ARGUMENTACIONES EN EL AULA DE MATEMÁTICA. LA ESTRATEGIA DE INDUCCIÓN COMPLETA

Cecilia Crespo Crespo
Instituto Superior del Profesorado "Dr. Joaquín V. González", Instituto Nacional Superior del Profesorado Técnico. Buenos Aires. (Argentina,)
crccrespo@gmail.com

Palabras clave: inducción completa, demostración, error, formalización

Key words: mathematical induction, proof, error, formalizing

RESUMEN: Las demostraciones por inducción completa o inducción matemática, introducidas y aplicadas desde cursos elementales de álgebra en nivel superior, son aplicables a distintas áreas de la matemática. A pesar de que los estudiantes las aplican correctamente en muchos casos, a veces lo hacen de manera mecánica y sin comprender su significado, reduciéndolas a algoritmia y cometiendo, en oportunidades, errores en su aplicación sin poder interpretar sus alcances. Proponemos reflexionar acerca de la forma de argumentación por inducción completa, sus orígenes y fundamentación en la historia de la matemática, sus alcances y algunas de las dificultades y errores en su aplicación.

ABSTRACT: Proofs of mathematical induction presented and used since the first courses of elementary algebra in higher education can be used for different areas within Mathematics. Even though students can apply them correctly in many situations, sometimes their work is mechanic and does not imply the complete understanding of its meaning, narrowing down this activity to an algorithmic process; and occasionally provoking mistakes they cannot anticipate or perceive the extent it will take them to. We propose to thoroughly consider this method for proofs, its origins and foundations in Math's History, its scope and some of the difficulties and mistakes on its application.

LAS DEMOSTRACIONES POR INDUCCIÓN COMPLETA O POR RECURRENCIA

En la mayoría de los cursos elementales de álgebra del nivel superior, están presentes las demostraciones por inducción completa al abordar propiedades de los números naturales. Posteriormente en cursos superiores de las carreras matemáticas, esta estrategia de argumentación es retomada y aplicada. Se encuentra presente en el discurso matemático escolar y su nombre se debe a que tiene cierta similitud con los procesos inductivos característicos de las ciencias experimentales, aunque posee un carácter deductivo.

La aplicación usual de este método consiste en verificar que la propiedad que se desea demostrar primeramente el caso base, o sea que la propiedad es cumplida por el primer elemento de un conjunto, usualmente el cero, y luego partiendo de la suposición de que un número n la verifica (hipótesis inductiva), se prueba que también la cumple su siguiente o sucesor (tesis inductiva). A esta etapa del proceso, se la denomina paso inductivo. De esta manera y a partir de los dos pasos anteriores, se afirma que todos los elementos del conjunto considerado a partir del primero, verifican la propiedad. Este método de demostración suele ser aplicado para teoremas de la aritmética y teoría de números, donde su importancia es capital, pero también es aplicable a propiedades, por ejemplo, geométricas tanto métricas como topológicas en las que aparezca una variable que tome cualquier valor natural.

Los estudiantes las aplican correctamente en muchos casos y adquieren manejo con su algoritmia, pero lo hacen de manera mecánica y no comprenden su esencia.

Este trabajo, que forma parte de una investigación en la línea de la construcción social del conocimiento con enfoque socioepistemológico, centrada en analizar las características del discurso matemático escolar, en particular en relación con las formas de argumentar y el lenguaje que utilizado en el aula de matemática. En esta oportunidad, se analizan casos en que la aplicación por parte de los estudiantes de la estrategia de inducción completa no es correcta y denota que en su afán por realizar demostraciones formales de propiedades matemáticas, no tienen en cuenta su aplicabilidad y significación. Consideramos necesario de que los estudiantes comprendan su significado y limitaciones, y para ello se presentan algunos ejemplos que permiten resignificar la inducción completa.

INDUCCIÓN COMPLETA. SU PRESENCIA EN LA HISTORIA DE LA MATEMÁTICA

El método de inducción completa es aplicable a conjuntos bien ordenados, o sea a aquellos conjuntos no vacíos en los que se ha definido una relación de orden total y que además verifican que todo subconjunto no vacío posee un primer elemento para dicho orden.

El primero en utilizar el término “inducción” con el sentido de “llevar hacia” o “ser conducido”, fue Aristóteles. Se refería al tipo de razonamiento en el que se concluye de una afirmación particular otra universal. Este es el sentido que se le da en las ciencias experimentales y que fuera analizado por Francis Bacon y, posteriormente, por David Hume y John Stuart Mill. Sin embargo su presencia en la matemática es anterior. En la India, Bhaskara I (600–680d.C.) realiza una demostración que utiliza argumentaciones que pueden ser reconocidas como el germen de la inducción completa para la prueba de la infinidad de los números primos. También en la matemática árabe está presente la inducción completa de una manera no rigurosa, en la obra de Al-Karaji (953-1029d.C.) y Samau‘al al Maghribi (1130-1180d.C.) (Cajori, 1918).

Gersomides (1288-1344), utilizó este tipo de argumentación de manera no formal en la deducción de la manera de calcular el número de permutaciones de un conjunto de elementos diferentes. Francesco Maurolico (1494-1575), realiza la primera exposición rigurosa de este método 1575 en Arithmeticorum Libri Duo, aunque no usa el término inducción para denotar este proceso. Este método fue expuesto por Blas Pascal (1623-1662) con claridad. Lo utilizó para demostrar propiedades del triángulo que lleva su nombre. De Morgan (1806-1871) describió el proceso cuidadosamente y fue el primero en denominar este proceso como “inducción matemática” en el siglo XIX.

Su fundamento lógico se encuentra en la axiomática de Giuseppe Peano para los números naturales, basada en las siguientes ideas:

Se parte de ciertos conceptos primitivos, como un conjunto de elementos llamado N (naturales), y un elemento llamado cero (0) y una relación definida dentro de N como *“es siguiente de”* (sg).

Los cinco axiomas que presenta Peano para definir los números naturales, son:

Ax1) 0 pertenece a N

Ax2) Si x pertenece a N entonces sg(x) pertenece a N y es único.

Ax3) Si x e y pertenecen a N y sg(x)=sg(y) entonces x=y.

Ax4) 0 no es siguiente de ningún elemento de N.

Ax5) Si Q es un subconjunto de N que verifica:

a) 0 pertenece a Q

b) Si x pertenece a Q entonces sg(x) pertenece a Q

Entonces, Q=N

Estos axiomas dan origen a la definición de número natural basada fundamentalmente en la propiedad de ordinalidad. El quinto axioma es conocido como Principio de Inducción Completa y es utilizado con frecuencia para demostrar propiedades de los números naturales.

El principio de inducción completa presenta algunas formas alternativas equivalentes. Entre ellas podemos citar el Principio de inducción fuerte, que afirma:

Sean n_o, n_1 números naturales tales que $n_o < n_1$

a) Si una propiedad S se verifica para los números naturales entre n_0 y n_1, o sea: $S(n_o)$, $S(n_o+1)$,... $S(n_1-1)$, $S(n_1)$ son verdaderas y

b) Siempre que $S(n_o)$, $S(n_o+1)$,... $S(k-1)$, $S(k)$ sean verdaderas para algún k natural, particular pero elegido al azar con $k \geq n_1$, entonces $S(k+1)$ también sea verdadera,

Entonces $S(n)$ es verdadera para cualquier $n \geq n_0$.

Otra formulación equivalente es el Principio de Descenso infinito, debido a Pierre Fermat (1601/8?-1665), que afirma que Si existe un $l \in N$ para el cual la veracidad de $P(l)$ implica necesariamente que para algún $k \in N$ tal que $k < l$, $P(k)$ es cierta, entonces $P(n)$ es falsa para todo $n \in N$. Una de sus aplicaciones es una demostración de la irracionalidad de $\sqrt{3}$ (Crespo Crespo, 2007).

LAS DEMOSTRACIONES EN EL AULA DE MATEMÁTICA. EL CASO DE LA INDUCCIÓN COMPLETA

Las demostraciones pueden ser comprendidas como una práctica social surgida dentro de la comunidad matemática con el objeto de validar los conocimientos matemáticos (Crespo Crespo, 2007). Esta visión se desarrolla a partir de considerar en la comunidad matemática la necesidad de validar los enunciados referentes a la matemática. Cada comunidad matemática, en cada escenario sociocultural desarrolló la normativa correspondiente a aquellas demostraciones que considera correctas y aceptables para esa validación. El papel de las demostraciones es, por lo tanto fundamental para la matemática y resulta vital su comprensión en el aula, aunque esta no sea su única función (de Villiers, 1993). Esta visión permite analizar dentro de cada escenario sociocultural en el que se realizan actividades matemáticas, en particular en el aula de matemática, las características de las demostraciones, las funciones que desempeñan y la significatividad que poseen para los estudiantes.

Sin embargo, no siempre para los estudiantes revisten las demostraciones la condición de práctica social asociada a la validación. No siempre adquieren para ellos el valor de ser una manera de validar un enunciado matemático, ni de obtener convencimiento del mismo. Más bien, en muchas oportunidades, se convierten en una técnica que adquieren con la finalidad de aprobar un examen, o de cumplir con un requisito acorde con su visión del contrato didáctico, en el que la formalización es comprendida como una parte importante y fundamental en el lenguaje matemático (Crespo Crespo, Homilka y Lestón, 2011). Esto se pone en evidencia a través del análisis de respuestas de estudiantes en las que realizan aplicaciones incorrectas de formas de argumentar en relación a la justificación de propiedades matemáticas. Las argumentaciones por inducción completa ofrecen ejemplos claros en los que puede observarse que se tornan en técnicas vacías de significado.

Analizaremos algunas situaciones de aula que permiten comprender mejor cuáles son algunos de los errores que cometen los estudiantes y cómo en algunas oportunidades si bien manifiestan cierto manejo de la inducción completa como estrategia de demostración, a partir de su aplicación incorrecta, se trasluce la falta de comprensión de su esencia.

Caso 1. Errores algebraicos

En evaluaciones de estudiantes de Primer año de la carrera de Profesorado de Matemática en la materia Álgebra I, (Lestón, 2015) reporta errores de los alumnos consistentes la aplicación de la asociatividad de una fracción negativa y otra positiva conservando el signo negativo como antecesor de la fracción resultante de la suma es uno de los errores que surgen, o en considerar como equivalentes fracciones que no lo son. Estos errores de carácter algebraico cometidos durante el paso inductivo no son detectados por los estudiantes, ya que por saber que están demostrando la propiedad para el sucesor de un elemento de la hipótesis inductiva son a veces utilizados para “forzar” el resultado en un examen.

Caso 2. La importancia del caso base

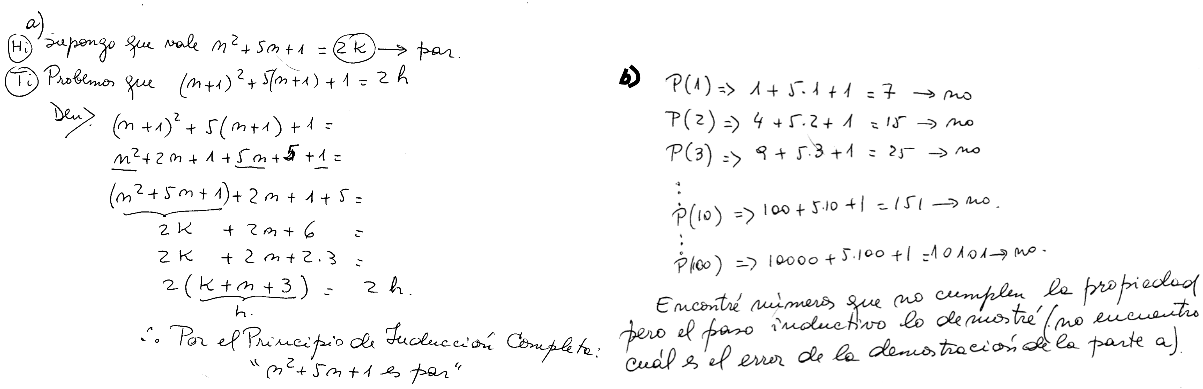
La demostración del caso base en una demostración por inducción completa, suele ser sencilla y en muchas oportunidades, trivial. Los estudiantes, se concentran normalmente en la realización del paso inductivo, ya que es el que les puede traer mayores dificultades y por lo tanto a veces descuidan el caso base y su significado e importancia.

En una evaluación de estudiantes de segundo año de la carrera de ingeniería informática de la materia Matemática Discreta, en la que se aborda el tema de inducción completa, se presentó el siguiente enunciado:

> *Considere la proposición p(n): "n2 + 5n + 1 es par"*
>
> *a) Demuestre que si p(n) es Verdadera, entonces p(n+1) es Verdadera para todo n perteneciente a N y extraiga conclusiones*
>
> *b) ¿Para qué valores de n es p(n) efectivamente verdadera? ¿Qué puede concluir?*

La idea del problema era determinar si los estudiantes comprendían que la verificación del paso no garantiza la veracidad de una proposición e incluso mostrar que aún si el paso inductivo puede demostrarse, la propiedad puede no ser válida para ningún caso.

Uno de los estudiantes presentó la siguiente resolución del problema


a)
Hi) Supongo que vale $n^2+5n+1 = 2k \rightarrow$ par.
Ti) Probemos que $(n+1)^2+5(n+1)+1 = 2h$
Dem) $(n+1)^2+5(n+1)+1 =$
$n^2+2n+1+5n+5+1 =$
$\underbrace{(n^2+5n+1)}+2n+1+5 =$
$2K + 2n+6 =$
$2K + 2n+2.3 =$
$2(\underbrace{K+n+3}_{h}) = 2h.$
∴ Por el Principio de Inducción Completa: "n^2+5n+1 es par"

b) $P(1) \Rightarrow 1+5.1+1 = 7 \rightarrow$ no
$P(2) \Rightarrow 4+5.2+1 = 15 \rightarrow$ no
$P(3) \Rightarrow 9+5.3+1 = 25 \rightarrow$ no
⋮
$P(10) \Rightarrow 100+5.10+1 = 151 \rightarrow$ no.
⋮
$P(100) \Rightarrow 10000+5.100+1 = 10101 \rightarrow$ no.
Encontré números que no cumplen la propiedad pero el paso inductivo lo demostré (no encuentro cuál es el error de la demostración de la parte a).

En realidad, el estudiante tras responder a la consigna del problema que le pedía que demostrara que si p(n) es Verdadera, entonces p(n+1) es Verdadera para todo n perteneciente a N, afirma como conclusión que por la aplicación del Principio de inducción completa, la propiedad es válida para todos los naturales. No detecta que no ha probado el caso base y por lo tanto no puede afirmar la aplicabilidad de este principio.

En estas respuestas, puede observarse que el estudiante no tiene dificultades en la demostración del paso inductivo y a partir de él, afirma que la propiedad es verdadera. Sin embargo, al comenzar sus intentos de verificación de la propiedad para distintos casos, ve que no se cumple, saltea números y busca para otros números. Afirma en ese momento que encontró números para los que no se verifica la propiedad. El estudiante, sin embargo, no es capaz de identificar que el problema es que no ha verificado el caso base y que por lo tanto la demostración del paso inductivo no garantiza el cumplimiento de la propiedad para todos los números naturales, e incluso en este caso no se verifica para ningún número natural la propiedad. No se está aplicando correctamente la estrategia de demostración por inducción completa, el caso base es fundamental para garantizar el cumplimiento de la propiedad en un conjunto bien ordenado, sino que se la ha asumido como una técnica vacía de significado, cuyo mayor valor es el cálculo algebraico correspondiente al paso inductivo.

Caso 3. No para todas las propiedades que involucran a los números naturales es aplicable la inducción completa

Otra situación que puede darse en las aulas de matemática es que los estudiantes apliquen la inducción completa siempre que encuentren una propiedad que menciona a los números naturales, sin analizar si es aplicable o no.

A continuación se describe un episodio que sucedió en una clase de la asignatura Álgebra III de la carrera de Profesorado de Matemática. En esta asignatura se abordan las temáticas que corresponden al tratamiento formal de los conjuntos infinitos a partir de la teoría desarrollada por George Cantor. Esta materia corresponde en el diseño curricular al tercer año de estudios. La inducción completa ha sido abordada en Álgebra I, por lo que los alumnos tienen un manejo bueno de la misma y es esperable que tengan comprendida su significación y las implicaciones de su aplicación. El momento de desarrollo de la clase corresponde al abordaje de las propiedades de los conjuntos infinitos, en particular numerables y los resultados de las operaciones con ellos. La propiedad que se estaba demostrando durante la clase era: *La unión de una familia numerable de conjuntos numerables no vacíos, disjuntos dos a dos es un conjunto numerable*. La idea de la demostración que se estaba aplicando consiste en una aplicación del método diagonal de Cantor. No entraremos en detalles acerca de la demostración correcta que estaba siendo realizada con la guía de la profesora del curso, sino de la que proponen un grupo de alumnos como otra alternativa. Este grupo, una vez finalizada la demostración por parte de la profesora del curso, propuso la realización de otra demostración posible. Pasó uno de los estudiantes al frente y escribió una demostración en la que aplicaba la estrategia de inducción completa, haciendo inducción sobre la cantidad de conjuntos que se están uniendo. En la propuesta del estudiante, el caso base corresponde a la unión de dos conjuntos finitos, luego demostró el paso inductivo partiendo de suponer que la propiedad es válida para una cantidad n de conjuntos y uniendo a ella un conjunto más. La profesora dejó que la demostración estuviera terminada y entonces abrió la discusión al curso en relación a si es correcta o no, y en caso de que fuera incorrecta, cuál es la causa por la que no es aplicable la estrategia de inducción completa para esta propiedad. Todo el curso, compuesto por 40 estudiantes, aceptó inicialmente la propuesta de demostración realizada por el estudiante. Ante la afirmación de la profesora de que la demostración era incorrecta y la propuesta de que buscaran el error, los alumnos analizaron cuidadosamente la demostración, cada uno de sus pasos y la manera en la que se la había escrito. Ninguno cuestionó la aplicabilidad del método para la propiedad. La profesora les propuso entonces al grupo la propiedad: *La unión de una familia finita de conjuntos numerables no vacíos, disjuntos dos a dos es un conjunto numerable*. Les dio unos minutos para que realizaran la demostración correspondiente por inducción completa y les pidió que compararan ambas. Observaron que habían reproducido la misma demostración. Entonces les propuso que pensaran qué propiedad habían logrado demostrar y por qué. Ellos estuvieron de acuerdo en que la segunda propiedad estaba correctamente demostrada, y que la diferencia entre ambas consistía en la cantidad de conjuntos considerados: en un caso, finita, en el otro infinita numerable. Sólo entonces les fue posible darse cuenta de que el error cometido en la primera demostración consistía en la no aplicabilidad de la inducción completa por tratarse de una cantidad infinita de conjuntos.

Este ejemplo muestra cómo la inducción completa había sido asumida por los alumnos como una técnica, pero que se la había vaciado de significación, no reconociéndose lo que en realidad se está demostrando y para qué casos es aplicable.

Caso 4. Inducción completa sin cuentas para hacer…

Este caso corresponde a un diálogo suscitado en 4° año del Profesorado de Matemática, en la primera clase de Teoría de Grafos, en un curso de 7 alumnos.

En la práctica se plantea el siguiente problema:

En un grafo no orientado, la suma de los grados de los vértices coincide con el doble del cardinal del conjunto de aristas. Probar por inducción completa ¿sobre qué conjunto realizas inducción?

Los alumnos estaban trabajando en un solo grupo, por lo que se vio favorecido el intercambio de ideas, mientras eran observados por la docente del curso, que dejó que el grupo discutiera y planteara dudas sin su intervención.

Una de las estudiantes recordó en seguida que debían probar la propiedad para h y h+1, sin darse cuenta de que se trata de una implicación y a partir de ese momento, el diálogo que surgió fue el siguiente:

A1: Tomamos para 1. Luego para h y h+1

A2: ¿Y ahora?

A3: Sí, eso de h y h+1 me acuerdo, pero: ¿qué formula utilizamos?

A4: Si pienso en que h es el número de aristas sería un dibujito así: muchos puntitos. V es fijo

A5: ¿Por qué aristas y no vértices?

A3: Si no hay vértices, no hay nada… no se me ocurre cómo sería un grafo así

A4: Supuestamente ahora lo que queremos decir es para A=h (una cantidad cualquiera), entonces es 2h.

A5: Y ahora ponés la tesis inductiva: A=h+1

A5: Y entonces hay que llegar a $\sum g(v_i) = 2(h+1)$

A4: Es la tesis inductiva, ¿la escribimos así?

A5: Sí, por ahora sí. Luego la vemos de nuevo por si hay que cambiar

A1: No entiendo dónde está el h=1

A4: Acá sería h=0, sin aristas. El primer número que lo cumple

A1: ¿Y por qué 0 y no 1?

A5: Estamos viendo si funciona el 0. Veamos y luego corregimos si hace falta.

A5: De acá tengo que llegar a esto, ni idea de cómo... Capaz que tengo que escribir la sumatoria con la cantidad de aristas, pero cómo digo que si agrego una arista a un vértice se le agrega una vez a este otro en el grado.

A4: ¿No tendríamos que poner como que no es la misma sumatoria? ¿Pero cómo?

A5: No sé… Igual es sumatoria de grado de los vértices y los vértices son los mismos. Pero agrego una arista. No sé cómo indicarlo tampoco.

(Mientras tanto, A6 y A7 se mantienen al margen de la conversación. A6 busca en internet qué es inducción. A2, A6 y A7 tratan de entenderla)

A2: Pero acá no tenemos para hacer cuenta, sumar o multiplicar. ¿Y cómo hago inducción?

A5: Entonces g(v) de un vértice aumenta en 1, ¿dónde meter el 1 en la fórmula? En realidad tengo g(v1)=2, era 1.

A4: Hay que variar lo que está adentro de la sumatoria, pero ¿cómo?

A4: V=0 pruebo que se cumple con las aristas. Si V=h entonces V=h+1

A5: La sumatoria la verifico para el primer elemento y luego para h y para el siguiente.

A5: Para mí vértices fijos. Aristas puedo agregar un montón. Pero si V=0 no tengo dibujo.

A4: A=0 ¿Seguro? ¿Puede haber un grafo sin aristas?

A5: V es fijo

A4: ¿Cuál es?

A5: No sé pero lo llamo V. Entonces el cardinal de vértices es V y el cardinal de aristas es A y varía, pero ¿cómo escribo la sumatoria?

A4: Pero si la cantidad de aristas es cero, va a ser como que 0 es 0, porque no tiene grado

A5: Si no hay aristas no hay grado, ya veremos qué le ponemos.

A4: Primero no le ponemos ninguna arista ¿se verifica la propiedad?

A5: Sí, porque 0+0+0 todas 0 es 0. Inicial A=0 entonces g(vi)=0 para toda i

A4: Pero grado depende de las aristas, no es el mismo para todos los vértices. ¿Con qué fórmula lo colocamos?

A5: Ayuda, Profe!!!

Este diálogo muestra que los estudiantes recordaron solo pasos de la inducción completa. No recuerdan su significado. Les cuesta hacer inducción sobre un conjunto concreto. Algunos alumnos no siguen el diálogo que se dio en el grupo. Predomina en los estudiantes el enfoque formal puesto de manifiesto en la búsqueda de una expresión algebraica o de una manera de escribir formalmente las ideas que surgen, confundiendo lo formal y lo riguroso en sus afirmaciones. Por momentos en el diálogo aparecen dos conversaciones en paralelo, en las que se centran en recordar en qué consiste la inducción completa, y en la búsqueda de la manera de realizar un cálculo algebraico, que creen es la esencia de la inducción completa. Una de las dificultades que surgen es la necesidad de hacer inducción sobre una cantidad que no es abstracta, sino que representa la cantidad de aristas de un grafo.

Dando significado a la inducción completa en distintas ramas de la matemática

En distintas temas de diversas ramas de la matemática es posible encontrar propiedades que por ser válidas para valores finitos, en su demostración puede acudirse a la inducción completa.

Una de ellas es, como vimos en el caso anterior, la Teoría de grafos. Son numerosas las propiedades en cuya demostración se hace uso de esta estrategia, haciendo inducción sobre la cantidad de aristas o de vértices del grafo, según corresponda.

También en Teoría de conjuntos es posible hacer generalizaciones a una cantidad finita de conjuntos de propiedades que normalmente se demuestran para dos conjuntos, como por ejemplo las Leyes de De Morgan.

En Análisis matemático, la demostración de la manera de calcular la derivada de una función representada por un monomio en una variable se realiza por inducción completa sobre el exponente de esa variable.

En Teoría de Probabilidades, la demostración de que la esperanza de suma de n variables aleatorias es la suma de las esperanzas de las n variables también se realiza por inducción completa.

Estos son algunos ejemplos de propiedades que permiten aplicar inducción completa y comprender el significado de esta estrategia de demostración resignificándola en el aula.

COMENTARIOS FINALES

Los ejemplos presentados en este trabajo muestran cómo en el aula las demostraciones han perdido en muchas oportunidades su función de validación del conocimiento matemático y se han transformado en técnicas que los alumnos reproducen sin analizar lo que están haciendo ni cuál es el alcance de las mismas.

En el intento de cumplir con la visión formal del lenguaje matemático que surge en las representaciones que poseen los estudiantes como una necesidad, las justificaciones que se dan en las aulas, no siempre logran su corrección. Los alumnos intentan realizar demostraciones cuando se les solicitan, pero se concentran muchas veces en aspectos formales de las mismas y no en su significado. Para ellos, la formalización es comprendida como parte de la normativa que impone el contrato didáctico; la aplicación de estrategias de demostración formales. El caso de la inducción completa puede reflejar esta realidad, como se observa en los ejemplos presentados en los que se ha tornado en una técnica mecánica, pero alejada de su significación.

Resulta, por lo tanto fundamental la reflexión en el aula acerca del significado de estas estrategias de demostración, para que los estudiantes comprendan lo que en realidad están haciendo cuando lo aplican y en qué casos es posible aplicarlas. Las demostraciones por inducción completa deben ser analizadas para comprender su significado y que no se restrinjan a una técnica algebraica. Se las logra resignificar si son presentadas en distintos contextos matemáticos y se hace hincapié en ellas de qué significan y por qué y a qué casos son aplicables

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Cajori, F. (1918). Origin of the name ‘mathematical induction’. *The American Mathematical Monthly* 25 (5), 197-201

Castañeda, A. (2009). Aspectos que fundamentan el análisis del discurso matemático escolar. P. Lestón (Ed.), *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa* 22, 1379-1387. México: Comité Latinoamericano de Matemática Educativa.

Crespo Crespo, C. (2007). *Las argumentaciones matemáticas desde la visión de la socioepistemología.* Tesis de Doctorado no publicada. Centro de Investigaciones en Ciencia Aplicada y Tecnología Avanzada, México.

Crespo Crespo, C., Homilka, L. y Lestón, P. (2011). *Acerca del lenguaje utilizado en el discurso matemático escolar.* P. Lestón (Ed.), Acta Latinoamericana de Matemática Educativa 24, 729-738. México: Comité Latinoamericano de Matemática Educativa.

De Villiers, M. (1993). El papel y la función de la demostración en matemáticas. *Épsilon* 26, 15-30.