Kandinsky, *Curva dominante*, Óleo sobre lienzo, 1936.

RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS, SU CONCRECIÓN EN ALGUNOS RECURSOS CLÁSICOS

José Carrillo Yáñez

REVISTA EDUCACIÓN Y PEDAGOGÍA

Resumen

RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS. SU CONCRECIÓN EN ALGUNOS RECURSOS CLASICOS

Este *artículo comparte la importancia que actualmente se concede a la resolución de problemas en el curricula y enfatiza el papel del profesor como aprendiz de la enseñanza. Tras plantear unos interrogantes que ponen de relieve el vínculo entre el aprendizaje del alumno y el del profesor, se conceptualiza el término problema en la línea de Pólya y Schoenfeld, exponiendo seguidamente un hipotético proceso de mejora en el planteamiento didáctico de la resolución de problemas. A continuación se profundiza en los diversos papeles que pueden desempeñar los recursos en la resolución de problemas, lo que se realiza a partir de varios ejemplos.*

Résumé

RESOLUTION DE PROBLEMES. SA CONCRETION DANS PLUSIEURS RESSOURCES CLASSIQUES

Cet article partage l'importance qu'on accorde aujourd'hui a la résolution de problémes dans le curriculum et met l'accent sur le role du professeur en tant qu'apprenant de l'enseignement. Aprés avoir posé quelques interrogants qui mettent en relief le lien entre l'apprentissage de l'éléve et celui du professeur, on conceptualise autour du terme próbléme, dans l'approche de Pólya et Schoenfeld, présentant ensuite un processus hypothétique d'amélioration de l'énoncée didactique de la résolution de problémes. Finalement, on approfondit dans les différents roles joués par les ressources dans la résolution de problémes, ce qu'on fait a partir de plusieurs exemples.

Abstract

PROBLEM SOLVING. PRECISIÓN IN SOME CLASSIC RESOURCES

This paper agrees with the current importance given to problem solving in the curriculum and emphasizes the teacher's role as teaching learner. After posing some questions that highlights the link between pupil's learning and the teacher's, it conceptualizes the term probkm under the perspective of Pólya and Schoenfeld. It follows explaining a hypothetical process of impwvement in the teaching analysis of problem solving. Finally, it deals with the diversity of roles that materiais can play in problem solving and what is carried out starting from several examples.

Palabras Clave

Currículo, resolución de problemas, didáctica de las matemáticas
Curriculum, problem solving, Mathematics teaching

RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS. SU CONCRECIÓN EN ALGUNOS RECURSOS CLÁSICOS

José Carrillo Yánez*

INTRODUCCIÓN

La importancia de la resolución de problemas en la enseñanza de las matemáticas ha sido unánimemente resaltada por los investigadores y por las distintas administraciones educativas. Aquellos han desarrollado investigaciones en las que han puesto de relieve las positivas implicaciones de una metodología basada en la resolución de problemas sobre la construcción de conocimiento (conceptual, procedimental y actitudinal) por parte de los alumnos, cómo el tratamiento de problemas hace aflorar unas concepciones dinámicas sobre la matemática y su enseñanza y aprendizaje, qué influencias ejerce en el propio profesor, etc.

Por su parte, las administraciones educativas en todo el mundo plasman en sus diseños y decretos curriculares la conveniencia de reservar un peso importante al enfrentamiento por parte de los alumnos a problemas y situaciones problemáticas, con la intención de servir de instrumentos de organización del conocimiento y de preparación para el abordaje cada vez más autónomo de las situaciones cotidianas. No hay que olvidar la contribución de muchos profesores de las distintas etapas educativas, quienes han compartido sus experiencias cuando han llevado al aula actividades de resolución de problemas.

Sin embargo, lamentablemente, la sintonía anterior no posee su correlato en la generalidad de los profesores, para los que la resolución de problemas sólo les supone invertir un tiempo del que nos disponen, lo que refleja un desconocimiento de sus beneficios y una carencia de formación para poder extraer el partido que compense tal inversión.

EL PROFESOR COMO APRENDIZ

Un posible y constatado camino para que el profesor tome un papel activo en la implementación de las recomendaciones administrativas, coincidentes en ocasiones (como la que nos ocupa) con las recomendaciones que proceden del área de Didáctica de la matemática, es que conceptualice su labor como la de un aprendiz, que haga suya la frase de Feiman-Nemser y Buchman, «Aprender de la enseñanza [es] parte del trabajo de enseñar»(1988, 312). Para ello es necesario que el profesor vincule el desarrollo de los alumnos a su propio desarrollo profesional, como muestra la figura 1.

Universidad de Huelva (España). Facultad de Ciencias de la Educación. Didáctica de la Matemática.
Dirección electrónica: carrillo@uhu.es

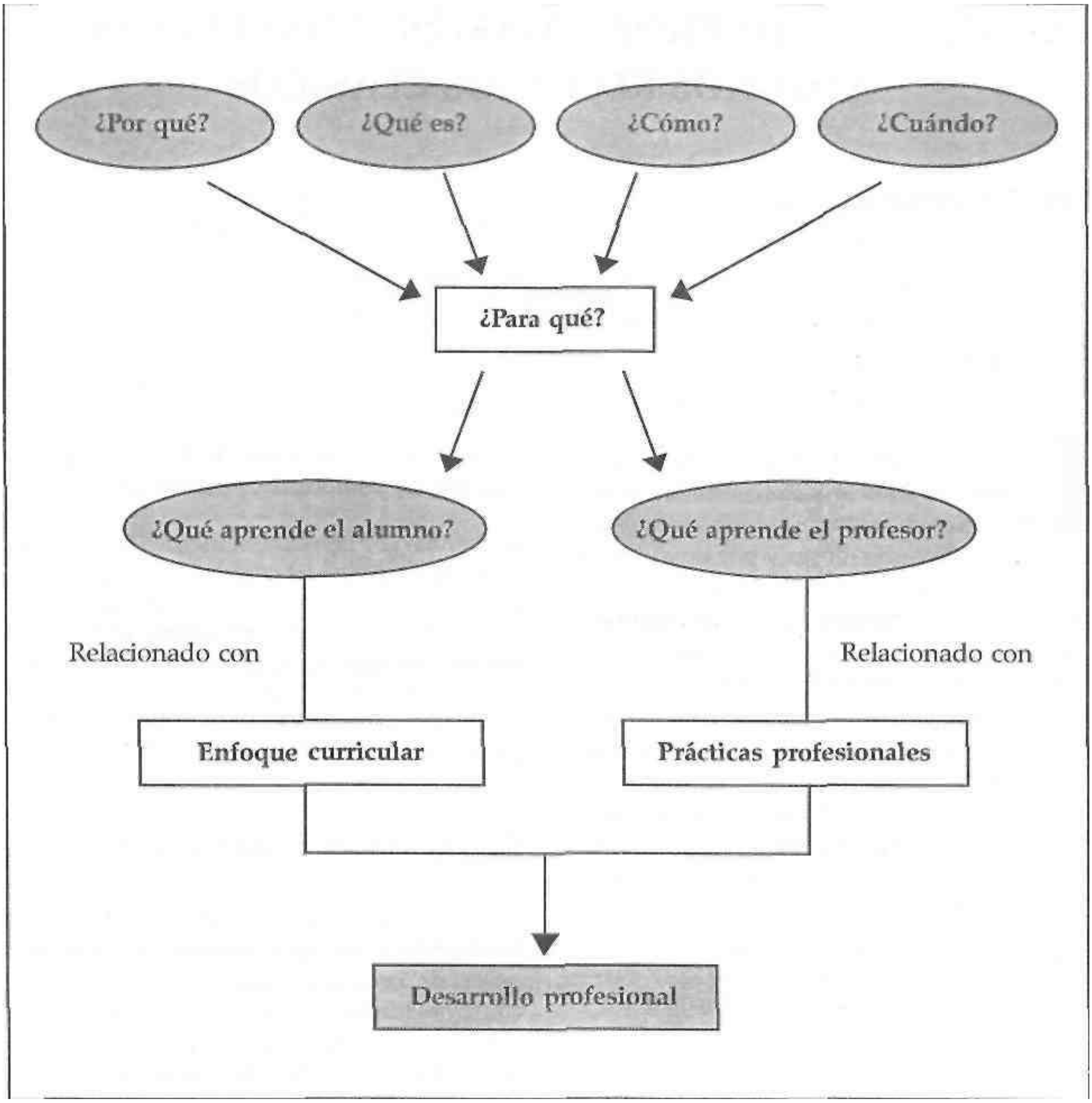


Figura 1. Interrogantes sobre resolución de problemas

La figura 1 propone unos interrogantes como punto de partida del aprendizaje profesional: el profesor deberá reflexionar sobre lo que aprende el alumno y lo que aprende él mismo al poner en práctica la resolución de problemas, relacionando así el enfoque curricular con su práctica profesional, relación que propicia su desarrollo profesional. Entre todos los interrogantes, se ha considerado central el ■*para qué,* pues el profesor debe ser consciente de las finalidades de la resolución de problemas, qué puede propiciar con ella (Carrillo, 1998).

¿QUÉ ES LA RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS?

No pretendo resumir en este apartado lo que ocupa un espacio ingente en la literatura, sino tan sólo proponer como concepto de *problema,* al objeto de unificar interpretaciones en el resto del artículo, el que utilicé en mi tesis doctoral (Carrillo, 1996, publicada en 1997), donde afirmo que, dentro de la perspectiva en la que trabajo,

> *el concepto de problema debe asociarse a la aplicación significativa (no mecánica) del conocimiento matemático a situaciones no familiares, la conciencia de tal situación, la existencia de dificultad a la hora de enfrentarse a ella y la posibilidad de ser resuelta aplicando dicho conocimiento* (1997, 101).

Este concepto puede enmarcarse en la teoría de Polya (1945), desarrollada y ampliada posteriormente por Schoenfeld (1985, 1992), entre otros.

Ponernos de acuerdo en qué es un problema no unifica la manera de entender la resolución de problemas en el aula. En este punto, he de decir que, siendo la resolución de problemas un proceso en el que interviene una gran cantidad de variables (del sujeto, del problema, del contexto...), no considero deseable obtener la unificación de su puesta en práctica, sino una condenciación en cuanto a los elementos que deben ser tomados en consi-deradón para que dicha puesta en práctica adquiera el valor que merece.

En Carrillo (1995) puede verse un esquema que describe un hipotético proceso de mejora (en cuanto a que entiendo como estado mejor, por ejemplo, tratar los problemas como tales, en lugar de tratarlos como ejercicios o no hacer problemas en el aula), parte del cual puede observarse en algunos profesionales. Merece la pena reflexionar un poco sobre él (véase figura 2) por su importanda en la formación del profesor y en su repercusión en la enseñanza.

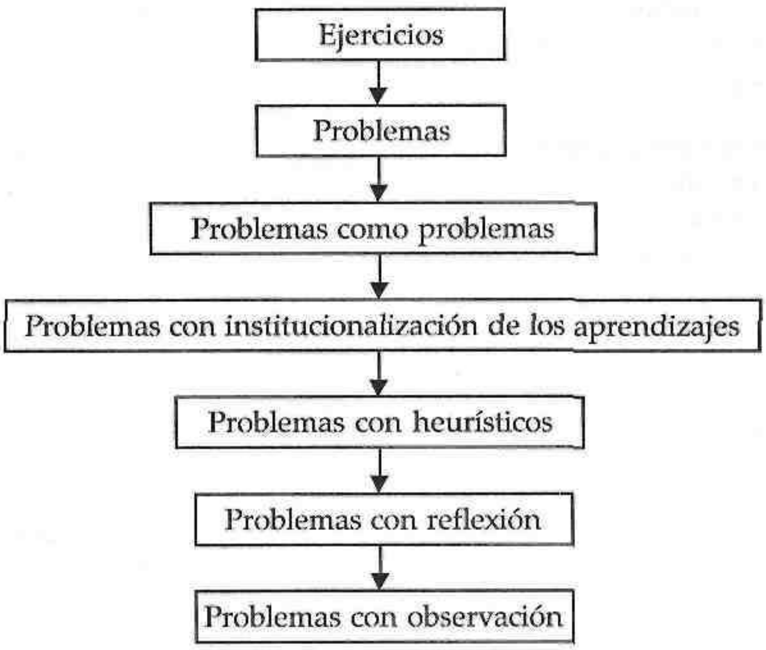


Figura 2. Proceso de mejora de la puesta en práctica de la resolución de problemas por parte del docente

Este proceso debe ser favorecido con la idea de que los docentes puedan plantearse llegar al último estado o dirigirse hacia él. No debe entenderse como proceso a imponer, sino a comprender; debe ser cada profesor el que decida progresar, desde su convencimiento, aunque respetando las imposiciones o las sugerencias administrativas. Asimismo, debemos ser conscientes de que participar en un proceso de mejora es en sí mismo un logro, y que no debe hacernos desistir la dificultad de alcanzar metas que en muchas ocasiones son utópicas.

El esquema consta de puntos inclusivos y trata de reflejar los saltos cualitativos importantes que pueden darse cuando se intenta llevar la resolución de problemas al aula.

Como he expresado en varias ocasiones (Carrillo, 2001a), no basta con abandonar la práctica continua y rutinaria de ejercicios y sustituirlos por problemas: hay que tratar los problemas como se merecen, no como ejercicios. En ocasiones, los problemas son deteriorados en su tratamiento por las prisas. Como profesores, debemos armarnos de paciencia y permitir que los alumnos formulen sus propuestas de abordaje, y no dar recetas que los transformen automáticamente en ejercicios.

El proceso alcanza el cuarto nivel cuando se efectúan paradas (momentos de consolidación, no de avance) de vez en cuando para socializar los aprendizajes que se van produciendo, al mismo tiempo que éstos se clarifican.

Disponer de un listado de heurísticos[1] es muy útil como recurso del profesor a la hora de ayudar a los alumnos a organizarse y progresar dentro de la resolución de un problema, huyendo de la indicación concisa de, por ejemplo, aplicar una fórmula.

Un salto cualitativo importante se da cuando a lo anterior se añade la reflexión sobre los procesos seguidos. Es esencial que los alumnos y los profesores hagan cosas, es decir, que se sientan protagonistas de sus tareas, pero para favorecer el progreso es necesario que se reflexione sobre lo que se hace. De esta forma, el alumno (y en su caso el profesor) se hace consciente de su actuación y sus características como resolutor.

Para aumentar la eficacia de lo anterior es conveniente poseer instrumentos que permitan diferenciar, e incluso observar, aspectos relevantes del proceso de resolución de problemas; instrumentos, por tanto, de evaluación (no sancionadores) del modo de resolver problemas.

Optar, por tanto, por la resolución de problemas como metodología básica, es una decisión que repercute en muchas variables curri-culares: contenidos, metodología, evaluación, papel del profesor, papel del alumno, etc.

Decidirse a llevar la resolución de problemas al aula puede y debe ser el resultado del acercamiento progresivo a concepciones abiertas. Ahora bien, para que esto suceda es conveniente que el profesor reflexione sobre qué se consigue cuando se lleva al aula la resolución de problemas; es decir, es necesario saber para qué sirve. Asimismo, es útil que disponga de ejemplos que propicien su reflexión sobre cómo puede orientarse la resolución de problemas, es decir, necesita instrumentos y apoyos para mejorar su conocimiento didáctico del contenido matemático, uno de los pilares de su conocimiento profesional. En este artículo voy a centrarme en el trabajo con algunos recursos clásicos.

1. Este listado de heurísticos consiste en sugerencias de progreso en la resolución del problema, independientes del tópico específico de éste, como reformular con las propias palabras, hacer un esquema, descomponer el problema en partes, conjeturar...

PAPEL DE LOS RECURSOS EN LA RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS

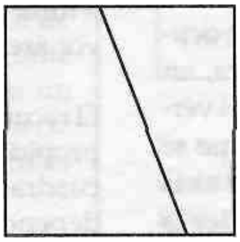
El enfoque de este apartado no es exhaustivo; el propósito es mostrar, a partir de determinados recursos didácticos, una forma de abordar y presentar tareas de resolución de problemas en el aula, detallando el uso de cada recurso que se está poniendo en práctica.

Los problemas elegidos son adecuados para la educación secundaria o superior. Aunque presente un problema en una sección, no quiere esto decir que no puedan extraerse comentarios relativos a otras secciones, sino que pone especialmente de relieve lo que se pretende en esa sección.

EL RECURSO "INÚTIL"

Cortes

Toma una hoja de papel y unas tijeras y recorta un cuadrado. Ahora tienes que realizar cortes rectilíneos de un lado a otro, como el de la figura.



Nos vamos a fijar en una de las figuras resultantes, la de mayor número de lados. En el ejemplo de la figura se han formado 2 cuadriláteros (trapecios rectángulos).

a) ¿En qué casos se forma un cuadrilátero?
b) ¿Qué otras figuras pueden resultar?
c) Si eliges un punto cualquiera de uno de los lados y se toma al azar otro punto de cualquier lado, se forma un segmento rectilíneo cuyos extremos son dichos puntos. ¿Cuál es la probabilidad de obtener, al recortar, cada uno de los tipos de figuras de los apartados a y b?

Independientemente de la solución del problema y de su tratamiento en el aula (que pueden consultarse en Carrillo, 2001b), el papel del recurso (papel y tijeras, además de la regla) en esta ocasión es irrelevante, toda vez que la situación posee una simulación que la hace mucho más practicable: dibujar, en lugar de cortar, evitará confusión entre los trozos de papel que van quedando sobre la mesa. No obstante, esto no es algo que se pueda generalizar: si hubiera alumnos que necesitaran cortar (al menos inicialmente), se les debería facilitar que lo hicieran, en cuyo caso sería útil este recurso.

Con estos comentarios pretendo traer a colación la reflexión sobre la adecuación de los recursos a las tareas de enseñanza. Un recurso por sí mismo no es instrumento de aprendizaje, sino dependiendo del uso que se haga de él.

EL RECURSO COMO JUEGO

En esta sección se encuentran, por poner un ejemplo, los problemas de probabilidad que utilizan como situación el juego con los dados o las cartas. Aquí el juego es un fenómeno de la teoría (de sus problemas); la teoría, en realidad, ha modelizado el juego.

EL RECURSO COMO PROPICIADOR DE CONJETURAS

La parcela rectangular

Una promotora de viviendas y parcelas pone en venta parcelas de forma rectangular de 200 m de valla, todas al mismo precio. Ante una oferta tan singular, ¿qué parcela elegirías? (Carrillo, 2001b).

Es claro que este problema, si los alumnos ya han estudiado las derivadas, les puede resultar fácil, necesitando tan sólo calcular el máximo de la función área. Lo mismo puede ocurrir si ya han visto la función cuadrática, en cuyo caso tan sólo necesitarían calcular el vértice. Todo ello, naturalmente, una vez que se acuerde que la parcela más conveniente es la que posee mayor área (también podría ser la más cercana a la carretera principal o a la red eléctrica).

Pero el problema adquiere otras connotaciones si los alumnos no poseen tales conocimientos. En este caso, elaborar una tabla con sucesivos valores de los lados y el correspondiente del área les puede hacer ver las características esenciales de las parábolas: hay una rama creciente y otra decreciente; la parábola es simétrica respecto de un eje vertical y posee un máximo o un mínimo.

Aparte de lo anterior, si los alumnos poseen una cuerda anudada (de 20 cm, por ejemplo) y una hoja de papel milimetrado, pueden superponer diversos rectángulos formados con la cuerda sobre el papel milimetrado y calcular el área que poseen, lo que les permite conjeturar que la parcela cuadrada es la de mayor área.

El recurso es insuficiente para demostrar, pero propicia la conjetura. La suposición de que el cuadrado es la solución puede también llevar, dependiendo del nivel educativo, a que algunos alumnos planteen el problema partiendo del cuadrado (ver figura 3).

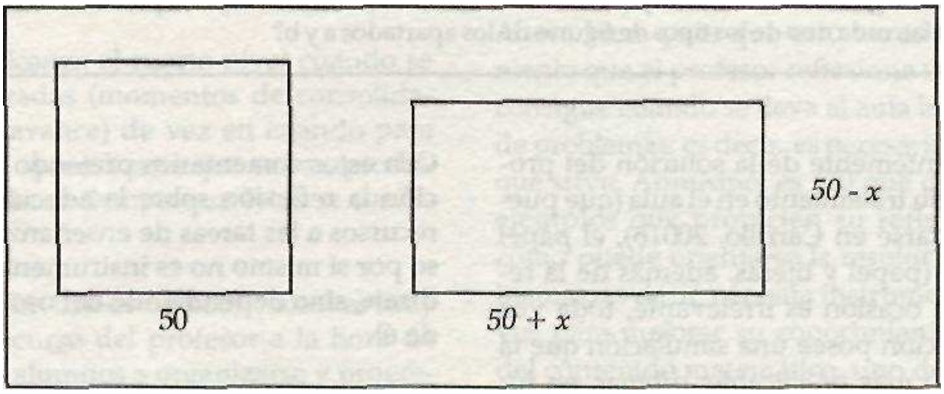


Figura 3. Rectángulo de mayor área entre los isoperimétricos

Podría llegarse, pues, a demostrar que la solución es el cuadrado basándose en que $50^2 - x^2$ es siempre menor o igual que 502.

EL RECURSO COMO FACILITADOR Y CONDUCTOR DE LA RESOLUCIÓN

Disección de un triángulo

La cuestión es que encuentres las cantidades por las que se puede dividir un triángulo equilátero cualquiera en ese número de triángulos equiláteros. Es decir, el 4, por ejemplo, es una solución, pues cualquier triángulo equilátero se puede dividir en 4 triángulos equiláteros. Dibuja la descomposición.

Pero hay muchísimas soluciones más. Trata de encontrar algunas.

Una vez que has explorado en busca de soluciones, ten en cuenta que la pregunta puede formularse como sigue: sea *n* un número natural. ¿Puede descomponerse un triángulo equilátero en *n* triángulos equiláteros? (Carrillo, 2001b).

El enunciado anterior presenta diversas formas de enunciar el problema, según el nivel de los alumnos. Éste es un buen problema para observar la influencia del uso de recursos.

Si damos a los alumnos una trama isométrica o triangular, tanto si es punteada como si tiene las líneas trazadas (aunque menos aún en este caso), no tiene sentido plantearse el paralelismo de los lados de los triángulos que se van dibujando (o, equivalentemente, el hecho de que sean equiláteros), pues así parecen; pero si los alumnos no poseen más que papel en blanco (y, quizás, regla), es más probable que se planteen el paralelismo de las líneas que van trazando (si en lugar de una regla, se emplea los instrumentos de dibujo escuadra y cartabón, puede ocurrir que los alumnos basen el paralelismo en la apariencia de la construcción geométrica). Por otra parte, mientras que en este caso se induce a pensar que los triángulos han de ser iguales, la trama facilita la consideración de triángulos de diversos tamaños.

Habrá que sopesar ventajas e inconvenientes de un recurso y ver qué pretendemos con él. En esta ocasión, la trama triangular facilita la resolución, pero a costa de no dar pie a que surja la necesidad de argumentar el paralelismo o la equilateralidad y a costa de condicionar la propia resolución (de cerrar alternativas), más que si se planteara en un papel en blanco. No es ni malo ni bueno, depende de nuestra pretensión, de nuestro para qué.

EL RECURSO COMO OBJETO DE INVESTIGACIÓN

Triángulos en el geoplano rectangular

Forma triángulos y clasifícalos.

Se reparten geoplanos (tableros con puntillas distribuidas en forma de cuadrícula) y/o tramas rectangulares de puntos. Dependiendo del nivel donde se plantee esta actividad, habrá alumnos que supongan que han formado todos los tipos de triángulos posibles o no. La constatación de que a nadie le ha salido un triángulo equilátero puede ser el punto de partida de la conjetura de la imposibilidad de formar triángulos equiláteros en la trama rectangular.

Cualquier ángulo sobre la trama (ver figura 4) puede expresarse como suma o diferencia de dos ángulos que forman parte de triángulos rectángulos con los catetos en la horizontal y la vertical. Como pueden elegirse estos segmentos de modo que sus extremos sean vértices de la trama, las tangentes de cada uno de estos ángulos son números racionales y, por consiguiente, también lo son las tangentes de los ángulos suma y diferencia. De ahí que no pueda obtenerse la tangente de 60, haciendo imposible la existencia de triángulos equiláteros en la trama.

Independientemente de que se aborde esta demostración o baste con la conjetura, se pone

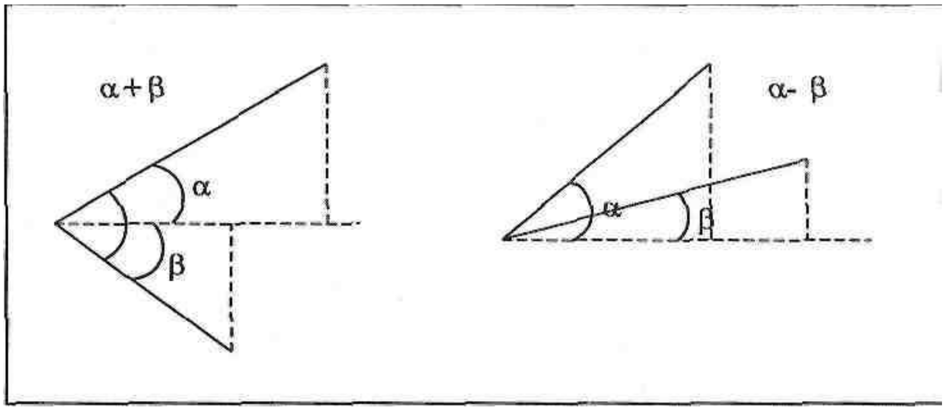


Figura 4. Ángulos en la trama rectangular Figura 4. Ángulos en la trama rectangular

de relieve la necesidad que tiene el profesor de analizar a fondo un recurso para preparar las actividades que se basen en él. El recurso se constituye en objeto de investigación para el profesor y para el alumno.

A MODO DE CONCLUSIÓN

He pretendido en este artículo compartir algunas reflexiones personales sobre la resolución de problemas y sobre el uso de recursos didácticos en la clase de matemáticas.

La resolución de problemas, entendida desde una perspectiva compleja, en la que confluyen múltiples variables, ofrece un proceso en el cual plasmar el paradigma del profesor como aprendiz, considerando su desarrollo profesional ligado a la práctica y al desarrollo de los alumnos.

La puesta en práctica de la resolución de problemas incluye la consideración progresiva de muchos aspectos, pero para que sea efectiva es necesario que el profesor sea consciente de sus finalidades y que vaya adquiriendo cierto bagaje metodológico; en este bagaje, los recursos desempeñan un papel destacado.

Desde el recurso inútil hasta el recurso como objeto de investigación, pasando por, entre otros, el recurso como propiciador de conjeturas, los recursos permiten el planteamiento y abordaje de problemas y han de ser considerados por el profesor por su importancia en la metodología y en la construcción y organización del conocimiento.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

CARRILLO, J. (1995). "La resolución de problemas en matemáticas: ¿cómo abordar su evaluación?". En: *Investigación en la Escuela.* Sevilla (España). No. 25. pp. 79-86.

________ (1997). *Modos de resolver problemas y concepciones sobre la matemática y su enseñanza de profesores de matemáticas de alumnos de más de 14 años. Algunas aportaciones a la metodología de la investigación y estudio de posibles relaciones.* Huelva: Universidad de Huelva, Publicaciones.

________ (1998). "La resolución de proble mas en la enseñanza secundaria. Ejemplificaciones del para qué". En: *Epsilon.* San Fer nando (Cádiz, España). No. 40. pp. 15-26.

________ (2001a). "Aprender desde la reso lución de problemas". En: LOPES, I.; SILVA,

J. y FIGUEIREDO, Paulo (eds.). *Actas do ProfMat 2001* (71-80). Vila Real, Portugal: Associacao de Profesores de Matemática.

_______ (2001b). "Resolución de problemas". *Conocimiento, creencias y teorías de los profesores.* Alcoy: Marfil.

POLYA, G. (1945). *How to solve it.* Princeton: Princeton University Press.

SCHOENFELD, A. H. (1985). *Mathematical problem solving.* New York: Academic Press.

______ (1992). "Learning to think mathe-

REFERENCIA

CARILLO YANEZ, José. "Resolución de problemas. Su concreción en algunos recursos clásicos". En: *Revista Educación y Pedagogía.* Medellín: Universidad **de** Antioquia, Facultad de Educación. Vol. XV, No. 35, (enero- abril), 2003. **pp.** 153-161.

Original recibido: septiembre 2002

Aceptado: octubre 2002