

LAS CONSTRUCCIONES GEOMÉTRICAS EN TORNO AL LUGAR GEOMÉTRICO DE LA PARÁBOLA INFLUENCIADO POR EL GEOGEBRA

José Carlos León Ríos

Universidad de Lima - Instituto de Investigación sobre Enseñanza de las Matemáticas (Perú)

jleonr@ulima.edu.pe

Palabras clave: enfoque instrumental, instrumentación, instrumentalización, geogebra.

Key words: Instrumental approach, instrumentation, instrumentalization, Geogebra.

RESUMEN: El escrito presenta un extracto de algunas de las actividades que estamos elaborando en un trabajo de investigación, acerca de la incidencia de las construcciones geométricas en la génesis instrumental de la parábola. Nuestro trabajo está dirigido a docentes de matemática de una universidad privada de Lima. Los objetivos son analizar cómo la condición geométrica de dicha curva se transforma en instrumento cuando los sujetos dirigen sus acciones a la resolución de los problemas con actividades geométricas y cómo dichas acciones contribuyen al proceso de aprendizaje de algunos contenidos geométricos haciendo uso del Geogebra que movilizan como herramienta mediadora. Las actividades se fundamentan teniendo en cuenta aspectos del Enfoque Instrumental y la Teoría Antropológica de lo Didáctico, para analizar los esquemas y las técnicas que los profesores construyeron o movilizaron durante las tareas propuestas.

ABSTRACT: Our research is one of the many activities from our preliminary research about the impact of geometric constructions in the instrumental genesis of parabola. Our research is performed by teachers from a private university of Lima, which teach mathematics. Thus, the goals are to analyze the way the geometric condition becomes an instrument when the teachers addressed their actions to solve geometric problems and how the insertion of these instrument contribute in the geometric content learning process using the Geogebra as mediator. We use aspects the Instrumental Approach and Anthropological Theory of Didactics in order to analyze the schemes and techniques that teachers constructed or moved while they worked with the tasks proposed

■ INTRODUCCIÓN

En el taller se planteó una secuencia de aprendizaje, basada en la condición geométrica de la parábola, que movilizada como instrumento, opera transformaciones y permite resolver tareas con construcciones geométricas, logrando de esta forma, que el propio sujeto dote al instrumento de otras propiedades extrínsecas, de acuerdo al contenido de nuestras actividades. Además, la condición geométrica de la parábola, favorece en los sujetos la reutilización y el aprendizaje de los contenidos geométricos, teniendo en cuenta las técnicas y el discurso tecnológico – teórico, que validan el desarrollo de sus actividades.

Destacamos que las situaciones mostradas, forman parte de una investigación preliminar que estamos elaborando actualmente, la cual está dirigida a un grupo de profesores del curso de geometría analítica, en el área de matemática. Señalamos la importancia que tuvieron las investigaciones de Jesús (2012) y Fernández (2011), los cuales movilizaron un objeto matemático haciendo uso de construcciones geométricas, analizando el comportamiento de dichos objetos como instrumentos en la elaboración de las actividades geométricas. En esta propuesta, hicimos uso de algunos aspectos de la Ingeniería Didáctica de Artigue (1995), por su carácter experimental en aula, luego de elaborar un análisis *a priori*, basado en un conjunto de hipótesis, cuya descripción y predicción, permitió controlar el comportamiento del estudiante y sus significados que le atribuyeron al objeto matemático, teniendo en cuenta la complejidad de la clase. De igual forma, para el análisis de las acciones se empleó el Enfoque Instrumental de Rabardel (1995), específicamente para analizar las acciones de los sujetos cuando movilizaron el instrumento condición geométrica de la elipse mientras interactuaron con las construcciones geométricas de las tareas propuestas. Dichas acciones nos permitieron identificar los posibles esquemas de utilización que los sujetos construyeron y movilizaron. Del mismo modo, para el análisis de las técnicas y del discurso tecnológico – teórico, tomamos algunos aspectos de la Teoría Antropológica de lo Didáctico (TAD) de Chevallard (1999) en relación a la solución de las tareas y a la fundamentación de dichas técnicas.

De ese modo, la confluencia entre el Enfoque Instrumental y la TAD, de acuerdo a Pérez (2014), permitieron reconocer en ambos marcos teóricos, el valor cognitivo del instrumento y pragmático de las técnicas. El instrumento referido al instrumento psicológico, a los esquemas que moviliza el sujeto cuando lo moviliza como medio para conseguir una meta, mientras que la segunda, cuando posibilitan las acciones del sujeto en el desarrollo de una tarea.

Es necesario indicar, que el Enfoque Instrumental, distingue como esquemas de uso (EU), un conjunto de acciones que como módulos especializados, están orientados hacia tareas específicas o tareas segundas, pero que se pueden coordinar unos a otros y que se articulan para formar un nuevo esquema, llamado esquema de acción instrumentada (EAI), dirigida hacia la tarea principal de la actividad. En nuestras actividades, por ejemplo, la condición geométrica de la parábola, visto como EAI, está construida sobre la base de otros EU. De acuerdo al contenido de nuestras actividades, propiciamos entonces, la movilización de otros esquemas de uso como el de la circunferencia, mediatriz de un segmento, distancias, rectas, segmentos, polígonos, los cuales podrán emerger de manera propia o de una apropiación de esquemas sociales exteriores al sujeto, es decir, en un contexto de actividades compartidas, llamado también esquema de actividad colectiva instrumentada (EACI), el cual es incorporado a los esquemas que los sujetos movilizan. De este modo y de acuerdo a la noción de praxeología, nuestra organización didáctica, gira en

torno a un sistema de tareas que, para ser resueltas, requieren de una técnica y de un bloque técnico-tecnológico que los alumnos describirán con elementos justificativos, favoreciendo la inserción de las construcciones geométricas. Todas estas acciones están orientadas, de acuerdo al contenido de las actividades, al proceso de instrumentación de la condición geométrica de la parábola.

Las actividades del taller serán realizadas en dos sesiones de una hora y media, agrupadas en cuatro actividades. Las tareas propuestas en cada actividad están distribuidas como siguen: en las dos primeras actividades los alumnos construirán, en base a sus esquemas geométricos previos, el entorno tecnológico-teórico de la condición geométrica de la parábola, la cual indica que *un punto de la parábola equidista de otro punto exterior fijo llamado foco y de una recta fija llamada directriz*. En las actividades tres y cuatro, los alumnos resolverán tareas de construcción geométrica en torno a la condición geométrica de la parábola. Se ha buscado que las secuencias de aprendizaje se desarrollen haciendo uso del deslizador del Geogebra, el cual permitirá presentar a los objetos geométricos en forma de animaciones. Debido a ello, las representaciones dejarán de ser estáticas y algunas propiedades estructurales geométricas podrán ser confrontadas, como la propiedad de la mediatriz, la cual es caracterizada de dos maneras distintas, por un lado que *la mediatriz de un segmento es una recta perpendicular al segmento y que pasa por el punto medio de dicho segmento*, y por otro, que *un punto de la mediatriz de un segmento, equidista de los extremos de dicho segmento*. Como material adicional, compartiremos una actividad relacionada a la propiedad de reflexión de la parábola.

Por otro lado, buscamos fomentar el uso de los ambientes en geometría dinámica, como lo afirma León (2014), donde indicamos que en la actualidad el uso y la difusión de nuevas tecnologías adaptables al entorno humano, nos brindan la posibilidad de trabajar en estos ambientes dinámicos, los cuales ofrecen un nuevo espacio de aprendizaje educativo. Sobre este entorno de trabajo los alumnos pueden manipular, explorar, experimentar con elementos geométricos gracias a la plataforma interactiva que estos programas ofrecen.

■ ANÁLISIS DE LA EXPERIENCIA DESARROLLADA

La experiencia que presentamos en este artículo, trata acerca de la condición geométrica de la elipse cuando es movilizada como instrumento, para operar transformaciones sobre las tareas propuestas relativas a las construcciones geométricas. La condición geométrica de la parábola, incorpora como constituyentes, esquemas de uso relativos a las tareas segundas que pueden situarse en el orden de esquemas elementales, tales como la construcción y definición de la mediatriz, triángulo isósceles, circunferencia, etc. pero que coordinadas unas a otras se constituyen como un esquema de acción instrumentada. Es importante señalar que la experiencia que mostramos, en este artículo, corresponde a dos de las ocho actividades de nuestra investigación preliminar.

En ese sentido, destacamos que los alumnos movilizarán algunos esquemas de uso como la mediatriz, la circunferencia, el triángulo isósceles, empleando técnicas y discursos apropiados para construir el entorno tecnológico – teórico respecto a la condición geométrica de la parábola. Estos esquemas se coordinan unos a otros y se articulan para formar el esquema de acción

instrumentada (EAI) de la Parábola, lo que contribuirá también a que la condición geométrica sea mediador cuando se movilice sobre otras construcciones geométricas

El conjunto de respuestas esperadas por los alumnos, fueron previstas en el análisis *a priori*, de la Ingeniería Didáctica de Artigue (1995). Esta descripción nos permitió controlar el comportamiento del sujeto y los significados que le atribuyeron al objeto matemático.

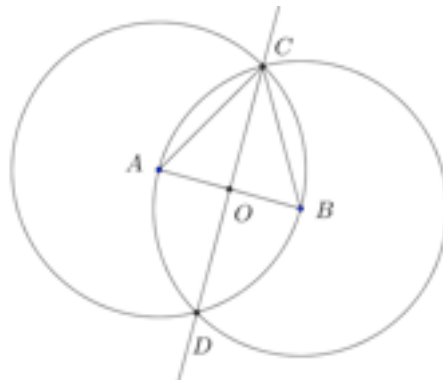
■ ACTIVIDAD 1

Tarea 1.1

Dada un segmento AB , haciendo uso de construcciones geométricas, construya la recta perpendicular que pase por el punto medio del segmento AB . Luego describa y justifique el proceso de construcción

En nuestro análisis *a priori* los docentes construyen la recta perpendicular al segmento \overline{AB} que pasa por su punto medio trazando dos circunferencias de igual radio y de centros A y B , luego señalan que la recta que pasa por las intersecciones de ambas circunferencias es la recta buscada, de acuerdo a la representación gráfica de la figura 1.

Figura 1. Construcción mediatriz de un segmento AB



De acuerdo a la TAD de Chevallard, existe una justificación racional sobre la técnica ofrecida. Al respecto describimos y justificamos los trazos que se muestran en la figura 1. Se trazan circunferencias de igual radio, determinándose que $\overline{AC} = \overline{BC} = \overline{AD} = \overline{BD}$. De lo anterior, se concluye que por los puntos C y D pasa una recta mediatriz del segmento \overline{AB} , dado que dichos puntos equidistan respectivamente, de los extremos del segmento \overline{AB} . Los alumnos hacen uso de la propiedad de la mediatriz que indica que *un punto de la mediatriz de un segmento, equidista de los extremos de dicho segmento*. Luego, dado que la mediatriz es *perpendicular al segmento \overline{AB} por su punto medio*, afirmamos que $\overline{AO} = \overline{OB}$.

Probablemente los sujetos movilicen otras técnicas como las propiedades del triángulo isósceles o congruencia de triángulos, esta última, creemos como fundamento teórico que justifica la técnica de la recta mediatriz.

De acuerdo al Enfoque Instrumental de Rabardel, creemos que los docentes movilizarán como EAI las propiedades de la mediatriz, triángulo isósceles o congruencia de triángulos.

Destacamos que durante la socialización de los grupos, los EACI también podrán emerger. De acuerdo al enfoque instrumental, son los que corresponden a la movilización simultánea o en conjunto de una serie de actividades compartidas.

Tarea 1.2

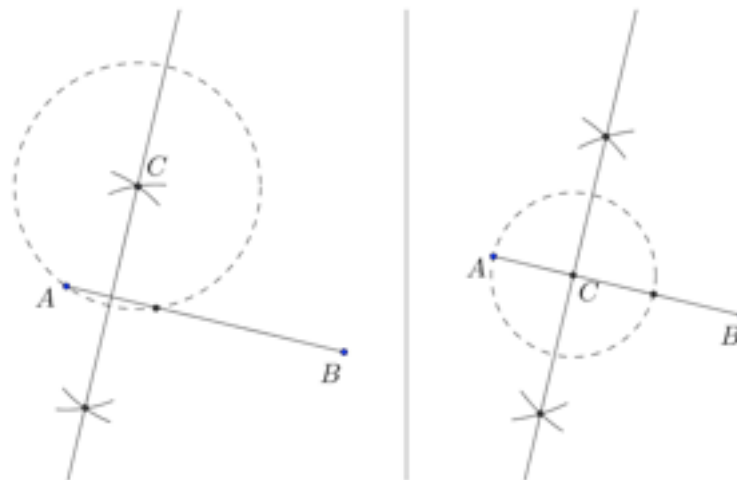
Dada un segmento AB , haciendo uso de construcciones geométricas, construya:

- La recta mediatriz del segmento AB
- La recta perpendicular que pase por un punto C exterior al segmento AB .
- La recta perpendicular que pase por un punto C contenido en el segmento AB .

Luego, describa y justifique el proceso de construcción para cada caso.

Respecto al ítem a), acreditamos que la organización didáctica de la tarea (*construir la mediatriz, describir y justificar el proceso...*), permite la emergencia de las técnicas y tecnologías para dicha construcción, la cual corresponde a la mediatriz de un segmento, que describimos en la actividad anterior. Como observamos en la figura 2, desde el punto C , se traza una circunferencia de radio CA que corta al segmento AB en un punto dado. Luego se procede a construir la mediatriz del segmento de extremos el punto A y el punto dado

Figura 2. Mediatriz de un segmento que pasa por C



Podemos afirmar que los profesores continuarán instrumentándose con la mediatriz de un segmento dado, pues mantendrán organizadas sus acciones relativas al trazo de dicha recta. Como se ve en la figura 2, se puede garantizar que dado los extremos de un segmento, el sujeto podrá determinar la mediatriz de dicho segmento. Afirmamos que la movilización de la mediatriz como EAI es uno de los procesos de instrumentación de la génesis instrumental.

Tarea 1.3

Dado tres puntos no colineales, y una recta l que no contiene a ninguno de los puntos dados, construya una circunferencia que pase por:

- Dos de los puntos dados.

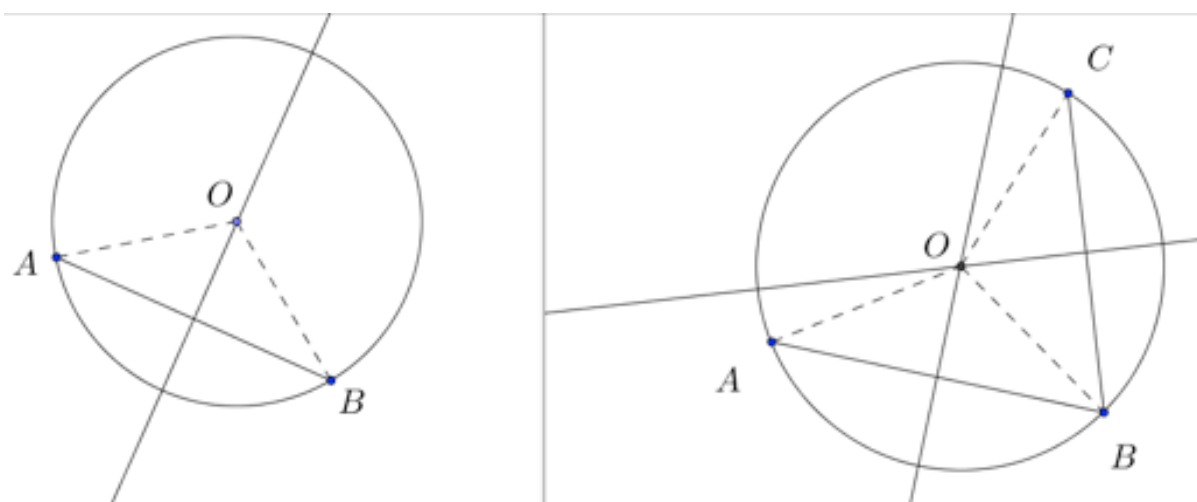
- b. Tres de los puntos dados.
c. Uno de los puntos dados y sea tangente a la recta l en el punto $P \in l$.

Describe y justifique el proceso de construcción que movilizó.

En nuestro análisis *a priori* los docentes construyen las circunferencias que pasan por dos y tres de los puntos dados. En el primer caso, el procedimiento mostrado en la figura 3, señala que dada la mediatriz del segmento AB , se toma un punto de dicha mediatriz, el cual corresponde al centro de la circunferencia de radio \overline{OA} .

La justificación de la técnica se basa en la propiedad que indica que *un punto de la mediatriz de un segmento, equidista de los extremos de dicho segmento*.

Figura 3. Circunferencia usando la mediatriz



En el siguiente caso, se trazan las mediatrices respectivas a los segmentos AB y CB . La intersección de ambas rectas es el punto O , el cual corresponde al centro de la circunferencia de radio $\overline{OA} = \overline{OB} = \overline{OC}$. La propiedad de la mediatriz explica la técnica.

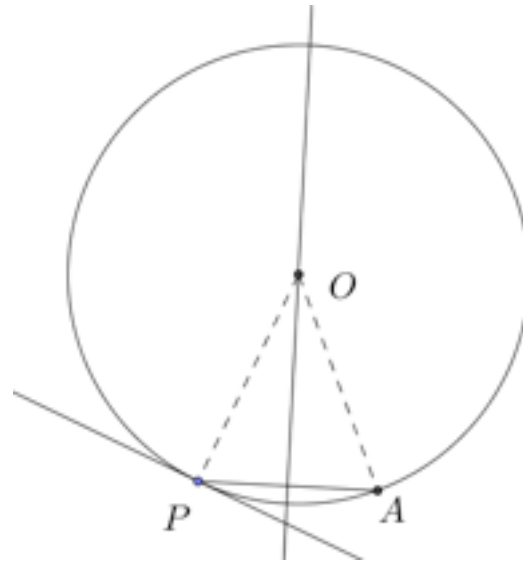
De acuerdo al análisis *a priori*, hay evidencias que los profesores están instrumentados con relación a la mediatriz pues logran movilizar las propiedades de dicha recta en sus trazos. También hay evidencia que los EU que componen la mediatriz como punto medio, recta perpendicular y segmento, forman módulos específicos que se coordinan unos a otros.

En el siguiente ítem, de acuerdo al análisis *a priori* de la ingeniería didáctica, creemos que los alumnos movilizarán el instrumento mediatriz junto a otros objetos matemáticos como EU. Esto facilitará la movilización de los EU que corresponden a la condición geométrica de la parábola en la actividad 2. De hecho, una vez construida la condición geométrica a partir de sus repertorios preexistentes, en el trabajo de investigación que actualmente nos encontramos en proceso de elaboración, construimos la condición geométrica de la parábola y la aplicamos como instrumento en distintos problemas de aplicación geométrica.

En la figura 4, se observa el trazo de la mediatriz del segmento \overline{AP} . Tomando un punto de la mediatriz, se pueden trazar tantas circunferencias como queramos que pasen por los puntos A y P .

Como el radio de una circunferencia es perpendicular a la tangente de la curva, trazamos una recta perpendicular a la tangente que pase por el punto P . El centro de la circunferencia se obtiene al intersecar dicha recta con la mediatriz.

Figura 4. Recta tangente a una circunferencia



En este ítem, la mediatriz evoluciona de EAI a EU ya que junto a otros EU como la propiedad de una recta tangente a una circunferencia perpendicular a su radio, la circunferencia como lugar geométrico de los puntos de un plano que equidistan de otro punto fijo y coplanario llamado centro en una cantidad constante, coordinan unos a otros, respondiendo cada objeto a metas identificables, actividades específicas relacionadas con el artefacto.

■ ACTIVIDAD 2

Tarea 2.1

Dada una recta l , un punto F no contenido en dicha recta y el punto Q que se desplaza a lo largo de la recta l

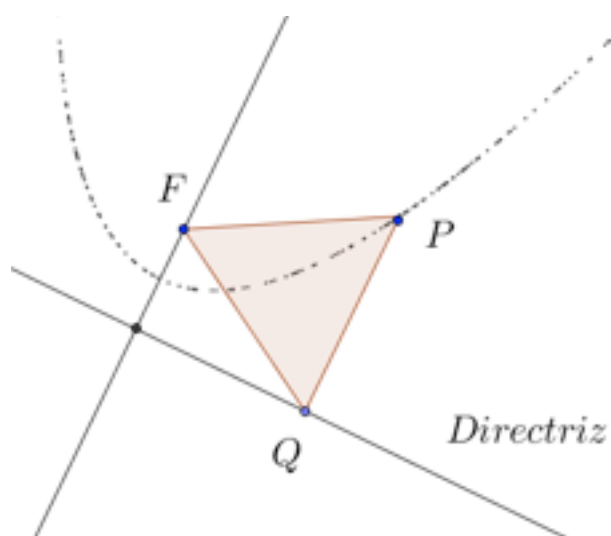
- Redacte la condición geométrica de una parábola con foco en F y directriz la recta l .
- Determine un punto P que cumpla con la condición geométrica de la parábola. Luego trace el triángulo FPQ y describa la trayectoria que deja el rastro del vértice P , cuando desplaza Q a lo largo de l . Justifique su construcción.

La tarea propuesta, estuvo bien identificada pues es clara cuando señala que debemos redactar la condición geométrica de una parábola y determinar un punto que cumpla con dicha condición, En el análisis *a priori*, conjeturamos que debido a que el objetivo de la tarea es claro, los profesores no tendrán ningún inconveniente en redactar *un punto P perteneciente a una parábola equidista de otro punto fijo F llamado Foco y de una recta fija l llamada directriz.*

Acreditamos que la técnica y el entorno tecnológico – teórico a usar ya ha sido construida en la actividad anterior, y moviliza EU en relación a dicha técnica, como las propiedades de la mediatriz de un segmento, la circunferencia como lugar geométrico de los puntos de un plano que equidistan de otro punto fijo y coplanario llamado centro en una cantidad constante, segmento que representa la distancia de un punto a una recta.

En la figura 5, se observa que el sujeto traza la mediatriz del segmento FQ , y en la intersección de dicha mediatriz con la recta perpendicular a Q , determinará el punto P que equidista al foco y a la recta

Figura 5. Construcción de una parábola



Las acciones del sujeto, acreditan que está instrumentado con la construcción de un punto que pertenece a una parábola, pues con base a la definición *un punto P perteneciente a una parábola equidista de otro punto fijo F llamado Foco y de una recta fija l llamada directriz*. Creemos que discurso tecnológico – teórico favorece la coordinación de los EU pues los sujetos desarrollan de manera explícita su justificación matemática.

■ CONSIDERACIONES FINALES

Las acciones mostradas por los estudiantes permitieron identificar posibles esquemas de utilización que construyeron y movilizaron, de manera progresiva, mientras interactuaban con la condición geométrica de la parábola. En ese sentido, de acuerdo al enfoque instrumental, en las actividades se evidenció la triada de elementos: sujeto, instrumento y objeto.

Las tareas fueron pertinentes, en el sentido que permitieron justificar las técnicas que los sujetos empleaban. En ese sentido, concordamos con Jesus (2012) cuando indica que la teoría Antropológica de lo Didáctico y el Enfoque instrumental contribuyen al aprendizaje de los contenidos matemáticos.

Las construcciones geométricas de la condición geométrica de la parábola, permitieron ampliar o desarrollar sus habilidades en torno a otros elementos geométricos

Se hizo uso de la geometría dinámica (Geogebra) como herramienta tecnológica en la enseñanza y aprendizaje de la elipse, la cual permitió la interacción de la representación de este objeto matemático con los estudiantes

■ REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- Artigue, M. (1995). Ingeniería Didáctica. En P.Gómez (Ed). *Ingeniería didáctica en Educación Matemática. Un esquema para la investigación y la innovación en la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas* (pp. 33-59). México: Grupo Editorial Iberoamérica.
- Chevallard, Y. (1999). *La transposición didáctica: Del saber sabio al saber enseñado*. [Traducido por Cluida Gilman]. Argentina, Buenos Aires. Grupo Editorial AIQUE.
- Fernández, E. (2011). *Situaciones para la enseñanza de las cónicas como lugar geométrico desde lo puntual y lo global. Integrando Cabri Géometre II Plus*. Tesis de Maestría en Educación Matemática, Instituto de educación y pedagogía, Universidad del Valle. Santiago de Cali, Colombia.
- Jesus, G. (2012). *As Construções Geométricas e a Gênese Instrumental: o caso da mediatriz*. Doutorado em Educação Matemática. Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, Brasil.
- León, José (2014). *Estudio de los procesos de instrumentalización de la elipse mediado por el Geogebra en alumnos de arquitectura y administración de proyectos*. Tesis de Maestría en Educación Matemática. Pontificia Universidad Católica del Perú. Lima, Perú.
- Pérez, C. (2014). *Enfoques teóricos en investigación para la integración de la tecnología digital en la educación matemática* (pp. 38, 97-140). Pontificia Universidad Católica de Valparaíso.
- Rabardel, P. (2011). *Los hombres y las tecnologías: Visión cognitiva de los instrumentos contemporáneos* [Traducido por M. Acosta]. Colombia, Universidad Nacional de Santander. (Trabajo original publicado en 1995)