

Kandinsky, *Algunos círculos*, Óleo sobre lienzo, 1926.

LOS EJEMPLOS, EJERCICIOS, PROBLEMAS Y  
PREGUNTAS EN LAS ACTIVIDADES DE APRENDIZAJE  
DE MATEMÁTICA

Ángel Míguez

**RESUMEN**

LOS EJEMPLOS, EJERCICIOS, PROBLEMAS Y PREGUNTAS EN LAS ACTIVIDADES DE APRENDIZAJE DE MATEMÁTICA

*Este artículo presenta una propuesta de caracterización de los ejemplos, ejercicios, problemas y preguntas (praxemas matemáticos) usados en las actividades de aprendizaje de matemática en el contexto escolar venezolano. Una revisión incidental de los instrumentos de evaluación de matemática, los cuadernos de apuntes y de las actividades desarrolladas en el aula, nos permite inferir que los docentes no hacen distinción entre ejemplos, ejercicios y problemas. Por esto, se establecen los elementos constitutivos de una actividad de aprendizaje de matemática, y se usa la definición de Yves Chevallard sobre los praxemas matemáticos con la finalidad pedagógica de establecer una diferenciación entre ellos, afin de que los docentes cuenten con herramientas que faciliten el diseño de las actividades de aula y de los materiales escritos de apoyo.*

**ycrpma**

EXEMPLES, EXERCICES, PROBLEMES ET QUESTIONS EN LORS DE SÉANCES D'APPRENTISSAGE DES MATHÉMATIQUES

*Cet article présente une proposition de caractérisation des exemples, exercices, problèmes et questions (praxèmes mathématiques) utilisés lors de séances d'apprentissage des mathématiques dans le contexte scolaire vénézuélien. Une révision incidente des outils d'évaluation en mathématiques parmi lesquels, les cahiers de notes des élèves et les activités développées dans la salle de cours nous permet de déduire que les professeurs ne font pas de distinction nette concernant les exemples, les exercices ou les problèmes. C'est pour cela que nous avons précisé les éléments constitutifs d'une activité d'apprentissage des mathématiques, en utilisant la définition d'Yves Chevallard sur les praxèmes mathématiques, dans le but pédagogique d'établir leur différenciation, afin que les professeurs puissent disposer des outils qui facilitent la production d'activités didactiques et des matériels écrits d'appui à l'enseignement des mathématiques.*

**mmssa**

THE EXAMPLES, EXERCISES, PROBLEMS, AND QUESTIONS IN MATHEMATICS LEARNING ACTIVITIES

*In this article, I present a proposal of characterization of examples, exercises, problems, and questions (mathematical praxemas) used in mathematics learning activities within the Venezuelan school context. A review of assessment instruments in Mathematics, students' working notebooks and activities in the classroom, allow me to infer that teachers do not differentiate among examples, exercises, problems, and questions. Thus, I establish the constitutive elements of a Mathematics learning activity. I built it on Yves Chevallard's definition of mathematical praxemas. This definition is done with the purpose of providing teachers with tools for facilitating the design of classroom activities and supporting written materials.*

**MII**

*Ejemplos, ejercicios, problemas, preguntas, enseñanza de las matemáticas  
Examples, exercise, problems, questions, mathematics teaching*

# LOS EJEMPLOS, EJERCICIOS, PROBLEMAS Y PREGUNTAS EN LAS ACTIVIDADES DE APRENDIZAJE DE MATEMÁTICA

Ángel Míguez\*

Este artículo está inscrito dentro de una línea de investigación sobre "Los libros y demás materiales escritos de matemática en el contexto escolar venezolano".<sup>1</sup> Se propone, para la discusión, una caracterización de los ejemplos, ejercicios, problemas y preguntas usados en las Actividades de Aprendizaje de Matemática (AAM). Esta caracterización nos permitirá intercambiar y actuar con *praxemas*<sup>2</sup> claramente establecidos que enriquecerán nuestra acción pedagógica, fundamentalmente en el diseño de tales actividades.

Pese a que existen muchas clasificaciones sobre los problemas y ejercicios matemáticos, aquí se propone una caracterización que diferencie claramente, dentro de una AAM, los ejemplos, los ejercicios, los problemas y las preguntas asociadas a esa actividad.

## UN ASUNTO DE DISTINCIÓN

En el sistema escolar venezolano, al revisar los instrumentos de evaluación de matemática y los cuadernos de apuntes, y al observar las actividades desarrolladas en el aula, nos podemos percatar de que un alto porcentaje de los docentes no hace distinción entre ejemplo, ejercicio y problema.

El "ejemplo" suele ser el ejercicio que el profesor resuelve en clase y la palabra "problema" se usa como sinónimo de la palabra "ejercicio". En algunos casos, los problemas son aquellos praxemas expresados en lenguaje natural, o como se dice coloquialmente, en aquellos donde hay mayor cantidad de letras que de números. Para el alumno, la distinción está sobre quién ejecuta las acciones (en la mayoría de los casos se trabajan ejercicios) y no sobre el elemento usado para el estudio.

Universidad Nacional Abierta - Universidad Central de Venezuela. Educación Matemática.

Dirección electrónica: [amiguez@una.edu.ve](mailto:amiguez@una.edu.ve), [amiguez@cantv.net](mailto:amiguez@cantv.net)

1. Esta investigación se encuentra en desarrollo. Resultados de la misma aparecerán publicados a partir del mes de octubre del año 2003 en <http://educacion.una.edu.ve>. Esta investigación es financiada por el Consejo de Investigación y Postgrados de la Universidad Nacional Abierta.
2. Praxema: Chevallard define un objeto matemático como «un emergente de un sistema de prácticas donde son manipulados objetos materiales que se desglosan en diferentes registros semióticos: registro de lo oral, palabras o expresiones pronunciadas; registro de lo gestual; dominio de la inscripción, lo que se escribe o dibuja (grafismos, formulismos, cálculos, etc.), es decir, registro de lo escrito» (8). Llama praxema a los «objetos materiales ligados a las prácticas» y usa esta noción para definir el objeto como un «emergente de un sistema de praxemas». (Chevallard citado en "Dimensión instrumentale, dimension sémiotique de l'activité mathématique". Séminaire de Didactique des Mathématiques et de Informatique de Grenoble. LSD2-IMAG, Université Joseph-Fourier, Grenoble. Citado por Godino y Batanero, 1994).

Una de las mayores evidencias de esta situación son las expresiones de los estudiantes venezolanos cuando se enfrentan a la Prueba de Aptitud Académica, elaborada por la Oficina de Planificación del Sector Universitario (instrumento que está conformado en su mayoría por ejercicios y problemas matemáticos y que se usa como examen de ingreso a la educación superior), donde el denominador común es: «a mí nunca me habían puesto un problema de esos en clase», colocando ambos praxemas en la misma categoría.

### OBJETOS MATEMÁTICOS

### PERSONALES, OBJETOS

### MATEMÁTICOS INSTITUCIONALES

Claude Gaulin señala: «La diferencia entre un ejercicio y un "verdadero problema" es relativa. Lo que para una persona constituye un problema no rutinario puede muy bien ser un simple ejercicio para otra» (citado por Callejo, 1994, 24).

Este planteamiento del profesor Gaulin se centra en la perspectiva del que va a resolver un ejercicio o un problema, ya que para cada persona el objeto matemático o el praxema (ejercicio o problema) al que se está enfrentando estará delimitado por su sistema de prácticas actuativas y discursivas ante cada

clase de situaciones (Godino, 2000) y este sistema de prácticas varía de persona a persona con base en su experiencia y conocimientos matemáticos, y en su entorno de actuación cotidiana.

La finalidad del presente trabajo, entonces, es la de abordar estos praxemas como institucionales, es decir, ejemplos, ejercicios y problemas, tal como deberían abordarse en los libros de texto, en los materiales escritos de matemáticas y en las actividades de aprendizaje de matemática en el contexto escolar a cualquier nivel.

### LAS ACTIVIDADES DE

### APRENDIZAJE DE MATEMÁTICA

La relación entre la habilidad para realizar cálculos matemáticos y la comprensión de la matemática es una vieja discusión de psicólogos de la instrucción, dedicados a analizar estos fenómenos en las matemáticas. Nos proponemos abordar esta discusión desde un punto de vista pedagógico. Este abordaje lo haremos desde la perspectiva de cómo se estructura una AAM.

Consideramos que una AAM está compuesta por tres elementos: *conceptos y procedimientos*; *ejemplificación y contextualización*; y *ejercicios, problemas y preguntas* (véase figura 1).

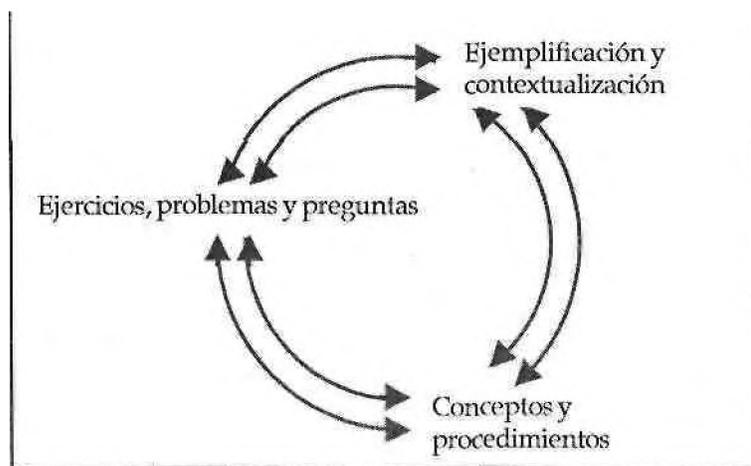


Figura 1. Elementos de una actividad de aprendizaje de matemática

1. *Conceptos y procedimientos.* Es el elemento en el cual se desarrollan las bases conceptuales (conceptos, definiciones, axiomas o teoremas) del tema a trabajar en la actividad de aprendizaje y se definen o deducen los procedimientos o algoritmos que permiten operacionalizar los asuntos tratados en el tema.
2. *Contextualización y ejemplificación.* Es el elemento en el que se ubica históricamente el tema tratado, mostrando sus orígenes y aplicación, así como el correcto uso de los procedimientos o algoritmos de acuerdo al contexto de aplicación, bien sea la situación planteada real o construida *ad hoc*.
3. *Ejercicios, problemas y preguntas.* Es el elemento en el que se le exige al aprendiz poner a prueba sus conocimientos y habilidades matemáticas, permitiéndole a su vez la precisión, el desarrollo y la consolidación de los mismos.

Estos elementos no implican la existencia de un orden predeterminado de los mismos, más la ausencia de uno de ellos descalifica a la misma como una AAM.

Sobre un mismo tema, distintos docentes podrán establecer secuenciaciones diferentes de estos elementos dentro de una AAM, dependiendo del grupo de estudiantes, sus conocimientos previos y su entorno o contexto. Obviamente, la concepción didáctica de la matemática a enseñar que tenga el docente, será el tamiz donde se cernirán todos los aspectos señalados.

## EL USO DE LOS EJEMPLOS EN UNA AAM

Para los asociacionistas, los ejemplos no son suficientes para aprender:

*Thorndike razonaba que, dado que los alumnos de enseñanza primaria todavía no eran capaces de deducir las reglas de la aritmética a partir de los ejemplos y de otros sistemas de reglas, la misión de la enseñanza era dar forma cuidadosamente a los vínculos y los hábitos necesarios que les permitían llevar a cabo cálculos y resolver problemas (Resnick y Ford, 1990, 28).*

Al igual que los conductistas (estímulo-respuesta), el entrenamiento en el algoritmo (instrucción mediante ejercicios) garantiza la ejecutoria por parte del aprendiz. Ambas posturas asumen, a nuestro parecer, una concepción limitada y equívoca de lo que es un ejemplo en una AAM.

Los ejemplos permiten al docente ubicar históricamente el uso de la trigonometría para la medición de alturas, o para introducir el procedimiento de la división (algoritmo de Euclides) con el uso de una vara para medir; en fin, son elementos que permiten ilustrar.

La ejemplificación dentro de una AAM es útil para consolidar la comprensión de un concepto, de tal manera que se trata de evitar que surjan en el estudiante concepciones alternas no consensuales en el ámbito de la matemática (denominados usualmente *errores*).

La ejemplificación crea, dentro de la actividad de aprendizaje de matemáticas, el momento propicio para la manipulación de objetos concretos, generando una interacción fecunda entre la realidad y la matemática. Como señala Miguel de Guzmán:

*Si la matemática es una ciencia que participa mucho más de lo que hasta ahora se pensaba del carácter de empírica, sobre todo en su invención, que es mucho más interesante que su construcción formal, es necesario que la inmersión en ella se realice teniendo en cuenta mucho más intensamente la experiencia y la manipulación de los objetos de los que surge (1993, 3.3 párrafo 1).*

## EJERCICIOS Y PRÁCTICA EN EL APRENDIZAJE DE LA MATEMÁTICA

Exponer o mostrar un concepto, una definición, un teorema o un procedimiento garantizan información al respecto, mas no garantizan ni la comprensión ni el aprendizaje. Los ejercicios en matemática forman parte de los elementos de una actividad de aprendizaje que coadyuvan a la comprensión (*insight*) del tópico matemático abordado en la actividad, así como a desarrollar las habilidades matemáticas asociadas a los algoritmos y procedimientos vinculados a dicho tópico.

En el caso de la adición de fracciones, se pueden construir ejercicios que pongan en juego las distintas acepciones del significado de una fracción, buscando con los mismos asegurar la comprensión conceptual de lo que los números racionales pueden representar en distintos ámbitos de la actividad humana.

De igual manera, cuando se aborda el procedimiento para hallar el cociente de dos números, la ejercitación se puede planificar de forma que el aprendiz se enfrente a diferentes dificultades, por ejemplo: cómo descomponer el dividendo según el divisor, qué hacer cuando el dividendo es menor que el divisor, etc.

Además, con miras al desarrollo de la habilidad de hallar el cociente de dos números, se le puede plantear al estudiante que, al descomponer el dividendo, comience el procedimiento por la cifra de las unidades o el componente que contiene esta cifra; dado que éste no es el procedimiento usual, se obliga a comprender a cabalidad el fin último del algoritmo y a desarrollar una variante del mismo, que luego puede permitir generar variantes similares para los algoritmos de otras operaciones.

Definido así, el ejercicio se convierte en un elemento esencial en el desarrollo de la AAM, dejando de ser la repetición sin sentido de un conglomerado de números y operaciones que se suelen mostrar en algunos libros de texto, problemarios y guías de matemática que se usan en el sistema escolar venezolano.

## RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS Y LAS MATEMÁTICAS COMO COMPRENSIÓN CONCEPTUAL

Ahora bien, *¿qué es un problema matemático?*

Para la asignatura Lenguaje y Métodos de Pensamiento del Curso Introductorio de la Facultad de Ingeniería de la Universidad Central de Venezuela, un problema es

*una situación donde se plantea una interrogante, una duda o se observa una realidad de la cual no se tiene explicación y la información que se maneja no permite responder o explicar la realidad inmediatamente (Serres, 2000).*

María Luz Callejo dice que un problema es

*una situación que plantea una cuestión matemática cuyo método de solución no es inmediatamente accesible al sujeto que intenta responderla porque no dispone de un algoritmo que relacione los datos y la incógnita o los datos y la conclusión, y debe, por tanto, buscar, investigar, establecer relaciones, implicar sus afectos, etc., para hacer frente a una situación nueva (1994, 24).*

Para Luis Campistrous y Celia Rizo, un problema es

*toda situación en la que hay un planteamiento inicial y una exigencia que obliga a transformarlo. La vía para pasar de la situación o planteamiento inicial a la nueva situación exigida tiene que ser desconocida [...] (Campistrous y Rizo, 1997, IX).*

Para el Instituto de Investigación en Enseñanza de las Matemáticas (IREM) de Strasbourg, en Francia, el término problema se usa para designar las

*actividades en el curso de las cuales el alumno debe buscar, hacer frente a situaciones nuevas y establecer relaciones, ^y en las que el profesor trata de suscitar la curiosidad del estudiante y de motivarle para que persevere en la investigación (citado por Callejo, 1994, 23).*

Son muchas las definiciones de problemas que se pueden conseguir en la literatura especializada; muchas de ellas asumen posiciones acerca de lo que es un problema, que generan un sabor amargo. Transmiten la sensación de que un problema es algo así como una celada. Al contrario, consideramos que *un problema es una situación real o ficticia que reta la comprensión conceptual, y no solamente los conocimientos de un tema tratado en la actividad de aprendizaje de matemática; exige una reestructuración en la manera de abordar la situación planteada y de los límites de los procedimientos conocidos, y busca generar conexiones sobre conocimientos variados.*

*Un problema no tiene condición temporal, se puede resolver rápidamente, o no conseguirse nunca su solución.*

Como sólo se sabe matemáticas cuando se comprende conceptualmente, no habrá comprensión de la matemática sino se resuelven problemas matemáticos. Es por esto que un problema es uno de los elementos de aprendizaje más rico y fructífero en la educación matemática.

Además, debemos enfatizar en algo: la matemática es una ciencia abstracta, con evidentes conexiones y fuentes en el mundo real, pero su capacidad de abstraer con miras a generalizar es un instrumento de un poder que la educación no debe impedir adquirir.

Es por ello que siguen siendo útiles, encantadores e indispensables los ejercicios y problemas matemáticos tipo acertijos, con o sin asidero en situaciones reales. En otras palabras, no somos partidarios de subestimar la descontextualización, la posibilidad de generalización abstracta.

## La pregunta, posibilidad de CONSTRUIR EL CONOCIMIENTO MATEMÁTICO POR PARTE DEL ALUMNO

La pregunta se puede analizar desde el punto de vista metodológico en el ámbito educativo. Esto obligaría a analizar dos aspectos:

- Lo que el profesor quiere lograr con ella (función).
- La manera como el profesor la formula (forma).

Acá centraremos nuestra atención en el primer aspecto, la función de la pregunta.

No proponemos el método socrático de enseñanza; pero en el proceso de construcción del conocimiento matemático, en la creación de las redes conceptuales, en la clarificación de conceptos, en la asimilación de los procedimientos y algoritmos, el cuestionamiento sistemático por parte del docente, focalizando en los aspectos clave del conocimiento matemático estudiado, es una herramienta de gran valor, mucho más si se logra que el estudiante adquiera una sistemática práctica de cuestionamiento en el proceso de aprendizaje de la matemática.

Preguntas tradicionales como: *por qué, cómo y qué* son las que permitirán al estudiante darle sentido a su aprendizaje, más si en el momento de la ejemplificación se permite indagar sobre el *cuándo y dónde*.

**CARACTERIZACIÓN DE LOS EJEMPLOS, EJERCICIOS, PROBLEMAS Y PREGUNTAS DENTRO DE UNA AAM**

El uso de los ejemplos, ejercicios, problemas y preguntas dentro de una AAM, dejando de ser la repetición sin sentido de un conglomerado, no tiene condiciones ni limitaciones de número, momento de aplicación, ni de tiempo.

Con el deseo de contextualizar la discusión sobre nuestro planteamiento dentro de la educación matemática, proponemos la siguiente caracterización de los praxemas presentados en el artículo:

- Contextualización y ejemplificación

**Ejemplos** { Manipulación de materiales concretos.  
Uso de tecnologías (calculadoras, computadoras).  
Historias y relatos.  
Recreación de situaciones trascendentales o significativas.  
Actividades reales en algún ámbito profesional.  
Deducción, construcción o uso de algoritmos y procedimientos.

Ejercicios, problemas y preguntas

**Ejercicios** { Actividades específicas con materiales concretos.  
Desarrollo de operaciones y cálculos.  
Operaciones y cálculos basados en calculadoras o computadoras.  
Uso de algoritmos.  
Resolución de ecuaciones, inecuaciones y sistemas.  
Operaciones y cálculos en actividades reales del ámbito profesional.  
Aplicación de procedimientos.

**Problemas** { Actividades específicas con materiales concretos.  
Situaciones reales de algún ámbito profesional.  
Situaciones no reales en el lenguaje simbólico propio de la matemática.  
Situaciones matemáticas no reales en lenguaje natural.

**Preguntas** { Revisión de definiciones y conceptos.  
Síntesis.  
Comparaciones.  
Aplicaciones.

Esta caracterización busca darle herramientas al docente para su acción en el aula y a la vez servir de guía para el diseño de las actividades de aprendizaje. Está pendiente hacer una caracterización exhaustiva por tópicos, es decir, para los diferentes temas de la aritmética, el álgebra, la geometría, la estadística e incluso temas propios de la educación universitaria.

*i*

La responsabilidad de un docente en el proceso de enseñanza debe llevarlo a una reflexión sobre el rol que juegan los instrumentos (fundamentalmente el material escrito) que pone a disposición de los que quieren aprender matemáticas. En nuestra opinión, el docente debe estructurar y diferenciar con claridad los elementos que constituyen la lección y cada una de las actividades que la conforman; de aquí la importancia que le damos al tema abordado, el cual queremos que se discuta y profundice dentro de la comunidad de educadores matemáticos.

**REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS**

CALLEJO, M. (1994). *Un club matemático para la diversidad*. Madrid: Narcea.

CAMPISTROUS, L. y RIZO, C. (1997). *Aprende a resolver problemas aritméticos*. Ciudad de la Habana: Pueblo y Educación.

GODINO, J.D. (2000, setiembre 6). *Tipologías de objetos matemáticos* [Discusión en línea] Disponible: Red IRIS Grupo INDIMAT (didáctica de la matemática) <http://listserv.rediris.es/archives/indimat.html> [Consulta: 2 000, setiembre 7].

GODINO, J. D. y BATANERO, C. (1994). "Significado institucional y personal de los objetos matemáticos". En: *Recherches en Didactique des Mathématiques*. Vol. 14, No. 3. pp. 325-355.

GUZMAN, M. De y Gil, D.. (1993). *Enseñanza de las ciencias y la matemática*, [en línea] Disponible: <http://www.oei.org.co/oeivirt/Edumat.htm> [Consulta: 2 000, agosto 16].

RESNICK, L. y FORD, W. (1990). *La enseñanza de las matemáticas y sus fundamentos psicológicos*. Barcelona: Paidós.

SERRES, Y. (2000). "Una experiencia de solución de problemas matemáticos con estudiantes del curso introductorio de Ingeniería". En: *Revista de Pedagogía*. Vol. 21, No. 60. pp. 89-103.

## REFERENCIA

MÍGUEZ, Ángel. "Los ejemplos, ejercicios, problemas y preguntas en las actividades de aprendizaje de matemática". En: *Revista Educación y Pedagogía*. Medellín: Universidad de Antioquia, Facultad de Educación. Vol. XV, No. 35, (enero-abril), 2003. pp. 143 -149.

Original recibido: septiembre 2002

Aceptado: octubre 2002

Se autoriza la reproducción del artículo citando la fuente y los créditos de los autores.

