo contiene números racionales.*
d. *Si agregamos a los números racionales positivos* ν*, e y todos los números de la forma* $\sqrt[n]{\frac{p}{q}}$ *con n, p y q números naturales, obtenemos todos los números reales positivos.*
e. *El conjunto de los números racionales, con la adición y la multiplicación, es un campo ordenado completo.*
f. *0, 999 … < 1*

Para detectar la comprensión de los estudiantes sobre la dicotomía racionales/irracionales, diseñamos estas cuestiones. Pretendemos verificar si los estudiantes distinguen, los números racionales de los números reales por propiedades especiales que no están relacionadas con la estructura algebraica y la ordenación, pues en estos aspectos dichos

---

[91] a es cota superior de A si y sólo si $a \geq x$, para todo $x \in$ A.
[92] a es el supremo de A si y sólo si:
i) a es cota superior de A
ii) ningún número menor que a es cota superior de A.

conjuntos son idénticos; en últimas, qué es lo que le aportan los números irracionales a los reales. En esta dirección, queremos poner de manifiesto si los estudiantes comprenden el papel de la completitud, como característica fundamental de los números reales, distinta de la densidad.

7.

a. *¿Existe un número racional cuyo cuadrado sea el predecesor al número racional 2? Explique.*
b. *¿Existe un número real que sea el siguiente al número real 1? Explique.*
c. *Los números racionales, ¿son numerables[93]? Explique.*
d. *Los números reales, ¿son numerables? Explique.*

Nuestra predilección por estas preguntas radica en indagar si los estudiantes son conscientes de tal distinción y, a la vez, conocen algunas propiedades que diferencian el conjunto de los números reales de otros conjuntos numéricos; en particular, las relaciones *ser sucesor*, propia de los números naturales y *ser antecesor*, propia de los números enteros; la *numerabilidad*, una propiedad que, aunque no es característica de $\mathbb{Q}$ sí hace a los números racionales diferentes de los números reales, puesto que los números irracionales no son numerables; vale decir que la diferencia fundamental entre $\mathbb{Q}$ y $\mathbb{R}$ es la completez (propiedad que no será analizada en esta pregunta), que nuevamente -como la no numerabilidad- es dada a $\mathbb{R}$ por el conjunto de los números irracionales.

10. *Qué significado le da a las siguientes expresiones:*

a. $\dfrac{1}{2} = \dfrac{2}{4}$

b. $\dfrac{1}{2} = 0{,}5$

c. $2+\cfrac{1}{4+\cfrac{1}{4+\cfrac{1}{4+\dots}}} = \sqrt{5}$

d. $\dfrac{1}{3} = 0{,}\ 333...$

e. $\sqrt{2} = 1{,}\ 4142\ldots$

[93] Un conjunto es numerable si existe una biyección entre éste y el conjunto de los números naturales.

11. *Marque con una equis (X) en la casilla que corresponda si cada una de las siguientes expresiones es o no un número real.*

		SÍ	***NO***
a.	$1+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2}}}$	☐	☐
b.	$\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\ldots}}}$	☐	☐
c.	2	☐	☐
d.	$0,123456789101112\ldots$	☐	☐
e.	$0,527692423524683152548796 54\ldots$[94]	☐	☐
f.	$\frac{1}{5}\times e^{\sqrt{3}}$	☐	☐
g.	$\frac{1+\sqrt{5}}{2}$	☐	☐

A partir de estas dos cuestiones buscamos averiguar si los estudiantes aceptan como número real, expresiones simbólicas que contienen notación decimal u operatoria.

Consideramos que las preguntas anteriores constituyen una muestra significativa para responder a nuestra pregunta de investigación dado que tuvimos en cuenta diferentes aspectos relacionados, tanto con el concepto número real como con el constructo concepción aceptado para este estudio.

[94] Las cifras decimales son escritas aleatoriamente.

Respecto a la aplicación del cuestionario, éste fue autoadministrado, puesto que, de manera personal, suministramos los cuestionarios a los estudiantes; para ello se dispuso de una sesión de dos horas. Inicialmente se explicó al grupo de estudiantes el propósito de la investigación, del cuestionario, al igual que algunas sugerencias y aclaraciones para su diligenciamiento. Se insistió en que no era una prueba de carácter evaluativo sobre el conocimiento que poseían por lo cual, no pretendíamos valorar si sus respuestas eran correctas o incorrectas, sólo nos interesaba conocer sus ideas o percepciones frente a las cuestiones propuestas, reflejadas en sus explicaciones.

5.2.4. *Sesión en profundidad.*

Después de leer las respuestas dadas por los estudiantes, elegimos cinco sujetos, que como se describió anteriormente, fueron quienes elaboraron las pruebas con explicaciones más completas; con ellos se concertó una sesión de discusión de dos horas con el fin de profundizar y corroborar las respuestas como los argumentos dados ante ciertas preguntas planteadas en el cuestionario y así, disponer de más elementos para caracterizar las concepciones que poseen los estudiantes.

La sesión en profundidad fue llevada a cabo en el primer semestre de 2004 con cuatro de los estudiantes seleccionados. La discusión giró en torno a ¿qué son los números reales? y a partir de esta pregunta se trataron, los números racionales, los números irracionales, sus características, diferencias, representaciones y situaciones que le dieron origen a estos conceptos y con las cuales se asocian; en suma, las variables del estudio.

Dicha sesión, que tuvo duración de tres horas, fue registrada en memoria escrita por una de las investigadoras y en audio. Inició recordando a los estudiantes la finalidad de la investigación y explicando en qué consistiría la puesta en práctica de este instrumento; se propició un clima de confianza y confortabilidad para lo cual se eligió un sitio cómodo y silencioso; la conductora de la sesión fue la otra investigadora, en consecuencia, conocía el tema y las respuestas de los cuestionarios y, además, a los estudiantes, esto permitió que los sujetos se sintieran libres para expresar sus ideas y cuestionar las de los otros participantes, como ellos mismos lo manifestaron al finalizar la aplicación del instrumento.

5.3. CATEGORÍAS DE ANÁLISIS.

Como ya se ha explicitado, las preguntas de ambos instrumentos de medición son, predominantemente abiertas, por lo que el establecimiento de categorías se realizó después de conocidas las respuestas de las personas a quienes se les aplicó (Hernández, et al., op. cit., p. 289) atendiendo a las principales inclinaciones presentadas.

Expondremos a continuación las categorías que se establecieron para tipificar las respuestas a cada pregunta, analizando cada una de las afirmaciones dadas por los estudiantes.

5.3.1. ***Pregunta No. 1, numerales a., b. y c.:***

Consideramos dentro de las respuestas de los estudiantes los términos que utilizan para explicar lo que son, para ellos, los números reales, los números racionales y los números irracionales, si presentan alguna definición formal, la usan sin precisar detalles, si se valen de las presentaciones que hacen los textos de la secundaria o, simplemente emplean términos del lenguaje popular, atendiendo a sus propias ideas o a imaginarios que poseen de estos conceptos. Estas nociones pueden ser, "*según Tall y Vinner (1989), una descripción de la propia imagen conceptual que tengan de esta noción, o bien que se trate, según Freudhental (1973), de una definición operacional, es decir de una descripción de los usos que ellos recientemente han hecho de ella*" (Ruiz, op. cit., p. 307).

Las categorías establecidas son:

1. *Enunciado incompleto de alguna definición formal (IF):*

Observamos que algunos estudiantes escriben definiciones aproximadas a las formales[95] en el sentido que no señalan todas las condiciones necesarias y suficientes para cada concepto, algunos ejemplos de respuestas textuales que incluimos en esta categoría son las siguientes:

– "*Un número racional es un número de la forma* $\frac{p}{q}$ *donde p y q son primos relativos*"

– "*Número racional es una clase de fracciones equivalentes*"

– "*Un número racional es una familia de parejas (a, b) donde a y b son números enteros*"

– "*Un número irracional es el límite de una sucesión*"

– "*Número real es aquel que surge a partir de las cortaduras de Dedekind*"

– "*Un número real es un elemento de un conjunto, llamado conjunto de los números reales que tiene dos operaciones, con las cuales cumple los axiomas de campo y orden*"

2. *Enunciado incompleto equivalente a alguna definición formal (IEF):*

Algunos sujetos emplean representaciones usuales de los números racionales, irracionales o reales para definirlos; sin embargo, sus expresiones son imprecisas porque, por una parte, la redacción que usan no es correcta y por otra, omiten algunos detalles que son

[95] Para los números racionales, la definición formal es la siguiente: Un número racional es un elemento del conjunto cociente $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}^*/\sim$, donde $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}^* = \{(a, b): a, b \in \mathbb{Z}$ y $b \neq 0\}$ y $\sim$ denota la relación de equivalencia entre elementos de $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}^*$ definida como $(a, b) \sim (c, d)$ si y sólo si $ad = bc$ (Muñoz, 1994, pp. 211-212; Perterson, et. al., 1969; Luque et. al., 2001, p. 65). Para los números irracionales, hay varias definiciones formales, de acuerdo con la teoría de los números reales, por ejemplo, según Dedekind "*cada número racional a produce una descomposición del sistema de los números racionales en dos clases A_1, A_2 tales que todo número a_1 de la primera clase A_1 es menor que cada número a_2 de la segunda clase A_2; el número a es o bien el mayor número de la clase A_1 o bien el menor de la clase A_2. (…) cada vez que encontramos una cortadura (A_1, A_2), que no es producida por un número racional, creamos un nuevo número irracional* α, *que consideramos completamente definido por esa cortadura*" (Dedekind, 1888, p. 85-87), para más detalle o para complementar ver la sección 3.1.4. de este trabajo.

indispensables para la definición; además porque se basan en una idea de número racional o irracional que no fue enunciada con exactitud. Por ejemplo:

– "*Un número racional es el que se puede representar mediante el cociente de dos números enteros*"
– "*Un número irracional es aquel posee decimales infinitos no periódicos*"
– "*Un número irracional es un número que se puede escribir como una fracción continua infinita*"
– "*Un número irracional es un número que no es racional*"
– "*Un número real es una familia de números que se le puede hacer corresponder un punto en la recta*"
– "*Un número real es aquel que es racional o irracional*"

3. *Enunciado no relacionado con alguna definición, utilizando representaciones simbólicas (RS):*

En esta categoría reunimos aquellas declaraciones expuestas por los estudiantes, que aunque usan representaciones asociadas con los números racionales, los números irracionales o los números reales, no constituyen una definición; además hay falencias en la redacción de las ideas. Algunos ejemplos son:

– "*Una representación de un número racional es* $\frac{a}{b}$, *el cual sirve por ejemplo para expresar un número no periódico de tal forma que sea factible sus operaciones*"
– "*Un número irracional es aquel de la forma* $\sqrt{b}$ *donde b pertenece a los naturales*"
– "*Los irracionales, por tener infinitas cifras decimales no periódicas, la suma entre dos irracionales en algunas ocasiones no se puede determinar sin dejar la suma indicada* ($\sqrt{2}+\sqrt{3}=?$)"
– "*Número irracional aquel que no se puede construir con regla y compás, es decir que no posee una ubicación exacta en la recta de los números reales*"
– "*Un número real es un conjunto no numerable*"

– "*Un número real es un nombre que se le da a un conjunto que tiene los subconjuntos de números naturales, enteros, racionales e irracionales*"

4. *Enunciado no relacionado con alguna definición, utilizando expresiones del lenguaje común (EC):*

Abarcamos en esta categoría aquellas ideas presentadas por los estudiantes en las que usan expresiones del lenguaje común, coloquiales, para describir un concepto matemático, por lo cual son bastante imprecisas:

– "*Un número irracional es un" monstruo"…"*
– "*Los resultados de las operaciones entre irracionales pueden ser sorprendentes o simplemente desilusionantes* "
– "*Este número es lo que se puede llamar un monstruo, usted se le acerca y se le aleja y cree que ya lo cogió pero todavía está frío* " (se refiere a los números irracionales)
– "*Que un número sea real, significa dos cosas: 1. Que se "comporte bien", es decir, que sea racional o 2) Que sea un "monstruo"* "

5.3.2. *Pregunta No. 1, numerales d., y e:*

Estos dos ítems son básicos para nuestro trabajo dado que en los números irracionales está el foco de nuestra investigación, por ser éstos los que marcan la diferencia fundamental entre los números racionales y los números reales; además, es importante conocer cuáles son los argumentos que dan los estudiantes frente al uso y necesidad de los números irracionales, en suma, de los números reales, si conocen y son concientes de la importancia de éstos en y para las matemáticas. Basadas en las situaciones con las cuales los estudiantes vinculan tanto la utilidad como el origen de los números irracionales, determinamos las siguientes categorías:

1. *Origen o utilidad de los números irracionales al interior de las matemáticas (IM):*

En este grupo ubicamos aquellas respuestas en las cuales los sujetos justifican la existencia o utilidad de los números irracionales en la resolución de problemas propios de las matemáticas, para sustentar o permitir el trabajo en diferentes teorías al interior de la geometría, el cálculo, el análisis, etc., como se ve en los siguientes ejemplos:

– "*Los números irracionales son una creación para la coherencia teórica de las matemáticas*"
– "*Los números irracionales sirven para completar la recta numérica y que no queden hueco, es decir, hacerla continua*"
– "*Los números irracionales son elementos necesarios que permitieron que la aritmética y el álgebra no se detuvieran*"
– "*En primera instancia, la existencia de los números irracionales, se debe a algunas construcciones geométricas, en álgebra, por la aparición de ecuaciones sin solución en los números racionales*"
– "*Pienso que la existencia de los números irracionales se debe en primera instancia al problema de la inconmensurabilidad de los griegos*"

2. *Origen o utilidad de los números irracionales por interés académico o intelectual (IA):*

Algunos estudiantes refieren el uso de los números irracionales y su existencia a la curiosidad, la imaginación, etc. Veamos ejemplos:

– "*No conozco ninguna aplicación de los números irracionales, excepto que nos sirven para divertirnos haciendo parte de singulares problemas y teorías"*
– "*Los números irracionales aparecieron cuando nadie se lo esperaba debido al arduo trabajo con los números y ciertas relaciones encontradas*"
– "*Los números irracionales sólo hacen parte de la imaginación*"

3. *Origen o utilidad de los números irracionales en relación con actividades prácticas (AP)*

En esta categoría reunimos aquellas respuestas en las cuales los estudiantes asocian los números irracionales con actividades de tipo práctico, en ramas de las matemáticas o con algún proceso específico. Algunos ejemplos son los siguientes:

– "*En particular, sé que los irracionales como* $\surd$ *sirven para hallar áreas, perímetros y volúmenes, existen otros como e para calcular logaritmos"*
– "*Los irracionales se deben a la necesidad de determinar con mayor exactitud las longitudes*"
– "*Los números irracionales sirven para medir*"
– "*Los números irracionales sirven para representar o identificar medidas*"
– "*Se utilizan para encontrar regularidades en las matemáticas, como la de* $<\pi$ *con la serie de Fibonacci*"

4. *Otras (O):*

Aquí incluimos las respuestas que no se ajustan a alguna de las categorías anteriores por presentar ambigüedad o ser extrañas; por ejemplo:

– "*¡Es imposible pensar que determinada cantidad se pueda expresar como* $\sqrt{2}$ *! En mi concepto el número irracional no es objeto de estudio"*
– "*Los números irracionales sirven para impresionar, es la prueba clara de que aún falta demasiado por estudiar*"

5.3.3. *Pregunta No. 1, numeral f.:*

Dentro de la presentación axiomática de los números reales, el axioma de completitud es el que marca la diferencia entre el conjunto de los números racionales y el de los números reales; de ahí la importancia de conocer las apreciaciones de los sujetos interrogados. De dichas apreciaciones extractamos estas categorías:

1. *Relacionada con la correspondencia biunívoca entre los números reales y los puntos de la recta (RBR):*

Aquí agrupamos aquellas respuestas como:

– "*Para justificar la existencia de tantos números reales como puntos de la recta*"
– "*Se debe a que en la correspondencia biunívoca que se hace con los puntos de una recta y el conjunto de los números reales no queden huecos. Es hacer ver que así como en la recta no hay perturbaciones o huecos, con los reales tampoco sucede esto*"
– "*Para establecer y sentar el continuo numérico*"

2. *En relación con aspectos asociados al enunciado de completitud (AC):*

Hay estudiantes que asocian el axioma de completitud con los términos usados en su enunciado y, en consecuencia, la utilidad de este axioma está ligada a algunos tópicos del análisis, así:

– "*Hace parte importante en diversas teoría hechas usando los números reales como por ejemplo, las series y las sucesiones"*
– "*El axioma de completitud es de importancia a la hora de estudiar el cálculo elemental ya que se induce el concepto de conjunto acotado y surge ka existencia de un sup en todo subconjunto real*"

3. *Otras (O):*

Agrupamos en esta categoría las respuestas que no se hallan en alguna de las categorías anteriores por ser enunciados insólitos; estas son:

– "*La necesidad del axioma de completitud en el conjunto de los reales es para mostrar que hay infinitos reales*"

– "*La necesidad del axioma es que permite comprender que entre dos reales cualesquiera y diferentes hay otro real y que no siempre se pueden contar los números reales en un intervalo*"

– "*Por la necesidad de tomar en cierto momento del conjunto de los números reales cierto subconjunto*"

– "*La necesidad puede ser saber que los números tienen un orden* "

5.3.4. ***Pregunta No. 2, numeral a.:***

Aunque nuestro interés en esta pregunta radicaba en la dicotomía procesos finitos-procesos infinitos en relación con la representación geométrica asociada a los números reales, dichos procesos no son considerados importantes para los estudiantes, salvo uno, las justificaciones que dan en sus respuestas son de otro estilo, por ello nos basamos en ellas para establecer las categorías que enunciaremos a continuación, insistimos que más que calificar como correcta o incorrecta cada explicación deseamos determinar sus concepciones, por ello, aquí no atenderemos a que su respuesta haya sido Sí, No o en el mejor de los casos, Depende.

1. *Diferenciación entre procesos finitos e infinitos (FI):*

Como ya lo manifestamos sólo un estudiante hace esta diferencia, así lo escribe:

– "*Puede ser que usted tome un C y "bingo" resultó ser el punto medio, pero con un proceso finito, muy grande, pero finito que usted realice, la partición del punto medio del segmento no lo toque, ya que C puede estar en la n + k división del segmento (k pertenece a N) o en el lugar 1/n donde n es primo diferente de 2*"

2. *Uso de contraejemplos (C):*

En esta categoría se hallan estas respuestas:

– “*No siempre coincide. Supongamos que el punto está a un tercio de la primera mitad. Nunca habrá un corte que coincida porque no existe múltiplo de 2 que llegue a 1/3*”
– “*No, ya que si por ejemplo C está ubicado en la tercera parte de AB, entonces C no coincidirá con algún punto de la división hecha ya que siempre se obtiene un número par de divisiones iguales*”

3. *Correspondencia entre los puntos de un segmento y los números reales (racionales e irracionales) (PSR):*

Los estudiantes atribuyen a los puntos de un segmento números reales, con base en esto y en números racionales específicos para el problema planteado, algunas de las respuestas son:

– “*Depende. Si C es un racional* $[n, 2^m]$ *sí, de lo contrario no*”
– “*Puede ser que sí, en el caso que el segmento AB se divida en* 2^n *partes y C sea uno de los puntos de dicha partición. Pero si C es, por ejemplo, un número irracional, nunca coincidirá*”

4. *Correspondencia entre propiedades o construcciones de los números reales y características atribuidas a un segmento (PRS)*

Aquí incluimos respuestas en las cuales los estudiantes, basándose en la correspondencia entre los puntos de un segmento y los números reales, atribuyen al primero propiedades específicas de los números reales y con base en ellas argumentan, esto no implica, como es obvio, que las explicaciones dadas sean correctas o al menos coherentes:

– “*Como C es cualquier número que pertenece al intervalo AB, la primera posibilidad es que sea el punto medio de AB, otra posibilidad es que nunca consigamos que esté en alguna de las divisiones pero nos acercaremos mucho a él por el axioma de completitud*”
– “*Sí, coincide porque el procedimiento que estoy aplicando es completar la recta es decir algo muy similar a las cortaduras de Dedekind* ”

– “*Digo que el caso puede darse. C siempre está acotado aunque alguna de sus cotas se vaya modificando en cada bipartición por una que esté más cerca de C. Digo que C es límite de alguna sucesión y cuando asevero lo anterior estoy diciendo que en cada nueva partición hay mejor aproximación respecto a C*”

5. Otras (O):

Aunque ya hemos presentado respuestas inconsistentes, hay otras que no se pueden ubicar en las categorías señaladas, pues denotan falta de comprensión del problema, algunas de ellas son:

– “*Puede que sí, porque cada vez que dividimos el segmento en partes iguales y así sucesivamente, la división se va acercando a un extremo en el cual se dividió lo que indica que representa un real y C es cualquier real* ”

– “*En un caso general puede que sí o puede que no, esto depende de la longitud del segmento en el lugar en el cual ubiquemos nuestro punto, si lo hacemos directamente midiendo, seguramente lo hallaremos*”

– “*(La idea de dividir un segmento en partes iguales es falsa pues el conjunto real no es numerable)No, porque dado un a_1, a_2, …, a_n número reales, existe siempre un a_{1+n} que es mayor que a_1 (axioma de completez) y por el teorema de recubrimiento, esto no es posible (Teorema de Borel)*”

– “*El punto C no coincide con alguna de las divisiones realizadas, porque siempre hay partes más pequeñas y mucho más pequeñas en las divisiones realizadas*”

5.3.5. ***Pregunta No. 2, numeral b.:***

Dado que el objetivo de la pregunta estaba en observar si los estudiantes estaban seguros de la posibilidad teórica de subdividir infinitamente un segmento y con base en las respuestas encontradas, definimos estas categorías:

1. *Correspondencia biunívoca entre los puntos de un segmento y los números reales (PSR):*

Para explicar la posibilidad de hacer un proceso indefinidamente, los estudiantes recurren a la correspondencia entre los números reales y los puntos de un segmento; algunas de las respuestas son:

– "*Sí puede ser de manera indefinida porque entre cualquier par de números siempre existe otro, en particular el que está en la mitad*"
– "*El proceso puede ser continuado de manera indefinida pues hay infinito [n, 2^n] números, como el proceso es indefinido no importa el tamaño del segmento*"
– "*Sí, ese proceso se puede continuar infinitamente ya que un segmento es igual de potente a una recta y se puede establecer una bisección entre R y la recta*"

2. *Uso de propiedades geométricas de los segmentos (PGS):*

Los estudiantes se basan en propiedades geométricas de los segmentos, con ello argumentan que un proceso pueda ser continuado indefinidamente:

– "*Se puede seguir indefinidamente; si pensamos lo contrario, estaríamos afirmando que entre dos puntos hay un número finito de puntos. Por tal razón, no tiene sentido decir que el número de pasos aumenta cuando la longitud del segmento es mayor*"
– "*Si puede ser continuado porque, aun cuando los segmentos sena muy pequeños tienen punto medio. No es mayor el número de pasos si el segmento es más grande, porque encontrar el punto medio de un segmento nada tiene que ver con su longitud*"

3. *Consideración de un segmento como ente físico (SF):*

Hay un estudiante que no distingue claramente la diferencia entre un segmento como ente ideal, abstracto y la representación física de éste, como muestra, escribe lo siguiente:

– "*No es un proceso indefinido porque el segmento me limita una longitud específica y entre más grande sea esta longitud, más grande es el proceso, pero con finitud*"

4. *Otra (O)*

En este grupo están aquellas respuestas que no corresponden a alguna de las anteriores categorías, los ejemplos son:

– "*Sí, porque el conjunto de los números reales no es numerable"*
– "*Sí, por ejemplo en el intervalo (0, 1) de los números reales sí puede ser indefinido el proceso y éste es un intervalo un poco pequeño de longitud*"

5.3.6. *Pregunta No. 3:*

Con base en el propósito de esta pregunta y el análisis y estudio de las respuestas de los individuos de la muestra, definimos las siguientes categorías:

1. *Comprensión de la conmensurabilidad-inconmensurabilidad (CCI):*

Agrupamos en este apartado respuestas de estudiantes que indicaron las opciones a., b. y c. como las únicas que cumplen con las condiciones de la pregunta, dado que según sus respuestas estos sujetos comprenden la conmensurabilidad y la inconmensurabilidad como relaciones entre dos magnitudes, una de la cuales es considerada como unidad de medida; para el caso de la tarea solicitada, los estudiantes debían encontrar el patrón para señalar la cantidad de cuadrados que se obtenían. Resaltamos que tres estudiantes elaboraron procedimientos generales para este ítem, en lo referente a la cantidad de cuadrados, y aunque esto no hace parte de los propósitos de esta investigación en el anexo E presentaremos dichos procedimientos.

2. *Conmensurabilidad-inconmensurabilidad ligada con expresiones racionales-irracionales, respectivamente (CQII):*

Incluimos en esta categoría las respuestas de quienes indican que sólo es posible dividir en un número entero de cuadrados iguales los rectángulos de las opciones a. y b., dado que las dimensiones de éstos están expresadas únicamente con números racionales, tal como lo establecen los mismos estudiantes; no queremos decir que esto sea correcto, insistimos que ese no es nuestro interés.

3. *Otras (O):*

En este grupo están las demás respuestas que no permiten ser reunidas en alguna de las categorías anteriores, en general porque no muestran el procedimiento utilizado.

5.3.7. *Pregunta No. 4:*

Atendiendo al interés de esta pregunta establecimos las siguientes categorías, evidenciadas en las justificaciones que dan los estudiantes:

1. *Representación simbólica, notación decimal (SND):*

En esta categoría se hallan aquellas respuestas que utilizan como argumento, para determinar si un número es racional o no, que el número dado posea o no período en las cifras decimales que lo conforma, respectivamente.

2. *Representación simbólica, notación operatoria (SON):*

Aquí incluimos el uso de representaciones con notación operatoria en forma de fracciones, fracciones continuas o series para explicar que un número sea racional o irracional; los estudiantes que las emplearon, en sus respuestas, inicialmente pasaron de una representación a otra a través de algún mecanismo usual.

3. *Utilización de propiedades algebraicas (PA):*

En particular, para el numeral c. de esta pregunta fue común el uso de propiedades algebraicas de los radicales para simplificar la expresión dada y obtener el cociente y con base en él, decidir, de acuerdo a la representación obtenida, si el número era irracional.

6. Otras (O)

Aquí ubicamos respuestas como:

– "*No tiene sentido hablar de 0, 01001000100001… como número racional o irracional. De hecho, los puntos suspensivos no dicen nada"*
– "*Es sólo un número real, en los números reales no hay discriminación hacia los racionales o irracionales*" (hace referencia a 4.c.)
– "*No es racional porque no es construible*" (se refiere a 4.c.)
– "*No es racional porque no tiene periodo*" (se refiere a 4.c.)
– "*Es un número irracional porque el cociente de irracionales da irracional*" (se refiere a 4.c.)
– " $\frac{\sqrt{8}}{\sqrt{2}}$ *es irracional, porque ¿qué tal que no? Supongamos que* $\frac{\sqrt{8}}{\sqrt{2}} = \frac{a}{b}$ *con a y b enteros. Entonces* $\sqrt{8} = a$ *y* $\sqrt{2} = b$*. Pero* $\sqrt{8}$ *y* $\sqrt{2}$ *no son enteros, son irracionales*"

5.3.8. ***Pregunta No. 5, numeral a.:***

Con base en las justificaciones dadas por los sujetos de la muestra determinamos estas categorías:

1. *Los números racionales e irracionales son una partición de R (QI):*

Los estudiantes deciden el diagrama como incorrecto porque no existen números reales que no sean o racionales o irracionales.

2. *El conjunto de los números enteros no está contenido en el de los números racionales (ZQ):*

Un estudiante está de acuerdo con el diagrama salvo porque:

– "*... que todo número entero sea número racional no es cierto ya que los números racionales son familias de parejas ordenadas y lo que ocurre es que hay unos elementos de los racionales que tienen el mismo comportamiento de los enteros, todo lo demás es cierto"*

3. *Otras*

Las respuestas aquí ubicadas son extrañas o incoherentes con otras formulaciones planteadas en puntos anteriores o falsas; por ejemplo:

– "*El diagrama a. no es correcto porque los números racionales son un subconjunto de los números irracionales"*
– "*El diagrama a. no es correcto porque los números racionales son un subconjunto de los números irracionales"*
– "*El diagrama es incorrecto porque toma los irracionales como números a parte y éstos están contenidos en los irracionales*"
– "*Los irracionales son reales por tanto el diagrama de Venn no es el correcto*"
– "*Falso, porque si Q no está contenido en I tendremos que si el diagrama es cierto* $\sqrt{2} \cdot \sqrt{2} \in I$ *y esto es falso*"

5.3.9. ***Pregunta No. 5, numeral b.:***

Teniendo en cuenta las explicaciones escritas por los estudiantes, se tienen estas categorías:

1. *Los números trascendentes y algebraicos son una partición de los números reales (TA):*

Hay estudiantes que distinguen que una manera de clasificar los números reales es por ser trascendentes o algebraicos, por lo cual señalan que el diagrama es incorrecto.

2. *El conjunto de los números reales es visto como la totalidad numérica (RT)*

El conjunto de los números reales es considerado como el conjunto de todos los números y en razón a, básicamente, este argumento deciden si es correcto o no. Algunos ejemplos de respuestas inmersas en este apartado son:

– "*Válido ya que el conjunto de los números reales encierra a todos los números*"
– "*El diagrama es incorrecto porque no describe todas las clases de números y sus contenencias*"

3. *Otras(O)*

Ejemplos de las respuestas distribuidas en esta sección son:

– "*El diagrama no es correcto porque los números naturales no son trascendentes*"
– " *Creo que un diagrama nunca justificará que el mayor de los conjuntos dados es el real*"

5.3.10. *Pregunta No. 6:*

Tanto los números racionales como los reales poseen la propiedad de densidad, queremos determinar si los estudiantes la identifican como una característica común entre estos conjuntos numéricos; de acuerdo con esto, establecemos categorías para las justificaciones entregadas por los estudiantes, básicamente, en el numeral b. de esta pregunta.

1. *Enunciado explícito de la densidad de Q y R (DQR):*

En esta categoría abarcamos las justificaciones en las cuales las personas utilizan el término "densidad" o el significado de esta propiedad como fundamento para su argumento. Ejemplos:

– "*Entre* $\frac{1}{2}$ *y* $\frac{2}{3}$ *hay infinitos números racionales por la densidad de los números racionales; como entre dos racionales hay un irracional, así hay también infinitos irracionales*"

– "*Hay infinitos racionales entre* $\frac{1}{2}$ *y* $\frac{2}{3}$ *ya que hay infinitos racionales entre dos cualesquiera de ellos al igual que hay infinitos irracionales entre dos irracionales cualesquiera*"

2. *Referencia o utilización de métodos para determinar números racionales o irracionales entre los números dados (M)*

Agrupamos en esta sección aquellas respuestas basadas en la existencia de un método específico para hallar números racionales o irracionales a partir de los números dados; implícitamente, hay aceptación de la densidad de estos números; en el anexo F mostramos algunos de los métodos empleados por los estudiantes. Dentro de los métodos encontrados, señalamos dos tipos ejemplificados enseguida:

2.1. *Métodos geométricos (MG):*

Basados principalmente en la posibilidad de dividir un segmento cualquiera en *n* partes congruentes (*n* es un número natural):

– "*Entre* $\frac{1}{2}$ *y* $\frac{2}{3}$ *hay infinitos racionales e irracionales, ya que se puede encontrar el punto medio entre dos de los números*"

– "*Existen infinitos números racionales.* $\frac{\frac{1}{2}+\frac{2}{3}}{2}$, $\frac{\frac{1}{2}+\frac{2}{3}}{3}$, $\frac{\frac{1}{2}+\frac{2}{3}}{4}$, ..., $\frac{\frac{1}{2}+\frac{2}{3}}{n}$ *Esta es una forma de hallar infinitos números*"

2.1. *Métodos basados en aproximaciones decimales de números reales (MAD):*

Hay estudiantes quienes expresan en notación decimal los números racionales dados y a partir de ella hallan números racionales; por ejemplo:

– "$\frac{1}{2} = 0.5$ *y* $\frac{2}{3} = 0.\overline{6}$. *Números en el intervalo dado:* $0.5\overline{1} = \frac{46}{90}$, $0.59 = \frac{59}{100}$, $0.52 = \frac{13}{25}$"

Para los números irracionales usan aproximaciones decimales de irracionales usuales como π o $\sqrt{2}$, así:

– "*Entre* $\frac{1}{2}$ *y* $\frac{2}{3}$ *hay infinitos irracionales, basta seguir el proceso con* $\sqrt{\ } - x$, *con* $x \in Q$, *por ejemplo* $x = 2.5, 2.51, 2.511$"

– "$\sqrt{2} = 1.41\ldots$, $\sqrt{2} - 0.9 = 0.51\ldots$ *entonces el número* $\sqrt{2} - \frac{9}{10}$ *está en el intervalo*"

3. *No hay comprensión de la densidad como propiedad común de Q y R (NDQR):*

En las respuestas escritas por los sujetos de la muestra aparecen otras propiedades de R que los estudiantes utilizan para dar respuesta a esta pregunta, empleando términos como numerabilidad, e implícitamente, la completitud del conjunto de los números reales. Algunos ejemplos son:

– “*Entre* $\frac{1}{2}$ *y* $\frac{2}{3}$ *hay un conjunto no numerable de números reales. Esto implica que haya tantos racionales como irracionales se quieran*”

– “*Irracionales existen muchos infinitos porque entre* $\frac{1}{2}$ *y* $\frac{2}{3}$ *no pueden existir sólo números racio nales*”

4. *Otras*

Aquí incluimos aquellas respuestas ambiguas respecto a las categorías antes descritas, como por ejemplo:

– “*No sé cuántos números racionales hay entre* $\frac{1}{2}$*y* $\frac{2}{3}$*, sólo sé que son muchos, ya que si yo tomo una determinada cantidad de números racionales siempre va a aparecer otro número racional dentro de este intervalo e igual sucede con los números irracionales*”

– “*Sí se puede determinar racionales e irracionales entre los números dados* ya *que en el caso de los números racionales al hacer el cociente quedan ubicados entre estos dos números, pero no se sabe cuántos. Igual para los irracionales.*”

5.3.11. ***Pregunta No. 7, numerales a. y b.:***

En estas dos preguntas, como ya se ha manifestado, buscamos determinar si los estudiantes atribuyen a los números reales características propias de otros conjuntos numéricos, como lo son, la existencia de sucesores o predecesores. Las respuestas de los estudiantes fueron categorizadas así:

1. *Aceptación de que las relaciones “ser sucesor de” o “ser antecesor de” no son propias de R*

En esta categoría hay dos tipos de argumentos que se constituyen en subcategorías:

1.1. *Inexistencia de definición para las relaciones dadas (NSA):*

– "*No hay cuadrado que sea predecesor al número racional 2; ya que dentro de los números racionales no se ha definido sucesor ni antecesor*"

1.2. *Utilización de características de R para justificar que las relaciones "ser sucesor de" o "ser antecesor de" no son propias de R (CR):*

Hay estudiantes que justifican la no existencia de sucesores o antecesores de los números reales con base en características de R como la completez, la densidad, o la no enumerabilidad; veamos:

– "*No, ya que entre dos números reales siempre hay infinitos reales*"
– "*No, porque en los reales siempre hay un número entre otros dos, en virtud del axioma de completez*"

2. *Atribución de las relaciones "ser sucesor de" o "ser antecesor de" a los números reales (SSA):*

En esta categoría ubicamos aquellas respuestas que aceptan la existencia de sucesor o antecesor de un número real dado, algunos dicen no poderlo determinar y otros dan ejemplos específicos, veamos algunas declaraciones textuales:

– "*Pienso que es sumamente difícil (imposible) encontrar el predecesor del número racional 2, pero de que existe, existe*"
– "$\left(\frac{2}{2}\right)^2$ es el predecesor de 2, es decir, 1"
– "*Si puede existir, el 2 es el siguiente al número real 1 y 2 también es real*"
– "*Sí existe y puede ser 1.00000000…1 el cual es un número real*" (Se refiere al sucesor del número real 1)

– "*Claro que existe, que sea indeterminable es otra cosa*" (Respecto al sucesor del número real 1)

5.3.12. *Pregunta No. 7, numerales c. y d.:*

Establecimos las siguientes categorías atendiendo al objetivo de la pregunta, la hipótesis número 6 (sección 1.3.) y las respuestas del personal encuestado, así:

1. *Aceptación de la numerabilidad de Q y la no numerabilidad de R (AN):*

En este apartado se distinguen dos categorías:

1.1. *Argumentaciones cercanas a una demostración (ACD)*

En esta categoría están incluidos aquellos argumentos que intentan reproducir la demostración formal para la numerabilidad de Q o la no numerabilidad de R, en el anexo G se muestran algunas de las respuestas de los estudiantes.

1.2. *Referencia a la definición de numerabilidad (AD):*

Aquí agrupamos aquellas respuestas que señalan que hay correspondencia biunívoca entre los números naturales y los números racionales y que no la hay entre N y R porque no hay bisección entre N y algún intervalo de R isomorfo a él.

1.3. *Argumentos basados en actividades personales (AP)*

En esta categoría están justificaciones relacionadas con la persona misma; ejemplos son:

– "*Los números reales no son numerables. En realidad no he podido escribir los números reales en una lista*"

– "*Los números reales no son numerables ya que $I \in R$ y como los definí anteriormente, no tienen un período definido*"

2. *Atribución de numerabilidad a Q y a R (NQR):*

En esta categoría ubicamos enunciado en los cuales relacionan la numerabilidad de un conjunto con el orden o la infinitud, algunos ejemplos son:

– "*Sí, porque los naturales al igual que los irracionales y reales son infinitos y la bisección es posible porque siempre hay un orden*"
– "*Como ambos conjuntos son infinitos si son numerables ya que cada uno de ellos posee un lugar en la recta*"

3. *Q y R no son numerables (QRNN):*

Al igual que en la categoría anterior, los estudiantes no han comprendido el significado de numerabilidad, como se observa en este ejemplo:

– "*Los números racionales no son numerables pues no se puede hacer una correspondencia entre ellos y los números naturales. En consecuencia los números reales no son numerables*"

5.3.13. ***Pregunta No. 8, numeral e.:***

Los numerales a., b., c., y d., sólo serán tabulados en los resultados en relación con las respuestas correctas o incorrectas dadas por los estudiantes, ellas son sólo el preámbulo para el numeral e., en el que se revela si los sujetos de investigación comprenden la importancia del axioma de completez, esta pregunta y la del ítem 1.f. están estrechamente relacionadas.

Las categorías establecidas son:

1. *Aceptación de diferencias entre R y Q:*

1.1. *Asociada a la completez de los números reales (AC):*

Aquí se hallan respuestas que aunque no utilizan específicamente el axioma de completez, sí muestran interpretaciones de éste:

– "*La diferencia está en que con Q no hay supremo, mientras que en R, sí*"
– "*Si hay diferencias porque en R se incluyen a los irracionales. El conjunto de los números racionales es subconjunto de R, por tanto no todo elemento de R está en Q"*

1.2. *Sin justificación precisa (ANJ)*

Agrupamos en esta categoría declaraciones, que si bien, tienen similitud con las respuestas ubicadas en la categoría anterior son más simples:

– "*Sí hay diferencias y se deben a los conjuntos de referencia que se están considerando*"
– "*La diferencia está en las diferencias entre los racionales y los reales*"

2. *Negación de diferencias entre R y Q asociado a características comunes entre ambos conjuntos o relaciones entre ellos (ND):*

Ejemplos de respuestas incluidas aquí, son:

– "*No hay diferencia porque los racionales son subconjunto de los reales*"
– "*No hay diferencias ya que en ningún conjunto hay supremo"*

3. *Otras (O):*

Encerramos en esta categoría respuestas que denotan falencias en la distinción de términos como cotas superiores, supremo y máximo, vale destacar que como se ve en el anexo D, el cuestionario incluye las definiciones; también hay incoherencias en relación con las preguntas formuladas; los ejemplos son:

– "*Si el conjunto estuviera bien definido:* $\{x E \mathbf{R}: 0 < x \leq \sqrt{7}\}$ *sí habría supremo en ambos conjuntos*"
– "*Sí hay diferencias: creo que se deben a la notación del intervalo*"
– "*Insisto, el conjunto de los números reales no es contable, implica que no es numerable*"

5.3.14. ***Pregunta No. 9:***

Con esta pregunta, cuyo fin básico era de control, pretendíamos establecer si los estudiantes se ubicaban en las siguientes categorías o sus negaciones, de acuerdo a si se mostraban a favor o en contra de cada una de las proposiciones planteadas en la pregunta. Dado que no se pidieron justificaciones de las respuestas, no establecemos categorías más específicas para cada una de las siguientes:

1. *Aceptación de la representación de los números reales como puntos en la recta numérica o en un intervalo (a, b).(PSR)*
2. *Conocimiento de la existencia de números irracionales que no se pueden expresar como* π *o e o de la forma* $\sqrt[n]{\frac{p}{q}}$ *con n, p y q números naturales.(DOI)*
3. *Aceptación de los números reales como el único campo ordenado completo, salvo isomorfismos.(DF)*
4. *Aceptación de la equivalencia entre series geométricas convergentes y números reales (ESR)*

5.3.15. ***Preguntas No. 10 y 11:***

Las categorías establecidas para tipificar los significados atribuidos por los estudiantes a las expresiones señaladas en esta pregunta, están relacionadas con el conocimiento y empleo de diferentes sistemas de representación para los números reales. Tales categorías se enuncian como sigue:

1. *Aceptación de diferentes representaciones para un mismo número real (RI)*

Nos referimos a aquellas respuestas donde los estudiantes explicitan, en el caso de la pregunta 10, que las expresiones indican representaciones equivalentes del mismo número o, para la pregunta 11, reconocen como números reales expresiones simbólic as de diferente tipo, valiéndose de procedimientos algebraicos en algunos casos:

– “ $\frac{2}{4}$ *es equivalente a* $\frac{1}{2}$*, pertenecen a la misma familia*”
– “*Son distintas formas de representar un número*” (Pregunta 10)
– “*Una fracción continua finita es un número real porque contiene racionales, los racionales son cerrados, luego la suma de racionales es un racional y si es racional es real.*”
– “2^{π} *es un número real porque 2 es real y* ν *también y un número real elevado a potencia real es un número real*”
– “ S*í, es el número* $<\pi$ *(fi)*” (Respecto a la expresión $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ de la pregunta 11)

2. *Notación decimal u operatoria como resultado de una operación indicada (RO)*

Tipificamos aquí aquellas respuestas en las cuales los estudiantes declaran que ciertas representaciones (simbólicas con notación operatoria) de los números reales no son en sí números sino operaciones que dan como resultado un número real. En esta categoría se agrupan respuestas como:

– "*0.5 es 1 dividido en 2*" (Pregunta 10)

– "*No hay un número que sea resultado de* $\dfrac{1}{1+\dfrac{1}{1+\dfrac{1}{1+\ldots}}}$"

– "1.4142… *es una aproximación decimal del resultado de* $\sqrt{2}$ "

– "*Es una operación*" (Respecto a $\sqrt{2}$ = 1.4142… y $2+\dfrac{1}{4+\dfrac{1}{4+\dfrac{1}{4+\ldots}}}$ = $\sqrt{5}$)

3. *Otras (O)*

Esta categoría comprende las respuestas que no pudimos ubicar en alguna de las dos categorías anteriores, como:

– " $\frac{1}{2}=\frac{2}{4}$ *es una igualdad, proporcionalidad*"

– " $\frac{1}{2}$ *y* 0.5 *son representaciones de la misma longitud*"

– " $\sqrt{2}$ = 1.4142… *es una aproximación decimal al número irracional* $\sqrt{2}$ *; los puntos suspensivos significan que la aproximación puede continuarse pero no concluirse*"

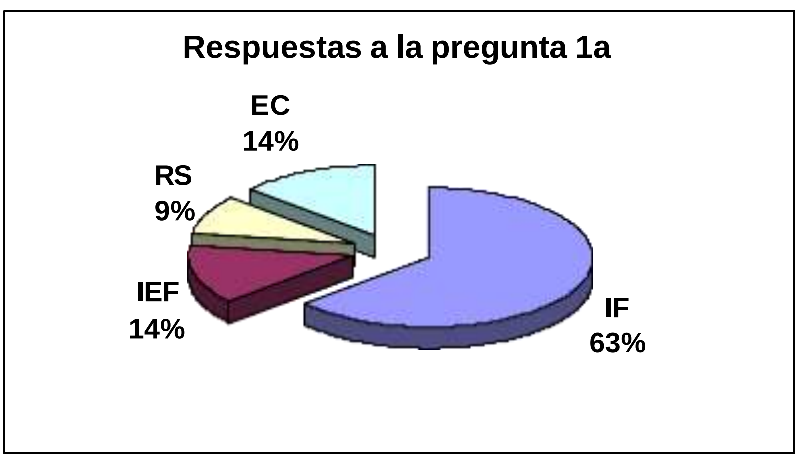
– "*Los decimales infinitos, es decir series convergentes, son reales porque una serie de números reales converge a un número real*"

5.4. *RESULTADOS Y CONCLUSIONES*

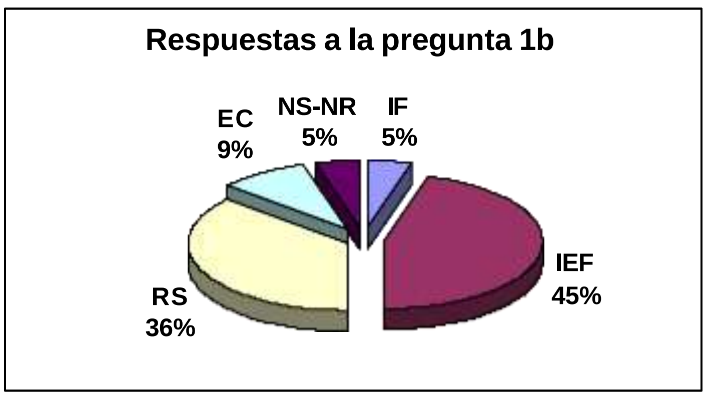
Una vez establecidas las categorías de análisis descritas anteriormente se procedió a la codificación y tabulación de los datos obtenidos como resultado de la aplicación de ambos instrumentos. De los 29 cuestionarios aplicados se analizaron 19, en razón a que las otras 10 pruebas no fueron resueltas en su totalidad y las respuestas dadas en las preguntas contestadas eran demasiado superficiales, a nuestro juicio, no fueron elaboradas con compromiso; de hecho, 4 de los estudiantes no emplearon más de 45 minutos para desarrollar la prueba y un estudiante se negó a entregar el cuestionario.

Los resultados que mostraremos en esta sección corresponden, fundamentalmente al cuestionario, pues la sesión en profundidad tiene como objetivo, básicamente, corroborar las soluciones dadas en el primero. En el análisis de las respuestas mostraremos algunos de los apuntes hechos por los estudiantes durante la discusión; sin embargo, para mayor precisión, la trascripción completa de tal sesión se halla en el anexo I.

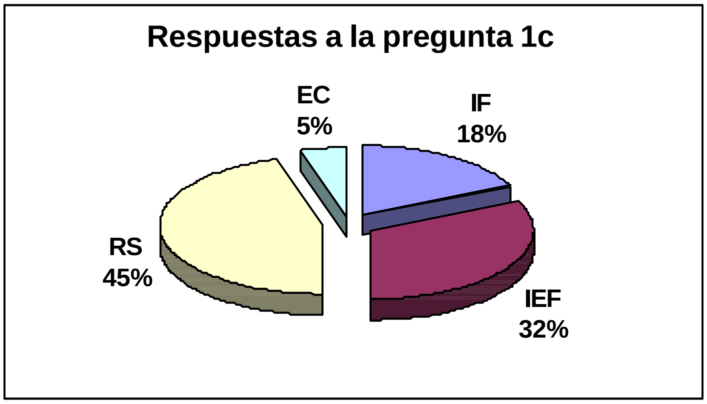
Presentamos a continuación tablas o gráficos estadísticos, pregunta por pregunta, que resumen los resultados encontrados, es importante señalar que la totalidad de las respuestas no corresponde a la totalidad de los encuestados, puesto que un solo estudiante puede estar ubicado en más de una categoría a la vez, por dar más de una respuesta o justificación a la misma pregunta; sin embargo, en las preguntas donde el total de respuestas no coincide con el total de estudiantes encuestados, se hará la aclaración del porcentaje de estudiantes, además del porcentaje de respuestas que se presenta en la gráfica, que presentan alguna tendencia particular



El 63% de las respuestas de esta pregunta, correspondiente al 73% de los estudiantes, muestra que 14 de ellos enuncian alguna definición formal para los números racionales, aunque no incluyen todos los detalles de ésta (categoría IF), y el 15%, si bien no enuncian una definición formal, enuncian una definición equivalente a ésta (categoría IEF), mientras que sólo el 15% de los estudiantes (3 sujetos) hace uso de expresiones del lenguaje común no relacionadas con alguna definición establecida (categoría EC). Respecto a los números racionales, los estudiantes presentan un conocimiento formal, independiente de la cotidianidad y emplean con cierta fluidez términos matemáticos en su definición; claro está, ninguno de ellos expresa correctamente, o mejor, completamente, la definición formal de número racional. Durante la sesión en profundidad, se pusieron de manifiesto estas impresiones, aunque los estudiantes intentan enunciar una definición formal, consideran que todos los detalles no son importantes, en particular el establecimiento explícito de la relación de equivalencia que determina las familias que constituyen cada número racional.

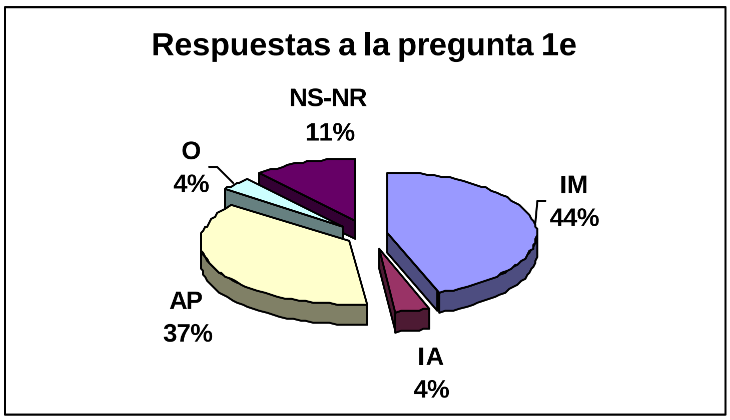


Contrario al caso anterior, sólo un estudiante (5.2%) se acercó a alguna definición formal de número irracional (categoría IF). El 52% de los estudiantes presentaron alguna definición equivalente con una formal (categoría IEF), definiendo número irracional con la negación de la definición dada para número racional y en el mismo porcentaje, los estudiantes hicieron uso de expresiones, simbólicas o del lenguaje común, no relacionadas con una definición formal del número irracional (categorías RS y EC, respectivamente). Como se observa, el saber de los estudiantes respecto a los números irracionales es más difuso o incompleto, respecto al de número racional; de hecho, un estudiante no respondió la pregunta. La sesión en profundidad mostró que para los estudiantes basta con decir que un número irracional es el que no es racional, incluso sin definir con precisión qué es número racional.

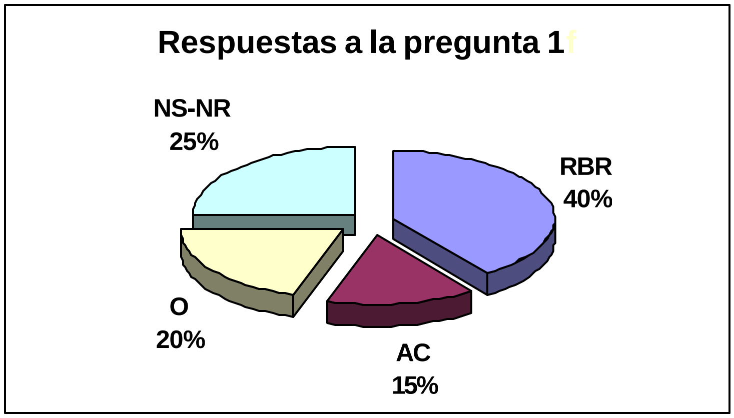


Para el caso de los número reales, el 58% de los estudiantes expresa una definición formal o equivalente a una de ellas, en los dos casos incompleta (categorías IF y IEF, respectivamente), para la primera 4 estudiantes y para la segunda 7; los demás, enuncian definiciones no relacionadas con lo formal (categorías RS y EC). Entre las definiciones formales, la más reconocida es la axiomática, sin incluir el axioma de completez, aunque queda en algunos de ellos la sensación de que no es una definición como tal, sino un listado de características y, por tanto, no se dice realmente qué es un número real, tal como se puso de manifiesto en la sesión en profundidad. Sólo uno de los sujetos encuestados intenta definir número real desde otra teoría formal, en su caso, la construcción de Dedekind. Los siete estudiantes ubicados en la categoría IEF recurren a los conjuntos de los números naturales, enteros, racionales e irracionales para definir los números reales como unión entre algunos de ellos.

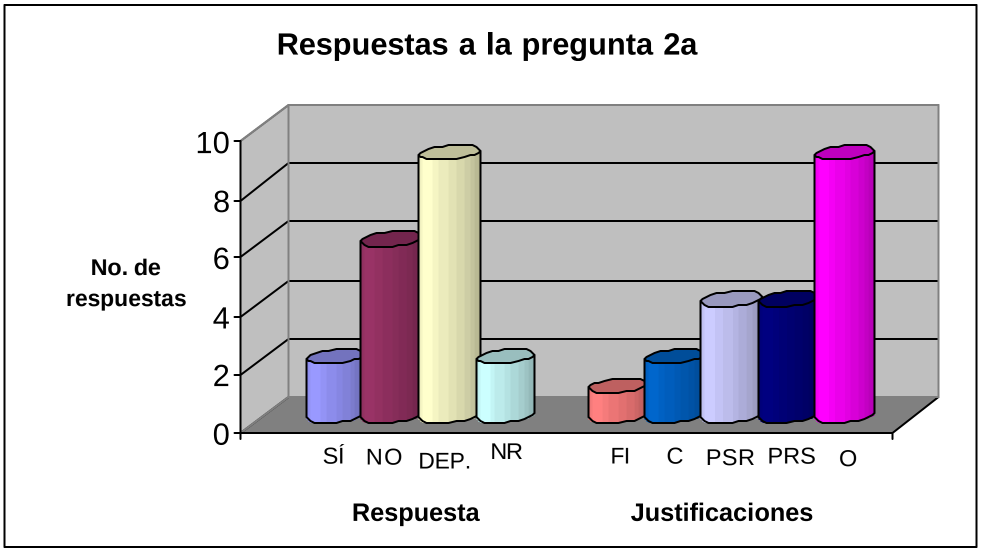
Con el mismo porcentaje, 58% de los estudiantes, se encuentran quienes emplean expresiones no relacionadas con alguna definición; no obstante, es de resaltar que, entre ellos, diez sujetos emplearon representaciones de tipo simbólico de las matemáticas para exponer sus ideas, sólo uno recurre a expresiones del lenguaje común.



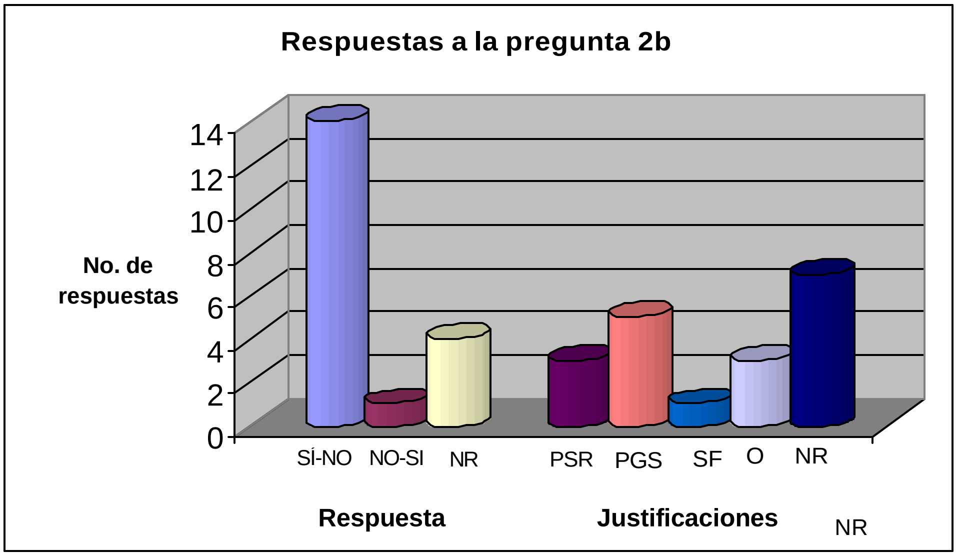
En las dos preguntas, relacionadas con la necesidad y el uso de los números irracionales respectivamente, se observa una mayor tendencia hacia las justificaciones al interior de las matemáticas (categoría IM); pero, no muy lejana de las justificaciones relacionadas con actividades prácticas (categoría AP); específicamente, 11 estudiantes, el 58% de los encuestados, están en la categoría IM y 9 en la categoría AP (47%) para la pregunta 1d, mientras que 12 estudiantes, (el 63%) se encuentran en la categoría IM y 10 (52%), en la categoría AP para la pregunta 1e. Dos estudiantes en la pregunta 1d y uno en la pregunta 1e, asocian la necesidad y uso de los números irracionales a intereses académicos como la curiosidad, los demás no pudieron incluirse en alguna de estas categorías (categoría O).



Once de los estudiantes que resolvieron el cuestionario, es decir el 58%, intentaron dar explicaciones interpretando el término completez, 8 de ellos relacionando dicho término con la correspondencia biunívoca entre los números reales y los puntos de una recta (categoría RBR) y los 3 restantes, con palabras que hacen parte del enunciado del axioma de completez (categoría AC), sin señalar su significado o definición, sino su inclusión como tópicos del cálculo. Las respuestas incluidas en la categoría O, dadas por el 21% de los estudiantes, no tienen relación con el término completez o el axioma de completez de los números reales. En contraste con las respuestas a la pregunta 1c y la discusión de la sesión en profundidad, se ve que aunque los estudiantes saben de la existencia del axioma de completez y la justifican, no lo consideran una propiedad importante de los números reales; de hecho, en la aplicación del segundo instrumento los estudiantes definieron los números reales a partir de los axiomas de campo y orden únicamente, con lo cual el conjunto de los números reales sería isomorfo al de los números racionales, pero, aún haciéndoles ver esta incoherencia, no lograron explicar qué es lo que hace diferentes a estos números de los reales.



En las justificaciones de los estudiantes a sus respuestas en esta pregunta, uno de ellos está incluido en dos categorías, los demás sólo en una. Solamente uno de los sujetos encuestados diferencia explícitamente los procesos finitos e infinitos (categoría FI), como explicación fundamental de que la respuesta a la pregunta sea Depende. Entre los estudiantes cuya respuesta fue No (6 sujetos), dos usaron contraejemplos como argumento (categoría C) y los demás, presentaron explicaciones comprendidas en la categoría otras (O) ó se valieron de la correspondencia entre los puntos de un segmento y los números reales (categoría PSR) o entre propiedades de los números reales y características de un segmento (categoría PRS); justificaciones incluidas en estas tres categorías fueron también usadas para responder Sí o Depende a la misma pregunta.



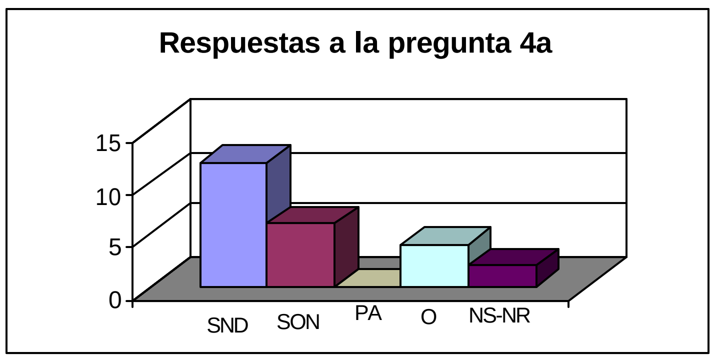
La mayoría de los estudiantes (el 73%, equivalente a 14 estudiantes) aceptan la posibilidad de dividir un segmento a la mitad indefinidamente y el que dicha división no dependa de la longitud del segmento (en la gráfica, SÍ-NO), es decir que, asumen los segmentos como objetos ideales de la geometría. Respecto a las justificaciones a esta respuesta, dos de los estudiantes atribuyen a la correspondencia entre los puntos de un segmento y los números reales su respuesta afirmativa (categoría PSR, 10.52% de los sujetos encuestados), cinco sujetos se la atribuyen a propiedades geométricas de los segmentos (categoría PGS, 26% de los sujetos encuestados), los siete restantes usaron explicaciones catalogadas como otras (O, 15.8% de los estudiantes) o no justificaron su respuesta (NR, 21% de los estudiantes). Sólo uno de los estudiantes responde NO-SÍ frente a la posibilidad de dividir un segmento indefinidamente y la dependencia de este proceso de la longitud del mismo, respectivamente; en su justificación se evidencia que el sujeto no diferencia segmento ideal de segmento físico; de hecho, para él los segmentos son objetos físicos que limitan una longitud (categoría SF).

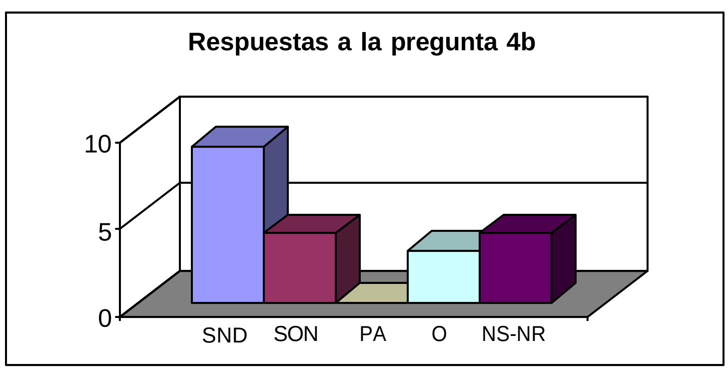
El 26% de los estudiantes muestran comprensión de la conmensurabilidad o inconmensurabilidad, como una relación entre longitudes, entre las cuales, una es tomada como unidad común (categoría CCI), esto se evidencia porque tales estudiantes señalaron que los rectángulos a, b y c podían ser divididos en un número entero de cuadrados iguales. Otro 26% de los estudiantes, relaciona conmensurabilidad con número racional e inconmensurabilidad con número irracional (categoría CQII), independientemente de que haya una unidad común o no; es decir; señalaron que sólo los rectángulos a y b cumplían la condición. El mayor porcentaje de estudiantes (42%) muestra falta de claridad en las ideas de conmensurabilidad e inconmensurabilidad, sus respuestas fueron catalogadas en otras (O) por ser imprecisas o extrañas.

Un resultado interesante de esta pregunta fue que los algunos estudiantes desarrollaron métodos y generalizaciones con el fin de determinar la cantidad de cuadrados que se obtenían para cada rectángulo donde fuera posible tal división. En el anexo E, se muestran tres de éstos (no hacemos un estudio pormenorizado de esta variable por no ser de interés para nuestro estudio).

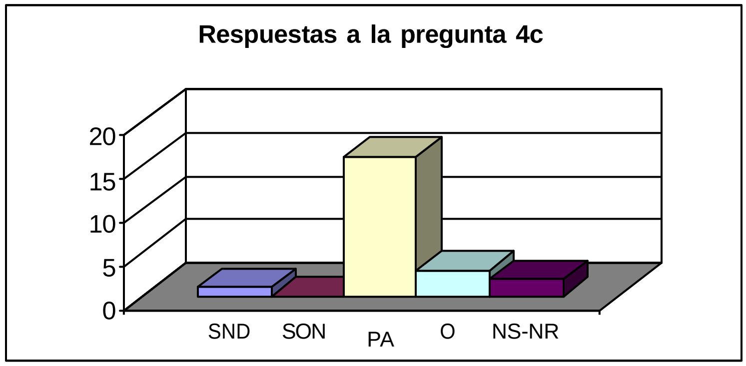
En los numerales de la pregunta 4 se solicitaba establecer la racionalidad o irracionalidad de tres expresiones y justificar tal respuesta. Nos interesaba analizar las justificaciones dadas por los estudiantes, puesto que, más que determinar su acierto en la respuesta, nos interesa estudiar los recursos de los cuales se valen en sus explicaciones.

Para los dos primeros numerales, en los cuales se disponen números expresados en notación decimal con infinitas cifras decimales, los estudiantes prefieren las argumentaciones con base en las representaciones simbólicas con notación decimal (categoría SND) y con notación operatoria (categoría SON), el 63% de los estudiantes en la primera categoría y el 31% en la segunda, para la pregunta 4a (12 y 6, respectivamente) y, el 47% en la primera categoría y el 21% en la segunda, para la pregunta 4b (9 y 4 estudiantes, respectivamente). Un buen porcentaje de estudiantes emplea explicaciones de otro tipo (O) o no responde: 21% y 10.52%, respectivamente para la pregunta 4a y, 15.8% y 21%, respectivamente para la pregunta 4b. A continuación se muestran las gráficas:



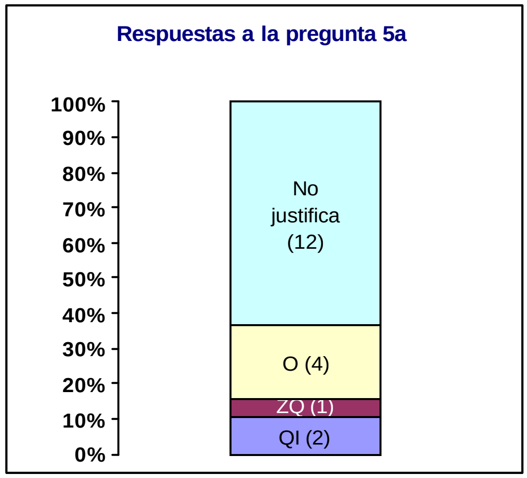


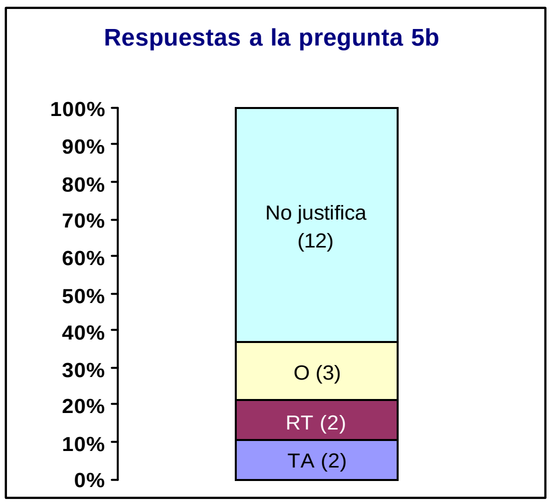
Por el contrario, para el numeral c el 84% de los sujetos encuestados (16 estudiantes) prefirieron emplear propiedades algebraicas (categoría PA) para determinar la racionalidad o irracionalidad del número propuesto. Hay un menor porcentaje respecto a los primeros numerales en la categoría Otras o No Responde, parece que la posibilidad de efectuar cálculos mediante simplificaciones de expresiones algebraicas, les da mayor seguridad para decidir. La gráfica es la siguiente:



Las situaciones propuestas en la pregunta 5 son similares, salvo por los conjuntos de números que incluye cada esquema y la manera en que se relacionan, su importancia radica en que, como lo señalamos en el análisis de la primera pregunta del cuestionario, varios estudiantes emplean relaciones entre ciertos conjuntos numéricos para definir los números reales y en este sentido, los diagramas de Venn pueden ofrecer una muestra de la manera como los estudiantes perciben tales relaciones entre conjuntos.

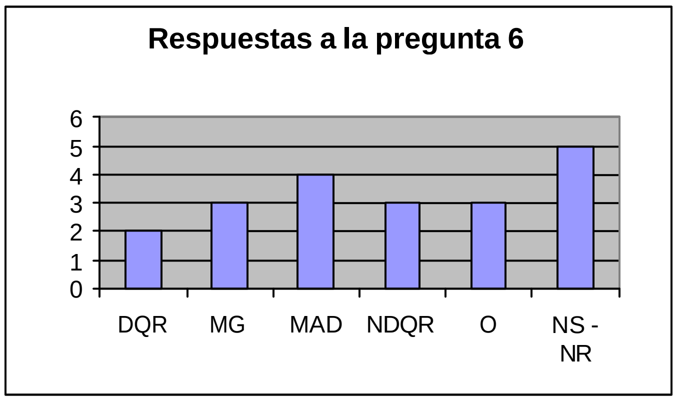
Respecto al diagrama del numeral 5a, el 42% de los estudiantes (8 sujetos) indicó que era correcto, mientras que para el 36.8% (7 estudiantes) era incorrecto. Entre quienes lo señalaron incorrecto, 2 estudiantes usaron como argumento el que los números racionales e irracionales constituyan una partición del conjunto de los números reales (categoría QI) y uno afirmó que el conjunto de los números enteros no está contenido en el de los números racionales, por la manera en que se definen estos dos tipos de números, aunque no hizo la misma salvedad entre los números naturales y los números enteros, incluso entre los mismos números racionales y los reales (categoría ZQ). Los argumentos de los demás estudiantes que tomaron posición respecto al diagrama, tanto a favor como en contra, se incluyeron en la categoría O. Es de resaltar que más de la mitad de los estudiantes, el 63%, no justificaron su respuesta. Las respuestas de los estudiantes a esta pregunta se resumen en los siguientes cuadros:



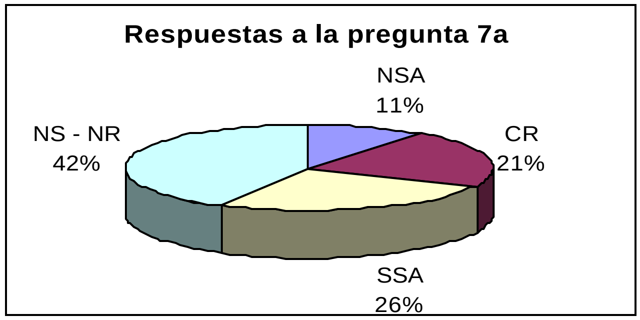


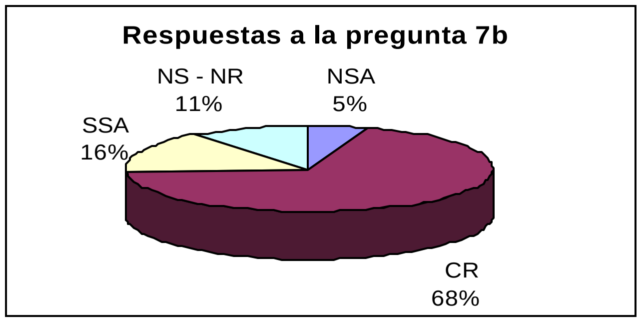
En el numeral b, Sólo 2 estudiantes afirmaron que el diagrama era correcto, 7 lo tacharon de incorrecto y los demás no respondieron (10 estudiantes, equivalentes al 52% de la muestra), cuatro de estos últimos presentaron problemas con el lenguaje pues afirmaron no saber o no recordar que eran números trascendentes y algebraicos. En cuanto a las justificaciones, la situación es similar, salvo por las categorías; en este caso, los estudiantes usan como argumento para rechazar el diagrama que los números trascendentes y algebraicos son una partición de R (categoría TA) y surge otra idea para señalar el diagrama como correcto o incorrecto y es el de concebir el conjunto de los números reales como una totalidad donde se incluyen todos los demás números; en consecuencia, los estudiantes lo aceptan ó declaran que le faltan conjuntos numéricos por incluir (categoría RT).

En esta pregunta también se solicitaba a los estudiantes que propusieran otros diagramas que, a su juicio, fueran correctos. El 47% de los sujetos (9 estudiantes) propuso algún diagrama alternativo. Los seis diagramas que propusieron los estudiantes se encuentran en el anexo H.



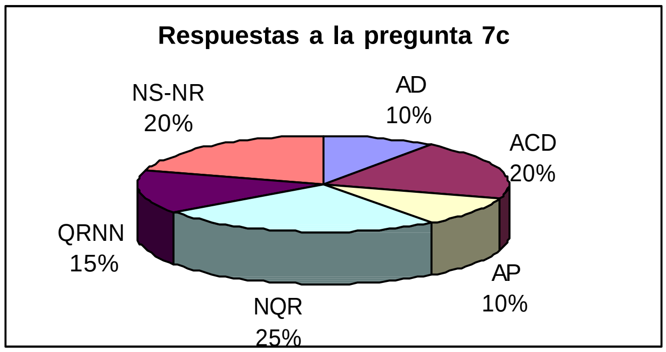
El análisis realizado a la pregunta 6 se centró en el numeral b, donde se esperaba observar el conocimiento y manejo de los estudiantes sobre la densidad de los números racionales y reales. Tan sólo dos estudiantes (10,52% de la muestra) reconocieron y enunciaron explícitamente la propiedad de densidad de los números racionales y reales (categoría DQR), mientras que 7 estudiantes (36.8%) recurrieron a diversos métodos, geométricos (categoría MG: 3 estudiantes) o basados en aproximaciones decimales (categoría MAD: 4 estudiantes), para concluir que entre $\frac{1}{2}$ y $\frac{2}{3}$ hay infinitos números racionales e irracionales, algunos de estos métodos se describen con detalle en el anexo F. El 15.8% de los sujetos encuestados (3 estudiantes) mostraron con sus argumentos falta de comprensión del significado de la densidad y de su reconocimiento como propiedad común de los números racionales y reales (categoría NDQR), diferente de la completez. Esta última diferencia es poco familiar para los estudiantes, como se observó también en las respuestas dadas a las siguientes preguntas del cuestionario y en el desarrollo de la sesión en profundidad.

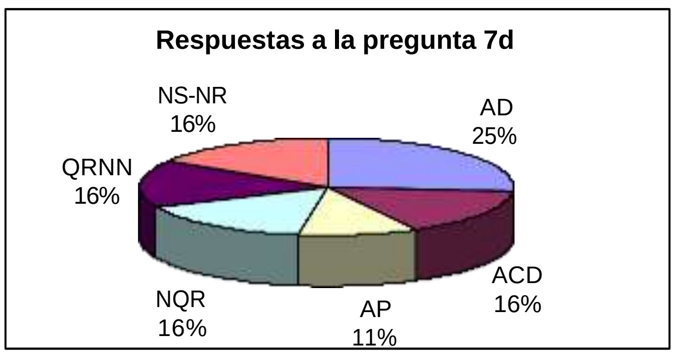




La mayoría de los estudiantes, en general acepta que la relación "ser sucesor", presentada en el numeral 7b, no es propia de los números reales (14 estudiantes equivalentes al 74% de la muestra), mientras que en el numeral 7a, en el cual se hacía referencia a la relación "ser predecesor", el mayor porcentaje de estudiantes (42%) no respondió, según lo manifestaron algunos de ellos por desconocimiento del término predecesor. Sólo 5 estudiantes en la pregunta 7a y 3, en la pregunta 7b, no aceptaron que tales relaciones no se cumplan en los números reales argumentando que ellas se cumplen en ciertos subconjuntos de $\mathbb{R}$ o señalando que, aunque no se pueda determinar con precisión el siguiente o el anterior de un número real o racional, este(os) número(s) debe(n) existir (categoría SSA).

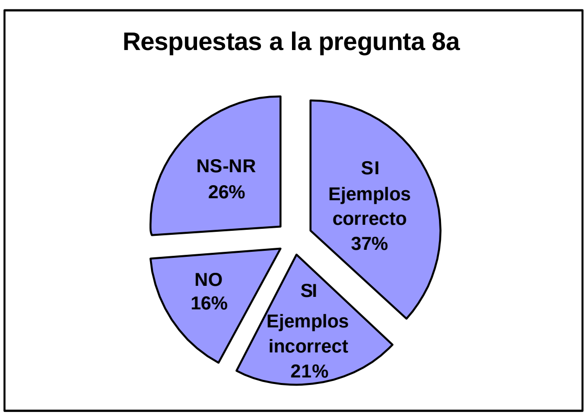
En cuanto a los argumentos empleados, en el primero de los casos, algunos estudiantes (4 en el primer numeral y 13, en el segundo) recurren a características o propiedades de los números reales para mostrar que estas relaciones no corresponden a tal conjunto numérico (categoría CR) y otros (2 y 1 estudiante para cada numeral, respectivamente), señalan la inexistencia de una definición de estas relaciones en $\mathbb{R}$ (categoría NSA). Es de resaltar que, como ya se había mencionado, algunos estudiantes entienden la densidad y la completez de los números reales como propiedades equivalentes, para ellos, 4 sujetos en el numeral a (21% de la muestra) y 8 en el numeral b (42% de la muestra), no hay diferencia entre estas propiedades tal como se observa en sus explicaciones; de igual manera, la sesión en profundidad reveló que para ellos, la completez indica que entre dos números reales cualesquiera hay otro número real, el enunciado respectivo a la densidad.

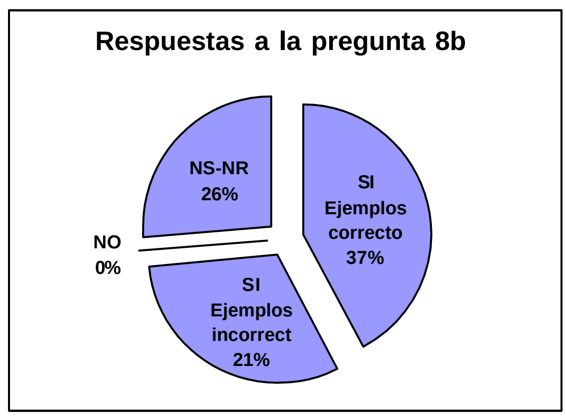


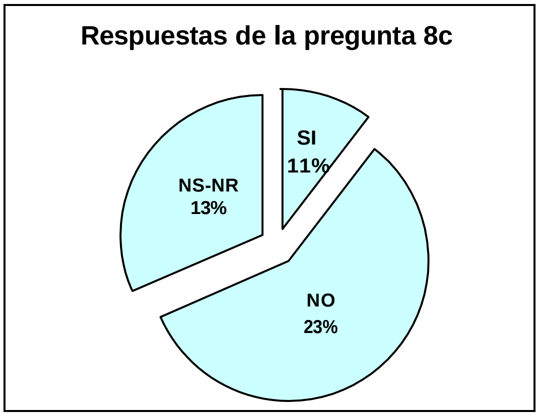


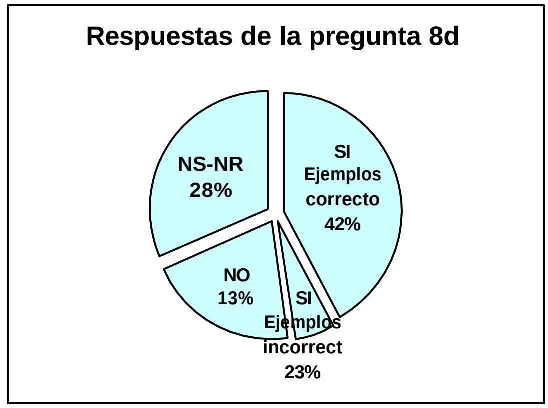
En relación con la numerabilidad de $\mathbb{Q}$ y la no numerabilidad de $\mathbb{R}$, un buen porcentaje de los estudiantes (42% y 52%, respectivamente) acepta esta diferenciación entre los dos conjuntos, aunque los argumentos varían en cada caso. Unos estudiantes (2 para los números racionales y 5 para los reales) se refieren a la definición de numerabilidad para argumentar la diferencia (categoría AD), otros exponen argumentos más elaborados, cercanos a las demostraciones formales para la numerabilidad de $\mathbb{Q}$ y la no numerabilidad de $\mathbb{R}$ (categoría ACD: 4 estudiantes para $\mathbb{Q}$ 3, para $\mathbb{R}$), tal como se muestra en el anexo G y los demás, recurren a actividades personales en sus explicaciones (categoría AP: 2 estudiantes en el numeral c y 2, en el d). El 26% de los sujetos encuestados atribuye la condición de numerabilidad a los números racionales y el 16% a los números reales (categoría NQR); mientras que el 16% de la muestra, señalan que ni $\mathbb{Q}$ ni $\mathbb{R}$ son numerables (categoría QRNN)

En la pregunta 8, el numeral e constituía el punto crucial para analizar la comprensión de los estudiantes del axioma de completez de los números reales y, en consecuencia, al análisis se centrará en este ítem. Sin embargo, presentaremos también los resultados tabulados de los cuatro primeros ítems, que constituían el preámbulo para el último, para lo cual se elaboraron tablas que resumieran tal información recogida en los cuestionarios. En estas preguntas las dos posibles respuestas fundamentales eran SÍ existen o NO, las cotas superiores o el supremo para el conjunto indicado en $\mathbb{Q}$ y en $\mathbb{R}$; además, si la respuesta era sí, tenían que dar ejemplos, los cuales podían ser correctos o incorrectos; hechas estas aclaraciones, las gráficas resultantes fueron las siguientes (los porcentajes están sobre 19 estudiantes, aquí no se presentaron sujetos con más de una respuesta):

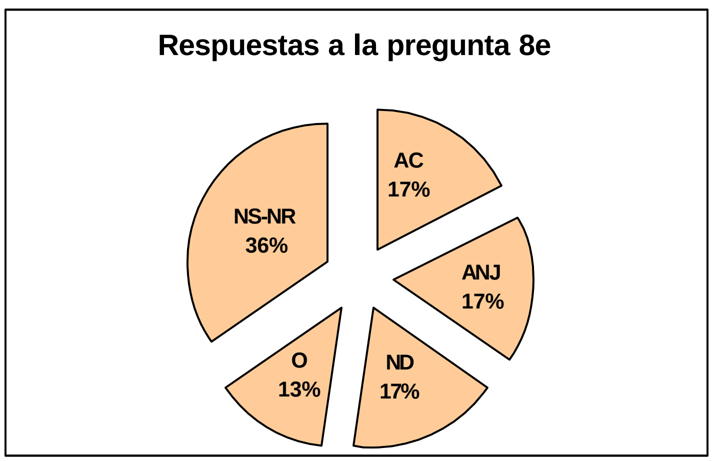




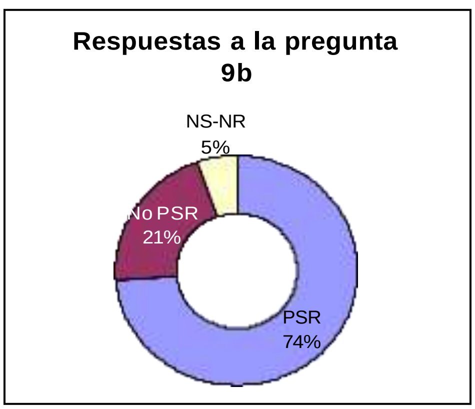


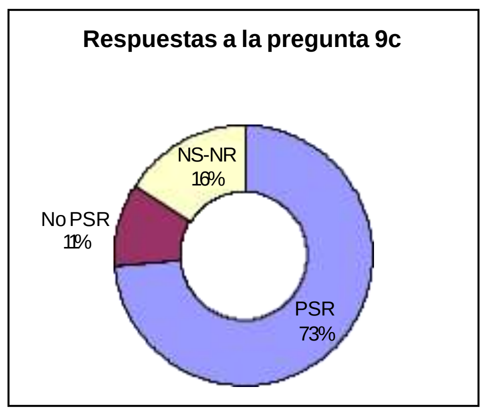


Para el ítem e de la pregunta 8, la distribución de las respuestas de los estudiantes se resume en la siguiente gráfica, en este caso el total de respuestas (23) no corresponde con el total de estudiantes encuestados y por esto se especificarán los porcentajes de los estudiantes que no aparecen en el dibujo:

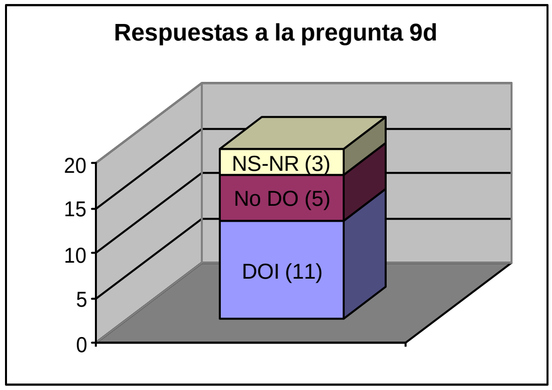


El 42% de los sujetos que resolvieron el cuestionario, es decir 8 estudiantes, aceptan que hay diferencias entre los números reales y los números racionales, la mitad de ellos (21%) aduce justificaciones asociadas a la completez de los números reales (categoría AC) y la otra mitad no expone alguna justificación precisa (categoría ANJ). Por su parte, otros 4 estudiantes señalan que no hay diferencias entre $\mathbb{Q}$ y $\mathbb{R}$ pues estos dos conjuntos numéricos poseen características comunes (categoría ND). De nuevo se observa que la mayoría de los estudiantes (79%, incluyendo quienes elaboraron justificaciones abarcadas en la categoría O y quienes no respondieron) no considera el axioma de completez de los números reales como propiedad fundamental de estos números o no comprenden su enunciado.

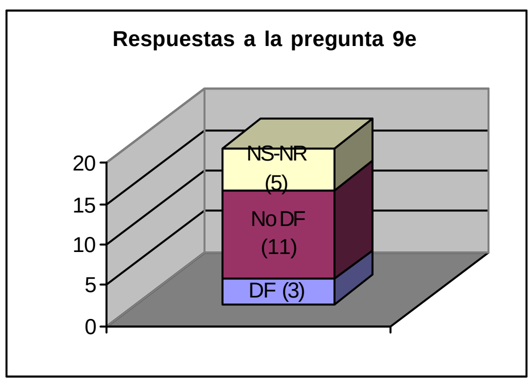




Estas tres preguntas también se encuentran relacionadas entre sí, en al ámbito de las representaciones geométricas para los números reales. En éstas sólo había dos opciones, además del No Responde, dependiendo de si su respuesta fue Falso o Verdadero para cada una de las tres afirmaciones. El 100% de los encuestados en el numeral a (19 estudiantes), el 74% en el b (14 estudiantes) y el 73% en el c (14 estudiantes), aceptan la representación de los números reales como puntos de una recta o un intervalo y de paso comprenden la existencia de una relación biunívoca entre estos, números reales y puntos de una recta o segmento (categoría PSR).



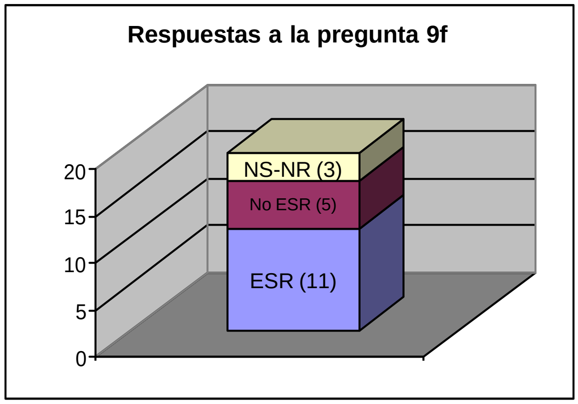
En este caso, el 58% de los estudiantes reconoce que el conjunto de los números reales abarca más elementos que los números de la forma que aparecen en el enunciado (categoría DOI), los cuales constituyen los números irracionales más conocidos, por lo menos los únicos que se encuentran en los libros de texto universitarios [96]; estos son los 11 estudiantes que contestaron Falso en este ítem



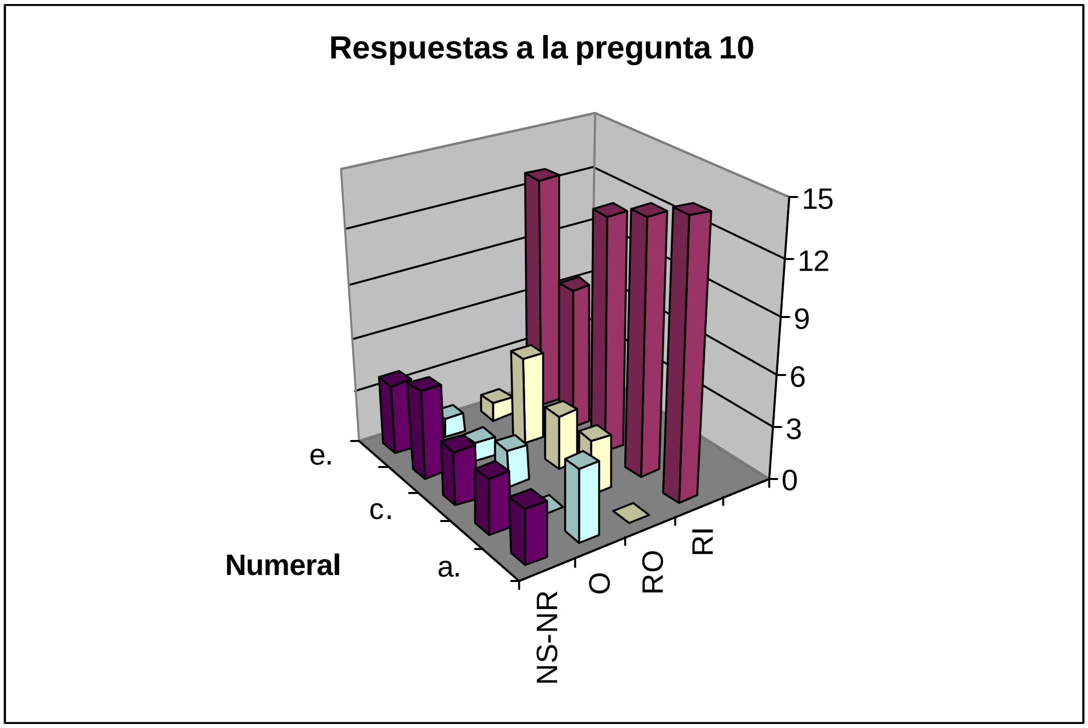
Las respuestas a esta pregunta confirman aún más la idea de que los estudiantes no comprenden o no consideran importante el axioma de completez de $\mathbb{R}$, pues sólo 3 de ellos, el 15.8% de la muestra, reconoce que el conjunto de los números reales es el único campo ordenado y completo, salvo isomorfismos (categoría DF); de hecho, el 58% de los estudiantes

[96] Para mayor información remitirse al título 4.1.1. de este trabajo

afirma que los números racionales cumplen estas características, no reconocen las diferencias entre $\mathbb{R}$ y $\mathbb{Q}$ (estos estudiantes contestaron Verdadero en este ítem).



El 58% de los encuestados acepta la equivalencia entre series geométricas convergentes y números reales (categoría ESR), con lo cual los números con infinitas cifras decimales periódicas constituyen otra representación para ciertos números reales. Se resalta también la comprensión del infinito actual, para 10 de los estudiantes que respondieron Falso en este ítem, puesto que afirman que 0, 999… = 1, de éstos, el 28% (3 estudiantes) hacen una demostración para ello; sin embargo, uno de los 11 estudiantes que responde falso dice que 0, 999… no es menor que 1 sino una aproximación. De quienes no responden, 2 dudan justificando que algebraicamente da 1, pero no entienden el porqué, según sus declaraciones, este resultado va en contra de su sentido común; de hecho expresan cuestiones como "*En cálculo dan cuenta que 0.999... = 1. ¿Cómo diablos saben dónde y en qué momento la secuencia termina?*". Con base en lo anterior deducimos que 9 estudiantes (47%) tiene un sentido del infinito potencial pues argumentan que hace falta algo para que 0, 999… sea igual a 1, un último 9.

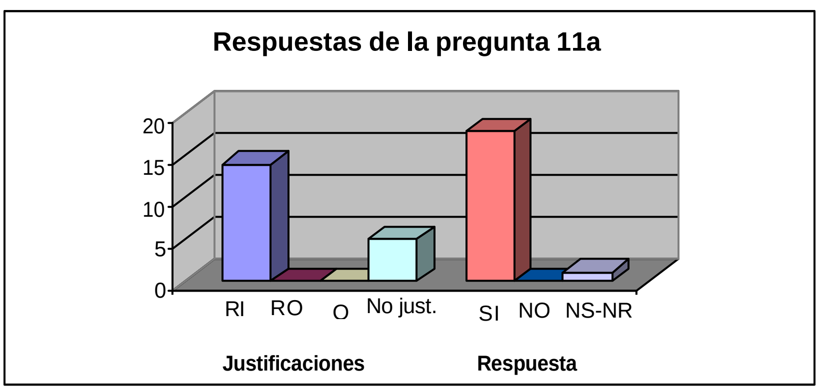


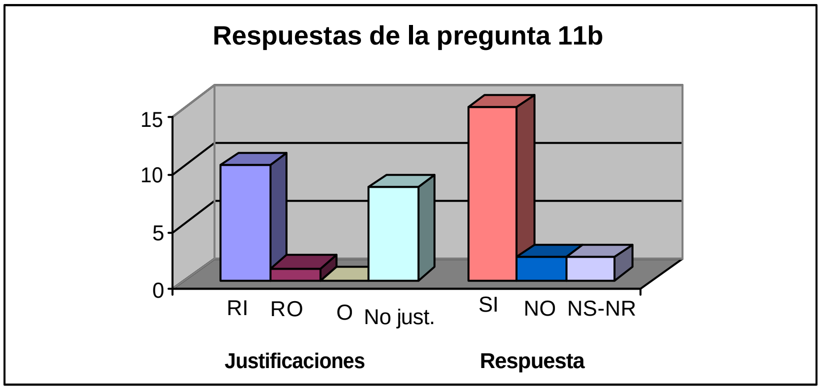
La mayoría de los estudiantes (79% en el numeral a, 73% en el numeral b, 68% en el numeral c, 42% en el numeral d y 68% en el numeral f) acepta el uso de diferentes representaciones simbólicas para un mismo número real (categoría RI), en particular, la notación operatoria de fracción, de expresiones radicales y la notación decimal. Otro grupo de estudiantes, especialmente en los numerales b, c y d, en los cuales se relaciona la notación decimal con la fraccionaria y la notación de radicales con la decimal, señala que tales expresiones corresponden a operaciones y sus resultados o aproximaciones de ellos (categoría RO: 15.8% en los numerales b y c, 26% en el numeral d y 5.2% en el numeral e).

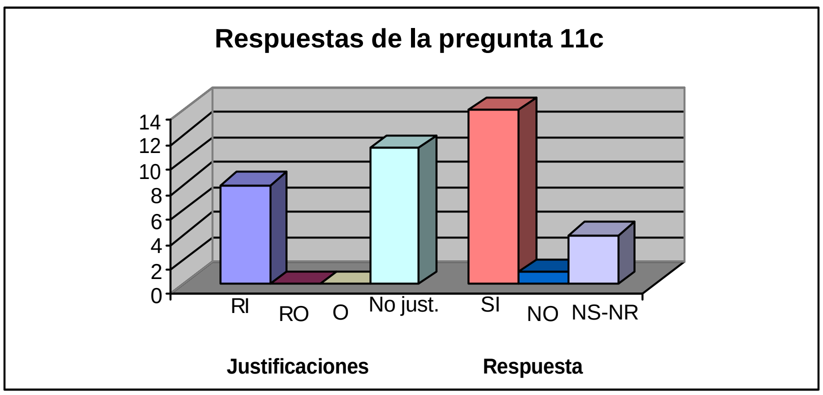
Algunos estudiantes se contradicen en sus apreciaciones respecto a esta pregunta, durante la sesión en profundidad se hizo aún más evidente tal contradicción, pues los estudiantes señalaron que expresiones como las incluidas en la pregunta 10 del cuestionario, son diferentes representaciones del mismo número; sin embargo expresiones como $\sqrt{2}+\sqrt{3}$ son un número, pero no se sabe cuál es, pues falta resolver la operación.

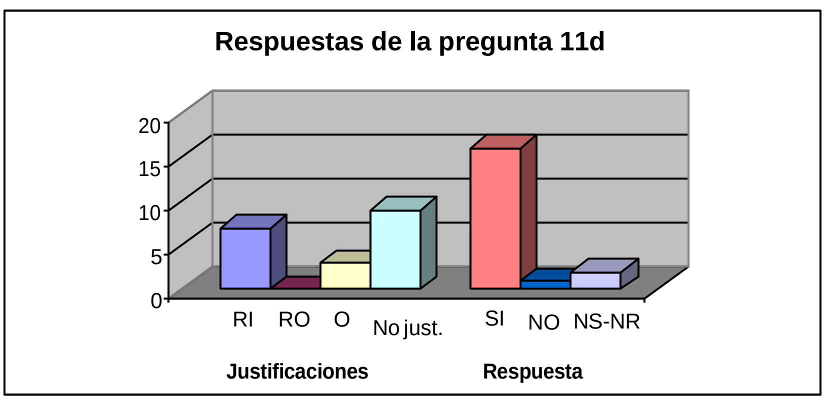
Respecto a las respuestas de los estudiantes a la pregunta 11 la mayoría de los individuos encuestados respondió positivamente a cada numeral, es decir que aceptaron como número real cada una de las expresiones propuestas (95%, 79%, 74%, 84%, 68%, 74% y 84% de los estudiantes, respectivamente). Las justificaciones que más se presentan están relacionadas con la aceptación diferentes representaciones simbólicas para un mismo número real (categoría RI: 74%, 52%, 42%, 37%, 21%, 37% y 42% del total de estudiantes, respectivamente), los demás sujetos no justificaron su respuesta. Las expresiones correspondientes a los numerales d y e, los números con infinitas cifras decimales, mostraron mayor variedad de justificaciones, pues además de las incluidas en la categoría RI, se presentaron algunos argumentos incluidos en la categoría O (otras), dada su ambigüedad.

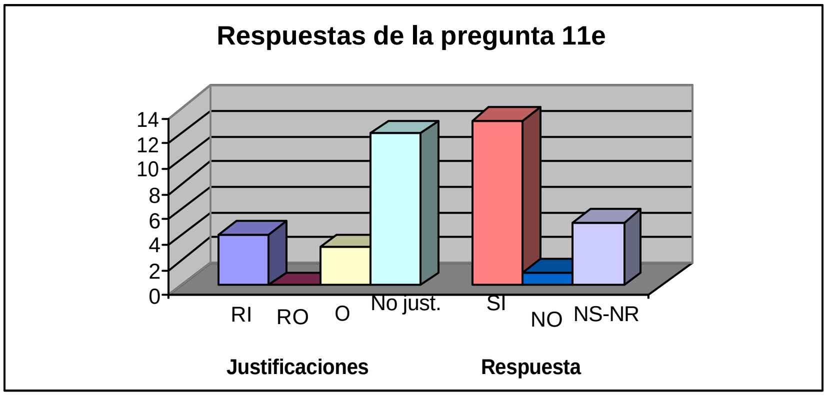
Quienes responden que la expresión indicada no es un número real, aducen a que tales expresiones corresponden a operaciones y sus resultados o aproximaciones de ellos (categoría RO: 10.52% en el numeral b y 5.2% en los numerales c, d, e, f y g; es decir, 2 estudiantes y 1 estudiante, respectivamente). A continuación se encuentran las gráficas correspondientes a cada uno de los numerales de la pregunta 11, aparecen tabuladas las respuestas y las justificaciones:

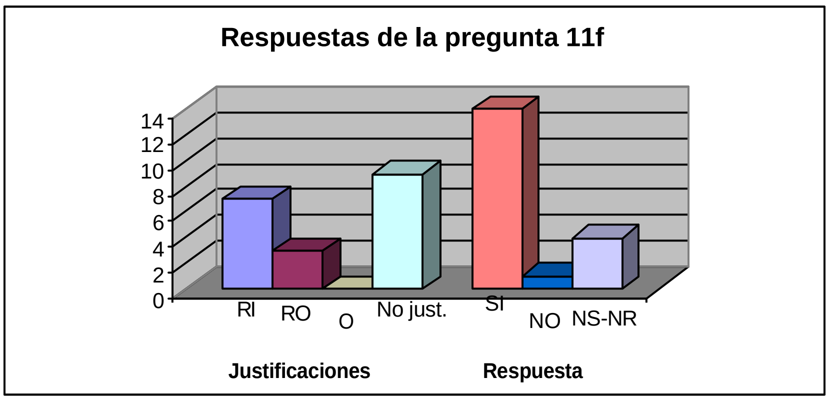


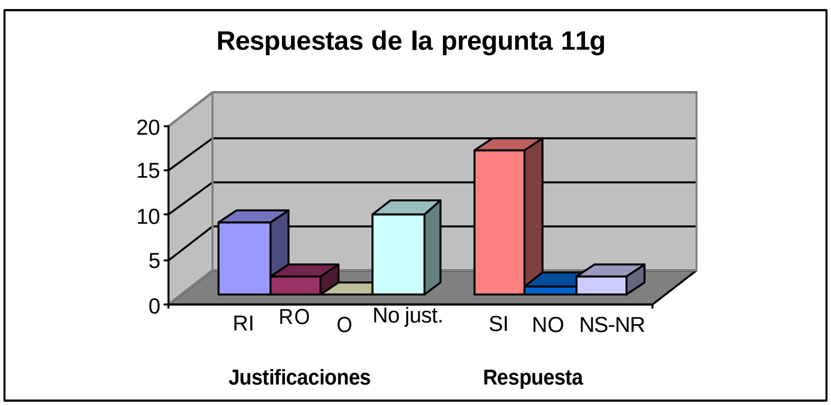

Respuestas de la pregunta 11b
15
10
5
0
RI
RO
O
No just.
SI
NO
NS-NR
Justificaciones
Respuesta


Respuestas de la pregunta 11c
14
12
10
8
6
4
2
0
RI
RO
O
No just.
SI
NO
NS-NR
Justificaciones
Respuesta


Respuestas de la pregunta 11d
20
15
10
5
0
RI
RO
O
No just.
SI
NO
NS-NR
Justificaciones
Respuesta


Respuestas de la pregunta 11e
14
12
10
8
6
4
2
0
RI
RO
O
No just.
SI
NO
NS-NR
Justificaciones
Respuesta


Respuestas de la pregunta 11f
14
12
10
8
6
4
2
0
RI
RO
O
No just.
SI
NO
NS-NR
Justificaciones
Respuesta


Respuestas de la pregunta 11g
20
15
10
5
0
RI
RO
O
No just.
SI
NO
NS-NR
Justificaciones
Respuesta

5.5. *CONCEPCIONES MANIFIESTAS EN LOS ESTUDIANTES SOBRE EL NÚMERO REAL.*

Hemos definido tres variables, éstas permitirán caracterizar las concepciones que tienen los estudiantes sobre los números reales atendiendo a las respuestas dadas por ellos, para lo cual las categorías determinadas en cada pregunta son primordiales en esta relación; así, las hemos agrupado para cada ítem según las variables, de la siguiente manera.:

VARIABLE 1: Representaciones del número real

1. Relacionada con la correspondencia biunívoca entre los números reales y los puntos de la recta (RBR)
2. Correspondencia entre los puntos de un segmento y los números reales (racionales e irracionales) (PSR)
3. Correspondencia entre propiedades o construcciones de los números reales y características atribuidas a un segmento (PRS)
4. Correspondencia biunívoca entre los puntos de un segmento y los números reales (PSR)
5. Uso de propiedades geométricas de los segmentos (PGS)
6. Métodos geométricos (MG)
7. Aceptación de la representación de los números reales como puntos en la recta numérica o en un intervalo (a, b).(PSR)
8. Consideración de un segmento como ente físico (SF)
9. Diferenciación entre procesos finitos e infinitos (FI)

10. Representación simbólica, notación decimal (SND)
11. Métodos basados en aproximaciones decimales de números reales (MAD)
12. Aceptación de la equivalencia entre series geométricas convergentes[97] y números reales (ESR)

[97] En su notación decimal.

13. Representación simbólica, notación operatoria (SON)
14. Enunciado no relacionado con alguna definición, utilizando representaciones simbólicas (RS)

15. Conocimiento de la existencia de números irracionales que no se pueden expresar como π o e o de la forma $\sqrt[n]{\frac{p}{q}}$ con n, p y q números naturales.(DOI)

16. Utilización de propiedades algebraicas (PA)

17. Notación decimal u operatoria como resultado de una operación indicada (RO)
18. Aceptación de diferentes representaciones para un mismo número real (RI)

VARIABLE 2: Situaciones asociadas al concepto número real

1. Origen o utilidad de los números irracionales al interior de las matemáticas (IM)
2. Origen o utilidad de los números irracionales por interés académico o intelectual (IA)
3. Origen o utilidad de los números irracionales en relación con actividades prácticas (AP)
4. Comprensión de la conmensurabilidad-inconmensurabilidad (CCI)
5. Conmensurabilidad-inconmensurabilidad ligada con expresiones racionales-irracionales, respectivamente (CQII).

VARIABLE 3: Definición de los números reales

1. Enunciado incompleto de alguna definición formal (IF)
2. Enunciado incompleto equivalente a alguna definición formal (IEF)
3. Enunciado no relacionado con alguna definición, utilizando representaciones simbólicas (RS)
4. Enunciado no relacionado con alguna definición, utilizando expresiones del lenguaje común (EC)

5. Los números racionales e irracionales son una partición de R (QI)
6. Los números trascendentes y algebraicos son una partición de los números reales(TA)
7. El conjunto de los números enteros no está contenido en el de los números racionales
8. El conjunto de los números reales es visto como la totalidad numérica (RT)

9. Aceptación de diferencias entre R y Q:
    a. Asociada a la completez de los números reales (AC):
    b. Sin justificación precisa (ANJ)
10. Negación de diferencias entre R y Q asociado a características comunes entre ambos conjuntos o relaciones entre ellos (ND)
11. Aceptación de los números reales como el único campo ordenado completo, salvo isomorfismos(DF)

12. Enunciado explícito de la densidad de Q y R (DQR)
13. No hay comprensión de la densidad como propiedad común de Q y R (NDQR)
14. Aceptación de que las relaciones "ser sucesor de" o "ser antecesor de" no son propias de R
    a. Inexistencia de definición para las relaciones dadas (NSA):
    b. Utilización de características de R para justificar que las relaciones "ser sucesor de" o "ser antecesor de" no son propias de R (CR)
15. Atribución de las relaciones "ser sucesor de" o "ser antecesor de" a los números reales (SSA)
16. Aceptación de la numerabilidad de Q y la no numerabilidad de R (AN):
17. Referencia a la definición de numerabilidad (AD)
18. Atribución de numerabilidad a Q y a R (NQR)
19. Q y R no son numerables (QRNN)

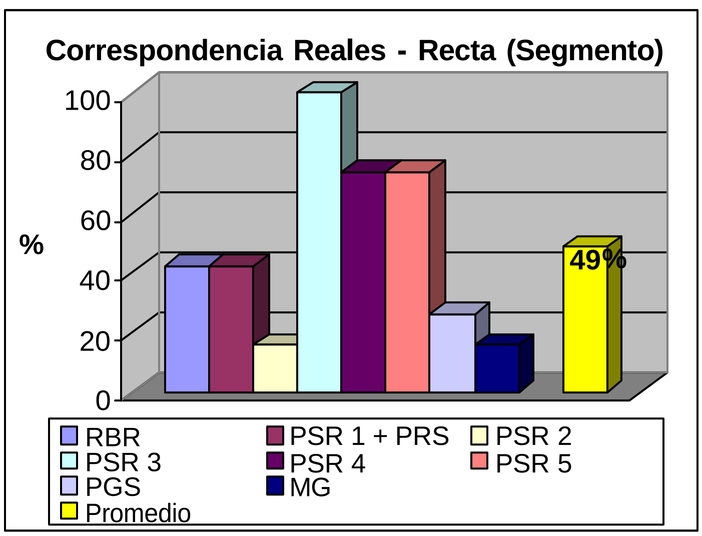
20. Argumentaciones cercanas a una demostración (ACD)
21. Argumentos basados en actividades personales (AP)

Observamos en los enunciados de las categorías algunas semejanzas, en razón a éstas los sintetizamos como sigue[98].

Para cada una de las categorías de las variables presentaremos algunas gráficas, el promedio entre ellas indicará el porcentaje de estudiantes que, en el caso de la primera variable, utilizan una u otra representación; en la segunda variable, relacionan una u otra situación con los números reales y, en la última, da definiciones de los números reales y usan términos asociados al tópico base con cierto grado de compresión; sobre esta base daremos las conclusiones finales respecto al interés de este estudio.

5.5.1. *VARIABLE 1: Representaciones del número real*

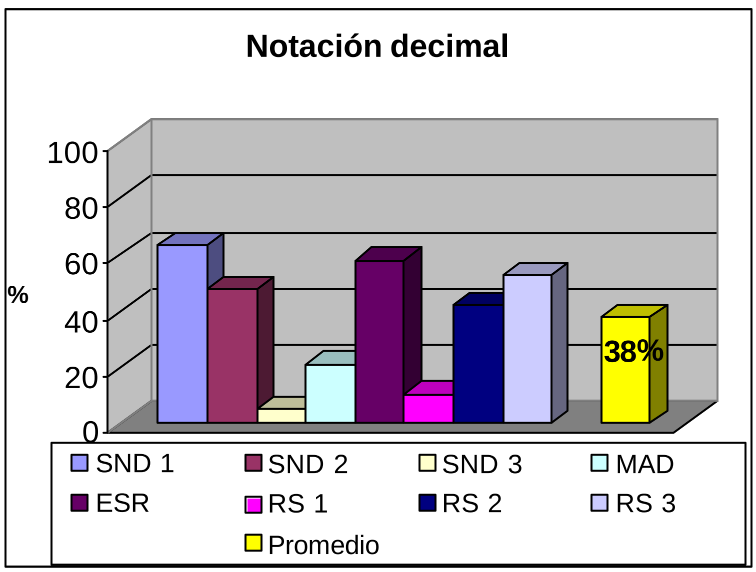
1. Correspondencia biunívoca entre los números reales y los puntos de la recta (RBR, PSR, PRS, PGS, MG)



98 Algunas categorías fueron eliminadas por no aportar, en relación con las variables establecidas, o por ya estar consideradas en otras, estas son ND, SSA, NQR, QRNN, AP, FI, SF, RT. Un listado completo de las categorías, las siglas asignadas a éstas y las preguntas donde se emplean, aparecen en el anexo J.

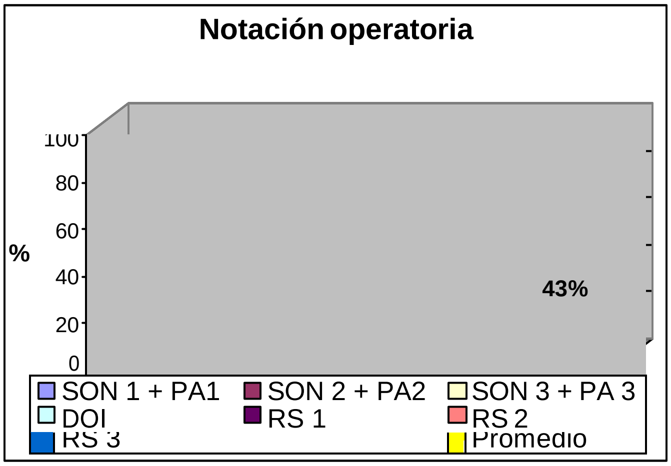
Según la gráfica, el 49% (11 estudiantes) de los estudiantes, en promedio, asocia los números reales a su representación en la recta, esto justifica que, en general, no diferencien entre densidad y completez como se ha mencionado en el análisis de resultados (preguntas 1f, 7a, 7b, 8a, 8b y 8c), pues como señala Rico (op. cit., p. 48), la noción intuitiva de la recta geométrica es fuente de numerosas dificultades cuando consideramos la representación geométrica y la verificación empírica, en particular no permite detectar las diferencias entre densidad y continuidad. Sin embargo, el que los estudiantes utilicen la representación geométrica de la recta asociada a los números reales, les permite entender que, en virtud de la correspondencia biunívoca entre éstos y los puntos de la recta, entre los números reales tampoco hay huecos, son completos; lo cual no es evidente mediante otro tipo de representación; requiere un mayor grado de abstracción y trabajo, como el que tuvieron Cantor, Dedekind y Hilbert, entre otros.

2. Notación decimal (SND, MAD, ESR)



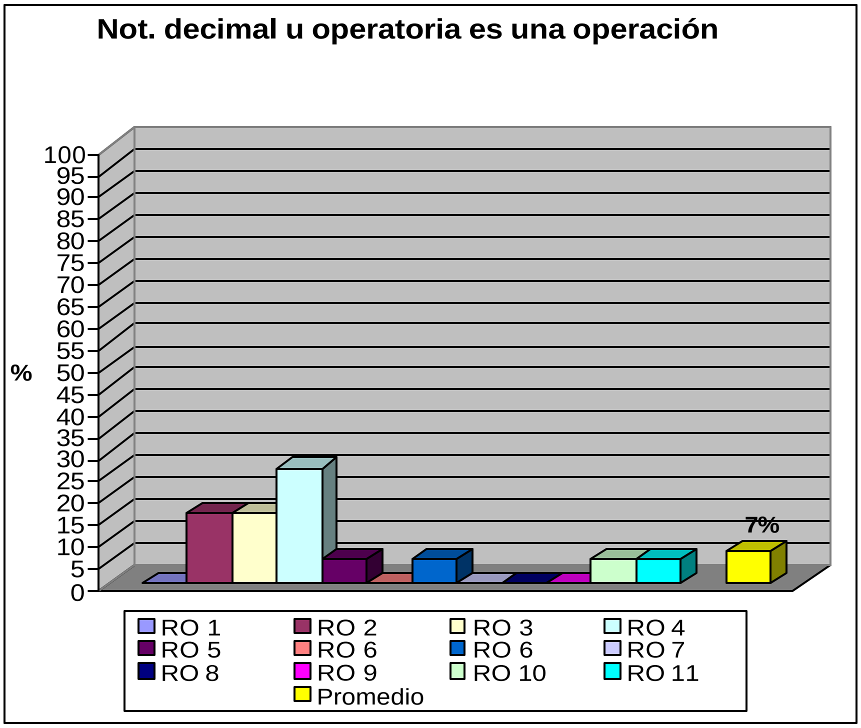
En promedio, el 38% de los estudiantes (7 sujetos) aceptan representaciones simbólicas en notación decimal infinita como un ente, un número real; esto significa que, por una parte, tienen sentido del infinito actual, y por otra, implícitamente, admiten que a cada número expresado como decimal le corresponde un número real y viceversa, de manera más formal, que "*toda sucesión infinita de números reales creciente y acotada superiormente por cierto* *número k, tiene como límite un número real a* $\leq k$" (Romero, op. cit., p. 74), tal sucesión está dada por las sumas parciales de la serie de potencias de $\frac{1}{10}$.

3. Notación operatoria (SON, DOI, PA, RS)

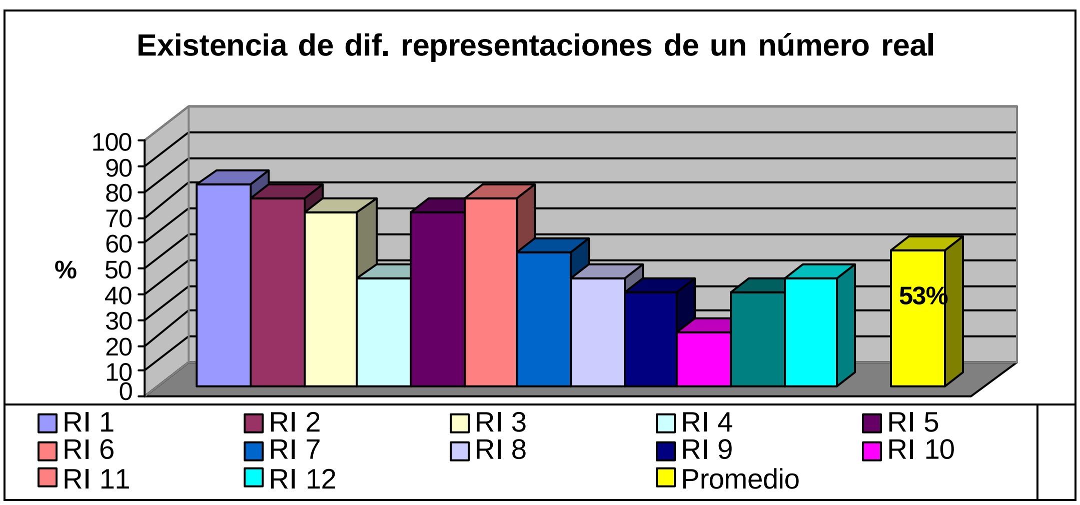


El 43% de los estudiantes (ocho), en promedio, consideran que expresiones como fracción, fracción continua, radicales, o símbolos como π, φ o e, son números reales en sí mismos y no como operaciones indicadas. De alguna manera, se acercan a la concepción de número de los matemáticos orientales, con una salvedad, los estudiantes reconocen que estas expresiones son números; sin embargo, resaltamos que cuando se ahonda en este aspecto, como sucedió en la sesión en discusión, no hay claridad al respecto (ver análisis de resultados de la pregunta 10).

Confirmando lo anterior, en la siguiente gráfica se observa que sólo el 7% (dos) de los estudiantes alude que la notación decimal es el resultado de resolver una operación, que corresponde a un número escrito en notación operatoria.



4. Aceptación de diferentes representaciones para un mismo número real (RI)



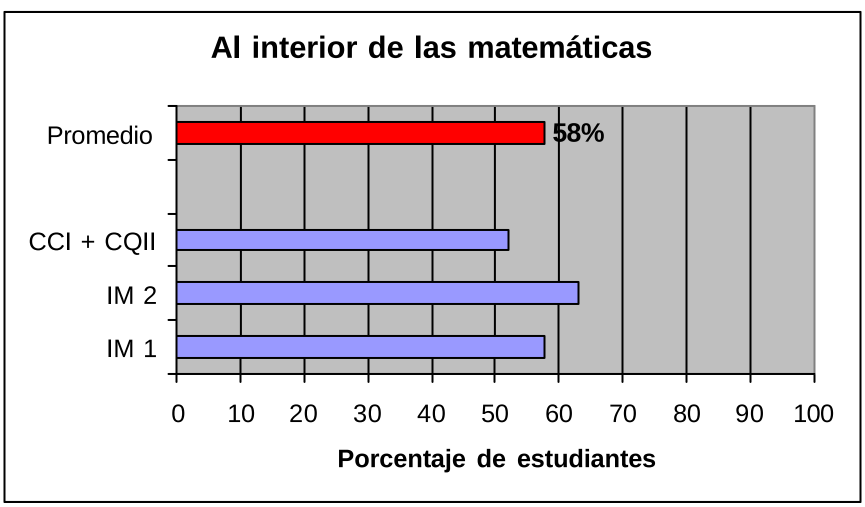
La mayoría de los estudiantes (53%) aceptan que un número real tiene distintas representaciones, esto implica que aceptan diversas notaciones y en general, puede traducir una notación a otra, como se observa también en el análisis de resultados de las preguntas 4, 9f, 10 y 11.

5.5.2. ***VARIABLE 2: Situaciones asociadas al concepto número real***

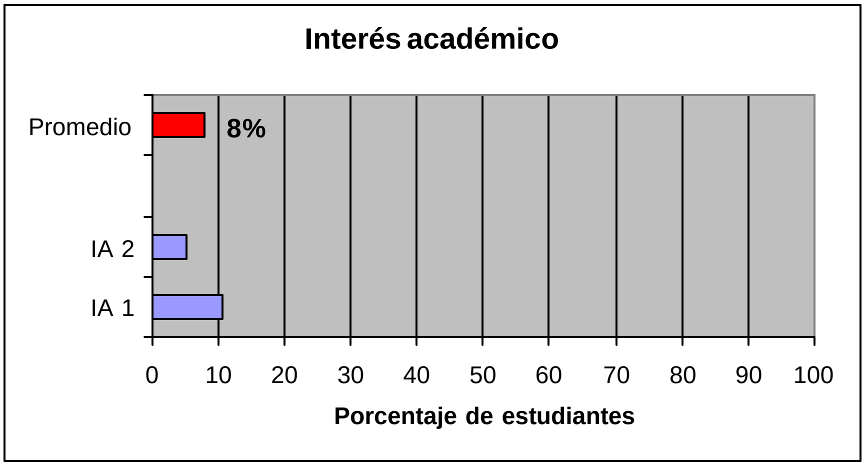
Los estudiantes encuestados, asocian los números racionales, los números irracionales y los números reales, en mayor porcentaje (58%) a situaciones relacionadas directamente con las matemáticas como por ejemplo, dar coherencia teórica a las matemáticas en algún período histórico esto revela que son concientes de que el estudio de ciertos tópicos de las matemáticas es importante en sí mismo, no porque solucione problemas de tipo práctico; de hecho en la sesión de discusión, los estudiantes están de acuerdo en que la formalización es inútil en la vida cotidiana (de cualquier persona), es útil para darle base firme a las matemáticas.

Esto se consolida teniendo en cuenta que, primero el 31% de los estudiantes dice que los números irracionales no tienen aplicación en la vida real (esto indica que son concientes de que son un objeto de estudio, estático, atemporal) y segundo, tanto los estudiantes que atribuyen el uso u origen de los números irracionales a intereses académicos o prácticos, los relacionan también con las matemáticas (ver categorías de análisis de las respuestas 1c, 1d, 3 y 4). Las siguientes gráficas muestran focalmente las anteriores observaciones.

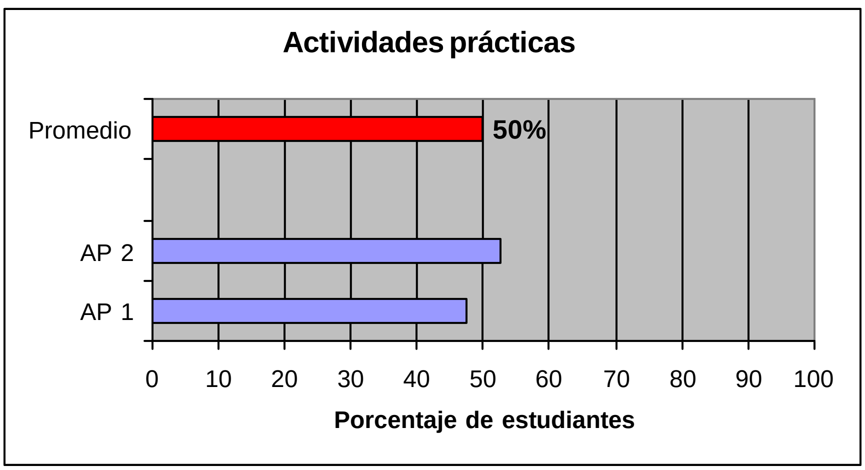
1. Al interior de las matemáticas (IM, CCI, CQII)



2. Interés académico o intelectual (IA)



3. En relación con actividades prácticas (AP)

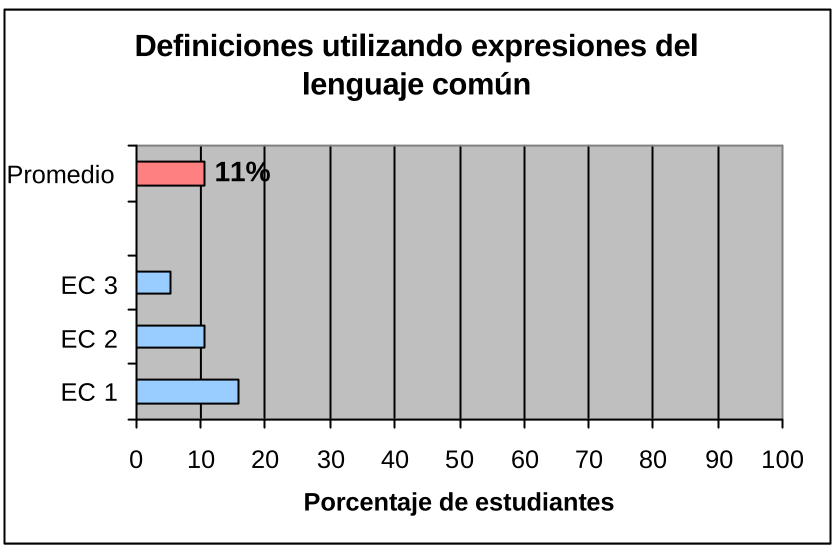


5.5.3. *VARIABLE 3: Definición de los números reales*

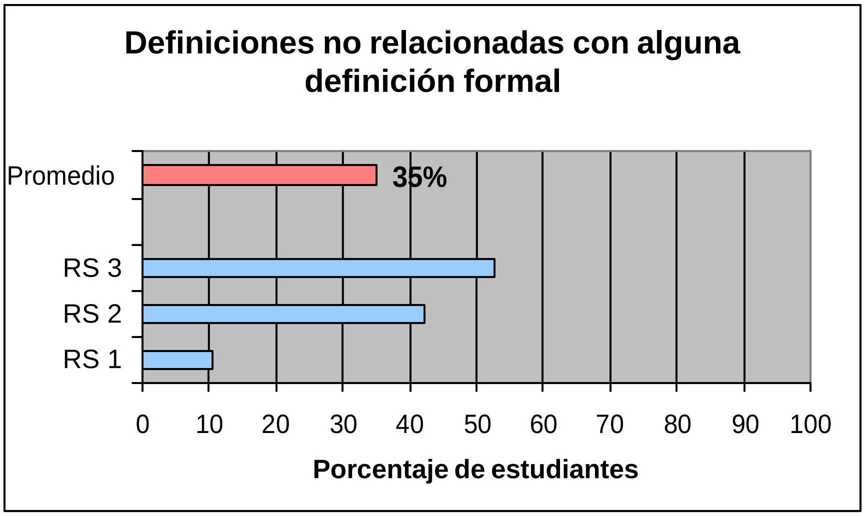
En esta variable tuvimos en cuenta no sólo las definiciones que los estudiantes dan a los números reales sino también las correspondientes a los números irracionales y a los números racionales, por obvias razones.

Sólo el 11% de los estudiantes, en promedio, recurren a expresiones del lenguaje común no relacionadas con alguna definición formal; esto implica que la mayoría de los estudiantes elabora definiciones utilizando términos o representaciones propias de las matemáticas, claro está, no necesariamente formales ni lo suficientemente precisas, el 21% enuncia, de manera incompleta, alguna definición formal, dentro de este porcentaje la mitad recurre a la definición de Hilbert y la otra, a la definición de Dedekind; el 25% expresa definiciones equivalentes a alguna definición formal, algunas, utilizando, representaciones geométricas o simbólicas para $\mathbb{R}$ y otras, la operación de unión o la relación de inclusión entre conjuntos numéricos como $\mathbb{N}$ $\mathbb{Z}$ $\mathbb{Q}$ $\mathbb{I}$ Algebraicos o Trascendentes y el mayor de estos porcentajes, el 35% define $\mathbb{R}$, $\mathbb{Q}$ o $\mathbb{I}$ haciendo uso de representaciones simbólicas de algunos números reales sin que con esto queden definidos, ni siquiera cercanamente (ver categorías de análisis preguntas 1a., 1b.y 1c.). La descripción anterior se muestra en las siguientes gráficas:

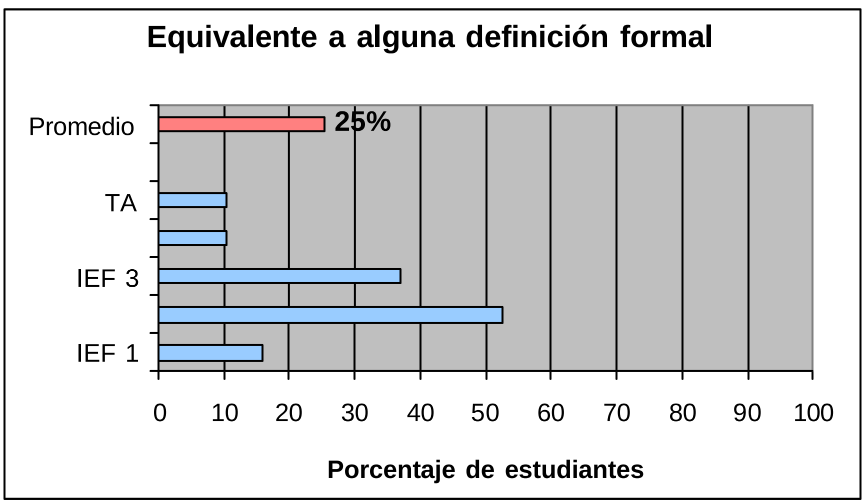
1. Enunciado no relacionado con alguna definición, utilizando expresiones del lenguaje común (EC)



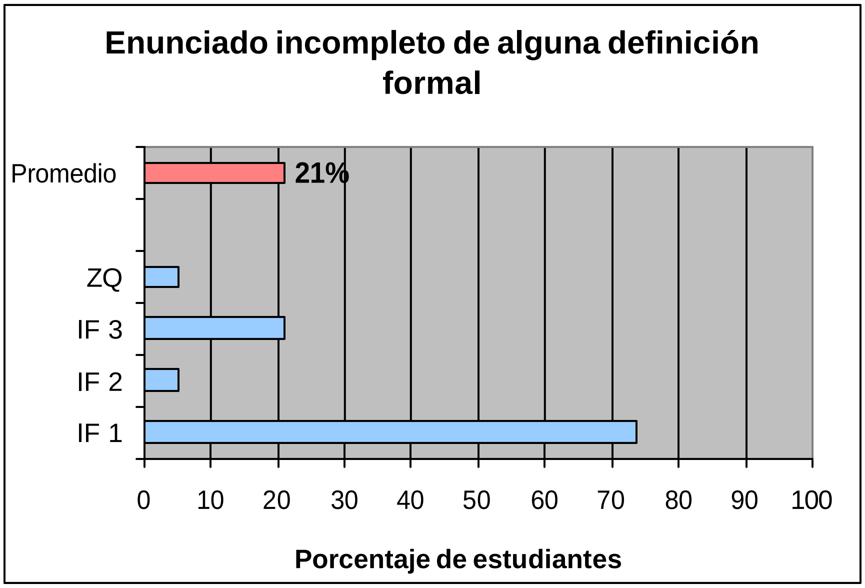
2. Enunciado no relacionado con alguna definición, utilizando representaciones simbólicas (RS)



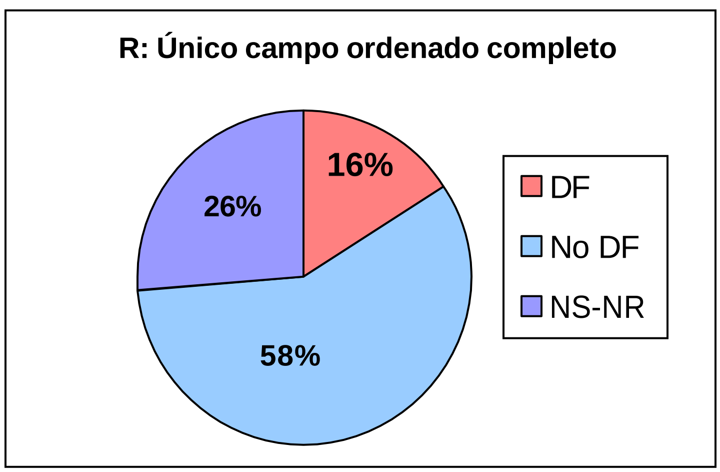
3. Enunciado incompleto equivalente a alguna definición formal (IEF, QI, TA)



4. Enunciado incompleto de alguna definición formal (IF, ZQ)



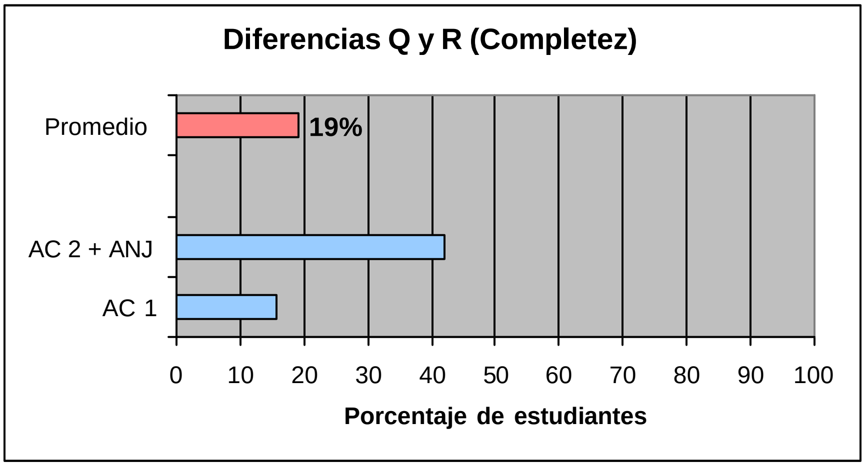
5. Aceptación de los números reales como el único campo ordenado completo, salvo isomorfismos (DF)



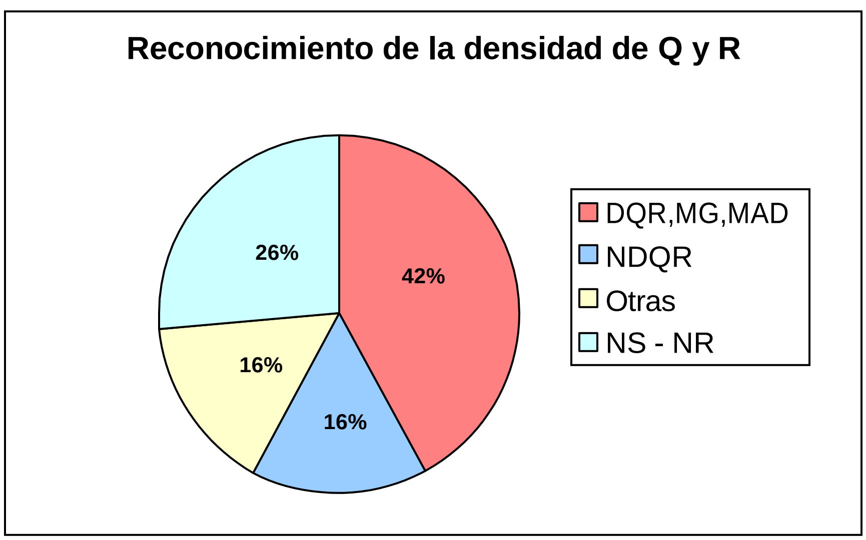
Sólo el 16% de los estudiantes (tres) reconocen que el conjunto de los números reales es un campo ordenado completo; sin embargo, en este 16%, teniendo en cuenta otras respuestas, consideramos que no hay comprensión suficiente del significado de la completitud, como podemos observar en la pregunta 1f, el mayor de los porcentajes (42%) lo asocia con la correspondencia entre los puntos de la recta y los números reales y en la pregunta 8e., sólo el

21% indica, vagamente, que la diferencia entre $\mathbb{Q}$ y $\mathbb{R}$ es la completez, como vemos en el diagrama correspondiente a la siguiente categoría.

6. Aceptación "vaga" del axioma de completez como diferencia sustancial entre R y Q(AC, ANJ)

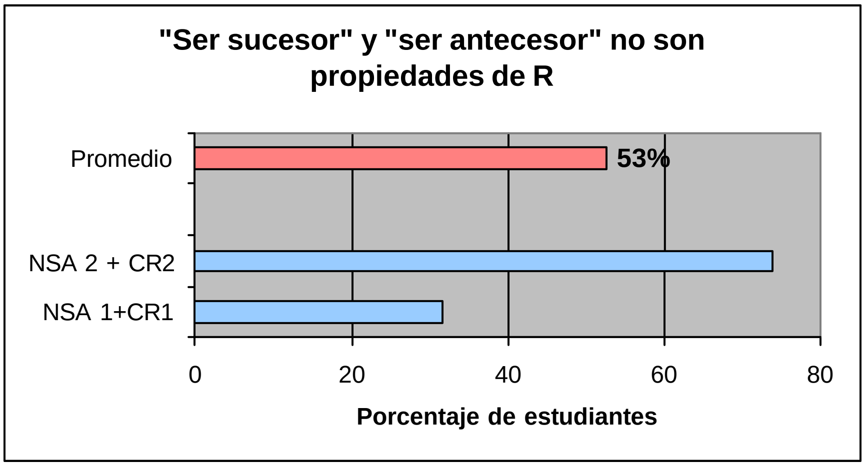


7. Propiedades o características de R:
   a. Densidad (DQR, MG, MAD)



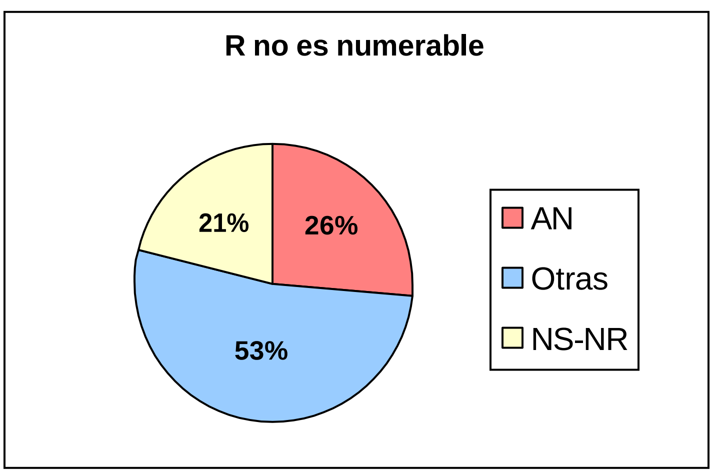
Un buen porcentaje de los individuos de la muestra (el 42%, esto es, el 8) reconoce que los números reales y los números racionales son densos; es decir que, entre dos números cualesquiera es posible hallar otro y con esto, infinitos; esto significa que esta característica no es lo que hace diferentes a $\mathbb{R}$ y a $\mathbb{Q}$ sin embargo, consideramos que no son concientes de esto, pues al profundizar en esta cuestión (como sucedió en la sesión de discusión) no se dan cuenta de ello.

b. Inexistencia de las relaciones "ser sucesor de" o "ser antecesor de" (NSA, CR):



Más de la mitad de los estudiantes, el 53% (diez), son concientes de que las relaciones "ser sucesor de" y "ser antecesor" no son propias de los números reales; ello implica que diferencian, por ejemplo, $\mathbb{N}$ de $\mathbb{R}$ y $\mathbb{Z}$ de $\mathbb{R}$.

c. No numerabilidad (AN: AD, ACD)



El 26% de los estudiantes (cinco), un porcentaje bajo, afirma y justifica que R no es numerable, entendiendo el significado de numerabilidad. Para mayor precisión a este respecto, ver análisis de resultados de las preguntas 7c y 7d.

5.5.4. Concepciones identificadas en la muestra

A partir del análisis anterior, es posible determinar tres concepciones generales, que si bien, no son correctas en el sentido en el que no corresponden a alguna de las definiciones formales dentro de las matemáticas, describen las ideas que tienen los estudiantes del Proyecto Curricular Licenciatura en Matemáticas de la Universidad Pedagógica Nacional sobre los números reales, a saber:

1. Los números reales como campo ordenado

Esta concepción se refiere al imaginario que tienen los estudiantes sobre que, los números reales son un campo ordenado, sin incluir la propiedad fundamental, que lo diferencia de otros conjuntos como el de los números racionales, la completez. Esta concepción corresponde, de acuerdo a la tipificación de Sfard (1991), a una concepción estructural, pues los conciben como un objeto en sí mismo. Las representaciones asociadas a esta concepción son de tipo simbólico (notación operatoria) y verbal, al enunciar los axiomas de campo y de orden.

2. Los números reales como unión entre conjuntos numéricos

Los estudiantes tiene la concepción, derivada tal vez de los libros de texto, que el conjunto de los números reales es el resultado de $\mathbb{N} \cup \mathbb{Z} \cup \mathbb{Q} \cup \mathbb{I}$ ó $\mathbb{Q} \cup \mathbb{I}$ ó $T \cup A$ (T: trascendentes, A: Algebraicos); si bien esto no es falso, siempre que se consideren subconjuntos de $\mathbb{R}$ isomorfos a cada uno de estos para el primer caso y se definan con precisión $\mathbb{Q}$, $\mathbb{I}$, T y A para los otros dos; esta concepción no está relacionada directamente con alguna definición formal o alguna concepción presente en la historia; sin embargo, no hay que olvidar que tanto Dedekind como Cantor, Méray y Weierstrass y Cauchy utilizaron, para el planteamiento de sus teorías, la partición del conjunto de los números reales en racionales e irracionales. Esta concepción, al igual que la anterior, es de tipo estructural. Las representaciones asociadas a esta concepción son de tipo verbal y, simbólico en la notación operatoria y decimal, al definir $\mathbb{Q}$ e $\mathbb{I}$, por ejemplo como aquellos conjuntos que contienen números que se expresan mediante decimales, periódicos o finitos e infinitos no periódicos, respectivamente.

3. Los números reales como puntos de una recta.

Con esta concepción señalamos los estudiantes que se valen de la correspondencia biunívoca entre números reales y puntos de una recta para definir a los primeros. Esta concepción, también, es de tipo estructural. Las representaciones asociadas a esta son, como es natural, geométricas y verbales.

CONCLUSIONES

Nuestro interés al desarrollar esta investigación estaba en determinar y caracterizar las concepciones manifestadas por estudiantes de VI semestre del Proyecto Curricular Licenciatura en Matemáticas de la UPN, sobre el concepto de número real, teniendo en cuenta el desarrollo histórico de dicho concepto, su tratamiento didáctico en el Proyecto Curricular y las respuestas que dan a ciertas preguntas elaboradas para tal fin.

Conclusiones respecto a los objetivos específicos

Del seguimiento historiográfico extractamos seis concepciones históricas, ellas son: Tratamiento aritmético de los números reales, Números reales como magnitud geométrica, Número real como cantidad continua y discreta, Expresiones algebraicas y analíticas para números irracionales y El número real como objeto matemático.

Del análisis de textos, con base en las unidades de análisis establecidas para los documentos revisados, establecimos cuatro concepciones: El número real como ente matemático definido axiomáticamente, El número real como símbolo aritmético, El número real representado a partir de expresiones algebraicas y analíticas y El número real como objeto matemático formal resultado de un proceso de evolución histórica.

Del cuestionario señalamos que logramos seleccionar o redactar preguntas, para cada una de las variables determinadas, que contribuyeran a determinar las concepciones de los estudiantes; sin embargo, vale decir que dentro de las preguntas elaboradas faltó incluir alguna que nos permitiera detectar si los estudiantes de la muestra diferenciaban el conjunto de los números reales de otros conjuntos numéricos, con igual estructura algebraica, como los números complejos.

Conclusiones respecto al objetivo general

Determinamos las concepciones que tienen los estudiantes de la muestra, como son: Los números reales como campo ordenado, Los números reales como unión entre conjuntos numéricos y Los números reales como puntos de la recta. Estas concepciones no corresponden exactamente a alguna de las concepciones históricas, descritas en el capítulo 3, o a las derivadas de la revisión de textos, descritas en el capítulo 4; sin embargo, sí hay cierta cercanía; por ejemplo, al concebir los números reales como campo ordenado o como puntos de la recta, hay similitud con la concepción histórica Número real como objeto matemático y la primera, con la concepción Número real como ente matemático definido axiomáticamente.

Consideramos que, hay muestras en la investigación de que, aunque los estudiantes del Proyecto Curricular encuestados han pasado por diversos espacios académicos donde han estudiado y utilizado los números reales,

> (…) *parece que las estructuras cognoscitivas de los aprendices permanecen casi intactas a lo largo de la escolaridad, y la enseñanza convencional de las ciencias en la secundaria y en la misma universidad, no logra afectar las ideas cotidianas de los estudiantes acerca de los fenómenos naturales; sus ideas ingenuas acerca del mundo continúan bien arraigadas aún después de la instrucción científica que las contradice, pues lo que han encontrado recientes investigaciones es que los estudiantes ajustan acomodaticiamente la nueva información aprendida, a su viejos puntos de vista, en vez de alterarlos o cambiarlos* (Flórez, 199, p. 90).

Vale decir también, que contrario a otras investigaciones, presentes en el estado del arte, los individuos de nuestra muestra no asocian los números reales con el significado coloquial del adjetivo real y de hecho no le atribuyen a este concepto, usos prácticos en la cotidianidad.

Como se observa en los resultados, los estudiantes seleccionados para esta investigación, no muestran una tendencia hacia alguna de las variables establecidas, los porcentajes promedio en los elementos incluidos en cada una permiten ratificar esta afirmación, pues no se presenta alguno superior al 58%; esto indica que no es posible hacer afirmaciones generales sobre las concepciones de los estudiantes en torno a lo números reales respecto a calificativos como: la mayoría, la minoría o todos; además, este no era objetivo de nuestro trabajo.

Por otra parte, el estudio elaborado y presentado en esta tesis ratifica lo enunciado por Artigué (1990), respecto a la utilidad de los trabajos sobre concepciones, pues logramos *"Poner en evidencia la pluralidad de los puntos de vista posibles sobre …"* los números reales, "*diferenciar las representaciones y modos de tratamiento que están asociados a ellas, poner en evidencia su adaptación más o menos buena a la resolución de… problemas"*; además, nos ayudó a "*luchar contra la ilusión de transparencia de la comunicación didáctica presente en los modelos tomados del aprendizaje, permitiendo diferenciar el saber que la enseñanza desea transmitir y los conocimientos efectivamente construidos por los estudiantes"* y esperamos que contribuya, de igual forma a quienes lean este trabajo.

Conclusiones respecto a las hipótesis

Respecto a las hipótesis formuladas en nuestro estudio, por las mismas razones expuestas en el párrafo anterior, no es posible afirmarlas o negarlas por completo, pues el porcentaje de estudiantes que corrobora cada una de estas hipótesis no es superior al 60%, excepto para la hipótesis 1, pues ningún estudiante considera los números reales como un conjunto con una estructura algebraica ordenada y completa, tal como se puede verificar en la sección 5.4.

Recomendaciones y cuestiones abiertas

Teniendo en cuenta que, tal como lo manifestamos en el capítulo 2, en la medida en que el profesor conozca las concepciones de los estudiantes, propondrá ciertos problemas o situaciones que conlleven a que se evidencien, modifiquen o completen tales concepciones, de tal manera que éstas se aproximen cada vez más al concepto en cuestión (Brousseau,

1983) y, que hay concepciones que se pueden constituir en obstáculos para el aprendizaje de otros conceptos matemáticos, este trabajo resulta pertinente para, a partir de él, cuestionar las ventajas y desventajas de las concepciones encontradas respecto a los números reales, y con base en esto, proponer estrategias que permitan a los estudiantes, aproximarse más al concepto de número real que se espera, deban poseer como profesores de matemáticas en formación, en especial respecto a la completez, elemento tan importante al caracterizar el conjunto de los números reales y, tan ausente en las concepciones de los estudiantes de la muestra. En el mismo sentido, se hace necesario establecer cuál es la concepción de número real deseada para un(a) profesor(a) de matemáticas, y de acuerdo a ésta, proponer situaciones didácticas que conlleven a formarla en todos sus aspectos.

Por último, teniendo presente que el grupo de estudiantes de la muestra, fue pequeño, sería recomendable hacer un estudio más amplio, por lo menos en lo que respecta al Departamento de Matemáticas de la UPN, para tener una versión más completa sobre las concepciones de los estudiantes de la Licenciatura sobre el número real, incluso sobre otros conceptos matemáticos o didácticos. Además, si bien es cierto que los estudiantes tienen sus propias imágenes conceptuales, éstas se ven influenciadas por la enseñanza, es entonces, oportuno, conocer cuáles son las concepciones de los profesores del Departamento que tenemos a nuestro cargo la labor de formar futuros profesores de matemáticas. En general, es conveniente conocer las concepciones que tienen los profesores de matemáticas que ejercen en la Educación Básica y Media en nuestro país –por ejemplo, a través de los programas de Especialización o Maestría del Departamento de Matemáticas de la UPN–, pues se ha visto la permanencia de las concepciones inducidas por la enseñanza inicial y los textos escolares; un análisis más detallado y riguroso de éstos, en relación con el tópico en cuestión, también se puede constituir en un tema de investigación.

BIBLIOGRAFÍA

AABOE, A. (1964) *Matemáticas: Episodios Históricos.* Biblioteca de Matemática Contemporánea. Editorial Norma. Cali.

APOSTOL, T. (1977) *Análisis matemático*. Segunda Edición. Editorial Reverté. Barcelona.

_____________(1988) *Calculus.* Vol. I. Segunda edición. Editorial Reverté. Barcelona

ARDILA, R.; JIMÉNEZ, R. y VILLAMIZAR A. (1985) *Fundamentos de Matemática I.* Universidad Pedagógica Nacional.

ARISTÒTELES. (350 a. C. aprox.) *Metafísica.* Reimpreso en 1992. Ediciones Universales. Bogotá.

ARTIGUÉ, M. (1990) *Epistémologie et didactique.* En: Reserches en Didactique des mathématiques. Vol. 10. Nº 23. Traducción de María Fernanda Espitia. 2001.

BELL, E. (1949) *Historia de las Matemáticas.* Fondo de Cultura Económica. México.

BLANCHET, A. et al (1989) *Técnicas de investigación en ciencias sociales.* Narcea S. A. ediciones. Madrid.

BOYER, C. (1986) *Historia de la Matemática*. Editorial Alianza Universidad. Madrid.

BONILLA, E. (1989) *La Educación matemática: una reflexión sobre su naturaleza y sobre su metodología.* En: Educación Matemática. Vol. 1. No. 2-3. Agosto - Diciembre.

BRIONES, G. (1997) *Metodología de la investigación cuantitativa en las ciencias sociales.* Editorial Corcas. Bogotá.

BROUSSEAU, G. (2000) *Educación y didáctica de las matemáticas.* En: Rev. Educación Matemática. Vol. 12. No. 1. Abril.

_________________. (1986) *Fondements et Méthodes de la Didactiques des Mathématiques.* En: Reserches en Didactique des mathématiques. Vol. 7. No. 2. Traducción de Julia Centeno Pérez, Begoña Melendo Pardos y Jesús Murillo Ramón

_________________.(1990) "*Qué pueden aportar a los enseñantes los diferentes enfoques de la didáctica de las matemáticas?*". En: Rev. Enseñanza de las Ciencias. Vol. 8. No. 3.

__________________ (2003) *Situaciones, Procesos y Currículums en Matemáticas.* En: Memorias V Simposio de Ecuación Matemática. Chivilcoy-Argentina. Mayo.

BUKHARDT (1988) *The roless of theory in a "systems" aproach to matematical education.* En: Zentralblatt für didaktik der mathematic. Vol. 90, 6.

CAJORI, F. (1930) *A history of matehematics*. Chelsea Publishing Company. New York.

CAMPOS, A. (1994) *Axiomática y Geometría desde Euclides hasta Hilbert y Bourbaki.* Universidad Nacional de Colombia. Bogotá.

CANTORAL, R. (1995) *Notas sobre los acercamientos teóricos de la escuela francesa en didáctica de las matemáticas.* Serie cuadernos doctorales. CINVESTAV. Mexico.

_______________, FARFÁN, R (2003) *Matemática educativa: una visión de su evolución.* En: Rev. Educación y Pedagogía. Vol. 15. No. 35. Enero-abril. Universidad de Antioquia. Medellín.

COLETTE, J. P. (1985) *Historia de las Matemáticas*. Vol. 2. Siglo XXI Editores. Madrid.

COOKE, R. (1997) *The history of mathematics*. A Wiley-interscience publication. Estados Unidos.

CORIAT, M. et al (2000) *Representación de los números reales en la recta.* En: Rev. Enseñanza de las Ciencias. Vol. 18, 1.

CROSSLEY, J. (1987) *The emergence of number*. Singapore: Word Scientific.

CHAVES, J. et al (2002) *Construcción histórica del uno y la unidad: perspectivas aritmética y geométrica.* En: Rev. Para la Educación Matemática a nivel básico y medio de la Sociedad Colombiana de Matemáticas (Rev. virtual: http://www.iespana.es/socolmat/numeros12.htm). Vol. 1. No. 2 Noviembre. Bogotá.

CHEVALLARD, Y. (1998) *La Transposición Didáctica.* Aique grupo editorial. Buenos Aires.

_________________et al (2000) *Estudiar matemáticas.* Cuadernos de Educación. No. 22. Ice - Horsori Editorial. Universidad de Barcelona.

DAVIS P., y HERSH, R. (1982) *Experiencia matemática*. Editorial Labor. Ministerio de Educación y ciencia.

DEDEKIND, R. (1888) *¿Qué son y para qué sirven los números?* Alianza Editorial. Madrid. Traducción de José Ferreiros. 1998.

DESCARTES, R (1637) *La Geometrie*. En: SMITH, D (1959) A source book in mathematics. Dover Publications. New York.

DEVLIN, K. (2003) *El lenguaje de las matemáticas.* Editorial Robinbook. Bogotá.

DONADO A., et al. (1997) *Sucesiones de números reales,* Universidad Pedagógica Nacional. Bogotá.

DUNHAM W. (1999) *Euler. The master of us all.* Colección La Matemática en sus personajes. Editoria l Nivola. Madrid. Traducción de Jesús Fernández (2000).

ESPITIA L., et al. (2002) *Talleres para el espacio académico Cálculo Diferencial,* Universidad Pedagógica Nacional. Bogotá.

FARFÁN, R. (199?) *Perspectivas y métodos de investigación en Matemática Ed ucativa.* En Serie Antologías. Nº 2. Cinvestav - IPN. México

FARIAS, E. et al (1999). *"Números reais: Concepções dos licenciandos e formação matemática na licenciatura".* En Rev. Zetetiké. Vol. 7. Nº 12. CEMPEM. Brasil

FLORES, P. (1998) *Concepciones y creencias de los futuros profesores sobre las matemáticas, su enseñanza y aprendizaje* Investigación durante las prácticas de enseñanza. MATHEMA colección. Granada.

FLÓREZ, R. (1999) *Hacia una pedagogía del conocimiento.* Editorial Mc. Graw Hill. Bogotá.

GARCÍA, G. et al (1999) *¿Qué hay detrás de las dificultades que presenta la comprensión del concepto de número real?* En: Rev. TEA. Número 5. Universidad Pedagógica Nacional. Bogotá.

GODINO, J. (1991) *Hacia una Teoría de la Didáctica de la matemática* En: A. Gutierrez (ed) Área de conocimiento: Didáctica de la Matemática. Capitulo 3. Colección Matemáticas: Cultura y Aprendizaje No. 1. Editorial Síntesis. Madrid.

GÓMEZ, B. (1991) *Las matemáticas y el proceso educativo.* En: GUTIÉRREZ, Angel (Ed.). Área de conocimiento Didáctica de la Matemática. Ed. Síntesis. Madrid.

GUACANEME, E. (2002) *Estudio didáctico de la proporcionalidad: Una aproximación a los aspectos matemáticos formales y a los textos escolares de matemáticas.* Tesis de Maestría en Educación con énfasis en Educación Matemática. Universidad del Valle. Cali.

GUTIÉRREZ, A. (1991) *La Investigación en Didáctica de la matemática* En: A. Gutierrez (ed) Área de conocimiento: Didáctica de la Matemática. Capitulo 3. Colección Matemáticas: Cultura y Aprendizaje No. 1. Editorial Síntesis. Madrid.

_______________ (199?) *Metodologías de investigación en Educación Matemática* En Research Agenda for Mathematics Education. Vol. 4.

GUTIÉRREZ, L. (1996) *Paradigmas cuantitativo y cualitativo en la investigación socio-educativa: Proyección y reflexiones.* En: http://cidipmar.fundacite.arg.gov.ve/Doc/Paradigma96/doc1.htm

HERNÁNDEZ, R. et al (1998) *Metodología de la investigación.* Segunda Edición. Editorial Mc Graw Hill. México D. F.

HIEBERT, J. y CARPENTER, T. (1992) *Learning and teaching with understanding.* En: Handbook of research on mathematics. NCTM. Traducción de Patricia Perry y Hernando Alfonso, Una Empresa Docente, Universidad de los Andes, Bogotá, D.C.

KILPATRICK, J. (1998) *Investigación en Educación matemática: su Historia y algunos temas de actualidad* En: Educación Matemática. 1-18. Una Empresa Docente.

KLEIN, J. (1968) *Greek Mathematical Thought and the Origin of Algebra.* Dover Publications. New York.

KLINE, M. (1972) *El pensamiento matemático de la antigüedad a nuestros días.* Alianza Editorial. Madrid.

LELONG, F. y ARNAUDIÉS, J. M. (1980). *Análisis*. Tomo 2. Ed. Reverté. Barcelona.

LLINARES, S. (1995). "*Conocimiento profesional del profesor de matemáticas: Conocimiento, creencias y contexto en relación a la noción de función*" En memorias VI Encontro de Investigaçao Matemática. Portugal.

LUQUE, C. (1993) *El cálculo: Una versión sin el concepto de límite.* Universidad Pedagógica Nacional.

___________y MORA, L. (2001) *Una Aproximación a los Números Racionales Positivos.* Universidad Pedagógica Nacional.

_________________________y TORRES, J. (2004) *Una construcción a los Números Reales Positivos.* Universidad Pedagógica Nacional.

MEDINA, A. (2001) *Imágenes del concepto de límite en estudiantes universitarios.* Tesis de Maestría en Docencia de la matemática. Universidad Pedagógica Nacional. Bogotá, D.C.

MORENO, L. (1997) *La educación matemática hoy.* En: Revista EMA. Vol. 2. Nº 2.

________________y WALDEGG, G. (1992) *Constructivismo y Educación Matemática.* . En: Educación Matemática. Vol. 4. Nº 2. Agosto.

________________________________ (2002) *Fundamentación cognitiva del currículo de matemáticas.* En: Incorporación de Nuevas Tecnologías al Currículo de Matemáticas de la Educación Media de Colombia. M.E.N. Bogotá, D.C.

________________________________ (1995) *Variación y representación: del número al continuo.* En Rev. Educación Matemática. Vol. 7 No. 1. Abril.

________________y SACRISTÁN, A. (1996) *Representaciones conceptuales y procesos recursivos.* En: Revista EMA. Vol. 1. Nº 2.

MUÑOZ, J. (1994) *Introducción a la Teoría de Conjuntos.* Tercera edición. Universidad Nacional de Colombia. Bogotá.

NEUGEBAVER, O. (1969) *The Exact Sciences in Antiquity*. Dover Publications. New York.

NEWMAN, J. (1997) *Sigma. El Mundo de las Matemáticas.* Tomo I y IV. Editorial Grijalbo. Barcelona.

PÉREZ, J. H. et al (2002) *Imaginarios en las instituciones educativas.* En: Rev. Para la Educación Matemática a nivel básico y medio de la Sociedad Colombiana de Matemáticas (Rev. virtual: http://www.iespana.es/socolmat/numeros.htm). Vol. 1. No. 1 Junio. Bogotá.

PETERSON, J. et al (1969) *Teoría de la Aritmética*. Editorial Limusa-Wiley. México.

REY, J. et al (1958) *Análisis matemático*. Vol. 1. Editorial Kapeluz. Cuarta edición. Buenos Aires.

____________ y BABINI, J. (1986) *Historia de la Matemática*. Vol. 2. Editorial Gedisa. Barcelona.

RICO, L. (1996) *Pensamiento numérico*. En: Investigaciones en Matemática Educativa. Grupo Editorial Iberoamérica. México.

_________ et al (1992) *Educación Matemática e Investigación*. Editorial Síntesis. Madrid.

RIGO, M. (1994) *Elementos históricos y sicogenéticos en la construcción del continuo matemático.* En Rev. Educación Matemática. Vol. 6. No.1-2. Agosto.

ROMERO, I. (1997) *La introducción del número real en enseñanza secundaria: una experiencia de investigación acción*. Colección Mathema. Ed. Comares. Granada.

___________ (1996) "*La introducción del número real en la enseñanza secundaria*". En Rev. Epsilon. Vol. 12. Nº 34.

___________, RICO, L. (1999) "*Representación y comprensión del número real. Una experiencia didáctica en secundaria*". En Rev. EMA. Vol. 4. Nº 2.

RUIZ, L. (1993) *Concepciones de los alumnos de secundaria sobre la noción de función: Análisis epistemológico y didáctico.* Tesis doctoral. Universidad de Granada. Granada.

SÁNCHEZ, C. H. (1997) *La construcción de los números reales*. En: XIV Coloquio Distrital de Matemáticas y Estadística.

SFARD, A. (1991) *On the dual nature of mathematical conceptions: Reflections on processes and objects as different sides of the same coin.* En: Educational Studies in mathematics. Vol. 22. Traducción de Edgar Alberto Guacaneme. 2000.

SIERRA, R. (1985) *Técnicas de investigación social. Teoría y ejercicios.* Cuarta edición. Editorial Paraninfo S. A. Madrid.

SMITH, D. (1958) *History of Mathematics.* Dover Publications. New York.

SOCAS, M. (2001) *Problemas didácticos entre el objeto matemático y su representación semiótica. Estudio con números decimales.* En: SOCAS, M., CAMACHO, M. Formación del profesorado en investigación en educación matemática III. Universidad de la Laguna. Mayo.

SPIVAK, M. (1996) *Cálculo infinitesimal.* Segunda edición. Editorial Reverté. México.

STEINER, G. et al (1990) *Foundations and methodology of the discipline mathematics education* (proceedings of 2nd TME Conference)

STEVIN, S (1585) *La Disme*. En: SMITH, D (1959) A source book in mathematics. Dover Publications. New York.

SWOKOWSKI, Earl. (1988) *Álgebra y Trigonometría con Geometría Analítica*. Segunda Edición. Grupo Editorial Iberoamérica.

TAKEUCHI, Y (1974) *Análisis matemático I*. Universidad Nacional de Colombia. Bogotá.

TALL, D. & VINNER, S. (1981) *Concept images and concept definition in mathematics with particular reference to limits and continuity.* En: Educational Studies in mathematics. Vol. 12.

TIROSH, D. et al (2000) *Prospective Elementary Teachers Conceptions of Rational Numbers*. En: http://jwilson.coe.uga.edu./Texts.Folder/Tirosh/Project.html

URSINI, S. (1996) *Una perspectiva social para la educación matemática. La influencia de la teoría de L. S. Vygostsky.* En: Educación Matemática. Vol. 8. Nº 3. Diciembre.

VALDEMOROS, M.(1996). *Vigotsky y su incidencia actual en la educación.* En: Educación Matemática. Vol. 8. Nº 3. Diciembre

__________________et al. (1996) *La interpretación ordinal de la fracción.* En HITT, F. (Ed) DIDÁCTICA: Investigaciones en didáctica educativa. Grupo editorial Iberoamérica.

VERA, F. (1970) *Científicos Griegos.* Aguilar S.A. de Ediciones. Madrid.

WALDEGG, G. (1996) "*La Contribución de Simon Stevin a la Construcción del Concepto de Número*". En Rev. Educación Matemática - Vol. 8 - Nº 2 – Agosto. México

MEN. Lineamientos curriculares para la educación básica. Matemáticas. 1998.

_____. Resolución número 2343 de junio 5 de 1996.

UPN. (2002) Memorias del XIII Encuentro de Geometría y sus Aplicaciones y I de Aritmética.

_____. (1984) Programa de Licenciatura en Matemáticas.

_____. (1994) Programa para la asignatura Fundamentos I.

_____. (2001) Programa para el espacio académico Sistemas Numéricos.

_____. (2003) Programa para el espacio académico Cálculo Diferencial.

_____. (1995) Programa Licenciatura en Matemáticas (informe al Consejo Superior).

_____. (1999) Proyecto curricular de la licenciatura en matemáticas (elementos para la acreditación previa).

ANEXOS

ANEXO A:

PROGRAMAS DE LOS ESPACIOS ACADÉMICOS: FUNDAMENTOS I, SISTEMAS NUMÉRICOS Y CÁLCULO DIFERENCIAL

UNIVERSIDAD PEDAGOGICA NACIONAL
FACULTAD DE CIENCIA Y TECNOLOGIA
DEPARTAMENTO DE MATEMATICAS

FUNDAMENTOS DE MATEMATICA I I

M311

OBJETIVOS

1. Afianzar los conocimientos que traen los estudiantes del colegio.

2. Proporcionar a los estudiantes los fundamentos necesarios para abordar los cursos de Cálculo y de Algebra Abstracta.

3. Lograr que los estudiantes adquieran destreza en el lenguaje y en el manejo de los conceptos de la matemática elemental.

4. Formar en los estudiantes hábitos de estudio, de orden e incentivar su curiosidad intelectual.

CONTENIDO

CAPITULO 1 : NOCIONES DE CONJUNTOS Y LOGICA

- 1.1 Conjuntos. Nociones fundamentales.
- 1.2 Relaciones y operaciones entre conjuntos.
- 1.3 Lógica. Preposiciones. Cuantificadores.
- 1.4 Cálculo proposicional.
- 1.5 Métodos de demostración.

CAPITULO 2: EL SISTEMA DE LOS NUMEROS REALES

- 2.1 Axiomas de campo.
- 2.2 Axiomas de orden.
- 2.3 Valor absoluto.
- 2.4 Números enteros y racionales.
- 2.5 Axioma de completez.

CAPITULO 3: INDUCCION MATEMATICA

- 3.1 Demostraciones por inducción.
- 3.2 Definiciones por recurrencia.

3.3 Teorema del binomio.

CAPITULO 4: FUNCIONES

4.1 Definición. Operaciones entre funciones.
4.2 Gráficas de funciones.
4.3 Función lineal.
4.4 Función cuadrática.
4.5 Transformaciones en la gráfica de una función.

CAPITULO 5: RELACIONES

5.1 Definición.
5.2 Gráficas de relaciones. Límites. Asintotas.
5.3 Funciones definidas implícitamente.
5.4 Función inversa.

EVALUACION ~~DEL CURSO~~:

Examenes parciales	4 X 15%	60%
~~Tablero, quices~~		15%
Examen Final		25%

BIBLIOGRAFIA

Allendoerfer y Oakley, Fundamentos de Matemáticas Universitarias.
Swokowwski, E. , Functions and Graphs
Swokowski, E. , Algebra and Trigonometry with Analytic Geometry
Ardila R., Jimenez R., Villamizar, A. , Conferencias de Fundamentos I

Carmen Samper de Caicedo
Raquel Ardila de Rebolledo

Marzo 22, 1994

UNIVERSIDAD PEDAGÓGICA NACIONAL
FACULTAD DE CIENCIA Y TECNOLOGÍA
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS
Programa para el curso de Sistemas numéricos 2003 - I

Intensidad Horaria: 5 horas semanales. Créditos: 3. Segundo semestre.

OBJETIVOS GENERALES DE LA ASIGNATURA:

1. Desarrollar actividades didácticas y matemáticas que permitan darle continuidad al proceso que se inició en el semestre anterior con el fin de realizar tareas propias del saber matemático, como intuir, conjeturar, proponer, interpretar, argumentar, demostrar, etc.
2. Fomentar en los estudiantes aprendizaje autónomo, crítico y propositivo, mediante la ejecución de diversas actividades que conlleven al cuestionamiento, análisis y presentación de propuestas respecto a ciertos procedimientos que –por lo general– se consideran naturales; contribuyendo así a la fundamentación no sólo teórica sino lógica, pedagógica y didáctica del futuro Licenciado en Matemáticas.
3. Construir el conjunto de los números reales (números racionales e irracionales) a través del proceso de medir, desarrollando las habilidades necesarias para dicho proceso, tales como: establecer, realizar y representar medidas, observar, comparar, aproximar, etc.
4. Construir diferentes sistemas de números tales como el conjunto de los números racionales, irracionales, enteros, complejos, etc.
5. Abstraer propiedades comunes a las operaciones en los distintos sistemas de números para establecer el concepto de estructura algebraica y adquirir habilidad en el manejo, tanto conceptual como operativo, de dichas estructuras.

NÚCLEOS CONCEPTUALES:

1. INDUCCIÓN MATEMÁTICA.
- El Método de Inducción matemática.
- Definiciones por recurrencia.
- Axiomatización de los números naturales.
- Orden en los números naturales.
- Relaciones de equivalencia.

2. LOS NÚMEROS N–MALES.
- Números n-males y sus operaciones.
- Orden entre números n-males.

3. LAS FRACCIONES.
- Fracciones y sus operaciones.
- Orden entre fracciones.

4. EL CONJUNTO DE LOS NÚMEROS RACIONALES POSITIVOS.
- Números racionales positivos y sus operaciones.
- Propiedades de los números racionales.
- Orden entre números racionales.

5. FRACCIONES CONTINUAS.

- Fracciones continuas finitas.
- Fracciones continuas infinitas.

6. NÚMEROS IRRACIONALES POSITIVOS.

- Irracionales cuadráticos.
- Irracionales construibles.
- Irracionales algebraicos.
- Irracionales trascendentes.

7. NÚMEROS REALES POSITIVOS.

- Cortaduras de Dedekind.
- Operaciones y propiedades entre números reales positivos.

8. NÚMEROS NEGATIVOS.

9. NÚMEROS REALES.

- Axiomas de campo.
- Axiomas de orden.
- Ecuaciones entre números reales.

10. OTRAS ESTRUCTURAS ALGEBRAICAS.

- Los campos $\mathbb{Z}_p$, p primo (operaciones, propiedades y ecuaciones).
- Los campos de los números de la forma $a+b\sqrt{q}$. a,b $\mathbb{Q}$; $q \in \mathbb{N}$.

$\in$

- El campo de los números complejos ($\mathbb{C}$).
- El anillo $\mathbb{D}$ de los números duales de *Study*.
- El anillo $\mathbb{M}$.de los números dobles de *Minkowsky*.
- El cuerpo $\mathbb{H}$ de los cuaterniones de Hamilton.
- El anillo de las matrices $n \times n$ con entradas en un campo.

LOGROS E INDICADORES DE LOGRO

1. Proponer y utilizar representaciones de estructuras matemáticas.

1.1. Propone relaciones cotidianas y matemáticas(de equivalencia, de orden , etc.). (0)
1.2. Realiza operaciones con números *n*-males (finitos y periódicos). (1)
1.3. Representa números *n*-males (finitos y periódicos) como divisiones entre números naturales. (1)
1.4. Codifica y decodifica números n-males. (1)
1.5. Maneja las fracciones continuas finitas. (4)
1.6. Maneja las fracciones continuas infinitas. (4)
1.7. Resuelve ecuaciones entre números reales. (8)
1.8. Resuelve ecuaciones en el campo Z_p, con p primo. (9)
1.9. Realiza operaciones en cada uno de los sistemas numéricos estudiados (Z_p, campos de los números de la forma $a + b\sqrt{q}$. $a,b \in \mathbb{Q}$; $q \in \mathbb{N}$, números complejos, en números duales, números dobles, etc.). (9)

2. Abstraer estructuras matemáticas a partir de sus representaciones

2.1. Identifica las propiedades comunes y no comunes en el sistema Z_p (p primo) en relación con el sistema de los números naturales, racionales y reales y las demuestra.(9)

2.2. Establece diferencias entre el sistema Z_n y Z_p en relación con las propiedades de las operaciones definidas sobre ellos. (9)

2.3. Demuestra las propiedades de las propiedades de las operaciones en cada sistema numérico y las relaciona de acuerdo a las características comunes que encuentra en ellos.(3-6-8-9)

3. Razonar informal y formalmente sobre afirmaciones matemáticas.

3.1. Demuestra afirmaciones matemáticas utilizando el método por inducción.(0)

3.2. Demuestra propiedades de las operaciones en el conjunto de números naturales con base en el sistema axiomático de Peano.(0)

3.3. Demuestra las propiedades que cumple una relación.(0)

3.4. Demuestra propiedades de las operaciones y de orden en el conjunto de los números racionales positivos a partir de la relación de equivalencia definida o teoremas ya demostrados.(3)

3.5. Demuestra la irracionalidad de algunos números.(5)

3.6. Demuestra propiedades de las operaciones y de la relación de orden en el conjunto de los reales positivos con base en las cortaduras de Dedekind (6).

3.7. Demuestra propiedades de las operaciones en el conjunto de los números reales negativos a partir de la relación de equivalencia definida entre números reales positivos. (7)

3.8. Demuestra teoremas que se deducen a partir de los axiomas de campo y orden en R.(8)

4. Justificar ideas, procedimientos, métodos matemáticos.

4.1. Justifica procedimientos para operar fracciones. (2)

4.2. Hace construcciones geométricas de números y las justifica. (5)

4.3. Determina si un número es algebraico o trascendente y lo justifica. (5)

4.4. Justifica procedimientos para operar números negativos. (7)

5. Comunicar ideas matemáticas.

5.1. Interpreta informaciones matemáticas provenientes de fuentes escritas.

5.2. Consulta acerca de la historia de los números racionales, irracionales, cortaduras de Dedekind, etc.

5.3. Elabora escritos con coherencia semántica y sintáctica.

5.4. Expresa oralmente sus ideas, de manera coherente y lógica.

5.5. Utiliza ayudas tecnológicas e informáticas para comunicar sus ideas.

6. Desarrollar actitudes propias de un futuro profesor de matemáticas.

6.1. Asiste puntualmente a todas las actividades propuestas

6.2. Entrega trabajos en las fechas establecidas (puntualidad).

6.3. Participa activa y constantemente en las actividades sugeridas.

6.4. Propone estrategias de solución a problemas planteados.

6.5. Escucha respetuosa, atenta y críticamente las ideas de otras personas.

METODOLOGÍA

Considerando que el conocimiento matemático no es transmisible sino construible, el profesor no muestra lo que sabe (o en su defecto, lo que ignora), es el estudiante quien debe justificar, proponer, en sí, construir su propio conocimiento con la colaboración de sus compañeros y de una persona quien lo guía y le propone ciertas actividades, el profesor; para de esta manera crear un ambiente en el cual prime la discusión y los problemas matemáticos. Así, no es primordial para el profesor exponer una serie de conocimientos adquiridos con cierta elocuencia, sino por el contrario, su tarea consiste en estar atento a enfrentar experiencias novedosas, situaciones impredecibles; luego, su preocupación debe centrarse en el aprendizaje de sus estudiantes, fomentando situaciones que muestren que el conocimiento matemático no es lineal y que está únicamente al alcance de sabios, de tal manera que se propicien ambientes en los cuales los estudiantes tengan la facultad de presentar variadas representaciones alrededor de un concepto, descubrimientos propios, intuiciones, etc. y así lograr en él un trabajo independiente, inquisitivo y exigente. Todo esto teniendo en cuenta que la actividad matemática no consiste "(...)*solamente aprender definiciones y teoremas, para reconocer el momento de utilizarlos y aplicarlos,*(...)*hacer matemáticas implica ocuparse de problemas. Sólo se hacen matemáticas cuando nos ocupamos de problemas, pero se olvida a veces que resolver un problema no es más que una parte del trabajo; encontrar buenas preguntas es tan importante como encontrar soluciones. Una buena reproducción por el alumno de una actividad científica exigiría que intervenga, que formule, que pruebe, que construya modelos, lenguajes, conceptos, teorías, que los intercambie con otros, que reconozca los que están conformes con la cultura, que tome los que son útiles, etc.* (...) *Por supuesto, se trata de una simulación que no es la "verdadera" actividad científica, como tampoco el saber presentado de forma axiomática constituye el "verdadero" saber"* (Brousseau, 1986).

CRITERIOS DE EVALUACIÓN

Específicamente, las actividades a evaluar son:

1. Un libro escrito por parejas de estudiantes, estilo cuento, que debe contener:

a. Curiosidades históricas (referenciadas) sobre los tópicos tratados y

b. Propuestas de solución a las actividades (o ejercicios) que se proponen en el espacio académico.

Para lo cual le puede ayudar hacer lecturas como la del libro *El Diablo de los Números* (Hans Enzensberger) y otras presentadas en el transcurso del semestre. Cada 15 días debe ser entregado el avance del libro empezando el jueves 20 de febrero. El libro final debe ser entregado el día viernes 23 de mayo.

2. Exposiciones, en grupos de 3 estudiantes, sobre temas variados, con duración de 20 minutos por exposición, las cuales se presentarán en determinadas fechas de acuerdo al tópico. Cada grupo debe entregar a los compañeros un resumen sobre su tema.
3. Participación en clase, con base en la exploración y propuestas de los estudiantes, trabajos de consulta u otras actividades extraclase sugeridas, como lecturas de artículos propuestos.
4. Un parcial por cada capítulo, excepto los núcleos conceptuales 2 y 7 (estos dos deben estar incluidos en el libro).

Se evaluará cada indicador de logro de acuerdo con cuatro niveles de desempeño. A continuación se caracteriza cada uno de éstos, en términos de actuaciones:

Nivel 1 (P): Copia o usa símbolos, estructuras, mecanismos propios del currículo de la escuela secundaria.

Nivel 2 (A): Traduce o traslada modelos (estructuras, sistemas, etc.) conocidos a situaciones o problemas planteados; Describe procedimientos, métodos, etc.; Establece relaciones, halla regularidades sin justificarlas.

Nivel 3 (B): Propone, conjetura o deduce fórmulas, métodos, procedimientos, etc.

Nivel 4 (E): Hace propuestas novedosas y las argumenta, justifica propiedades, afirmaciones matemáticas, etc.; demuestra teoremas de acuerdo a un método establecido.

Para aprobar la asignatura el estudiante debe cumplir las siguientes dos condiciones:
Presentar el libro completo al final del semestre (23 de mayo) y por lo menos 4 entregas parciales, y
Alcanzar todos los logros, para lo cual debe superar por lo menos el 80% de los indicadores de cada uno. Para determinar la calificación final, si el estudiante, en el proceso realizado durante todo el semestre, alcanza en la mayoría (60%) de sus indicadores A será promovido con Aceptable; si su nivel de desempeños corresponde al nivel 3 aprobará el curso con Bueno (B); y si el nivel superado es 4, obtendrá Excelente (E); de lo contrario, quedará con Nota pendiente (P).

La recuperación de cualquier indicador se realiza al finalizar el semestre en las dos semanas previstas para ello. Las actividades de recuperación para los estudiantes que obtienen Nota Pendiente en su calificación final son: la presentación final del libro donde se evidencien los logros no alcanzados y una prueba escrita que sustente los indicadores pendientes.

BIBLIOGRAFÍA DE APOYO:

1. ASGER, Aaboe. Matemáticas Episodios Históricos. Ed. Norma. Cali-Colombia.1964.
2. BIRKHOFF y Mc.LANE Álgebra Moderna. Ed. Teide. Barcelona. 1954.
3. BOYER, Carlos. Historia de la matemática. Alianza Universidad. 1968.
4. BURTON, W. Jones. Teoría de los números. Ed. F. Trillas. México. 1969.
5. CARO, Víctor E. Los números. Ed.Minerva, S. A. Bogotá.
6. DONADO, Alberto; LUQUE, Carlos y PÁEZ, Jorge. *El proceso de inducir*. 1998.
7. ENZENSBERGER, Hans. *El Diablo de los números*. Ed. Ediciones Siruela. 1998.
8. GORDILLO, Enrique y otros. Introducción a la teoría de números. Universidad Nacional. 1999.
9. LUQUE, Carlos, PÁEZ, Jorge y MORA, Lyda. *Actividades matemáticas para el desarrollo de procesos lógicos: El proceso de contar y el proceso de inducir*. 2002.
10. LUQUE, Carlos y MORA, Lyda. Una aproximación a los números racionales positivos. Universidad Pedagógica Nacional. 2001.
11. NEWMAN, James. Sigma, el Mundo de las Matemáticas. Barcelona, Grijalbo, 1994.
12. PASTOR, Rey y otros. Análisis matemático. Vol. I. Ed. Kapelusz. Buenos Aires. 1958.
13. RESTREPO, Guillermo S. Fundamentos de la matemática. Textos Universitarios. Universidad del Valle. Cali-Colombia. 1994.
14. SÁNCHEZ, Clara Helena. La construcción de los números reales. En: <u>Publicación XVI Coloquio Distrital de Matemáticas y Estadística.</u> Universidad Nacional de Colombia. 1997.
15. TAHAN, Malba - *El Hombre que Calculaba* - Bogotá, Editorial Panamericana, 1994.

UNIVERSIDAD PEDAGÓGICA NACIONAL
FACULTAD DE CIENCIA Y TECNOLOGÍA
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS

Espacio Académico: CALCULO DIFERENCIAL
Código: 40 43 01
1º Semestre de 2003

Núcleos conceptuales:

1. Variación: tipos de variaciones (derivada), relaciones entre variaciones (funciones).
2. Aproximación (exactitud y error, precisión, métodos elementales)
3. Límite
4. Derivada

Descripción del espacio académico:

En este primer espacio de la línea del Cálculo, por una parte se continúa en la profundización del estudio de los números reales y de las funciones reales como relación entre variaciones y por otra se avanza en la construcción y desarrollo de pensamiento matemático avanzado, según Tall, vía el camino de la aproximación y del estudio de las propiedades locales de funciones.

Metodología:

Las principales actividades del espacio académico son:

- Presentación de situaciones problema.
- Discusión sobre las posibles estrategias de estudio de la situación.
- Puesta en acción de las estrategias y obtención de soluciones.
- Socialización de las diferentes soluciones obtenidas.
- Validación de las distintas soluciones.

Con esta metodología se pretende alcanzar la construcción social de conocimiento, al implementar en el aula procesos de discusión, socialización y validación.

Aprendizajes Esperados – Logros

1. Analizar, en los números reales, las representaciones, el orden y el axioma de completez.
2. Identificar y reconocer el significado de las funciones reales como comparación entre variaciones, las distintas situaciones que las generan, sus invariantes, sus

3. Identificar e interpretar a la aproximación como noción básica para la construcción de los conceptos límite y derivada.
4. Construir los conceptos de límite, continuidad y derivada de funciones reales, sus representaciones, sus invariantes y sus relaciones.
5. Reconocer y aplicar el Cálculo Diferencial como herramienta para modelar y solucionar situaciones de cambio y aproximación, proponiendo y justificando alternativas de solución a dichas situaciones.

Indicadores de Logros

- Identifica, interpreta y utiliza por lo menos, las representaciones decimal y por fracciones continuas de los números reales.
- Soluciona desigualdades de primero y segundo grado con una variable real.
- Da significado a los extremos de un conjunto no vacío y acotado de números reales y usa el axioma de completez para resolver situaciones dadas en contexto matemático.

- Modela situaciones de comparación de variaciones mediante una función, le da sentido, identifica sus invariantes y la representa.
- Dada una función real, le da sentido en contexto, identifica sus invariantes, encuentra otras representaciones e identifica algunas de sus características.
- Identifica las características propias de diferentes modelos de función y de las familias asociadas, de acuerdo a la forma como se presenta la variación en las imágenes.
- Usa funciones para resolver situaciones problema en donde se evidencia relación entre magnitudes variables.

- Diferencia entre estimación, redondeo y aproximación
- Reconoce representaciones aproximadas de números reales.
- Usa métodos de aproximación para calcular ceros de funciones y calcula el error.
- Resuelve situaciones de la vida real que implican el uso de métodos de aproximación.

- Da sentido, en situaciones de cambio, a los objetos matemáticos que estudia el Cálculo Diferencial: límite, continuidad y derivada de funciones reales.
- Relaciona los nuevos conceptos en estudio con aquellas nociones y conceptos en los números reales que los generaron, como son la variación absoluta y relativa, la aproximación, la continuidad numérica.
- Aplica en el contexto matemático los conceptos límite, continuidad y derivada de funciones para el estudio de características de funciones reales.

- Presenta alternativas y coopera con propuestas para cualificar los resultados de las distintas actividades del espacio académico.
- Se convierte en un miembro propositivo de grupos de trabajo académico como una forma de reconocer el trabajo cooperativo como una manera de cualificar el conocimiento y de aprender y socializar lo aprendido.
- Toma conciencia de que una función del docente es ser facilitador del aprendizaje de los grupos de estudiantes de un espacio académico, pero que su labor exige la cooperación y el compromiso de ellos.

Código: 40 43 01

BIBLIOGRAFIA 2003

Edwards y Penney. **CÁLCULO CON GEOMETRÍA ANALÍTICA**. Editorial Prentice Hall. Cuarta Edición. 1996.

1. Variación: tipos de variaciones (derivada), relaciones entre variables

Hughes,D y Gleason, A. **CÁLCULO**. Compañía Editorial Continental S. A. México. 1997

2. Aproximación (exactitud y error, precisión, métodos elementales)

3. Límite

Dubinsky,E y otros. **CÁLCULO, CONCEPTOS Y COMPUTADORES**. Mc Graw Hill. Segunda edición. 1995.

Descripción del espacio académico:

Spivak, M. **CALCULUS: Cálculo Infinitesimal**. Editorial Reverté. 1970.

En este primer espacio de la línea del Cálculo, por una [illegible]

Smith, R y Minton, R. **CÁLCULO**. Tomo 1 Editorial Mc Graw Hill.2000.

ción entre variaciones y por otra se avanza en la construcción [illegible]

Apostol, T. **CALCULUS**. Vol 1 2ª Edición Editorial Reverté,S.A. 1988

estudio de las propiedades locales de funciones.

Metodología:

Las principales actividades del espacio académico son:

- Presentación de situaciones problema.
- Discusión sobre las posibles estrategias de estudio
- Puesta en acción de las estrategias y obtención de soluciones
- Socialización de las diferentes soluciones obtenidas
- Validación de las distintas soluciones

Con esta metodología se pretende alcanzar la construcción [illegible] al implementar un [illegible] procesos de discusión, socialización y validación

Luis Francisco Guayambo

LUIS EDUARDO ESPITIA S.

CELLY SERRANO DE PLAZAS

HERNAN DIAZ ROJAS

Aprendizajes Esperados o Logros

1. Analizar, en los números reales, las representaciones, el orden y el [illegible]

ANEXO B:

TALLERES PARA EL ESPACIO ACADÉMICO

CÁLCULO DIFERENCIAL

EDUCACIÓN MATEMÁTICA PARA BIOLOGÍA: TALLER 01

Febrero/ 2004

1. Complete el siguiente cuadro, escribiendo la representación correspondiente.

Número racional	Fracción decimal	Forma decimal	Notación científica
½			
	65/100		
		0.125	
			$7*10^{-2}$
			$3.5*10^{3}$
		9.675	
	215/1000		
3/5			
1/3			

2. En cada una de las siguientes secuencias numéricas
   i) Escriba los cinco siguientes números en cada caso.
   ii) Describa explícitamente el criterio con el cual se obtiene "el siguiente" de cada elemento de la secuencia.

a) 1, 2, 4, 7, ... b)100, 95, 85, 70, ...
c) 2, 5, 8,11, ... d) 3, 1.5, 0.75, 0.375, ...
e) 5, -1.25, 5/16, - $7.8125*10^{-2}$.,.. f) 50, 60, 68, 74,... 0
g) 9/10, 99/100, 999/1000

3. Si Usted sólo sabe sumar y multiplicar, invente un procedimiento para hallar una representación con tres decimales de $\sqrt{5}$ Justifique, con las operaciones que conoce, cada paso del procedimiento..

4. Justifique cada paso de la siguiente "demostración". ¿Existe algún error? ¿Dónde está el error ?

i) Sea $x = y$ entonces $x^2 = x * y$
ii) $x^2 - y^2 = x * y - y^2$
iii) $(x - y) * (x + y) = y * (x - y)$
iv) $(x + y) = y$
v) $2*y = y$
vi) $2 = 1$

5. +De una finca de 2400 Hectáreas se vende el 25% y se da en arriendo 1/6. De lo que queda se cultiva 0.6 y el área restante se deja para sembrar pastos.. ¿Cuántas Hectáreas se dedican a la siembra de pasto ?

6. Considere la expresión $2X^2 + 10 X + 12$

i) Exprésela como un producto de polinomios de primer grado
ii) ¿Para cuáles valores de X dicha expresión es igual a 0 ?
iii) ¿Para cuáles valores de X la expresión es mayor o igual a 0 ?
iv) ¿Para cuáles valores de X la expresión es menor que 0 ?

CÁLCULO DIFERENCIAL   Taller No 01

1. Demuestre que todo número natural es par o impar.
2. Si a es un número racional y b es irracional, ¿es a+b necesariamente irracional ?
3. Si a y b son ambos irracionales ¿ es a+b necesariamente irracional ?
4. Si a racional y b es irracional, ¿ es a*b necesariamente irracional ?
5. Si a y b son ambos irracionales ¿ es a*b necesariamente irracional ?
6. ¿ Existe algún número a tal que a^2 es irracional, pero a^4 es racional ?
7. ¿ Existen dos números racionales tales sean racionales tanto su suma como su producto?
8. Encuentre, si es posible, un número natural a, que cumple: " a no es múltiplo de 3 y su cuadrado (a^2) si lo es ".
9. Demuestre que $\sqrt{3}$ es irracional.
10. Sea a un número natural, demuestre que: " a es par si y sólo si a^3 es par ".
11. Demuestre que " la raíz cúbica de 2 " es un irracional.
12. Demuestre que $\sqrt{2} + \sqrt{3}$ es irracional.
13. Demuestre que $[(\sqrt{2} + \sqrt{3}) - \sqrt{6}]$ es irracional.

CALCULO DIFERENCIAL TALLER 02 : FRACCIONES CONTINUAS

1. Una expresión de la forma:

$$a_1+\cfrac{b_1}{a_2+\cfrac{b_2}{a_3+\cfrac{b_3}{a_4+\dots}}}$$

en donde a_i y b_i son números reales o complejos se llama una fracción continua.
Si para cada i >1, todo b_i es 1 y cada a_i es un natural diferente de 0, entonces la fracción se dice que es **una fracción continua simple** con la siguiente forma:

$$a_1+\cfrac{1}{a_2+\cfrac{1}{a_3+\cfrac{1}{a_4+\dots}}}$$

Los términos a_i se obtienen aplicando iteradamente el Algoritmo de la División e invirtiendo el cociente.

2. Se puede demostrar que "un número es racional si y solo si se puede expresar como una fracción continua simple finita"
3. El resultado anterior implica que " un número es irracional si y solo si se puede expresar como una fracción continua simple infinita"
4. Una fracción continua simple infinita puede ser periódica o no periódica.
5. Un irracional es cuadrático (aquel que es solución de una ecuación cuadrática de la forma $ax^2+bx+c=0$ a,b,c son enteros y $a \neq 0$) si y solo si se puede representar por una fracción continua simple periódica.
6. Las fracciones continuas se utilizan para obtener **aproximaciones racionales de los números reales** por medio de los convergentes o reducidos de la fracción continua simple, definidos por:

$$c_1=[a_1]=a_1 \qquad c_2=[a_1,a_2]=a_1+\frac{1}{a_2}$$

$$c_3=[a_1,a_2,a_3]=a_1+\cfrac{1}{a_2+\cfrac{1}{a_3}} \qquad c_4=[a_1,a_2,a_3,a_4]=a_1+\cfrac{1}{a_2+\cfrac{1}{a_3+\cfrac{1}{a_4}}}$$

EJERCICIOS

i) Exprese cada racional como una fracción continua simple: $85/37$, y, $-25/12$.

ii) Para cada fracción continua simple, encuentre el racional correspondiente:

$$3+\cfrac{1}{4+\cfrac{1}{3+\cfrac{1}{4}}} \qquad -5+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2}}}}$$

iii) Si x es un irracional, aplicando iteradamente la Propiedad Arquímediana se puede hallar una fracción continua simple infinita como su expresión.

Encuentre la fracción continua simple que es expresión de cada irracional
$\sqrt{7}$, $2-\sqrt{6}$

Encuentre en cada caso el número irracional cuya fracción continua simple periódica es
$[3, \overline{2}]$ $[5, \overline{1, 2}]$ $[-2, \overline{1, 4}]$

iv) Encuentre las primeras seis aproximaciones de $\sqrt{7}$

v) Encuentre las primeras aproximaciones por defecto y las primeras tres aproximaciones por exceso de $\sqrt{7}$

CÁLCULO DIFERENCIAL

TALLER # 03: REPRESENTACIÓN DECIMAL DE UN NÚMERO REAL

Los números reales cumplen **la propiedad arquimediana**: Para todo par de números reales x e y, con $y > 0$, existe un número entero k que satisface $x < k\,y$.

Con base en esta propiedad se puede demostrar que: Para todo par de números reales ε y x, con $\varepsilon > 0$, existe un único número entero p que satisface

Primera versión: $p\varepsilon \leq x < (p+1)\,\varepsilon$

Segunda versión: $p\varepsilon < x \leq (p+1)\,\varepsilon$

Tercera versión: $(p-1)\varepsilon < x \leq p\,\varepsilon$

Cuarta versión: $(p-1)\varepsilon \leq x < p\,\varepsilon$

Empleando cada una de estas versiones, un número real puede tener nuevas representaciones por medio de sucesiones de números enteros, de la siguiente manera:

Primera versión: El número real $x = 25/2$ se compara con el número real positivo 1, seguidamente se compara con 10^{-1} y así sucesivamente con todos los reales positivos de la forma $\varepsilon_n = 10^{-n}$, de esta manera se obtiene una colección de *números enteros denotados por* P_n *que satisfacen las desigualdades:*

$P_n 10^{-n} \leq x < (P_n + 1)\, 10^{-n}$ para cualquier entero n que pertenece al conjunto de los *números naturales*.

Para n = 0 se tiene $12*1 \leq 25/2 < (12+1)*1$

Para n = 1 se tiene $125 * 10^{-1} \leq 25/2 < (125+1) * 10^{-1}$

Para n = 2 se tiene $1250 * 10^{-2} \leq 25/2 < (1250+1) * 10^{-2}$

Para n = 3 se tiene $12500 * 10^{-3} \leq 25/2 < (12500+1) * 10^{-3}$

Y así sucesivamente.

Con los P_n se puede construir una sucesión de números enteros denotados por

$(x_0, x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n, \ldots)$ donde $x_0 = P_0$; $x_{n+1} = P_{n+1} - 10 * P_n$

Para n = 0 se tiene $x_0 = P_0 = 12$

Para n=1 se tiene $x_1 = P_1 - 10\,P_0 = 125 - 120 = 5$

Para n = 2 se tiene $x_2 = P_2 - 10\,P_1 = 1250 - 1250 = 0$

Para n = 3 se tiene $x_3 = P_3 - 10\,P_2 = 12500 - 12500 = 0$

Y así sucesivamente.

La sucesión de números enteros obtenida es: (12, 5, 0, 0,0,...)

De esta manera el número real 25/2 queda representado por dicha sucesión.

EJERCICIOS:

1. Encuentre las representaciones del número real 25/2 que surgen de aplicar el proceso anterior, con las otras versiones.
2. Encuentre las cuatro representaciones del número real $-25/2$.
3. Halle las cuatro representaciones del número real 1/8.
4. Determine las cuatro representaciones del número real 3.

UNIVERSIDAD PEDAGOGICA NACIONAL
DEPARTAMENTO DE MATEMATICAS
CALCULO DIFERENCIAL

TALLER 04

I. En cada caso encontrar todos los números reales X que satisfacen la condición dada :

(1) $4 - X < 3 - 2X$

(2) $5 - X^2 < 8$

(3) $5 - X^2 < -2$

(4) $(X - 1)(X - 3) > 0$

(5) $X^2 - 2X + 2 > 0$

(6) $X^2 + X + 1 > 2$

(7) $X^2 - X + 10 > 16$

(8) $X^2 + X + 1 > 0$

(9) $(X - \Pi)(X + 5)(X - 3) > 0$

(10) $(X - 2^{1/3})(X - 2^{1/2}) > 0$

(11) $2^X < 8$

(12) $X + 3^X < 4$

(13) $1/X + 1/(1 - X) > 08$

(14) $(X - 1)/(X + 1) > 0$

(15) $|3 - 5X| = 1/2$

(16) $|2X + 3| < 5$

(17) $|4 - 3X| < 0.1$

(18) $2 < |2 - 2X| < 3$

(19) $|2X + 3| / 5 |1 - X| \leq 2$

(20) $|2 - 3X| + |1 - X| > 1$

II. Considere que a, b, c y d son números reales, para demostrar cada uno de los siguientes enunciados:

(1) Si $a < b$ y $c < d$ entonces $a + c < b + d$

(2) Si $a < b$ entonces $-b < -a$

(3) Si $a < b$ y $c > d$ entonces $a - c < b - d$

(4) Si $a < b$ y $c > 0$ entonces $a * c < b * c$

(5) Si $a < b$ y $c < 0$ entonces $a * c > b * c$

(6) Si $a > 1$ entonces $a^2 > a$

(7) Si $0 < a < 1$ entonces $a^2 < a$

(8) Si $0 \leq a < b$ y $0 \leq c < d$ entonces $ac < bd$

(9) Si $0 \leq a < b$ entonces $a^2 < b^2$

(10) Si $0 \leq a$, b y $a^2 < b^2$ entonces $a < b$

(11) Si $0 < a < b$ entonces $a < \sqrt{ab} < (a + b)/2 < b$

III. I) Dos desigualdades de sentido contrario se pueden dividir miembro a miembro si todos los miembros son positivos; como resultado se obtiene una desigualdad del mismo sentido que la desigualdad dividendo.

ii) Si a, b, y, c son números reales positivos, entonces $a^2 + b^2 + c^2 \geq ab + ac + bc$

iii) Si $x + y + z = 1$, donde donde x, y, z son realea positivos, entonces, $(1 - x)(1 - y)(1 - z) \geq 8xyz$

iv) Para todo número real x, se cumple que $x^2 / (1 + x^4) \leq 1/2$

CALCULO DIFERENCIAL – TALLER 05:
SUPREMO E ÍNFIMO DE SUBCONJUNTOS DE NÚMEROS REALES

1. Encuentre números reales s, tales que se cumpla que $s \geq a$, en donde a es cualquier elemento del conjunto dado.

i) A= $\{n, tales\ que, 1 \leq n \leq 12\}$
ii) B= $\{n/n+1, con\ n \geq 0\}$
iii) C= $\{1, 1.9, 1.99, 1.999, ...\}$
iv) D = (5/2 ,7)
v) E = $[2, \sqrt{5}]$
vi) F= $\{(1-3n)/n, con\ n \geq 1\}$
vii) El conjunto de los números naturales pares.
viii) El conjunto de los números enteros pares.

El número real $\underline{s}$ que cumple la condición establecida se llama una cota superior del conjunto y de éste se dice que está acotado superiormente por $\underline{s}$.

2. Encuentre números reales i, tales que se cumpla que $i \leq$ a, en donde a es cualquier elemento del conjunto dado. (Trabaje con los conjuntos del numeral 1.)

El número real $\underline{i}$ que cumple la condición establecida en esta proposición se llama una cota inferior del conjunto y de éste se dice que es un conjunto acotado inferiormente por $\underline{i}$.
Si un conjunto es acotado superior e inferiormente se dice de él que es acotado.

3. Sea B= $\{1/n, con\ n \geq 1\}$

i) Muestre que el conjunto B es no vacío, exhibiendo dos elementos de B.
ii) ¿Es el conjunto B acotado inferiormente? Muestre por los menos dos cotas inferiores de B. Y justifique que efectivamente son cotas inferiores del conjunto B.
iii) ¿Es el conjunto B acotado superiormente? Muestre dos cotas superiores del conjunto B, justificando el por qué lo son.
iv) Muestre que 0 es una cota inferior de B.
v) Tome un real positivo cualquiera r y encuentre un elemento de B que esté entre ese número real y 0, es decir cuya distancia a 0 sea menor que r.
vi) Repita el procedimiento tomando otro número real positivo r_1, menor que el tomado anteriormente.
vii) ¿Es posible repetir el proceso anterior con cualquier número real positivo?
viii) ¿Se tiene el mismo resultado si en lugar de 0 uso como cota inferior (-1)? ¿(-1/2)?¿(-1/100)?

Una cota inferior $\underline{i}$ de un conjunto A, que cumple: "dado cualquier número real positivo r, es siempre posible hallar un elemento del conjunto cuya distancia a $\underline{i}$ es menor que r se llama el extremo inferior o ínfimo del conjunto A".

4. Considere el mismo conjunto del ejercicio 3.

i) Muestre que 1 es una cota superior de B.
ii) Tome sucesivamente dos números reales positivos y consiga un elemento de B

cuya distancia a 1 sea menor que el número real tomado. ¿Es posible repetir el proceso con otros números reales positivos.? Explique.

iii) ¿Se tiene el mismo resultado si en lugar de 1 se toman otras cotas superiores del conjunto B?

Una cota superior $\underline{s}$ de un conjunto que cumple que: "dado cualquier número real positivo r, es siempre posible hallar un elemento del conjunto cuya distancia a $\underline{s}$ es menor que r", se llama el extremo superior o supremo del conjunto.

5. Para cada uno de los conjuntos del numeral 1, determine, si existen, el supremo y el ínfimo. Justifique.

6. Para uno cualquiera de los conjuntos dados y acotados inferiormente considere el conjunto de las cotas inferiores. Verifique que la mayor de las cotas inferiores cumple la condición que caracteriza al ínfimo de un conjunto.

7. Para uno cualquiera de los conjuntos dados y acotados superiormente considere el conjunto de as cotas superiores. Verifique que la menor de las cotas superiores cumple la condición que caracteriza el supremo de un conjunto.

ANEXO C:

PRUEBA PILOTO

UNIVERSIDAD PEDAGÓGICA NACIONAL
FACULTAD DE CIENCIA Y TECNOLOGÍA
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS
CUESTIONARIO[99] (Parte I)

NOMBRE: ______________________________ **FECHA:** ____________________

1.
   a. ¿Qué significa, según su criterio, un número real?
   b. ¿Qué significa, para usted, un número racional?
   c. ¿Qué significa, para usted, un número irracional?
   d. ¿A qué cree usted, se debe la existencia de los números irracionales?
   e. Los números naturales son utilizados, por ejemplo, para contar; los números racionales, para medir, y ¿los números irracionales para qué sirven?
   f. ¿Cuál es la necesidad del Axioma de Completitud[100] en el conjunto de los números reales?

2.
   a. Considere un segmento AB y un punto C en su interior. Divida el segmento AB en 2 partes iguales, después divida cada una de ellas en 2 partes iguales y así sucesivamente. Después de un número finito de veces, tal vez un número muy grande, ¿coincide el punto C con algún punto de las divisiones realizadas? Justifique.
   b. Considere un segmento AB, divídalo en dos partes iguales, cada una de ellas, divídala en dos partes iguales y repita el proceso con cada uno de los segmentos resultantes, ¿este proceso puede ser continuado de manera indefinida?, ¿es mayor el número de pasos si la longitud del segmento es mayor? Justifique.

3.
   a. ¿Siempre es posible encontrar una unidad común para medir las longitudes de dos barras de metal cualesquiera? Explique.
   b. ¿Siempre es posible encontrar una unidad común para medir las longitudes de dos segmentos cualesquiera, de la geometría euclidiana? Explique.

4. Considere cuatro rectángulos cuyas dimensiones a y b, están dadas por:
   a. $a = 15$ y $b = 35$
   b. $a = 1{,}5$ y $b = 3{,}5$
   c. $a = 15\sqrt{3}$ y $b = 35\sqrt{3}$
   d. $a = 15\sqrt{3}$ y $b = 35$

   ¿Cuáles de estos rectángulos pueden ser divididos en un número entero de cuadrados iguales, trazando rectas verticales y horizontales?

5.
   a. ¿Es el número 0,0100110011001…, un número racional? Justifique.
   b. ¿Es el número 0,01001000100001…, un número racional? Justifique.
   c. ¿Es $\dfrac{\sqrt{8}}{\sqrt{2}}$ un número irracional? Explique su respuesta.

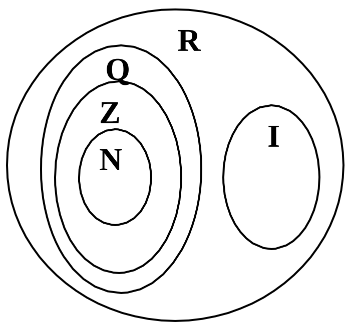
---

[99] Algunas de las preguntas aquí presentes fueron extraídas de: FARIAS, COSTA, CAVALCANTI (1999)
[100] Todo subconjunto A de números reales no vacío, acotado superiormente posee supremo.

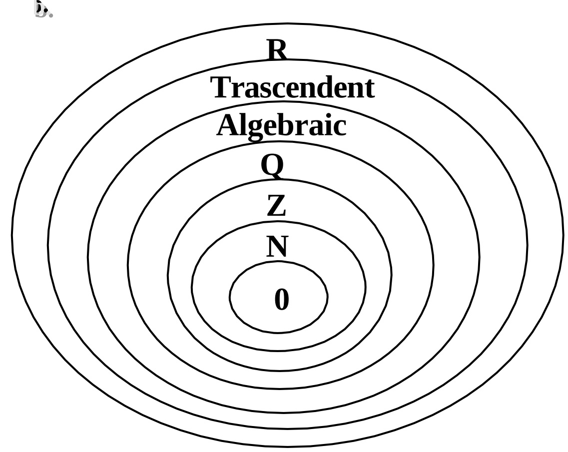
6. Se sabe que ν es la razón entre el perímetro de una circunferencia y su diámetro. Si llamamos C el perímetro de la circunferencia (en cm., por ejemplo) y D, la medida del diámetro (en cm.), obtenemos $\nu = \dfrac{C}{D}$. Esto llevó a un estudiante a concluir que ν era racional. ¿Qué le diría usted al estudiante, después de que él le presentara esta conclusión?

7. Considere los siguientes diagramas de Venn, en su interpretación usual, y decida si son correctos o no; en el último caso, justifique y construya un diagrama que, a su criterio, sea correcto.

a.



b.



UNIVERSIDAD PEDAGÓGICA NACIONAL
FACULTAD DE CIENCIA Y TECNOLOGÍA
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS
CUESTIONARIO[101] (Parte II)

NOMBRE: ______________________________________ **FECHA:** ______________________

1.
   a. Determine, si se puede, tres números racionales y tres números irracionales entre $\frac{1}{2}$ y $\frac{2}{3}$.
   b. ¿Cuántos números racionales hay entre $\frac{1}{2}$ y $\frac{2}{3}$?, ¿cuántos números irracionales? Explique su respuesta.
2.
   a. ¿Existe un número racional cuyo cuadrado sea el predecesor al número racional 2? Explique.
   b. ¿Existe un número real que sea el siguiente al número real 1? Explique.
   c. Los números racionales, ¿son numerables[102]? Explique.
   d. Los números reales, ¿son numerables? Explique.

3. Considere el conjunto $A = \{x \in \mathbf{R}: 0 < x < \sqrt{7}\}$.
   a. ¿Tiene el conjunto A cotas superiores[103] en **Q**? Si las tiene, dé dos ejemplos.
   b. ¿Tiene el conjunto A cotas superiores en **R**? Si las tiene, dé dos ejemplos.
   c. ¿Existe el Supremo de A[104] en **Q**? Si existe, ¿cuál es?
   d. ¿Existe el Supremo de A en **R**? Si existe, ¿cuál es?
   e. ¿Existen diferencias entre las respuestas **c.** y **d.**? Si las hay, ¿a qué cree que se deban?

4. Considere los siguientes conjuntos:
   a. El conjunto de números naturales estrictamente mayores que 0 y estrictamente menores que 2.
   b. El conjunto de números racionales estrictamente mayores que 0 y estrictamente menores que 2.
   c. El conjunto de números irracionales estrictamente mayores que 0 y estrictamente menores que 2.
   d. El conjunto de números reales estrictamente mayores que 0 y estrictamente menores que 2.

   ¿Hay diferencia entre ellos? Enúncielas en caso de que exis tan.

5. Marque con una X, según corresponda, si los siguientes enunciados son verdaderos o falsos y justifique su respuesta:

	V	***F***
a. A cada punto de la recta le corresponde un número real y viceversa.	☐	☐
b. Se pueden marcar en la recta todos los números racionales y quedan sobrando algunos puntos.	☐	☐
c. Existe un intervalo (a, b), donde a y b son números reales, que sólo contiene números racionales.	☐	☐
d. Si agregamos a los números racionales positivos π, e y todos los números de la		

[101] Algunas de las preguntas aquí presentes fueron extraídas de: FARIAS, COSTA, CAVALCANTI (1999)
[102] Un conjunto es numerable si existe una biyección entre éste y el conjunto de los números naturales.
[103] a es cota superior de A si y sólo si $a \geq x$, para todo $x \in$ A.
[104] a es el supremo de A si y sólo si: a es cota superior de A y ningún número menor que a es cota superior de A.

forma $\sqrt[n]{\dfrac{p}{q}}$ con n, p y q números naturales, obtenemos todos los números reales positivos. ☐ ☐

e. El conjunto de los números racionales, con la adición y la multiplicación, es un campo ordenado completo. ☐ ☐

6. Qué significado le da a las siguientes expresiones:

$$\frac{1}{2} = \frac{2}{4} \qquad 0{,}5$$

$$0{,}\ 333\ldots \qquad \cfrac{1}{4+\cfrac{1}{4+\cfrac{1}{4+\ldots}}} = \sqrt{5}$$

$$\sqrt{2} = 1{,}\ 4142\ldots$$

7. Marque con una equis (X) en la casilla que corresponda si cada una de las siguientes expresiones es o no un número real. Argumente su respuesta.

	SÍ	NO
1. $1 + \cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2}}}$	☐	☐
2. $\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\ldots}}}$	☐	☐
3. 2^{π}	☐	☐
4. 0, 123456789101112…	☐	☐
5. 0, 52769242352468315254879654…[105]	☐	☐
6. $\frac{1}{5} \times e^{\sqrt{3}}$	☐	☐
7. $\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$	☐	☐

[105] Las cifras decimales son escritas aleatoriamente.

ANEXO D:

CUESTIONARIO DEFINITIVO

UNIVERSIDAD PEDAGÓGICA NACIONAL
FACULTAD DE CIENCIA Y TECNOLOGÍA
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICAS
CUESTIONARIO[106]

NOMBRE: ____ **FECHA:** ____________________

1. ¿Qué significa para usted
   a. un número racional?
   b. un número irracional?
   c. un número real?
   d. ¿A qué se debe la existencia de los números irracionales?
   e. Los números naturales son utilizados, por ejemplo, para contar; los números racionales, para medir, y ¿los números irracionales para qué sirven?
   f. ¿Cuál es la necesidad del Axioma de Completitud[107] en el conjunto de los números reales?

2.
   a. Considere un segmento AB y un punto C en su interior. Divida el segmento AB en 2 partes iguales, después divida cada una de ellas en 2 partes iguales y así sucesivamente. Después de un número finito de veces, tal vez un número muy grande, ¿coincide el punto C con algún punto de las divisiones realizadas? Justifique.
   b. Considere un segmento AB, divídalo en dos partes iguales, cada una de ellas, divídala en dos partes iguales y repita el proceso con cada uno de los segmentos resultantes, ¿este proceso puede ser continuado de manera indefinida?, ¿es mayor el número de pasos si la longitud del segmento es mayor? Justifique.

3. Considere cuatro rectángulos cuyas dimensiones a y b, están dadas por:

a. $a = 15$ y $b = 35$

b. $a = 1{,}5$ y $b = 3{,}5$

c. $a = 15\sqrt{3}$ y $b = 35\sqrt{3}$

d. $a = 15\sqrt{3}$ y $b = 35$

¿Cuáles de estos rectángulos pueden ser divididos en un número entero de cuadrados iguales, trazando rectas verticales y horizontales? ¿Cuántos cuadrados se obtienen?

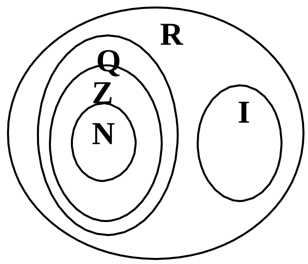
4.
   d. ¿Es el número 0,0100110011001…, un número racional? Justifique.
   e. ¿Es el número 0,01001000100001…, un número racional? Justifique.
   f. ¿Es $\dfrac{\sqrt{8}}{\sqrt{2}}$ un número irracional? Explique su respuesta.

5. Considere los siguientes diagramas de Venn, en su interpretación usual, y decida si son correctos o no; en el último caso, justifique y construya un diagrama que, a su criterio, sea correcto.

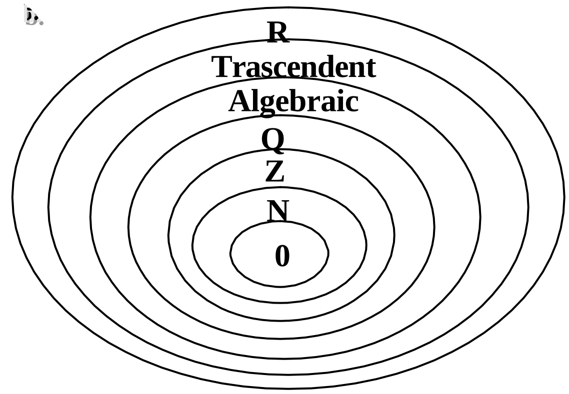
---

[106] Algunas de las preguntas aquí presentes fueron extraídas de: FARIAS, COSTA, CAVALCANTI (1999)
[107] Todo subconjunto A de números reales no vacío, acotado superiormente posee supremo.

a.



b.



6.

c. Determine, si se puede, tres números racionales y tres números irracionales entre $\frac{1}{2}$ y $\frac{2}{3}$.

d. ¿Cuántos números racionales hay entre $\frac{1}{2}$ y $\frac{2}{3}$?, ¿cuántos números irracionales? Explique su respuesta.

7.

e. ¿Existe un número racional cuyo cuadrado sea el predecesor al número racional 2? Explique.
f. ¿Existe un número real que sea el siguiente al número real 1? Explique.
g. Los números racionales, ¿son numerables[108]? Explique.
h. Los números reales, ¿son numerables? Explique.

8. Considere el conjunto $A = \{x \in \mathbf{R}: 0 < x < \sqrt{7}\}$.

a. ¿Tiene el conjunto A cotas superiores[109] en **Q**? Si las tiene, dé dos ejemplos.
b. ¿Tiene el conjunto A cotas superiores en **R**? Si las tiene, dé dos ejemplos.
c. ¿Existe el Supremo de A[110] en **Q**? Si existe, ¿cuál es?
d. ¿Existe el Supremo de A en **R**? Si existe, ¿cuál es?
e. ¿Existen diferencias entre las respuestas **c.** y **d.**? Si las hay, ¿a qué cree que se deban?

9. Marque con una X, según corresponda, si los siguientes enunciados son verdaderos o falsos.

	V	**F**
a. A cada punto de la recta le corresponde un número real y viceversa.	☐	☐
b. Se pueden marcar en la recta todos los números racionales y quedan sobrando algunos puntos.	☐	☐
c. Existe un intervalo (a, b), donde a y b son números reales, que sólo contiene números racionales.	☐	☐
d. Si agregamos a los números racionales positivos π, e y todos los números de la forma $\sqrt[n]{\frac{p}{q}}$ con n, p y q números naturales, obtenemos todos los números reales positivos.	☐	☐

[108] Un conjunto es numerable si existe una biyección entre éste y el conjunto de los números naturales.
[109] a es cota superior de A si y sólo si $a \geq x$, para todo $x \in A$.
[110] a es el supremo de A si y sólo si:
iii) a es cota superior de A
iv) ningún número menor que a es cota superior de A.

e.	El conjunto de los números racionales, con la adición y la multiplicación, es un campo ordenado completo.	☐	☐
f.	0, 999 … < 1	☐	☐

10. Qué significado le da a las siguientes expresiones:

a. $\frac{1}{2} = \frac{2}{4}$

b. $\frac{1}{3} = 0,333\ldots$

c. $\frac{1}{2} = 0,5$

d. $\sqrt{2} = 1,4142\ldots$

e. $2+\cfrac{1}{4+\cfrac{1}{4+\cfrac{1}{4+\ldots}}} = \sqrt{5}$

11. Marque con una equis (X) en la casilla que corresponda si cada una de las siguientes expresiones es o no un número real.

		SÍ	NO
a.	$1+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{2}}}$	☐	☐
b.	$\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\ldots}}}$	☐	☐
c.	2^{π}	☐	☐
d.	$0,123456789101112\ldots$	☐	☐
e.	$0,52769242352468315254879654\ldots$[111]	☐	☐
f.	$\frac{1}{5}\times e^{\sqrt{3}}$	☐	☐
g.	$\frac{1+\sqrt{5}}{2}$	☐	☐

[111] Las cifras decimales son escritas aleatoriamente.

ANEXO E:

PROCEDIMIENTOS PROPUESTO POR LOS ESTUDIANTES PARA EL NUMERAL 3

que $\frac{n}{m} = \frac{x}{\frac{35}{x}}$: 35 debe ser un número racional

que n y m son enteros, pero $\frac{15\sqrt{3}}{35}$

que el cuarto rectángulo no se puede

un número entero de cuadrados.

se puede dividir en cuadrados iguales no siempre enteros, por ejemplo dividir 35 en 7 y 15 en 3 partes partes iguales

da como resultado 21 cuadrados iguales de lado 5. Si por cada lado de los 21 cuadrados sacamos el punto medio y trazamos rectas verticales y horizontales hay infinitos cuadrados al repetir, repetir y repetir el proceso indefinidamente.

la razon por la cual pienso que en cualquier rectángulo se puede hacer este proceso es porque si el rectángulo tiene lados a y b, con a, b ∈ ℝ entonces existen m y n tambien reales tq $\frac{a}{m} = \frac{b}{n}$, m es el número de veces que hay que dividir a a, n el número de veces que hay que dividir a b y $\frac{a}{m}$ es el lado de los cuadrados resultantes para a, b, c, d del punto 3 se tiene que

$\frac{15}{n} = \frac{35}{m}$

$\frac{1.5}{n} = \frac{3.5}{m}$

$\frac{15\sqrt{3}}{n} = \frac{35\sqrt{3}}{m}$

$m = \frac{35\sqrt{3}\,n}{15\sqrt{3}}$

$m = \frac{7n}{3}$

$\frac{15\sqrt{3}}{n} = \frac{35}{m}$

$m = \frac{35n}{15\sqrt{3}}$

$m = \frac{7\sqrt{3}\,n}{9}$

es obvio que $n \leq$ al lado correspondiente. $m \cdot n$ es el número MINIMO de cuadrados y si n o m no es un numero entero, entonces el número de cuadrados no es entero. el punto d no tiene un número de cuadrados enteros

3. :JS 3..5 3S fil 16\ "8 J

151) \.5 L] ·'131\

j._, ⁰,..._.3e-,.......0.J r;;¡ ve. ro.. to..("\ "" - \ , +0.:> -""¡ r-i.*o-Je.:.Y_, :_l. ,
cec..-\:c- ve.r·L· le.., () 6.ro. rcx---C.r.- c::J vo..d-rQ. :>"·., ..l d..c ')(:¹J
-\ o.--.c,e, e,, c::L06 -l er . 1.r, .9.. q;.1·
:; o.. X ,..._.., :::: – ––

(=>⁰ro- \o 3 oc-•o./"e-o"::o c..c>6o ""o\r..b-y rob e.._e..,\ ;<' ·
.X::1 X b.5 x ::: G ("e(:>e..c..-\ ivo.,.._...c-n+e. pe.- ro.- (?°" r+ir

el c-e.c. O..r-_sv'o e.... o d.---o,.d.o t;¡ ....x2- Q., ov ue- ;:se, (> - :
(.:,o.,,t,;_ e..... evo-c:J.e-e-c::1o::::;, dc..r-..o o-!>\ \'-:::Ja.e- o. e;¡ vQ_ l - · \; {
ree;--t-a.riqu o --' ve-oc- ? r-4-1c- e--, vn ,-...o,_ .-o
cv¿.d-r o. '1-V::¿. o-.f--,- D-ce, \o. x p<"" <2,, iOlJ - SQ,NO.(-':<l
('t .x ...... x"y é\ (""V\ &o¡"""\ d.c.- \'l01 , (""\ rv'\ e ;:e:. ..... :" '.(

roro e\ evo..r-\o c..o-o 5o debe.- -f o--ec--

'rl=- 1sfi?
x.
35
)(
\5\GI

que $\frac{n}{m} = \frac{x}{\frac{35}{x}} : \frac{15\;!3'}{35}$ debe ser un """ VIV'\ e.e-e r-<:l!c...i·/.

que n y m son enteros, pero $\frac{\backslash 5\,f31}{35}$ e-:> · ic-c-iO""" · o.c-+ic- .
que el cuarto rectángulo no se puede
un número entero de cuadrados.

ANEXO F:

MÉTODOS EMPLEADOS POR LOS ESTUDIANTES PARA EL NUMERAL 6

$$\frac{\frac{28+\sqrt{3}}{24}}{2} = \frac{28+\sqrt{3}}{28}$$

$$\frac{2}{3}$$

$$= \frac{24+\sqrt{3}}{28}$$

$$\frac{28+\sqrt{3}}{28} <$$

ya que puede

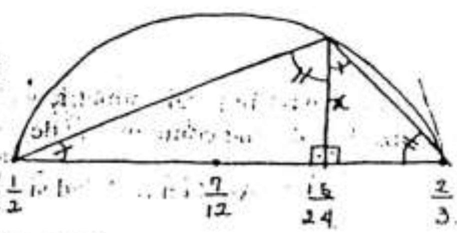
Y'U

$\frac{1}{2} + \frac{7}{12} =$

$\frac{1}{2} < \frac{13}{24} < \frac{7}{12} < \frac{15}{24} <$

3 Números entre $\frac{1}{2}$ y $\frac{2}{3}$ son:

Se sabe que: $\frac{1}{2} < \frac{15}{24} < \frac{2}{3}$



$\Rightarrow \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{24} = \frac{12+\sqrt{3}}{24}$ y este número cumple:

Otro Número irracional

$\frac{12+\sqrt{3}}{24} + \frac{2}{3} =$

y este número cumple:

Otro:

$\frac{1}{2} + \frac{12+\sqrt{3}}{24} =$

y este número cumple:

3) Entre $\frac{1}{2}$ y $\frac{2}{3}$ hay infinitos Racionales, encontrar el punto medio entre dos de los

z 2 7 ... 6

RACIONALES ( ) $\left(\frac{59}{100}\right)$ $\left(\frac{13}{25}\right)$ IRRACIONALES (ir - •;) $\left(\sqrt{2} - \frac{9}{10}\right)$

3

X. :::

IÜ)(: \O"- S

—= -o. :11

9.'\" 4. b

ciox.,."6

'I(:- 'l G

0

$X = 0.S'1$ $0.Sz. = x.$

$100X = S9$ $S2. = 100X$

$X = \frac{S'1}{100}$ $X = \frac{Z.C}{IDO}$,3

Jo - ::.)

" 1

,1 - 3 -t o.¿\ 0.3.tj 15•.•

11 - 2 . G = ü. :S'I' '5 - - -

X;. z. G

to x; '" 'l. G

'X „ t 3

. 1u -)

lf ;;:_ _e 1. /) \ .

{2. - 1 = o <1 1 . -

fl- 1 + 0- 1.=. 0.s 1 . - - .

fí – O.Cj :- O . S' \ .

X :: O. 'I

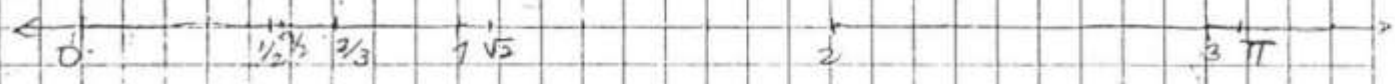
IOl(= e¡

X . '/Ju

(6) a) TRES NUMEROS RACIONALES ENTRE $\frac{1}{2}$ Y $\frac{2}{3}$

$$\left(\frac{1}{2}+\frac{2}{3}\right)/2 = \left(\frac{7}{6}\right)/2 = \frac{7}{12},\ \frac{13}{24},\ \frac{25}{48},\ \ldots$$

— TRES NUMEROS IRRACIONALES:



$\frac{1}{2} < \frac{\sqrt{2}}{2} < \frac{2}{3}$ PORQUE $\frac{3}{6} < \frac{3\sqrt{2}}{6} < \frac{4}{6}$ YA QUE

$\sqrt{2} < \frac{4}{3}$ ES DECIR $\sqrt{2} \approx 1,14 < 1,\overline{3}$

$\frac{1}{2} < \frac{\sqrt{2}+1}{4} < \frac{2}{3}$ PORQUE $\frac{6}{12} < \frac{3(\sqrt{2}+1)}{12} < \frac{8}{12}$

$6 < 3\sqrt{2}+3 < 8$

$3 < 3\sqrt{2} < 5$

$1 < \sqrt{2} < 5/3 \approx 1,\overline{6}$

$\frac{1}{2} < \frac{\sqrt{2}+3}{8} < \frac{2}{3}$ PORQUE $\frac{12}{24} < \frac{3\sqrt{2}+9}{24} < \frac{16}{24}$

$12 < 3\sqrt{2}+9 < 16$

$3 < 3\sqrt{2} < 7$

$1 < \sqrt{2} < 7/3 \approx 2,\overline{3}$ $\therefore$ ESTE PROCESO SE PUEDE SEGUIR INDEFINIDAMENTE.

POR TANTO

b. HAY INFINITOS RACIONALES ENTRE 1/2 Y 2/3 (EN PARTICULAR, YA QUE HAY INFINITOS RACIONALES ENTRE DOS CUALESQUIERA DE ELLOS), AL IGUAL QUE HAY INFINITOS IRRACIONALES ENTRE DOS RACIONALES CUALESQUIERA, EN PARTICULAR ENTRE 1/2 Y 2/3.

— UNA JUSTIFICACIÓN RADICA EN EL HECHO QUE EL PROCESO QUE SE EVIDENCIA EN EL NUMERAL (a) SE PUEDE SEGUIR INDEFINIDAMENTE.

ANEXO G:

ARGUMENTOS PARA LOS NUMERALES 7C Y 7D

7c. Los números racionales son numerables porque, obteniendo la siguiente correspondencia:

(1,1) (1,2) (1,3) (1,4) (1,5) (1,6) (1,7) (1,8) ...
(2,1) (2,2) (2,3) (2,4) (2,5) (2,6) (2,7) (2,8) ...
(3,1) (3,2) (3,3) (3,4) (3,5) (3,6) (3,7) (3,8) ...
⋮

(8,1) (8,2) (8,3) (8,4) (8,5) (8,6) (8,7) (8,8)

$(1,1) \to 1$
$(1,2) \to 2$
$(2,1) \to 3$
$(1,3) \to 4$
$(2,2) \to 5$
$(3,1) \to 6$
$(1,4) \to 7$
$(2,3) \to 8$
$(3,2) \to 9$
$(4,1) \to 10$
⋮

$$T_n = \frac{n(n+1)}{2}$$

$$T_1 = 1\ ;\ T_2 = 3\ ;\ T_3 = 6\ ;\ T_4 = 10$$

Como se puede observar para cada $(p,1)$ le corresponde T_p.

$(p-1, 2) \to T_p - 1$, $(p-2, 3) \to T_p - 2$, ...

$(1, p) \to T_p - (p-1)$ ya que hay exactamente p parejas (x,y) donde $x + y = p+1$

$\boxed{(p-q, q+1) \to T_p - q}$ $q \in \{1, 2, \dots, p-1\}$

¿Cómo saber qué número natural le corresponde por ejemplo a $(17,3)$? Se sabe que $17 + 3 = 20$, hay 19 parejas en donde sus componentes suman 20, una de ellas es $(19,1)$; con esto se puede hallar

$$T_{19} = \frac{19(20)}{2} = 190$$

Como $17 = 19 - 2$ entonces $(17,3) = (19-2, 3) \to 190 - 2 \to 188$

Es "sencillo" establecer la correspondencia, es decir, la que indica qué número racional le corresponde a cada natural, por tanto concluyo que los racionales sí son numerables.

Si son numerables

	1	2	3	4	5	6	...
1	1/1	1/2	1/3	1/4	1/5	1/6	
2	1/2	2/2	2/3	2/4	2/5	2/6	
3	1/3	2/3	3/3	3/4	3/5	3/6	
4	1/4	4/3	4/3	4/4	4/5	4/6	
5	1/5	5/3	5/4	5/4	5/5	5/5	
6	1/6	6/3	6/4	6/4	6/5	6/6	

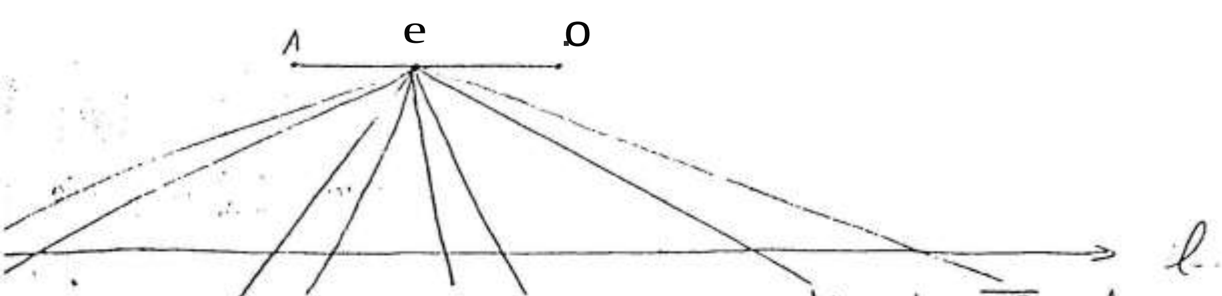
Puedo tomar un camino como lo indica la flecha (↑): si repito este proceso infinitamente esta abarcando todos los racionales.

Si es así; lo que se construye una sucesión infinita, lo cual significa que e hecho una biyección entre entre los naturales y los racionales.

c) Si:

$$\begin{array}{ccccc} 1/1 \to & 1/2 & 1/3 \to & 1/4 & 1/5 \\ 2/1 & 2/2 & 2/3 & 2/4 & 2/5 \\ 3/1 & 3/2 & 3/3 & 3/4 & 3/5 \\ \vdots & & & & \end{array}$$

No. Veamos.



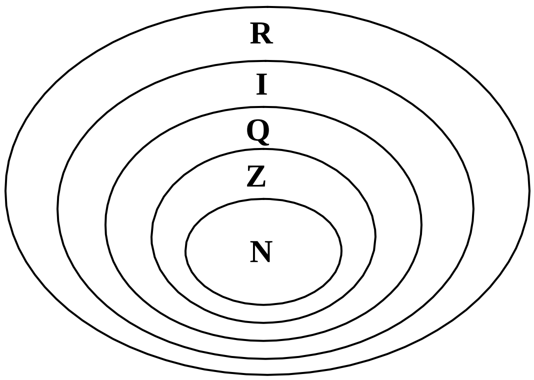
Si ℓ y ℓ' son paralelas y C es el punto medio de $\overline{AB}$, las rectas p... de hacer la correspondencia entre los puntos de $\overline{AB}$ y ℓ y ... se puede dar uno cuenta de que no hay enumerabilidad.

ANEXO H:

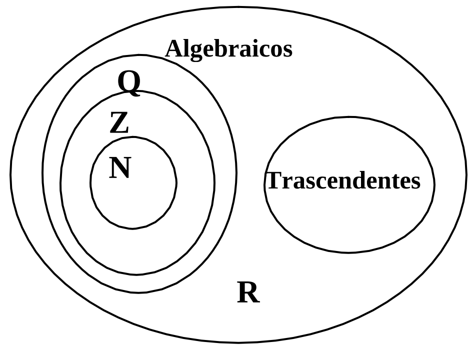
DIAGRAMAS DE VENN PARA LOS NÚEMROS REALES PROPUESTOS POR LOS ESTUDIANTES

DIAGRAMAS DE VENN PARA LOS NÚMEROS REALES.

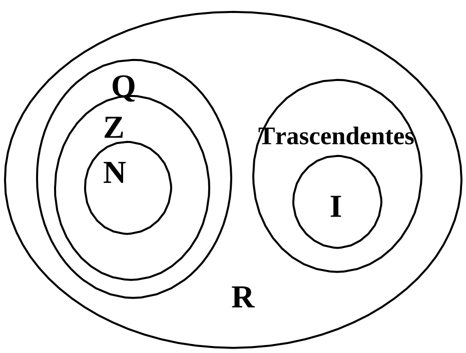
Presentamos a continuación los seis diagramas propuestos por los estudiantes en el numeral 5 del cuestionario, señalando la cantidad de estudiantes que propusieron cada uno de estos, los demás (10 estudiantes) no hicieron alguna propuesta:



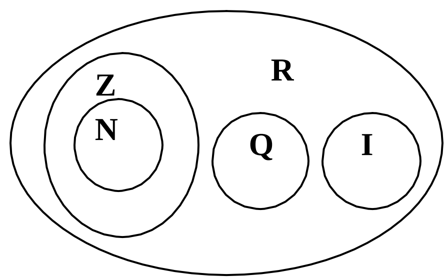
2 Estudiantes



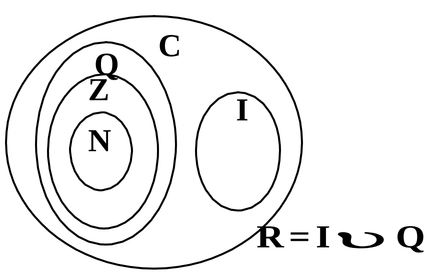
3 Estudiantes



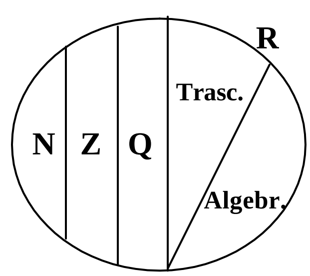
1 Estudiante



1 Estudiante



1 Estudiante



1 Estudiante

ANEXO I:

SESIÓN EN PROFUNDIDAD

SESIÓN EN PROFUNDIDAD.

Investigador 1: Buenas tardes, estamos aquí reunidos con el objetivo de hacer una sesión en profundidad, la idea es que ustedes que han contestado unas preguntas sobre concepciones de números reales, las cuales ya hemos analizado con Johana y con el profesor Carlos Luque. La idea de esta segunda actividad, que es otra manera de recoger información, es reafirmar lo que ustedes dicen ahí para saber si sus concepciones de cierta manera se mantienen o si hubo algún cambio respecto a lo que contestaron; pues básicamente, el objetivo, entre otras cosas, es entender sus concepciones o si es posible, de pronto, debatirlas aquí y argumentarlas, el objetivo no es hacer como tal preguntas para corcharlos ni nada de eso, la idea es hablar, hablar del tema; entonces nos vamos a reunir para hablar sobre el tema de números reales. Insisto mucho en que no es ni entrevista, la intención es solamente discutir, de pronto algunos decimos "Yo ahí escribí algo que no estaba pensando en ese momento, lo escribí así de rapidez, perro no, yo pienso que es esto con base en lo que dice otra persona" pero básicamente es manifestar oralmente sus concepciones, lo que ustedes piensan. Les agradecemos que estén aquí, pues, obviamente, es una cosa gratuita, que nos colaboren en esto para nuestro beneficio, básicamente; claro que, esperamos que traiga repercusiones posteriores en el Departamento; finalmente, les cuento, los hemos elegido a ustedes entre otras razones porque fueron las pruebas más elaboradas, de acuerdo a las respuestas que dan; hay otra persona que debería estar aquí, Camilo Ramírez; sin embargo él no pudo asistir por eso solamente estamos con ustedes y entonces la primera pregunta, como eje, es: ¿Qué es para nosotros un número real? ¿Qué consideramos nosotros un número real?.

Estudiante 1(E1): ¿Así de una?

I 1: Sí, supongamos que tenemos que responder ¿qué son los números reales? Entonces nosotros qué diríamos, o si un estudiante nos pregunta en el aula qué le diríamos o mejor un profesor; de pronto un compañero, sí mejor un compañero, nos pregunta en el colegio cuando llegamos a trabajar, bueno y para tí ¿qué es un número real? o ¿qué son los números reales? Entonces ¿qué le responderíamos?

E 1: Yo digo que depende de quién le pregunte a uno porque tú estás diciendo a un estudiante o un profesor, yo a un muchacho no le respondería lo mismo que al profesor.

I 1: Sí, por eso, mejor lo puse en términos de un profesor, o un compañero de trabajo.

E 1: Ahora pongámoslo en términos así, de un colega, cabrían muchas respuestas. Como que un número real … bueno, yo parto del punto, no quiero dar muchas vueltas, pero … cuando uno habla de un número natural, cuando a nosotros nos dicen … bueno … ¿Qué es un número natural? No tememos ni idea, pero nosotros nos referimos, de pronto a los axiomas de Peano entonces decimos, un número … un conjunto de los naturales … el conjunto de los naturales, es un conjunto que cumple con los axiomas de Peano y ya, y un número natural es un elemento de ese conjunto; ahora, un número real se podría decir … bueno … es un conjunto que cumple …

I 1: ¿Un número es un conjunto?

E 1: Perdón, los reales son un conjunto que cumplen unos axiomas que son, axiomas de cuerpo y axiomas de orden y un número real es un elemento de ese conjunto pero … esa respuesta como que …

I 1: Pero bueno, esa sería tu respuesta.

Estudiante 2: Pero sería algo bastante formal, no sería algo serio.

E 1: Por eso digo, sería a un profesor.

I 1: Pero es lo más serio que uno pueda.

Estudiante 3: Yo si considero que se pueden dar dos versiones, la primera que es completamente inútil en la práctica y es la axiomatización, la axiomatización sirve para formalizar y bueno…

I 1: O sea que tú estas de acuerdo con lo que dice él.

E 3: En cierta medida cuando uno axiomatiza uno lo que dice es, digamos las propiedades fundamentales que cumple cierta cosa, desde lo que he podido estudiar -que no es mucho-; en la práctica los números reales, tal vez, se presenten o poco o nada tiene que ver con los axiomas, entonces por eso yo creo que se dan dos versiones de los reales.

I 1: ¿Cómo así que no sirve en la práctica?

E 3: Sí, haber, cuando uno habla de definir los reales como un conjunto que cumple ciertos axiomas eso es útil en la formalización sí, pero en la práctica, por lo menos yo lo veo así, es completamente inútil, nosotros alguna vez estudiamos alguna formalización de los números racionales como clases de equivalencia y eso en la practica es completamente inútil.

I 1: ¿En cuál práctica?

E 3: En la vida; es decir, si mi mamá me pide media libra de carne yo no voy a pedir al carnicero que me de una clase de equivalencia o bueno o una cierta cantidad que pese una clase de equivalencia, ¿sí?, entonces igual pasa con los números reales se pueden dar dos versiones una que es la axiomática y la otra que es la practica.

I 1: ¿O sea que el número tiene un estatus según lo que tú dices?

E 3: Sí.

I 1: Bueno, entonces pongámoslo en el máximo estatus, quiero decir, hablemos académicamente, no hablemos cotidianamente, porque la intención es hablar en serio, por decirlo de alguna manera.

Investigadora 2: ¿Cuándo tú dices que un número real tiene un estatus en la práctica, qué es el número real de la práctica, de la vida cotidiana?

E 3: Listo, uno puede, digamos, modelar e intentar aproximar las cosas que ve utilizando números y eso es lo que hace uno, sí, uno se facilita la vida dando números.

I 2: Por ejemplo, el número pi ¿en qué situaciones de la vida práctica, cotidiana?, ¿para qué me sirve?, ¿que me modela el número pi en la vida cotidiana?

SILENCIO.

E 3: En una bola de billar, por ejemplo.

I 1: Pero… ¿uno utiliza el número pi?, por eso les digo, yo quiero que no relacionemos esto con la vida práctica porque el interés no es ese, el interés es hablar académicamente, repito.

E 2: Igual, la vida práctica es muy relativa, porque bueno, si Sergio lo pone en los términos de comprar la carne, de … no sé, comprar la bolsa de leche pues no, pero puede ser la practica … no sé si de él o de cualquier otra persona así; pero en lo práctico, si el habla de lo práctico yo me voy a mi práctica y en mi práctica yo … puede que resuelva problemas, pero son problemas para mí … sí utilizando los reales.

I 1: Sí digamos, por ejemplo, la vida de un físico es muy distinta a la vida cotidiana de mi mamá, por decir alguna cosa.

E 2: Es correcto. Y, para lo que para mí significa un problema, para esa persona o todos ustedes, en general, no lo es, no puede representar un problema. Vuelvo e insisto en mi vida práctica yo no puedo utilizar un número real para resolver problemas si en mi práctica que problemas son, no pues es que se me presento un problema no relacionado a la vida personal o a lo familiar, pero de solucionar un problema ya netamente matemático.

I 1: Vuelvo al mismo cuento, la intención no es, tal como dije al principio, no quiero llevar el tema al estudiante sino a nosotros, ¿qué es lo que nosotros entendemos por número real? Y estamos hablando entre nosotros, o sea entre colegas como dices tú, más que ir a mirar cómo yo le explicaría a un niño de 5° de primaria o cosas de ese estilo no, porque se estaría metiendo en la parte didáctica también y tocaría mezclarlas y aquí queremos es mirar las condiciones matemáticas del numero real ¿qué entendemos por número real nosotros? Jeisson dice que es un número que cumple con ciertos axiomas o que está dentro de un conjunto, y que dicho conjunto cumple sus axiomas que son los axiomas de campo y los axiomas de orden ¿y todos estamos reacuerdo con eso?

Todos: Sí.

I 1: ¿De qué otra manera lo definirían?, ¿no hay otra manera de definirlo?

E 1: Yo creo que es el resultado después de haber hecho la construcción de ese conjunto, después de que uno ya ha llegado a construir como tal el conjunto de los reales, que empieza bajo esos axiomas a caracterizarlos, bajo los axiomas.

I 1: ¿O sea que cuando los axiomatizan, ya los conocen?

E 1: Claro que sí.

E 4: Claro, hacer un acercamiento intuitivo, una construcción a partir de los racionales digamos acá, una forma de hacerlo con las cortaduras.

I 1: ¿Por ejemplo, con las cortaduras habría otra definición.?

HABLAN TODOS

E 4: Y digamos, si hay un número real a partir de la cortadura es un corte y de hecho la cortadura le dice qué no es un numero real o define un número real diciendo qué no es, porque lo colocan dentro de las dos cotas cuando lo parte, cuando lo hace la cortadura, en una de las dos cortaduras incluye el número, bien en la superior o bien en la inferior, pero sí, de hecho hace parte de un conjunto que cumple con ciertos axiomas y que pues, ya independientemente de la manera como los construyan.

I 1: Pero esos axiomas también debe de tenerlos claros, axiomas de campo, de orden ¿Axiomas de campo y de orden no más? ¿O sea que en este sentido, los racionales son los mismos reales?

SILENCIO

I 1: Porque los racionales también cumplen los axiomas de campo y los de orden.

(SILENCIO).

I 1: O sea, son conjuntos equivalentes. ¿A cuáles axiomas de campo se refieren?

E 2: Axiomas de campo … hay dos operaciones; axioma de campo es que esa suma, bueno las dos operaciones son conmutativa, asociativa existen elementos idénticos y hay inversos.

I 1: ¿Para todos?

E 2. 3: Para todos, a excepción de cero y uno.

E 2: El cero en la multiplicación.

I 1: Por eso, todo eso lo cumplen los racionales. ¿Cierto?

SILENCIO

E 2: Sí.

I 1: ¡Y los de orden también!

E 2: Nos hace falta un axioma…

E 3: Uno generalmente, en lo poco que conozco, se sale por los laditos; es decir, uno no dice qué es un numero real en ningún momento dice qué es un número real, dice que hay un conjunto, sí que tiene elementos a los que va a llamar números reales y que cumplen ciertos axiomas pero de números reales no se dice qué es.

I 1: Sí estamos diciendo qué, en cierta manera.

E 3: Como tal no es que se dé una definición pero se caracteriza.

I 2: O sea que para ti, ¿esa no es una definición como tal?

E 3: No, pero sí en matemáticas, porque uno, insisto en lo poco que conozco, es decir en matemáticas, yo no puedo, si me preguntan qué es número real, yo no puedo, yo no puedo … decir nada porque no se definen.

I 2: ¿Tú cómo esperarías que fuera la definición de número real, qué condiciones debería cumplir para que fuera la definición?

E 3: Ese es el problema que en matemáticas no se dice y es que uno se pone a hablar en matemáticas nunca se dice; no hay una definición.

I 1: ¿Desde tu punto de vista no hay una definición de número real?

E 3: No la conozco por lo menos.

E 1: O sí hay, lo que pasa es que uno no… lo que pasa es que uno se basa para dar una definición en unos axiomas, axiomas que son ideas primitivas y estoy de acuerdo con lo que dice Sergio, uno lo que hace es dar vueltas y dar vueltas con base, supuestamente, en ideas que trae uno, que son los axiomas; pero, para mí sí hay definición porque o si no, nada estuviera definido, yo no sabría qué es por ejemplo un haz de rectas ¿por qué? Porque si yo voy a la definición de haz de rectas inminentemente tengo que usar la palabra recta, la palabra punto y esas son ideas, son axiomas, son nociones, entonces en ese sentido no estuviera definido nada, entonces en matemáticas… yo digo, sí está definido.

E 3: Voy a hacer una analogía, cuando se habla de congruencia en los fundamentos de Hilbert, él nunca dice qué significa que dos segmentos sean congruentes, pero da los axiomas que deben cumplir los dos segmentos que son congruentes; sí hay una relación que se llama congruencia; es igual, los numeras reales no se dicen qué son, a uno nunca le dicen qué son o yo nunca he escuchado, pero se dice que cumplen ciertas propiedades.

E 1: Sí, o sea, en otros términos, lo de los axiomas sería simplemente una caracterización.

E 4: Se caracteriza. Si cumple con toda esta lista es real.

I 1: Pero Sergio dice que eso para él no es una definición y … ¿para ustedes?

E 1: Claro.

I 1: ¿Claro qué?

RISAS

E 1: Para mí sí es una definición porque si bien es una caracterización, como dice Juan Carlos, de lo que sería. Sencillamente usted encuentra unos elementos u objetos que no cumplan al menos una de esas condiciones de esas características, pues ya uno puede decir, esto no es un número real.

E 4: Pero vuelve a lo que decían las profesoras, es decir, si usted dice, hay un conjunto que cumpla estos axiomas y resulta que ese conjunto puede ser el mismo de los racionales, entonces usted se quita ese problema diciendo, hay un conjunto cuyos elementos voy a llamarlos números reales y da las características a las propiedades que cumpla, pero qué es o qué significa … no sé.

I 1. Yo quiero que en este punto no discutamos mucho porque estamos cambiando de tema. ¿Cierto? La intención es, si a mi me preguntan ¿qué es un número real? o ¿qué entiendo yo por número real?, a eso ¿qué respondo? Bien sea la definición o mi idea o bien no sea una definición sino una caracterización pero yo, a eso ¿qué respondo? Entonces … inicialmente estábamos de acuerdo, tu decías, es la parte formal, eso tal vez desde tu punto de vista no es una definición desde la de Jeisson sí, no sé la de los demás, pero estamos de acuerdo que un número real es aquel número que pertenece a un conjunto que se llama el conjunto de los números reales y que ese conjunto cump le dos grupos de axiomas, axiomas de campo y axiomas de orden ¿sí?

E 3: No faltaría el axioma de completez o, completitud es que no se bien cuál es el enunciado exacto de ese axioma.

I 1: El enunciado exacto dice: Si tengo un conjunto, un subconjunto de los números reales que no es vacío y acotado superiormente, ese conjunto tiene supremo. Es lo que dice ese axioma, ¿entonces ese axioma es importante?, tú dices no se que dice ese axioma y ya lo digo, entonces con base en eso, ¿ustedes pueden decidir si hace parte de los números reales, o no?, ¿si es otro elemento para definir a R o solamente nos quedamos con orden y campo? ¿Ahí hay problema?

E 1. Sí hay problema.

E 2. Es que yo, yo no estoy seguro de que los reales cumplan tan poquitas propiedades es decir, con tan poquitas propiedades pueda describir completamente los números reales.

E 1: Yo iba a decir algo pero es que los racionales también lo cumplirían. Que los reales es un conjunto inductivo, sí inductivo, en qué sentido, en que para cada elemento de ese conjunto se fijó primero que existe el uno y se ha definido la suma habitual, un conjunto inductivo es un conjunto…

I 1: ¿Habitual en dónde?

E 1. Bueno lo que conocemos, lo que hemos manejado entonces, un conjunto inductivo es un conjunto en donde todos los elementos, bueno … para cualquier elemento, más bien x, $x + 1$ también está en ese conjunto sí, y los reales…

E 4: O sea refiriéndose a los naturales.

E 1: No no no, por eso digo conjunto inductivo, los reales lo es pero también …

I 1: ¡Con esa definición!

E 1: Pero también lo sería los racionales.

I 1: ¡Los naturales también!

I 2: Todos realmente.

E 1: Si pero además de lo anterior …

I 1: Volvamos a lo anterior, además de campo y orden, tú quieres agregarle ser un conjunto inductivo pero eso no te arregla el problema, hay otra idea y es la que propone Juan Carlos y es, un número real se define a partir de cortaduras.

E 4: Y de hecho yo creo que ahí esta inmerso el axioma de completez porque es que entra uno en la confusión. Bueno, los racionales también cumplen los axiomas de campo y de orden de los números reales y uno usualmente dice que los números racionales son un subconjunto de los números reales pero eso es lo que usualmente uno dice, así como uno dice también que en los racionales hay un subconjunto, que los naturales son subconjunto de los racionales, en realidad lo que pasa es que dentro del conjunto de los números reales hay un conjunto que se comporta como los racionales, entonces en ese sentido uno puede decir que son racionales porque cumplen los axiomas o las propiedades que teníamos para números racionales.

I 1: Pero esas no son exactamente, sino que hay un subconjunto en los reales isomorfo a los racionales.

E 4: Exacto, pero en los reales es más amplio.

E 2: Porque también en lo formal uno dice, los reales son una extensión de los racionales, extensión pues en el sentido formal, el primer campo que uno comienza a estudiar en estructuras, uno el primer campo que encuentra es el de los racionales y uno a ese campo le hace una extensión en donde …

E 4: Una raíz cuadrada.

E 2: Exacto.

I 1: ¿Pero ahí contiene los reales?

I 2: ¡Ahí ya están todos los reales!

E 2: Porque haber, al hacer la extensión de los racionales estamos obteniendo los números irracionales y al operarlo de distintas formas, al relacionar esos nuevos números de distinta forma conseguimos los otros y los otros.

I 2: ¿O sea siempre se pueden conseguir otros irracionales?

E 2: Sí.

I 2: ¿Y por ejemplo como conseguimos pi?

RISAS

E 4: No es que los racionales o sea los trascendentes y algebraicos …

I 1: Bueno pero los trascendentes… por ejemplo, pi es trascendente y es irracional y cómo sí lo puedo construir mediante una extensión de los racionales, porque si es así estaríamos introduciendo otra definición

RISAS

I 1: No lo llamemos definición, otra idea matemática de los números reales, mejor dicho ya han aparecido tres. Un número real es aquel que pertenece a un conjunto que es el conjunto de los números reales que cumplen con dos axiomas, los axiomas de campo y los axiomas de orden, dice Diego, de pronto, el de completez también pero no estoy seguro y tú dices de pronto también que sea un conjunto inductivo pero tampoco estoy seguro porque no veo diferencia con los racionales y los naturales, bueno aquí hay dos. Otra idea es que un número real es un número que se puede representar a través de cortaduras y que en esas cortaduras hay dos versiones, como dos maneras de describir las cortaduras: que tengan cota superior o sea una que la incluya y otra que no la incluya dices tú, si lo incluye ¿qué pasa?

E 4: En el conjunto de las cotas superiores o bien en las inferiores. Incluirlo en una de esas dos cotas

E 3: Se incluye en un racional.

I 1: ¿Se incluye qué?

E 3: Si usted intenta caracterizar un número y en uno de los dos conjuntos con los que los caracteriza está ese número pues esos dos conjuntos son de números racionales, entonces si lo incluye es un número racional.

I 1: ¿Si no lo incluye es un número irracional?

E 3: Es un irracional, pero es que uno podría definir a los reales de otra manera.

I 1: Bueno entonces otra. Tú dices que estás de acuerdo con esa; otra sería lo que dice Juan Carlos, caracterizar a los reales a partir de los subconjuntos que en realidad no son subconjuntos como tal sino subconjuntos isomorfos a otros entonces esa sería otra manera, a partir de los subconjuntos y otra es que los reales son una extensión de los números racionales, entonces habría otra manera, ¿estamos de acuerdo en que hay cuatro maneras?

E 3: No, pero es que hay infinidad porque hasta donde yo tengo entendido, en lo poco que conozco como dice Sergio, hay otra forma de construir los números reales que es por encaje de intervalos, ese método no lo conozco sinceramente.

I 1: ¿O sea lo has escuchado?

E 3: Sí he escuchado hablar mucho de él pero no es el único, o sea no es la única forma de llegar al conjunto de los reales.

E 4: La manera de construirlo no es única.

E 3: No hay una sola manera, no es cortadura, no es encaje, la cosa es hágale y constrúyalo.

I 1: Bueno pero entonces si hay tantas maneras, deberíamos tener por lo menos una, cosa que si me preguntan ¿qué es? yo pudiera decir, pues mire desde tal cosa es esto y desde tal otra esto.

E 3: Uno empieza a hacer su construcción y llega a distintas razones, uno puede decir un número real puede ser una construcción a partir de una cortadura, puede ser un elemento que obtuve al hacer un encaje de intervalos o sea desde según como sea esa construcción también puede variar lo que yo defina como número real.

I 1: ¿Pero no van a ser iguales?

I 2: ¿Es diferente la definición de número real o qué es lo que hace al número real…?

TODOS HABLAN…

I 2: ¡Tendrían que ser equivalentes!

E 3: Al final tendrían que llegar a ser equivalentes

E 2: Es que los números reales de reales no tienen nada porque de eso no hay.

I 1: O sea, reales como la palabra real.

E 2: Desde ese punto de vista los números reales serían una necesidad, la necesidad de mantener una base firme, por ejemplo: uno hace límites de sucesiones que no puede ser un número racional, está demostrando la existencia de números que no son racionales, entonces sería la manera de darle base a … no sé qué sea eso.

RISAS…

E 2: Sí, a las matemáticas que se están estudiando en este momento, no sé cómo expresarlo, entonces…

I 1: ¿Entonces los reales es la manera de darle base a eso?, o ¿estás hablando de que los reales surgen con una necesidad para dar alguna base?

E 2: Surgen como una base.

I 1: Son dos cosas distintas, ¿es la manera o surgen para?

E 2: Sí, los reales no son una manera y eso lo sabemos todos, pero así surgen, como una manera de sentar bases sobre algo que ocurre, bueno que debería ocurrir, digamos en teoría debería ocurrir, ya que no puede pasar en el conjunto que uno conoce como los números racionales.

E 1: Es que esa es la forma más simple, decir que los reales no son un conjunto porque yo no me tengo que poner en la necesidad de decir ¿Qué es un conjunto?

I 1: Podría decirlo así y ya.

E 4: No pero dice algo de ello.

I 2: A pesar de las diferentes maneras de construir un número real o definirlo, también decían que debían ser todas equivalentes. El número real es el número real, ¿qué creen o qué saben ustedes sobre lo que los hace reales?

E 4: ¿Qué es lo equivalente?

I 2: Tanto como ¿qué es equivalente? no, ¿qué es lo que hace al número real diferente del racional, diferente del natural, diferente del complejo, a pesar de las diferentes construcciones?, ¿qué es lo que lo que los hace ser lo que son , qué creen o qué saben qué es?

E 1: Entonces, porque veo equivalencia en las distintas formas de definir lo qué es un numero real, cuando Diego hablaba del encajonamiento, esa forma de construir, de definir los reales se basa ¿en qué?, en continuidad.

I 1: ¿En la forma de construir por encaje, intervalos, se hace continuidad?

E 1: No estoy tratando de decir que va muy ligada la idea de construcción con la de continuidad, ahora que la forma de definirlo como cortadura, eso va inmerso el proceso de clasificar; clasifiquémoslo en dos clases, separemos y lo que yo decía al principio de los axiomas pues se basa en estructuras, construir primero ….

I 1: ¿ O sea que las cortaduras no llevan inmersa la continuidad?

E 1: No se hace tan explicito.

I 1: ¿Qué llaman continuo?

E 1: Va mas ligado con otras ideas y se complementa, por lo que una hace énfasis o basa su construcción en algo que la continuidad, la clasificación, las estructuras, pero que al desarrollarlas van a llegar a determinarse las otras ideas. Yo lo pongo porque cuando uno habla de función y de las distintas representaciones, en cada representación deja ver algo de ese concepto, por ejemplo cuando uno escribe *y* igual tal cosa, eso pueda que no le deje ver mucho, pero cuando escribe *f(x)* igual a tal cosa ya está diciendo que es una función de *x*, la variable como la llamamos nosotros totalmente independiente es *x* , entonces en cada parte se dejan ver cosas distintas, gráficamente uno puede establecer si hay simetría o no que no se deja ver en una anotación algebraica fácilmente, luego vuelvo al tema de los reales , pueda que la forma del encajonamiento deje verán poco mas la idea de continuidad y la base pero no quiere decir que este desligado.

….

El diálogo continúa, sin embargo no hay conclusiones al respecto, se presentan ideas que giran unas alrededor de otras mostrando, como hasta ahora la falta de claridad respecto a lo qué significa completez, así, se induce a los muchachos a la importancia de este axioma para el conjunto de los números reales.

La sesión culmina agradeciendo a los estudiantes su colaboración.

ANEXO J:

LISTADO DE CATEGORÍAS

CATEGORÍAS DE ANÁLISIS.

SIGLA	NOMBRE	PREGUNTAS
AC	En relación con aspectos asociados al enunciado de completitud (Aceptación de diferencias entre R y Q. Asociada a la comp letez de los números reales)	1f, 8e
ACD	Aceptación de la numerabilidad de Q y la no numerabilidad de R. Argumentaciones cercanas a una demostración.	7c, 7d
AD	Aceptación de la numerabilidad de Q y la no numerabilidad de R. Referencia a la definición de numerabilidad.	7c, 7d
ANJ	Aceptación de diferencias entre R y Q. Sin justificación precisa	8e
AP	Origen o utilidad de los números irracionales, aceptación de la numerabilidad de Q y la no numerabilidad de R en relación con actividades prácticas o personales	1d, 1e, 7c, 7d
C	Uso de contraejemplos.	2a
CCI	Comprensión de la conmensurabilidad-inconmensurabilidad.	3
CQII	Conmensurabilidad-inconmensurabilidad ligada con expresiones racionales-irracionales, respectivamente.	3
CR	Aceptación de que las relaciones “ser sucesor de” o “ser antecesor de” no son propias de R. Utilización de características de R para justificar que las relaciones “ser sucesor de” o “ser antecesor de” no son propias de R.	7a, 7b
DF	Aceptación de los números reales como el único campo ordenado completo, salvo isomorfismos.	9e
DOI	Conocimiento de la existencia de números irracionales que no se pueden expresar como π o e o de la forma $\sqrt[n]{\frac{p}{q}}$ con n, p y q números naturales	9d
DQR	Enunciado explícito de la densidad de Q y R	6
EC	Enunciado incompleto no relacionado con alguna definición formal, utilizando expresiones del lenguaje común	1a, 1b, 1c
ESR	Aceptación de la equivalencia entre series geométricas convergentes y números reales	9f
FI	Diferenciación entre procesos finitos e infinitos	2a
IA	Origen o utilidad de los números irracionales por interés académico o intelectual	1d, 1e
IEF	Enunciado incompleto equivalente a alguna definición formal	1a, 1b, 1c
IF	Enunciado incompleto de alguna definición forma l	1a, 1b, 1c
IM	Origen o utilidad de los números irracionales al interior de las matemáticas	1d, 1e
MAD	Referencia o utilización de métodos para determinar números racionales o irracionales entre los números dados. Métodos basados en aproximaciones decimales de números reales	6

MG	Referencia o utilización de métodos para determinar números racionales o irracionales entre los números dados. Métodos geométricos	6
ND	Negación de diferencias entre R y Q asociado a características comunes entre ambos conjuntos o relaciones entre ellos	8e
NDQR	No hay comprensión de la densidad como propiedad común de Q y R	6
NQR	Atribución de numerabilidad a Q y a R	7c, 7d
NSA	Aceptación de que las relaciones "ser sucesor de" o "ser antecesor de" no son propias de R. Inexistencia de definición para las relaciones dadas	7a, 7b
NS-NR	No sabe - No responde	1f, 2b, 3, 4, 5a, 5b, 6, 7, 8e, 9d, 9e, 9f, 10, 11.
O	Otras	1d, 1e, 1f, 2a, 2b, 3, 4, 5a, 5b, 6, 8e, 10, 11.
PA	Utilización de propiedades algebraicas	4
PGS	Uso de propiedades geométricas de los segmentos	2b
PSR	Correspondencia entre los puntos de un segmento y los números reales (racionales e irracionales)	2a, 2b
PRS	Aceptación de la representación de los números reales como puntos en la recta numérica o en un intervalo (a, b).	2a, 9a, 9b, 9c
QI	Los números racionales e irracionales son una partición de R	5a
QRNN	Q y R no son numerables	7c, 7d
RBR	Relacionada con la correspondencia biunívoca entre los números reales y los puntos de la recta	1f
RI	Aceptación de diferentes representaciones para un mismo número real	10, 11
RO	Notación decimal u operatoria como resultado de una operación indicada	10, 11
RS	Enunciado incompleto no relacionado con alguna definición formal, usando representaciones simbólicas	1a, 1b, 1c
RT	El conjunto de los números reales es visto como la totalidad numérica	5b
SF	Consideración de un segmento como ente físico	2b
SND	Representación simbólica, notación decimal	4
SON	Representación simbólica, notación operatoria	4
SSA	Atribución de las relaciones "ser sucesor de" o "ser antecesor de" a los números reales	7a, 7b
TA	Los números trascendentes y algebraicos son una partición de los números reales	5b
ZQ	El conjunto de los números enteros no está contenido en el de los números racionales	5a