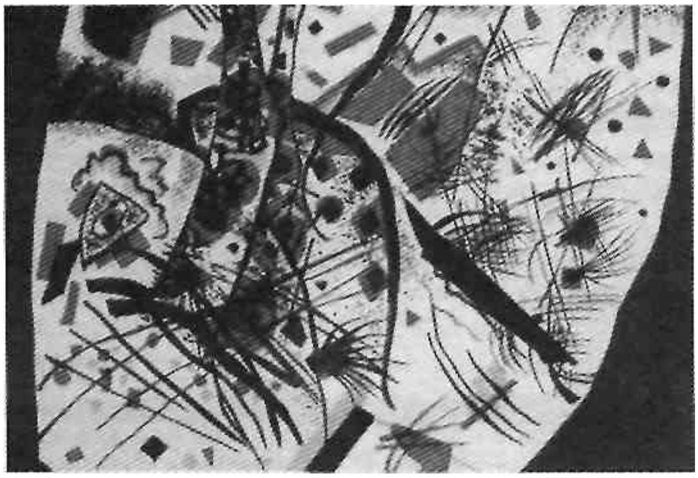

Kandinsky, *Pequeños mundos III*, Cromolitografía, 1922.

RELACIONES Y FUNCIONES: CONCEPTOS CLAVE PARA EL APRENDIZAJE DEL CÁLCULO, Y UNA PROPUESTA PARA LA APLICACIÓN DEL MODELO DE VAN HIELE

Leonardo Ceballos Urrego
Alfonso López Monsalve

REVISTA EDUCACIÓN Y PEDAGOGÍA

Resumen

RELACIONES Y FUNCIONES: CONCEPTOS CLAVES PARA EL APRENDIZAJE DEL CÁLCULO, Y UNA PROPUESTA PARA LA APLICACIÓN DEL MODELO DE VAN HIELE.

El interés de este artículo se centra en rescatar el valor que tienen, para los procesos de aprendizaje, los sentidos y sobre todo señalar los elementos básicos, más los que sirven de enlace para que en los jóvenes se produzcan nuevos conocimientos. Para ello se toman como ejemplo cuatro formas de percibir el concepto función en la enseñanza del cálculo y su trascendencia en la aplicación de uno de los modelos que mejor describe la forma de aprendizaje en matemáticas, como lo es el propuesto por los Van Hiele.

Résumé

RELATIONS ET FONCTIONS: CONCEPTS CLES POUR L APPRENTISSAGE DU CALCUL ET UNE PROPOSITION POUR L APPLICATION DU MODELE DE VAN HIELE

L'intérét de cet article est celui de remettre en valeur les sens pour les processus d'apprentissage et surtout de signaler les éiéments de base y compris ceux qui servent de lien pour la production de nouvelles connaissances chez les jeunes. Pour cefaire, on a pris comme exemple quatre manieres de saisir le concept de fonction dans I'enseignement du calcul et leur incidence dans l'application d'un des modeles qui décrit le mieux la fagan d'apprendre en mathématiques, celui proposé par Van Hiele.

Abstract

RELATIONS AND FUNCTIONS: KEY CONCEPTS FOR THE LEARNING OF CALCULUS, AND A PROPOSAL FOR THE APLICATION OF VAN HIELE S MODEL

The purpose of this article is focused on rescuing the valué that senses havejor the learning processes and especially to point out the basic elements, plus the ones that act as a linkfor youngsters to produce new knozoledge. Por that reason, four ways to perceive the concept of function in the teaching of Calculus are taken as example and the transcendence of this concept in the application of one of the models that best describes the way of learning in Mathematics as it is proposed by the Van Hiele.

Palabras Clave

Relación, función, modelo de van Hiele, procesos de aprendizaje y sentidos, enseñanza del cálculo Relation, function, linking concept, van Hiele model, processes of learning and senses, teaching of Calculus.

RELACIONES Y FUNCIONES: CONCEPTOS CLAVE PARA EL APRENDIZAJE DEL CÁLCULO, Y UNA PROPUESTA PARA LA APLICACIÓN DEL MODELO DE VAN HIELE

Leonardo Ceballos Urrego*
Alfonso López Monsalve**

INTRODUCCIÓN

Estamos dotados de sentidos que nos permiten apreciar y disfrutar la naturaleza bajo sus diferentes formas y expresiones. Desde el momento en el que somos concebidos, quedamos enfrentados a situaciones generadoras de aprendizajes, ante las cuales, y dependiendo de sí son desagradables o placenteras, reaccionamos ya sea por instinto o porque las reconocemos como tal. La mayoría de esas fuentes de aprendizaje son expresiones naturales a las cuales el hombre, con su razonamiento, ha logrado interpretar y traducir en lenguajes gráficos y simbólicos.

Una muestra de lo anterior la tenemos cuando nos situamos en los procesos de la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas básicas, específicamente en la didáctica de asignaturas como el álgebra, la geometría, la trigonometría y el cálculo, dentro de las cuales la asimilación de algunos conceptos resulta de trascendental importancia para los educandos.

Centrándonos en el cálculo, conceptos como los de *relación y función* han adquirido un alto grado de desarrollo tanto para la enseñanza como para la aplicación de dicha asignatura, en particular para estudiantes universitarios en los primeros semestres de programas con amplio contenido matemático, debido a que su asimilación y percepción se facilita a través de algunos de los sentidos y el ejercicio de la razón: las relaciones y funciones las pueden ver sobre el plano cartesiano (véase figura l),[1] o escuchar a partir de los enunciados que se usan para describir situaciones prácticas como, por ejemplo, la trayectoria de una

Magíster en Educación de la Universidad de Antioquia. Especialista en Estadística de la Universidad Nacional. Profesor de Planta del Tecnológico de Antioquia. Dirección electrónica: lceballo@udea.edu.co

Catedrático en las Universidades de Antioquia y Eafit y profesor tiempo completo municipio Itagui Colegio Avelino Saldarriaga Gaviria.

1. Cualquier gráfico sobre un plano cartesiano representa una relación en dos variables; si el gráfico no puede ser interceptado en dos puntos diferentes por alguna recta vertical, entonces la relación es en sí misma una función.

pelota de golf; las pueden deducir de las ecuaciones que las representen, o construir a partir de tablas de valores. Son éstas cuatro formas diferentes de abordar los mismos conceptos, que penetran el cerebro humano por dos vías físicas separadas: la visión y el oído; y dos procesos de abstracción complementarios: decodificación de símbolos y razonamiento.

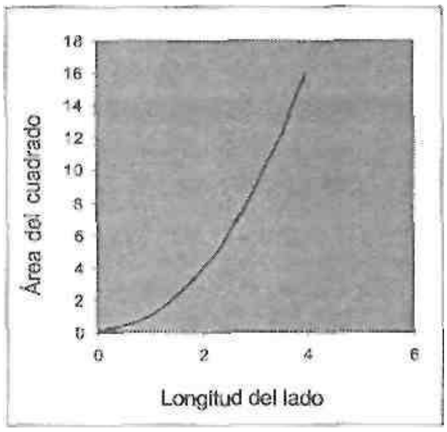

Figura 1. Áreas de un cuadrado en función de un lado[2]

Estas cualidades: visualización, experiencia, simbolización y sistematización, presentes a la vez en los conceptos *relación y función,* mas no frecuentes simultáneamente en la generación de otros conceptos matemáticos, nos permiten clasificarlos como muy interesantes para ser abordados a la luz de las modernas teorías de enseñanza y aprendizaje. Lo que pretendemos particularmente con este escrito es dejar sustentada la relevancia de las características inherentes a los conceptos en cuestión, para proponer su estudio y aplicación bajo la óptica del modelo de van Hiele.

ALGO DE HISTORIA SOBRE EL DESARROLLO DEL CÁLCULO

Las raíces visibles del cálculo datan de hace más de 2.500 años, cuando los antiguos griegos hallaron áreas aplicando el método de agotamiento (o exhaustivo), el cual consistía en inscribir polígonos en la figura y circunscribir otros en torno a ella y, a continuación, hacer que el número de lados de los polígonos aumentara. Los griegos sabían cómo hallar el área de cualquier polígono al dividirlo en triángulos y sumar sus áreas. Ellos no aplicaron explícitamente el concepto de *límite;* sin embargo, por razonamiento indirecto, Eudoxo (siglo V a. C.) utilizó el agotamiento para probar la conocida fórmula del área de un círculo: $A=nr^2$. (Edwards y Penney, 1994,1-9). El problema del área fue básico para el desarrollo de una de las principales ramas del cálculo, conocida como *cálculo integral*

La otra rama, que hoy distinguimos como *cálculo diferencial*, se originó a partir del problema de hallar la ecuación de la recta tangente a una curva en un punto dado. Esta línea fue gestándose gradualmente a través de las ideas de los matemáticos Pierre Fermat [francés: 1601-1665], John Wallis [inglés: 1616-1703], Isaac Barrow [inglés: 1630-1667], y finalmente estructurada tanto por Isaac Newton [inglés: 1642-1727], como por el matemático Gottgried Wilhelm Leibniz [alemán: 1646 -1716] (Edwars y Penney, 1994,1-5).

La historia ha determinado que Newton fue el primero en concebir las principales ideas sobre el cálculo (entre 1665 y 1666), pero que Leibniz las descubrió independientemente durante los años 1673-1676. A este último se deben los nombres de *cálculo diferencial* e *inte-*

2. La figura 1 representa gráficamente la forma como el área de un cuadrado cambia a medida que el lado del mismo crece: A= P. Se establecen, en este ejemplo gráfico relativo a una sola función, tres características pedagógicas del concepto función: visual en la figura; simbólico - analítico en la ecuación y experimental en la relación geométrica establecida.

gral, así como los símbolos ~ y J para denotar, respectivamente, la derivada y la integral de una función real; de hecho, el mismo término/unción y el uso consistente del símbolo para la igualdad (=) son otras de sus contribuciones. En parte debido a la superioridad del simbolismo generado por Leibniz, el cálculo adquirió un mayor y más rápido desarrollo en el continente europeo que en Inglaterra.

Sin bien es cierto que los aportes más significativos al cálculo desde Arquímedes [287-212 a. C] -en la antigua cultura griega-, y los trabajos posteriores de Newton y Leibniz, se reducen a los desarrollados por unos cuantos científicos del siglo XVII como Joseph Kepler, Rene Descartes -con su invaluable plano-, y Blas Pascal, también lo es que la producción posterior a ellos ha sido nutrida con valiosos aportes, entre los que se destacan los realizados por John Bernoulli, Leonardo Euler, María Gaetana Agnesi y Joseph Louis Lagrange, durante el siglo XVIII; Cari Friederich Gauss, Agustín Louis Cauchy, Karl Wierstrass, Bernhard Riemann, J. Willard Gibbs y Skovalevsky en el siglo XLX; Henry Lebesgue y otros a través del siglo XX (Purcell y Varberg, 2000). Vale la pena anotar que si no son muchos los personajes destacados por su producción a través del siglo XX, es porque durante este período los aportes se centran en la aplicación del cálculo en otras áreas del conocimiento, sobre todo en las ciencias naturales y en las ingenierías.

UNA MIRADA A LA ESTRUCTURA DEL CÁLCULO

La forma histórica como fueron apareciendo los conceptos que hoy constituyen el cálculo se asemeja al modo como se van escogiendo las piezas cuando se está armado un rompecabezas *(Mosaic Puzzle:* Thorndike-Banhart, 1986). En ese sentido, si no se poseen todas las piezas no es posible armarlo, y peor aún, si se carece de ciertas piezas clave, no quedamos con la menor idea de lo que el rompecabezas representa o esconde. Ahora, cuando poseemos una visión más global, podemos afirmar que el cálculo en su estructura tiene un fundamento evidentemente geométrico, a partir del cual se engendraron y desarrollaron varios de sus elementos, y tres grandes componentes conceptuales que son:

- Los fundamentos en la teoría de los conjuntos numéricos y las operaciones básicas del álgebra.
- Los conceptos *relación y función* en una o más variables reales.
- Un cuerpo compuesto con los conceptos propios del cálculo, a saber: *límites, continuidad, derivadas* e *integrales* y sus correspondientes aplicaciones.

Cada uno de estos componentes por sí solos no constituyen el cálculo, y la ausencia de alguno dejaría sin sentido, o al menos coja, la integración entre los otros; así, la geometría facilita tanto la visualización, como la materialización de los conceptos; la teoría de conjuntos y el álgebra se sitúan como requisitos sin cuyo conocimiento se hace imposible comprender y manipular los elementos propios del cálculo, como la determinación de límites, derivadas e integrales; las relaciones y funciones se convierten en el enlace natural entre los fundamentos y los elementos propios del cálculo, por lo que, como veremos a continuación, se pueden considerar como los conceptos clave sin los cuales los demás conceptos específicos del cálculo no habrían adquirido su pleno desarrollo; de hecho, el concepto de continuidad sería indefinible, no pasaría de ser una idea, excepto por la continuidad parcial que se puede encontrar en una figura geométrica; y el cálculo de límites, derivadas e integrales sin considerarlos aplicados a funciones de variable real, no serían más que ejercicios con alguna trascendencia teórica, o a lo sumo, aplicables en situaciones geométricas muy específicas como la valoración de áreas o volúmenes de superficies y sólidos regulares.

LAS RELACIONES Y LAS FUNCIONES: CONCEPTOS CLAVES EN LA ENSEÑANZA DEL CÁLCULO

La depuración teórica que consolidó los conceptos *relación y función,* conjuntamente con la apropiación de un espacio para su representación a través del plano cartesiano, se constituyeron en las piezas clave que, por un lado, posibilitó el "salto" de lo abstracto a lo concreto, mediante la doble opción que se ofrece de representación visual y tabulación numérica, para la comprensión de los conceptos *relación, función y límite* (véase **figura 2),**[3] *continuidad, derivada* e *integral; y,* **por otro,** se construyó un "puente", fundamentado en la interpretación y solución de ecuaciones, que permitió fortalecer el conocimiento de las operaciones algebraicas con sus propiedades y aplicaciones en el cálculo de límites, derivadas e integrales, así como en la demostración de varios de los teoremas y proposiciones básicas del cálculo en general.

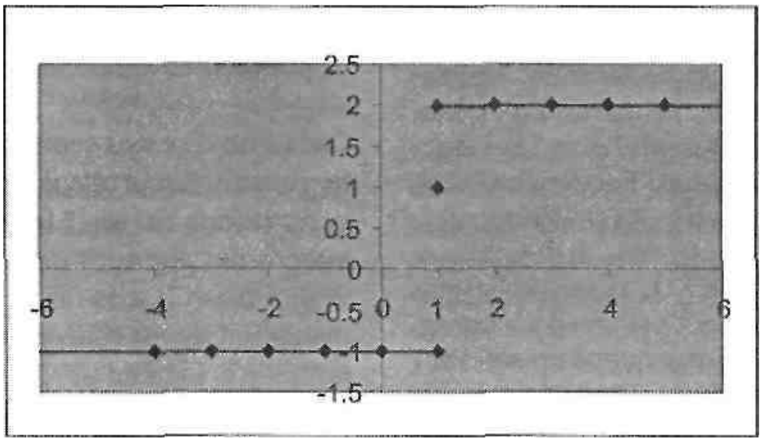

Figura 2. Calculo del límite de una función por tramos en el punto P: (1,1)[4]

Se evidencian, así, cuatro aspectos de importancia pedagógica en la base conceptual de las relaciones y funciones: *a) Se pueden visualizar sobre el plano cartesiano, b) Se pueden representar matemáticamente a través de ecuaciones, y c) Se pueden establecer tablas de datos comparativos entre las variables relacionadas, a partir de valores verídicos o supuestos.*

El cuarto aspecto, que aunque subyace en la depuración histórica de los conceptos *relación y función,* no ha sido de tanta trascendencia

3. El concepto de *límite* es uno de los más complejos para entender y explicar partiendo de su formalización lógica y teórica; sin embargo, gráficamente se puede mejorar la comprensión y lograr una explicación satisfactoria del mismo, como se puede apreciar con el ejemplo de la figura.

4. $f(1)=1 \quad \lim_{x \to 1^-} f(x) = -1 \quad \lim_{x \to 1^+} f(x) = 2$; luego: $\lim_{x \to 1} f(x) =$ *¡No existe!*

para el desarrollo del cálculo, aunque sí es uno de sus fines: k *identificación de la existencia de relaciones y funciones en campos específicos del conocimiento.* Su importancia radica en el establecimiento del puente entre la ficción que pueden representar las relaciones y funciones desde su interpretación y construcción a través del cálculo, y la aplicación tangible que efectivamente puedan tener en la generación de nueva tecnología.

FORTALEZAS PEDAGÓGICAS PRESENTES EN LA CONFIGURACIÓN CONCEPTUAL DE RELACIONES Y FUNCIONES DE VARIABLE REAL

Sintetizando las características que hacen de las relaciones y funciones el tema clave para la estructura del cálculo, y centrándonos en las *funciones reales con una variable independiente,* podemos decir que se pueden:

- Visualizar sobre el plano cartesiano (poseen geometría propia).
- Representar a través de ecuaciones matemáticas (poseen algoritmos propios).
- Deducir y/o expresar a través de tablas de valores (se pueden asociar con distribuciones de probabilidad).
- Describir lingüísticamente (son adaptables al lenguaje corriente).

James Stewart, autor de uno de los textos de cálculo más promocionado últimamente en Latinoamérica, se refiere a estas características como la regla de cuatro: «Los temas deben de presentarse geométrica, numérica y algebraicamente [...] hacer hincapié también en el punto de vista verbal o descriptivo» (2000, VI), y en relación con su importancia conceptual se refiere en los siguientes términos: «La visualización, la experimentación numérica y gráfica, y otros enfoques han cambiado aspectos fundamentales de la manera en que enseñamos el razonamiento conceptual» (VH).

La confluencia de estas cuatro características no es común en la elaboración de la mayoría de los conceptos que se presentan en las ciencias exactas, naturales o humanas. Y aun cuando su presencia simultánea garantiza cierta facilidad para la comprensión del concepto en cuestión, lo cierto es que difícilmente se pueden hallar casos dentro de cada concepto que satisfagan a la vez las cuatro condiciones. Por ejemplo, con *las funciones reales* se ha avanzado mucho en la determinación de las gráficas, las ecuaciones de representación y las tablas de valores; pero estamos muy lejos de encontrar aplicaciones válidas para la mayoría de ellas; sólo algunas rectas encuentran un enunciado válido para la economía, algunas parábolas en la física (véase figura 3) y, curiosamente, algunas funciones exponenciales en la demografía.

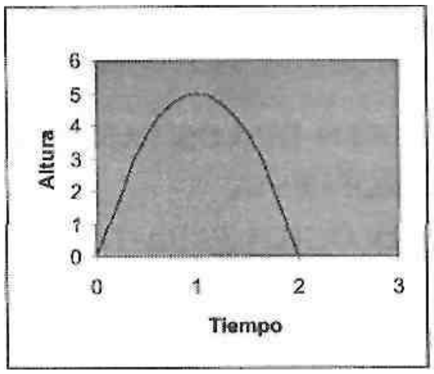

Figura 3. Representación gráfica de la ecuación cinemática $E=10t - 5t^2$, altura como función del tiempo

Dentro de las relaciones, los enunciados más conocidos tienen que ver con las cónicas y su aplicación en la astronomía, y los círculos con su influencia en la física. Esto nos invita a pensar que la sola presencia de las características mencionadas, no es suficiente para que un concepto quede completamente determinado; se requiere tener claridad y manejo sobre los *eslabones* que permiten establecer una comunicación permanente entre las diferentes formas que adopta dicho concepto, de tal manera que se genere una dinámica tal que quien diga conocer su significado, sepa no sólo discernir ágilmente sobre las diferentes formas como se puede representar, sino, incluso, sobre la manera como se puede pasar de una representación a otra.

Tales *eslabones* son objeto de interpretación en las teorías sobre las formas de conocimiento y/o aprendizaje, correspondiendo en Piaget a los desequilibrios conceptuales en la mente de los alumnos que, eventualmente, lo conducen a un equilibrio mayorante (Piaget, 1967); en los van Hiele, al *insight* (Van Hiele, 1986), que puede provocar el salto de un nivel a otro (Van Hiele, 1980) en el proceso de aprendizaje de un concepto geométrico, y, en un marco más general, a los procesos de abstracción que se dan en la mente humana como producto de nuestra capacidad de razonamiento, para recibir, asimilar, adaptar y proyectar nuevas sensaciones o experiencias.

EL MODELO DE LOS VAN HIELE: UNA PROPUESTA METODOLÓGICA PARA LA ENSEÑANZA Y APRENDIZAJE DE CONCEPTOS BÁSICOS

Como profesores de secundaria en Holanda, Pierre van Hiele y Dina van Hiele-Gildor, tuvieron problemas por la manera como sus estudiantes se desempeñaban en geometría. Ocurrió que mientras estudiaba algunos de los trabajos de Jean Piaget, Pierre van Hiele formuló su sistema de niveles de pensamiento en geometría. El notó, como es evidente en algunas de las entrevistas de Piaget, que los problemas o tareas que se les presentan a los niños con frecuencia requieren de un conocimiento del vocabulario, o de propiedades que están fuera del alcance de su nivel de pensamiento.

En 1957, los van Hiele presentaron sus respectivas memorias doctorales en la Universidad de Utrecht. Sus disertaciones las acompañaron con el desarrollo de una estructura teórica, y un experimento didáctico, con el propósito de elevar los niveles de pensamiento, todo con el fin de ayudar a los estudiantes a desarrollar la percepción en la geometría. El modelo de los van Hiele se ha estudiado y aplicado en varios países europeos, incluyendo a Holanda, donde se trabaja en la escuela secundaria; sus implicaciones en las teorías del razonamiento y el aprendizaje son actualmente fuentes de investigación en el campo de la educación matemática.

En general, el modelo de *van Hiele* (Jaramillo, 2000,13-56) proporciona una descripción del proceso de aprendizaje, el cual postula la existencia de niveles de pensamiento que no se identifican con niveles de habilidad computacional y que podríamos clasificar como: *nivel 0* (predescriprivo), *nivel I* (de reconocimiento visual), *nivel II* (de análisis), *nivel III* (de clasificación y relación) y *nivel IV* (de deducción formal), aunque sobre este último, se tiene la propia afirmación de los van Hiele como difícilmente detectable y sólo de interés teórico. Así, la aplicación de este modelo a una materia concreta necesita del establecimiento de una serie de descriptores (De la Torre, 2000, 61-67; Jaramillo, 2000,18-22) para cada uno de los niveles estudiados, que permita su detección, por lo que parece razonable asignar un conjunto de condiciones a los niveles diseñados para que puedan ser considerados dentro del modelo de van Hiele: 1) los niveles deben de ser jerárquicos, recursivos y secuenciales; 2) deben ser formulados detectando un progreso del entendimiento como resultado de un proceso gradual; 3) los tests (de cualquier tipo) que se diseñen para su detección deben recoger la relación existente entre nivel y lenguaje empleado en cada uno de ellos, y 4) el diseño debe tener como objetivo primordial la detección de niveles de pensamiento, sin confundirlos con niveles de habilidad computacional o conocimientos previos.

Los van Hiele enunciaron originalmente su modelo distinguiendo cinco niveles (básico o nivel 0, y niveles I, II, LTI y IV). A través de la bibliografía sobre el tema, ellos y otros autores han ido cambiando la forma de numerar o de referirse a estos niveles. El mismo E van Hiele, en la más notable revisión de su teoría 0aramillo, 2000, 18), enfatiza la importancia de los tres primeros niveles, a los que se refiere como «básico o nivel visual, segundo nivel o nivel descriptivo, tercer nivel o nivel teórico». En el mismo trabajo, señala que los niveles superiores a estos presentan dificultades para su discernimiento y sólo tienen un interés teórico (Jaramillo, 2000,18).

De acuerdo con la nomenclatura adoptada por J. Llorens (18), los nombres de los niveles son:

Nivel 0, *predescriptivo.*
Nivel I, *de reconocimiento, visual*
Nivel II, *de análisis*
Nivel III, *de clasificación, de relación.*
Nivel IV, *de deducción formal.*

Evidentemente, más que la nomenclatura, lo que importa es la descripción de esos niveles, y sus características. Adicionalmente y con el fin de ayudarle al alumno a pasar de un nivel de pensamiento al nivel inmediatamente superior, los van Hiele propusieron cinco fases de aprendizaje (De la Torre, 13 y 14), al final de las cuales el alumno habrá alcanzado el nuevo nivel de pensamiento; ellas son: la indagación; la orientación dirigida, la explici-tación, la orientación libre y la integración.

LA PROPUESTA PARA ESTUDIANTES DE PRIMER AÑO DE UNIVERSIDAD

Si comparamos las características antes señaladas de las funciones con la metodología del modelo de van Hiele, vemos que es completamente pertinente emprender la tarea de establecer tanto los niveles como los descriptores de nivel (De la Torre, 61-67; Jaramillo, 2000, 18-22) para obtener la comprensión del concepto *función* a la luz del modelo de van Hiele; una conjetura al respecto, acompañada de las fases de aprendizaje (De la Torre, 13 y 14) que pueden llevar a los alumnos a la superación de cada nivel en relación con el concepto en cuestión, es la siguiente:

NIVEL 0: PREDESCRIPTIVO

Fase de aprendizaje asociada: indagar, averiguar *(Inquiry).*

Los estudiantes distinguen los números reales y sus propiedades; conocen el plano cartesiano, su definición y propiedades; son capaces de ubicar y "leer" puntos, reconocer cualquier figura geométrica plana que sobre él se dibuje; conocen las definiciones de relación y función sobre conjuntos finitos y en el conjunto de los números reales (R), pero no las diferencian gráficamente sobre el plano ni poseen una comprensión integral de los conceptos.

NIVEL I: DE RECONOCIMIENTO VISUAL

Fases de aprendizaje asociadas: orientación directa *(Directed orientation)* e indagación.

Los estudiantes reconocen gráficas de funciones y relaciones de variable real, sobre el plano cartesiano; también pueden diferenciar otras curvas que representen algunas relaciones aplicadas, como las trayectorias parabólicas de objetos lanzados sobre la superficie terrestre o representaciones elípticas de los movimientos planetarios, sin abstraer sus propiedades para relacionarlas con otros fenómenos de distinta naturaleza dentro del mismo plano, o incluso por fuera de éste. De modo general, reconocen la diferencia gráfica entre relaciones y funciones sobre el plano, pero no perciben la integración de éstas con los ejes coordenados, ni con ecuaciones que las representen, ni con las situaciones prácticas que puedan describir.

NIVEL II: DE ANÁLISIS

Fases de aprendizaje asociadas: explicitación *(Expliciting)* y orientación directa

Los estudiantes analizan por pares, las relaciones entre:

- Las figuras y los ejes del plano cartesiano.
- Las tablas de valores y los gráficos que los representan sobre el plano.
- Las ecuaciones como representación de un enunciado.
- Las gráficas que pueden ser representación de situaciones concretas.
- Las ecuaciones en dos variables y los gráficos de relaciones y funciones, en este sentido, relacionan ecuaciones en dos variables con figuras del plano en las dos direcciones: partiendo de la ecuación se aproximan al gráfico y, al revés, a partir del gráfico, se aproximan a la ecuación.
- Se evidencia en este nivel una integración dos a dos de las diferentes representaciones que pueden adoptar las relaciones y funciones, sin ser capaces todavía de establecer una comunicación integral entre todas ellas.

NIVEL III: DE CLASIFICACIÓN Y RELACIÓN

Fases de aprendizaje asociadas: orientación libre *(Free orientation) y* explicitación.

Clasifican familias de relaciones y funciones a partir de los gráficos, de las estructuras de las ecuaciones y de los enunciados sobre problemas específicos. Presentan habilidad para integrar las diferentes formas de representación de una relación o una función. Reconocen la forma dinámica de los conceptos *relación* y *función, y* son capaces de desarrollar secuencias de proposiciones para deducir que una propiedad se deriva de otra; sin embargo, no se comprende la necesidad de la forma-lización ni las estructuras axiomáticas. (Jara-millo, 2000,20 y 21).

NIVEL IV: DE DEDUCCIÓN FORMAL

Fase de aprendizaje asociada: integración *(Integraron)*

El alumno es capaz de establecer, diferenciar y deducir relaciones y funciones de variable real, independientemente del marco de referencia y con aplicación a situaciones prácticas. Así se resume lo que al respecto se definen como los descriptores del nivel IV para el caso concreto de relaciones y funciones, cuando se manifiesta que

> *[...]un estudiante en este nivel superior es capaz de llegar a plantear distintas demostraciones de algunas propiedades o de percibir que dos definiciones de un mismo concepto pueden ser equivalentes. Al mismo tiempo, relacionan distintos conceptos y propiedades dentro de un área de conocimiento o de un tema más general que los englobe, captando que son manifestaciones diferentes de un mismo hecho matemático* (Jaramillo, 2000,21).

OBSERVACIONES

De la descripción de los niveles para relaciones y funciones puede observarse que:

1. En cada nivel es posible diferenciar elementos estáticos y dinámicos, asociados con la forma como los estudiantes van asimilando los conceptos *relación* y *función;* en tal sentido, los elementos estáticos dentro de cada nivel vienen asociados con la demostración de habilidades para la manipulación de los objetos de conocimiento propios del nivel.

2. El elemento dinámico dentro de cada nivel está asociado con la capacidad de integración que demuestre el estudiante, frente a las diferentes representaciones del concepto.

3. La capacidad para establecer "comunicación" entre las diferentes formas de representaciones de las relaciones y funciones, es uno de los indicadores para establecer la frontera entre los niveles 0,1, II, y III, IV.

CONCLUSIONES

1. El desarrollo de esta propuesta, además de engrosar la lista de aplicaciones del modelo de van Hiele en conceptos diferentes a la geometría, potenciaría favorablemente su adopción en el último nivel de la educación media y primer año universitario, como metodología de enseñanza para facilitar el aprendizaje del cálculo.

2. La realización de investigaciones en el campo de la educación matemática que permitan establecer claramente los niveles de van Hiele con sus respectivos descriptores, para la comprensión de conceptos puntuales y trascendentes, como el caso de relación y función en el cálculo, abren el camino para proponer e implementar nuevas técnicas y/o modelos pedagógicos útiles tanto para el aprendizaje, como para la didáctica de las matemáticas.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

EDWARDS, C. H., y PENNEY, David E. (1994). *Cálculo con geometría analítica.* México: Prentice Hall.

DE LA TORRE GÓMEZ, Andrés Felipe (2000). *La modelización del Espacio y del Tiempo: su estudio vía el modelo de van Hiele,* p. 61-67.

JARAMILLO L., Carlos Mario (2000). *La noción de serie convergente desde la óptica de los niveles de van Hiele,* pp. 13-56.

PIAGET, Jean (1967). "Development and learning". In: VÍCTOR, E. y LERNER, M. (eds.). *Readings in Science Education for the Elementar]) School.* New York: Macmillan.

PURCELL, E. J. y VARBERG, Dale. *Cálculo diferencial e integral.* México: Pearson. pp. 1-13.

STEWART, James (2000). *Cálculo: conceptos y contextos.* México: Thomson Editores, pp. 991.

THORNDIKE-BARNHART (1986). *The World Book Dictionary*. V II - L-Z. Chicago (USA): World Book, Inc.

VAN HIELE, EM. (1980). *Levéis of Thinking. How to Meet Them.* How to Avoid Them. Seattle: NCTM meeting.

_________ (1986). *Structure and insight: A Theory of Mathematics Education Academic Press.*

BIBLIOGRAFÍA

LEITHOLD, Louis. *El cálculo con geometría analítica.* México: Haría S.A., 1982.

REFERENCIA

CEBALLOS URREGO, Leonardo y LÓPEZ MONSALVE, Alfonso. "Relaciones y funciones: conceptos clave para el aprendizaje del cálculo, y una propuesta para la aplicación del modelo de van Hiele". En: *Revista Educación y Pedagogía.* Medellín: Universidad de Antioquia, Facultad de Educación. Vol. XV, No. 35, (enero-abril), 2003. **pp.** 131 -140.

Original recibido: septiembre 2002

Aceptado: octubre 2002