ANÁLISIS HISTÓRICO Y EPISTEMOLÓGICO DE LA NOCIÓN DE CUADRATURA EN LOS LIBROS I Y II DE LOS *ELEMENTOS* DE EUCLIDES Y SU INCIDENCIA EN EL CONCEPTO DE ÁREA EN LA EDUCACIÓN BÁSICA.

JHONATAN HAR DUQUE NAVARRO 0543299

OSCAR EDUARDO MACA CORTÉS 0528611

UNIVERSIDAD DEL VALLE
INSTITUTO DE EDUCACIÓN Y PEDAGOGÍA
ÁREA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA

LICENCIATURA EN EDUCACIÓN BÁSICA CON ÉNFASIS EN MATEMÁTICAS

AGOSTO DE 2011

ANÁLISIS HISTÓRICO Y EPISTEMOLÓGICO DE LA NOCIÓN DE CUADRATURA EN LOS LIBROS I Y II DE LOS *ELEMENTOS* DE EUCLIDES Y SU INCIDENCIA EN EL CONCEPTO DE ÁREA EN LA EDUCACIÓN BÁSICA.

JHONATAN HAR DUQUE NAVARRO 0543299

OSCAR EDUARDO MACA CORTÉS 0528611

DIRECTOR: SERGIO IVÁN VALENCIA MARÍN

UNIVERSIDAD DEL VALLE
INSTITUTO DE EDUCACIÓN Y PEDAGOGÍA
ÁREA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA

LICENCIATURA EN EDUCACIÓN BÁSICA CON ÉNFASIS EN MATEMÁTICAS

AGOSTO DE 2011

Nota de aceptación

____

____

____

____

Jurado

____

Edgar Fernando Gálvez Peña

Jurado

____

Diego Garzón Castro

Santiago de Cali, Agosto de 2011

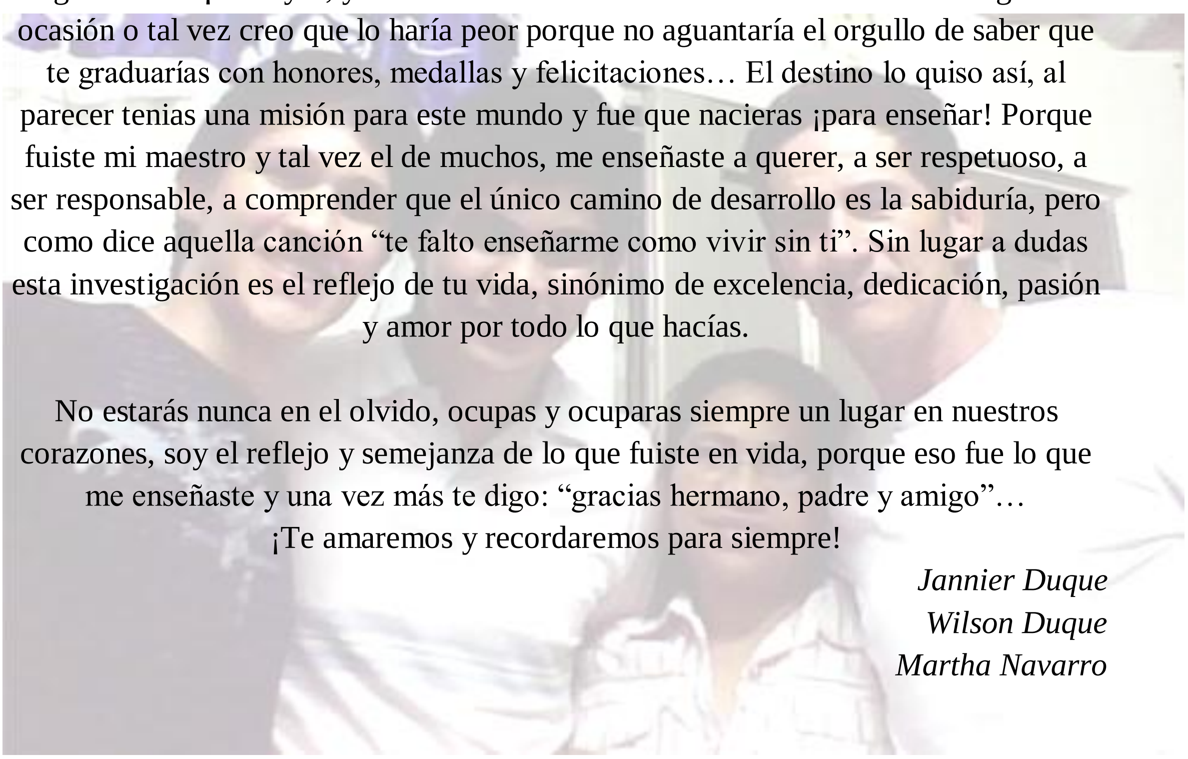
DEDICATORIA A JHONATAN HAR DUQUE NAVARRO

En la vida es necesario aceptar que hay un momento para nacer y otro para morir… Es totalmente incomprensible tu partida, tu ausencia y vacio que dejas en lo más profundo de nuestras almas porque sentimos que la vida nos arrebato la mitad de nuestros corazones. Aunque a Dios gracias doy por haberme permitido vivir 18 años 5 meses 27 días y escasas dos horas del amanecer de aquel 27 de noviembre de 2009 donde pude gozar por última vez de su alma armoniosa, tranquila y alegre. Es tan fuerte tu partida que aun se siente tu voz, aun se siente tu sonrisa, aun se sienten tus carcajadas, aun se siente tu felicidad, aun se sienten tus chistes, aun tenemos perfectamente grabadas en nuestras mentes tu imagen grande robusta de cejas tan pobladas que se encontraban una de la otra, cabello negro y rostro fino y un sin número de cualidades y características tan particulares y originales.

Soñaba con este momento, dentro de mis cuentas estaba el graduarme de la universidad al mismo tiempo en que lo harías, inclusive las fechas se cruzaban para que ambos entregáramos a nuestros padres el titulo que tanto merecemos, soñaba con este día, ese día donde ya se invertían los papeles y no eras tú el que filmaba mi graduación ¡si no yo!, ya no con la mano temblorosa como la hiciste en alguna ocasión o tal vez creo que lo haría peor porque no aguantaría el orgullo de saber que te graduarías con honores, medallas y felicitaciones… El destino lo quiso así, al parecer tenias una misión para este mundo y fue que nacieras ¡para enseñar! Porque fuiste mi maestro y tal vez el de muchos, me enseñaste a querer, a ser respetuoso, a ser responsable, a comprender que el único camino de desarrollo es la sabiduría, pero como dice aquella canción “te falto enseñarme como vivir sin ti”. Sin lugar a dudas esta investigación es el reflejo de tu vida, sinónimo de excelencia, dedicación, pasión y amor por todo lo que hacías.

No estarás nunca en el olvido, ocupas y ocuparas siempre un lugar en nuestros corazones, soy el reflejo y semejanza de lo que fuiste en vida, porque eso fue lo que me enseñaste y una vez más te digo: “gracias hermano, padre y amigo”…
¡Te amaremos y recordaremos para siempre!

Jannier Duque
Wilson Duque
Martha Navarro



AGRADECIMIENTOS

Este es el momento de entregar el producto de varios años de estudio, y culminar con éxito mi paso por la universidad, no debo olvidar que este triunfo es colectivo por tanto debo agradecer a las siguientes personas que son por demás producto de mi admiración y respeto:

En primer lugar, agradezco a mis *padres, hermanas y sobrinito*, quienes son la razón de mi vida y mi principal motivación para salir adelante, no sé qué sería de mi vida si ellos no estuvieran a mi lado, en cada paso, en cada proyecto, en cada sueño; los amo y este título es por ellos y para ellos.

A mis profesores de la Universidad del Valle, quienes con sus largas horas de enseñanza y dedicación guiaron por buen camino mi carrera universitaria. Ustedes: Ligia, Gálvez, Galeano, Garzón, Pabón, Norma y Sergio son sin duda alguna mi modelo a seguir profesionalmente.

A mi tutor Sergio Iván Valencia, quien con su infinita paciencia y sabiduría oriento por buen camino el trabajo de grado; me brindo todo su apoyo y confianza en los momentos en donde parecía desfallecer.

A mis compañeros y amigos que compartieron esas largas horas de estudio, los que estuvieron en el momento preciso y me brindaron su apoyo desinteresadamente, aquellos que colmaron mi dolor con un abrazo sincero y me regalaron momentos inolvidables de alegría.

A mi gran amigo, hermano y maestro *Jhonatan* infinitas gracias por haber hecho parte de mi vida, porque disfruté cada momento vivido, cada noche de estudio, cada risa, cada sueño. Fue muy tarde cuando comprendí que las lagrimas y el dolor no eran la forma de demostrar lo mucho que te admiraba, en cambio, el amor por la academia te va a mantener vivo en mis pensamientos, por eso, hoy quiero dedicarte cada página escrita de este trabajo y cada meta alcanzada.

“La muerte no nos roba los seres amados. Al contrario, nos los guarda y nos los inmortaliza en el recuerdo. La vida sí que nos los roba muchas veces y definitivamente”
FRANCOIS MAURIAC

TABLA DE CONTENDO

TABLA DE FIGURAS

RESUMEN

Este trabajo propone un análisis histórico-epistemológico del concepto de área presente en los *Elementos* de Euclides, en virtud de caracterizar algunas incidencias en el ámbito escolar respecto al tratamiento didáctico de la medida de superficies de figuras rectilíneas regulares e irregulares. Para tal fin, se apeló a la revisión de textos escolares de grado 7°, para determinar si en efecto hay o no hay, aportes, indicios o rastros que reflejen un tratamiento de la medida en la escuela desde el método de aplicación de áreas consignada en el libro II de los *Elementos.*

Palabras Clave: Área, Cuadratura, Equivalencia, Magnitud, Medida, Polígonos, Superficie.

INTRODUCCIÓN

Este trabajo propone analizar el concepto de área, noción que aparece implícitamente en el Libro II de los *Elementos,* libro que, pese a ser uno de los más cortos (con solo 14 proposiciones) tiene una gran importancia puesto que en su interior se logra solucionar el problema la cuadratura de figuras rectilíneas (poligonales): se establece que una superficie es cuadrable, cuando a partir de ella, es posible obtener geométricamente un cuadrado que sea de un área igual a la de dicha superficie.

La importancia del presente trabajo radica en el hecho de que al parecer en la escuela el cálculo de la medida de superficies se limita a la aplicación de fórmulas y a la sustitución de magnitudes por números, reduciendo el tratamiento de la medida a la *aritmetización*[1] de patrones de medida por demás estandarizados. Por otra parte, la medición de superficies generalmente se hace sobre polígonos regulares ya sea por recubrimiento con un patrón de medida y así por asignación numérica; o bien, mediante la aplicación de fórmulas predeterminadas o usando instrumentos de medida, dejando por fuera aquellas figuras planas donde no es posible la aplicación de una fórmula para calcular su área. De esta forma, se piensa que en la escuela la enseñanza del proceso de medición se está limitando a la mera asignación numérica, al respecto, los lineamientos curriculares de matemáticas establecen que:

> (…) *éste es apenas el último subproceso de un complejo proceso de medición, y uno al que no necesariamente hay que llegar para que se pueda decir que sí hubo medición* (MEN, 1998).

En tal sentido, se considera importante realizar, en primera instancia, un estudio histórico-epistemológico acerca de la noción de cuadratura de

[1] La aritmetización de la medida hace referencia al reemplazo de magnitudes por números, o el sustituir letras en las fórmulas por números para el cálculo de superficies.

polígonos[2] que dé cuenta de los desarrollos que ha permitido a lo largo de la historia en términos de las *técnicas* e instrumentos que se han ido especializando para realizar procesos de medición cada vez más aproximados, como el caso de las técnicas desarrolladas para la cuadratura de algunas figuras curvas (el empleo de la cuadratriz, la cuadratura de la lúnula, y el empleo del método exhaustivo como parte de la medida o cuadratura del círculo) que han sido posibles gracias a la cuadratura de figuras poligonales en general. Así, bajo esta perspectiva se quiere rescatar la génesis y consolidación de la noción de cuadratura, puesto que, permite dar cuenta de la complejidad que la rodea, de los múltiples aspectos que incidieron en su construcción histórica y además porque un estudio de tal tipo permite estudiar otros conceptos importantes que surgieron alrededor de ella. Lo anterior se refuerza en la medida que Anacona (2003) afirma que:

> (…) *Un estudio histórico-epistemológico que dé cuenta de la génesis, evolución y consolidación de un objeto matemático en el marco de unas condiciones socioculturales, contribuye a un conocimiento del concepto matemático que trasciende los meros procesos algorítmicos”* (p. 42).

En ese sentido, al dar cuenta de la génesis del concepto, este puede ser abordado desde distintos frentes evitando ocultar aspectos importantes que puedan servir de entrada o de base para la construcción de conceptos relacionados más complejos. Luego, hay que reconocer que el trabajo en historia de las matemáticas reúne elementos de reflexión para el trabajo en didáctica de las matemáticas, y es que no se puede negar que la medida de superficies y la noción de área como tal, son objeto de enseñanza en los primeros años de educación secundaria.

---

[2] El presente trabajo, no excluirá las reflexiones sobre la cuadratura de algunas superficies planas curvas, las cuales fueron fundamentales en el desarrollo de la noción de cuadratura y, solidarias con la cuadratura de polígonos.

Parece ser que en la escuela la enseñanza de la noción de área se contempla desde dos frentes claramente definidos: desde lo cuantitativo por asignación numérica y desde el tratamiento de las medidas relativas, es decir, cuando no se tiene una medida absoluta para asignar a una magnitud. Esta última, parece ser poco relevante en la cimentación de conceptos y procesos que implica el uso de la medida relativa.

Por tal razón, si se remonta a los inicios de la historia acerca de cómo se medía en la Antigüedad, se puede encontrar que la medida pasa por tres etapas[3]: la primera etapa es considerada por los pitagóricos, quienes tenían la firme convicción que para la actividad de medir solo se necesitaban los números usados para el conteo, afirmación que se fue desvaneciendo, al encontrar magnitudes que ya no se podían medir haciendo uso los números naturales. Fue necesario entonces, ampliar la actividad de medir a la segunda etapa o de la medida relativa; es en los *Elementos* de Euclides donde se consignan las teorías de medición sin el uso de la métrica o al menos donde no hay una definición formal de medida (Recalde, *sf*). Aquí realmente nos interesa el hecho de que Euclides pudiera construir en sus dos primeros libros de los *Elementos*, un cuadrado igual a cualquier figura poligonal dada, con el fin de resolver el problema de la cuadratura de figuras.

Sin embargo, a pesar de la importancia de la *segunda etapa*[4] en el proceso de medición, está no se logra evidenciar como eje central ni en los textos escolares ni en su enseñanza en la escuela, tal vez porque tradicionalmente se ha enseñado así o porque no existe un trabajo que comprenda este tipo de reflexiones y por ende se desconozcan aspectos importantes de la actividad de medir.

Es por ello que se considera importante indagar sobre el propósito que tiene Euclides en el libro II de los *Elementos*, en virtud de caracterizar un aporte didáctico

[3] Históricamente se pueden reconocer tres etapas en el desarrollo de la actividad de medir. Etapa primaria, Etapa relativa y Etapa abstracta. (Recalde. *sf*)
[4] No mencionamos la tercera etapa porque no es objeto de estudio en este trabajo.

respecto al tratamiento de la medida y así ampliar las nociones que sobre medida de superficies se tienen, tanto en el diseño de situaciones de aprendizaje como en las estrategias comúnmente utilizadas por los estudiantes para resolver tales situaciones. Estas circunstancias nos conduce a sentar las bases para intentar "llenar estas lagunas", de modo que permitan en un trabajo posterior la formulación de situaciones de aprendizaje con una fuerte fundamentación histórica en la parte matemática, que permita estudiar la medida de superficies en general y desde distintos frentes; comprender que se puede establecer una equivalencia entre áreas de polígonos de diferente clase o forma; así como también tener nociones que permita establecer una relación de orden en cuanto a las magnitudes.

En concreto y teniendo en cuenta lo dicho hasta aquí surge la inquietud a este problema de investigación, *¿Cuáles pueden ser las incidencias, si las hay, de la noción de cuadratura consignada en el libro II de los Elementos de Euclides en relación con la enseñanza del concepto de área en el grado séptimo de la enseñanza básica?*

Para tal fin, el diseño de este trabajo seguirá la modalidad de monografía de compilación y de investigación. En el primer caso porque se realizará una compilación de textos, aunque no muy exhaustiva, sí lo suficiente para las necesidades de este trabajo. Es investigativa por la interpretación que se ha realizado de los textos para dar cuenta de los objetivos propuestos. En virtud de lo anterior, el presente trabajo se ha dividido en tres capítulos.

El primer capítulo tendrá en cuenta algunos de los referentes históricos que, cronológicamente, permiten dar cuenta de la génesis de la noción de cuadratura desde Hipócrates hasta Arquímedes y su incidencia en el desarrollo de los procesos de medición; además de caracterizar el tratamiento de la cuadratura de polígonos, presente en el Libro II de los *Elementos* de Euclides. Para tal efecto, se apeló, como fuente primaria, a los *Elementos* y, como fuentes secundarias, los análisis sobre la cuadratura exhibidos por Thomas (1957) y Heath (1921).

El segundo capítulo es de orden epistemológico. Pretende dar cuenta de los fundamentos teóricos del tratamiento de la medida relativa a lo largo de la historia en la construcción de la cuadratura, su importancia como objeto matemático en virtud de lo que ha permitido solucionar y aquello que ha implicado el hecho de poder encontrar un cuadrado equivalente a cualquier figura rectilínea dada. Para establecer dichos fundamentos teóricos se estudió el texto del profesor Luis Recalde, *Número Medida y Magnitud*. Asimismo, se expondrán los trabajos de Hilbert (1950), Pressiat (2002), con el ánimo de fundamentar teóricamente aquellos procesos recurrentes a la medida relativa, como la descomposición de polígonos y la noción la de *equivalencia* para referirse a polígonos con la *igual* superficie. Con ello, se pretende analizar y caracterizar epistemológicamente la importancia del Libro II de los *Elementos* en relación con la noción de cuadratura y su incidencia en el concepto de área.

El tercer y último capítulo se ha dividido en tres partes. En la primera parte se realizará una justificación teórica del concepto de área en la escuela desde los *Lineamientos Curriculares* (1998) y los *Estándares básicos de calidad* (2006), con respecto al pensamiento métrico y sistemas de medidas. La segunda parte, procederá a efectuar la revisión de textos escolares del grado 7° para el área de matemáticas, para ello se describió ampliamente los dos textos seleccionados,[5] en cuanto a su estructura temática de la noción de área rastreada. Por último, en la tercera parte se realizará un análisis de los resultados extraídos al revisar los textos escolares, ello, teniendo en cuenta algunos criterios de análisis expuestos en la obra de Arbeláez *et al.* (1999), y aunado con los análisis histórico y epistemológico realizados en las fases uno y dos respectivamente.

[5] Para llevar a cabo la revisión de textos se seleccionaron los siguientes textos escolares:
Nuevas Matemáticas 7 (2007), editorial Santillana.
Delta 7 (2009), editorial Norma.

Al término de esta última fase se analizará el concepto de área que se tiene en la escuela a través de los libros de textos escolares, con el fin de establecer una fundamentación teórica sobre la noción de área y así, dejar abierta la posibilidad del diseño de una micro-ingeniería didáctica que tenga como eje principal el diseño de actividades en cuanto a la medición de superficies planas irregulares, de modo tal que potencialicen el pensamiento métrico en los estudiantes.

CAPÍTULO I

DIMENSIÓN HISTÓRICA

La dimensión histórica, muestra la génesis y consolidación de la noción de cuadratura desde tres frentes. El primero tiene que ver con los trabajos anteriores a Euclides, realizados por quienes fueran los primeros en efectuar construcciones concernientes a la cuadratura del círculo: Hipócrates de Chios, quien construyó la cuadratura de la lúnula y con ello contribuyó a la primera cuadratura de un figura curvilínea; Hippias de Elis, quien construyó la cuadratriz, una herramienta que en principio se uso para trisecar el ángulo y después para intentar cuadrar el círculo; finalmente, Bryson y Antifonte, quienes fueran los precursores de la aproximación por polígonos, de lo que hoy conocemos por Arquímedes como el método exhaustivo.

El segundo frente lo constituye la solución al problema de la cuadratura de polígonos en Euclides, la cual radica en la culminación del libro II de los *Elementos*, en la proposición II -14, en la que se logra construir con regla y compás un cuadrado igual a una figura rectilínea dada. Euclides sustenta dicha proposición haciendo uso del resultado de las proposiciones de los libros I y II, en donde se comienza a evidenciar a partir de la proposición I-35, la transformación de figuras poligonales en su forma, pero conservando la misma área, es decir que establece una equivalencia entre dos polígonos no congruentes.

El tercer y último frente recoge el método exhaustivo, usado por Arquímedes para calcular el área del círculo, el cual consiste en demostrar que el área de éste se puede agotar al inscribir y circunscribir polígonos, pero siguiendo la condición establecida por Euclides en la proposición X-1 de los *Elementos*.

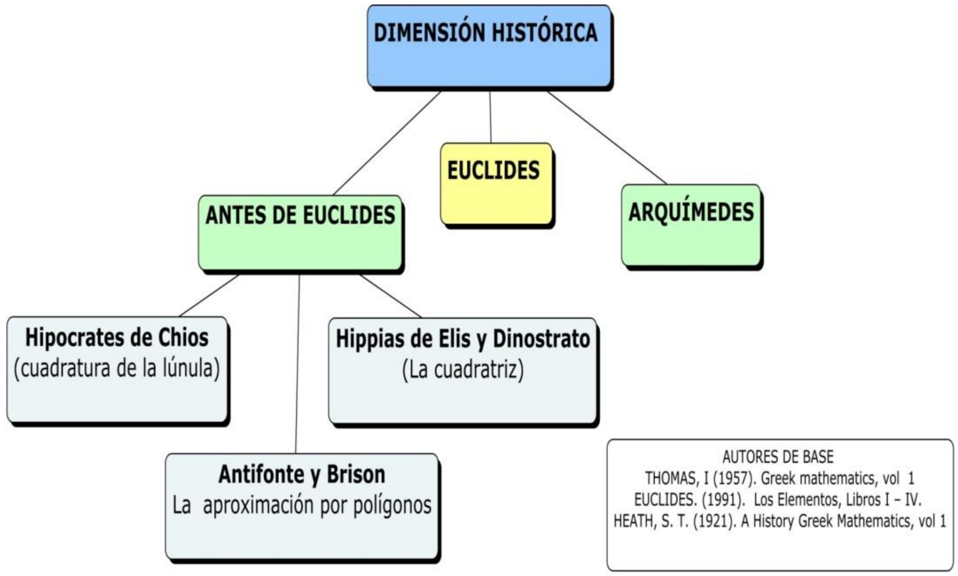


Figura 1. Esquema cronológico de la dimensión histórica.

1.1 LA CUADRATURA ANTES DE EUCLIDES

En la Antigua Grecia, uno de los tres problemas fundamentales de la geometría lo constituyó la cuadratura del círculo con regla y compás[6]. Tras haber llegado a cuadrar cualquier figura poligonal[7], los griegos pronto se interesarían por la cuadratura de figuras curvilíneas. Sin embargo, surgía entre ellos la inquietud de cómo lograr tal hecho teniendo en cuenta que ya habían resuelto la cuadratura para superficies rectilíneas. Entonces, si se podía obtener la medida de la superficie de

[6] Al parecer, en la geometría griega clásica, el pensamiento constructivista solamente le permite aceptar la veracidad de problemas cuya solución recurre al uso exclusivo de la regla y compás, lo cual tilda a la cuadratura del círculo como un problema "irresoluble," A pesar, de que la cuadratura del círculo se puede solucionar con otros métodos (la cuadratriz por ejemplo). Véase §1.1. estos no son aceptados por la comunidad matemática.

[7] Más adelante se tratara la cuadratura de figuras poligonales como eje central de este trabajo escrito, referenciado desde el trabajo que realizo Euclides en los libros I y II de los *Elementos.* (Véase §1.2)
El propósito de aludir al problema de la cuadratura del círculo es precisamente para resaltar la importancia y la influencia que tuvo la cuadratura de polígonos en la emergencia a la solución de dicho problema.

figuras rectilíneas muy complejas mediante la descomposición en figuras rectilíneas más sencillas, lo mismo podía ocurrir con las figuras curvilíneas y poder descomponerlas en suma de cierto número de figuras rectilíneas.

Al respecto varios autores citados a continuación tienen sus respectivos aportes, el orden en el que aparecen los autores corresponde a un orden cronológico.

1.1.1 HIPÓCRATES Y LA CUADRATURA DE LA LÚNULA

Hipócrates de Chios (450 a.C) es el primer matemático a quien se le reconoce un esfuerzo por intentar cuadrar el círculo. Sus intentos le permitieron construir (con regla y compás) un tipo de figura curvilínea llamada *lúnula*, y pensó que con este mismo procedimiento cuadraría el círculo, lo cual no fue posible para resolver el problema de la cuadratura; pero a pesar de eso a él se le reconoce por ser el primer matemático griego en lograr la cuadratura de una figura curvilínea.

De la obra de Hipócrates se conoce poco[8], y las únicas evidencias que reseñan el tratado de la cuadratura de la lúnula se encuentran en los comentarios que Simplicio dice haber copiado literalmente de la obra de Eudemo[9]. Alexander, que es citado por Simplicio[10] atribuye dos cuadraturas a Hipócrates, cuya demostración depende de uno de los teoremas utilizados por Hipócrates, donde *los segmentos semejantes de los círculos tienen la misma proporción que los cuadrados de sus diámetros*[11].

[8] Proclo dice que Hipócrates escribió los *Elementos de Geometría*, anticipándose en más de un siglo a los conocidos *Elementos*, de Euclides; sin embargo, el texto de Hipócrates se ha perdido, pero el libro de Hipócrates lo llegó a conocer Aristóteles (Boyer, 1989, p. 98)
[9] De esta obra de Eudemo, *Historia de la Matemática*, no hay rastro alguno.
[10] Ivor Thomas menciona esto en su obra (1957, vol. 1, p. 237). La obra de Simplicio a la que hace referencia Thomas corresponde a los *Comentarios a la Física de Aristóteles*.
[11] Eudemo le atribuye la demostración de este teorema al mismo Hipócrates, sin embargo en aquella época (digamos hacia el 430 a.C.) la teoría de proporciones se encontraba casi con toda seguridad en

Para construir la lúnula (con regla y compás), Hipócrates toma una circunferencia e inscribe en ella un cuadrado con sus respectivas diagonales, cuya intersección permite dividir el círculo en cuatro cuadrantes, formando sobre cada uno un triángulo rectángulo. Hipócrates hace esto, con el propósito de construir una lúnula por cada uno de los cuadrantes, permitiéndole abarcar más superficie del círculo. Así pues, la lúnula resulta de la intersección del semicírculo exterior a la circunferencia de diámetro AB, cuyo diámetro es la hipotenusa AC y el arco AFC (ver figura 2).

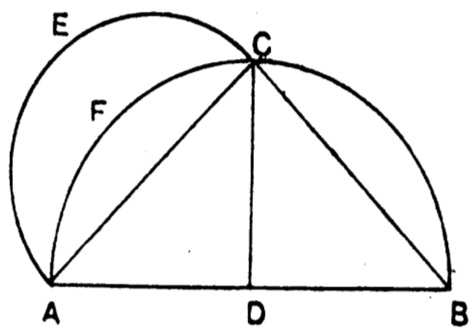


Figura 2. Construcción de la primera lúnula realizada por Hipócrates[12]

Por otro lado, la demostración que quedará en este primer capítulo permitirá ver los dos tipos de lúnulas que le son atribuidas a Hipócrates, la primera cuando inscribe un cuadrado y la segunda cuando inscribe un hexágono regular en la circunferencia.

Primera lúnula de Hipócrates

Esta demostración se fundamenta en primera instancia en inscribir un cuadrado en un círculo dado y en la relación que guarda dicho círculo con el círculo exterior que subtiende la lúnula, lo que establece una dependencia entre los dos círculos, tal

una etapa de desarrollo que la hacía aplicable únicamente a magnitudes conmensurables. (Thomas menciona esto en su obra (1957, vol. 1, p. 237). De ahí que es poco probable que Hipócrates lograra una demostración rigurosa. Euclides referencia este teorema en la proposición XII. 2, donde la demostración proviene de Eudoxo, un matemático que vivió a medio camino entre Hipócrates y Euclides.

[12] Figura tomada de la obra de Heath (1921. p. 185).

que uno tiene área igual al doble de la del otro, lo que hace que la demostración matemática sea hábilmente determinada, sujeta a estas condiciones previas.

Con el ánimo de aclarar un poco la demostración matemática Eudemo añade a la demostración hecha por Hipócrates alguna de las proposiciones referenciadas en los *Elementos* de Euclides, sin embargo, es importante aclarar esto para no caer en anacronismos, pues Euclides fue posterior a Hipócrates; pero Eudemo lo hace así porque es muy probable que Hipócrates tuviera las herramientas demostrativas planteadas en los *Elementos*. No obstante, queda planteada la discusión si Hipócrates conocía el resultado de XII-2, tal y como se discute arriba.

Las proposiciones añadidas por Eudemo se encuentran organizadas en los *Elementos* de la siguiente manera:

i. Proposición I-47 en los triángulos rectángulos el cuadrado del lado que subtiende el ángulo recto es igual a los cuadrados de los lados que comprenden el ángulo recto[13].
ii. Proposición III-31 En un círculo el ángulo en el semicírculo es recto. Es decir: el ángulo inscrito en una semicircunferencia es un ángulo recto.
iii. Proposición XII-2 Los círculos son uno a otro como los cuadrados de sus diámetros.

A continuación se describe la demostración de la primera lúnula[14], siguiendo la gráfica de la figura 2:

- Sean AC y CB, lados del cuadrado inscrito en la circunferencia ACB.

---

[13] La importancia de esta proposición será expuesta más adelante, cuando se profundice en la cuadratura de figuras poligonales en Euclides.

[14] Para facilitar la demostración al lector se ha utilizado la siguiente simbología:
Sem = semicircunferencia.
∢ = ángulo.
Ô = al sector circular comprendido por el diámetro y el arco de la circunferencia que describe la lúnula.

- Los lados AD y DB son iguales porque son radios de la circunferencia ACB.
- El ∢ ADC es recto.
- Como el lado DC también es radio de la circunferencia entonces es igual a AD y por tanto el triangulo ADC, es un triangulo rectángulo isósceles.
- El ∢ ACB, está inscrito en la semicircunferencia, por tanto el ángulo es recto. Por la proposición III, 31.
- Tenemos que $AB^2 = AC^2 + CB^2$, por la proposición I,47
- Pero como CB y AC son lados del cuadrado inscrito entonces $AB^2 = AC^2 + AC^2$, sumando términos semejantes tenemos que $AB^2 = 2AC^2$
- $\frac{sem\ \mathrm{ACB}}{sem\ \mathrm{AEC}} = \frac{\mathrm{AB}^2}{\mathrm{AC}^2} = \frac{2AC^2}{AC^2}$, por la *proposición XII- 2*, luego *sem* ACB = 2 *sem* AEC
- *sem* ACB = 2 cuadrante ADC
- *sem* AEC = cuadrante ADC
- Sem AEC – ÔAFC = cuadrante ADC – ÔAFC,

  Por tanto la Lúnula AEC = triángulo ADC.

De esta forma, Hipócrates concluye que el área de la figura curvilínea y el área de la figura rectilínea son equivalentes; resultado que escapa de lo estrictamente visual. Pero también es cierto que con este procedimiento era posible realizar operaciones entre áreas, pues el resultado que alcanza Hipócrates de establecer la equivalencia entre el área de la lúnula y su correspondiente triángulo rectángulo fue posible gracias a que Hipócrates determina que el cuadrante ADC es igual al semicírculo exterior AEC, y de ellos se puede extraer la superficie común que en este caso es el sector circular AFC[15].

De este modo, el resultado final de la demostración evidencia dos aspectos importantes en cuanto a la medida de superficies se refiere: primero establece una equivalencia entre dos sectores circulares de forma diferente (el cuadrante ADC con

[15] La sustracción de esta área se argumenta en los *Elementos* mediante la Noción Común 3: *si de cosas iguales se quitan cosas iguales los restos son iguales.*

el semicírculo exterior AEC), y segundo la forma como realiza la subdivisión en las figuras curvilíneas, de modo tal que estas pueden representarse como una adición de áreas de la siguiente forma:

Sem AEC = Lúnula AEC + ÔAFC
Cuadrante ADC = triángulo ADC + ÔAFC.

De manera similar se representa la sustracción de áreas como parte importante de la demostración, así se da dicha representación:
Sem AEC – ÔAFC = lúnula AEC
Cuadrante ADC – ÔAFC = lúnula AEC.

Así pues, una vez establecida la equivalencia entre la lúnula AEC y el triángulo ADC, la cuadratura de ésta seria igual a la cuadratura del triángulo, y para ese entonces el problema de la cuadratura de figuras poligonales ya estaba resuelto[16].

Segunda lúnula de Hipócrates

En la segunda construcción AB es el diámetro del semicírculo ALB, y CD es el diámetro del semicírculo CEFD, que es el doble del semicírculo ALB, y sobre el cual se describen los semicírculos CGE, EHF, FKD, cuyos diámetros CE, EF y FD son lados de un hexágono regular (ver figura 3).

De esta forma, se inscribe un hexágono regular, de tal forma que permita abarcar la mayor parte del área del círculo, con los triángulos que se forman en el interior del polígono inscrito en la circunferencia, es decir que entre más lados tenga el polígono inscrito más se podría abarcar el área del círculo.

[16] La cuadratura del triángulo se encuentra en la proposición I-42 de los *Elementos* de Euclides, dicha proposición será objeto de análisis más adelante en el parágrafo 1.2.1, pues es precisamente la cuadratura de figuras poligonales el objeto del presente trabajo.

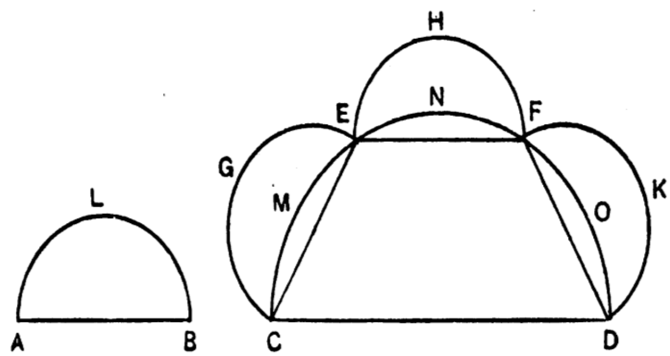


Figura 3. Construcción de la segunda lúnula realizada por Hipócrates[17]

Supóngase un punto P entre C y D, tal que CP = PD

- AB = $\frac{\mathbf{CD}}{\mathbf{2}}$ = CP
- CP = CE = EF = FD por propiedad del hexágono regular
- Sean los lados AB = CE = EF = FD, pues AB = CP
- $(CD)^2 = (CP)^2 + (PD)^2 = (AB)^2 + (AB)^2 = (2AB)^2 = 4(AB)^2$
- $(CD)^2 = 4(AB)^2 = (AB)^2 + (CE)^2 + (EF)^2 + (FD)^2$
- Luego por la *proposición XII, 2* tenemos que: $\frac{\text{sem CEFD}}{sem\ ALB} = \frac{(CD)^2}{(AB)^2} = \frac{4(AB)^2}{(AB)^2}$, de ahí que: sem CEFD = 4 sem ALB.
- sem CEFD = sem ALB + sem CGE + sem EHF + sem FKD
- sem CEFD – (ÔCME +ÔENF+ÔFOD) = sem ALB + (sem CGE- ÔCME) + (sem EHF – ÔENF) + (sem FKD- ÔFOD).
- Luego, de lo anterior queda que:
  Trapecio CEFD = sem ALB + lúnula CGE + lúnula EHF + lúnula FKD.

Luego conocida la cuadratura del trapecio y la cuadratura de cada lúnula, se podría encontrar el área del semicírculo ALB, no obstante lo anterior es falso, pues no

[17] Figura tomada de la obra de Heath (1957, p.186)

se puede suponer la cuadratura de estas lúnulas utilizando el resultado de la demostración anterior (cuando se inscribe un cuadrado), puesto que el triángulo que la subtiende a estas lúnulas no es rectángulo, y la relación entre las circunferencias no es la misma, así pues la falacia de esta demostración se da en suponer que estas lúnulas pueden ser cuadradas.

Por tanto, este método resultaría insuficiente en las aspiraciones de Hipócrates en llegar a cuadrar el círculo, lo cual pone en duda que el mismo Hipócrates hiciera esta demostración, y más aun que hubiera pensado que con este método hubiera resuelto el problema de la cuadratura del círculo; pues como una falacia tan evidente, un matemático tan prestigioso como él difícilmente se hubiera comprometido a dar tal resultado[18].

Por lo visto arriba, el resultado anterior no permite generalizar la cuadratura de *cualquier* lúnula, pero permite exhibir una figura curva que *se puede cuadrar* con regla y compás.

1.1.2 BRYSON Y ANTIFONTE. UN ACERCAMIENTO AL MÉTODO EXHAUSTIVO.

Al tiempo que Hipócrates y luego Hippias[19] trabajaban al respecto de la cuadratura del círculo, otro contemporáneo a Sócrates, Antifonte alrededor del 450 a.C[20] goza de ser el primero en dar una idea acerca del método de exhausión utilizado por Arquímedes.

Al parecer, el único problema matemático que preocupó a Antifonte fue precisamente el de la cuadratura del círculo. Para tal fin inicia el método de

---

[18]Para una discusión de este punto véase Thomas, (1957, p. 235, n. *b*)

[19] Hippias se discutirá más adelante en el parágrafo 1.1.3, donde se recurre a la construcción de una curva mecánica llamada cuadratriz, para dar una salida a la cuadratura del círculo.

[20] Más adelante en §1.3 se hará alusión al método de exhausión de Arquímedes como salida al problema de la cuadratura del círculo, luego se hará la distinción con respecto al método utilizado por Antifonte.

aproximación por polígonos, el cual consiste en inscribir un polígono regular en la circunferencia, y por cada lado del polígono inscrito, un triángulo isósceles con el vértice formado por los dos lados iguales en la circunferencia; y realiza este procedimiento sucesivamente (el de construir el triángulos isósceles) hasta llegar a un polígono de 2^{n+2} *l*ados, pensando que en algún momento el lado del último triángulo, aunque una línea recta, coincida con la circunferencia y conseguir un polígono regular aproximando el círculo hasta su límite (ver figura 4).

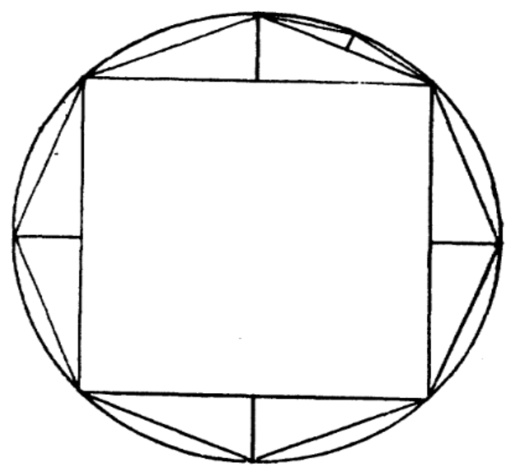


Figura 4. Aproximación por polígonos de Antifonte[21]

Al parecer, para Antifonte prevalece su percepción visual y no tiene en cuenta el principio geométrico de que las magnitudes son divisibles infinitamente,[22] lo cual no le permite aceptar que entre la circunferencia y el lado del triángulo siempre quedara una superficie tan *pequeña* como sea posible; lo cual una línea recta no

[21] La figura muestra cuando Antifonte inscribe un cuadrado en el círculo, comentario hecho por Simplicio, [citados en Thomas (1957, p.313)], sin embargo en este método se pueden inscribir otros polígonos regulares.

[22]Principio donde se establece que la división continúa del espacio entre la línea recta y la circunferencia del círculo nunca se agotaría ni llegará a la circunferencia del círculo, el espacio es realmente divisible sin límite. Comentario hecho por Eudemo en la obra Simplicio, [citados en Thomas (1957)].

puede coincidir con la circunferencia. Por tanto este resultado no podría ser posible, dado que siempre habrá un espacio entre la línea recta y la circunferencia.

De este modo, fue la misma capacidad del pensamiento sofista, de “manipular” la realidad y de construirla o explicarla a conveniencia, lo que le da poca credibilidad y aceptación a este método en el intento de cuadrar el círculo: al inscribir un polígono de *n* lados, se supone que esté agotaría círculo, en la medida que escaparía a la percepción (no se vería la diferencia) ese pequeño espacio entre la circunferencia y el lado del polígono. Es decir, se supone que es un espacio con un área *despreciable*, igual a cero.

Por otro lado, Bryson, alumno de Sócrates y contemporáneo a Antifonte, realiza una cuadratura del círculo más sofisticada que la del mismo Antifonte, pues no se limitó únicamente a los polígonos inscritos, sino que también circunscribió polígonos, para realizar aproximaciones que le dieran salida al problema de la cuadratura del círculo.

Así pues, Bryson inscribe y circunscribe los cuadrados *A* y *C* en el círculo *S* y entre los dos cuadrados toma otro cuadrado *B*[23]. Ahora bien, el argumento central de Bryson es que, dado que, el círculo se encuentra entre los dos cuadrados del mismo modo que el cuadrado está entre los dos cuadrados ($A<S<C$ y $A<B<C$), entonces las cosas son iguales, por lo tanto el círculo *S* y el cuadrado *B* son iguales (ver figura 5).

Dicho principio geométrico o noción a la que apeló Bryson es refutada por Alexander[24], pues estos no son propios de la geométrica, por ende deben ir más allá de lo estrictamente visual y perceptivo. Además un contraejemplo claro a este

[23] La manera en la que él tomó un cuadrado *B* intermedio entre los cuadrados inscritos y circunscritos es desconocido. Algunos han asumido que eso fue significado de la aritmética, otros que de otra geometría ver Heath (1957, p.223-224).
[24] Alexander, citado en la obra de Heath (1957, p.315), En comentario sobre Aristóteles.

principio se da en los números, porque ocho y nueve, son respectivamente, menos que diez y más que siete y sin embargo éstos no son iguales, de este modo Bryson no asume que el espacio bidimensional es continuo, y que puede existir otro cuadrado $\propto$ que este entre *A* y *C* que no sea igual a *B*, así que $\propto$ podría estar perfectamente entre *B y C* y así sucesivamente hasta encontrar infinitos cuadrados entre *A* y *B*; ello implica que existen infinitos cuadrados que son iguales al círculo *S*, lo cual sería un absurdo, pues estos cuadrados no son iguales entre sí, por tanto sería imposible establecer cuál de todos los posibles cuadrados es el equivalente al círculo *S*.

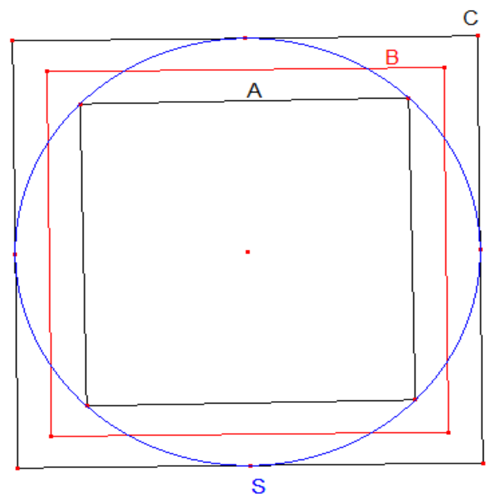


Figura 5. Método realizado por Bryson

Aunque los intentos de Bryson y Antifonte por cuadrar el círculo tienen problemas, aportan elementos muy importantes en cuanto a la medida de superficies se refiere, pues el método de inscribir y circunscribir polígonos en la circunferencia, permite comparar y establecer una relación de orden entre las magnitudes, lo cual aporta elementos suficientes para estimar la medida del círculo.

1.1.3 LA CUADRATRIZ HIPPIAS Y DINÓSTRATO[25]

Hippias de Elis, (400 a.C) y contemporáneo con Sócrates, descubrió lo que posiblemente fue una herramienta para cuadrar figuras curvilíneas. Aunque en primera instancia esta herramienta fue diseñada para resolver uno de los problemas fundamentales de la geometría griega, la trisección de un ángulo dado. Fue Dinóstrato, pupilo de Eudoxo quien utilizó la construcción de la cuadratriz (alrededor del 350 a. C.) para resolver otro de estos problemas, la cuadratura del círculo o mejor aún para encontrar la longitud de cualquier arco de un círculo.

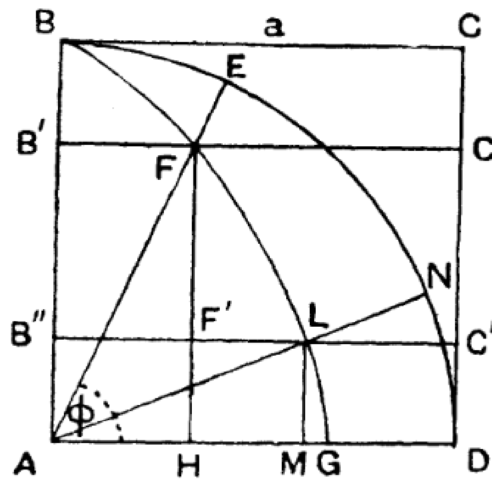


Figura 6. Método realizado por Hippias[26]

Construcción de la cuadratriz

ABCD es un cuadrado y BED es el cuadrante de la circunferencia con centro en A y radio AB. Así, la cuadratriz es una curva mecánica que resulta de la intersección de dos lados que se mueven a velocidad constante; El lado BC que se mueve de forma vertical y el radio AB, que se mueve angularmente describiendo el arco BED, ambas rectas AB y BC coinciden con el lado AD del cuadrado ABCD, así pues, la

[25] El método y la construcción de la cuadratriz se debe a una descripción hecha por Pappus, citado en el libro Heath (1957, p. 226)
[26] Figura tomada de la obra de Heath (1957, p.226)

trayectoria de la intersección de dichos lados produce la cuadratriz BFG (ver figura 6).

En esta construcción hay una problemática y tiene que ver justamente en el punto G, pues parece no aceptarse al llegar al final (límite) de donde debería estar este punto. Así pues el punto G debe asumirse o solo puede encontrarse asumiendo la proporción de la circunferencia con la línea recta; cabe mencionar, que para resolver el problema de la cuadratura del círculo, no es necesaria la cuadratriz, sino únicamente el punto G de la cuadratriz, que está sobre el lado AD del cuadrado.

Así pues, la demostración de la cuadratriz gira en torno a la posición exacta del punto G sobre el lado AD, pues este punto se definiría como el punto límite al que tienden los puntos de la cuadratriz cuando AB y BC se acercan a AD. Dicha demostración se realiza por el método de reducción al absurdo; primero se demuestra cuando AK > AG y luego cuando AK < AG. Para la demostración se toma como referente la *propiedad de la cuadratriz* dada por Hippias:

$\frac{\sphericalangle \mathrm{BAD}}{\sphericalangle \mathrm{EAD}} = \frac{\mathrm{arc\ BED}}{\mathrm{arc\ ED}} = \frac{\mathrm{AB}}{\mathrm{FH}}$, Luego se prueba que: $\frac{\mathrm{arc\ BED}}{\mathrm{AB}} = \frac{\mathrm{AB}}{\mathrm{AG}}$

Demostración de que la cuadratriz rectifica la circunferencia[27]

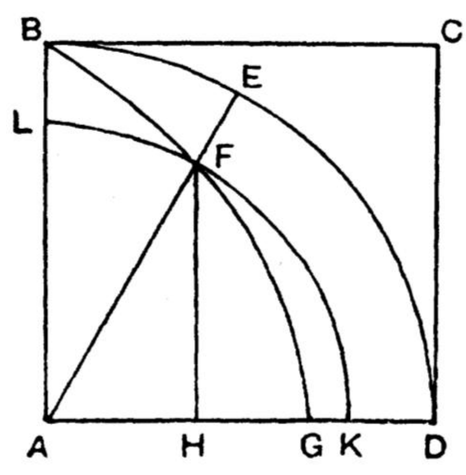


Figura 7. La cuadratriz Cuando AK > AG[28]

[27] Interpretación tomada de libro Heath (1957).

i. *Cuando AK > AG*

Supóngase que $\frac{\text{arc BED}}{\text{AB}} \neq \frac{\text{AB}}{\text{AG}}$

Si no es desigual entonces $\frac{\text{arc BED}}{\text{AB}} = \frac{\text{AB}}{\text{AK}}$

Con centro en A y radio AK se traza el cuarto de circunferencia KFL, cortando la cuadratriz en el punto F y AB en el punto L.

Extiéndase AF hasta E, de modo tal que AF corta el arc BED, en E.

Trácese FH$\perp$ AD.

Por hipótesis tenemos que $\frac{\text{arc BED}}{\text{AB}} = \frac{\text{AB}}{\text{AK}} = \frac{\text{arc BED}}{\text{arc LFK}}$ (Los círculos son uno a otro como los cuadrados de sus diámetros)[29]

Luego $\frac{\text{arc BED}}{\text{AB}} = \frac{\text{arc BED}}{\text{arc LFK}}$ Así, AB = arc LFK[30]

Por la propiedad de la cuadratriz se tiene que:

$$\frac{\text{AB}}{\text{FH}} = \frac{\text{arc BED}}{\text{arc ED}} = \frac{\text{arc LFK}}{\text{arc FK}}$$

Pero como AB = arc LFK, entonces $\frac{\text{arc LFK}}{\text{FH}} = \frac{\text{arc LFK}}{\text{arc FK}}$, luego FH = arc FK, lo cual es un absurdo, puesto que, cualquier arco de un círculo es mayor que la cuerda que lo subtiende, o sea que el arc LFK > que FH, puesto que FH sería la cuerda que subtiende dicho arco.

ii. *Ahora supóngase que AK < AG*

Hipótesis: $\frac{\text{arc BED}}{\text{AB}} = \frac{\text{AB}}{\text{AK}}$

---

[28] Figura tomada de la obra de Heath (1957, p. 228).

[29] Proposición XII-2 de los *Elementos* de Euclides

[30] La igualdad es netamente métrica. Es necesario aclarar esta igualdad, pues, al ser métrica está considerando que el dominio de las magnitudes lineales es reducible a algún tipo de patrón (el segmento rectilíneo) así como el universo de las magnitudes, se pretende reducir a los cuadrados.

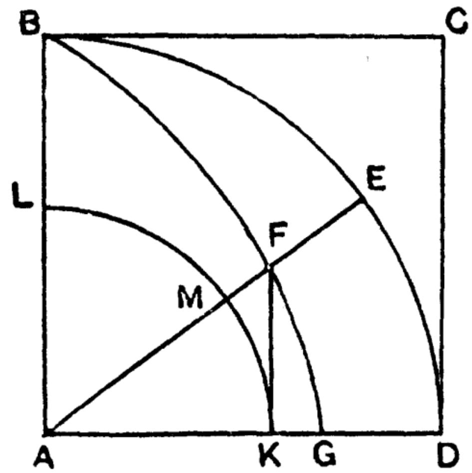


Figura 8. La cuadratriz AK < AG

Con centro en A y radio AK se traza el cuarto de circunferencia KML.

Se traza KF⊥ AD, alcanzando la cuadratriz en F.

Se traza AF y se extiende hasta E, de modo tal que AE intercepte el cuarto de circunferencia BED en E.

Por hipótesis $\frac{\text{arc BED}}{\text{AB}} = \frac{\text{AB}}{\text{AK}} = \frac{\text{arc BED}}{\text{arc LMK}} = \frac{\text{arc BED}}{\text{AB}}$, luego AB = arc LMK

Por la propiedad de la cuadratriz, $\frac{\text{AB}}{\text{FK}} = \frac{\text{arc BED}}{\text{arc ED}} = \frac{\text{arc LMK}}{\text{arc MK}}$

Luego reemplazo arc LMK por AB, $\frac{\text{arc LMK}}{\text{FK}} = \frac{\text{arc LMK}}{\text{arc MK}}$, luego FK = arc MK, lo cual es un absurdo, puesto que, cualquier longitud de arco menor a un cuadrante, es menor que el segmento de recta tangente acotada por los puntos de corte de los radios extremos del arco con dicha recta tangente (ver figura 8).

Por tanto se tiene que K = G, y $\frac{\text{arc BED}}{\text{AB}} = \frac{\text{AB}}{\text{AG}}$.

Ahora bien como Euclides prueba que si se tienen dos segmentos $\propto$ y β se puede encontrar un segmento x tal que: $\frac{x}{\propto} = \frac{\propto}{\beta}$ a esta igualdad se le conoce como la tercera proporcional de Euclides.[31]

Luego, si tengo AB y AG debo encontrar el segmento x tal que $\frac{x}{AB} = \frac{AB}{AG}$ donde x es rectilíneo. Entonces, tenemos que: $\frac{x}{AB} = \frac{AB}{AG} = \frac{arcBED}{AB}$ Lo que implica que: $\frac{x}{AB} = \frac{arcBED}{AB}$

Por tanto x = *arc BED*, luego 4x = 4 arc BED

Ahora bien, hasta aquí solamente se ha rectificado la circunferencia, entonces ¿cómo este método resuelve la cuadratura del círculo? La respuesta a este interrogante de una forma aritmética seria sencillamente decir que: si se tiene ¼ de la longitud de la longitud de la circunferencia, el área del sector circular BED es igual a la mitad de la longitud del arco multiplico por el radio, es decir que se obtiene ¼ del área del círculo, luego el área del círculo seria cuatro veces el área del sector circular BED.

Ahora, es menester mostrar geométricamente como obtener un cuadrado igual a un círculo. Para lo cual, se retoma que la propiedad para rectificar la circunferencia y posteriormente para cuadrar el círculo está determinada por el punto I, que cumple la siguiente propiedad (ver figura 9):
arc CB: AB :: AB:AI

También se mostro que existe un segmento rectilíneo x que es igual a la longitud del arco CB, sea AR igual a x. Sea AR es la prolongación de AC y BR$\parallel$CI.

---

[31] Proposición VI-11. *Dadas dos recta hallar la tercera proporcional.*

Y sea S el punto medio de AR. Luego se reemplaza la longitud del arc CB por AR tal que, AR: AB :: AB:AI

Finalmente como el área del sector circular ACB se determina por la mitad de la longitud del arco CB multiplicado por el radio AB. Pero como arc CB es igual a AR, tenemos que ½ arc CB es igual a AS. Por tanto, el área del sector circular ACB sería equivalente al rectángulo ASTB; y como es sabido el producto de AB por AS (lado por ancho) se representa geométricamente a través de un rectángulo. Luego el área del círculo seria igual a 4 veces el área del rectángulo ASTB.

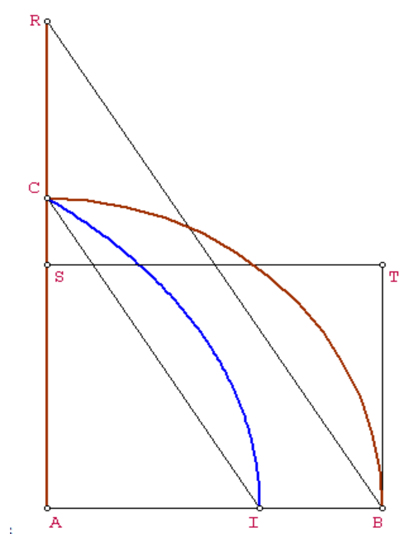


Figura 9. La cuadratriz como solución a la cuadratura del círculo[32]

Ahora bien, una vez se tenga un rectángulo con la misma área del sector circular ACB se lograría cuadrar el círculo, pues como se verá más adelante (§1.2.3) los rectángulo se puede cuadrar haciendo uso de la proposición II-14, y al mismo tiempo estos cuadrados podrían sumarse haciendo uso reiterado de la proposición I-47 (véase § 1.2.1), y así obtener un cuadrado con un área igual al área del círculo.

[32] Imagen tomada de la pagina web http://gaussianos.com/la-cuadratriz/

Como se ha apreciado en los apartados anteriores, el problema de la cuadratura consistió en construir un cuadrado igual a una figura dada *únicamente* con regla y compás. En ese sentido, la cuadratura de figuras curvilíneas no tuvo una solución satisfactoria, pues, o bien apelaban a supuestos que no estaban sustentados en algún marco teórico (continuidad del espacio, suponer que algo que a la percepción subjetiva es pequeño, entonces es *absolutamente* pequeño), o bien, recurrían a "herramientas" diferentes a la regla y el compás (la cuadratriz, arriba mencionada).

Ahora bien, el panorama no era desalentador, pues ¿por qué el propósito era cuadrar figuras curvilíneas? Es decir, ¿por qué no existía la preocupación por cuadrar figuras rectilíneas? La respuesta es simple: porque existía un método firme y claro para cuadrar polígonos. Este método está expuesto de una manera magistral en el Libro II de los *Elementos*. No obstante, surge de modo natural la siguiente observación: si Bryson, Antifonte y Dinóstrato eran predecesores de Euclides ¿no se estaría incurriendo en una suerte de anacronismo al suponer que Euclides encuentra la solución al problema de la cuadratura de polígonos? Ante lo cual se puede responder: Euclides pudo bien conocer ese resultado como un resultado "tradicional" de las matemáticas de su época, es decir, que el método de cuadratura de polígonos no es de invención *exclusiva* de Euclides, sino que él lo incorporó en un marco teórico, pero el método en sí mismo, es probable que fuese ampliamente conocido por los matemáticos anteriores a Euclides que se mencionan arriba.

Como argumento que da fuerza a esta hipótesis, se puede considerar lo mencionado arriba: los matemáticos anteriores a Euclides se interesaron solo por cuadrar figuras curvilíneas, lo que implica suponer que ellos ya consideraban un método para cuadrar polígonos. Se supone en este trabajo que este método que ellos consideraban era el mismo, o similar al que expone Euclides. Por todo lo anterior, es menester presentar el método en cuestión, el cual está expuesto en la proposición II, 14 de los *Elementos*. No obstante, este resultado es la punta de lanza de una serie de resultados relativos a la medida de superficies, los cuales no pueden ser pasados por alto. Este es el tema del siguiente apartado.

1.2 LA SOLUCIÓN "PARCIAL" A LA CUADRATURA POR EUCLIDES

Euclides de Alejandría (325 a.C – 265 a.C)**,** de su vida y muerte se conoce poco, lo que si parce ser cierto es que fue uno de los discípulos de Platón y fundó una escuela de matemáticas en Alejandría, hoy día Euclides es el referente más firme de la geometría, gracias a su obra los *Elementos*, que es sin lugar a dudas la obra más importante de todos los tiempos.

A diferencia de los otros matemáticos griegos citados en este trabajo, Euclides se desataca por utilizar métodos en los que recurre a procesos finitos a través del uso de proposiciones geométricas previamente demostradas y "aceptados matemáticamente" en cada una de sus proposiciones. Así pues, dicha obra se compone 465 proposiciones, 130 definiciones, 19 porismas, 17 lemas, 5 postulados y 5 nociones comunes, distribuidas a lo largo de sus 13 libros, que recopilan de forma ordenada los trabajos hechos por sus antecesores. La obra se enmarca en un sistema axiomático, es decir, parte de ciertos axiomas básicos para demostrar una proposición, de ahí está se deducen lógicamente como verdadera, para demostrar cada una de las otras proposiciones.

La obra de Euclides obedece a dos principios fundamentales: en primera instancia sus construcciones geométricas recurren al uso de la regla y compas como base fundamental y soporte de validez en cada demostración; en segunda instancia, la falta de un sistema numérico no le permitía realizar operaciones de forma algorítmica como las que hoy realizamos, por tal motivo, Euclides apela a la medida relativa[33] en cada una de sus proposiciones. No obstante en el siguiente apartado de evidenciara

[33] Obedece a las teorías de medición sin el uso de la métrica (Recalde, *sf*). A cerca de este tema se ahondara en el capítulo II.

algunas de las proposiciones que obedecen a dicho sistema axiomático, en busca del eje central de este trabajo escrito.

1.2.1 PROPOSICIONES IMPORTANTES DEL LIBRO I DE LOS ELEMENTOS DE EUCLIDES, QUE INCIDEN EN LA CUADRATURA DE POLÍGONOS

En el Libro I, entre la diversidad de tópicos que están presentes en él (teoría de paralelas, de triángulos, sobre congruencia), se destaca el denominado *método de aplicación de áreas*[34]. En este método, Euclides procede de dos maneras: en primer lugar, cuando efectúa "divisiones" de polígonos para transformarlos en otros, o para comparar las partes constitutivas de estos; en segundo lugar, Euclides muestra que ciertos polígonos son *iguales* a otros, pero apelando a un nuevo sentido de la igualdad: ya no es considerada la "igualdad" como una congruencia, sino que se toma como igualdad de áreas, es decir una equivalencia de áreas. Ello aparece por primera vez en los *Elementos* en la proposición I-35.

En primer lugar, Euclides establece la equivalencia entre paralelogramos y triángulos a través de la proposición I-41. Posteriormente, en la proposición I-44, construye un paralelogramo equivalente a un triángulo dado, sobre una recta y un ángulo rectilíneo dado. Luego, en la proposición I-45 utiliza las dos proposiciones anteriores (I-42 y I-44) para la construcción de un paralelogramo o un rectángulo igual a una figura rectilínea dada.

Por último, Euclides cierra el Libro I con la proposición I-47 conocida como "teorema de Pitágoras", demostrando la equivalencia de las áreas de los cuadrados de los lados adyacentes al ángulo recto, con el área del cuadrado del lado opuesto al mismo ángulo. No es gratuito que esta sea una de las proposiciones finales del libro I

[34] Método cuyo uso se remonta a los pitagóricos. La aplicación de áreas suele recibir en nuestro tiempo a partir de H.G. Zeuthen (1886) la denominación de "álgebra geométrica" de los griegos.

(es la conversa de I-47), pues su lugar como culminación del libro I permite interpretar que, en efecto, el propósito de este libro es esta proposición. Es decir, *todo* el Libro I tiene como objetivo, propiciar el andamiaje teórico necesario para demostrar esta proposición. De modo análogo, el objetivo central del Libro II lo constituye la proposición II-14 que corresponde, ciertamente, al método para cuadrar polígonos. No obstante, esta proposición (que es uno de los objetos centrales del presenta trabajo) se fundamenta en I, 47, por lo que se precisa caracterizar las proposiciones concernientes a la noción de área en el Libro I, especialmente, la proposición I-47.

Se exhibirán las proposiciones y la demostración de Euclides y, luego, se realizará una reflexión concerniente cada una de estas proposiciones, con el ánimo de evidenciar el tratamiento de áreas hecho por Euclides y que lo llevaron a la cuadratura de figuras poligonales.

PROPOSICIÓN I-42: *Construir en un ángulo rectilíneo dado (∢H) un paralelogramo (EFCD) igual a un triángulo dado (Δ ABC).*

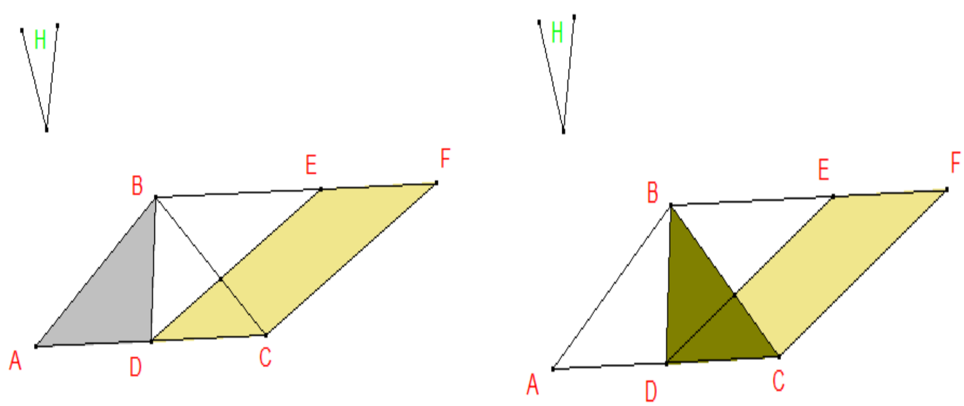


Figura 10. Construcción de la proposición I-42

En la construcción, D es el punto medio de AC, donde BF‖DC y DE‖FC y ∢H=∢CDE

Luego el Δ ABC es el doble del Δ BDC, porque están sobre bases iguales y entre las mismas paralelas. El paralelogramo EFCD es el doble del Δ BDC. Porque tienen la misma base y están entre las mismas paralelas[35]. Por lo tanto el Δ ABC es igual al paralelogramo EFCD (ver figura 10).

En esta proposición, se destaca dos características importantes en el método de aplicación de áreas expuesto por Euclides para tres figuras rectilíneas, que están condicionadas a tener las bases iguales y a estar entre las mismas rectas paralelas. La primera pone en correspondencia dos triángulos, que, siendo uno el doble del otro, implica una relación de orden entre magnitudes, pues ya se podría decir con certeza cuándo una figura es mayor o menor que la otra sin necesidad de asignar un valor numérico a la magnitud; para este caso el ΔABC es mayor el ΔBDC y, además, es el doble de éste. De igual manera, el paralelogramo EFCD es el doble del ΔBDC, pues la diagonal de un paralelogramo lo biseca en dos triángulos congruentes con base igual a la del paralelogramo, o sea, con la misma base del triángulo puesto en correspondencia.

La segunda característica, y quizá más importante que la anterior, consiste en que Euclides muestra la equivalencia de dos polígonos de diferente tipo: un paralelogramo "igual" a un triángulo. Resultado que para efectos visuales no se da de forma inmediata, pues no es fácil establecer la "igualdad" entre estos dos polígonos. En este sentido, la noción de "igualdad" a la que refiere Euclides aquí, no alude a la *congruencia* de Noción Común 7[36] y ni a los criterios de congruencia de triángulos (proposiciones I-4; I, 8 y I-24) sino que corresponde a la igualdad de área. Ahora bien, es importante señalar que esta igualdad se efectúa sin asignación numérica

[35] Ello es cierto por la proposición I-41: si un paralelogramo tiene la misma base que un triángulo y está entre las mismas paralelas, el paralelogramo es el doble del triángulo.

[36] "Cosas que coinciden entre sí son iguales entre sí". Aquí es clave el término "coincidir" ¿a qué se refiere Euclides con esto? Al parecer, se refiere a que sea posible poner los límites de un objeto *sobre* los límites de otro objeto, de modo tal que, como lo afirma, los objetos *coincidan*. Corresponde a la noción de "congruencia".

alguna. Sin embargo, Euclides demuestra dicha equivalencia haciendo uso de la Noción Común 1, de tal forma que hace corresponder tres polígonos entre sí, uno de ellos relacionado directamente con los otros dos; es decir, el ΔBDC es simultáneamente la mitad del ΔABC y del paralelogramo EFCD. Pero esta noción común no sería más que una aplicación de transitividad (véase §2.1) entre polígonos que son el doble de un mismo polígono, es decir:

$2(\Delta BDC) = \Delta\ ABC$ y $EFCD = 2(\Delta\ BDC)$

De ahí que Δ ABC sea igual al paralelogramo EFCD.

Ahora bien, esta proposición muestra la equivalencia (de áreas) entre un paralelogramo y un triángulo, pero no responde a la siguiente demanda ¿cómo transformo un triángulo en un paralelogramo de modo tal que tengan la misma área? Esto es sumamente importante, pues el arquetipo de la medida de superficies es el *cuadrado*. Ahora, un cuadrado es un caso particular de paralelogramo y, por tanto, se estaría a pocos pasos de cuadrar el triángulo.

Por otro lado, cuadrar el triángulo es sumamente importante, pues, como se verá en la proposición I-45, es necesario dividir en triángulos un polígono para cuadrarlo. Las proposiciones que dan cuenta de estos dos problemas se observarán a continuación.

PROPOSICIÓN I-44: *Aplicar a una recta dada en un ángulo rectilíneo dado un paralelogramo igual a un triángulo dado.*

Sea AB la recta dada, C el triangulo dado y D el ángulo rectilíneo dado.

Se construye el paralelogramo GBFE igual al triángulo C, (por la proposición I-42). Y sea el ∢GBE igual al ∢D y FKHL un paralelogramo y HK su diagonal, luego $FH \parallel EA \parallel KL$ y $HL \parallel GM \parallel FK$ (ver figura 11).

Tenemos que ∢GBE es igual al ∢ABM (por proposición I-15)[37].Luego GBHA y BEKM son paralelogramos situados en torno a la diagonal HK y FEBG y ABML los llamados complementos, entonces FEBG es igual ABML (proposición I-43) y como el ΔC es igual FEBG, entonces el ΔC también será igual al paralelogramo ABML. Así pues el paralelogramo ABML=ΔC

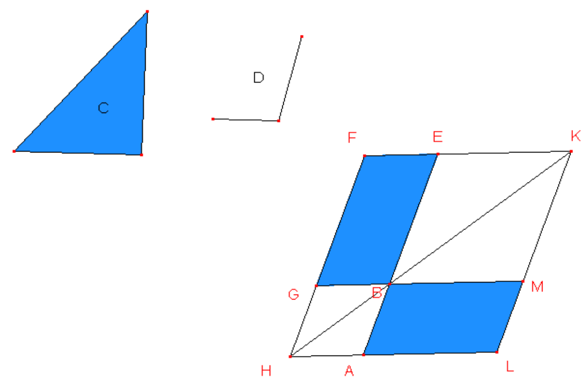


Figura 11. Construcción de la proposición I-44

Respecto a la importancia de esta proposición, Puertas[38] afirma que "Merece destacarse este resultado que permite la transformación de un paralelogramo de cualquier tamaño (FEBG) en otro (ABML) con el mismo ángulo y de área igual, pero con un lado de cualquier longitud dada." Dicho de otra forma, el resultado de esta proposición permite construir cualquier paralelogramo equivalente a un triángulo, a partir de un lado y un ángulo dado; pero además de eso, también permite construir varios paralelogramos equivalentes entre sí y estos equivalentes al mismo triángulo. Con este resultado se puede inferir que existen infinitos polígonos del mismo tipo (en este caso paralelogramos) equivalentes a un polígono dado, y claro está, existen polígonos de diferente tipo que son equivalentes entre sí.

---

[37] Proposición I -15. *Si dos rectas se cortan, hacen los ángulos del vértice iguales entre sí*. Dicha proposición me permite establecer la congruencia de los ángulos opuestos por el vértice.

[38] Comentario de María Luisa Puertas, en la traducción del libro de los *Elementos* (1991).

También cabe resaltar la importancia de predeterminar el lado y el ángulo de la figura poligonal que se quiere construir equivalente a un triángulo dado, pues así, se daría de construir cualquier paralelogramo equivalente o por lo menos con ciertas condiciones, en este caso un lado y su ángulo. Es claro que si se toma de modo fijo el ángulo como el ángulo recto, esta proposición permite construir un *rectángulo* igual a un triángulo dado, lo cual es capital, pues un cuadrado ya no solo es un paralelogramo particular, sino un rectángulo muy particular.

PROPOSICIÓN I-45: *Construir en un ángulo rectilíneo dado, un paralelogramo igual a una (figura) rectilínea dada.*

Sea ABCD la (figura) rectilínea dada y E el ángulo rectilíneo dado. Así pues, hay que construir en el ángulo dado E, un paralelogramo igual a la figura rectilínea dada ABCD.

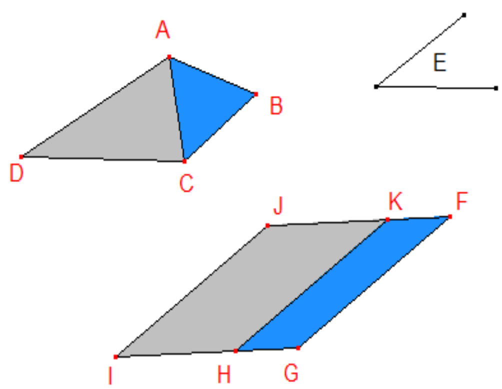


Figura 12. Construcción de la proposición I-45

***Construcción*:**

- Se traza AC, el ∢E = ∢HIJ, ∢E = ∢KHG.
- Se construye el paralelogramo HIJK igual al Δ ACD (por proposición I-42)
- Se construye sobre KH el paralelogramo GHKH igual al Δ ACB (por proposición I-44)

***Demostración*:**

Tesis: La figura rectilínea ABCD = paralelogramo GIJF.

- ∢KHG = ∢HIJ (por NC 1)[39]
- ∢KHG + ∢IHK = ∢HIJ + ∢IHK (por NC 2)[40]
- ∢HIJ y ∢IHK son iguales a dos rectos (por proposición I-29)[41]
- ∢KHG y ∢IHK también son iguales a dos rectos. (por NC 1)
- Luego IH está en línea recta con HG. (por proposición I-14)[42]
- ∢HKJ = ∢GHK (por proposición I-29)
- ∢HKJ + ∢HKF = ∢GHK + ∢HKF. (por NC 2)
- ∢GHK y ∢HKF son iguales a dos rectos (por proposición I-29)
- ∢HKJ y ∢HKF también son iguales a dos rectos. (por NC 1)
- Luego JK está en línea recta con KF. (por proposición I-14)
- IJ ‖ KH y IJ = KH (por proposición I-34)[43]
- KH ‖ FG KH = FG (por proposición I-34)
- Entonces IJ ‖ FG (por proposición I-30)[44]
- Luego JF = IG y JF ‖ IG (por proposición I-33)[45]
- Por tanto IJFG es un paralelogramo.
- Como el Δ ACD igual al paralelogramo HIJK y el Δ ACB es igual al paralelogramo GHKH, entonces la (figura) rectilínea entera ABCD es igual al paralelogramo entero IJFG.

---

[39] NC 1, (Noción Común 1). *Las cosas iguales a una misma cosa son también iguales entre sí*. Podría interpretarse esta noción común como la propiedad de transitividad entre ángulos.

[40] NC 2, (Noción Común 2). *Y si se añaden cosas iguales a cosas iguales, los totales son iguales*.

[41] Proposición I, 29. *La recta que incide sobre rectas paralelas hace los ángulos alternos iguales entre sí, y el (ángulo) externo igual al interno y opuesto, y los (ángulos) internos del mismo lado iguales a dos rectos.*

[42] Proposición I, 14. *Si dos rectas forman con una recta cualquiera y en un punto de ella ángulos adyacentes iguales a dos rectos y no están en el mismo lado (de ella), ambas rectas estarían en línea recta.*

[43] Proposición I, 34. *En las áreas de paralelogramos los lados y los ángulos opuestos son iguales entre sí, y la diagonal las divide en dos partes iguales.*

[44] Proposición I, 34. *Las paralelas a una misma recta son también paralelas entre sí.*

[45] Proposición I, 33. *Las rectas que unen por (los extremos que están en) el mismo lado a (rectas) iguales y paralelas son también ellas mismas iguales y paralelas.*

Esta proposición es sumamente valiosa en cuanto a la cuadratura de figuras poligonales se refiere, pues el método aplicado aquí por Euclides evidencia la descomposición de una figura poligonal o polígono irregular en triángulos que cubren toda la superficie sin superponer sus áreas. Una vez se descompone en triángulos, aplica las proposiciones I-42 y I-44 para corresponder cada triángulo un paralelogramo y finalmente componer estos paralelogramos para formar un solo paralelogramo que es el objetivo de la proposición.

Dicha descomposición de figuras poligonales en triángulos[46] resalta de alguna forma la importancia que tiene el triángulo como intermediario para lograr la cuadratura de figuras poligonales, pues el resultado de la cuadratura de la lúnula de Hipócrates radica precisamente en hacer equivaler la figura curvilínea (lúnula) en un triángulo rectángulo y finalmente obtener la cuadratura del triangulo[47] (véase §1.1.1): el triángulo es la figura poligonal que le da una salida inmediata al problema de la cuadratura, pues sirve como elemento de descomposición, en cuanto que siempre es posible subdividir cualquier polígono en triángulos.

De modo análogo que en I-44, si el ángulo es recto, esta proposición permite construir un rectángulo igual a un polígono dado. Como se aprecia, ya están casi todos las condiciones para la cuadratura de polígonos, sin embargo en esta labor de relojería, hace falta uno de los engranajes principales: el teorema de Pitágoras.

PROPOSICIÓN I-47: *En los triángulos rectángulos el cuadrado del lado que subtiende el ángulo recto es igual a los cuadrados de los lados que comprenden el ángulo recto.*

---

[46] Más adelante, en el Capítulo II se caracterizará como parte fundamental en el método de aplicación de áreas, la descomposición de figuras poligonales en triángulos para aclarar la noción de igualdad expuesta por Euclides y abordar las cuestiones relativas de lo que llamamos "área". §2.3

[47] El problema de la cuadratura del triángulo y cualquier figura poligonal, se mostrara más adelante en el §1.2.2.2 en la proposición II- 14.

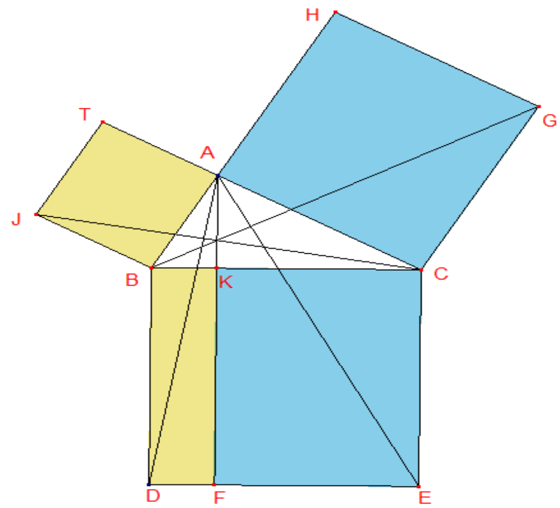


Figura 13. Proposición I-47

***Construcción*:**

- Sea ABC el triángulo rectángulo con el ∢BAC recto.
- Trácese el cuadrado de BC, o sea BCDE, así mismo el cuadrado de BA y AC que son BATJ y ACGH respectivamente.(por proposición I-46)[48]
- Trácese AF ∥ BD
- Trácese AD y JC
- Sea K el punto de corte entre AF y BC (ver figura 13).

Demostración

Tesis: BCDE = ACGH + ABTJ.

- CA está en línea recta con AT (por proposición I-14)[49]
- BA está en línea recta con AH (por proposición I-14)
- ∢DBC = ∢JBA (por ser rectos)
- ∢DBC + ∢ABC = ∢JBA + ∢ABC
- ∢JBC = ∢DBA (por NC 2)

48 Proposición I-46.*Trazar un cuadrado a partir de una recta dada.*

49 Sean pues los ángulos ∢BAT y ∢ BAC (ángulos adyacentes iguales a dos rectos) y la recta BA se levanta en el punto A las dos rectas CA y AT (rectas no colocadas en el mismo lado).

- BD = BC (por ser lados del mismo cuadrado)
- JB = BA (por ser lados del mismo cuadrado)
- ΔJBC = ΔABD (por proposición I-4)[50] (ver figura 14)
- Por tanto AD = JC
- Como BD = KF, entonces el paralelogramo BKDF es el doble del ΔABD (por proposición I-41).
- El cuadrado ABJT es el doble del Δ JBC (por proposición I-41)
- Por tanto BKDF = ABJT. (los dobles de cosas iguales son iguales entre sí).

De manera análoga, trazando AE y BK se demuestre que:

- ΔACE = ΔBCG (ver figura 14)

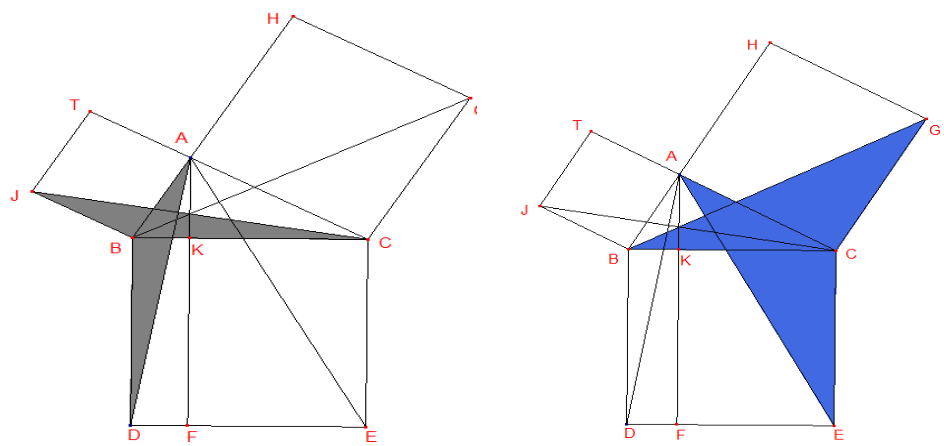


Figura 14. Demostración del la proposición I-47

- El paralelogramo KCFE es el doble del ΔACE (por proposición I-41)
- El cuadrado ACGH es el doble del ΔBCG (por proposición I-41)
- Por tanto KCFE = ACGH

Por lo tanto:

[50] Proposición I-4. Si dos triángulos tiene dos lados del uno iguales a dos lados del otro y tienen iguales los ángulos comprendidos por las rectas iguales, tendrán también bases iguales, y un triangulo será igual a otro, y los ángulos restantes, a saber: los subtendidos por los lados iguales, serán también iguales respectivamente. Dicha proposición hace referencia a uno de los tres criterios de congruencia entre dos triángulos, Lado Angulo Lado (L-A-L).

- BCDE = KCFE + BKDF
- BCDE = ACGH + ABTJ (ver figura 14).

El tratamiento de las áreas en esta proposición se muestra con la congruencia en los triángulos ΔJBC y ΔABD, luego a partir de estos triángulos se establece la relación de éstos con el cuadrado ABJT y el rectángulo BKDF respectivamente, que son a su vez paralelogramos.

Posteriormente el triángulo sirve como intermediario para establecer una relación de igualdad, en área, de dos polígonos de diferente forma como son el cuadrado ABJT y el rectángulo BKDF, pues éstos cumplen la condición de ser el doble del mismo triángulo, lo que garantiza y da veracidad a la equivalencia de las respectivas áreas.

También es importante resaltar en esta proposición la subdivisión que se hace del cuadrado BCDE (sobre la hipotenusa) en los rectángulos BKDF y KCFE y la forma como hace corresponder estos rectángulos con los respectivos cuadrados de los lados de los catetos del triángulo rectángulo.

Esta proposición, es fundamental para el desarrollo de este trabajo, pues es pieza fundamental (como se ha reiterado) en la proposición II-14. Pero ¿cuál es el propósito subyacente en esta proposición? No es más que la de brindar un *algoritmo* para sumar cuadrados: dados los cuadrados Σ y Ω existe una operación "adición" $\oplus$ tal que $\Sigma\oplus\Omega$ es otro cuadrado Π. Pero se puede preguntar ¿esto qué importancia tiene para la cuadratura de polígonos? Ante lo cual se puede responder: si un polígono Θ se divide en los triángulos $\Delta_1, \Delta_2, \ldots \Delta_n$, y si cada triángulo Δ_i, se puede transformar en un cuadrado K_i, se puede decir que el área de Θ es el área del cuadrado $K= K_1\oplus K_2\oplus\ldots\oplus K_n$. Y, esta operación solo es posible por I-47. Ahora bien, Euclides hasta este momento *no ha logrado cuadrar el triángulo*, por lo que es necesario esperar la intervención de la proposición II-14 para efectuar lo descrito arriba. Por tanto, utilizando la I-47 reiteradamente se podrían sumar los cuadrados de los triángulos en los que se puede descomponer cualquier polígono, y así cuadrar cualquier figura poligonal.

Lo dicho anteriormente de la proposición da elementos para pensar que el propósito original de Euclides con el uso del teorema, estaba en función del área de los cuadrados de los lados del triángulo rectángulo, como un operador de magnitudes. Pese a esto, el uso "corriente" del teorema, en los problemas geométricos que se abordan en la escuela (por ejemplo), hace énfasis en considerarlo como una expresión aritmética de la forma $c^2=a^2+b^2$. Expresión que "limita" el uso del teorema a encontrar expresiones lineales o para encontrar longitudes como los catetos o la hipotenusa, y no a encontrar un cuadrado equivalente a la suma de dos cuadrados de diferente área.

1.2.2 LIBRO II, DE EUCLIDES.

El libro II es fundamental en este trabajo, pues, es aquí donde Euclides expone todo su recital en las proposiciones, en aras del desarrollo elemental del método de aplicación de áreas; pese a que este libro tenga la denominación de "álgebra geométrica" al parecer lo que pretende Euclides con fines "pedagógicos" es simbolizar o representar de otra forma los enunciados de las proposiciones, en virtud de caracterizar las transformaciones que allí se muestran, y establecer un equivalencia de área entre dos o más polígonos. Las once primeras proposiciones de este libro se podrían considerar precisamente propiedades algebraicas, claro está, si en lugar de segmentos fueran cantidades abstractas, sin embargo, las soluciones geométricas preceden a las soluciones algebraicas.

Por otro lado, el objetivo principal del libro II es mostrar la solución al problema de la cuadratura de polígonos, la cual es posible *en la proposición* II -14, así pues, se logra construir (con regla y compas) un cuadrado igual a una figura rectilínea dada. Dicha proposición Euclides la sustenta haciendo uso del resultado de proposiciones anteriores que van desde la proposición I - 34, y gran parte del libro II, pues dichos resultados, serán expuestos a continuación mostrando así el tratado de Euclides haciendo énfasis en la "*igualdad*" de figuras poligonales.

1.2.2.1 PROPOSICIONES AUXILIARES

PROPOSICIÓN II-5: *Si se corta un línea recta en (segmentos) iguales y desiguales, el rectángulo comprendido por los segmentos desiguales de la (recta) entera junto con el cuadrado de la (recta que está) entre los puntos de sección, es igual al cuadrado de la mitad.*

Euclides demuestra que ADHK + LHGE = CBFE**.** Expresión algebraica:
$\mathbf{(a-b)^2 + (2a - b)\, b = a^2}$

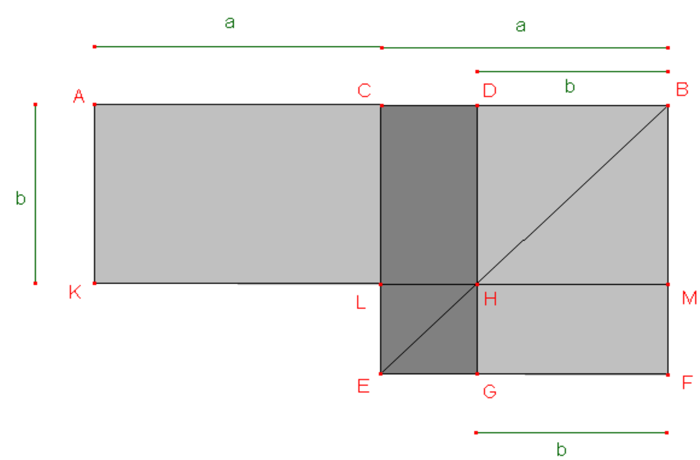


Figura 15. Construcción del la proposición II-5

Aquí se muestra por primera vez cómo una figura poligonal (subdividida en dos áreas de diferente forma) es equivalente a un cuadrado, pero es preciso mencionar que para establecer dicha equivalencia se debe sobreponer parte de la superficie de las figuras, es decir tienen áreas compartidas, tal es el caso del rectángulo CDEG, que es parte del cuadrado CBFE y de la figura comprendida por el rectángulo ADHK y el cuadrado LHGE.

PROPOSICIÓN II-6: *Si se divide en dos partes iguales una línea recta y se le añade, en línea recta, otra recta, el rectángulo comprendido por la (recta) entera con la (recta) añadida y la (recta) añadida junto con el cuadrado de la mitad es igual al cuadrado de la (recta) compuesta por la mitad y la (recta) añadida* (ver figura 16).

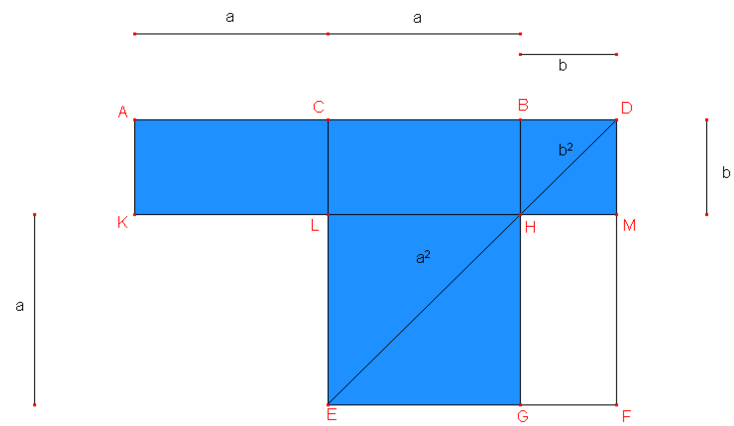


Figura 16. Construcción del la proposición II-6

Euclides demuestra que el rectángulo AKDM + LHEG = CDFE.
Expresión algebraica: $(2a+b)\ b + a^2 = (a + b)^2$

Esta proposición muestra el mismo resultado que la proposición anterior (II-5) y la siguiente (II-11), en cuanto a la equivalencia de superficies, entre un cuadrado y un polígono, lo que hace diferente a estas proposiciones es la forma como se cortan o dividen las rectas iníciales, así como los rectángulos y cuadrados que comprenden dichos cortes en las rectas.

PROPOSICIÓN II-11: *Dividir una recta dada de manera que el rectángulo comprendido por la (recta) entera y uno de los segmentos sea igual al cuadrado del segmento restante* (ver figura 17).

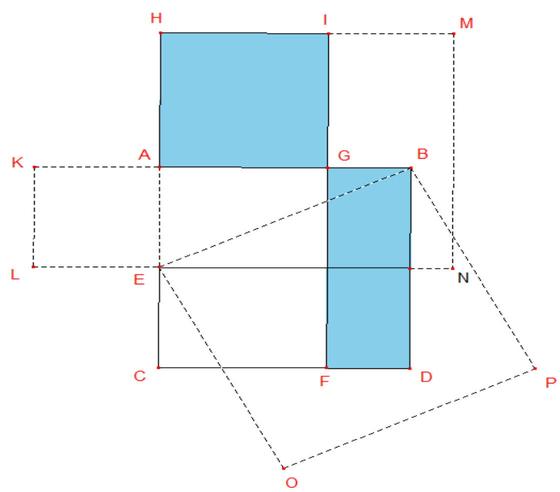


Figura 17. Construcción del la proposición II-11

***Construcción*:**

- Sea ABCD el cuadrado a partir del segmento AB (por proposición I-46)
- E el punto medio de AC
- Trácese EB
- Prolónguese CA hasta H, tal que EH = EB.
- Sea AHIG el cuadrado a partir del segmento AH
- Prolónguese IG hasta F
- Sea AEKL cuadrado a partir del segmento AE.
- Sea EBOP el cuadrado a partir del segmento EB.
- Sea HEMN el cuadrado a partir del segmento HE.

***Demostración*:**

Tesis: cuadrado AHIG = rectángulo GBFD

- HICF + AEKL = HEMN (por proposición II-6)

- HICF + AEKL = EBOP   (porque EB = EH)
- ABCD + AEKL = EBOP (por proposición I-47)
- HICF + AEKL=ABCD + AEKL (se iguala con respecto a EBOP)
- HICF = ABCD (por NC 3)[51]
- Pero HICF = AHIG + AGCF y ABCD = AGCF + GBFD

Por tanto AHIG = GBFD (por NC 3).

1.2.3 LA PROPOSICIÓN CAPITAL "PROPOSICIÓN II-14"

Construir un cuadrado igual al de una figura rectilínea dada.

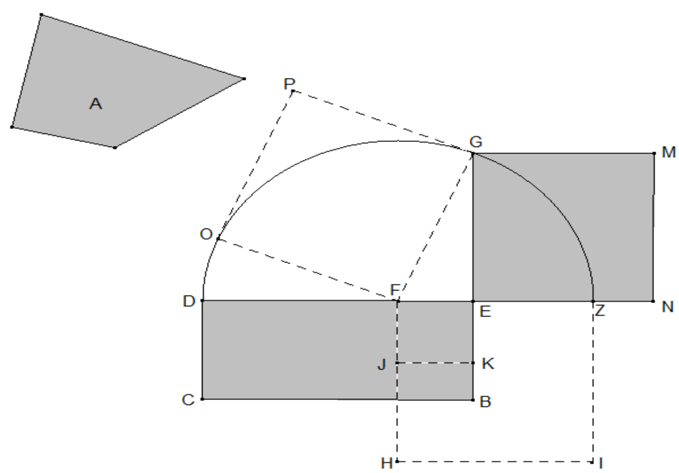


Figura 18. Construcción del la proposición II-14

***Construcción*:**

- Sea A la figura rectilínea dada.
- Constrúyase, pues, el paralelogramo rectángulo DECB igual a la figura rectilínea A (por proposición I-45). Si DE = EB se habrá hecho lo propuesto porque se habrá

[51] NC 3, (Noción Común 3). *Y si de cosas iguales se quitan cosas iguales, los restos son iguales*.

construido DECB que sería un cuadrado igual a la figura rectilínea A. pero sino una de las rectas DE o EB es mayor, sea DE mayor y prolónguese hasta Z.

- Sea EZ = EB.
- Sea F el punto medio de DZ.
- Descríbase el semicírculo DGZ con centro en F y radio FZ o FD.
- Prolónguese BE hasta G.
- Trácese FG.
- Sea EGNM cuadrado a partir del segmento GE (por proposición I-46)
- Sea FEJK cuadrado a partir del segmento FE
- Sea FZHI cuadrado a partir del segmento FZ
- Sea FGOP cuadrado a partir del segmento FG

***Demostración*:**

Tesis: cuadrado EGNM = A

- DECB + FEJK = FZHI (por proposición II-5)
- FZ = FG (por ser radios del mismo semicírculo)
- DECB + FEJK = FGOP
- FEJK + EGNM = FGOP (por proposición I-47)
- DECB + FEJK = FEJK + EGNM (se iguala con respecto a FGOP)
- DECB = EGNM (por NC 3).
- Como DECB = A y DECB = EGNM

Entonces EGNM = A (por NC 1).

Por tanto la figura rectilínea A es igual al cuadrado EGNM.

Se destaca de esta proposición la habilidad de Euclides para hacer congruentes los segmentos FG y FZ, a través del semicírculo DGZ con centro en F y radio FZ, pues si los segmentos son congruentes, los cuadrados de dichos segmentos también serán congruentes. A partir a ahí, se establece la correspondencia entre las áreas, haciendo uso del teorema de Pitágoras, y la proposición II-5, posteriormente haciendo uso de las nociones comunes "opera" para determinar la equivalencia entre el cuadrado y el rectángulo.

Ahora bien el resultado de la *proposición (II-14)* nos muestra la equivalencia geométrica de tres figuras rectilíneas de diferentes formas. Pues el área de la figura rectilínea A es equivalente con el área del rectángulo DECB y este es equivalente también al cuadrado EGNM, entonces las tres figuras rectilíneas son equivalentes, por lo tanto se logra construir un cuadrado equivalente a una figura rectilínea dada.

Para ello, Euclides pone en relieve todo el trabajo expuesto en los libros I y II, pero sobresalen las proposiciones I-45, I-47 y II-5, en la medida como "opera" o las usa para llegar a lo que parecía su objetivo principal, la cuadratura de figuras poligonales. Pues una superficie es cuadrable cuando, a partir de ella, es posible construir[52] geométricamente un cuadrado que tenga la misma área que aquella.

Así pues, este resultado muestra al cuadrado como la unidad para medir superficies, en tanto que éste es el único polígono regular construible geométricamente, que es equivalente a cualquier figura poligonal. Pues, como se mostró anteriormente (prop. II-5), las equivalencias de polígonos con cuadrados se habían dado pero se daba el hecho que debe compartir una superficie común. Ahora bien, se puede establecer desde mucho antes la equivalencia de polígonos irregulares con un triángulo o un paralelogramo[53] (props. I-42, 44, 45). No obstante, el cuadrado es más eficaz que estos otros polígonos por el carácter de ser *regular*: si Σ y Ω son polígonos arbitrarios y, por las proposiciones arriba mencionadas, el triángulo T_1 es equivalente a Σ y, el triángulo T_2 lo es de Ω ¿cómo comparar T_1 con T_2? Esta pregunta tiene sentido porque la transformación de un polígono en un triángulo no lo

[52]"construir" tiene un significado *sui generis*, que fue el que le dieron los propios griegos. Significa construir con regla y compas o, en otras palabras, mostrando un conjunto finito de rectas y circunferencias en cuyas intersecciones y segmentaciones aparezca el cuadrado buscado**.**

[53] Cuando se hace mención a los paralelogramos, se entiende que el rectángulo es un caso particular de los paralelogramos, que cumple la propiedad de tener sus ángulos internos rectos.

hace de modo tal que el triángulo cumpla ciertas propiedades, de hecho, para poder comparar los dos triángulos, es menester, o bien transformar estos triángulos, en triángulos *equiláteros* (es decir, “regularizarlos”), o bien, transformarlos en cuadrados.

La necesidad de “regularizar” los polígonos es sumamente importante, pues dos polígonos regulares son comparables fácilmente: si sus lados son congruentes, son iguales y, si un lado es mayor que otro (esto es posible hacerlo en virtud de la proposición I-3[54]) entonces el polígono que posea el primer lado, será mayor que el restante. Por ejemplo, supongamos que se quieren ordenar los polígonos P_1, P_2 y P_3 (ver figura 19). Para ello, es necesario utilizar la cuadratura y el método utilizado por Euclides, pues basta con aplicar la proposición II-14 a cada uno de los polígonos P_1, P_2 y $P_{3,}$ de tal forma que C_1, C_2 y C_3 son respectivamente los cuadrados equivalentes a dichos polígonos.

Ahora bien, hasta aquí, solo podríamos decir con certeza que P_3 es el polígono “más grande” o de mayor superficie, pero no se podría establecer una relación de orden entre P_1 y P_2, pues a “ojo” no se podría determinar cuál de los cuadrados C_1 y C_2 es mayor; Para dar una salida a este tipo de situaciones, en donde comparar un cuadrado con otro no resulta ser de inmediato, Euclides opta por comparar los lados de dichos cuadrados, haciendo uso de la proposición I-3, pues, al comparar los segmentos, la relación de orden resultaría más trivial. Así pues, de los lados AB, AC y AD correspondientes a los cuadrados C_1, C_2 y C_3, se puede concluir que: $AD>AB$ y $AB=AC$, por tanto se puede decir con propiedad que P_1 y P_2, son equivalentes en superficie, luego P_3 sería el polígono mayor.

[54] Proposición I-3. *Dadas dos rectas desiguales, quitar de la mayor una recta igual a la menor*.

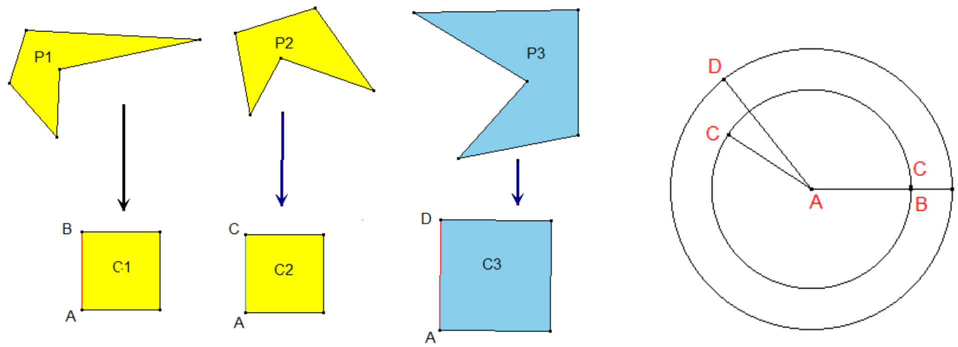


Figura 19. Propósito de la cuadratura de polígonos en Euclides

Pero surge un problema ¿cómo transformar *cualquier* triángulo en un triángulo equilátero? Euclides no hace esto, lo cual deja en el aire la pregunta ¿por qué no lo hace? Quizá el procedimiento de "equilaterizar" cualquier triángulo requiera presupuestos más allá de los establecidos en los libros I y II (posiblemente inscripción y circunscripción de polígonos). En esta ausencia de un procedimiento para triangular de modo efectivo cualquier polígono quizá subyazca el ideal de simplicidad de la cuadratura de los mismos.

De modo análogo, el procedimiento convertir polígonos en paralelogramos, no permite de modo general, la comparación entre paralelogramos. Así pues, en la necesidad de cuadrar y, por tanto, de recurrir al cuadrado como arquetipo de la medida de superficies, está implícita la necesidad de *comparar superficies*.

1.3 ARQUÍMEDES Y EL MÉTODO EXHAUSTIVO

Arquímedes de Siracusa (287 – 212 a. C) inmediatamente posterior a Euclides, se le reconoce aparte de sus grandes aportes a la física y matemática, por dar una solución parcial a la cuadratura del círculo a través de su método exhaustivo, donde pone a flote su capacidad técnica, donde combina la matemática exacta y la aproximada, la aritmética y la geometría para impulsar y enfocar en una nueva dirección el clásico problema de la cuadratura del círculo.

A diferencia de Euclides, Arquímedes utiliza construcciones mecánicas en sus obras, aparte de hacer uso recursivo de los cálculos numéricos; pese a ello, combina los métodos de Euclides y los resultados anteriores a Euclides, para dar salida a problemas geométricos y así adoptar un estilo propio en su trabajo.

La obra de Arquímedes "*la medida del círculo*" se exhibe brevemente, en tres proposiciones, no obstante, solo se hará hincapié en la proposición I, pues las proposiciones II y III Arquímedes alude a la demostración y existencia del número **π**, dado que encuentra una relación intrínseca entre el diámetro y la circunferencia de cualquier círculo, de este modo establece que el cálculo de la razón entre la circunferencia y su diámetro es menor que 3 1/7 pero es mayor que 3 10/71, dicha razón o estimación se conoce comúnmente como el número **π.** De ahí el uso recurrente de este número en la aplicación de formulas tales como $P=2\,\pi r$ y $A=\pi\, r^2$ para encontrar respectivamente el perímetro y área de cualquier circulo.

Contrario a lo anterior, la proposición I, expone en su demostración el método exhaustivo, siendo esté un tema de interés y análisis en la línea de investigación que conlleva este trabajo; por consiguiente, Arquímedes demuestra que el área del círculo es equivalente al área de un triángulo rectángulo donde uno de cuyos catetos es igual al radio y el otro a la circunferencia. (Ver figura 20).

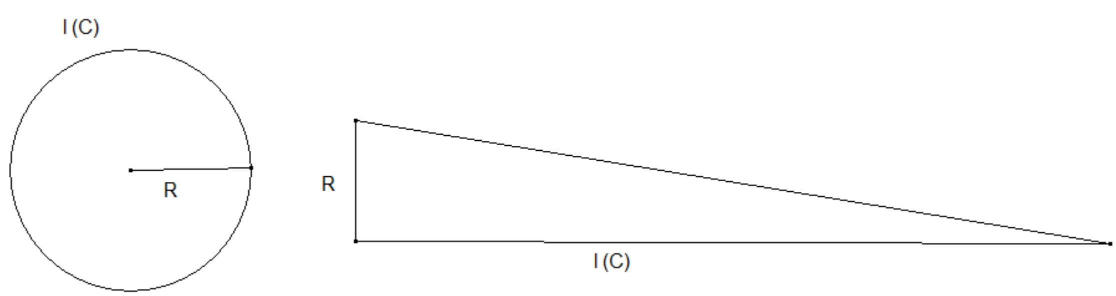


Figura 20. Proposición I de Arquímedes

Al parecer, Arquímedes conocía resultados de sus predecesores Bryson y Antifonte (ver §1.1.2), pues dicho método exhaustivo consiste en demostrar que el área del círculo se puede agotar al inscribir y circunscribir polígonos regulares, pero siguiendo la condición establecida por Euclides en la proposición X-1 de los *Elementos, Dadas dos magnitudes desiguales, si se quita de la mayor una (magnitud) mayor que su mitad y, de la que queda, una magnitud mayor que su mitad y así sucesivamente, quedará una magnitud que será menor que la magnitud menor dada.* Es decir bajo el siguiente principio: el resto del siguiente sea la mitad del resto anterior.

Luego, la demostración de la proposición I, se da por el método de reducción al absurdo, donde parten del supuesto que, el área del triangulo rectángulo es igual al área del círculo, o sea que, A(c)=A(t). Para ello, la demostración se estructura en dos partes, expuestas a continuación. (Ver figura 20)[55]:

i) El área del círculo es mayor que el área del triángulo. A(c) > A(t).

ii) El área del círculo es menor que el área del triángulo. A(c) < A(t).

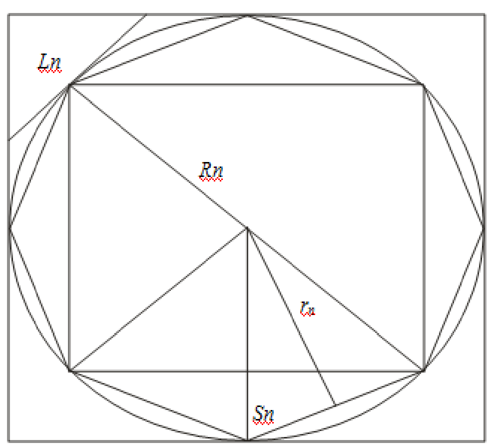


Figura 21. El método exhaustivo

[55] Para facilitar el entendimiento de la demostración se va a utilizar la siguiente simbología: A(c)=Área del circulo. A(t)=Área del triángulo. A(P*n*)=Área de un polígono de *n* lados. L(c)=longitud de la circunferencia.

i) ***Supongamos que A(c) > A(t)***

A(c) - A(t) > 0 (Por proposición X-1)

Existe un $\boldsymbol{n} \epsilon$ **N** tal que A(c) - A(P*n*) < A(c) - A(t)

Luego, - A(P*n*) < - A(t)

A(P*n*) > A(t) (multiplico por -1 a ambos lados de la inecuación).

Pero como A(P*n*) es igual a: $\frac{n}{2} = rnSn$ y A(t) es igual a $\frac{l(c)R}{2}$,entonces tenemos que: $\frac{n}{2} = rnSn < \frac{l(c)R}{2}$, lo que implica que A(P*n*) < A(t), lo cual es una contradicción.

ii) ***Ahora supongamos A(c) < A(t)***

Entonces A(c) - A(t) > 0

Por Euclides, existe un *n ϵ N* tal que A(P*n*) - A(c) < A(t) - A(c)

A(P*n*) < A(t), cancelo – A(c) en ambos lados de la inecuación.

Ahora como A(P*n*)= ns*n* y A(t)= l(c)

$nsn\frac{ln}{2} < \frac{l(c)R}{2}$, entonces A (P*n*) < A(t) luego n l*n* $\frac{\mathrm{l}n}{2} > \frac{R}{2}$ l(c)

A(P*n*) > A(t) lo cual es una contradicción. Luego, como el área del triángulo no es ni mayor ni menor que A(P), entonces él A(t)=A(P), por tanto se ha demostrado que el área del círculo es igual al área del triángulo rectángulo.

Ahora bien, ante magno aporte a la solución de la cuadratura del círculo expuesto por Arquímedes, siguen existiendo algunas falencias o dudas en cuanto a su método de demostración, por ejemplo, sería pertinente preguntarse ¿porque Arquímedes parte del supuesto que el área del círculo es igual al área del triángulo rectángulo? Pues, al parecer Arquímedes conocía el resultado de la cuadratriz (véase §1.1.3) y lo adapto en emergencia al problema de la cuadratura del círculo, pues Dinóstrato encuentra un segmento rectilíneo equivalente a ¼ de la longitud de arco de la circunferencia, de ahí que encuentre la equivalencia entre ¼ del círculo y un triángulo rectángulo, cuyos catetos son uno igual al radio de la circunferencia y el otro igual a ¼ de la longitud de la circunferencia. Parece ser que Arquímedes prolonga el segmento rectilíneo que es igual al cuarto de la circunferencia, de modo tal que haya un segmento rectilíneo igual a la circunferencia, así pues, determina que el área del circulo es igual a un triangulo rectángulo con los catetos iguales a la circunferencia y a su radio.

Ahora bien, es preciso mencionar que Arquímedes utiliza resultados previos por demás cuestionados, tales como la cuadratriz, donde su construcción es meramente mecánica, relegando el uso de la regla y compas, y el método exhaustivo de Brison y Antifonte, donde los pasos del método aplicado aquí obedecen a procesos infinitos, además de pasar por alto los principios geométricos como el de la continuidad de las superficies; como consecuencias de esto, la cuadratura del círculo que alude al método exhaustivo planteado por Arquímedes sería imposible, no obstante, Arquímedes dio un paso más delante respecto a sus predecesores, pues, a él se le reconoce toda la fundamentación teórica y matemática en la demostración del método exhaustivo. Además de eso, encuentra por el mismo método el número π, resultado trascendental hoy día para el cálculo de superficies circulares y la longitud de arco.

Aunque la cuadratura del círculo fue imposible construirla geométricamente usando la regla y compas, se destaca de los griegos en su intento de resolver este problema los diferentes métodos utilizados, siendo esto sin duda uno de los mayores aportes a la geometría clásica. Sin embargo, la solución a la cuadratura de las figuras poligonales es el tema de interés en este trabajo escrito y es menester exponer en el próximo capítulo la fundamentación teórica al método de aplicación de áreas hecho por Euclides en los *Elementos*, al encontrar geométricamente un cuadrado igual a una figura rectilínea dada, y de todas las bases teóricas que incidió dicho método en el concepto de área.

CAPÍTULO II

DIMENSIÓN EPISTEMOLÓGICA

La dimensión epistemológica aborda el tratamiento de la medida desde su etapa relativa y, en concordancia con la construcción histórica de la noción de cuadratura, se intenta rescatar su conceptualización sin el uso de la métrica, para lo cual se dispondrá de dos frentes que subdividen la etapa de la medida relativa. La primera es la expuesta por Recalde (*sf*), la cual hace referencia a la noción de equivalencia geométrica expuesto por Euclides**,** es decir, que la noción de congruencia de figuras se da también en virtud de la igualdad de superficies, y no necesariamente a tener la misma forma; así mismo, a la relación de orden que se puede establecer entre polígonos, dada su comparación y establecer si uno es mayor que él otro o si ambos son iguales.

El segundo frente dará cuenta del *método de aplicación de áreas* expuesto en los *Elementos* (véase §1.2.1), donde a partir de la transformación de las figuras (sustraer y adicionar de áreas) se establece una equivalencia "en superficie" entre estas. Este método se argumenta desde los conceptos de *equicomplementación* y *equidescomposición* [56]; puesto que la solución de muchas de las proposiciones presentes en los *Elementos* pasa, además de los mecanismos de interpretación perceptiva o de visualización, por ciertas propiedades a axiomas que Euclides no explicita en su obra.

[56] Conceptos expuestos en la obra de André Pressiat (2002).

2.1 DEFINICIÓN DE MEDIDA

La medida de figuras poligonales se aborda desde dos perspectivas, la relativa y la numérica. Para el desarrollo del presente trabajo sólo se va a profundizar el uso de la medida relativa, pues así es abordada por Euclides en virtud de la cuadratura de figuras poligonales. Esto permite una mayor relación entre conceptos, los cuales se van a convertir en puentes para el desarrollo de los diferentes procesos que implica medir el área de polígonos. Además, la noción de medida relativa parece ser muy potente, dado que nos permite evidenciar las propiedades que expondremos más adelante.

Ahora bien, en un sentido primitivo, la *medida* se puede considerar como un *proceso* que consiste en comparar un patrón seleccionado con el objeto que se desea medir para ver cuántas veces el patrón está contenido en ese objeto. Es claro entonces, que tanto el objeto medido como el patrón deben ser homogéneos en aquella magnitud que se medirá, pues de otro modo, es sumamente difícil emitir un juicio cuantitativo sobre cuántas veces está el patrón en el objeto. Asimismo, es necesario aclarar que la *cantidad* de veces que el patrón está en el objeto, se debe caracterizar a través de un *conjunto referencial* que da respuesta a la pregunta *¿cuánto?* Este conjunto, por mucho tiempo correspondió a los naturales, y era suficiente con él aún en el caso de que el patrón fuese mayor que el objeto medido, o que el patrón no tuviese una cantidad *exacta* (es decir, que se exprese como un natural) en objeto: puesto si el patrón ω está n/m veces ($n,m \in \mathbb{N}$) en el objeto Σ, esto es lo mismo que decir que $n\omega = m\Sigma$. Ahora bien, es necesario que la correspondencia entre ω y Σ sea uno a uno. Así pues, se puede decir de modo muy laxo, que *medir* un objeto Σ es asignarle uno y solo un objeto ω de un conjunto patrón Ω. Pero esa asignación tiene varias condiciones sobre la asignación y el conjunto Ω. Asimismo, es necesario resaltar que la medición a través del empleo del conjunto de los naturales, no es suficiente para caracterizar la medida de las magnitudes en general, puesto que la emergencia de las magnitudes inconmensurables así lo demuestra, pero dar cuenta de esto no es el propósito del presente trabajo.

2.1.1 LA MEDIDA RELATIVA EN LOS LIBROS I Y II DE LOS *ELEMENTOS*

En el desarrollo de los libros I y II de los *Elementos,* y en el caso concreto de la cuadratura de figuras poligonales, Euclides utiliza una teoría de medida que se suele denominar teoría sobre la "medida relativa". No obstante, cabe mencionar que Euclides nunca formula una definición formal de medida. Sin embargo, los argumentos implícitos mostrados en la obra aportan elementos relevantes en la construcción histórica del concepto de área. El nombre de *medida relativa* se debe principalmente a la ausencia de una escala numérica, un conjunto numérico *referencial*, que permita asignar a cada magnitud un número positivo correspondiente a su medida. En ese caso, Euclides sigue concepciones aristotélicas, es decir, que las áreas solamente pueden ser medidas con áreas; por consiguiente, su fundamentación teórica de la medida se establece a partir de las equivalencias de áreas. En el caso de los polígonos, por ejemplo, se da en el marco de *transformaciones de polígonos en cuadrados,* tal y como culmina el libro II. Ahora bien, es necesario decir que Euclides fundamenta dicha "teoría" de la medida en las nociones de congruencia, igualdad de áreas y la relación de orden entre las magnitudes enmarcadas en su método de aplicación de áreas. Cabe mencionar que, aunque la congruencia y la igualdad de áreas se puede caracterizar modernamente como una relación de equivalencia, Euclides las trata como nociones separadas, aunque reduce la segunda a la primera, es decir que todo aquello que es congruente, es igual en área. En ese orden de ideas se caracterizará cada una de las nociones expuestas en la fundamentación teórica de la medida.

La característica fundamental de la medida relativa consiste en que dicha ausencia de un conjunto referencial o sistema numérico, implica la comparación *dos a* *dos* de los objetos a ser medidos. Por ejemplo, Euclides recurre al cuadrado, pues, como ya se ha mencionado (ver §1.2.3), el cuadrado permite establecer un orden *parcial* entre las superficies. Parcial en la medida que si se hace intervenir una nueva superficie es necesario cuadrarla y comparar su cuadrado con *cada uno* de los cuadrados de los polígonos iníciales. La cantidad de comparaciones que hay que realizar *dos a dos* aumenta progresivamente a medida que aumentan los polígonos a comparar: la cantidad de estas comparaciones para n polígonos es $n(n-1)/2$, por lo que si se tienen 100 polígonos habría que hacer 4950 comparaciones, por ejemplo. Si tenemos los polígonos P_1, P_2 y P_3 la forma para establecer su medida es asignarle a cada polígono un cuadrado que sea equivalente a cada polígono. Así pues, si C_1, C_2 y C_3 son, respectivamente, los cuadrados equivalentes a los polígonos P_1, P_2 y P_3 (ver figura 22).

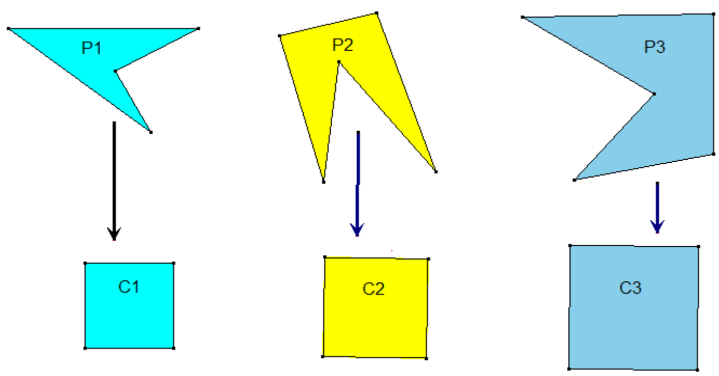


Figura 22. Caracterización de la relación de orden en la medida relativa.

Es posible establecer las siguientes comparaciones:

Comparación 1	C_1 y C_2 se tiene que	$C_1 < C_2$
Comparación 2	C_1 y C_3 se tiene que	$C_1 < C_3$
Comparación 3	C_2 y C_3 se tiene que	$C_2 < C_3$

Luego, este sistema es eficiente si se pretenden comparar conjuntos pequeños de polígonos. Por tanto se puede determinar con claridad el siguiente orden entre los polígonos: $C_1 < C_2 < C3$. Así pues, el establecer una relación orden entre las magnitudes juega un papel fundamental en la fundamentación teórica de la medida, en tanto que, dados polígonos cualesquiera, se podrá afirmar con certeza cuándo uno es mayor que el otro, o en su defecto son *iguales*. Tal y como se vio en la proposición I- 42 (§1.2.1) esta noción de orden entre las magnitudes fue decisiva, para determinar la *igualdad* entre el triángulo y el paralelogramo.

Por otro lado, y bajo la misma perspectiva, Euclides habla de un nuevo tipo de "igualdad" entre figuras, sin usar una nueva palabra para ella. Por tanto, no se hace una distinción de la noción "igualdad" entre las magnitudes *en general* a lo largo de los *Elementos,* pero la "igualdad" de magnitudes *específicas* como los segmentos y ángulos se designa con el término congruencia. No obstante, Euclides se abstiene de usar el término "congruencia" para referirse a las magnitudes, pues dicho termino limita las intenciones de Euclides en el intento de establecer una fundamentación teórica de la medida en cuanto a las áreas se refiere, en tanto que la "congruencia" hace referencia a figuras iguales en área y forma, es decir, que dos figuras son congruentes si al superponer una sobre la otra está "encaja" perfectamente en todo su contorno; esto se evidencia en gran parte del libro I, en las proposiciones que aluden a lo que hoy conocemos como los criterios de congruencia de triángulos, luego, para Euclides es lo mismo decir que las figuras son congruentes o iguales.

Al parecer, Euclides en las bases conceptuales de la medida de áreas, no vio necesario hacer una distinción entre estos dos términos. No obstante, existe una diferencia clara en el uso de ambos términos; para ello, basta tomar el primer caso de "igualdad" de figuras rectilíneas o de polígonos que aparece en la *proposición I-35* "*los paralelogramos que están sobre la misma base y entre las mismas paralelas son iguales entre sí*" (ver figura 23); y la proposición I-23 que se enuncia así: "*construir un ángulo rectilíneo igual a una ángulo rectilínea dado, sobre una recta dada y en uno de sus puntos*" (ver figura 24). Nótese que en ambas proposiciones aparece el término "*igual*" para referirse a dos magnitudes con la misma medida, sin embargo, la igualdad aquí es diferente, pues en I-23, los ángulos ABC y A´B´C´ además de tener la misma amplitud son congruentes, mientras que en I-35 los paralelogramos ABCD y ABEF son *iguales* en área, más no son congruentes, dado que al superponerse uno sobre el otro no van a coincidir o "encajar", esto como consecuencia de ser paralelogramos con diferente forma.

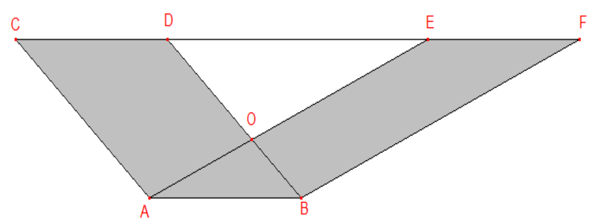


Figura 23. Proposición I-35

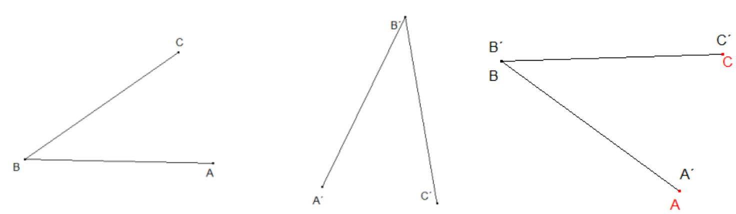


Figura 24. Proposición I-23

Ahora bien, se cree necesario hacer este tipo de distinciones con el ánimo de evitar cualquier tipo de ambigüedad más adelante y de poder distinguir con claridad el tipo de magnitud que se pone en correspondencia, es decir, siempre que se aluda a la congruencia, de inmediato se entenderá que se está hablando de longitudes, ángulos y polígonos con la misma área y forma, más no necesariamente a cualquier dos polígonos "*iguales*" en superficie.

Otra cuestión importante a mencionar en el tratamiento de la medida de Euclides es el desarrollo del método de aplicación de áreas, pues ahí se destaca el uso de las nociones comunes y el teorema de Pitágoras (§1.2.1 proposición I-47) como propiedades que permiten "*operar*" las áreas de los polígonos, en virtud de obtener polígonos *iguales* y finalmente obtener un cuadrado igual a una polígono dado. Dichas nociones comunes[57] son:

2. Si se añaden cosas iguales a cosas iguales, los totales son iguales.
3. Si de cosas iguales se quitan cosas iguales, los restos son iguales.
4. Si se añaden cosas iguales a cosas desiguales, los totales son desiguales.

Si tomamos nuevamente la proposición I-35 como ejemplo (ver figura 23) esta nos muestra claramente que para su demostración se hace un uso de las nociones comunes 2 y 3 nombradas anteriormente, en función de adicionar y sustraer áreas. Designamos entonces los triángulos ACE, BDF, AOB y ODE como T_1, T_2, T_3 y T_4 respectivamente y los polígonos ACDO y BOEF como P_1y P_2 respectivamente.

Se tiene que T_1=T_2, luego el paso a seguir es *restar* T_4 en ambos lados de la igualdad T_1 - T_4=T_2 -T_4, tal que P_1= P_2. Luego, se *adiciona* T_3 en ambos lados, P_1+T_3=P_2+T_3, por tanto los paralelogramos ACDB y ABEF son *iguales*, pues, se está sumando un área igual a ambos lados de la igualdad. De lo anterior, se puede deducir que las nociones comunes satisfacen una de alguna forma una *propiedad uniforme* entre las magnitudes, en tanto que, si se tiene una *igualdad* previamente establecida al sumar o restar a ambos lados de la igualdad éstas no alteran la igualdad.

En ese sentido, también es importante mencionar que hay otras nociones comunes que muestran elementos suficientes para pensar que existe una *propiedad transitiva* entre las magnitudes, pues, el hecho que dos magnitudes sean iguales a una

[57] El numeral que aparece en cada noción común obedece al orden en que aparecen dichas nociones en los *Elementos* (1991).

tercera, implica que dichas magnitudes son iguales por la relación de igualdad que existe con la tercera. Dicha nociones Euclides las enuncia así:

1. Las cosas iguales a una misma cosa son también iguales entre sí.
5. Los dobles de una misma cosa son iguales entre sí.
6. Las mitades de una misma cosa son iguales entre sí.

Así por ejemplo, si P_1, P_2 y P_3 son polígonos y se cumple que si $P_1 = P_2$ y $P_2 = P_3$ entonces $P_1 = P_3$, luego en la noción común 1 prevalece una transitividad entre las áreas, tal y como ocurre con una teoría de números. De la misma forma se muestra la transitividad en las nociones 5 y 6. Pues, si tenemos que si $P_2 = 2P$ y $P_1 = 2P$ entonces $P_2 = P_1$.

Del método de aplicación de áreas se profundizara más adelante, dándole otro sustento teórico aparte del la axiomatización planteada por Euclides, de modo tal que dé cuenta del proceso que implica descomponer en triángulos y recomponer en estos mismos un polígono igual a un polígono dado (véase § 1.2.1 en la proposición I-45); en ese sentido el problema de la cuadratura de polígonos quedaría resuelto si se lograra a través de la descomposición en triángulos encontrar por la recomposición de estos mismos un cuadrado equivalente en área a un polígono dado.

2.2 LA MEDIDA DE SUPERFICIES POLIGONALES

Para un análisis epistemológico de lo noción de cuadratura de los libros I y II de los *Elementos*, es pertinente definir y caracterizar la medida de superficies desde el marco teórico de este trabajo escrito. Para tal caso, se expondrán los trabajos realizados por Hilbert (1950) y Pressiat (2002), los cuales analizan estos conceptos y, la obra de Lebesgue (1995) confirma que en efecto estos conceptos, a pesar de ser capitales para la caracterización del área, pasaron desapercibidos para los antiguos griegos. En los documentos de estos matemáticos es posible reconocer su intención por construir una teoría de la medida sin disponer del concepto de número asociada a la magnitud.

2.2.1 LA EQUIDESCOMPOSICIÓN Y EQUICOMPLEMENTACIÓN COMO FUNDAMENTACIÓN TEÓRICA AL MÉTODO DE APLICACIÓN DE ÁREAS

Un aspecto importante en el análisis histórico de que se realizó en el Capítulo I, fue precisamente el particular método de aplicación de áreas, utilizado para construir una fundamentación teórica de la medida de superficies. Pues bien, la fundamentación matemática a ese método se presentará a continuación a través de ciertos teoremas explicitados y demostrados por los autores de base. Por consiguiente, lo que se pretende en este apartado es articular dichos teoremas y definiciones de modo tal que se complemente con lo realizado en el análisis histórico.

Una de los elementos más relevante en el método de aplicación de áreas de Euclides es la descomposición de un polígono en triángulos tal y como se vio en (§1.2.2 proposición I-45), pues bien, para que todo polígono se exprese como la unión finita de triángulos, estos triángulos no deben estar superpuestos el uno sobre el otro (los franceses lo traducen como “triángulos cuasi disjuntos”); en ese sentido, si tenemos un polígono P, y éste se descompone en dos triángulos T_1 y T_2, de tal forma $T_1 \cap T_2 = 0$. Decimos entonces que P se descompone en T_1 y T_2, o que P se compone de T_1 y T_2.

Ahora bien, lo dicho anteriormente introduce los conceptos de equidescomposición y equicomplementación[58] como una relación de equivalencia entre polígonos, los cuales, según Pressiat (2002) son conceptos subyacentes en los procesos de transformación de polígonos. Estos conceptos, dan cuenta de la adición y sustracción de figuras “iguales” utilizada en las demostraciones de Euclides para

[58] Es importante aclarar que las definiciones de *equidescomposición* y *equicomplementación* son propias de *Hilbert*, que es citado en la obra de Pressiat (2002).

construir polígonos “iguales” en área. A continuación definiremos cada uno de estos conceptos y su finalidad.

Dos figuras P y P’ son *equidescomponibles*[59] si es posible expresar cada una de ellas como la unión de triángulos no superpuestos el uno sobre el otro, de modo tal que para cada *i* los triángulos T_i y T'_i sean congruentes.

$$P = T_1 \cup T_2 \cup \ldots . \cup T_n \text{ y } P' = T'_1 \cup T'_2 \cup \ldots . \cup T'_n.$$

Dos figuras P y P’ son *equicomplementarias*[60] (tienen la misma superficie) si existen dos figuras Q y Q’ que satisfagan las siguientes cuatro condiciones:

- P y Q no se superponen la una con la otra.
- P’ y Q’ no se superponen la una sobre la otra.
- Q y Q’ son equidescomponibles.
- $P \cup Q$ y $P' \cup Q'$ son equidescomponibles.

De la definición anterior se deduce que, si P y Q son dos polígonos de igual superficie, entonces debe existir, otros dos polígonos P´ y Q´ de igual área, de tal manera que el polígono compuesto por P y P´ tendrán una superficie igual con el polígono formado por la combinación de los polígonos Q y Q´. De la siguiente forma:

- $(P + P') = (Q + Q')$
- $P' = Q'$
- Es fácil deducir que $F(P) = F(Q)$.

[59] *En allemand, le mot correspondant est “zerlegungsgleich” qui signifie “égale décomposition, ou égal découpage.”* (Pressiat 2002, pp. 284). Se tradujo de la siguiente manera: La palabra alemana corresponde “zerlegungsgleich” que significa descomposición igual o corte igual.

[60] Dans les six premières éditions, Hilbert emploie le mot “inhaltsgleich”, qui signifie littéralement "contenu égal, ou superficie égale”; dans les quatre éditions suivantes, il emploie “ergängzungsgleich” qui signifie “égal par complément”. (Pressiat 2002, p. 284). Se tradujo de la siguiente manera: En las 6 primeras ediciones, Hilbert empleo la palabra “inhaltsgleich” igual contenido o *igual superficie*; en las 4 ediciones siguientes el empleo la palabra “ergängzungsgleich que significa igual por complemento.

En síntesis, las propiedades de la equidescomponibilidad se definen como una relación equivalencia, y se deduce que la relación de equicomplementariedad (tener la misma superficie) es una relación que satisface las siguientes propiedades:

- Dos figuras congruentes son “iguales”
- Las figuras “iguales” entre ellas son “iguales”
- La diferencia de figuras “iguales” entre ellas, son “iguales”

De lo anterior se puede concluir que si las dos figuras P y P´ son equidescomponibles entonces, también son equicomplementarias, es decir tiene la misma superficie. Así, por ejemplo, la unión de dos cuadrados congruentes es equidescomponible con un cuadrado construido sobre una de sus diagonales, tal y como lo muestra la figura 25.

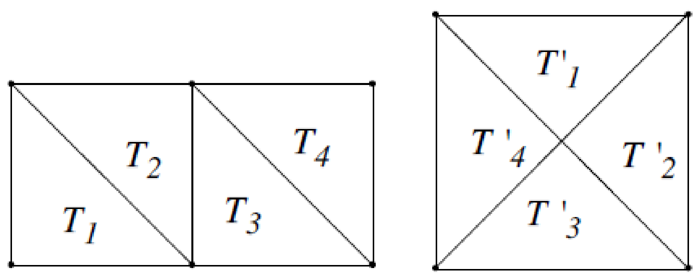


Figura 25. Ejemplo de la equidescomposición del cuadrado

De igual forma, con el método de equicomplementación de puede probar la proposición I-35 (§2.1.1 figura 23) “los paralelogramos que tiene las mismas bases y están entre paralelas tienen la misma superficie” (son equicomplementarios).

Se trata entonces de mostrar que los paralelogramos ABCD y ABEF tiene la misma superficie, luego se añade a ambos paralelogramos P1 y P1´ respectivamente, siendo P1 y P1´ triángulos congruentes, tal y como se muestra abajo, formando los polígonos P y P’ (ver figura 26-a).

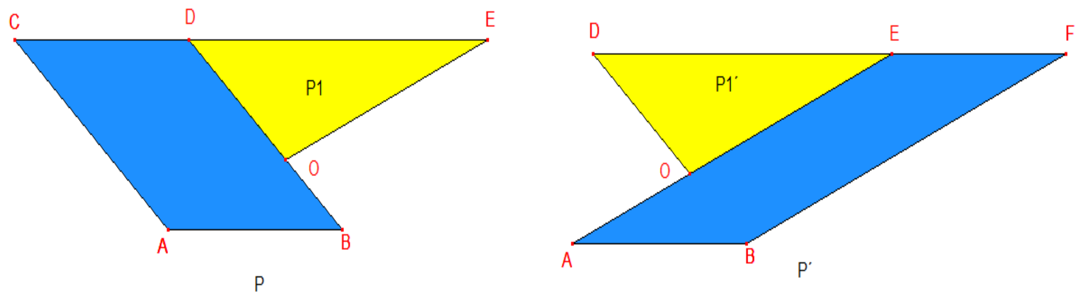


Figura 26-a Ejemplo de equidescomposición y equicomplementación

Luego, P y P´ son figuras equidescomponibles, pues evidentemente son descompuestas en un mismo número de triángulos, que son respectivamente congruentes dos a dos de la siguiente forma: P4 =P4´ y P2 =P2´ (ver figura 26-b). Es preciso aclarar que la congruencia de estos triángulos es probada por Euclides en su obra, pues al no existir esta congruencia el método de equidescomposición seria aplicado en vano.

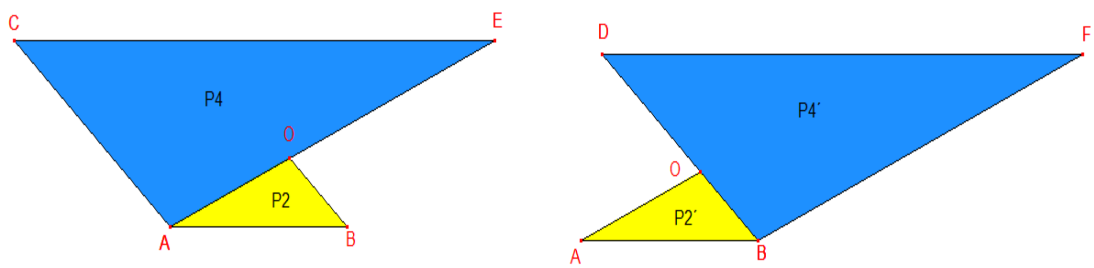


Figura 26-b Ejemplo de equidescomposición y equicomplementación

Hilbert (1950) complementa el método de equidescomposición con dos definiciones, que sustentan particularmente que si dos figuras P y P´ tienen la misma superficie (son equicomplementarias) también tienen la misma área.

a) Definición: Dos polígonos se dice que son de igual área, cuando se puede descomponer en un número finito de triángulos que son respectivamente congruentes entre sí de dos en dos.

Ante esta primera definición, Lebesgue (1995) plantea que, si se subdivide un polígono P en polígonos P_1, $P_2 \ldots P_m$, se tiene que el área de P es igual al área de P_1 + área de P_2 +…….+ área de P_m, de ahí se infiere que el área del polígono es igual a la suma de las áreas de los triángulos que lo componen.

b) Definición: Se dice que dos polígonos son de igual contenido (superficie), cuando es posible, por la adición de otros polígonos con igual área, obtener dos polígonos resultantes con la misma área.

Esta definición se fundamenta en lo planteado anteriormente por Lebesgue, en tanto que, si tenemos una cantidad finita de triángulos $\propto$ y otra $\propto´$, tal que éstas se correspondan en la misma cantidad de triángulos y, que sean congruentes dos a dos, la recomposición de dichos triángulos establece dos polígonos P y P´ que son equicomplementarios y a su vez tienen la misma área.

Por otro lado y bajo la misma perspectiva, Hilbert (1950) retoma las dos definiciones anteriores basadas en la equidescomposición y equicomplementación de figuras, para introducir en su teorema 24 cierta propiedad transitiva entre polígonos (ver figura 27). Cada uno de los dos polígonos de P_1 y P_2 tiene igual área a un tercero P_3, entonces los polígonos P_1 y P_2 son en sí mismos de igual área. Si cada uno de los dos polígonos es de igual superficie a un tercero, entonces ellos mismos son de igual superficie. En consecuencia, los dos polígonos son, por definición, de igual área.

Este teorema muestra claramente que los polígonos P_1, P_2 y P_3 son descompuestos en un mismo número de triángulos que son congruentes dos a dos, por tanto se puede establecer que la siguiente propiedad [61] entre ellos:

$P_1 \sim P_3$ y $P_2 \sim P_3$, entonces $P_1 \sim P_2$

Por tanto se infiere que $P_1 \approx P_3$ y $P_2 \approx P_3$. Luego $P_1 \approx P_2$

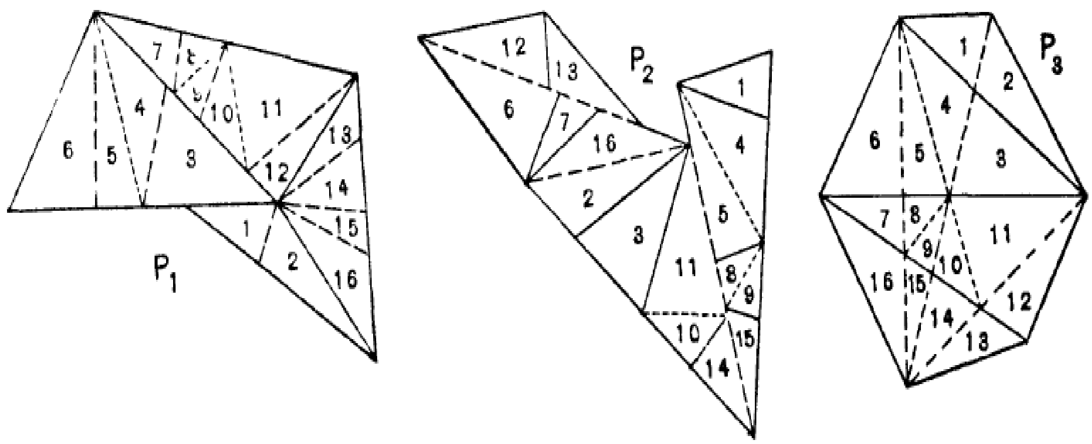


Figura 27. Teorema 24 de Hilbert

Una vez establecidas las bases conceptuales del método de descomposición, éste resulta importante para deducir algunas fórmulas que determinan el área del paralelogramo, el triángulo y trapecio (en algunos casos), así también, ayuda a desarrollar otras demostraciones del teorema de Pitágoras (§véase 2.2.2, figura 29) que no son comúnmente reconocidas en los libros de texto. En la figura 28 (ver Hilbert, 1950, pp.38) se muestran algunas de las figuras resaltadas anteriormente.

[61] Se utilizará el siguiente símbolo $\sim$ para determinar que dos figuras P y P´ son equidescomponibles y $\approx$ para decir que son equicomplementarias o equicompuestas.

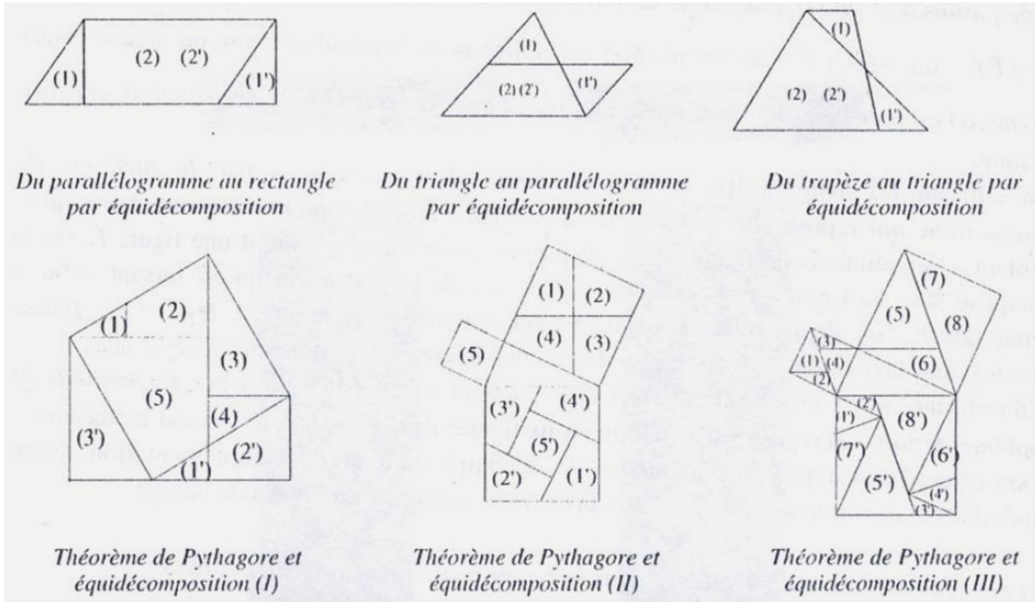


Figura 28. Deducción de fórmulas.

En el caso del paralelogramo (ver figura 28: superior izquierda) se establece que éste es equidescomponible con el rectángulo, pues las figuras que lo componen son respectivamente congruentes dos a dos. De modo tal que el triangulo 1 (triángulo rectángulo) es congruente con el triángulo 1´. Como dicho triángulo contiene la altura tanto del paralelogramo como la del rectángulo y sus respectivas bases son congruentes, se infiere que el rectángulo y el paralelogramo son figuras equicomplementarias, por tanto son iguales en área. A parte de que tienen la misma área, tienen dos elementos congruentes (la base y la altura), luego es muy trivial deducir la fórmula para *calcular* el área del paralelogramo.

En el siguiente apartado se profundizara en algunas técnicas utilizadas para construcción de polígonos que sean equidescomponibles y equicomplementarios, de modo tal que estas técnicas contribuyan al proceso de descomposición y recomposición de figuras tal y como se expresa el método de aplicación de áreas.

2.2.2 TÉCNICAS DE DISECCIÓN

Un aspecto a tener en cuenta con el uso de la equicomplementación en las figuras poligonales es que resulta difícil saber con certeza qué figura “añadir” o qué “corte” exacto debe tener la figura inicial para obtener polígonos que sean equidescomponibles. Tal dificultad, condujo al desarrollo de técnicas de descomposición (en inglés se utiliza la palabra “disección” en un sentido más amplio: las partes no necesariamente son triángulos). Bajo esta perspectiva, las técnicas de la disección geométrica hacen referencia al corte de las figuras geométricas en “piezas” que puedan ser reconfiguradas para crear otras figuras geométricas equivalentes. Ello implica que la disección permita transformar cualquier polígono en un cuadrado y viceversa, lo cual sería otra alternativa a la cuadratura de figuras rectilíneas.

Aunque la disección es poco conocida en el medio, Pressiat (2002) cita la obra de Frederickson[62], en donde ilustra algunas de las técnicas de disección; a continuación serán presentadas tres de estas técnicas como una alternativa para la aplicación de la equidescomposición y equicomplementación entre dos polígonos.

La primera técnica se conoce como “*el uso de los pavimentos”*:está se realiza a través de la teselación del plano de un polígono P y la intersección de un polígono P´ equivalente a P. Dicha intersección marca los cortes en los que debe ser descompuesto P para que P y P´ sean una figuras equicomplementarias. Un ejemplo ilustrado en Pressiat (2002) muestra el uso de esta técnica en una “demostración” del teorema de Pitágoras (ver figura 29).

[62] La obra de Frederickson citada por Pressiat (2002) se titula: Dissections,Plane & Fancy (1997).

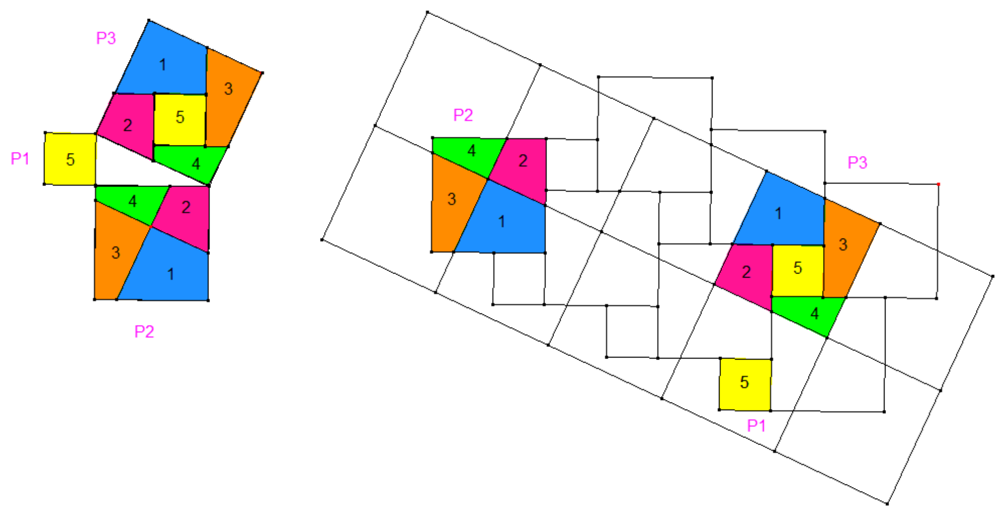


Figura 29. Disección en el teorema de Pitágoras

Como ya se mencionó antes (§ 1.2.1 proposición I-47) el teorema de Pitágoras muestra la equivalencia entre los cuadrados de los catetos y el cuadrado de la hipotenusa, de la siguiente forma: P1+P2 =P3, ahora bien, mientras que los polígonos P1y P2 teselan el plano, P3 (también teselado) se superpone sobre el plano recubierto por el teselado de P1 y P2. Dicha superposición (figura 29 a la derecha) marca la descomposición P1 y P2 en polígonos, al mismo tiempo que muestra la equicomplementación de P3; entonces se tiene que:

P1 = 5

P2 = 1+2+3+4

P3 = 1+2+3+4+5, por tanto se tiene que:

(P1+P2) y P3 son polígonos equicomplementarios.

La segunda técnica de disección, "*tira de llanura o p-tira*" se comporta similar a la técnica vista anteriormente: consiste en encontrar la equidescomposición de dos rectángulos con igual área, las "piezas" en las que se descompone cada rectángulo, resultan del cruce de dos bandas, cada una de ellas, con la forma de su respectivo rectángulo (ver figura 30).

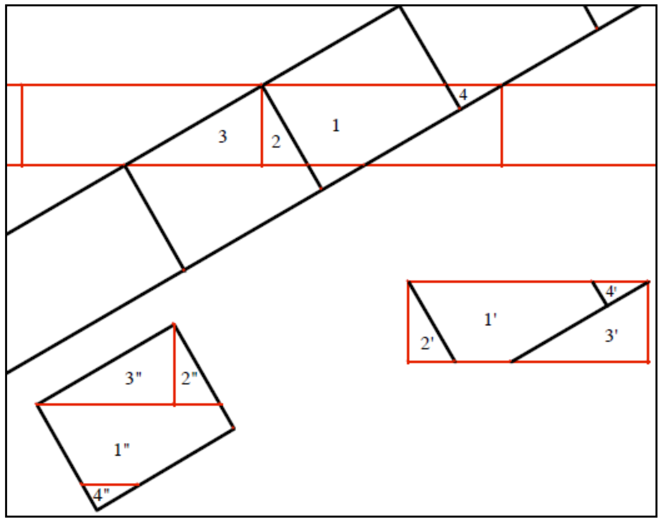


Figura 30. Técnica de P-tira

Una característica de este método recae precisamente en la forma como se deben cruzar las bandas: se referencia un lado del rectángulo de la segunda banda (la que se superpone) de modo tal que un extremo del lado coincida con el vértice del rectángulo de la primera banda y el otro extremo corte el otro lado del rectángulo de la primera banda.

Es importante aclarar que la eficacia de estas dos técnicas está condicionada a conocer previamente los dos polígonos equivalentes; luego, lo importante de la disección es precisamente mostrar que dos polígonos *equivalentes* se pueden representar también como polígonos que son equicomplementarios o equidescompuestos.

Contrario a lo anterior, la tercera técnica conocida como "deslizamiento del paralelogramo" transforma un paralelogramo en otro paralelogramo con la misma superficie y con los mismos ángulos (véase § 1.2.2.1, proposición II-11). Así pues, se tiene el cuadrado ACDB es equivalente al rectángulo AFE´D´ (ver figura 31).

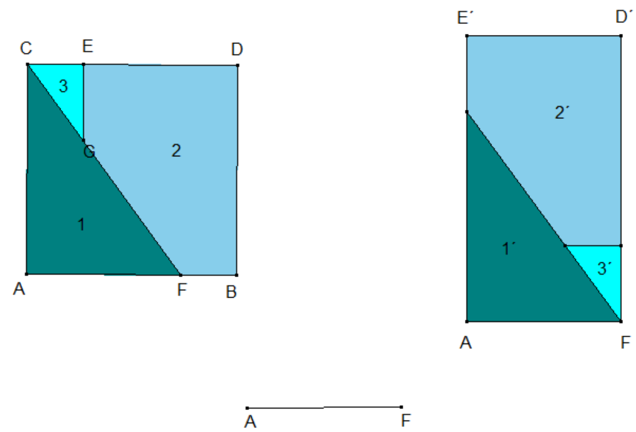


Figura 31. Técnica de deslizamiento del paralelogramo.

La condición necesaria para descomponer ACDB es determinar la base del rectángulo que se quiere construir, en este caso la base AF, que además debe ser menor al lado del cuadrado. Luego se hacen los cortes necesarios en el cuadrado de modo tal que:

ACDB =1+2+3

AFE´D´=1´+2´+3´

1=1´, 2=2´ y 3=3´

Por tanto, ACDB y AFE´D son dos polígonos equidescomponibles y equicomplementarios. Cabe decir, que dichos "deslizamientos" que se producen en los polígonos 1, 2 y 3, son sustentadas desde las isometrías geométricas en el plano, en este caso obedece a una traslación cuyas imágenes en el rectángulo son los polígonos 1´, 2´y 3´ respectivamente.

Ahora bien, una vez explicitadas estas diferentes técnicas de disección, será más fácil aplicar el método de la equidescomposición y equicomplementación para determinar si dos polígonos son de igual área o no; hay otra forma de proceder para encontrar polígonos equivalentes, y en su defecto lograr la cuadratura de los mismos tal como lo hace Euclides en el marco de la medida de superficies. Sin embargo, a pesar de que se apeló a la noción del área como medida relativa, es necesario hacer una pequeña caracterización del área, a través de un sistema de referencia, para tal efecto es necesario presentar el área como una función.

2.3 EL ÁREA COMO FUNCIÓN

Aunque lo expuesto líneas arriba da cuenta de la caracterización relativa de la medida, se considera pertinente caracterizar la medida como una función, a través del empleo de un conjunto numérico, es decir que al aplicar la función medida a cualquier magnitud, a ésta se le asigna un número a su medida. Aunque este no sea el propósito de este trabajo escrito, se considera importante reconocerlo, puesto dicha función implica propiedades arraigadas a la construcción de la magnitud como tal. La única diferencia radica como se verá (§3.3.3.3) que en la escuela se parte de la existencia (*a priori*) y unicidad de dicha función, considerando que es la forma más práctica para calcular el área de polígonos y dejando a un lado propiedades que construyen la función medida como tal.

Hasta aquí se ha establecido *groso modo* que la "*equivalencia de polígonos*" implica igualdad en superficie y por tanto, igualdad en área. Pressiat (2002) define la función medida como una aplicación ***s*** que asocia a cada figura cuadrable (F) del plano un número real **s** (F) llamado "área de F", que tiene las siguientes propiedades:

- ***i.*** La función ***s*** es positiva.
- **ii.** ***s*** es aditiva*: si F y F´* son dos figuras cuadrables, que no tienen puntos interiores en común, ***s*** (F ∪ F')= ***s*** (F) +***s*** (F').
- **iii.** Es invariante a la traslación.
- **iv.** ***s*** es normalizado: ***s***(Q)=1**,** Q designa un cuadrado del plano inicial R.

De lo anterior, se resalta que la asignación numérica de la medida de cualquier superficie siempre va ser un número real mayor que cero. En cuanto a las demás propiedades se destaca resultados al análisis previo, puesto que en (*ii*) se define la que el área de un polígono es igual a la suma de los triángulos que lo componen, siempre y cuando éstos no estén superpuestos el uno sobre el otro. En (*iii*) se define que el área de un polígono no varía cuando se le aplica una traslación, tal y como se vio en la equidescomposición de polígonos y en la técnicas de disección (§2.2.2-deslizamiento del paralelogramo), cuando al cortar el cuadrado en un triángulo (3), éste triangulo encajaba en el rectángulo a través de una traslación, de modo tal que los triángulos 3 y 3´eran congruentes, es decir, con la misma área. En (*iv*) se destaca el cuadrado, unidad patrón de la medida de superficies.

Para presentar la siguiente definición de medida, se debe evocar el axioma (Z), presentado en la obra de Pressiat (2002): Si *Q es una figura incluida dentro de la figura P, y P-Q tiene un interior no vacío, P y Q no tienen la misma superficie.* Es decir, que si al superponer dos figuras *P* y *Q* estas encajan perfectamente, éstas van a tener la misma superficie, en cambio, si por el contrario, va a existir una pequeña brecha entre ambas figuras se tiene que $Q < P$.

Por otro lado, se puede generalizar la función de medida de modo tal que el conjunto referencial sea más general que los reales: la función medida de áreas en Hilbert (1950) es una aplicación $\propto$ de un conjunto P de figuras valorados en un grupo abeliano ordenado G tales que: Si P es una figura al interior no vacía, entonces:

i) $\propto (P) > 0G$
ii) Si P y P' son figuras equidescomponibles, entonces $\propto (P) = \propto (P')$
iii) Si P y P' son figuras equicomplementarias, entonces $\propto (P) = \propto (P')$
iv) Si Q es una figura que está contenida en una figura P y si P \ Q es un interior no vacío, entonces $\propto (Q) < \propto (P)$. En particular, P y Q no pueden tener la misma superficie, y por lo tanto (Z) se satisface.

En este sentido, se puede decir que las áreas poligonales obtenidas con la ayuda de la función medida $\propto$ y la obtenida con la equivalencia de las figuras de la misma superficie es esencialmente similar, solamente que a la función $\propto$ le asigna un numero real positivo a la magnitud.

CAPÍTULO III
DIMENSIÓN DE ORDEN DIDÁCTICO

Este capítulo aborda algunas reflexiones respecto a los libros de texto, en cuanto a la noción de área consignada en los *Elementos*. Por tal motivo, se plantea la necesidad de caracterizar la importancia del uso de los textos escolares en la práctica docente como fuente de información al tratamiento y noción de área presente en la educación básica. Para la revisión de los textos se referenció el libro de *Análisis de textos en Matemáticas* de Arbeláez *et al.* (1999). De este libro se seleccionaron algunos criterios para la revisión de los textos escolares subyacentes a los elementos constitutivos del discurso, tales como: el marco definicional, el marco de ejemplificación y el de ejercitación; cabe destacar que aunque existen otros criterios de análisis, se considera que estos no presentan elementos suficientes para abordar el concepto de área presente en las unidades temáticas de cada libro de texto.

Así pues, estos criterios resaltan las partes claves del texto en donde se revisará el concepto de área. En ese sentido, dicho concepto será revisado desde dos dimensiones: la primera se hará bajo la fundamentación y caracterización histórica y epistemológica que dejo la cuadratura de figuras poligonales abordada previamente en los capítulos I y II. La segunda, referencia conceptualmente el pensamiento métrico y sistemas de medidas, exhibida en los Lineamientos Curriculares y Estándares Básicos de competencias del MEN.

3.1 LA NOCIÓN DE MEDIDA DESDE LOS LINEAMIENTOS CURRICULARES

Los lineamientos curriculares son los referentes teóricos para la enseñanza, el aprendizaje, el diseño curricular y la evaluación de las áreas del conocimiento escolar. En tanto, los lineamientos curriculares en matemáticas se conforman en cinco tipos de pensamientos. Para el caso concreto de la noción de área, solo se hará énfasis en el pensamiento métrico y sistemas de medidas, dado que es aquí donde se encuentra enmarcado el presente trabajo escrito.

3.1.1 DESDE EL PENSAMIENTO MÉTRICO Y SISTEMAS DE MEDIDAS

Los lineamientos estipulan en la conceptualización de las magnitudes, la construcción y comprensión de los procesos de medición como eje fundamental en el aprendizaje de los estudiantes. No obstante, en nuestro medio se introduce la noción de medida de superficies con el uso de instrumentos refinados y la asignación numérica, lo que quizá restringa al niño de otros aspectos y procesos importantes en los cuales se apoya la medición.

> (…) *Los procesos de medición comienzan "desde las primeras acciones con sus éxitos y fracasos codificados como más o menos, mucho o poco, grande o pequeño, en clasificaciones siempre relacionadas en alguna forma con imágenes espaciales, esto es con modelos geométricos, aún en el caso del tiempo* (MEN,1998)

En relación a esto, se sugiere iniciar con comparaciones y estimaciones cualitativas; cabe decir que Euclides en su obra muestra ampliamente este proceso con las figuras poligonales. El establece comparaciones entre una y otra, tal y como lo muestra la relación de orden entre las magnitudes; posterior a este proceso se sugiere seguir con actividades de asignación numérica y *metrización* para llegar a cuantificar numéricamente las dimensiones o magnitudes de objetos.

Aunque solamente se enumerarán a aquellos que son de interés para rastrear la noción de área presente en los libros de texto, así pues, los procesos que acompañan los sistemas métricos son los siguientes:

- Construcción del concepto de magnitud.
- Comprensión de los procesos de conservación de magnitudes. Selección de unidades de medida, de patrones e instrumentos.
- Diferencia entre la unidad y el patrón de medición.
- La asignación numérica.

La construcción del concepto de magnitud se da cuando se reconoce que algo es "más o menos que otra cosa", luego, dicho concepto infiere en la comprensión del proceso de conservación de magnitudes. En ese sentido, se considera que ambos procesos construyen bases conceptuales solidas en cuanto al concepto de área, pues se considera importante reconocer que el área de las figuras planas permanece invariante a cualquier movimiento en el plano, como por ejemplo, la rotación y traslación; de igual forma, las magnitudes se conservan ante cualquier tipo de descomposición y recomposición de la misma, un ejemplo claro de conservación de área lo expone Euclides en su proposición II-14, pues la figura rectilínea es *igual* al cuadrado construido.

Otro proceso a tener en cuenta, es la selección de la unidad de medida, pues:

> *(…)Hay una diferencia importante entre la unidad y el patrón de medida. Los libros que dicen que un centímetro cuadrado es un cuadrito de un centímetro de lado, estarían excluyendo que un disco también pueda tener un centímetro cuadrado de área, o que una región del plano se*

pueda subdividir en triángulos equiláteros de un centímetro cuadrado de área (MEN, 1998).

Cabe aclarar entonces, la distinción que existe entre la unidad de medida y patrón de medida: el patrón de medida es más concreto, dado que esté debe tener una unidad de área, en tanto que la unidad no está ligada a un patrón de medida, pues la unidad de medida podría ser por ejemplo el triángulo, o cualquier polígono que recubra la figura a medir; en el caso de Euclides, como se menciono en (§ 2.1.1), se utiliza la unidad de medida relativa, teoría que se fundamenta en la equivalencia en área y en lograr la cuadratura de cualquier figura poligonal.

Por último, se tiene el proceso concerniente a la asignación numérica, que aunque quizá sea el más importante en la escuela, se cuestiona su uso prematuro en la enseñanza de la medida de superficies, ya que para decir si hubo medición no necesariamente se debe asignar un número a la magnitud. Así pues, son esos aspectos numéricos y de recuento lo que impide desarrollar y explorar los procesos que preceden la asignación numérica, lo cual relega el legítimo proceso de medida que lleva consigo cierta "sensibilidad" a la situación, cierta noción de tamaño, comparación entre magnitudes y el establecimiento de la unidad. Por consiguiente, el proceso de asignación numérica se remonta a procesos de aritmetización, es decir al reemplazo de magnitudes por números y a las "operaciones" que se dan entre ellas, al uso recurrente de las formulas matemáticas para hallar el área de cualquier polígono, lo cual impide aprender la distinción entre el numero y la magnitud.

3.1.2 DESDE LOS ESTÁNDARES BÁSICOS DE COMPETENCIAS.

Es importante identificar que los Estándares Básicos de Competencias son aquellos referentes "operatorios" que son fundamentados teóricamente por los lineamientos curriculares. Así pues, los estándares guían a lo que los estudiantes en su actividad escolar en cuanto a sus procesos generales, sus conceptos y procedimientos matemáticos y su aplicación en contextos, es decir, le dan a los estudiantes las herramientas necesarias en lo que deben *saber y saber hacer* con lo aprendido a través de un aprendizaje significativo.

Por otro lado, es necesario identificar y caracterizar este trabajo escrito dentro de las dos estructuras (vertical y horizontal) en las que se encuentra divididos los estándares; de este modo, en cuanto a la estructura horizontal es de nuestro interés para la revisión del concepto de área en los libros de texto, el pensamiento métrico y sistemas de medidas; dado que encontrar un cuadrado igual a una figura rectilínea dada, implicó un tratado histórico-epistemológico de la medida relativa, en donde se resaltan los diferentes métodos y procesos que realizaron los griegos para encontrar *polígonos equivalentes* o con la misma superficie.

En cuanto a la estructura vertical de los estándares, este trabajo se sitúa en el ciclo de *6º a 7º*, pues al hacer una rastreo a los contenidos temáticos de algunos libros de texto, se encontró que es en este ciclo de la enseñanza básica donde se aborda el tema de la medida de superficies o el concepto de área como tal. A continuación se relacionan los estándares básicos de competencias estipulados para este ciclo, asociados al concepto de área.

En el Ciclo de 6º A 7º

- *Calculo de áreas y* volúmenes *a través de composición y descomposición de figuras* y cuerpos.
- Identifico relaciones entre distintas unidades utilizadas para medir cantidades de la misma magnitud.
- Resuelvo y formulo problemas que requieren técnicas de estimación.
- Utilizo técnicas y herramientas para la construcción de figuras planas y cuerpos con medidas dadas.

- Resuelvo y formulo problemas que involucren factores escalares (diseño de maquetas, mapas).

De estos estándares mencionados se resalta el hecho de poder calcular áreas a través de la composición y descomposición de las figuras, pues si se logra rescatar este proceso o técnica en el estudiante, se estará cimentando bases conceptuales solidas de la noción de área, pues este proceso, además del uso recurrente de la medida relativa, induce al estudiante a utilizar procesos tales como la comparación, conservación de las magnitudes y unidades de medida, tal y como se mostro en el recorrido histórico epistemológico de este trabajo.

Con todo y lo anterior, es menester aterrizar o reflexionar en el ámbito educativo los diferentes aspectos y bases conceptuales que implicó la cuadratura de figuras poligonales en cuanto a la medida de superficies se refiere. No obstante se quiere rastrear la noción de área consignada en los libros de texto de la educación básica, con el ánimo de concluir si en efecto hay o no hay aportes desde la historia de las matemáticas que ayuden a construir dicho concepto en los estudiantes o si este análisis histórico epistemológico sea el punto de partida para el diseño de actividades que den cuenta de la construcción del concepto de área a través de los diferentes procesos expuestos por Euclides y lo consignado desde el marco curricular.

3.2 REVISIÓN DEL CONCEPTO DE ÁREA EN LOS TEXTOS ESCOLARES

La revisión de textos escolares de Matemáticas se centrará únicamente en los capítulos o unidades que aluden al pensamiento métrico, o particularmente a la medición de superficies planas, puesto que es aquí donde se encuentra el concepto matemático de interés para este proyecto de indagación. Esta parte del trabajo es importante en tanto que los textos escolares constituyen una fuente importante en la que se consignan algunas de las prácticas más recurrentes para el tratamiento de los objetos matemáticos. En este caso el concepto de área no es ajeno a su tratamiento en la escuela y como tal se constituye en un objeto de enseñanza presente en los textos escolares de matemáticas en los grados 7° de la enseñanza básica. Para la selección de los dos libros de texto escolar se tuvo en cuenta aquellos que estuvieran bajo estos criterios:

- Editoriales más reconocidas o con un amplio recorrido en el mercado escolar que publiquen en serie los textos escolares de educación básica.
- Que cumplan con los parámetros establecidos por el Ministerio de Educación Nacional. En ese sentido, deben ser textos cuya publicación haya sido después de la divulgación de los *Estándares Básicos de Calidad,* o sea, del año 2006 en adelante.

En el siguiente apartado se presentarán los libros de texto seleccionados, aportando cierta información básica de cómo está segmentado temáticamente cada uno de los textos, de igual forma, se pretende contextualizar al lector y evidenciar el proceso de selección y filtración pertinente para abordar el tema de interés en este trabajo escrito.

3.2.1 IDENTIFICACIÓN DEL TEXTO NUEVA MATEMÁTICAS 7

EDITORIAL SANTILLANA S.A.
Bogotá, D.C.- Colombia
Año de edición. 2007
Autor: Anneris del Rocío Joya Vega
ISBN del libro 958-24-1059-0
Total de páginas: 288

CONTENIDOS TEMÁTICOS			
Unidad 1	Números Enteros	***Unidad 6***	Mediciones en el Plano y en el Espacio
Unidad 2	Números Racionales	Unidad 7	Recubrimiento del Plano
Unidad 3	Ecuaciones	Unidad 8	Estadística
Unidad 4	Proporcionalidad	Unidad 9	Probabilidad
Unidad 5	Polígonos y Cuerpos		

Tabla 1. Contenidos temáticos del texto *Nuevas Matemáticas 7º*

UNIDAD TEMATICA (Unidad 6)		
Tema 1	Unidades métricas de longitud	
Tema 2	**Unidades métricas del área**	- Metro cuadrado. Múltiplos y submúltiplos - Medidas agrarias - Conversiones - ***Área de polígonos*** - Área de un sólido
Tema 3	Unidades métricas del volumen	

Tabla 2. Unidad temática del texto *Nuevas Matemáticas 7º*

Este libro de texto se encuentra dividido en nueve unidades, de las cuales se concentrará solamente la unidad seis, tal y como se ilustra en la tabla1, luego esta unidad se subdivide en tres temas; el tema de interés es el concerniente a las *unidades métricas del área* ilustrado en la tabla 2; sin embargo de este tema 2 se puntualiza conceptualmente en el área de polígonos. Cabe aclarar que de los otros contenidos serán tenidos en cuenta en su marco de ejercitación o actividades, puesto que se evidencian otro tipo de proceso de la medida de superficies, en concreto hay un trabajo amplio de asignación numérica por lo que no se podrá pasar por alto y será motivo de revisión.

3.2.2 IDENTIFICACIÓN DEL TEXTO DELTA 7

GRUPO EDITORIAL NORMA S.A.
Bogotá, D.C.- Colombia
Año de edición. 2009
Autores: William Estrada, Giovanna Castiblanco, Andrés Báez, Soraya Padilla, Carmen Samper.
ISBN del libro 978-958-45-1293-2
Total de páginas: 328

CONTENIDOS TEMÁTICOS			
Unidad 1	Números Enteros	Unidad 5	Pre álgebra
Unidad 2	Números Racionales	Unidad 6	Estadística y Probabilidad
Unidad 3	Razones y Proporciones	Unidad 7	Conjeturas en Geometrías
Unidad 4	***Medición***	Unidad 8	Movimientos en el plano

Tabla 3. Contenidos temáticos del texto *Delta 7º*

UNIDAD TEMATICA (Unidad 4)	
Lección 1	Unidades de longitud. Sistema ingles y sistema internacional
Lección 2	**Unidades de área**
Lección 3	**Área de polígonos y del círculo**
Lección 4	Unidades de volumen
Lección 5	Medidas de capacidad y volumen
Lección 6	Unidades de masa
Lección 7	Unidades de tiempo

Tabla 4. Unidad temática del texto *Delta 7º*

Tal como se muestra en la tabla 3, el libro de texto se encuentra distribuidos en ocho unidades de contenidos macro, de las cuales solamente la unidad cuatro será objeto de revisión. No obstante, la unidad se encuentra subdividida en lecciones tal y como se observa en la tabla 4, por lo que solo se hará énfasis en la lección 1 y 2, concernientes a la unidad de área y el área de polígonos, las demás lecciones aunque aluden a pensamiento métrico, no son de interés para el propósito de este trabajo escrito, en cuanto que se refieren al tratamiento de otro tipo de magnitudes diferentes a la superficie.

3.3 REJILLA DE ANÁLISIS UTILIZADA PARA LA REVISIÓN DE TEXTOS.

En general, en el discurso del texto escolar de matemáticas una característica de su forma expositiva, es que el lector reconoce al corto tiempo de haber iniciado la lectura un marco definicional, un marco de ejemplificación y un marco de ejercitación (Arbeláez *et al.*, 1999). Los textos seleccionados no son la excepción y en su estructura se evidencia un discurso expositivo puesto que, de entrada, se exponen las definiciones del objeto matemático, posteriormente se ejemplifican algunos casos y luego se proponen ejercicios al respecto.

Al tener identificados los textos escolares y la unidad temática específica, se llevó a cabo una lectura detallada de ellos, donde se enfatizó en los criterios de revisión establecidos en los marcos: definicional, de ejemplificación y de ejercitación, mencionados anteriormente. Dichas criterios serán revisados a partir del resultado de los análisis histórico-epistemológico y curricular. Para ello, se ha dispuesto de tres categorías de análisis que abarcan los resultados concernientes a la medida de superficies o noción de área tratados a lo largo de este trabajo escrito. Dichas categorías son: *la composición y descomposición de figuras, selección de unidades de medida* y *la asignación numérica*.

En primera instancia, en el proceso de composición y descomposición de figuras se analizará a partir de lo expuesto por Euclides (§ 1.2.2) y por lo visto en Pressiat e Hilbert (§2.2 y §2.2.1), donde un polígono puede ser descompuesto en triángulos no superpuestos y que el área de dicho polígono es igual a la suma de las áreas de los *n* triángulos en los que fue descompuesta la figura.

La categoría de la selección de unidades de medida se abordará desde lo planteado por Euclides en la teoría de la medida relativa (§2.1.1) en cuanto a la ausencia de una escala numérica para calcular el área de una superficie, y esta categoría se revisará también desde lo curricular (§3.1.1 y 3.1.2), ya que se tendrá en cuenta la unidad de medida y el patrón de medida seleccionado en aras de calcular el área de la superficie de cualquier figura rectilínea.

Por último, la asignación numérica se abordará de lo expuesto curricularmente desde los lineamientos y estándares básicos de competencias (§3.1.1 y 3.1.2). Aquí se resalta el uso exclusivo de la aritmetización, es decir, que para medir una magnitud se asocia necesariamente un número. Dicho proceso se caracteriza por los diferentes cálculos numéricos que se realizan para encontrar el área de una superficie. Entre ellos se destaca el uso recurrente de las formulas y la conversión de medidas.

Cabe decir que la revisión del marco de ejercitación se realizará aparte de los otros dos criterios, puesto que en los ejercicios se presenta masivamente las consignas enseñadas en el aula; es por ello que se ha recurrido a hacer el conteo de cada uno de los ejercicios propuestos por el texto enmarcados en las tres categorías de análisis (véase tabla 5 §3.3.3).

3.3.1 ALGUNAS NOCIONES DEL CONCEPTO DE ÁREA PRESENTE DESDE EL MARCO DEFINICIONAL Y DE EJEMPLIFICACIÓN

Teniendo en cuenta las categorías de análisis, se proponen algunos apartados donde se evidencia el tipo de definición y ejemplo que plantea cada uno de los textos respecto al concepto de área. También se resaltaran proceso como la descomposición y complementación en apartados donde el texto alude específicamente al área de polígonos. En primera instancia se revisara el texto *Delta 7º* y posteriormente *Nuevas Matemáticas7º*.

El texto *Delta 7º* presenta una definición de área desde un contexto métrico en donde se caracteriza una perspectiva numérica (ver figura 32). La lección de la unidad de área señala una serie de conceptos o nociones fundamentales para identificar las unidades de área y en el cálculo de las mismas. Una de las nociones que se encuentra presente es el uso del cuadrado como único patrón de medida, dejando a un lado otro tipo de figuras rectilíneas (círculos, triángulos, rectángulos) que pueden tener también un área equivalente a un metro cuadrado.

Se enfatiza también en el metro cuadrado (m^2) como unidad básica de medida y en las conversiones que puede tener esta unidad cuanto sea necesario utilizar unidades más grandes o más pequeñas (múltiplos y submúltiplos). De este modo, este proceso de conversión no va más allá de un cálculo numérico que representa cada unidad de medida, para ello, se utilizan operaciones básicas como la multiplicación o división por 100 del área, según sea la conversión y teniendo en cuenta la unidad estándar "si se corre a la derecha se multiplica, y si se corre a la izquierda se divide".

*El **área** es la medida de la superficie de una región bidimensional. La región puede ser pequeña como el microchip de un computador o grande como un país. Usualmente, la región fundamental es un cuadrado de lado 1 m y entonces decimos que el área se mide en metros cuadrados.*

*La superficie de un cuadrado de lado un metro, es un **metro cuadrado.***

Para expresar una medida de superficie en otra de distinto orden, procedemos tal como con las unidades de longitud, teniendo en cuenta que en este caso por cada lugar de diferencia debemos multiplicar o dividir por 100, según se trate de pasar a múltiplos o submúltiplos del metro cuadrado. El esquema de la figura 4.7 ilustra el procedimiento por seguir.

× 100

km^2	hm^2	dam^2	m^2	dm^2	cm^2	mm^2

÷100

Figura 4.7

Ejemplo 3

Resolvamos el problema de la finca de trigo de la situación introductoria.

Solución

El área de la finca es: $A = 1{,}2\text{ km} \times 0{,}8\text{ km} = 0{,}96\text{ km}^2$.

Ahora convertimos a metros cuadrados. De km^2 al m^2 hay tres lugares a la derecha. Por tanto, multiplicamos tres veces por 100:

$0{,}96\text{ km}^2 = 0{,}96 \times 100 \times 100 \times 100 = 960\,000\text{ m}^2$. ◄

Figura 32. Definición de área. *Delta* 7º, pág.147

Inmediatamente después de la definición se presenta el ejemplo, enmarcado en una situación problema, cuya solución refleja consecuentemente lo expuesto en la definición, pues, la solución a este problema se reduce al cálculo numérico que conlleva el hacer una conversión de medida, en este caso "multiplicar 100 por el número de veces que se encuentre la unidad de medida requerida de la estándar". Se cuestiona entonces el hecho de inducir a los estudiantes en su primera experiencia medida de superficies al uso recurrente del número y a los cálculos que están restringidos a él, dejando así pocas posibilidades de explorar los principios o procesos en los cuales se apoya la medición de superficies.

Contrario a la definición anterior, el texto *Nuevas Matemáticas* presenta en su definición otras nociones de área que van acorde al análisis historio-epistemológico expuesto en este trabajo escrito (ver figura 33).

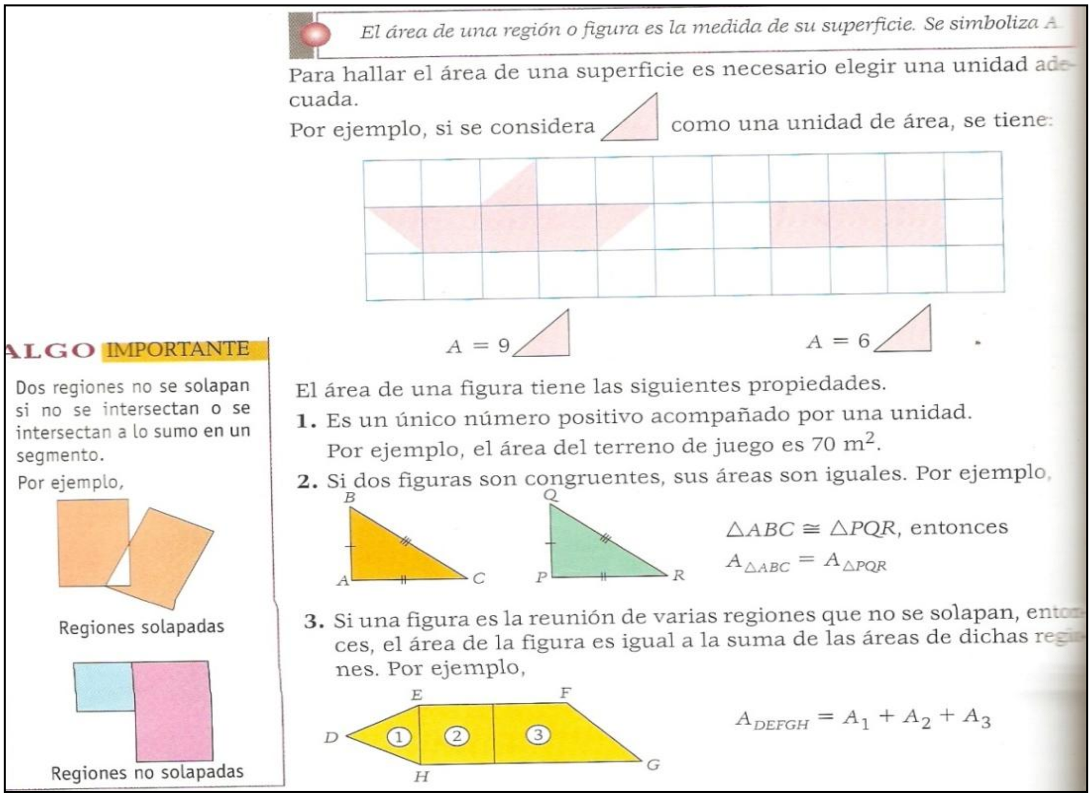


Figura 33. Definición de área. *Nuevas Matemáticas 7º*, pág. 198

En primera instancia caracteriza la unidad de medida utilizando como patrón de medida el triángulo, dado que es esté el que más se ajusta para medir (por recubrimiento) el polígono irregular puesto en correspondencia. Esto se considera importante en el sentido que, el estudiante va a construir el concepto de área separando el número de la magnitud. En tanto el marco de ejemplificación (ver figura 34) profundiza lo dicho en la definición, relativo a el patrón de medida va a "calzar" un número entero de veces en el polígono a medir.

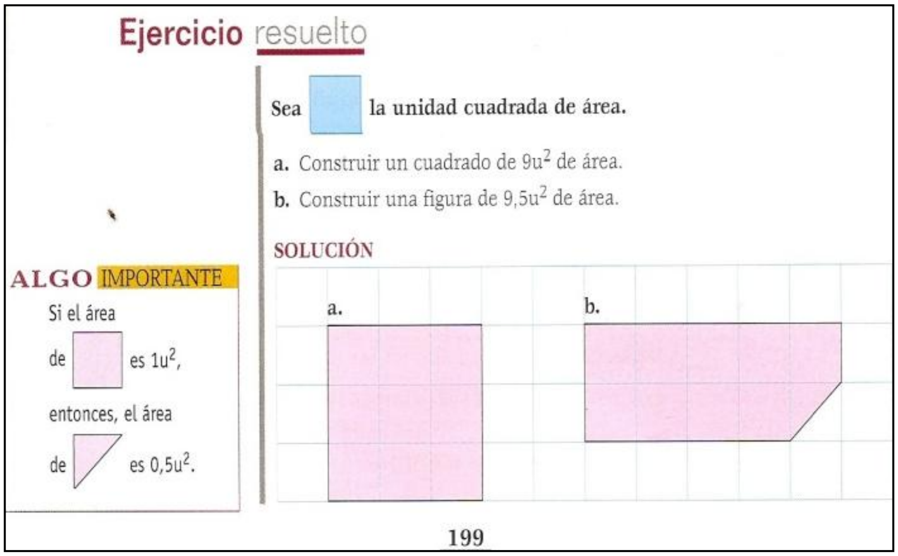
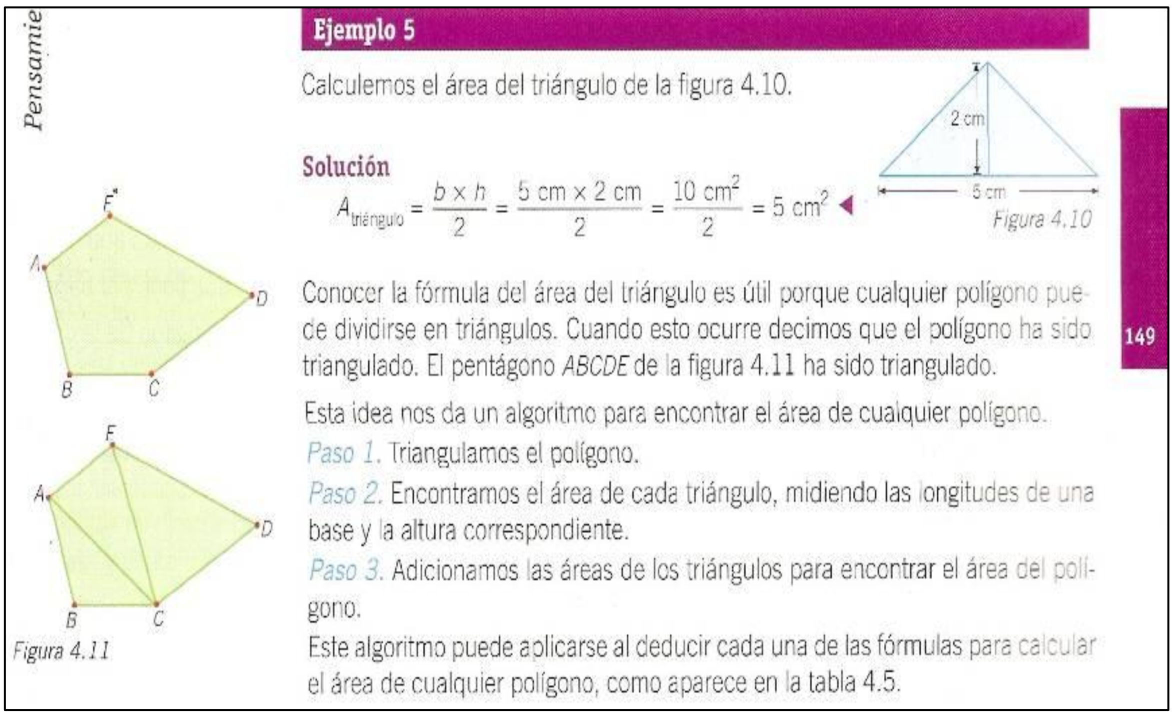


Figura 34. Ejemplo del concepto de área. *Nuevas Matemáticas*, pág.19

En un segundo momento define el área a través de tres propiedades (ver figura 33). La primera hace énfasis en la definición dada en Pressiat (2002), donde se define aplicación ***s*** que asocia a cada figura cuadrable (F) del plano un número real ***s***(F) llamado "área de F", donde la función ***s*** *es positiva*. La segunda, deja claro que si dos figuras son congruentes entonces tienen igual superficie y por tanto la misma medida del área. Por último, la tercera propiedad, quizá la más relevante en cuanto a los procesos de medida se refiere, pues en ella se infiere conceptualmente que un polígono puede ser complementado por varias figuras, sin superponerse la una de la otra y que además el área polígono (irregular) es igual a la suma de las áreas de dichas figuras que componen el polígono.

3.3.2 PROCESOS DE DESCOMPOSICIÓN Y COMPLEMENTACIÓN PRESENTE EN LOS LIBROS DE TEXTO

En un apartado del texto (ver figura 35) se resalta la importancia de descomponer un poligono en triángulos tal y como lo expone Euclides en su obra (vease §1.2.1 proposicion I-45), pero en este caso no se intenta cuadrar el poligono sino calcular su área por medios aritmeticos; lo importante aquí es reconocer el proceso de descomposición como salida inmediata al cálculo del área de cualquier poligono, pues un aspecto importe en la medida de superficies es conocer que todo poligono puede ser descompuesto en un número finito de triángulos; y, una vez se tenga el área de cada triángulo, se tendra tambien el área del poligono. Por tanto, se cree que actividades de esta caracterisca llevan al estudiante a desarrollar otro tipo procesos y conceptos de la medida de superficies diferentes a la asignacion numerica.



Pensamie

Ejemplo 5

Calculemos el área del triángulo de la figura 4.10.

Solución

$$A_{\text{triángulo}} = \frac{b \times h}{2} = \frac{5\text{ cm} \times 2\text{ cm}}{2} = \frac{10\text{ cm}^2}{2} = 5\text{ cm}^2$$

2 cm

5 cm

Figura 4.10

Conocer la fórmula del área del triángulo es útil porque cualquier polígono puede dividirse en triángulos. Cuando esto ocurre decimos que el polígono ha sido triangulado. El pentágono *ABCDE* de la figura 4.11 ha sido triangulado.

Esta idea nos da un algoritmo para encontrar el área de cualquier polígono.

Paso 1. Triangulamos el polígono.

Paso 2. Encontramos el área de cada triángulo, midiendo las longitudes de una base y la altura correspondiente.

Paso 3. Adicionamos las áreas de los triángulos para encontrar el área del polígono.

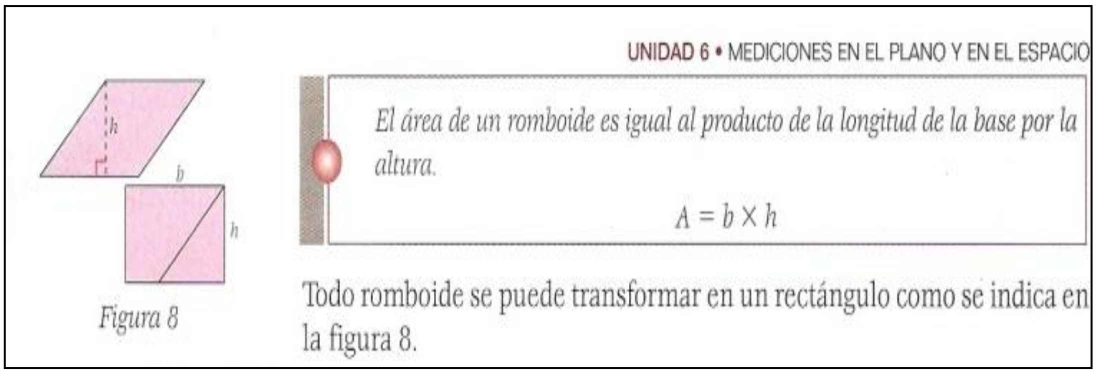
Este algoritmo puede aplicarse al deducir cada una de las fórmulas para calcular el área de cualquier polígono, como aparece en la tabla 4.5.

Figura 4.11

149

Figura 35. Descomposición de un polígono en triángulos. *Delta 7º*, pág.149.

Teniendo en cuenta aspectos importantes del análisis epistemológico se proponen algunos apartados que plantea el texto, donde se evidencia la propuesta de Pressiat en el uso de las técnicas de disección (§2.2.2) con ánimo de deducir ciertas formulas para hallar aritméticamente las áreas de algunos polígonos (ver figura 36). Por ejemplo, en el caso del romboide se aplica una técnica de disección de modo tal que esté se transforma en un rectángulo, es decir el rectángulo y el romboide son polígonos equicomplementarios, por tanto tienen la misma área; luego sus alturas y bases correspondientes son congruentes, como se puede inferir en el corte hecho por la disección. Por tanto, la fórmula para determinar el área del romboide es igual a la utilizada para hallar el área del rectángulo.

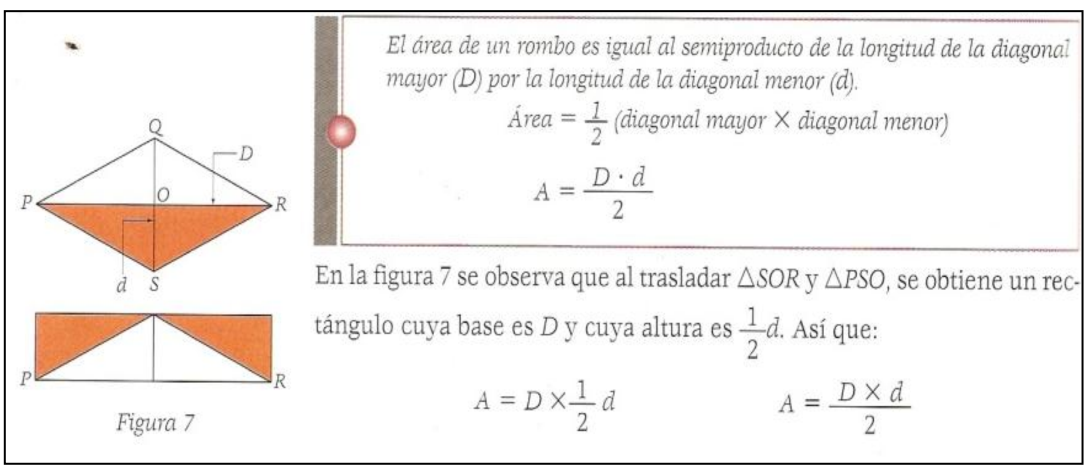


UNIDAD 6 • MEDICIONES EN EL PLANO Y EN EL ESPACIO

El área de un romboide es igual al producto de la longitud de la base por la altura.

$$A = b \times h$$

Todo romboide se puede transformar en un rectángulo como se indica en la figura 8.



El área de un rombo es igual al semiproducto de la longitud de la diagonal mayor (D) por la longitud de la diagonal menor (d).

$$Área = \frac{1}{2}\text{(diagonal mayor} \times \text{diagonal menor)}$$

$$A = \frac{D \cdot d}{2}$$

En la figura 7 se observa que al trasladar $\triangle SOR$ y $\triangle PSO$, se obtiene un rectángulo cuya base es D y cuya altura es $\frac{1}{2}d$. Así que:

$$A = D \times \frac{1}{2}d \qquad A = \frac{D \times d}{2}$$

Figura 36. Algunas técnicas de disección. *Nuevas Matemáticas 7º*, págs. 206-207

3.3.3 ALGUNAS NOCIONES DEL CONCEPTO DE ÁREA PRESENTES EN EL MARCO DE LA EJERCITACIÓN

La siguiente tabla muestra la frecuencia de cada uno de los ejercicios sin hacer ninguna distinción entre ellos, enmarcados en las tres categorías de análisis y en cada libro de texto. Además de eso, se explicita el porcentaje de dichas frecuencias. Todo ello con el ánimo de obtener un conteo y poder lanzar cierto tipo de conclusiones o reflexiones al respecto de los resultados obtenidos. Aunque la tabla ya muestra los resultados, se especificará más adelante de ellos conforme se muestren algunos apartados de los textos y de cómo se evidencia la categoría de análisis en cada apartado seleccionado.

Proceso de la Medida de Superficies.	**Total de Ejercicios o Actividades de los Textos**			**Porcentaje de Ejercicios o Actividades de los Textos**		
	Nuevas Matemáticas 7º	Delta 7º	**Total**	Nuevas Matemáticas 7º	Delta 7º	**Total de Ambos Textos**
Composición y Descomposición de Figuras	5	1	**6**	15%	4%	**11%**
Selección de Unidades de Medida	3	1	**4**	9%	4%	**7%**
Asignación Numérica o Metrización	26	20	46	76%	92%	**82%**
Total	34	22	**56**	100%	100%	**100%**

Tabla 5. Rejilla de análisis y conteo de los ejercicios

En el marco de ejercitación de los textos se considera en primera instancia las tres categorías de análisis de los textos descritas previamente en los procesos de la medida de superficies. Pero también es preciso mencionar que los ejercicios se presentan en diferentes formas en donde se logra identificar procedimientos tales como: efectuar conversiones de patrón de medida, efectuar cálculos numéricos, solución de problemas y recubrimiento. Para facilitar un poco la revisión de los textos en este marco se dispuso a seleccionar una muestra que representara cada una de las categorías de análisis del total de los ejercicios o actividades consignadas en los textos escolares.

3.3.3.1 Composición y Descomposición de Figuras

En la revisión de esta categoría se encontraron 6 ejercicios entre ambos textos, o sea que solamente un 11% del total de los ejercicios alude a procesos de composición y descomposición de figuras para calcular el área de polígonos. A continuación se presenta un ejercicio que representa los demás ejercicios de esta categoría (ver figura 37) en cuanto que, presenta tratamientos similares al momento de su resolución.

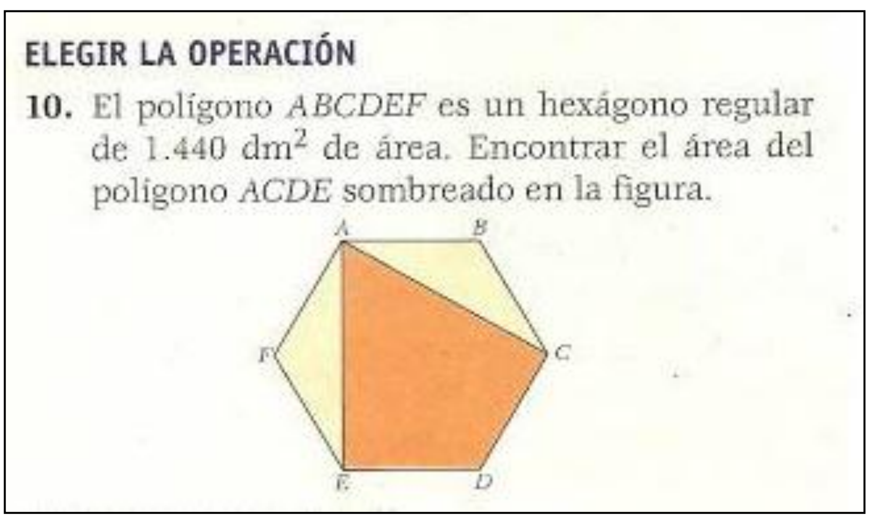


Figura 37. Composición y descomposición de figuras. *Nuevas Matemáticas 7º*, pág. 213.

Ahora bien, la consigna del ejercicio es encontrar el área sombreada de un polígono que está inscrito en un hexágono regular de 1440 dm^2 de área. Para la solución de este problema se debe descomponer el hexágono regular en triángulos congruentes, luego (sea el punto O el centro del hexágono) dichos triángulos congruentes son:

$\Delta AFE = \Delta AEO = \Delta AOC = \Delta ABC = \Delta EOC = \Delta CDE$; ahora bien, si son congruentes tienen la misma área. Por otro lado, se tiene que el área sombreada es el polígono ACDE pero este polígono se compone de los siguientes triángulos tal que:

$ACDE = \Delta AEO + \Delta AOC + \Delta EOC + \Delta CDE.$

Ahora se necesita saber cuántos dm^2 de superficie tiene cada triángulo en los que ha sido descompuesto del hexágono regular, y posteriormente multiplicar el valor de la medida por cuatro, que es el número de triángulos que componen el polígono sombreado.

$\Delta AEO = 240\ dm^2$
$ACDE = 960\ dm^2.$
Una vez se realicen los cálculos numéricos se tiene que el área del polígono sombreado es igual a 960 dm^2.

A pesar del la evidencia del proceso no hay un ejercicio potente que dé cuenta del análisis histórico- epistemológico hecho previamente, ni de los conceptos expuestos en las definiciones y ejemplos revisados anteriormente (§3.3.2 y §3.3.3). Este proceso está ligado a operaciones o cálculos numéricos, en tanto que se está dejando de lado actividades que impliquen otros procesos subyacentes a la descomposición y composición, tales como la construcción de polígonos equivalentes en área o presentar actividades que muestre una equidescomposición entre polígonos de diferente forma, de tal manera que el estudiante conjeture y establezca relaciones de correspondencia entre polígonos para hallar el área.

3.3.3.2 Selección de Unidades de Medida

En esta categoría solamente se presentan 4 ejercicios, lo que es igual al 7% del total de los ejercicios propuestos entre ambos textos; dicho porcentaje hace pensar que este proceso no parece tener importancia en el concepto de área para los estudiantes. De igual manera se ve la necesidad de caracterizar el ejercicio seleccionado (ver figura 38).

La consigna del ejercicio es encontrar el área de cada uno de los polígonos a partir un cuadrado de área igual a una unidad cuadrada. Este ejercicio es muy importante en el sentido que los polígonos a medir son irregulares, además, el patrón de medida no encaja un numero entero de veces sobre los polígonos excepto en el primer polígono (numeral 28). Ante esto, el estudiante puede recurrir a otro tipo de unidades (el triángulo por ejemplo) que recubran exactamente la superficie del polígono o sencillamente estimar la medida del polígono a partir del patrón de medida asignado.

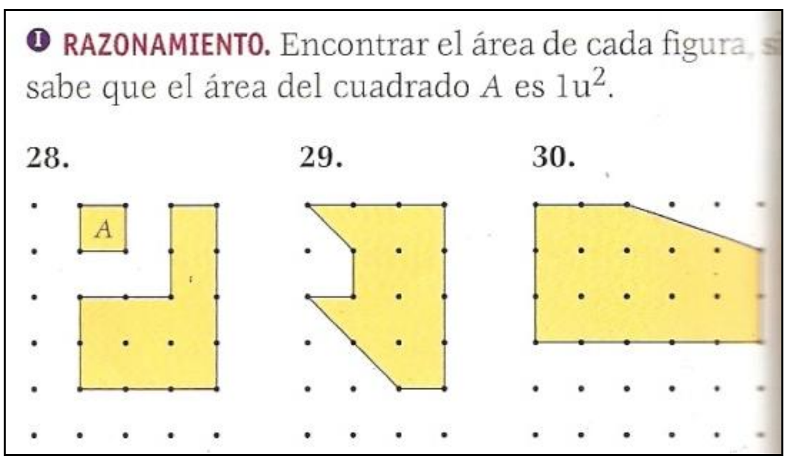


Figura 38. Selección de unidad de medida. *Nuevas Matemáticas 7º*, pág. 204.

A pesar de la relevancia de este tipo de ejercicios en el proceso de medición, no hay rastro alguno de la unidad de medida relativa expuesta por Euclides, ya que no hay ejercicios que impliquen en su solución algún tipo de comparación *dos a dos* de los objetos a ser medidos, o por ejemplo recurrir a la cuadratura para establecer un orden parcial entre las magnitudes. De igual manera se pone en tela de juicio la poca importancia que se evidencia para este tipo de procesos, que aunque parezcan nociones básicas son trascendentales para la construcción del concepto de área.

3.3.3.3 Asignación Numérica o Metrización

En la revisión de esta categoría se encontraron 46 ejercicios, lo que corresponde a un 82% del total de las actividades entre ambos textos; éstas se encuentran distribuidas en problemas de aplicación, conversión de medida y aplicación de formulas. A continuación se exhibirán algunos apartados de estas actividades (ver figura 39 y 40).

En el primer apartado (figura 39) se encuentran una serie de ejercicios en donde de pide hallar el área de algunos polígonos irregulares que no son desconocidos, tal es el caso del triángulo rectángulo isósceles, el rectángulo y el trapecio; polígonos que, para calcular su área, no necesita recurrir a un tipo de tratamiento especial que lleve al estudiante a pensar en procesos como la descomposición o la comparación entre otros polígonos, sino que las mismas características de estos polígono hace que para calcular su área se recurra directamente al uso de alguna fórmula.

5. Halla el área de un triángulo rectángulo isósceles cuyos lados iguales miden 10 cm cada uno.
6. Calcula el número de árboles que pueden plantarse en un terreno rectangular de 32 m de largo por 30 m de ancho, si para desarrollarse cada planta necesita 4 m^2.
7. El área de un trapecio es 120 cm^2, su altura mide 8 cm, y la base menor mide 10 cm. ¿Cuánto mide la otra base?

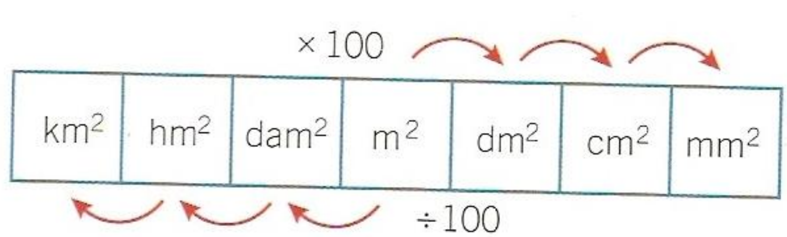
Figura 39. Asignación numérica o metrización. *Delta 7º*, pág.151

En el caso especifico del numeral 5 si el triángulo es rectángulo la medida de la altura y la base es la misma, es decir que miden 10cm. Luego si se conoce que área del triángulo es igual al semiproducto de la base por la altura el problema ya estaría resuelto, pues basta con sustituir el valor de cada elemento en la siguiente fórmula:

$A = \frac{b \text{ x h}}{2}$, luego sustituimos los valores indicados en la formula y se procede a efectuar el cálculo; de esta forma se tiene que el área del triángulo rectángulo es 50 cm^2.

Por otro lado, el ejercicio del numeral 7 cambia con respecto al anterior, pues el problema aquí es hallar la medida de la base mayor (una longitud) conociendo previamente el área del trapecio y la medida de sus otros elementos. La solución de este tipo de ejercicios se reduce al mero "despeje" algebraico de la base mayor (B) en la formula determinada para calcular el área del trapecio, en tanto que ya se conocen los otros elementos de la formula; la base menor (b) y la altura (h).

En el segundo apartado (ver figura 40) se exponen una serie de ejercicios de conversión de la unidad de medida donde se hace uso recurrente de la tabla de los múltiplos y submúltiplos a partir de la unidad estándar el m^2.



La exigencia de estos ejercicios está en saber cuántas unidades se desplaza y en qué sentido (izquierda o derecha) la unidad a convertir. Por tanto, se puede decir que el tratamiento aquí es netamente aritmético y numérico. Si se va a convertir la unidad a un múltiplo se "divide" por 100 tantas veces este la unidad a convertir, y si es a un submúltiplo se "multiplica" por 100 tantas veces este la unidad a convertir.

ESTÁNDAR: PENSAMIENTOS MÉTRICO Y NUMÉRICO

ACTIVIDADES 4

1 EJERCITACIÓN. Convertir a la unidad indicada.

1. 5 km^2 a Hm^2	**2.** 9 Dm^2 a m^2
3. 49 m^2 a mm^2	**4.** 56 Mm^2 a km^2
5. 16 m^2 a dm^2	**6.** 2.651 dm^2 a Hm^2
7. 138 Dm^2 a Hm^2	**8.** 347 Hm^2 a mm^2
9. 125 dm^2 a cm^2	**10.** 168 cm^2 a mm^2
11. 4,25 m^2 a dm^2	**12.** 216,2 m^2 a cm^2
13. 0,01 dm^2 a Hm^2	**14.** 0,0085 Hm^2 a km^2
15. 0,0197 m^2 a dm^2	**16.** 0,0612 cm^2 a Dm^2
17. 5,21 m^2 a mm^2	**18.** 0,133 cm^2 a mm^2
19. 3,7 dm^2 a Hm^2	**20.** 3,24 Dm^2 a km^2

Figura 40. Asignación numérica o metrización. *Nuevas Matemáticas 7º*, pág.204

El enfatizar en este tipo de ejercicios descuida la construcción de la magnitud así como también la comprensión y el desarrollo de los procesos de medición. Lo que realmente preocupa es que en este proceso de la medida priman aspectos numéricos y de recuento que asocia las concepciones históricas de la medida únicamente a operaciones aritméticas o algebraicas que conllevan a la mecanización de un procedimiento, utilizando reiteradamente tablas o formulas, a veces sin reflexionar a distinguir la clase de magnitudes que están en correspondencia.

3.3.4 CONCLUSIONES DE LA REVISIÓN DEL CONCEPTO DE ÁREA EN LOS LIBROS DE TEXTO.

En algunas definiciones y ejemplos se observó que en el tratamiento de la medida de superficies se ejecuta en polígonos regulares e irregulares, resaltando así el uso de medidas relativas y patrones de medidas arbitrarios. Asimismo, se observó la aplicación de procesos como la descomposición y recomposición sobre un polígono dado y como el área de un polígono es igual a la suma de las áreas de los polígonos que lo componen.

Sin embargo, en gran parte de las actividades de los textos escolares de grado séptimo, el tratamiento de la medida del área se realiza sobre superficies regulares, usando por demás unidades y patrones de medida estandarizadas donde su solución apela a estrategias tales como: el conteo repetitivo, la conversión de la unidad de medida a través de tablas establecidas a partir de la unidad patrón y a la aplicación recurrente de la formula.

Lo anterior supone que en los textos escolares no hay una coherencia entre la teoría y la práctica. Apesar que en las definiciones y ejemplos se evidencian nociones y procesos de la medida de superficies desde concepciones históricas y curriculares, estás no se potencializan en el diseño de los ejercicios; pues, por el contrario, los conceptos de medida aparecen en situaciones cuyo propósito es enseñar y aprender sobre el número, en tanto que la mayoría de las actividades propuestas para hallar el área de una superficie no van más allá del cálculo numérico a través de la aplicación de formulas regidas por operaciones aritméticas.

En ese sentido, es necesario que esa sinergia de lo histórico, específicamente en el marco de la medida relativa y lo que aparece en el texto, debe ser potencializada particularmente por el docente, en la medida que como se ha visto, el texto presenta algunas incoherencias entre el marco definicional y el de ejercitación. Luego, es menester del docente tomar una postura crítica al respecto y rescatar esas bases conceptuales que permitan el desarrollo del pensamiento métrico en los estudiantes.

4 CONCLUSIONES

Después de haber hecho la revisión de textos y de dar fundamento al interrogante que generó este trabajo de indagación, es posible considerar algunas conclusiones en torno al concepto de área enseñado en la educación básica, tomando una postura crítica al momento de considerar las actividades propuestas por los libros de texto, específicamente desde las bases teóricas de la medida de superficies expuesta por Euclides en su obra, y de los procesos históricos que caracterizaron la medida de superficies planas y curvas.

Es importante reconocer en la escuela la diversidad de procesos de medida de superficies utilizado por los antiguos griegos en el afán de resolver el problema de la cuadratura del círculo y en fundamentación teórica presentada por Euclides respecto a la cuadratura de figuras poligonales. Puesto que dichos procesos se fundamentan en la teoría de la medida relativa, de modo tal que permiten intuitivamente la construcción de la magnitud. Y, a mi juicio, el obviar la constitución de la magnitud por el uso prematuro de la asignación numérica, relega a un segundo plano la noción de "equivalencia" de figuras poligonales, lo cual supone que obstruye a los estudiantes de elementos esenciales para comprender la medida de superficies tales como la descomposición, la exhausión, el recubrimiento, la estimación, etc.

En cuanto al tratamiento de la medida de superficies presente en las definiciones y ejemplos de los textos, se evidencian algunas nociones de la medida de superficies concernientes a la teoría de la medida relativa, tales como la descomposición de un polígono en triángulos, unidad de medida no estandarizada, y algunas técnicas de disección para inferir algunas formulas de área. Sin embargo, estas no trascienden en el marco de la ejercitación, puesto que se hace un uso recurrente de la aritmetización en las actividades escolares, en tanto que deja de lado elementos epistemológicos de la medida de superficies (como han sido presentados por Hilbert y Pressiat). El reconocer el bagaje teórico que implica los procesos como la equidescomposición y la equicomplementación permite ampliar la manera como se aborda la enseñanza del concepto de área. Aquí se plantean aspectos relevantes como la equivalencia de polígonos a partir de la descomposición de éstos en un mismo número de triángulos cuasi disjuntos que sean congruentes dos a dos. Además de tener en cuenta la diferentes técnicas de disección utilizadas para descomponer polígonos en triángulos congruentes, y al mismo tiempo establecer infinitos polígonos equivalentes a partir de la recomposición de dichos triángulos.

Una de las características del trabajo histórico sobre los objetos matemáticos, es que resulta indispensablemente útil en el diseño de situaciones problema en el aula, dado que, al dar cuenta de la génesis del concepto permite abordarlo desde distintos frentes, lo que constituye una mirada diferente a la enseñanza del concepto de área, evitando así ocultar aspectos importantes que puedan servir de entrada o de base para la construcción de conceptos relacionados más complejos. En cuanto a los caminos que pueden quedar abiertos a futuros trabajos de investigación está el aportar más elementos a la formación continua de los docentes respecto a las reflexiones relativas a la historia y epistemología de las matemáticas, en tanto que puedan servir de preámbulo para un proyecto de maestría desde el diseño de una micro-ingeniería didáctica que tenga como eje principal actividades para la medición de superficies planas irregulares y así potenciar el pensamiento métrico en la escuela. Cabe destacar que el proyecto de este trabajo se expuso en el congreso de matemáticas (ASOCOLME) en el año 2010, donde se caracterizó *grosso modo* la dimensión histórica-epistemológica de la noción de área a partir de los diversos procesos que implica la cuadratura de figuras poligonales y curvas.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

ANACONA, M. (2003). *La Historia de las Matemáticas en la Educación Matemática*. En la revista EMA. Vol. 8, Nº 1, págs. 30-46.

ARBELÁEZ, G; GUACANEME, E; ARCE, J; SANCHEZ, G (1999): *Análisis de Textos Escolares*. Cali, Valle, Colombia: Universidad del Valle.

BERNAL, Z; VERDUGO, M. (2008). *Secuencia Didáctica: Desarrollo de algunos aspectos del pensamiento métrico a través de la medición de superficies de figuras planas regulares e irregulares.* Instituciones educativas Agroindustriales La Pradera y Francisco Medrano - Duitama, Cudinamarca. Asesor Edgar Guacaneme. Universidad del Valle – Instituto de Educación y Pedagogía.

BOYER, C. (1987) *Historia de la Matemática*. Madrid, España: Editorial Alianza.

CAMPOS, A. (2006). *Introducción a la Historia y a la Filosofía de la Matemática*. Bogotá: Colombia. Editorial Universidad Nacional de Colombia.

CHAMORRO, M ; BELMONTE, J. M. (1991). *El problema de la medida: didáctica de las magnitudes lineales.* Madrid, España: Editorial Síntesis, S.A.

ESTRADA, CASTIBLANCO, BÁEZ, PADILLA, SAMPER, TOQUITA y MORENO. (2009). *Delta 7*. Bogotá D.C, Colombia: Grupo Editorial Norma S.A.

EUCLIDES. (1991). *Los Elementos, Libros I – IV*. Primera edicion 1991 . Madrid, España: Editorial Gredos S.A.

HEATH, S. T. (1921). *A History Greek Mathematics, Vol No 1: From Thales to Euclid* (Vol. 1). Oxford: Printed in England, at the Oxford University Press.

HILBERT, D. (1950). *The foundations of geometry*. Traducción del alemán de E. J. Townsend. La Salle: Illinois. Open Court Publishing Company.

JOYA, V, A. (2007). *Nuevas Matemáticas 7*. Bogotá D.C, Colombia: Editorial Santillana S.A.

LEBESGUE, H. (1995). *La medida de las magnitudes.* Editorial Limusa S.A. de C.V. Impreso en México, D.F.

MEN (2006). *Estándares Básicos de Competencias en Lenguaje, Matemáticas, Ciencias y Ciudadanía*. En Documento No. 3 MEN. (Primera ed., pág. 84). Bogotá, Colombia: Revolución Educativa, Colombia Aprende.

MEN (1998). *Lineamientos Curriculares* (primera ed. pp. 44-45). Bogotá D.C, Colombia.

PRESSIAT, A. (2002). *Grandeurs et mesures: évolution des organisations mathématiques de référence et problèmes de transposition*, in Dorier, J; Artaud, M; Artigue, M; Berthelot, R; Floris, R. Actes de la 11e Ecole d'Eté de Didactique des Mathématiques, (2001).

RECALDE, Luis (*sf*). *Numero Medida y Magnitud.* Universidad del Valle, Departamento de Matemáticas. Cali, Colombia.

THOMAS, I (1957). *Greek mathematics, vol No 1: From thales to Euclid* (Vol. 1). London: Cambridge, Massachusetts. Harvard University Press. First printed 1939. Reprinted 1951, 1957.

TORIJA, R (1999). *Arquímedes alrededor del círculo* (pág. 102-114). Impreso en España: Editorial NIVOLA libros y ediciones, S.L.

TURÉGANO, P. (1996). *Reflexiones didácticas acerca del concepto de área y su medida.* En revista UNO de didáctica de las matemáticas, No. 10, 1996, págs. 9-27.