UNIVERSIDAD DEL VALLE
INSTITUTO DE EDUCACIÓN Y PEDAGOGÍA
ÁREA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA

Acta de Evaluación de Trabajo de Grado

Tenga en cuenta: **1.** *Marque con una* **X** *la opción escogida.*
2. *diligencie el formato con una letra legible.*

Título del Trabajo:	Resolución de problemas aritméticos mediante la aplicación de estructuras multiplicativas dirigido a tercer grado de Educación Básica						
Se trata de:	*Proyecto*			*Informe Final*	X		
Director:	Octavio Augusto Pabón						
1er Evaluador:	Maritza Pedreros						
2do Evaluador:	Fernando Angulo						
Fecha y Hora	*Año:*	2011	*Mes:*	Mayo	*Día:*		*Hora:*

Estudiantes

Nombres y Apellidos completos	*Código*	*Programa Académico*
Diana Marcela Aguirre Bermúdez	0343308	3469

Evaluación

Aprobado	✓	*Meritorio*		*Laureado*	
Aprobado con recomendaciones		*No Aprobado*		*Incompleto*	

En el caso de ser **Aprobado con recomendaciones** *(diligenciar la página siguiente), éstas deben presentarse en un plazo de* ______________ *(máximo un mes)* **ante***:*

Director del Trabajo		*1er Evaluador*		*2do Evaluador*	

En el caso que el Informe Final se considere **Incompleto***, se da un plazo de máximo de* ______________ *semestre(s) para realizar una nueva reunión de evaluación el:*

Año:		*Mes:*		*Día:*		*Hora:*	

En el caso que no se pueda emitir una evaluación por falta de conciliación de argumentos entre Director, Evaluadores y Estudiantes; expresar la **razón del desacuerdo** *y las* **alternativas** *de solución que proponen (diligenciar la página siguiente).*

Firmas:

	Maritza Pedreros P	
Director del Trabajo de Grado	*1er Evaluador*	*2do Evaluador*

APLICACIÓN DE LAS ESTRUCTURAS MULTIPLICATIVAS EN LA RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS ARITMÉTICOS DIRIGIDO A TERCER GRADO DE EDUCACIÓN BÁSICA

DIANA MARCELA AGUIRRE BERMÚDEZ
CODIGO: 0343308

UNIVERSIDAD DEL VALLE
INSTITUTO DE EDUCACIÓN Y PEDAGOGÍA
LICENCIATURA EN EDUCACIÓN BÁSICA CON ÉNFASIS EN MATEMÁTICAS

SANTIAGO DE CALI
2011

Aplicación de las Estructuras Multiplicativas en la Resolución de Problemas Aritméticos Dirigido a Tercer Grado de Educación Básica

Diana Marcela Aguirre Bermúdez
Código: 0343308

Director de Trabajo de Grado:
Octavio Augusto Pabón.

Universidad del Valle
Instituto de Educación y Pedagogía
Licenciatura en Educación Básica con Énfasis en Matemáticas
Santiago de Cali
2011.

RESUMEN ANALÍTICO

Título:	Aplicación de estructuras multiplicativas en la resolución de problemas aritméticos dirigido a tercer grado de educación básica.
Investigadores:	Diana Marcela Aguirre Bermúdez
Director trabajo de grado:	Octavio Augusto Pabón Ramírez
Evaluadores:	
Palabras claves:	Resolución de problemas Estructuras multiplicativas Problemas aritméticos en tercer grado de educación básica primaria.
Objetivos:	General Promover el conocimiento en la aplicación de las estructuras multiplicativas para la resolución de problemas aritméticos en tercer grado de educación básica. Específicos Formular una secuencia didáctica que permita que los estudiantes de grado tercero de educación básica logren la resolución de problemas aritméticos a través de la aplicabilidad de las estructuras multiplicativas. • Identificar las dificultades que presentan los estudiantes y las estrategias a los tipos de problemas propuestos en la secuencia didáctica.
Metodología:	La metodología adoptada es de tipo cualitativo de corte descriptivo – interpretativo de los desempeños de los estudiantes participantes en el estudio en relación con el proceso de resolución de problemas con estructura multiplicativa.

Resumen:
El presente proyecto se inscribe en la Línea de Investigación *Didáctica de las Matemáticas* del Programa Licenciatura en Educación Básica, énfasis en Matemática, del Instituto de Educación y Pedagogía (IEP) de la Universidad del Valle. Se plantea como una estrategia dirigida a aportar a la enseñanza de la resolución de problemas y promover la formación de pensamiento matemático de los estudiantes de los primeros niveles de escolaridad en la IE San Alberto Magno de la ciudad de Santiago de Cali.

A mis padres, Tino y María Teresa

A mi hermano Mauricio Alexander

A mi abuela Zoila Rosa

A la memoria de mi tío Juan Carlos

Y en especial a Dios por darme la vida

Permitirme escalar un peldaño más de mi existencia.

AGRADECIMIENTOS

Este documento es el resultado de un trabajo investigativo, que fue posible gracias a la colaboración de varias personas que me apoyaron y acompañaron en este proceso:

Gracias al profesor OCTAVIO A. PABÓN cuya asesoría y orientación merece reconocimiento especial, puesto que, fue de gran valor en el desempeño de este trabajo. Su paciencia y comprensión en sus asesorías me permitieron cumplir con los objetivos deseados.

A la profesora LIGIA TORRES, que con su comprensión y colaboración me ayudó a superar las dificultades presentadas.

Al grupo de estudiantes de grado 3º del Colegio San Alberto Magno, que con su desempeño en las actividades hicieron posible la realización de éste trabajo.

A las directivas del colegio San Alberto Magno, pues me abrieron las puertas de su institución sin condiciones para realizar mis prácticas.

A mi papá, porque, se convirtió en un guía para la elaboración de este trabajo. Sus consejos y recomendaciones contribuyeron a la elaboración de éste documento final.

Agradezco también de manera muy especial, a mis familiares y sobre todo a mi mamá y me hermano, porque han sido personas pacientes que me apoyaron en todo este proceso.

TABLA DE CONTENIDO

TABLA DE FIGURAS

TABLA DE ANEXOS

INTRODUCCIÓN

El presente trabajo de grado se inscribe en la *Línea de Investigación Didáctica de las Matemática*s del Programa Licenciatura en Educación Básica con énfasis en Matemáticas, del Instituto de Educación y Pedagogía (IEP) de la Universidad del Valle.

Se propone estudiar algunos aspectos relativos a la enseñanza y aprendizaje de las estructuras multiplicativas a través de la resolución de problemas en el grado tercero de la educación básica.

Para tal propósito desarrolla una serie de actividades que incluyen entre otras las siguientes: revisión de bibliografía especializada en didáctica de las matemáticas, elaboración de recursos manipulativos, diseño y gestión de una secuencia didáctica, diseño de instrumentos de recolección y sistematización de las producciones de estudiantes y elaboración de informes parciales y de un informe final de la investigación.

Es importante resaltar que el objetivo principal de este documento, desde el ámbito teórico y práctico, es permitir una reflexión más profunda, por parte de los docentes sobre el papel que juega la resolución de problemas dentro del proceso de enseñanza/aprendizaje de las estructuras multiplicativas, ya que tradicionalmente son vistas como aprendizaje mecánico de un algoritmo, la memorización de las tablas de multiplicar y la resolución de problemas de multiplicación y división presentados en los textos escolares, dejando de la lado teorías como la expuesta por Vergnaud, que permite estudiar todas las posibles operaciones aritméticas de multiplicación y división a través de distintas situaciones problema clasificados en subclases dentro de las categorías de las estructuras multiplicativas.

CAPITULO 1. EL PROBLEMA

1.1. Justificación y contextualización del problema

Los nuevos planteamientos filosóficos de las matemáticas, el desarrollo de la educación matemática, los estudios desde el ámbito sicológico del conocimiento y las investigaciones en didáctica de las matemáticas, entre otros factores, han originado cambios profundos en las concepciones acerca de las matemáticas practicadas en la vida escolar.

El conocimiento matemático en la escuela es considerado en la actualidad como una actividad social que debe tener en cuenta los intereses y la afectividad del niño y el joven. Por ser una actividad social tiene como tarea ofrecer respuestas a una multiplicidad de opciones e intereses que continuamente surgen y se entrelazan en la realidad actual. Su principal valor está en que organiza y da sentido a una serie de prácticas, a cuyo dominio hay que dedicar esfuerzo individual y colectivo. La tarea del docente de matemáticas es de gran responsabilidad, puesto que las matemáticas son una herramienta intelectual potente, cuyo dominio proporciona privilegios y ventajas intelectuales.

Teniendo en cuenta esta conceptualización del conocimiento matemático llevado al aula, ha permitido que los lineamientos curriculares expongan esta nueva visión de las matemáticas escolares basadas en:

- *Aceptar que el conocimiento matemático es resultado de una evolución histórica, de un proceso cultural, cuyo estado actual no es, en muchos casos, la culminación definitiva del conocimiento y cuyos aspectos formales constituyen sólo una faceta de este conocimiento.*

- *Valorar la importancia que tienen los procesos constructivos y de interacción social en la enseñanza y en el aprendizaje de las matemáticas.*

- *Considerar que el conocimiento matemático (sus conceptos y estructuras), constituyen una herramienta potente para el desarrollo de habilidades de pensamiento.*
- *Reconocer que existe un núcleo de conocimientos matemáticos básicos que debe dominar todo ciudadano.*
- *Comprender y asumir los fenómenos de transposición didáctica.*
- *Reconocer el impacto de las nuevas tecnologías tanto en los énfasis curriculares como en sus aplicaciones.*
- *Privilegiar como contexto del hacer matemático escolar las situaciones problemáticas.*

Esta última afirmación es de gran importancia, puesto que la actividad matemática por excelencia es la resolución de problemas; sin embargo, es aquí donde confluye la situación problema en tanto que el alumno cuando se enfrenta a la resolución de problemas no tiene la preparación metodológica para ubicarse en contexto y saber que a través del debido manejo y aplicación de los objetos matemáticos aprehendidos puede dar resolución al problema matemático a que se enfrente. Y, es que esta afirmación de privilegiar el contexto del hacer matemático, posibilita el avance del conocimiento matemático dentro del aula en el proceso de enseñanza y aprendizaje, debido a que el saber hacer en matemáticas, tiene mucho que ver con la habilidad de proponer y resolver problemas que lleven al estudiante a usar un lenguaje matemático con cierta fluidez para que éste reconozca conceptos matemáticos en situaciones concretas, encuentre pruebas, critique argumentos y sepa aguantar una determinada dosis de ansiedad, alcanzando el disfrute de lo aprendido.

La habilidad para resolver problemas es una de las habilidades básicas que los estudiantes deben tener a lo largo de sus vidas, y deben usarla frecuentemente cuando dejen la escuela.

El empleo de este enfoque (resolución de problemas a través de las estructuras multiplicativas), constituye una parte fundamental tanto en la educación como en el proceso de aprendizaje de las matemáticas. Las ventajas de éste en el proceso de enseñanza y aprendizaje son verdaderamente significativas por razones como:

- *Los alumnos tienen la posibilidad de pensar las situaciones con detenimiento, hacer pruebas, equivocarse, "perder el tiempo" investigando.*
- *existe una mayor participación y un mayor grado de comprensión por parte del estudiante.*

- *Es un tipo de conocimiento basado en la experiencia (es decir, el conocimiento obtenido mediante la práctica de hacer algo), siendo más duradero y significativo para el alumno que el conocimiento transmitido por el profesor o el libro.*
- *Los alumnos se ven inmersos en la construcción de sus propios sistemas individuales de aprendizaje y de comprensión.*
- *Incide directamente en el aspecto formativo creando así estructuras mentales que trascienden a las propias matemáticas.*
- *La resolución de problemas es el núcleo central de las matemáticas, hacer matemáticas no es otra cosa que resolver problemas.*
- *Hay que tener presente que el único camino que existe para aprender a resolver problemas, es enfrentarse a los problemas.*

Son estas razones las que han llevado a los investigadores en didáctica de las matemáticas ha ampliar el estudio de las estructuras multiplicativas a través de la resolución de problemas.

Respecto a los problemas multiplicativos existen ciertas investigaciones que han tratado de elaborar una clasificación semántica de éstos, indagar su grado de dificultad y determinar las estrategia que los niños usan, cuando se enfrentan a tales problemas (Vergnaug, 1981, 1983, 1988; Schwartz, 1988; Nesher,1988, 1992; Maza-Gómez, 1991b).

Todas estas investigaciones coinciden en afirmar que los niños, al enfrentarse a problemas de multiplicación y división con estructuras semánticas distintas, suelen utilizar métodos personales para resolverlos, los cuales no han sido previamente enseñados en la escuela.

También se señalan una serie de dificultades y obstáculos en relación con las estructuras multiplicativas, ya que estas tradicionalmente se han reducido a aprender de memoria las tablas de multiplicar para así aplicar de forma correcta el algoritmo. Esta situación se vive hoy en día en muchas aulas de clase. Al respecto de el investigador español Juan Godino (2002) señala:

> *"Los estudiantes sí se deben aprender las tablas, pero junto con ello tienen que comprender los distintos sentidos de la multiplicación, tienen que explorar los resultados que obtienen al multiplicar para descubrir las regularidades que allí aparecen y también tienen que captar la posibilidad de modelar la multiplicación según distintos diseños. En esas condiciones, la memorización de los productos es útil."*

En Colombia, la discusión adelantada por investigadores y docentes de matemáticas sobre los enfoques curriculares desarrollados desde la década de 1980, principalmente después de la renovación curricular del área de matemáticas, propuso la formulación y resolución de problemas, como el primer proceso que debe abordarse con los estudiantes. Sin embargo, las pruebas SABER en los años noventa indicaron que aún con rendimientos superiores al 80% en el éxito en los algoritmos de las cuatro operaciones matemáticas, los estudiantes caían a rendimientos inferiores al 10% en el éxito en resolver problemas de historietas que implicaran la utilización de dos o tres operaciones.

Es precisamente esta situación la que ha llevado a éstos investigadores a abordar la investigación sobre la naturaleza, alcances y limitaciones de la resolución de problemas a través de las estructuras multiplicativas, en los primeros niveles de escolaridad. Se considera que es necesario ofrecer a los estudiantes de primer ciclo de educación básica una aproximación a la resolución de problemas que permita la construcción de nociones fundamentales como el número natural, las cuales requieren el tratamiento de una gran variedad de situaciones[1], que pongan en juego una variedad de conceptos[2].

En este orden de ideas, se requiere establecer y caracterizar las condiciones adecuadas que permitan a los estudiantes del primer ciclo de básica primaria experimentar y discurrir por la resolución de problemas con estructura multiplicativa, creando de esta manera las condiciones que les faciliten transferir estos conocimientos a otros contextos.

Teniendo en cuenta lo anterior es necesario formular diseños que incluyan diferentes actividades que ayuden a tornar más significativo para los estudiantes el proceso de aprendizaje y enseñanza de las estructuras multiplicativas apoyándose desde la resolución de problemas.

En general se señala que la multiplicación es un concepto que se encuentra estrechamente relacionado con otros como: división, fracción, razón, proporción, función lineal,...; las estructuras multiplicativas son *todas aquellas*

[1] La situación problemática debe presentar al alumno cierto grado de dificultad. El sujeto que aprende debe percibir que sus conocimientos no bastan para resolver la situación. Deberá buscar una nueva estrategia, acomodarse, modificar sus saberes y elaborar nuevas herramientas para poder hallar la respuesta.

[2] Los investigadores igualmente señalan que los problemas que se propongan a los alumnos deben tener en lo posible, las siguientes características: deben permitirles utilizar sus conocimientos anteriores, ofrecerles una resistencia (conflicto cognitivo) lo suficientemente importante como para que sus conocimientos previos deban ser reestructurados, presentarles un desafío intelectual; es decir, el alumno necesitara establecer una estrategia de resolución

situaciones en las cuales se involucra una multiplicación, o una división, o una combinación de ambas operaciones.

Es esta la visión que se tiene globalmente, cuando se hace referencia a las estructuras multiplicativas. Este trabajo de grado se apoya en las concepciones manejadas por G. Vergnaud a cerca de este objeto matemático dentro de su teoría de los Campos Conceptuales. En palabras de Vergnaud (1994) se definen:

> *"El campo conceptual de las estructuras multiplicativas es a la vez el conjunto de las situaciones cuyo tratamiento implica una o varias multiplicaciones o divisiones, y el conjunto de los conceptos y 'teoremas que permiten analizar esas situaciones-proporción simple y proporción múltiple, función lineal y n-lineal, relación escalar directa e inversa, cociente y producto de dimensiones, combinación lineal y aplicaciones lineales, fracción, razón, número racional, múltiplo, divisor, etc."*

Como plantea Vergnaud, las situaciones[3] dan sentido al concepto; son las situaciones las responsables por el sentido atribuido a éste; el cual se torna significativo a través de una variedad de situaciones. Pero el sentido no está en las situaciones en sí mismas, así como no está en las palabras ni en los símbolos todo está íntimamente relacionado y dependen unas de las otras.

Esta serie de consideraciones, nos permitieron plantear el siguiente interrogante de investigación:

¿Es posible implementar el enfoque de resolución de problemas desde los primeros niveles de escolaridad de la educación básica y de esta manera promover la comprensión de las estructuras multiplicativas?

Cómo hipótesis de investigación asociadas al problema señalado, se plantean las siguientes:

- El proceso de resolución de problemas es un elemento determinante de la *actividad matemática* desde los primeros niveles de escolaridad.
- Es posible promover entre los profesores de la educación básica una visión alternativa del trabajo con los problemas aritméticos que reivindique el valor didáctico del estudio de las estructuras multiplicativas.
- Se desconoce el estudio de las estructuras multiplicativas planteadas por Vergnaud por parte de los maestros.

---

[3] Vergnaud llama situaciones a lo que los investigadores conocen como situaciones problema

- Los estudiantes resuelven problemas de isomorfismo de medida con más facilidad que los de tipo producto de medida, debido a que los maestros no trabajan con este tipo de situaciones en aula.
- Los estudiantes de manera intuitiva resuelven situaciones problema tipo producto de medida.

1.2. Objetivos

1.2.1. General

- Promover el conocimiento en la aplicación de las estructuras multiplicativas para la resolución de problemas aritméticos en tercer grado de educación básica.

1.2.2. Específicos

- Formular una secuencia didáctica que permita que los estudiantes de grado tercero de educación básica logren la resolución de problemas aritméticos a través de la aplicabilidad de las estructuras multiplicativas.

- Identificar las dificultades que presentan los estudiantes y las estrategias a los tipos de problemas propuestos en la secuencia didáctica.

CAPÍTULO 2. REFERENTES TEÓRICO

Introducción

En este trabajo tomamos en consideración algunos referentes teóricos y estrategias metodológicas que nos permitan interpretar y organizar el estudio de las condiciones, restricciones y posibilidades que están involucradas en la resolución de problemas aritméticos con estructura multiplicativa

Se consideran para este estudio varias dimensiones que dan lugar al análisis de tipo histórico - epistemológico, didáctico y curricular en relación con la resolución de problemas con estructura multiplicativa.

2.1. Análisis histórico epistemológico

Un análisis histórico epistemológico de una determinada noción se usa en la Didáctica de la Matemáticas, no para reintroducir el método histórico – cronológico en la enseñanza, sino para realizar análisis de problemas de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas.

Una hipótesis de trabajo, en el análisis histórico epistemológico, es que los problemas identificados pueden guardar paralelismo con los que afrontan los estudiantes cuando están intentando ser competentes en las matemáticas que se proponen en el currículo.

Se acepta que hay diferencias entre el desarrollo histórico de una noción y su aprendizaje escolar, pero se considera que identificar dificultades y concepciones en la historia permite diseñar estrategias didácticas para el diseño y gestión de situaciones que tengan en cuenta todas las condiciones pertinentes para la construcción de los saberes.

De este modo, algunas investigaciones en didáctica de las matemáticas reconocen la importancia del estudio de la historia de los conceptos matemáticos a fin de poder identificar las principales dificultades y obstáculos didácticos de la construcción de un determinado concepto. (Rojano, 1994, p. 46).

En cuanto a la aparición de la multiplicación es importante reconocer que las primeras referencias de las matemáticas avanzadas y organizadas provienen del tercer milenio antes de Cristo en Babilonia y Egipto[4]. Alrededor del año 1650 a. c. los egipcios escribieron lo que hoy se conoce como papiros matemáticos de Moscú, Rhind y Berlín, donde se describen algoritmos para la multiplicación, el uso de fracciones y cálculos sumamente complicados.

El algoritmo utilizado por esta civilización para multiplicar, consistía en realizar duplicaciones sucesivas, por ejemplo, 53 por 11, sumaban 53 a esa misma cantidad para obtener 106, y luego doblaban 106 para obtener 212, y luego sumaban 212 más 212, lo que daba 424, que es 8 veces 53.Vease Figura 2.1.

53 (1 vez 53)

53 + 53 = 106 (2 veces 53)

106 +106 = 212 (4 veces 53)

212 +212 = 424 (8 veces 53)

Para saber el resultado de 11 por 53 hacían lo siguiente:

11 veces 53 = 8 veces 53 + 2 veces 53 + 1 vez 53

11 veces 53 = 424 + 106 +

Figura 2.1

Por su parte, los babilonios con un sistema de numeración posicional a su disposición

4 los egipcios dedicaron la aritmética para usos prácticos, con muchos problemas del tipo: cómo un número de panes se pueden dividir en partes iguales entre un número de personas. Los problemas de los papiros de Moscú y Rhind se expresan en un contexto educativo, y los traductores han encontrado tres definiciones abstractas del número y otras formas más complejas de aritmética. Las tres definiciones abstractas están en la tablilla de madera de Ajmin, el EMLR y el papiro matemático de Rhind. Las formas más complejas de aritmética incluyen el uso de tablas de fracciones, así co
mo restos de la sustracción no aditiva y de la división. Los restos son precedidos por series binarias y seguidos por un factor de posicionamiento en la tablilla de Ajmin, el PMR y otros textos.

realizaron las operaciones aritméticas siguiendo la misma línea de la aritmética moderna. Para aliviar el tedio de largos cálculos, éstos utilizaron ampliamente tablas matemáticas. Entres estas se incluían tablas para calcular inversos, cuadrados, cubos, raíces cuadradas y cúbicas, así como tablas de potencias. La multiplicación[5] y la división se hacían en gran medida cómo se hacen en la actualidad. La división se trataba como la multiplicación del dividendo por el inverso del divisor[6].

Las formulas que empleaban para hacer las operaciones de multiplicación y división se muestran a continuación en la figuras 2.2 y 2.3

$$a.b = \frac{(a+b)^2 - a^2 - b^2}{2}$$

$$a.b = \frac{(a+b)^2 - (a-b)^2}{4}$$

Figura 2.2

$$\frac{a}{b} = a\,\frac{1}{b}$$

Figura 2.3

En la antigua Roma, para multiplicar[7] cualquier número, éstos multiplicaban escribiendo los dos factores uno al lado del otro formando con ellos dos columnas: debajo del factor mayor se escribía la mitad en números enteros (sin tener en cuenta las fracciones), y de esta mitad se tomaba también la mitad, y así sucesivamente hasta llegar al 1; debajo del factor menor, se escribía su doble, y así sucesivamente hasta emparejar con el último número de la otra columna. Luego se tachaba, de la primera columna, todos los números colocados enfrente de los números pares de la otra columna y para finalizar se sumaban los números no tachados. La suma así obtenida coincidía con el resultado de la multiplicación. En la figura 2.4 se puede evidenciar un ejemplo.

---

5 Los babilonios tenían tablas de multiplicar, así como tablas de inversos mediante el cociente (recíprocos), de cuadrados, de cubos, y de raíces cúbicas y cuadradas. Incluso realizaban tablas para los valores de $n^3 + n^2$ con todos los enteros del 1 al 20 y además para 30, 40 y 50. Estos valores ayudaban a resolver rápidamente un tipo de ecuación llamada ecuación cúbica mixta. Tales ecuaciones pueden utilizarse, por ejemplo, para calcular cuánto se tardaría en duplicar una cantidad de dinero colocada a distintos tipos de interés.

6 Para los babilonios la división fue un proceso mucho más difícil, ya que no tenía un algoritmo para la división larga, por lo cual fue necesario una tabla con números recíprocos para poder dividir.

7 Para efectuar las operaciones aritméticas, los griegos, los etruscos y los romanos no utilizaron sus cifras, sino ábacos.... La palabra latina *abacus* deriva del griego *abax* o *abakion*, que significa "bandeja, mesa o tablilla".... Un instrumento empleado en Roma fue el ábaco de cera, una auténtica "calculadora" portátil que se colgaba al hombro. Este ábaco consistía en una pequeña plancha de hueso o madera bañada en una fina capa de cera negra, donde se delimitaban las columnas sucesivas y se trazaban las cifras por medio de un estilete de hierro». La estructura del ábaco, una serie de columnas sucesivas que marcan de izquierda a derecha las unidades, decenas, centenas, millares, etc., permite que se pueda utilizar para realizar operaciones aritméticas con cualquier tipo de numeración.

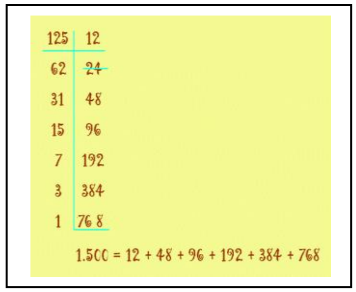


Figura 2.4

Por otro lado los matemáticos hindúes a partir del siglo V, efectuaron la multiplicación por el procedimiento conocido con el nombre de “cuadriculas”. Mas tarde lo utilizaron los árabes[8] y ellos lo llevaron a Europa, allí se le conoció con el nombre de “Gelosía”.

Su disposición es bastante singular, aunque el resultado final se obtenga, al igual que en la técnica actual, añadiendo dos a dos productos de las diferentes cifras del multiplicando y el multiplicador. Se puede observar a continuación un ejemplo de éste tipo de multiplicación.

Supóngase que se va a multiplicar 538 x 47

Al tener el multiplicando 3 cifras y el multiplicador 2, se dibuja un cuadrado rectangular con 3 columnas y 2 filas. Encima del cuadrado, y de izquierda a derecha, se anotan las cifras 5, 3 y 8 del multiplicando; a las izquierda se apuntan las cifras 4 y 7 del multiplicador. Luego se divide cada casilla del cuadrado en dos mitades trazando una diagonal que une el vértice superior izquierdo con su vértice inferior derecho.

Se realizan las multiplicaciones y en cada casilla escribiendo el producto de dos cifras que encabezan la línea y la columna correspondiente. Las cifras de las decenas se escriben en la casilla izquierda y la de sus unidades en la mitad superior de la casilla de la derecha[9].

En el primer cuadrado arriba, y a la derecha, se escribe el resultado de la multiplicación de 8 por 7, o sea 56, colocando el 5 en la mitad de la casilla de la izquierda y el 6 en la de la derecha, Y así sucesivamente:

Fuera del rectángulo, se suman las cifras de cada diagonal, empezando por la

[8] Este método derivado del hindú es similar es su estructura y procedimiento con la diferencia de que la rejilla se gira 90º y el resultado se lee directamente.
[9] Si faltará alguno de estos órdenes de unidades, bastaría entonces con colocar un cero en la mitad de la casilla correspondiente.

formada por la cifra 6, arriba y a la derecha del cuadro. Luego se procede en diagonal, de derecha a izquierda y de arriba abajo. Si fuese necesario, se lleva el sobrante de una diagonal a la siguiente y consiguiendo así, de una en una, fuera del cuadro, todas las cifras del producto final. Resultado que se lee claramente de izquierda a derecha. Por lo que el resultado de la operación seria 25.286. Véase figura 2.5

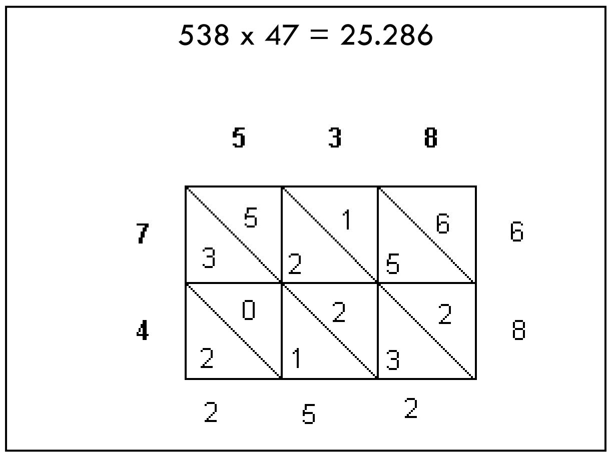


Figura 2.5

Serán los árabes, quienes a través de sus contactos con la India, imparten a occidente su avanzada aritmética y en concreto su sistema de numeración posicional de diez cifras. Las posibilidades de escritura se ampliaron y la facilidad algorítmica que esto comportó ayudó, sin duda a imponerlo. Aunque los calculistas árabes usaron este sistema de notación posicional desde mediados del siglo IX, sería el *tratado del ábaco* de Fibonacci, publicado en 1202, el que acabaría popularizándolo, primero en Italia y más tarde en el resto del continente. Se desarrollaron así, diversos métodos para sumar, restar, multiplicar y dividir similares a los que aún seguimos utilizando actualmente.

En cuanto concierne al concepto matemático de multiplicación, este se define como el *cardinal del conjunto producto cartesiano*[10] *de dos conjuntos,* en el supuesto de que los dos números representan inicialmente el cardinal de un conjunto, y el otro, conjunto.

[10] Así, para pensar en la multiplicación de dos números, debemos imaginarnos que hay dos conjuntos; que uno de ellos posee tantos elementos como lo indica uno de los números; que el otro posee tantos elementos como lo indica el otro número a multiplicar; que se construye el conjunto producto cartesiano de los dos conjuntos dados; y que se cuentan los elementos –pares de números- de este nuevo conjunto. El resultado final de este conteo es el producto de los números iníciales.

Esta conceptualización de las matemáticas dista del concepto que se enseña en el aula de clase y se registra en los libros de texto, donde definen la multiplicación como una suma reiterada. Sin embargo esta definición se puede relacionar con el concepto antes mencionado si se mira los factores a multiplicar como conjuntos disyuntos que al unirse da como resultado se obtiene un producto. Este es el mismo que el del producto cartesiano

Es precisamente, el asunto de evolución histórica de la noción de multiplicación la que plantea una serie de retos a los investigadores y educadores matemáticos en relación con ciertos obstáculos asociados a un tipo exclusivo de representación en la enseñanza de esta noción matemática.

2.2. Análisis didáctico

El análisis didáctico que se presenta intenta precisar la naturaleza de algunos fenómenos relativos a la enseñanza y aprendizaje de los problemas con estructura multiplicativa desde la teoría de los campos conceptuales[11]. Este análisis incluye entre otros el estudio de la naturaleza particular del proceso de resolución de problemas multiplicativos, el estudio de los libros de texto, como registro privilegiado de la evolución de este tipo de problemas en los ámbitos didácticos y eventualmente curriculares.

2.2.1. Noción de problema

Cuando se aborda el propósito de distinguir la enseñanza de los primeros conceptos

[11] La teoría de los campos conceptuales es una teoría didáctica fundamentada en aspectos psicológicos del aprendizaje, así como en los aspectos matemáticos de los conceptos sobre los que teoriza. Así, para el caso de las estructuras aditivas y multiplicativas, la teoría de los campos conceptuales proporciona un modelo coherente y organizado sobre como el alumno conceptualiza todos aquellos aspectos matemáticos relacionados con la adición y la multiplicación, fundamentándose en los aspectos psicológicos del aprendizaje de lo aditivo y lo multiplicativo, así como en los teoremas y conceptos matemáticos relacionados en estos dos aspectos.
Desde esta perspectiva teórica para el aprendizaje de un determinado concepto, no es suficiente con tratar una sola situación, sino que por el contrario, es necesario el tratamiento de una gran variedad de situaciones, pero además, se tiene que cada situación puede poner en juego variedad de conceptos. Esto hace que el aprendizaje de un determinado concepto sea un proceso complejo que dura un largo período de tiempo. La teoría de los campos conceptuales intenta modelar esta complejidad.

multiplicativos la cuestión inicial que se plantea es la siguiente: ¿se han de desarrollar los conceptos y luego aplicarlos a los problemas? O, por el contrario ¿se debe comenzar por la resolución de problemas profundizando en los conceptos implícitos en la misma?

Apoyar la primera postura, en general la más utilizada, supone partir de la hipotésis: Resulta más difícil resolver problemas sin un desarrollo conceptual previo. Los estudios sobre las estrategias informales utilizadas por los niños antes del periodo escolar descarta la veracidad de este aserto. Por tanto, la segunda postura es plenamente válida.

No existen datos que permitan, realmente, desechar ninguna. Sin embargo, desde la década de los ochenta, se viene postulando la necesidad de vertebrar el currículum de matemáticas entorno a los problemas. Este interés tiene bases económicas y sociales, como es la comprobación de un bajo nivel de resolución de problemas en el estudiante y las deficiencias observadas al transferir el conocimiento conceptual a esta labor. Tiene también una base pedagógica, dado que si la escuela ha de preparar a los niños para enfrentarse a su vida presente y futura, en ella la resolución de problemas de la vida cotidiana es una actividad preponderante.

Por ultimo tiene una base cognitiva y hasta epistemológica que enraíza la resolución de problemas en el propio desarrollo de la matemática. Ello permite afirmar a Orton (1988) que:

"La resolución de problemas se concibe ahora normalmente como generadora de un proceso a través del cual quien aprende combina elementos del conocimiento, reglas, técnicas, destrezas y conceptos previamente adquiridos para dar una solución a una situación nueva. Se admite ahora, por lo general, que las matemáticas son tanto un producto como un proceso; tanto un cuerpo organizado de conocimientos como una actividad creativa en la que participa el que aprende en realidad, puede afirmarse que el propósito autentico del aprendizaje de reglas, técnicas y contenidos es generalmente permitir al que aprende operar en matemáticas y desde luego, resolver problemas...Así, la resolución de problemas puede considerarse como la verdadera esencia de las problemáticas".

Desde esta perspectiva, interesa entonces determinar el método mas adecuado para enseñar la multiplicación y la división a partir del planteamiento de problemas.

Teniendo en cuenta lo anterior es preciso definir la noción de problema, el papel que juega dentro del aula, cómo encaja en la teoría de los campos conceptuales y sus distintos procesos de resolución, según las categorías establecidas en las estructuras multiplicativas.

Es muy frecuente encontrar, tanto en los textos de matemáticas como en los escritos de didáctica de las matemáticas, la idea de que la actividad matemática por excelencia consiste en la resolución de problemas y que, en el aprendizaje de las Matemáticas, se debe enfrentar al alumno a una casi única y verdadera actividad matemática: la resolución de problemas[12].

La significación del problema como elemento constitutivo del ejercicio de la actividad matemática ha sufrido una evolución profunda que viene caracterizada por cuatro fenómenos[13]:

- *la importancia del contexto para la introducción de una gran variedad de problemas.*
- *La puesta en evidencia del papel primordial de la compresión en la resolución de problemas.*
- *La consideración del problema como elemento didáctico para construir situaciones que van a hacer aparecer ciertos conceptos.*
- *La importancia del proceso de resolución de problemas como elemento determinante de la actividad matemática.*

Estos fenómenos llevan claramente a reconocer que la noción de problema debe ir más allá de la realización de una operación y de encontrar su resultado, deber ser algo más que ejecutar un algoritmo, tiene que ver más con hacer preguntas relacionadas con la matematización de un problema real, o bien con la construcción de nuevos objetos matemáticos, y responder a esas preguntas. Lo anterior caracteriza dos tipos de problemas: *los que surgen del interior de la propia disciplina y los que provienen del mundo exterior, de la vida real.*

El presente proyecto trabaja con el segundo tipo de problemas, el cual plantea cuestiones fundamentales nada fáciles sobre las relaciones entre matemáticas y realidad y sobre la posibilidad de un funcionamiento autónomo de las Matemáticas.

Con lo anterior se puede deducir, que el papel que se asigne a la actividad de resolución de problemas va a ser determinante, y va a marcar una elección didáctica importante, según que la función asignada a esta actividad sea:

- *La de evaluación del saber del alumno en un momento determinado.*

---

[12] CHAMORRO, María del Carmen (2005);"Didáctica de las Matemáticas" editorial Pearson Prentice Hall; capitulo XI

[13] CHAMORRO, María del Carmen (2005);"Didáctica de las Matemáticas" editorial Pearson Prentice Hall; capitulo XI

(tradicional)[14]

- *La de actuar como móvil del aprendizaje.*
- *La de ser fuente y criterio del conocimiento matemático que se desea ser construido por el alumno.*

Lo ideal es que la última función sea la más utilizada en el aula, teniendo en cuenta que en ciertos momentos de la enseñanza sea obligatorio proponer problemas que desarrollen las otras dos funciones mencionadas.

Es importante, entonces, concebir la clase como un laboratorio donde se experimenta con materiales didácticos variados, debido al periodo de desarrollo cognitivo concreto que corresponde a los alumnos de esa edad[15]. Siguiendo las reflexiones de D' Amore (1997) sobre el trabajo específico en un lugar como ese, se puede determinar cuáles deben ser los papeles señalados del profesor y del alumno en una clase de resolución de problemas.

El profesor propone situaciones que el alumno debe resolver con los medios que tiene a su alcance. *El papel del profesor* es el de moderador que ayuda en la aclaración de la tarea que se va a realizar, proporciona los medios para que se pueda llevar a cabo dicha tarea, soluciona conflictos de funcionamiento, recoge resultados y enfrenta al alumno o a la clase a esos resultados comprobando si con ellos se resuelve la tarea encomendada.

El papel del alumno, en cambio, es la del resolutor que se enfrenta a la tarea propuesta por el profesor, que se hace cargo de la tarea, que trata de encontrar la solución que sabe que tal solución la debe validar y confrontar en el seno de la clase.

Teniendo en cuenta el papel de estos personajes dentro del aula y tomando la opinión de Chamorro y vecino[16] se puede decir que:

Se tratará de destruir el contrato didáctico imperante que supone:

---

[14] La tradicional, en la que el problema aparece únicamente como criterio para determinar el saber del alumno y vinculada, por tanto, a la evaluación; la ligada a los métodos llamados activos, en donde el problema es utilizado como móvil del aprendizaje; o en la que la resolución de problemas es a la vez fuente y criterio del saber matemático en juego. El interés por la resolución de problemas se debe, también, a la posibilidad que éstos ofrecen, para construir conocimientos matemáticos y modelizar situaciones, lo que ayuda a comprender y dominar el entorno que les rodea.

[15] El nivel al que esta dirigido este proyecto requiere prestar una gran atención a los aspectos psicológicos y semánticos que confluyen en la resolución de problemas, que cobran aquí tanta importancia, o más que los aspectos matemáticos, por lo que estudios clásicos sobre resolución de problemas en matemáticas necesitan ser completados con otros que nos permitan comprender las causas del fracaso de los estudiantes entre problemas escolares muy simples.

[16] CHAMORRO, M. C. y VECINO, F.: "El tratamiento y la resolución de problemas", en Chamorro, M. C. (coord.): "Didáctica de las Matemáticas", Pearson Educación, Madrid, 2003.

- *La concepción de problema como ejercicio, como entrenamiento;*
- *La suposición de que un problema admite una única solución, normalmente encontrada a partir de los datos numéricos del mismo;*
- *La suposición de que un problema siempre tiene solución;*
- *La suposición de que los datos para resolverlo deben ser los justos, ni más ni menos;*
- *La suposición de que hay que usar un lenguaje obligatoriamente formal para encontrar la solución.*

Para psicólogos como Hoc (1987), un problema no califica una tarea sino una situación, es decir la confrontación de un sistema cognitivo a una tarea. Desde este punto de vista, *un problema es la representación de un sistema cognitivo construido a partir de una tarea, sin disponer inmediatamente de un procedimiento admisible para alcanzar el objetivo*[17].

La construcción de la *representación* de la tarea es lo que se llama comprensión, en tanto que la construcción del *procedimiento* se llama *estrategia de resolución.*

Se sabe que las estrategias o procedimientos de resolución que un alumno va a poner en marcha para resolver un problema van a depender directamente de la representación que éste ha hecho de la situación. De la misma manera, el cambio de representación va a ser el resultado de los conocimientos que el individuo va a movilizar durante el proceso de búsqueda de la solución, de las acciones que va a llevar a cabo, es decir, de los sucesivos razonamientos.

Greco[18] ha probado que hay, al menos, dos sistemas de representaciones que funcionan en el ejercicio del pensamiento natural, o espontáneo, y que intervienen en la resolución de problemas:

- *Un sistema R de representaciones que construyen el sentido, tanto el directo, llamado legible, como el figurado.*
- *Un sistema T, bastante complejo, de tratamiento de las representaciones, y en el que existen varias categorías de esquemas: los esquemas de orientación y representación calculable (esto es una ecuación, es un problema de proporcionalidad, etc.), los que efectúan a las operaciones locales, y los que ligan los anteriores generando*

[17] Hoc, J. M.: Psychologic cognitive de la planification, PUF. 1987
[18] GRECO, P.: "Structures et Significantions", prefacio de la obra BIDEAU, J.: *logique et bricolage chez l`enfant, Lille, P.U.L. 1998*

programas, procedimientos, algoritmos, correcciones, son los llamados esquemas de concatenación.

La comprensión es un proceso dinámico de cambio de la representación, gracias al cual el alumno pasa de una representación inadecuada, en la que atribuye a la tarea propiedades que no tiene, a una representación adecuada, y de una representación incompleta a otra completa.

2.2.2. Teoría de los campos conceptuales (estructuras multiplicativas)

Desde la década de los setenta se ha conocido un creciente interés por la resolución de problemas aritméticos elementales. El interés ha sido múltiple, pero basta citar las dos fuentes que pueden considerarse principales: ¿por un lado, y tras el cuestionado desarrollo de la Matemática Moderna en las escuelas, se pudieron constatar numerosas deficiencias en el aprendizaje de los problemas matemáticos. El amplio desarrollo conceptual en Matemáticas que se suponía habría de transferirse a la capacidad de resolver problemas no produjo el efecto deseado.

De otra parte, las necesidades industriales y económicas, en general, llevaron a un desarrollo importante de la Inteligencia Artificial por medio de la construcción de computadoras cada vez más sofisticadas. Estos medios se diseñaron, fundamentalmente, para resolver problemas de la vida económica, si bien ello desembocó en su aplicación a esferas cada vez más amplias.

Apoyados en la pujante Psicología Cognitiva, los investigadores desarrollaron, inicialmente, teorías amplias sobre la resolución de problemas entre los seres humanos, que devinieron pronto en búsquedas más localizadas sobre áreas concretas.

Habiéndose postulado repetidamente la actividad de resolución de problemas como eje vertebrador del curriculum de Matemáticas en todos los niveles elementales de la enseñanza, decenas de estudios se centraron en esta temática. Respecto de la Aritmética elemental, los problemas de suma y resta fueron prontamente abordados llegándose a establecer un, cuerpo de teoría bastante uniforme (Carpenter y Moser, 1982).'

El estudio de los problemas de multiplicación y división, en cambio, ha sufrido un retraso en su desarrollo por su mayor complejidad respecto a las dos operaciones anteriores. Se ha comprobado, en efecto que existe un mayor número de factores que inciden de manera fundamental en la dificultad relativa de sus problemas. Además, la multiplicación y división *"suelen abordarse a una edad algo superior a la suma y resta y este desfase cronológico conlleva la interacción de las primeras operaciones con otros conceptos muy relacionados: decimales, fracciones, razones, proporciones, etc".*

Pese a ello, se pueden constatar decididos e importantes pasos hacía la construcción de una teoría unificadora sobre la enseñanza y aprendizaje de los problemas de multiplicación y división. Dentro de ella, el establecimiento de los tipos de problemas existentes resulta un paso indispensable antes de abordar otras cuestiones.

Probablemente, el concepto más importante construido por Vergnaud (1983), en lo tocante a las operaciones de multiplicación y división, es el de «estructura multiplicativa». Este investigador francés fue el primero en abordar con rigurosidad las estrechas relaciones entre estas operaciones y otros conceptos del mismo tipo, creando la idea de «campo conceptual», es decir,

> *"un campo conceptual esta constituido, desde un punto de vista practico, por el conjunto de situaciones cuyo dominio progresivo llama a una gran variedad de procedimientos y de conceptos en estrecha conexión. Desde el punto de vista teórico; un campo conceptual está constituido por el conjunto de conceptos y de teoremas que contribuyen al dominio progresivo de esas situaciones". (Vergnaud, 1997)*

Vergnaud[19], estudia fundamentalmente dos campos conceptuales "la estructura aditiva" y la "estructura multiplicativa" "considerados como conjunto de problemas que toleran operaciones aritméticas y nociones de tipo aditivo (tales como adición, sustracción, diferencia, intervalo, traslación) o de tipo multiplicativo (tales como multiplicación, división, fracción, razón, semejanza)" (Vergnaud, 1983). Para el desarrollo de este trabajo se define estructura multiplicativa como:

> *"el campo conceptual de las estructuras multiplicativas es el conjunto de situaciones cuyo tratamiento implica una o varias multiplicaciones o divisiones*

[19] Para Vergnaud, un concepto es una "tripla de conjuntos C = (5,1, S) donde 5 es el conjunto de situaciones que dan significado al concepto, 1 es el conjunto de invariantes (objetos, propiedades y relaciones) y que pueden ser reconocidas/utilizadas por los sujetos para analizar y adueñarse de esas situaciones, y S es el conjunto de representaciones simbólicas que pueden ser usadas para enfrentar y representarse esas invariantes, y por tanto, presentar las situaciones y procedimientos para manipularlas" (Vergnaud 1988)

y el conjunto de los conceptos y teoremas que permiten analizar esas situaciones[20]*." (Vergnaud, 1994)*[21]

Como se observa el campo conceptual de las estructuras multiplicativas ofrece una mayor diversidad, lo cual implica, por supuesto, una mayor complejidad conceptual. Para su estudio Vergnaud presenta dos grandes categorías[22]:

- Isomorfismo[23] de medida
- Producto de medida

La otra gran estructura que considera Vergnaud se denomina proporción múltiple. Esta se refiere a problemas de proporcionalidad en los que intervienen al menos tres magnitudes y que son por tanto problemas compuestos en los que para su resolución hay que emplear más de una operación.

2.2.2.1. Isomorfismo de medida

Es una estructura que engloba a los problemas en los que subyace una proporcionalidad simple directa entre las dos magnitudes implicadas. Los tipos de problemas que se estudian en esta categoría son: problemas referidos a *repartos iguales* (personas y objetos), *precios constantes* (bienes y costos), *movimiento uniforme* (espacio y velocidad), *densidades constantes a lo de una línea* (árboles y distancias), *en una superficie o en un volumen*[24].

Contrario a como se presenta en la mayoría de los textos escolares, la relación

---

[20] Proporción simple y proporción múltiple, función lineal, y n-lineal, relación escalar directa e inversa, cociente y producto de dimensiones, combinación lineal y aplicaciones, combinación lineal y aplicaciones lineales, fracción, razón, número racional, múltiplo y divisor, etc…. (Vergnaud, 1990).

[21] MAZA, Gómez Carlos (1991);"Multiplicar y Dividir a través de la resolución de problemas, Aprendizaje" editorial Visor; capitulo I

[22] Al interior de cada uno de estos grupos se pueden identificar diversas situaciones con múltiples sentidos y significados.

[23] Un isomorfismo es una aplicación biyectiva entre dos conjuntos que <<respeta>> la operación que hay definida en cada uno de ellos.

[24] CASTRO, Encarnación; RICO, Luis (2002) Estructuras Aritméticas Elementales. Una empresa docente. Bogotá, pp. 53 - 54.

multiplicativa fundamental dentro de esta categoría no es una relación ternaria[25], sino *cuaternaria*: intervienen cuatro números que son los que permiten dar significado a la situación.

Vergnaud identifica cuatro subclases de problemas: una subclase multiplicación, dos subclase de división y una cuarta subclase que se llama problemas generales de regla de tres.[26]

Las siguientes tablas de correspondencia representan modelos de las distintas situaciones multiplicativas en las cuales esta inmersa la proporcionalidad simple y directa. Figura 2.6

$$\begin{array}{ccc} E1 & & E2 \\ 1 & \rightarrow & c \\ b & \rightarrow & x \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} E1 & & E2 \\ 1 & \rightarrow & x \\ b & \rightarrow & c \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} E1 & & E2 \\ a & \rightarrow & c \\ b & \rightarrow & x \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} E1 & & E2 \\ a & \rightarrow & x \\ b & \rightarrow & c \end{array}$$

$$\begin{array}{ccc} E1 & & E2 \\ 1 & \rightarrow & b \\ x & \rightarrow & c \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} E1 & & E2 \\ a & \rightarrow & b \\ x & \rightarrow & c \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} E1 & & E2 \\ x & \rightarrow & b \\ a & \rightarrow & c \end{array}$$

Figura 2.6

Los primeros tres modelos representan los problemas típicos de multiplicación (el primero) y de división (segundo y tercero). Por su parte los otros cuatro representan los distintos modelos en los cuales se puede representar la regla de tres simple directa.

El primer modelo de situación puede ser resuelto bien sea por medio de la relación funcional (realizando la multiplicación x c) o a través de la relación escalar (haciendo la multiplicación x b). Aunque cada una exige un tipo de análisis distinto de la situación, pues implica poner en relación magnitudes de dos espacios de medida distintos en el primer caso, o del mismo espacio de medida en el segundo, la elección de una relación u otra para la solución de la situación esta determinada por factores tales como la naturaleza de las magnitudes implicadas (continuas o discretas), los

[25] Dos números se componen para obtener otro tercero, como en el caso de la adición.
[26] Ibíd., p. 54.

números implicados (naturales, enteros, decimales, etc...) y por la naturaleza de los operadores (qué tipo de números son tanto el operador funcional como el escalar).

Es necesario detenerse en cada operador por separado. Mientras que el operador escalar no tiene unidades, pues al utilizarlos hacen pasar de un número a otro, pero en el mismo espacio de medida; el operador funcional si tiene unidades pues hace pasar de un número en un espacio de medida a otro número en el otro espacio de medida.

Los modelos 2 y 3 como se dijo anteriormente representan dos tipos de división.

El primero de ellos representa una división en la cual se debe hallar el valor de la unidad. Cuando los números involucrados son números enteros, entonces se genera la división partitiva, es decir una división en la cual una cantidad debe ser repartida en determinada cantidad de partes iguales. En este caso particular, es posible encontrar procesos de solución que no requieran explícitamente de realizar la división, como puede ser por ejemplo, una repartición en una determinada cantidad de grupos colocando una a una las unidades en cada grupo.

En general este tipo de situaciones requiere del reconocimiento de la relación escalar, y comprender la división que se debe realizar como la inversa de un operador escalar multiplicativo[27].

En las situaciones de tipo tres, el análisis es distinto. Se trata de averiguar, conocido el valor de la unidad, cuantas unidades se pueden obtener con una cantidad determinada. Si los números involucrados son enteros, entonces se genera la división quotitiva, en la cual se trata de saber cuantos grupos se pueden formar con una determinada cantidad una vez conocido el valor de cada grupo.

Al igual que el caso anterior, para este tipo de situaciones también es posible encontrar procedimientos que no requieran la división, como es el caso de una extracción repetida del valor de cada grupo, de la cantidad total[28], donde el cociente es la cantidad de veces que se puede realizar la extracción.

En general, sin importar el tipo de números involucrados este modelo de divisiones implica la utilización de la relación funcional, pues la división c/b relaciona los dos espacios de medida. Al igual que en el caso anterior, el planteamiento de esta división, implica relacionarla como la inversa de la multiplicación.

Es evidente como estos dos tipos de problemas son sustancialmente distintos e implican no solo interpretaciones distintas para la división, sino que también distintos

---

[27] Reconocer que la división es la operación inversa de la multiplicación.

[28] Desde este tipo de procedimientos se puede llegar a un antiguo algoritmo para realizar la división que consista en restar sucesivamente el divisor del dividendo. El cociente era la cantidad de veces que se podía hacer dicha sustracción.

niveles de complejidad.

Los otros cuatro modelos de problema plantean de forma explícita la regla de tres. Para éstos además de tener en cuenta las observaciones hasta ahora realizadas son necesarias unas consideraciones adicionales.

En primer lugar es importante que la aplicación mecánica de las reglas algorítmicas del producto en cruz y luego el despeje de la ecuación resultante (la forma de regla de tres) se debe propender en este tipo de situaciones, por una comprensión global de la proporcionalidad, la cual constituye el fundamento conceptual de la regla de tres. Esto implicaría que la regla algorítmica del producto en cruz deberá ser el resultado de una síntesis conceptual al final de un largo proceso de aprendizaje, y no como usualmente aparece en la escuela: *el punto de partida*.

En segunda instancia el análisis relacional es mucho más complejo que los casos anteriores, en tanto que implica establecer el valor de una unidad para luego hacer la multiplicación o división necesaria. Este paso de calcular el valor de la unidad no siempre es explícito, lo cual hace que aumente el nivel de dificultad[29].

A continuación se resume en forma esquemática los diferentes análisis que se estiman necesarios elucidar para el maestro que quiere comprender el desarrollo de las nociones que intervienen en el isomorfismo de medidas y en los problemas que derivan de esta estructura. Estas etapas se desarrollan a través de un largo periodo en el curso de los tres últimos años de la enseñanza elemental y hasta el segundo y tercer año de la secundaria[30].

1. *Búsqueda de la solución del problema pasando por la unidad y el valor unitario.*

2. *Aplicación sucesiva de dos operadores (división primero).*

3. *Escritura del operador fraccionario (simple convención de escritura en este nivel).*

4. *Aplicación sucesiva de dos operadores (multiplicación primero por conmutatividad).*

[29] La noción de fracción es introducida aquí a partir de la noción de operador, y corresponde a la composición de dos operadores multiplicativos simple: una división y una multiplicación. También se pude introducir el concepto de razón a partir de estas situaciones problema, teniendo en cuenta que la noción de razón, razón-operador la de proporción son difíciles de comprender (la mayoría de los niños de 9 a 10 años no las comprenden).

[30] No es de extrañarse por las dificultades encontradas al final de la primaria con las nociones de fracción, razón y proporción, teniendo en cuenta que el aprendizaje de éstas se da a través de un proceso continuo hasta el tercer grado de la secundaria.

5. *Noción de razón y de razón-operador (razón entre dos cantidades)*[31].

6. *Proporción igualdad de razones.*

7. *Igualdad de razones-operadores.*

8. *Regla de tres: análisis de escritura.*

Como se observa hay una gran complejidad en las distintas maneras de abordar este tipo de problema multiplicativamente desde la perspectiva del análisis escalar, en virtud que este descansa sobre las nociones de razón, proporción y proporcionalidad.

Es importante mencionar que los problemas que presentan un esquema de regla de tres, además de ser analizados desde una perspectiva de la multiplicación escalar para su solución es posible realizar un análisis funcional de estos tipos de problemas implicando así la noción de función lineal.

El análisis funcional como ya se ha caracterizado por centrar la reflexión sobre operador-función que al ser aplicado a uno de los espacios de medida, produce una respuesta en el otro espacio de medida. En otras palabras este operador-función hace pasar de un espacio de medidas al otro espacio de medidas.

El esquema básico es el siguiente. Figura 2.7

$$\boxed{\begin{array}{ccc} E1 & & E2 \\ a & \rightarrow & c \\ b & \rightarrow & x \end{array}}$$

Figura 2.7

El operador función f que hace pasar de b a X es el mismo que el que hace pasar de a a c. Este operador-función no es otra cosa que la multiplicación por la razón.

Punto de llegada

---

[31] La razón entre dos cantidades se comprende más fácilmente con relaciones menores que 1.
La noción de porcentaje, que supone la noción de razón, aclara a su vez esta noción para las relaciones menores que 1.

Punto de partida

Este análisis horizontal se sitúa a un nivel conceptual muy elaborado y es, por otra parte, la razón de las dificultades encontradas para hacer comprender al niño la noción de función[32] *.*

Para finalizar el análisis de esta categoría, es pertinente anotar que cualquiera de estos problemas puede ser modelad a través de una tabla de correspondencia entre los dos espacios de medida, de la cual se aíslan los cuatro datos que se involucran en la situación. Ésta representa el isomorfismo entre los dos espacios de medida y se constituye en una buena herramienta para comprender las relaciones de proporcionalidad que están involucradas en este tipo de problemas en tanto que permite ver la dependencia de las variaciones de los valores de un espacio de medida con respecto al otro espacio de medida.

2.2.2.2. Producto de medidas

Vergnaud (1991), define este tipo de situaciones multiplicativas como "una relación ternaria entre tres cantidades de las cuales una es el producto de las otras dos, tanto en el plano numérico, como en el plano dimensional".

El concepto matemático de multiplicación se define, a partir de la teoría de conjuntos, mediante el producto cartesiano[33]. Brevemente, si se consideran los números a y b como cardinales de dos conjuntos A y B, respectivamente, la multiplicación de a por b se define como el cardinal del producto cartesiano de los conjuntos A y B[34].

---

[32] Si la noción de correspondencia no presenta ninguna dificultad, ni su representación en forma de tabla, el análisis de esta es por su parte mucho más delicado, pues implica no sólo la noción de relación numérica, sino igualmente la de cociente de dimensiones.

[33] MAZA, Gómez Carlos (1991);"Multiplicar y Dividir a través de la resolución de problemas, Aprendizaje" editorial Visor; capitulo I, pp 18

[34] Llevada rigurosamente esta definición a la práctica, resultaría que para hallar, por ejemplo, el resultado de multiplicar 2 x 3, habría de considerarse un conjunto A de dos elementos y un conjunto B de tres elementos. Se representaría el producto cartesiano de A y B mediante un diagrama. Hallando el cardinal de este producto A x B se obtendría el resultado 6.

Esta estructura describe un buen número de problemas relativos a áreas, volúmenes, y a productos cartesianos de conjuntos discretos. Su relación general es una relación entre tres cantidades una de las cuales está definida como un par ordenado cuyas componentes son las otras dos cantidades. La forma más natural de ver esta relación es a través de una representación cartesiana.

Dentro de esta categoría se identifican dos subtipos de problemas: multiplicación y división[35].

Multiplicación

En este tipo de problemas se debe encontrar la medida producto, conocidas las medidas que lo componen. Figura 3.

$$\boxed{M_1 \times M_2 = M_3}$$

Figura 2.8

Este proceso se hace impracticable en el aula donde el profesor, basándose en los conocimientos previos del alumno, suele fundamentar la multiplicación en la suma reiterada. El principal problema de hacerlo así es que la definición matemática y la definición práctica de esta operación van por caminos diferentes, lo que conlleva un conflicto conceptual importante en el escolar. El resultado habitual de este conflicto es la ignorancia, por parte del alumno, de problemas resolubles por la multiplicación y que no obedecen, en su solución, a una estrategia de suma reiterada[36].

Este tipo de problemas multiplicativos son estructuralmente diferentes a los del isomorfismo de medidas. Allí había una función lineal relacionando dos espacios de medida. En este caso, se pueden contar tres espacios de medida diferentes: M1, M2 y M3, de manera que existe una aplicación entre

$$M1 \text{ X } M2 \rightarrow M3$$

[35] CASTRO, Encarnación; RICO, Luis (2002) Estructuras Aritméticas Elementales. Una empresa docente. Bogotá, pp. 53 - 54.

[36] Ibíd., p. 19

Que no es un operador escalar ni un operador-función. Más bien expresa una relación funcional doble entre cada espacio de medida del primer miembro con el del segundo. De ahí que corresponde, más exactamente, a una *función bilineal*[37].

Característica importante de este tipo de problemas multiplicativos es el hecho de que, al no ser resolubles por la suma reiterada, no otorgan distinto papel a los dos factores en juego. Si el isomorfismo de medidas era una operación asimétrica, en este caso la multiplicación resulta ser simétrica.

En estos problemas se debe encontrar una de las cantidades elementales que se componen, conociendo la otra y la cantidad compuesta[38].

M1 x M2 = M3, donde M2 o M1 es la cantidad a encontrar.

En este terreno la simetría presente en este tipo de situaciones problema tiene por consecuencia la aparición de un único tipo de división, en el cual la incógnita es un dato cualquiera perteneciente a uno de los espacios de medida iniciales.

Para concluir el estudio de esta categoría es importante ten en cuenta que: Si bien se ha introducido en algunos países (en mayor o menor grado) la multiplicación mediante este tipo de problemas, se han constatado importantes dificultades conceptuales en el escolar al tratar de resolverlos. El hecho de no disponer de un concepto precio a partir del cual asentar este nuevo, hace del aprendizaje de la multiplicación a partir del *producto cartesiano*, un aprendizaje escasamente significativo[39].

---

[37] Para Vergnaud es evidente, a la luz de este análisis, que la consideración de una función bilineal es más compleja que la de una función lineal, como sucede en el isomorfismo de medidas. Por ello, este último tiopo de problemas debe preceder a los del producto de medidas.

[38] En el campo conceptual de las estructuras multiplicativas se pueden distinguir subclases de problemas sin más que considerar el tipo de magnitud elemental implicado: discreta, continua; el tipo de números: enteros, decimales, números grandes, números inferiores a 1, y también teniendo en cuenta los conceptos implicados.

[39] Ibíd., p. 20.

CAPITULO 3. ESTRATEGIA METODOLÓGICA

La metodología adoptada es de tipo cualitativo[40] de corte descriptivo – interpretativo de los desempeños de los estudiantes de grado tercer del Colegio San Alberto Magno, en relación con el aprendizaje de las estructuras multiplicativas a través de la resolución de problemas.

Para este propósito se plantea el análisis de situaciones problema, que permite ofrecer descripciones interesantes de tipo instantáneo y estáticas sobre las realizaciones observables de los estudiantes, en un momento determinado de su desarrollo, o en diferentes niveles de desarrollo, al resolver tareas específicas propias de los temas del currículo de matemáticas.

La descripción de las realizaciones de los estudiantes se articula mediante la identificación y categorización de clases de comportamientos y competencias en los que se presta atención a los procedimientos empleados, estrategias de solución, y errores que se desprenden de sus respuestas teniendo en cuenta la teoría expuesta en el marco teórico.

En una fase posterior, sirven para establecer niveles de dificultad asociados a las situaciones propuestas; para señalar tendencias cognitivas en la evolución de los comportamientos observados; para poner de manifiesto las limitaciones en la comprensión del conocimiento matemático. El análisis de tareas requiere de la elaboración de una secuencia didáctica.

---

[40] La investigación social cualitativa es considerada como un proceso activo, sistemático y riguroso de indagación dirigida, en el cual se toman decisiones sobre lo investigado. Esta tiene un enfoque valioso, ya que problematiza las formas en las que los individuos y los grupos constituyen e interpretan las organizaciones y las sociedades con lo cual facilita el aprendizaje de las culturas y estructuras organizacionales, porque le brinda al investigador medios para examinar el conocimiento, el comportamiento y los artefactos que los participantes comparten y usan para interpretar sus experiencias (Schwartzman, 1993). [40]
Es entonces la investigación social cualitativa una concepción que no se fundamenta en la certidumbre de un determinismo asignado por las leyes preestablecidas para la sociedad, sino que pone énfasis en sujetos que construyen su propio mundo dentro de contextos determinados, donde el carácter cambiante y mutable de la realidad y la diversidad de lo social posibilitan el surgimiento de lo nuevo, según el conjunto de alternativas en cualquier momento de la dinámica social.

La secuencia se extrae a partir de un amplio repertorio preliminar seleccionado como resultado del estudio teórico. Tras elegir y adaptar algunas de las cuestiones a los requisitos de la investigación se configura una primera versión de la secuencia, que se va refinando mediante pilotajes sucesivos.

El esquema de interpretación se sigue de la identificación de características comunes y patrones de comportamiento en el desempeño de los alumnos. Se utiliza para agrupar las respuestas y así facilitar una clasificación de la información en categorías descriptivas del comportamiento. El pilotaje de la secuencia se hace mediante sucesivas evaluaciones: una es interna, corresponde al investigador del proyecto; y otras son externas, sometiendo a prueba las situaciones problema con el asesor y evaluadores con el fin de ver si se ajustan a las expectativas y objetivos para los que fueron pensadas; y también, con el profesor del curso en el cual se va a aplicar la investigación, para ver si son adecuadas al nivel académico de sus estudiantes.

La recolección y análisis de datos se hace sometiendo la secuencia didáctica a los estudiantes del curso elegido, en su ambiente natural. A continuación se procede al análisis de los resultados obtenidos y así plantear las conclusiones de la investigación.

3.1. Intervención y Análisis de Resultados

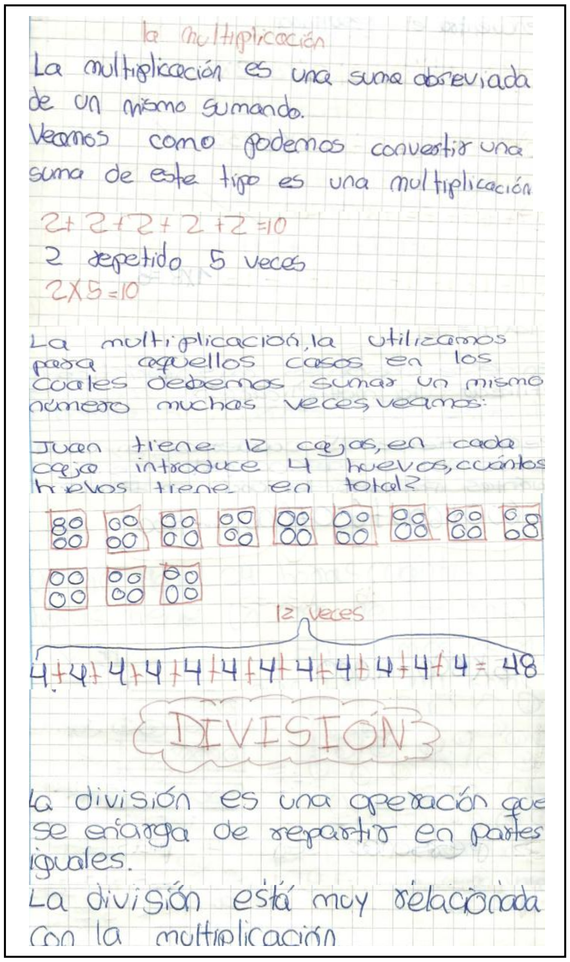
El desarrollo de este proyecto se llevo a cabo en el grado tercero del colegio SAN ALBERTO MAGNO de la ciudad de Cali. Este grado consta de 17 estudiantes con edades que oscilan entre los 8 a 9 años. Inicialmente se observo que los estudiantes tienen un manejo sobre las estructuras multiplicativas un poco limitado. Dentro del análisis que se realizó de los conocimientos adquiridos por éstos dentro del aula, en cuanto al concepto de multiplicación y división, se identificaron las siguientes dificultades:

- Los conceptos de multiplicación y división enseñados por el docente del área han sido aislados, puesto que identifica la división como una operación que se relaciona con la multiplicación, pero no asume ésta como la operación inversa a ella

- El concepto de multiplicación es considerado solo como una suma reiterada.

- La división se asume como una operación que se encarga de repartos iguales.

Evidencia de esta situación se puede observar en el registro que hacen los estudiantes en su cuaderno. Véase figura 3.1



la multiplicación

La multiplicación es una suma abreviada de un mismo sumando.

Veamos como podemos convertir una suma de este tipo es una multiplicación

$2+2+2+2+2=10$

2 repetido 5 veces

$2 \times 5 = 10$

La multiplicación, la utilizamos para aquellos casos en los cuales debemos sumar un mismo número muchas veces, veamos:

Juan tiene 12 cajas, en cada caja introduce 4 huevos, cuántos huevos tiene en total?

$\overbrace{4+4+4+4+4+4+4+4+4+4+4+4}^{12 \text{ veces}} = 48$

DIVISION

la división es una operación que se encarga de repartir en partes iguales.

La división está muy relacionada con la multiplicación

Figura 3.1

También se evidencia que los problemas estudiados en el aula de clase corresponden a la categoría de isomorfismo de medida. Esta situación llama la atención, puesto al realizar la prueba diagnóstica los estudiantes no presentaron dificultades al resolver problemas de que cumplían con esta estructura, pero al ser planteadas situaciones problema de producto de medidas la resolución estas no fue la esperada.

Todo el trabajo de exploración, de indagación y de aplicación de la secuencia didáctica, se realizó con 9 estudiantes de grado 3°, quienes dentro de los espacios de clase de matemáticas realizaron todo el trabajo experimental al mismo tiempo que continuaban con su cotidianidad académica.

3.1.1. Encuesta

Se realizo una encuesta (ver anexo 1) dirigida docentes de matemáticas de básica primaria con el objetivo de conocer más a fondo lo que pensaban sobre la resolución de problemas y cómo lo incorporan en su trabajo en el aula.

La encuesta consta de nueve preguntas abiertas, lo que permitió que los docentes encuestados manifestarán de manera espontanea la importancia qué para ellos tiene la resolución de problemas en aula al momento de enseñar un objeto matemático a sus estudiantes.

A continuación se presentan las preguntas de la encuesta.

1. *¿qué considera usted qué es un problema matemático?*

2. *¿dentro de su clase de matemáticas implementa los problemas? Si____ No____; ¿por qué?*

3. *¿qué tipo de problemas propone a sus estudiantes? Ejemplifique si es posible.*

4. *¿cuál es su propósito cuando plantea estos problemas?*

5. *¿por qué deben los estudiantes trabajar en matemáticas problemas?*

6. *¿qué hechos te hacen sentir que has realizado un buen trabajo enseñando problemas?*

7. *¿cómo evalúa usted los problemas?*

8. *¿cree qué se puede enseñar algún concepto a partir de problemas? Menciona algunos.*

9. *¿qué otras actividades piensas que son recomendables para enseñar matemáticas?*

Resultados:

Esta encuesta fue realizada a los docentes de básica primaria y de matemáticas de la institución dónde se desarrollo la práctica. En primera instancia hubo un poco de resistencia frente al desarrollo de ésta, pues es frecuente que los profesores no se sientan cómodos al manifestar sus prácticas en el aula, lo que llevo a qué éstos antes de responder la encuesta hicieran preguntas como: ¿y para qué es esto?, ¿Quién las va a leer?, ¿nos van a dar algún resultado de todo este análisis? Como respuesta a sus inquietudes, se explico que el objetivo de la encuesta no era el de evaluarlos en su quehacer pedagógico, sino realizar un estudio a cerca del uso de la resolución de problemas en el aula. Con esta explicación los maestros realizaron la encuesta sin presentar más inquietudes.

Debido a que esta encuesta es más cualitativa que cuantitativa se obtuvieron las siguientes conclusiones:

- los profesores ven la resolución de problemas como una ayuda a la hora de practicar las operaciones básicas (suma, resta, multiplicación y división) y no como una herramienta metodológica para enseñar estos objetos matemáticos.

- Los profesores conciben la idea de problema como situaciones que tiene dos o más cantidades y se necesita realizar una operación con ellas para encontrar una respuesta. El propósito con el cual los implementan en el aula es el de corroborar el manejo de algoritmos o la interpretación de datos numéricos y el manejo que se le debe dar a estos.

- Evalúan el proceso y no el resultado final, es decir, que el estudiante identifique que operación que debe realizar para dar respuesta a un interrogante, aunque el manejo del algoritmo como tal no este del todo bien desarrollado.

- No consideran que existen situaciones problemas que pueden ser resueltos sin la aplicación de uno o varios algoritmos específicos.

- Las situaciones problema que proponen a sus estudiantes son de tipo cotidiano, es decir que su contexto es sacado de la vida diaria, con el fin de que éstos relacionen el concepto enseñado a su estilo de vida y así pueda ser aprehendido con más facilidad.

- Emplean las situaciones problema como una estrategia de evaluación de un objeto matemático enseñado en el aula.

- Consideran que los juegos de mesa son una estrategia eficaz para enseñar matemáticas.

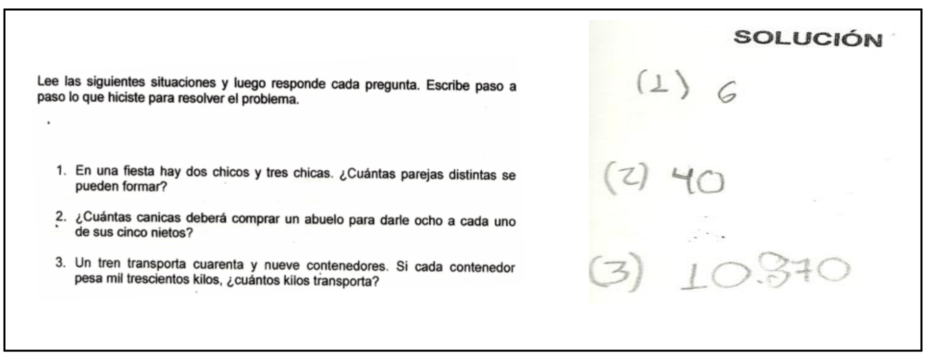
3.1.2. Prueba diagnóstica

Para esta prueba (ver anexo 3) se propusieron situaciones típicas que se utilizan para trabajar multiplicación en cualquier institución educativa y tal como se propone en los textos guías.

La idea de esta prueba es corroborar o descartar las hipótesis planteadas al inicio de este trabajo de grado, donde se resalta la dificultad que tienen los estudiantes en la resolución de problemas con aplicando las estructuras multiplicativas[41] expuestas por Vergnaud. De igual manera la incidencia poco positiva que tiene el hecho de enseñar contenidos matemáticos apoyados en las situaciones problemas presentadas por los libros de texto. La prueba diagnóstica fue aplicada de manera individual.

Resultados:

- El hecho de que los estudiantes en su cotidianidad se encuentren acostumbrados a que la resolución de un problema se limita a la realización de un algoritmo y una respuesta rápida (en ocasiones siendo esta respuesta solo un número) , conlleva a que éstos al momento de solicitársele que de forma escrita expresen el análisis que realizaron al momento de resolver la situación presentada, no logren hacerlo de forma correcta y en ocasiones pasen por alto esta instrucción (establecida al inicio de la prueba). Esto se puede observar en los siguientes apartados. Figura 3.2


Lee las siguientes situaciones y luego responde cada pregunta. Escribe paso a paso lo que hiciste para resolver el problema.

1. En una fiesta hay dos chicos y tres chicas. ¿Cuántas parejas distintas se pueden formar?
2. ¿Cuántas canicas deberá comprar un abuelo para darle ocho a cada uno de sus cinco nietos?
3. Un tren transporta cuarenta y nueve contenedores. Si cada contenedor pesa mil trescientos kilos, ¿cuántos kilos transporta?

SOLUCIÓN

(1) 6

(2) 40

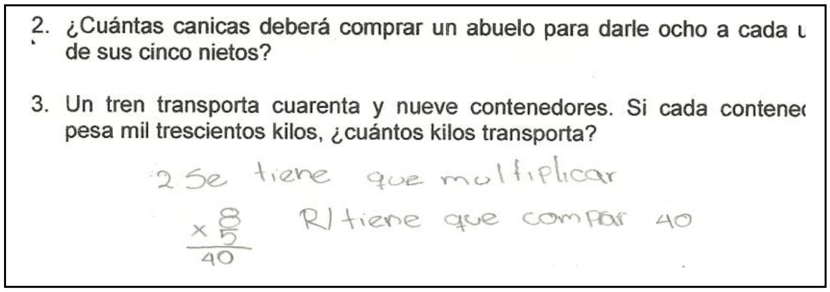
(3) 10.370

Figura 3.2

En este caso se evidencia que la estudiante aunque realiza un proceso de análisis, este no se evidencia ya que solo brinda como solución del problema unas cantidades que no identificables a la luz de las situaciones presentadas. Además pasa por alto las indicaciones dadas al inicio del trabajo en dónde de manera explicita se da la instrucción de escribir paso a paso las acciones realizadas para la resolución de cada problema.

[41] Estos problemas presentas las dos categorías explicadas por el Vergnuad en la teoría de los campos conceptuales: isomorfismo de medidas y producto de medidas.

- Los estudiantes se encuentran más familiarizados con problemas de tipo isomorfismo de medidas, puesto que dentro de la actividad fueron estas situaciones a las que dieron una respuesta más acertada, como se muestra en la resolución de los problemas 2 y 3 vease figura 3.3


2. ¿Cuántas canicas deberá comprar un abuelo para darle ocho a cada u de sus cinco nietos?

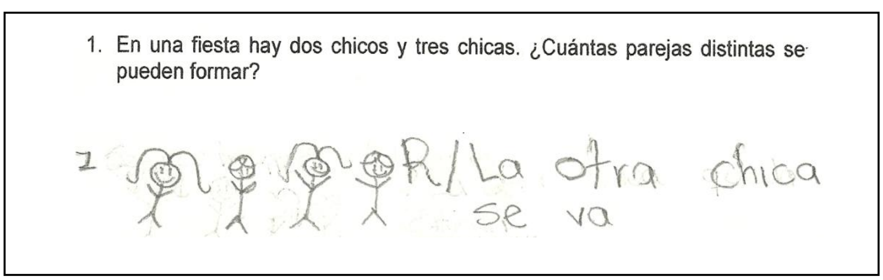
3. Un tren transporta cuarenta y nueve contenedores. Si cada contene pesa mil trescientos kilos, ¿cuántos kilos transporta?

2 Se tiene que multiplicar

$\begin{array}{r} 8 \\ \times\ 5 \\ \hline 40 \end{array}$ R/ tiene que compar 40

- Figura 3.3
-
-
- el primer problema hace parte de la categoría de producto de medida. En este se le solicita a los estudiantes que encuentren las parejas que se pueden formar
- si se tienen 2 chicos y tres chicas en un baile. En la resolución de esta problema se encontraron dos situaciones particulares:

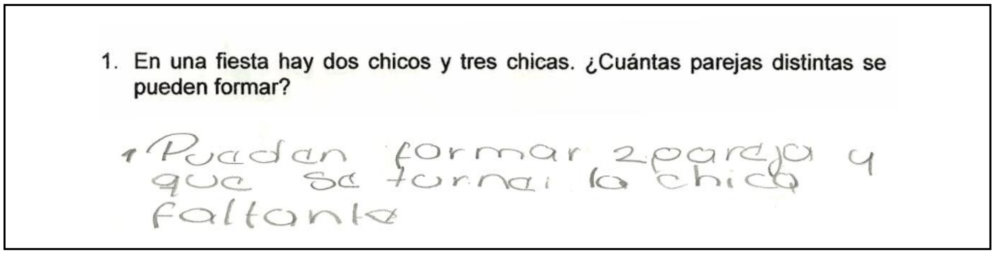
En primer lugar, algunos estudiantes no tienen claro el proceso al cual acudir para dar solución a esta situación y como respuesta al interrogante del problema emplean una correspondencia uno a uno entre los datos del problema (chicos y chicas), llegando así a concluir que solo se pueden establecer dos parejas y que sobra una chico, como se muestra en la imagen. Véase figura 3.4


1. En una fiesta hay dos chicos y tres chicas. ¿Cuántas parejas distintas se pueden formar?

1 R/La otra chica se va

Figura 3.4

En segundo lugar se identifica en algunos estudiantes la noción intuitiva para resolver problemas aritméticos multiplicativos de producto de medida, puesto que aunque no son muy conscientes del conocimiento que están poniendo en juego la respuesta dada en el punto 1 es muy cercana a lo que se espera de situaciones como éstas. Ejemplo de ello se puede observar en el siguiente apartado. Figura 3.5


1. En una fiesta hay dos chicos y tres chicas. ¿Cuántas parejas distintas se pueden formar?

1 Puedan formar 2pareja y que se fornai la chica faltante

Figura 3.5

En conclusión se verifica y se confirma la hipótesis de que en el campo de las estructuras multiplicativas, los estudiantes tienen grandes vacios, puesto que éstos se encuentran más familiarizados con los problemas que muestran un esquema de isomorfismo de medida que la de producto de medida; sin embargo, se puede identificar en algunos casos la noción intuitiva para resolver situaciones de producto de medida, sin que este tipo de problemas haya sido trabajado dentro del aula de clase.

También se confirma que los docentes no han ahondado lo suficiente en la resolución de problemas como un instrumento metodológico para la enseñanza de las estructuras multiplicativas. Esta realidad se da porque, no se reconoce el papel que tiene la enseñanza de los objetos matemáticos a través del planteamiento de problemas. Como consecuencia de ésta problemática, los alumnos no pueden justificar de forma clara los razonamientos realizados por ellos para resolver las situaciones problema presentadas.

3.1.3. Secuencia didáctica

La secuencia didáctica que se diseño y aplicó a los estudiantes del Colegio San Alberto Magno, se propuso como una trabajo experimental con el objetivo de llegar a que los estudiantes de tercero de educación básica logren un proceso adecuado en la resolución de problemas aritméticos con estructura multiplicativas[42] y así lleguen a tener un aprendizaje significativo de éste objeto matemático. La secuencia constó de cuatro actividades específicamente:

Primera actividad.

En esta primera actividad (ver anexo 4) se plantearon dos problemas tipo isomorfismo de medida y uno tipo producto de medida.

Análisis y resultados

Problemas tipo isomorfismo de medida (análisis funcional)

Los problemas planteados con esta estructura son los expuestos en la figura 3.6.

2. Un camión puede transportar una carga de doce mil quinientos kilos de papas. ¿Cuántos kilos de papas transportará en catorce viajes?

3. Un saco de harina pesa doce kilos. ¿Cuántos kilos pesarán un camión con doscientos treinta sacos de harina?

Figura 3.6

Estas situaciones multiplicativas muestran la proporcionalidad simple directa a través del siguiente esquema:

$$\begin{array}{ccc} E1 & & E2 \\ 1 & \longrightarrow & c \\ b & \longrightarrow & X \end{array}$$

[42] Dentro del análisis de Vergnaud los problemas que emplean operaciones simples de multiplicación y división, se sitúan en el marco de dos grandes categorías: **isomorfismo de medidas y producto de medidas.** VERGNAUD, Gerard Teoría de los campos conceptuales. Vergnaud, G. (1993).

Este modelo muestra la relación multiplicativa cuaternaria fundamental, donde se establece la correspondencia entre la unidad y el valor de la unidad, con base en la cual se puede hallar la cantidad solicitada en la situación a través de una pregunta.

El problema 2 y 3 establecen esta relación de correspondencia empleando las siguientes cantidades.

$$\begin{array}{lcl} E1 & & E2 \\ 1 & \longrightarrow & 12.500 \\ 14 & \longrightarrow & X \end{array} \qquad\qquad \begin{array}{lcl} E1 & & E2 \\ 1 & \longrightarrow & 12 \\ 230 & \longrightarrow & X \end{array}$$

Como se puede observar dos de las cantidades hacen parte de un espacio de medida (1 y 14 representan números de viajes para el problema 2; 1 y 230 representan números de sacos en el problema 3), mientras que las otras dos son de otro (12.500 y X son las medidas de peso por viaje en la situación 2; 12 y X son medidas de peso por sacos en la situación 3).
La multiplicación a realizar para dar solución a estas situaciones depende de la relación escogida: horizontal: entre un espacio de medida y otro; o vertical: al interior del mismo espacio de medida. La primera es llamada relación funcional y la segunda recibe el nombre de relación escalar.
Los estudiantes al dar solución a este tipo de problemas realizan un análisis funcional empleando la siguiente formulación básica:

Simplificando las unidades.

$$\frac{X \textit{ pesos}}{250 \textit{ pesos}} = \frac{4 \textit{ libras de sal}}{1 \textit{ libra de sal}}$$

Despejando se obtiene:

$$X \textit{ kilos} = \frac{14 \times 12.500}{1} \qquad\qquad X \textit{ kilos} = \frac{230 \times 12}{1}$$

Que lleva a:

$$X \textit{ kilos} = 14 \times 12.500 \qquad\qquad X \textit{ kilos} = 230 \times 12$$

Estas ecuaciones representan la forma tradicional de plantear los problemas, donde se pasa por alto el análisis dimensional. Además con este tipo de planteamiento se ve claramente como estas situaciones multiplicativas son un caso especial de la regla de tres, solo que con denominador uno. Reafirmando así que la multiplicación es una relación cuaternaria.

Esta afirmación se puede evidenciar en el siguiente apartado: (figura 3.7 y figura 3.8)

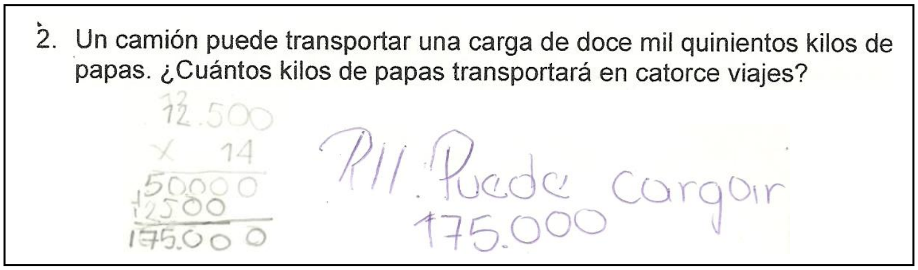


Figura 3.7

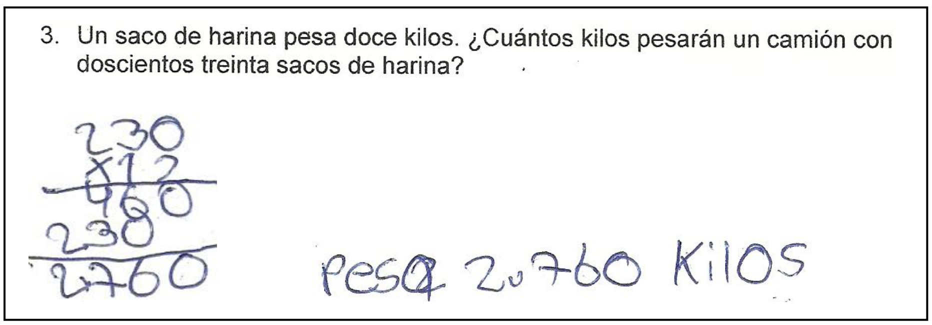


Figura 3.8

Se observa a través de esta actividad, que aunque el algoritmo utilizado para resolver la situación es la multiplicación de forma vertical, éste cumple el análisis funcional esbozado anteriormente, pasando por alto el análisis dimensional que en el proceso de resolución de la situación debería realizar el estudiante para llegar así, a la solución del problema y reafirmar que la multiplicación parte de una relación cuaternaria.

Dentro de la resolución de estas situaciones se encontró además, que no todos los estudiantes aplican este análisis funcional correctamente para resolver dichos problemas, obteniendo así una respuesta errada. Esto se debe a la falta de comprensión[43] de los enunciados[44] y la errónea

[43] Muchas de las dificultades que se han encontrado en la resolución de problemas aritméticos simples nada tienen que ver con la mala comprensión o ejecución de los algoritmos, sino con la lectura y

interpretación de los datos al planear la estrategia de resolución del problema.
Ejemplo de ello se puede demostrar en la figura 3.9

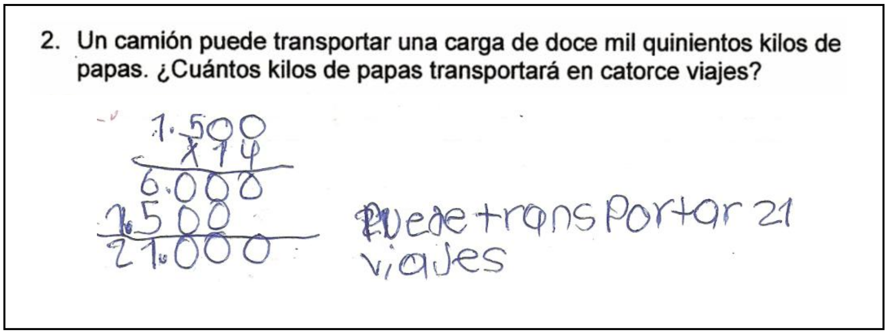


Figura 3.9

En este caso se evidencia la dificultad del paso de las cantidades establecidas en el problema de un lenguaje natural a un lenguaje matemático (traducción de las cantidades de forma escrita a simbólica), puesto que el estudiante, aunque establece la relación funcional entre las cantidades propuestas en el problema correctamente, no obtiene el resultado esperado, porque una de las cantidades operadas es incorrecta.

Aquí se evidencia entonces, un problema de interpretación en la traducción del lenguaje natural a un lenguaje formal. Esto es posible, pues los estudiantes se encuentran en edades tempranas y aun están aprendiendo a realizar una transposición del lenguaje corriente al lenguaje matemático.vease figura 3.10

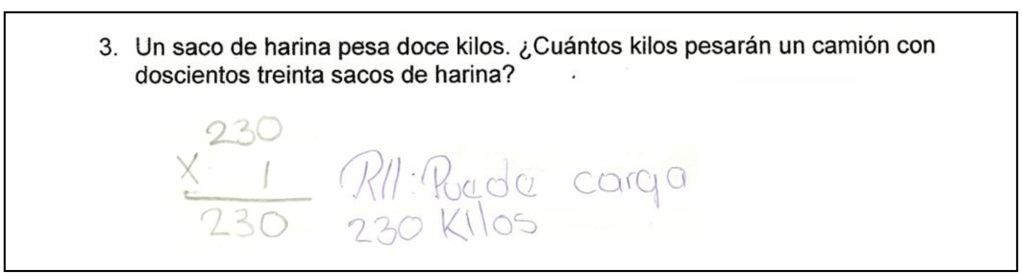


Figura 3.10

comprensión del enunciado, la selección y organización de las informaciones pertinentes dadas en el enunciado, y a la traducción de esta organización en términos matemáticos.
[44] El enunciado de un problema es un escrito matemático particular que tiene características propias, se puede decir que es un género literario bien caracterizado que necesita para su comprensión la adquisición de ciertas claves y algunas dosis de entrenamiento.

En esta segundo registro se puede observar que la relación funcional entre las cantidades para definir una estrategia de resolución adecuada no esta bien estructurada, puesto que no se tiene en cuenta por parte del estudiante las cuatro cantidades expuestas en el enunciado del problema.
Esta situación también se puede atribuir a un problema de comprensión del enunciado e interpretación de los datos propuestos en éste, lo que lleva a elegir una inadecuada estrategia para llegar a la solución del problema.

Problemas tipo producto de medida (análisis dimensional)

En esta actividad solo se trabajo un problema con este tipo de estructura. El problema se observa en la figura 3.11

¿De cuántas formas distintas te puedes vestir si tienes cinco camisas y cuatro pantalones?

Figura 3.11

Esta situación multiplicativa se puede representar mediante la relación ternaria entre tres cantidades (de tres espacios de medida diferentes) de las cuales una es el producto de las otras dos[45], tanto en el plano numérico como en el plano dimensional. El siguiente esquema representa este tipo de situaciones[46].

$M1 \times M2 \longrightarrow M3$

$A \times B \longrightarrow C$

El problema 1 representa este esquema empleando las siguientes cantidades

[45]Se consideran los números a y b como cardinales de dos conjuntos A y B, respectivamente, la multiplicación de a por b se define como el cardinal del producto cartesiano de los conjuntos A y B.
[46] En este caso **C** es la cantidad a encontrar.

A x B → C   M1 x M2 → M3

5 x 4 → C camisa x pantalones → formas de vestir

Este problema expone la característica fundamental de este tipo de relaciones multiplicativas: *el producto cartesiano*[47]. En este caso se pueden contar tres espacios de medida distintos: M1 (A): camisas; M2 (B): pantalones y M3 (C): formas de vestir. Este esquema expresa una relación funcional doble entre cada espacio de medida del primer miembro con el del segundo. Ratificando la función bilineal existente entre estos.

La estrategia de resolución escogida por los estudiantes para hallar la solución a esta situación no es muy clara, puesto que este tipo de problemas son poco trabajados en el aula de clase y esto lleva a que ellos no tengan clara la relación de las cantidades a operar y la comprensión e interpretación de lo mostrado en el enunciado se equivocado.

Esta situación se puede identificar en el siguiente apartado. Figura 3.12

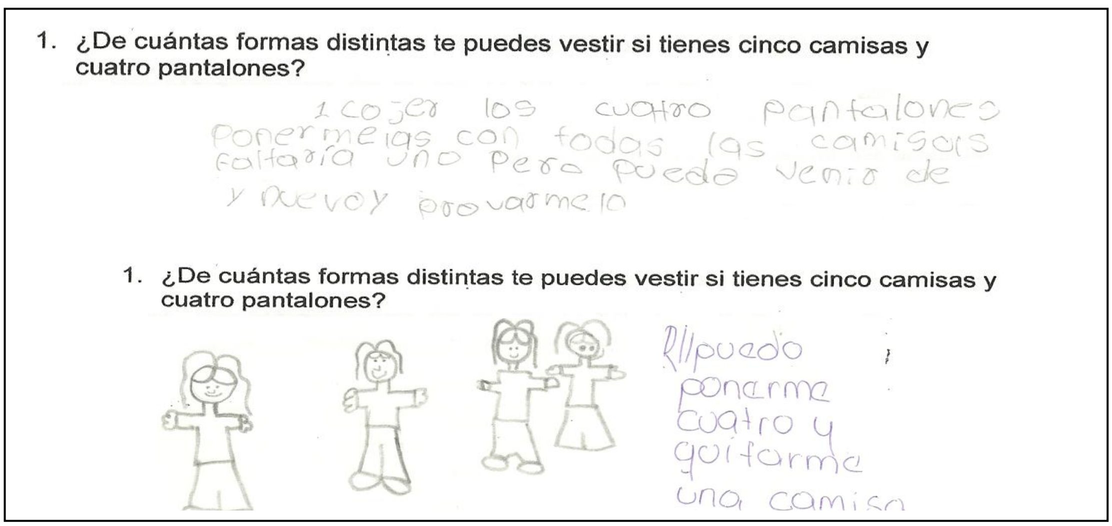


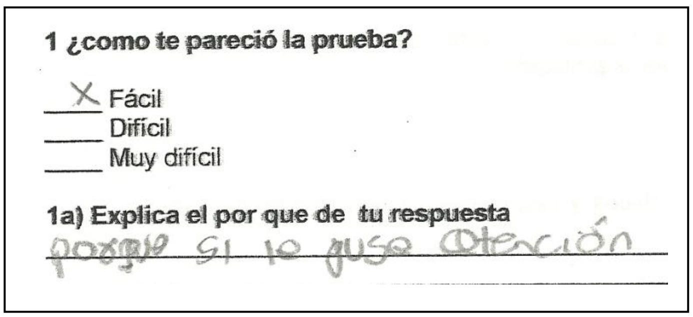
Figura 3.12

[47] En teoría de conjuntos, el *producto cartesiano* es un producto directo de conjuntos. En particular, el producto cartesiano de dos conjuntos X y Y, denotado por $X \times Y$, es el conjunto de todos los pares ordenados en los que el primer componente pertenece a X y el segundo a Y: $X \times Y = \{(x, y) \mid x \in X \ \wedge \ y \in Y\}$

El primer caso muestra una noción de lo que podría ser la resolución de un problema de tipo producto de medida, pues aunque no se tiene muy claro la relación de combinación (parejas ordenadas) entre las prendas de vestir, se tiene la idea de que éstas se deben usar todas y que en algún momento se realiza un intercambio entre estas para que todas sean utilizadas.

En el segundo apartado no se evidencia tal noción, la estrategia de resolución empleada es de tipo funcional uno a uno, es decir, que a cada camisa le corresponde un solo pantalón, quedando un pantalón sin camisa con que relacionarlo.

El concepto de producto cartesiano como mecanismo para resolver el problema no es claro en ninguno de los dos casos, por falta de acercamiento de los estudiantes con este tipo de situaciones problema, aunque estos afirmen que este es fácil resolverlo, porque asumen que sus respuestas son las correctas[48], resultado de poner atención a la explicación del profesor en el aula de clase (ver anexo 2). Figura 3.13


1 ¿como te pareció la prueba?

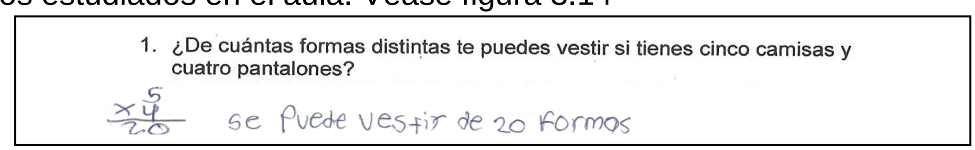
X Fácil
____ Difícil
____ Muy difícil

1a) Explica el por que de tu respuesta

porque si lo puse atención

Figura 3.13

Sin embargo, en casos como el siguiente, se puede ver que este tipo de problemas pueden ser resueltos por los estudiantes de forma correcta, empleando un análisis dimensional entre los espacios de medida, sin ser estos estudiados en el aula. Véase figura 3.14


1. ¿De cuántas formas distintas te puedes vestir si tienes cinco camisas y cuatro pantalones?

$$\begin{array}{r} 5 \\ \times 4 \\ \hline 20 \end{array}$$

se Puede vestir de 20 formos

Figura 3.14

48 Al finalizar cada sesión se realizó una socialización del trabajo desarrollado con el fin de indagar acerca de la concepción que tenían los estudiantes sobre éste tipo de problemas de producto de medida, ya que no son muy abordados en el aula. Al observar que los chicos solo tenían clara la relación uno a uno para dar la respuesta a los interrogantes planteados en las situaciones problema se representaron estas situaciones de forma vivencial (empleando los mismos estudiantes o llevando material didáctico como papelitos de colores o figuras) con el fin de que éstos comprendieran el concepto de producto de medida (producto cartesiano) y así lograrán replantear la solución que habían dado al problema.

En este caso es claro que el producto de unidades produce una nueva unidad, a saber, camisas X pantalones = formas de vestir.

Segunda actividad

En esta segunda actividad (ver anexo 5) se plantearon a los estudiantes de forma individual tres situaciones problema: uno tipo producto de medida y dos tipo isomorfismo de medida.

Se solicito de forma explicita que para la solución de estas no utilizaran algoritmos específicos (multiplicación vertical u horizontal), con el fin de que los estudiantes recurran a estrategias de resolución diferentes, las cuales permitan una mejor comprensión e interpretación del problema para estos.

<u>Análisis y resultados</u>

- Problemas tipo isomorfismo de medida (análisis escalar)

Los problemas propuestos en esta actividad con esta estructura son:

- La pista de atletismo del estadio mide dos mil quinientos metros. ¿Cuántos metros correré si doy ocho vueltas a la pista?

- Un día tiene veinticuatro horas. ¿Cuántas horas tendrán una semana?

Figura 3.15

Estas situaciones multiplicativas muestran nuevamente la proporcionalidad simple directa a través del siguiente esquema:

$$\begin{array}{ccc} E1 & & E2 \\ 1 & \longrightarrow & c \\ b & \longrightarrow & X \end{array}$$

Se establece de nuevo la relación multiplicativa cuaternaria fundamental, donde se estipula la correspondencia entre la unidad y el valor de la unidad, con base en la cual se puede hallar la cantidad solicitada en la situación a través de una pregunta.

El problema 2 y 3 constituyen esta relación de correspondencia empleando las siguientes cantidades.

$$\begin{array}{ccc} E1 & & E2 \\ 1 & \longrightarrow & 2.500 \\ 8 & \longrightarrow & X \end{array} \qquad\qquad \begin{array}{ccc} E1 & & E2 \\ 1 & \longrightarrow & 24 \\ 7 & \longrightarrow & X \end{array}$$

Como se puede observar dos de las cantidades hacen parte de un espacio de medida (1 y 8 representan número de vueltas a la pista para el problema 2; 1 y 7 representan números días de la semana en el problema 3), mientras que las otras dos son de otro (2.500 y X son las medidas de distancia recorridas vueltas dadas en la situación 2; 24 y X son medidas de tiempo en horas en la situación 3).

Para esta actividad se realiza un análisis escalar de la situaciones problemas presentadas a los estudiantes.

Este tipo de análisis implica dos etapas:

Una primera en la que se analiza que al multiplicar 1 por 8 se pasa de una vuelta a 8 vueltas en la pista[49] (problema 2); y al hallar el producto entre 1 y 7 se pasa de un día a 7 días (problema 3); y una segunda, en la que se concluye por tanto que al multiplicar 2.500 por 8 se obtiene la cantidad de kilómetros recorridos al dar 8 vueltas (problema 2) y al multiplicar 24 por 7 se consigue el número de horas que tiene una semana.

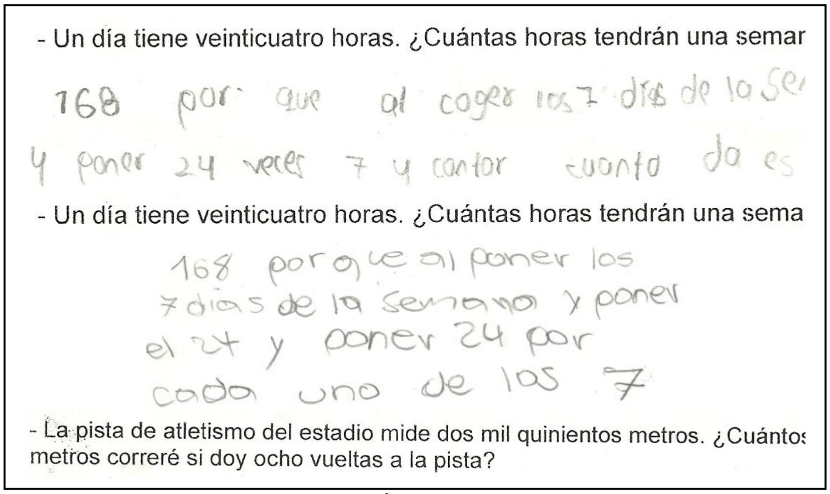
El cuadro siguiente resume de forma esquemática el análisis presentado anteriormente.

$$\begin{array}{cc} \text{Vueltas} & \text{Metros} \\ 1 & 2.500 \\ \downarrow \boxed{x8} & \downarrow \boxed{x8} \\ 8 & X \end{array} \qquad\qquad \begin{array}{cc} \text{Días} & \text{Horas} \\ 1 & 2.500 \\ \downarrow \boxed{x7} & \downarrow \boxed{x7} \\ 7 & X \end{array}$$

Los estudiantes al realizar estas situaciones problema no toman en cuenta la primera fase, por ser esta implícita dentro de la comprensión del enunciado y

[49] Esta primera fase, generalmente permanece implícita, pero sin ese análisis previo es imposible dar solución al problema.

presentan el proceso de resolución del problema de forma escrita, mostrando así, más claro el análisis escalar para la solución del problema planteados. Véase figura 3.16


- Un día tiene veinticuatro horas. ¿Cuántas horas tendrán una semar

168 por que al coger los 7 días de la se
y poner 24 veces 7 y contar cuanto da es

- Un día tiene veinticuatro horas. ¿Cuántas horas tendrán una sema

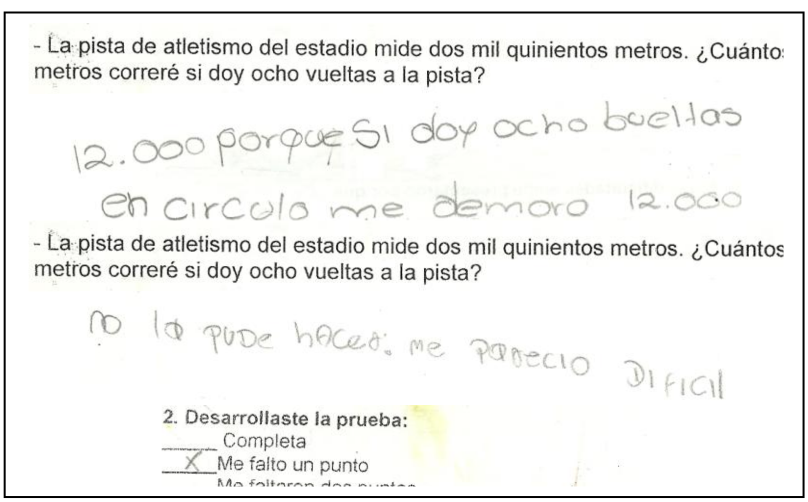
168 porque al poner los
7 días de la semana y poner
el 24 y poner 24 por
cada uno de los 7

- La pista de atletismo del estadio mide dos mil quinientos metros. ¿Cuántos
metros correré si doy ocho vueltas a la pista?

Figura 3.16

Al igual que en la actividad uno, los estudiantes presentan dificultades en la comprensión de los enunciados, motivo por el cual, su resolución y respuesta a la pregunta de las situaciones expuestas no es correcta y en algunos caso no es resuelta. Cabe anotar que además de las dificultades ya mencionadas, el hecho de no poder emplear un algoritmo para resolver estos problemas puede ser una causa de los resultados observados.

Esto se evidencia en el siguiente apartado. Véase figura 3.17.


- La pista de atletismo del estadio mide dos mil quinientos metros. ¿Cuánto
metros correré si doy ocho vueltas a la pista?

12.000 porque si doy ocho bueltas
en circulo me demoro 12.000

- La pista de atletismo del estadio mide dos mil quinientos metros. ¿Cuántos
metros correré si doy ocho vueltas a la pista?

no lo pude hacer me parecio dificil

2. Desarrollaste la prueba:
_____ Completa
__X__ Me falto un punto

Figura 3.17

Problema tipo producto de medida

En esta actividad sólo se trabajó un problema con este tipo de estructura. El problema se puede en la figura 3.18

> -¿Cuantos menús distintos puedo realizar si tengo cuatro platos de primero y seis de segundo?

Figura 3.18

Esta situación multiplicativa se puede representar, al igual que la primera actividad mediante la relación ternaria entre tres cantidades (de tres espacios de medida diferentes) de las cuales una es el producto de las otras dos, tanto en el plano numérico como en el plano dimensional. El siguiente esquema representa este tipo de situaciones[50].

$$M1 \quad x \quad M2 \longrightarrow M3$$
$$A \quad x \quad B \longrightarrow C$$

El problema planteado en esta actividad representa este esquema empleando las siguientes cantidades:

$$A \quad x \quad B \longrightarrow C \qquad\qquad M1 \quad x \quad M2 \longrightarrow M3$$
$$4 \quad x \quad 6 \longrightarrow C \qquad\qquad \text{plato 1} \quad x \quad \text{plato 2} \longrightarrow \text{Menús}$$

Este problema expone la característica fundamental de este tipo de relaciones multiplicativas: el producto cartesiano. En este caso se pueden contar tres espacios de medida distintos: M1 (A): plato 1; M2 (B): plato51 2 y

[50] En este caso **C** es la cantidad a encontrar.

[51] Aunque el enunciado del problema muestra que las cantidades a operar refieren al misma dimensión (platos), el hecho de que estos tengan un orden, refiere a que son distintos.

M3 (C): menús. Este esquema expresa una relación funcional doble entre cada espacio de medida del primer miembro con el del segundo.

Para la resolución de esta situación la estrategia de resolución escogida por los estudiantes para hallar la solución es más clara que en la actividad uno, puesto que hacen uso de un diagrama de árbol[52], el cuál los lleva a obtener una respuesta más acertada. Véase figura 3.19

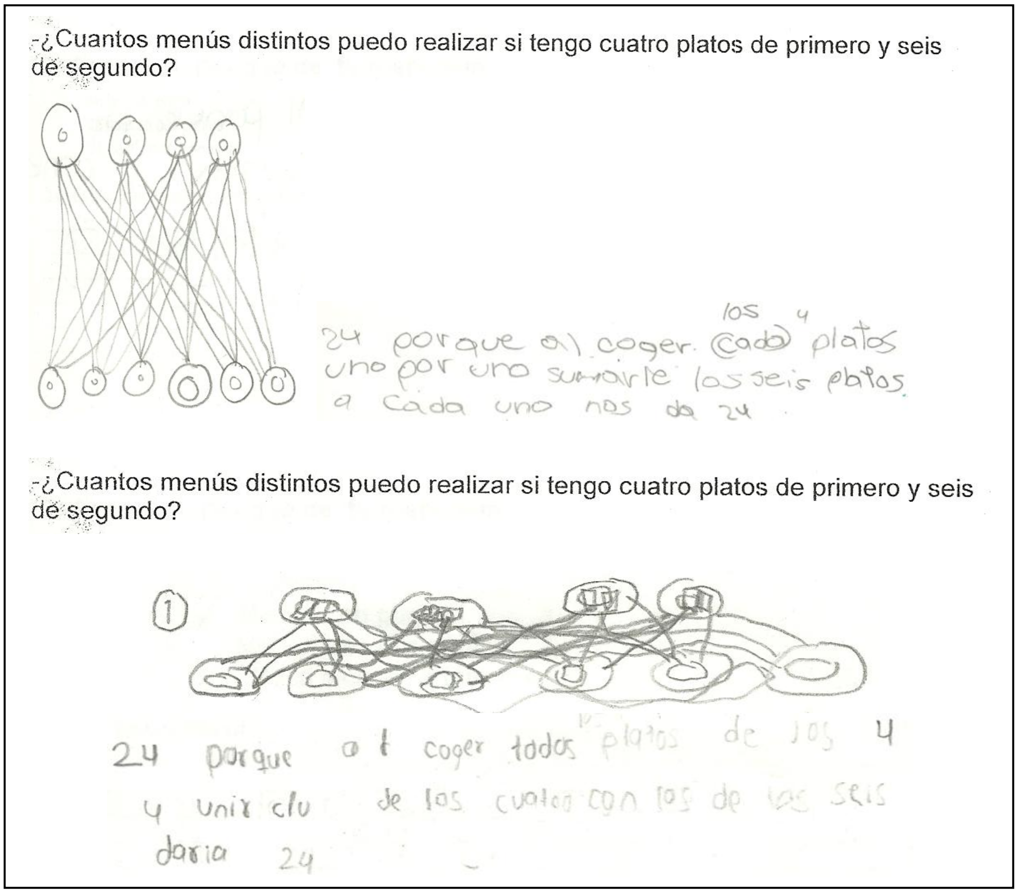


Figura 3.19

Estos dos apartados muestran que es posible desarrollar en el aula problemas de éste tipo y que no en todos los casos es indispensable el uso de un algoritmo para dar solución a un problema.

[52] Un diagrama de árbol es una representación gráfica de un experimento que consta de *r* pasos, donde cada uno de los pasos tiene un número finito de maneras de ser llevado a cabo.

Por otra parte, en situaciones como la que se presenta a continuación aun se evidencian dificultades para la resolución de problemas de este tipo, debido a la falta de comprensión del enunciado e interpretación de las cantidades a operar. Véase figura 3.20

> -¿Cuantos menús distintos puedo realizar si tengo cuatro platos de primero y seis de segundo?
>
> 10 porque seis mas cuatro igual a 10

Figura 3.20

En este caso interpretan los datos a operar como la suma de platos iguales, puesto que comprenden de manera inadecuada la pregunta del problema.

Tercera Actividad

En esta tercera actividad (ver anexo 6) se plantearon a los estudiantes de forma individual dos situaciones problema: uno tipo producto de medida y uno tipo isomorfismo de medida.

Se solicito de forma explicita que para la solución de estas no utilizaran algoritmos específicos (multiplicación vertical u horizontal), con el fin de que los estudiantes recurran a estrategias de resolución diferentes, las cuales permitan una mejor comprensión e interpretación del problema para estos.

Problema tipo isomorfismo de medida

El problema planteado en esta actividad se observa en la figura 3.21

> - El recorrido del autobús del colegio es de treinta y dos kilómetros. Si da cuatro viajes al día. ¿Cuántos kilómetros recorre cada día?

Figura 3.21

Este problema muestra al igual que los anteriores la relación cuaternaria entre las cantidades, dónde X designa la cantidad buscada.

$$\begin{array}{lcl} E1 & & E2 \\ 1 & \longrightarrow & c \\ b & \longrightarrow & X \end{array} \qquad\qquad \begin{array}{lcl} \text{Viajes} & & \text{kilómetros} \\ 1 & \longrightarrow & 32 \\ 4 & \longrightarrow & X \end{array}$$

Este esquema representa la tabla de correspondencia entre dos tipos de cantidades (viajes y kilómetros) dicho esquema aísla cuatro cantidades particulares en un cuadro más completo que representaría esta correspondencia; así, en esta situación solo se retienen del siguiente cuadro completo las cuatro cantidades señaladas.

$$\begin{array}{c|c} \text{Viajes} & \text{Kilómetros} \\ \boxed{1} \longrightarrow & \boxed{32} \\ 2 \longrightarrow & 64 \\ 3 \longrightarrow & 96 \\ \boxed{4} \longrightarrow & \boxed{128} \end{array}$$

Esta tabla de correspondencia traduce el isomorfismo de los dos tipos de medida. Por un lado 1 y 4 representan el número de vueltas, mientras que 32 y X identifican los kilómetros recorridos.

Los estudiantes, aunque no hacen una tabla de correspondencia como la que se muestra, a través de una grafica representan este tipo de análisis.

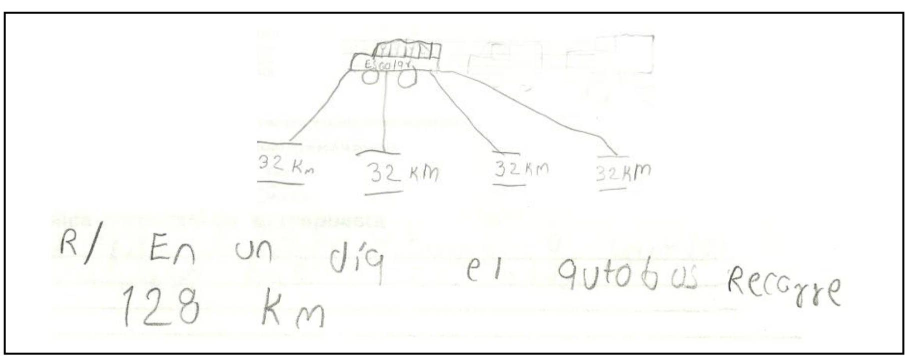


Figura 3.22

Se evidencia en este apartado que a través de la gráfica muestra la correspondencia desde que el automóvil da una vuelta hasta llegar a las cuatro vueltas. Evoca este proceso el concepto de multiplicación como suma reiterada, el cual no se descarta, dado que en la escuela es este esquema el más utilizado para resolver problemas multiplicativos, pero si se pretende mostrar que no es esta la única estrategia para resolver situaciones de éste tipo.

Al realizar un análisis funcional de este problema los estudiantes como estrategia de resolución plantean la siguiente formula:

$$\frac{\text{X kilómetros}}{\text{32 kilómetros}} = \frac{\text{4 viajes}}{\text{1 viaje}}$$

X kilómetros son a 32 kilómetros lo que 4 viajes es un viaje.

Despejando se obtiene

$$\text{X kilómetros} = \frac{\text{4 viajes x 32 kilómetros}}{\text{1 viaje}}$$

Suprimiendo el denominador, se obtiene:

X kilómetros = 4 x 32 kilómetros

Esta situación muestra una forma simplificada de la regla de tres (con denominador 1), demostrando así, que la multiplicación en juego no es una ley de composición, sino una relación más compleja en donde intervienen cuatro cantidades y no tres, como comúnmente se enseña en el aula de clase.

Esta relación se identifica en las respuestas dadas por los estudiantes, donde, aunque no muestran este análisis funcional entre las cantidades paso a paso, llegan al planteamiento de la última ecuación recuperando la forma tradicional de abordar el problema para darle una solución adecuada. Véase figura 3.23

- El recorrido del autobús del colegio es de treinta y dos kilómetros. Si da cuatro viajes al día. ¿Cuántos kilómetros recorre cada día?

el recorre 128 kilometros porque
32 x 4 me da 128

Figura 3.23

Problema tipo producto de medida

El problema dado a los estudiantes en esta actividad fue el siguiente: (figura 3.24).

- María tiene ocho pares de pendientes y siete collares distintos. ¿De cuantas maneras diferentes pueden combinarlos?

Figura 3.24

Esta situación problema plantea nuevamente la relación ternaria entre las cantidades (una es el producto de las otras), tanto en el plano numérico, como en el plano dimensional. Se identifica este análisis a través del siguiente esquema

$$M1 \quad x \quad M2 \longrightarrow M3$$
$$A \quad x \quad B \longrightarrow C$$

El problema planteado en esta actividad representa este esquema empleando las siguientes cantidades:

$A \quad x \quad B \longrightarrow C \qquad M1 \quad x \quad M2 \longrightarrow M3$

$4 \quad x \quad 6 \longrightarrow C \qquad$ pendientes x collares $\longrightarrow$ parejas

Este problema expone la característica fundamental de este tipo de relaciones multiplicativas: el producto cartesiano. En este caso se pueden contar tres espacios de medida distintos: M1 (A): pendientes; M2 (B): collares53 2 y M3 (C): parejas. Este esquema expresa una relación funcional doble entre cada espacio de medida del primer miembro con el del segundo.

Al resolver este producto se obtiene el conjunto C de parejas54 posibles entre pendientes y collares. El número de parejas es igual al producto del número de pendientes por el número de collares.

X parejas = 8 pendientes x 7 collares

Para los números para las dimensiones

X = 8 x 7 parejas = pendientes x collares

Los estudiantes al resolver esta situación plantean el producto cartesiano a través de un diagrama de árbol, llegando así, a la respuesta correcta. Véase figura 3.25

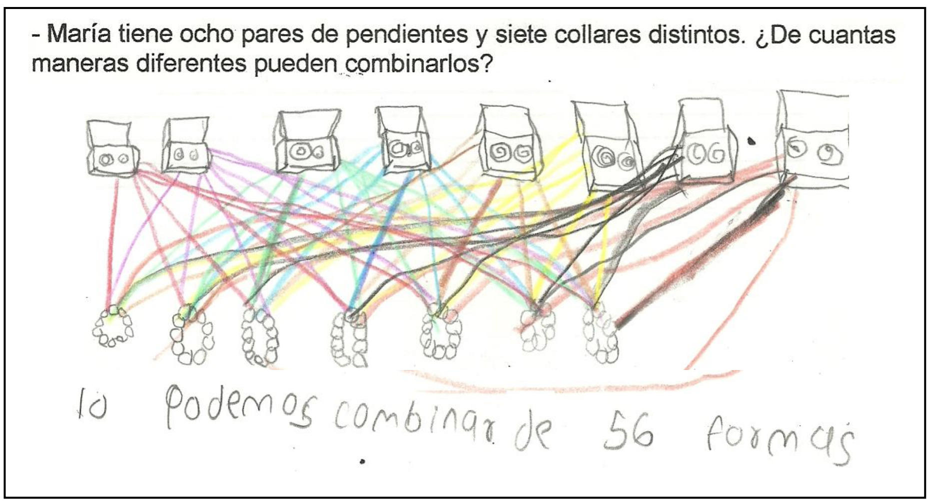
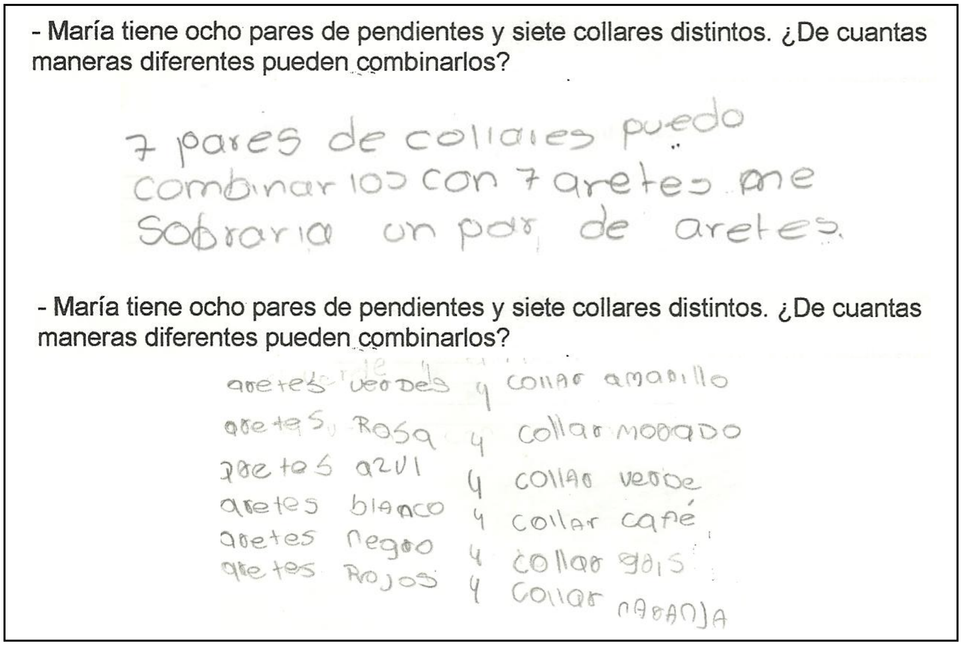


Figura 3.25

Sin embargo, aún se presentan casos en los que no se tiene claro el concepto de producto cartesiano y por esta razón la solución dada al problema no es la correcta. Véase figura 3.26

[53] Aunque el enunciado del problema muestra que las cantidades a operar refieren a la misma dimensión (platos), el hecho de que estos tengan un orden, refiere a que son distintos.
[54] Una pareja dentro del producto cartesiano consiste en la asociación de un elemento del primer conjunto a un elemento del segundo.



- María tiene ocho pares de pendientes y siete collares distintos. ¿De cuantas maneras diferentes pueden combinarlos?

7 pares de collares puedo combinar los con 7 aretes me sobraria un par de aretes.

- María tiene ocho pares de pendientes y siete collares distintos. ¿De cuantas maneras diferentes pueden combinarlos?

aretes verdes y collar amarillo
aretes Rosa y collar morado
aretes azul y collar verde
aretes blanco y collar café
aretes negro y collar gris
aretes Rojos y collar naranja

Figura 3.26

Dentro de la resolución de estos problemas sólo se establece la correspondencia uno a uno (para collar solo un para de pendientes), pues no se tiene claro el proceso a seguir para dar una solución adecuado. Esto se presenta, porque este tipo de problemas son poco abordados por el maestro en el aula.

Cuarta Actividad

Esta última actividad (ver anexo 7) presenta un sólo problema tipo producto de medida.

Al igual que las tres últimas actividades se solicitó a los estudiantes que no realizarán una operación matemática para dar la solución a la situación presentada.

Problema tipo producto de medida

El problema presentado a los estudiantes fue el siguiente: (figura 3.27)

> - Se pueden combinar de veinte formas distintas camisas y pantalones. Si hay cinco camisas, ¿cuántos pantalones son necesarios?

Figura 3.27

Esta situación problema ilustra una forma de división[55] propia de esta relación multiplicativa, que no se puede confundir con las divisiones que derivan del isomorfismo de medida.

Para encontrar el número de pantalones, es necesario dividir el número de trajes[56] posibles entre el número de camisas, según como muestra la relación:

20 trajes = 5 camisas X *x* pantalones

Para los números	para las dimensiones
20 = 5 X *x*	trajes = camisas X *pantalones*
20/5 = *x*	trajes/camisas = *pantalones*

Un posible traje no es otra cosa que una pareja (posible camisa, posible pantalón).

Los estudiantes en el proceso de resolución de la situación problema hacen uso de diagramas de árbol para llegar a la solución correcta.

Véase figura 3.28

.

[55] Encontrar una de las medidas elementales cuando se conoce la otra, y la medida producto.

[56] Es importante aclarar que realizar esta división implica que el estudiante reconozca que un traje no es otra cosa que una combinación de pantalón y camisa, es decir una pareja.

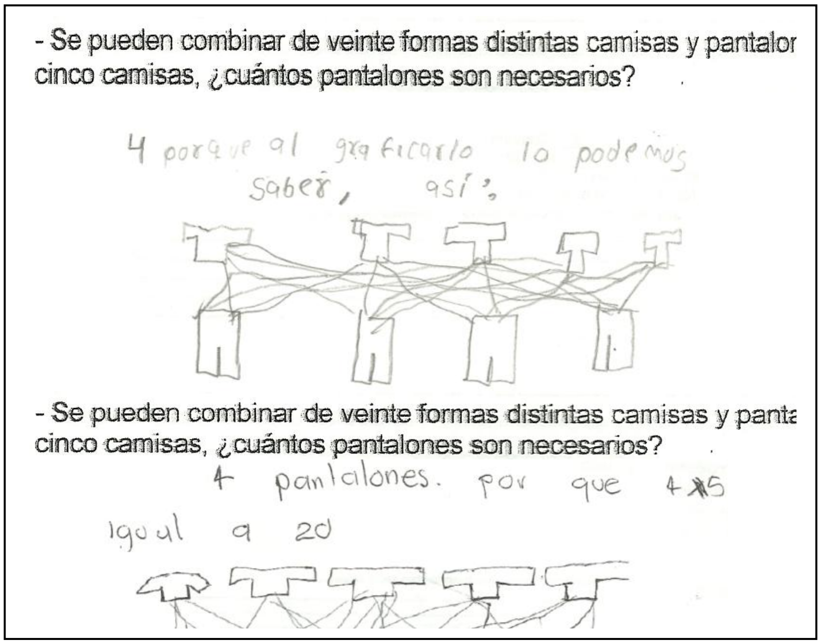


Figura 3.28

Es interesante observar que en algunos casos los niños dan respuesta a esta situación de forma escrita, justificando claramente sus afirmaciones. Véase figura 3.29

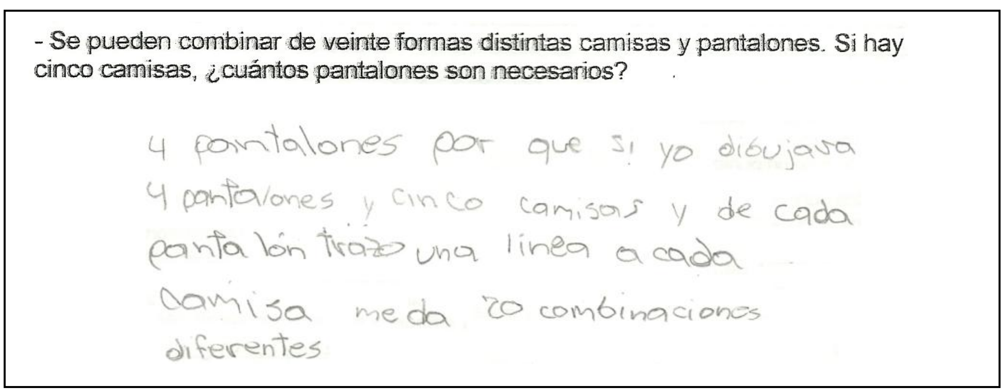


Figura 3.29

Este apartado muestra que es posible llevar al estudiante a un pensamiento estructurado, el cual puede ser expresado de forma escrita para ser comprendido por otros.

No obstante, es pertinente mostrar que en algunos casos los estudiantes continúan realizando una correspondencia uno a uno entre cantidades a operar o realizan otra operación distinta de la división, puesto que no comprenden bien el enunciado del problema y por ende interpreta inadecuadamente la operación a ejecutar. Véase figura 3.30

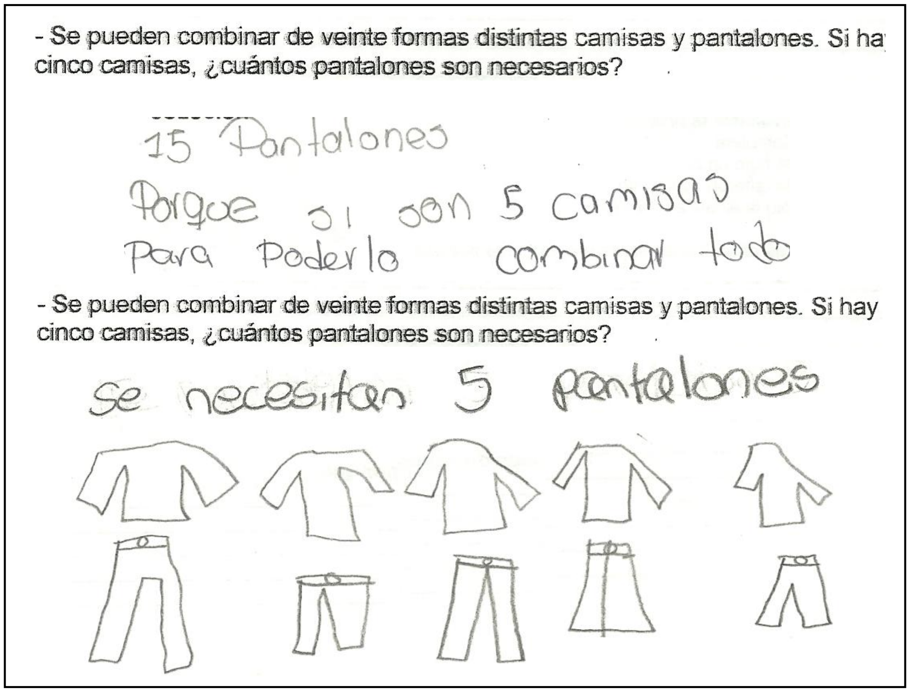


Figura 3.30

CONCLUSIONES

- La teoría de los campos conceptuales le permite al docente comprender la complejidad de los fenómenos que involucran el aprendizaje de las matemáticas, sobre todo en la educación básica. Esta compresión es clave para el diseño de situaciones que permitan un aprendizaje significativo a los alumnos.

- Desde la perspectiva teórica de los campos conceptuales se pueden elaborar secuencias didácticas que permitan a los estudiantes tener contacto con temáticas de la matemáticas, mucho antes de que emprendan su estudio formal en la secundaría, lo cual lograra un mejor aprendizaje en los cursos superiores.

- La resolución de problemas aritméticos son un medio a través del cual se pueden enseñar las estructuras multiplicativas expuestas por Vergnuad en los primeros años de escolaridad.

- Los maestros no proponen problemas multiplicativos de isomorfismo de medida y producto de medida, con el fin de movilizar el conocimiento de estas estructuras en el aula, puesto que desconocen el manejo de estas desde la teoría de los campos conceptuales.

- los estudiantes pueden resolver problemas multiplicativos que contengan las estructuras multiplicativas de isomorfismo de medida y producto de medida.

- Tanto los docentes como los libros de texto proponen problemas aritméticos con estructura tipo isomorfismo de medida. Por esta razón los estudiantes tienen menos dificultades al planteárseles situaciones problema con esta estructura.

- Los estudiantes pueden a través de la resolución de problemas conocer de la aplicabilidad de las estructuras multiplicativas y así, ampliar sus conocimientos respecto a éste objeto matemático.

- A través de la secuencia didáctica propuesta, los estudiantes resolvieron problemas multiplicativos tipo producto de medida correctamente, mostrando así, que es posible proponer en el aula situaciones de éste tipo.

- Es una tarea permanente que los docentes se documente y propongan en el aula secuencias didácticas de este tipo no solo para potenciar la resolución de problemas aritméticos y así desarrollar más el pensamiento analítico y crítico en los estudiantes.

BIBLIOGRAFIA

MAZA, G. C. (1991). Multiplicar y dividir a través de la resolución de problemas. Madrid: Visor.

CHAMORRO, M. C., VECINO, F.(2003). Didáctica de las Matemáticas para preescolar. Madrid: Pearson Educación.

CHAMORRO, M. C., VECINO, F.(2003). Didáctica de las Matemáticas para primaria. Madrid: Pearson Educación.

VERGNAUD, G. (1991). El niño, las matemáticas y la realidad: problemas de la enseñanza de las matemáticas en la escuela primaria. Trillas

PUIG, E. PÉREZ F. (1999). Problemas aritméticos. Madrid: Síntesis

BERNAL, C. (2006). Metodología de la Investigación. México: Pearson Educación.

CASTRO, E. RICO, L. CASTRO, E. (1995). Estructuras Aritméticas Elementales y su Modelación. México: Iberoamérica.

Rojano, T. (1994). La matemática escolar como lenguaje. Nuevas perspectivas de investigación y enseñanza. *Revista Enseñanza de las Ciencias,* Universidad Autónoma de Barcelona, España.

Vergnaud, G (1990) La teoría de los campos conceptuales CNRS y Université René Descartes. *Recherches en Didáctique des Mathématiques, Vol. 10,nº 2, 3, pp. 133-170, 1990*. Traducción de Juan D Godino.

Vergnaud, G. (1983). Multiplicative structures. In Acquisition of mathematics concepts and processes, ed. R. Lesh and M. Landau. 127-174. New York: Academic Press. Pearson.

VERGNAUD G. (1982), Cognitive and developmental psychology and research in mathematics education: some theoretical and methodological issues. For the Learning of Mathematics.

Hoc, J. M.: Psychologic cognitive de la planification, PUF. 1987

[1] GRECO, P.: “Structures et Significantions”, prefacio de la obra BIDEAU, J.: *logique et bricolage chez l`enfant, Lille, P.U.L. 1998*

ANEXOS

Anexo 1

Universidad del Valle

ENCUESTA A DOCENTES DEL AREA DE MATEMATICA.

NOMBRE: ____
INSTITUCION DONDE LABORA: ______________________________
PUBLICO [ ] PRIVADO [ ] ESTRATO: ______
TIEMPO LABORADO EN DICHA INSTITUCION: ____________________
GRADO(S) EN QUE ENSEÑA: ________________________________

1. ¿QUE CONSIDERA USTED QUE ES UN PROBLEMA MATEMATICO?

2. ¿DENTRO DE SU CLASE DE MATEMATICAS IMPLEMENTA LOS PROBLEMAS?
   SI ____ NO ____
   ¿POR QUÉ?

3. QUE TIPO DE PROBLEMAS PROPONE A SUS ESTUDIANTES. EJEMPLIFIQUE SI ES POSIBLE

4. ¿CUAL ES SU PROPOSITO CUANDO PLANTEA ESTOS PROBLEMAS?

5. ¿POR QUÉ DEBEN LOS ESTUDIANTES TRABAJAR EN MATEMÁTICAS PROBLEMAS?

6. ¿QUÉ HECHOS TE HACEN SENTIR QUE HAS REALIZADO UN BUEN TRABAJO ENSEÑANDO PROBLEMAS?

7. ¿COMO EVALUA USTED LOS PROBLEMAS?

8. ¿CREES TÚ QUE SE PUEDE ENSEÑAR ALGUN CONCEPTO A PARTIR DE LOS PROBLEMAS? MENCIONA ALGUNOS.

9. ¿QUÉ OTRAS ACTIVIDADES PIENSAS QUE SON RECOMENDABLES PARA ENSEÑAR MATEMÁTICAS?

10. ¿QUÉ ACTIVIDADES SON LAS MÁS RECOMENDABLES PARA ENSEÑAR MATEMÁTICAS?

Anexo 2

Universidad del Valle

NOMBRE: ____
FECHA: ____
COLEGIO: ____
GRADO TERCERO.

Al frente de la respuesta indicada escribe una X

1 ¿como te pareció la prueba?

_____ Fácil
_____ Difícil
_____ Muy difícil

1a) Explica el por que de tu respuesta
____
____
____
____
____
____

2. Desarrollaste la prueba:
______ Completa
______Me falto un punto
______Me faltaron dos puntos
_______No la alcance a terminar

2a) Estas dificultades seme presentaron por que…
____
____
____
____
____

Anexo 3

NOMBRE:____
FECHA:____
COLEGIO:____
GRADO TERCERO.

Lee las siguientes situaciones y luego responde cada pregunta. Escribe paso a paso lo que hiciste para resolver el problema.

- En una fiesta hay dos chicos y tres chicas. ¿Cuántas parejas distintas se pueden
Formar?

- ¿Cuántas canicas deberá comprar un abuelo para darle ocho a cada uno de sus cinco nietos?

- Un tren transporta cuarenta y nueve contenedores. Si cada contenedor pesa mil trescientos kilos, ¿cuántos kilos transporta?

SOLUCIÓN

Anexo 4

Universidad del Valle

NOMBRE: ____
FECHA: ____
COLEGIO:____
GRADO TERCERO.

Lee las siguientes situaciones y luego responde cada pregunta. Escribe paso a paso lo que hiciste para resolver el problema.

- ¿De cuántas formas distintas te puedes vestir si tienes cinco camisas y cuatro pantalones?

- Un camión puede transportar una carga de doce mil quinientos kilos de papas. ¿Cuántos kilos de papas transportará en catorce viajes?

- Un saco de harina pesa doce kilos. ¿Cuántos kilos pesarán un camión con doscientos treinta sacos de harina?

SOLUCIÓN

Anexo 5

Universidad del Valle

NOMBRE:____
FECHA:____
COLEGIO:____
GRADO TERCERO.

Lee las siguientes situaciones y luego responde cada pregunta. Escribe paso a paso lo que hiciste para resolver el problema.

NOTA IMPORTANTE: NO UTILICES UNA OPERACIÓN MATEMÁTICA PARA RESOLVER LAS PREGUNTAS.

-¿Cuantos menús distintos puedo realizar si tengo cuatro platos de primero y seis de segundo?

- La pista de atletismo del estadio mide dos mil quinientos metros. ¿Cuántos metros correré si doy ocho vueltas a la pista?

- Un día tiene veinticuatro horas. ¿Cuántas horas tendrán una semana?

SOLUCIÓN

Anexo 6

Universidad del Valle

NOMBRE:____
FECHA:____
COLEGIO:____
GRADO TERCERO.

Lee las siguientes situaciones y luego responde cada pregunta. Escribe paso a paso lo que hiciste para resolver el problema.

NOTA IMPORTANTE: NO UTILICES UNA OPERACIÓN MATEMÁTICA PARA RESOLVER LAS PREGUNTAS.

- María tiene ocho pares de pendientes y siete collares distintos. ¿De cuantas maneras diferentes pueden combinarlos?

- El recorrido del autobús del colegio es de treinta y dos kilómetros. Si da cuatro viajes al día. ¿Cuántos kilómetros recorre cada día?

SOLUCIÓN

Anexo 7

Universidad
del Valle

NOMBRE:____
FECHA:____
COLEGIO:____
GRADO TERCERO.

Lee las siguientes situaciones y luego responde cada pregunta. Escribe paso a paso lo que hiciste para resolver el problema.

NOTA IMPORTANTE: NO UTILICES UNA OPERACIÓN MATEMÁTICA PARA RESOLVER LAS PREGUNTAS.

- Se pueden combinar de veinte formas distintas camisas y pantalones. Si hay cinco camisas, ¿cuántos pantalones son necesarios?

SOLUCIÓN