REVISTA EMA
2000, VOL. 5, Nº 3, 203-235

USO PREINSTRUCCIONAL DE ECUACIONES PARA DESCRIBIR Y REPRESENTAR SITUACIONES PROBLEMA EN UN GRUPO DE SEXTO GRADO[1]

JANE SWAFFORD Y CYNTHIA LANGRALL

El estudio que aquí se reporta tuvo como propósito investigar el uso que niños de sexto grado hacen de las ecuaciones para escribir y representar situaciones problema antes de haber sido instruidos formalmente en álgebra. A diez estudiantes se les presentó una serie de tareas similares en seis contextos de problemas diferentes que representan situaciones lineales y no lineales. Los niños de este estudio mostraron una habilidad notable para generalizar situaciones problema y escribir ecuaciones usando variables, incluso en formas no estándar. Aunque los estudiantes con frecuencia fueron capaces de escribir ecuaciones, rara vez las usaron para resolver problemas relacionados. Describimos los usos preinstruccionales que los estudiantes dieron a las ecuaciones para generalizar situaciones problema y las preguntas que surgieron acerca de cuál es el currículo más apropiado que permite construir sobre la base del conocimiento intuitivo que del álgebra tienen los estudiantes.

Debido a los avances en el uso de la tecnología y a su prevalencia en nuestra cultura se hace necesario que todos los miembros de la sociedad tengan una comprensión mayor de los fundamentos del álgebra y del razonamiento algebraico. De acuerdo con lo anterior, el Consejo Nacional de Profesores de Matemáticas (NCTM) de los Estados Unidos ha recomendado que el álgebra sea estudiada por todos los estudiantes, incluso por aquellos que tienen un desempeño de nivel bajo (Edwars, 1990). Más aun, en la publicación NCTM (1991), el Consejo recomendó que la instrucción de las matemáticas se construya sobre el conocimiento previo o informal de los estudiantes.

---

1. Traducción realizada por Patricia Inés Perry, investigadora de "una empresa docente", del original Swafford, J. & Langrall, C. (2000). Grade 6 students' preinstructional use of equations to describe and represent problem situations. *Journal for Research in Mathematics Education*, 31, 1, 89-112. Traducido y reimpreso con la autorización del *Journal for Research in Mathematics Education*, copyright 2000 del *National Council of Teachers of Mathematics*. Todos los derechos reservados. El NCTM no es responsable de la precisión o calidad de la traducción.
Una versión anterior de este artículo se presentó en la reunión anual del *American Educational Research Association*, Chicago, marzo de 1997. Agradecemos a los revisores anónimos por sus valiosos comentarios a las versiones previas de este artículo.

Aunque ha habido una investigación extensa acerca del aprendizaje del álgebra, los educadores no tienen una imagen clara de lo que los estudiantes pueden hacer en álgebra antes de la instrucción formal. Por tanto, no se sabe cuáles de los aspectos del conocimiento informal crean un fundamento útil sobre el cual pueda construirse la instrucción.

Varios investigadores han indagado acerca de la comprensión intuitiva de los estudiantes o de los usos informales del álgebra escolar en el período inmediatamente anterior al punto inicial de la instrucción en álgebra. Los usos que los estudiantes dan a las variables o a los símbolos literales (Booth, 1984; Herscovics y Chalouh, 1984; Küchemann, 1978, 1981; Wagner, 1981), los métodos intuitivos de los estudiantes para resolver ecuaciones (Filloy y Rojano, 1989; Gallardo y Rojano, 1987; Herscovics y Linchevski, 1994; Kieran, 1984), las habilidades de los estudiantes para aplicar intuitivamente la propiedad distributiva (Peck y Jencks, 1988), y sus interpretaciones del signo igual (Herscovics y Kieran, 1980) y de los signos de agrupación (Kieran, 1979) son algunos de los tópicos que se han estudiado ampliamente. La habilidad de los estudiantes de secundaria y de los adultos para expresar generalizaciones también ha sido investigada (Arzarello, 1992; Lee, 1996; Mason, 1996) lo mismo que el uso que los estudiantes de grados intermedios hacen del razonamiento aritmético para resolver problemas que podrían ser resueltos con una ecuación o con un sistema de ecuaciones lineales (Bednarz y Janvier, 1996; Boero y Shapiro, 1992). Estos estudios ilustran las poderosas habilidades para dar sentido, que los estudiantes traen consigo a la instrucción formal, y también destacan algunas de las dificultades que los estudiantes encuentran cuando comienzan su estudio del álgebra.

Hay una evidencia creciente que proviene de varios dominios de contenido matemático acerca de la eficacia de construir sobre el conocimiento intuitivo de los estudiantes. Por ejemplo, investigadores que han estudiado la adición y la sustracción de números enteros positivos han identificado las estrategias informales usadas por los estudiantes a través de diferentes tipos de problemas (Carpenter y Moser, 1984). Esta investigación se ha utilizado posteriormente en la Instrucción Guiada Cognitivamente para apoyar a los profesores en la toma de decisiones instruccionales más apropiadas (Fennema et al., 1996). Mack (1990) ha demostrado en sus experimentos de enseñanza cómo la instrucción personalizada puede construir sobre el conocimiento informal de los estudiantes acerca de las fracciones. Un trabajo similar ha sido conducido en razonamiento proporcional (Lamon, 1993) y en probabilidad (Jones, Langrall, Thornton y Mogill, 1997, 1999).

Aunque la investigación acerca de la emergencia del razonamiento algebraico ha sido extensa no hay una descripción coherente del conocimiento preinstruccional de los estudiantes en álgebra que sea suficiente para informar las decisiones instruccionales. Algunos estudios (e.g., Filloy y Rojano, 1989; Peck y Jencks, 1988; Sutherland y Rojano, 1993; Thompson, 1988) han ilustrado de qué manera la instrucción puede construir sobre el conocimiento intuitivo de los estudiantes para acceder a ideas algebraicas particulares. Sin embargo, los investigadores siguen teniendo la necesidad de describir de manera completa el alcance del conocimiento preinstruccional que los estudiantes tiene del álgebra.

METAS Y MARCO CONCEPTUAL

Nuestra meta general para este estudio fue determinar el alcance del uso que los estudiantes dan a las ecuaciones para describir y representar situaciones problema contextualizadas antes del estudio formal del álgebra. En entrevistas individuales, se les presentó a los estudiantes una serie de tareas a través de seis situaciones problema contextualizadas que representan funciones lineales, exponenciales y racionales. La serie de tareas representa las varias etapas en el desarrollo histórico del álgebra. Se ha sugerido (Sfard, 1995) que el desarrollo psicológico del razonamiento algebraico de los individuos refleja el desarrollo histórico del álgebra a través de los siglos. Es decir, inicialmente, antes de que los métodos algebraicos hubieran emergido, los problemas se resolvían de forma numérica. Desde tiempo atrás hasta el siglo XVI, la gente desarrolló descripciones verbales de los procedimientos computacionales generales o utilizó una combinación de palabras y símbolos. La primera práctica se designa como álgebra retórica y la segunda como álgebra sincopada. En el siglo XVI, Viète introdujo el uso de las variables como coeficientes de ecuaciones y las ecuaciones llegaron a ser objetos de estudio por derecho propio. Esto marcó el advenimiento del álgebra simbólica. La etapa final en el desarrollo del álgebra fue la introducción del álgebra abstracta por Galois en el siglo XIX cuando el álgebra se convirtió en el estudio de estructuras abstractas. El desarrollo histórico del álgebra hasta la etapa algebraica- simbólica proporcionó un marco conceptual para la selección y la secuenciación de las tareas que les presentamos a los estudiantes.

Primero fue menester determinar si los estudiantes eran capaces de resolver problemas que involucraran casos específicos. Es decir, ¿serían capaces los estudiantes de encontrar respuestas correctas para valores específicos de la variable o de las variables en la situación problema? Esperábamos que antes de la instrucción en álgebra, ellos fueran capaces de encontrar respuestas realizando operaciones numéricas sobre valores dados de la variable independiente o sobre valores previamente calculados de la variable dependiente.

Luego tuvimos que determinar si los estudiantes eran capaces de generalizar la relación. En el proceso de generalización se identifican las características comunes a los casos específicos (Dreyfus, 1991). Más específicamente, generalizar una situación problema es identificar los operadores y la secuencia de operaciones que son comunes a los casos particulares, y extender esto al caso general. La generalización de una situación problema se puede presentar verbal o simbólicamente utilizando variables. Cualquiera de estas dos se consideraría una representación de la situación problema.

Las representaciones son medios con los cuales los individuos organizan y dan sentido a las situaciones (Kaput, 1989). Una representación de una situación problema de índole matemática es un dibujo de las relaciones y operaciones de la situación. Las representaciones pueden tomar una diversidad de formas que van desde la verbal hasta la simbólica y pueden representar casos específicos o el caso general. Los diagramas son representaciones pictóricas de uno o más casos específicos y las tablas son representaciones sistemáticas de una serie de casos específicos. Las representaciones gráficas pueden ser tanto representaciones de casos específicos si se miran punto a punto o representaciones de la generalización si se miran holísticamente. Las descripciones narrativas del caso general son representaciones verbales de la generalización mientras que las ecuaciones que utilizan variables son representaciones simbólicas del caso general.

Con respecto a las representaciones, primero fue necesario determinar si los estudiantes podían describir el caso general verbalmente. Luego les pedimos que representaran la relación existente en la situación problema, de manera simbólica utilizando variables. Teníamos que determinar si los estudiantes podían producir representaciones simbólicas antes de su instrucción en álgebra y si este era el caso, qué formas tomarían esas representaciones simbólicas.

Finalmente, fue necesario determinar si los estudiantes utilizarían las representaciones simbólicas para resolver problemas relacionados y de qué manera lo harían. Es decir, antes de la instrucción formal en álgebra, ¿tratan los estudiantes las ecuaciones como objetos matemáticos por derecho propio y operan sobre ellas usando manipulaciones algebraicas? La noción de una representación simbólica que se convierte en un objeto matemático se deriva del concepto de abstracción reflexiva de Piaget. Los objetos matemáticos son entidades mentales abstraídas a partir de experiencias, entidades que se pueden manipular mentalmente en forma separada de las experiencias que les dieron origen. Kaput (1989) describió los objetos matemáticos como entidades mentales construidas a través de “reificación de acciones, procedimientos y conceptos en objetos fenomenológicos que pueden entonces servir como base para nuevas acciones, procedimientos y conceptos en un nivel superior de organización” (p. 168). Lo más probable es que los estudiantes no utilicen ecuaciones como objetos matemáticos antes del estudio formal del álgebra.

Nuestra segunda meta en este estudio era proponer el mismo conjunto de tareas a lo largo de diferentes dominios matemáticos y para distintos tipos de problemas en la clase de funciones lineales. Examinando las respuestas de los estudiantes a las mismas tareas a través de una variedad de dominios matemáticos, esperábamos ser capaces de dar una descripción sustanciosa del uso que los estudiantes hacen de las ecuaciones para generalizar las situaciones problema, antes de la instrucción en álgebra. Más aun, contrastando su desempeño a través de diferentes familias de funciones y dentro de la familia de funciones lineales esperábamos contribuir con ideas útiles sobre cómo se debe construir la instrucción.

MÉTODO

Participantes

Los participantes en este estudio se seleccionaron de un curso de grado sexto, cuyos prerrequisitos se tratan en el mismo curso, en una escuela elemental localizada en una población de tamaño mediano, del medio oeste de los Estados Unidos. Se seleccionaron al azar diez estudiantes, cinco niños y cinco niñas, de niveles de desempeño en matemáticas que iban desde mediano hasta alto. No se incluyeron estudiantes del grupo de bajo desempeño porque el profesor creyó que no estarían en la misma capacidad que los estudiantes de los otros dos grupos para expresar sus pensamientos verbalmente.

Ninguno de los estudiantes participantes había recibido instrucción formal en álgebra. Todos habían cursado el quinto grado en dicha escuela. La escuela estaba usando en los grados de cuarto a sexto, una serie elemental publicada en 1991, de carácter tradicional. Tanto los profesores de quinto como de sexto reportaron ceñirse completamente al tratamiento que daba el libro de texto al álgebra. El último capítulo del texto de grado sexto es una introducción al álgebra. Sin embargo, el uso de variables como sumandos y factores que faltan, la evaluación de expresiones simples, y el uso de fórmulas geométricas se introducen en el texto desde el comienzo. En el nivel del curso anterior hubo sólo una lección “exploratoria” de álgebra en la que se pidió a los estudiantes que generaran una tabla y generalizaran un patrón. En grado séptimo se utiliza un texto tradicional de preálgebra.

Items de la entrevista

En entrevistas individuales, a cada estudiante se le presentaron seis situaciones problema enunciadas verbalmente y se le pidió resolver una serie de tareas similares para cada situación. Las situaciones involucraban contextos familiares y representaban los siguientes dominios de contenido matemático: variación directa/proporcionalidad, relaciones lineales, secuencias aritméticas, relaciones exponenciales y variación inversa. Para cada situación, primero se pidió a los estudiantes solucionar problemas que involucraban números específicos. Después se les pidió que describieran la relación funcional entre las variables independiente y dependiente y escribieran una ecuación general. Si los estudiantes tenían dificultades en describir una relación funcional se les pedía construir una tabla o se les mostraba una tabla completa si no habían hecho una previamente; después se les preguntaba si habían visto alguna relación entre los números de la izquierda y los de la derecha de la tabla. Finalmente propusimos preguntas relacionadas con la situación, que se podían responder utilizando la ecuación ya fuera resolviéndola para valores específicos o por sustitución.

Los seis ítems de la entrevista que se muestran en la Figura Nº 1 fueron desarrollados por los investigadores o adaptados a partir de ítems publicados en alguna parte. Con los ítems se hicieron pruebas piloto a los estudiantes de grado séptimo y octavo de la misma escuela.

Procedimiento en las entrevistas

Entrevistamos individualmente a los estudiantes en el otoño, usando un guión para cada uno de los seis ítems. Aunque se usó el guión para asegurar que a cada estudiante se le presentaran las mismas tareas en el mismo orden, los entrevistadores tenían flexibilidad para formular preguntas adicionales con el objetivo de clarificar el pensamiento de los estudiantes o para ahondar más profundamente en él.

A los estudiantes se les proporcionó una calculadora, papel y lápiz y se les pidió que explicaran su razonamiento mientras resolvían cada problema. Cada entrevista duró aproximadamente cuarenta y cinco minutos y fue grabada en audio y posteriormente transcrita.

Fuentes de información y análisis

Utilizamos métodos cualitativos de análisis que involucraron casos múltiples (Miles y Huberman, 1994) para examinar los datos del estudio. Las

Problema de la devolución de dinero (variación directa/proporcionalidad)
En algunos estados se cobra un depósito por los envases de aluminio, depósito que se devuelve cuando el envase se retorna. En Nueva York, el depósito es de 5 centavos de dólar por envase.

a. ¿Cuánto dinero se devolvería por retornar 6 (10 ó 12) envases?

b. Describa cómo puede el dueño del almacén calcular la cantidad de dinero que debe devolver por cualquier cantidad de envases retornados.

c. Si R representa la cantidad de dinero devuelta y C representa el número de envases retornados, escriba una ecuación para la cantidad de dinero devuelta.

d. ¿Puede usar su ecuación para encontrar cuántos envases deberán retornarse para que el depósito devuelto sea de 3 dólares? ¿Cuál sería el depósito recibido por 100 envases?

Problema de las horas trabajadas y el salario (relación lineal)
El salario básico de María es de 20 dólares por semana. Por cada hora extra que ella trabaje se le pagan 2 dólares adicionales.

a. ¿Cuál será su salario total si ella trabajó 4 horas extra en 1 semana? Y, ¿si trabajó 10 horas extra?

b. Describa la relación entre la cantidad de horas extra de trabajo de María y su salario total.

c. Si H representa el número de horas extra trabajadas por María y W representa su salario total, escriba una ecuación para encontrar el salario total de María.

d. ¿Puede utilizar su ecuación para encontrar cuánto tiempo extra tendría que trabajar María para recibir un salario total de 50 dólares? Una semana María recibió 36 dólares. Un compañero de trabajo del mismo nivel salarial que María laboró 1 hora extra menos que María. ¿Cuál fue el salario del compañero de María esa semana?

Figura Nº 1. Items de la entrevista

Problema del borde (relación lineal, contexto geométrico)
Aquí hay una cuadrícula de 10 por 10. ¿Cuántos cuadrados tiene el borde?

a. Aquí hay una cuadrícula de 5 por 5. ¿Cuántos cuadrados tiene el borde de tal cuadrícula? No tenemos una cuadrícula de 100 por 100, pero ¿cómo puede usted calcular cuántos cuadrados tendría el borde?

b. Describa cómo calcular el número de cuadrados del borde de una cuadrícula de cualquier tamaño (N por N).

c. N representa el número de cuadrados a lo largo del lado de una cuadrícula y B representa el número de cuadrados en el borde de la cuadrícula. Escriba una ecuación para encontrar el número de cuadrados en el borde.

d. ¿Puede usted utilizar su ecuación para encontrar el tamaño de una cuadrícula cuyo borde tiene 76 cuadrados?

Problema de la sala de conciertos (secuencia aritmética)
La primera fila de una sala de conciertos tiene 10 sillas. Cada fila, a partir de la primera, tiene 2 sillas más que la anterior.

a. ¿Cuántas sillas hay en la fila 10? (Si los estudiantes tienen dificultad para responder, pregunte cuántas sillas hay en las filas 2, 3 y 4.)

b. La persona encargada de la boletería necesita saber cuántas sillas hay en cada fila. Si ella conoce el número de la fila, explique cómo puede calcular cuántas sillas hay en esa fila.

c. R representa el número de la fila y S representa el número de sillas en esa fila. ¿Puede dar una ecuación para calcular el número de sillas?

d. ¿Cuántas sillas hay en la fila 21? Si la última fila tiene 100 sillas, ¿cuántas sillas hay en la sala de conciertos?

Problema del doblado del papel (exponencial)
Doble este pedazo de papel por la mitad y luego ábralo. ¿Cuántas regiones se formaron?

a. Doble el papel por la mitad dos veces. ¿Cuántas regiones se formaron? ¿Cuántas regiones se formarán al doblar por la mitad tres veces?

Figura Nº 1. Items de la entrevista

b. Describa cómo calcular el número de regiones para cualquier número de veces que se doble el papel por la mitad.

c. Escriba una ecuación para encontrar el número de regiones si usted conoce el número de dobleces. R representa el número de regiones y F representa el número de dobleces.

d. Suponga que tenemos un pedazo de papel mágico que se puede doblar indefinidamente. Si se dobla el papel por la mitad 10 veces, ¿cuántas regiones se forman?

Problema del lavado de carros (variación inversa)
Una compañía contrata personas para lavar carros en su lote. El gerente sabe que 36 lavadores pueden lavar todos los carros en 1 hora.

a. ¿Qué pasa si solamente la mitad de las personas trabajan? ¿Cuánto tiempo requerirían 18 lavadores para lavar todos los carros? ¿Cuánto tiempo si hay 72 personas? ¿Cuánto tiempo con 9 lavadores? ¿Cuánto tiempo con 4 lavadores?

b. Describa cómo podría el gerente calcular cuántas horas se requieren para lavar los carros con una cantidad cualquiera de lavadores.

c. Escriba una ecuación para encontrar el número de horas necesarias para lavar los carros si se conoce el número de lavadores. H representa el número de horas que se necesitan y S representa el número de lavadores.

d. ¿Puede usar su ecuación para encontrar cuánto tiempo gastan 10 lavadores?

Nota: Para cada ítem de entrevista, las tareas se rotulan respectivamente de a. a d. para calcular casos específicos, describir relaciones, representar simbólicamente y usar ecuaciones.

Figura Nº 1. Items de la entrevista

fuentes de información consistieron en las entrevistas transcritas, el trabajo escrito de los estudiantes, las notas de los entrevistadores y la información y resúmenes generados durante el análisis.

El análisis inicial comenzó durante el proceso de recolección de la información. Inmediatamente después de cada entrevista, el investigador que condujo la entrevista escuchó la grabación de audio y revisó el trabajo escrito del estudiante para completar una matriz de resumen de respuestas. Esta matriz se organizó de acuerdo con las tareas implicadas en cada ítem e incluía casos múltiples. Después de cada sesión de entrevista nos encontramos para comparar las notas de la entrevista. Se identificaron evidencias útiles y se discutieron respuestas poco usuales de los estudiantes.

Al terminar de hacer todas las entrevistas, se transcribieron las grabaciones de audio y a las transcripciones se adjuntaron copias de los trabajos de los estudiantes. De manera independiente leímos y codificamos cada transcripción. Para cada ítem se analizó la transcripción de un estudiante para determinar si éste solucionó los problemas correctamente para valores específicos, describió la relación, escribió una ecuación apropiada y utilizó la ecuación para resolver problemas relacionados. El razonamiento del estudiante o la estrategia de solución también se caracterizó y se etiquetó de acuerdo con las reglas de codificación establecidas previamente a esta fase de análisis sobre la base de los patrones discernidos en la matriz de resumen de respuestas. Por ejemplo, la descripción que un estudiante hacía de la relación plasmada en el problema se podía codificar como *funcional* si el estudiante describía la relación entre la variable independiente y la dependiente o *recursiva* si describía la relación entre valores consecutivos de las variables dependientes; o la solución de un problema que involucrara sustitución podía ser codificada como *resuelto usando una tabla*, *resuelto usando cálculo mental* o *resuelto usando una ecuación* según la estrategia de solución elegida.

Se compararon las codificaciones y se reconciliaron las diferencias; en algunos casos estos procesos dieron como resultado el refinamiento de una codificación inicial. La reconciliación nos permitió clarificar nuestro pensamiento y aguzar la definición de cada código. Debido a que el conjunto de datos era relativamente pequeño fue posible "revisar los códigos" (Miles y Huberman, 1994) y por tanto alcanzar un consenso en el análisis de todas las transcripciones. Se organizaron los códigos en una matriz de codificación de tareas, lo que nos permitió examinar los datos dentro de cada caso mediante una lectura horizontal de la matriz y examinar las tareas a través de los casos con una lectura vertical de la matriz.

Se generaron resúmenes descriptivos para proporcionar (a) un recuento general de cada caso y (b) un cuadro coherente de los hallazgos a través de los casos. Los resúmenes narrativos de cada caso describieron las estrategias de solución de los estudiantes y las dificultades a través de los seis ítems e incluyeron citas textuales ilustrativas, sacadas de las transcripciones y del trabajo de los estudiantes. Estos resúmenes fueron desarrollados por el segundo autor de este artículo y validados por el primero contra las transcripciones y el trabajo de los estudiantes. Los resúmenes del cruce de casos fueron desarrollados para cada problema usando la matriz de codificación de tareas que habíamos desarrollado previamente. Contando ocurrencias en los datos fue posible determinar los porcentajes de soluciones correctas para cada tarea, lo mismo que la frecuencia y la consistencia de las estrategias utilizadas. Se identificaron tendencias a través de casos para cada una de las tareas investigadas y se describieron respuestas típicas y discrepantes de los estudiantes.

Para explicar posteriormente las tendencias identificadas en los resúmenes del cruce de casos, reexaminamos el conjunto de datos trascritos usando HyperResearch, un programa de computador para manejar datos cualitativos. Este programa nos permitió codificar las respuestas de los estudiantes y reorganizar la información a través de los problemas, creando un nuevo conjunto de transcripciones agregadas. La información fue etiquetada de acuerdo con las siguientes categorías: resolución para casos específicos, descripción de relaciones, escritura de ecuaciones, resolución de ecuaciones, sustitución en una ecuación y uso de tablas. Las transcripciones agregadas fueron analizadas para poner a prueba la validez de las tendencias que se había identificado para cada una de las tareas. Las respuestas de los estudiantes se compararon y contrastaron y se seleccionaron citas textuales para ilustrar cada tendencia.

RESULTADOS

Los estudiantes de sexto grado de este estudio mostraron una habilidad notable para generalizar situaciones problema mediante la descripción de relaciones y la escritura de ecuaciones apropiadas en las que utilizaron variables, aunque su notación muchas veces no fuera estándar. Sin embargo, hubo más estudiantes capaces de describir las relaciones que los que fueron capaces de representarlas simbólicamente. Aunque los estudiantes con frecuencia fueron capaces de escribir ecuaciones, pocos las utilizaron para resolver problemas relacionados y aquellos que lo hicieron utilizaron las ecuaciones como una lista de operaciones que debían realizar.

Los hallazgos se reportarán por tarea. Cada tarea representa una etapa en el desarrollo histórico del álgebra: calcular para casos específicos (pre-álgebra), describir relaciones (álgebra retórica), representar simbólicamente (álgebra sincopada/simbólica), usar ecuaciones (álgebra simbólica). Los hallazgos relativos al papel de las tablas en la elaboración de generalizaciones por parte de los estudiantes también será asunto de presentación en este artículo. La Tabla Nº 1 muestra el número de estudiantes que realizó exitosamente las varias tareas para cada ítem. En la Figura Nº 1, se presenta visualmente un resumen de los datos.

	Items					
Tareas	Depósito	Salario	Borde	Concierto	Doblado	Lavado
Calcula casos específicos	10	10	9	10	10	1
Describe relación						
Recursiva	0	1	0	5	7	0
Funcional	9	8	9	2	3	5
Representa simbólicamente	7	6	7	2	3	5
Usa ecuaciones para						
Solucionar	2	3	2	1[a]	—	2
Sustituir	3	0	—	1	4	1

Nota: Los guiones indican que el ítem no fue administrado.
[a] Estudiante dio una fórmula incorrecta.

Tabla Nº 1. Número de estudiantes que completaron exitosamente cada tarea por ítem

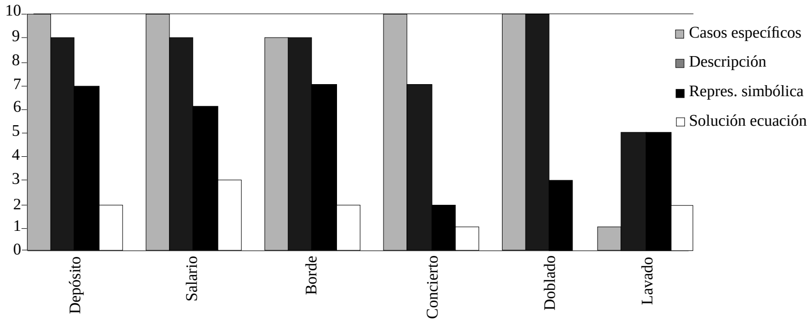

Figura Nº 2. Números de estudiantes que completaron exitosamente las tareas seleccionadas por ítem

Cálculos para casos específicos

La mayoría de los estudiantes fue capaz de resolver problemas que involucraban casos específicos, con la excepción del problema del lavado de carros (variación inversa) (ver Figura Nº 1). En los problemas de la devolución del depósito, del salario y del borde, para resolver los casos específicos, los estudiantes utilizaron la relación funcional entre las variables independiente y dependiente implícita en cada problema.

Para los problemas de la sala de conciertos y del doblado de papel, los estudiantes tendieron a calcular las soluciones a casos específicos usando la relación recursiva descrita en el problema. Para el problema de la sala de conciertos, ellos debían comenzar con la fila 1 y adicionar dos para cada fila sucesiva hasta llegar a la fila deseada. De manera similar, con el problema del doblado del papel los estudiantes debían continuar duplicando el número de regiones obtenidas con cada doblez hasta alcanzar el número de dobleces deseados.

En el problema del lavado de carros que es una situación que involucra una variación inversa, los estudiantes podían calcular el tiempo requerido para lavar los carros dada la mitad o el doble del número de lavadores, pero tuvieron dificultad para calcular el tiempo requerido en otros casos. Dado que 36 lavadores tomaban una hora, nueve de los diez estudiantes respondieron que 18 lavadores tomarían el doble de tiempo y ocho de los diez estudiantes respondieron que 72 lavadores tomarían la mitad de tiempo. Cuando los 18 lavadores fueron reducidos a la mitad para obtener 9, sólo cinco de los diez estudiantes duplicaron el tiempo nuevamente. Cuatro estudiantes usaron estrategias aditivas tales como la siguiente:

> E_6: Tres horas. … Bien, si esto toma dos horas [para que 18 laven los carros] y hay la mitad… entonces debería gastarse otra hora.
>
> E_4: Dos y media horas. [Yo: Bien, y ¿cómo obtuviste esto?] Sabía que se gastaban 2 horas para 18 y simplemente agregué otra media hora a eso.

Para la pregunta de cuánto tiempo tomaría a 4 lavadores lavar los carros, solamente un estudiante respondió correctamente 9 horas. Algunos estimaron sobre la base de sus respuestas para 9 lavadores. Por ejemplo, los siguientes dos estudiantes respondieron correctamente que 9 lavadores tomarían 4 horas. Se les preguntó cuánto tiempo gastarían 4 lavadores:

> E_1: ¿Cuatro lavadores? Esto es sólo una conjetura, pero 4 horas y 45 minutos. [Yo: ¿Cómo encontraste eso? Solamente trataste de adivinar o lo calculaste?] No realmente, es casi una persona menos que la mitad de nueve, así que es un cuarto menos.
>
> E_7: Sobre lo último que hicimos era nueve [lavadores] y nueve tomaban cuatro horas. Y lo que hemos estado haciendo todo el tiempo es duplicando. De modo que yo diría que 4 es casi la mitad de 9, así que tendría que igualar el doble del tiempo, que es 8 [horas].

Los estudiantes fueron capaces de resolver una variedad de problemas que involucraban casos específicos, con excepción de la situación de variación inversa. Operaron sobre los números usando tanto la relación entre las variables dependiente e independiente como las soluciones para los casos precedentes.

Descripción de relaciones

Las habilidades de los estudiantes para describir verbalmente las relaciones en los seis ítems tendieron a reflejar sus desempeños en la resolución para casos específicos. Nuevamente para el problema del depósito, para el del salario y el del borde, la mayoría de los estudiantes describió correctamente las relaciones funcionales entre las variables independiente y dependiente, representadas en los problemas. Los siguientes ejemplos en los que se pidió a los estudiantes resolver primero casos específicos y luego describir un caso general ilustran estas descripciones funcionales.

El problema del depósito

Yo: ¿Puedes describir cómo el tendero podría calcular la cantidad de dinero que debe devolver por cualquier número de envases retornados?

E_2: Simplemente se multiplica el número de envases por 5 centavos.

El problema del tiempo y el salario

Yo: ¿Cuál es la relación entre el número de horas de trabajo extra y el salario total?

E_{10}: Se toma dos veces el tiempo extra que ella ha trabajado y luego se agrega 20.

Para el problema del borde se dieron cuatro descripciones funcionales diferentes que reflejaban en la mayoría de los casos las estrategias que los estudiantes utilizaron para calcular las respuestas a los casos específicos. Después de que cada estudiante determinó el número de cuadrados en el borde de una cuadrícula de 10 por 10, de 5 por 5, y de 100 por 100, se le preguntó "¿Podrías explicar de qué manera calcular el número de cuadrados en el borde de una cuadrícula de cualquier tamaño?" Las siguientes respuestas a partir de cuatro entrevistas ilustran estas descripciones funcionales. Para mayor claridad las expresiones correspondientes se dan entre paréntesis.

E_7: Sí, simplemente hay que multiplicar por 4 y restar 4 [i.e., $4n - 4$].

E_2: Se resta 1 y se multiplica por 4 [i.e., $4(n - 1)$].

E_5: Bien, es muy fácil. Cuente el número de cuadros yendo por el borde de arriba y después hay que quitar los otros dos [refiriéndose a las dos esquinas superiores de los lados]. … Simplemente siga hacia abajo. … Pero se comienza desde uno hacia abajo. Y entonces se tienen que suprimir estos dos [refiriéndose a las dos esquinas inferiores], y hay dos menos en la parte inferior. Así que el total está en la parte superior. … La cantidad total menos uno en los lados. … La cantidad total menos dos en la parte de abajo [i.e., $n + (n-1) + (n-1) + (n-2)$].

E_9: Hay que mirar los dos lados que están enfrentados y si hay cierto número de cajas, como 10 y 10, se cuentan 10 cajas en ambos lados, y esto da 20. Entonces se piensa "ya usé dos de las cajas de los lados", así que hay que restar dos de las cajas en ambos lados y eso da 8. Así que, $10 + 10 + 8 + 8$ y eso da 36 [i.e., $n + n + (n-2) + (n-2)$].

Al igual que el estudiante (E_9) algunos estudiantes pudieron describir la relación solamente en términos de ejemplos numéricos.

Para el problema de la sala de conciertos y el del doblado de papel, la mayoría de estudiantes describió la relación pero más que todo lo hizo de manera recursiva. Los siguientes ejemplos ilustran que el problema de tipo exponencial (doblado de papel) mostró ser más fácil que la situación lineal (sala de conciertos, una función de $n-1$) para que los estudiantes la describieran.

Problema del doblado de papel

A cada estudiante se le pidió primero determinar el número de regiones producidas por uno, dos, y tres dobleces. A continuación el entrevistador preguntó "¿Puede usted describir cuántas regiones debería haber para cualquier número de dobleces?"

E_4: Uhm, debería ser el número de regiones por 2. (Recursiva)

E_2: Hay que tomar el 2 tantas veces como dobleces haya. (Funcional)

A algunos estudiantes también se les pidió que completaran una tabla para 1, 2, 3, hasta 6 dobleces.

E_7: (Yo: Mira a ver si puedes llenar la siguiente tabla. [El estudiante completa la tabla correctamente.] ¿Puedes describir algún patrón en esta tabla?) Cada vez que se dobla, se dobla a sí mismo. (Recursiva)

E_8: (Yo: ¿Puedes completar esa tabla? [El estudiante completa correctamente la tabla.] Bien, ¿ahora ves algunos patrones? ¿Cómo podrías describirlos?) Bien. Es un poco difícil. Pero se multiplica por 2 a esa potencia… quiero decir, tantas veces el mismo como esas veces. (Funcional)

Problema de la sala de conciertos

A un estudiante (E_9) se le pidió que determinara el número de sillas en las filas 2, 3, y 4 de la sala de conciertos. Después de que encontró esos números, el entrevistador prosiguió:

Yo: La persona encargada de los tiquetes necesita saber cuántas sillas hay en cada fila. Si ella conoce el número de la fila, ¿puedes explicar de qué manera puede ella calcular cuántas sillas hay en esa fila?

E_9: Bien, lo que yo haría es simplemente contar a partir de cada fila, así, 10, 12, 14, 16, 18. Y simplemente contando de dos en dos, llegaría a la fila que deseo. (Recursiva)

El estudiante completó una tabla hasta la fila 16 pero no fue capaz de describir la relación funcional correcta entre el número de la fila y el número de sillas.

Otro estudiante (E_7) determinó correctamente el número de sillas en las primeras filas antes del episodio que sigue.

Yo: ¿Hay alguna manera de calcular cuántas sillas hay en cada fila si se tiene el número de la fila?

E_7: Sí.

Yo: ¿Cómo?

E_7: Simplemente se tiene que ver cuántas sillas hay antes (significando filas) y luego duplicar eso y luego sumar eso [hasta 10]. (Funcional)

Aunque esta es una descripción de la relación entre el número de la fila y el número de las sillas, es incorrecta porque la fila 1 no tiene dos sillas adicionales. El entrevistador entonces le pidió al estudiante que tratara de encontrar el número de sillas en la fila 10.

E_7: Diez filas atrás, así que se tiene 10 y 10 en cada lado, y diez es 30.

Yo: ¿Puedes escribir una fórmula para la persona que maneja los tiquetes?

E_7: Se puede hacer una tabla.

Por cuenta propia, la estudiante procedió a hacer una tabla que mostró correctamente lo correspondiente a la fila 10 con 28 y no 30 sillas. El entrevistador entonces le preguntó cuántas sillas habría en la fila 100 y ella respondió rápidamente 210 (i.e., $100 + 100 + 10$). Notando entonces la inconsistencia de su tabla con su respuesta previa para la fila 10, la estudiante comenzó a autocorregirse.

E_7: Espere un momento; sé que lo hice mal. Debería ser 208.

Yo: Y, ¿de dónde sacaste eso?

E_7: Bueno, no se puede contar la primera fila, por tanto, hay 99 filas [$99 + 99 + 10$]. … Por tanto, 99 es aproximadamente 100 [lo que] es $200 - 2$ [(i.e., 100+100-2) +10], porque se agregaron esos 2. O, entonces más 8 porque se restaron 2 de los 10 [i.e., $100 + 100 + (10 - 2) = 200 + 8$]. Por tanto, debería ser 208.

Yo: Si te doy el número de una fila, ¿cómo puedes calcular el número de sillas que hay? ¿Puedes escribir eso?

E_7: Bien; el número de la fila más el número de la fila es igual al número de sillas que deben sumarse a la última. Se quitan 2 y luego se agregan 10.

Para la relación entre el número de la fila y el número de sillas, la estudiante procedió a escribir una descripción en forma vertical como un procedimiento computacional, usando una combinación de palabras y símbolos.

La relación de variación inversa en el problema del lavado de carros fue la más difícil de describir para los estudiantes. Solamente cinco estudiantes fueron capaces de describir correctamente la relación y todos lo hicieron en términos de la relación entre las variables dependiente e independiente. Las siguientes explicaciones fueron dadas como respuesta a la pregunta: "¿Puedes explicar al administrador cuánto tiempo tomará a una cantidad cualquiera de lavadores, lavar los carros si se sabe que 36 lavadores gastan 1 hora? Inicialmente en la entrevista, cada estudiante determinó correctamente el número de horas necesario para 18, 9, 72 y 4 lavadores, o, bien, generó una tabla parcial antes de que se le pidiera describir la relación general.

E_3: Se compara el número con 36 para ver cuántas veces cabe en 36.

E_8: Bien, si sabe que 36 lavadores pueden lavar todos los carros en 1 hora, entonces, sin importar cuántos lavadores haya, se puede multiplicar ese número por otro número para obtener 36.

E_7: ¡Ah! veo un patrón. El número [de lavadores] por el tiempo gastado iguala a 36.

Como lo ilustran los ejemplos anteriores, los alumnos pudieron describir verbalmente las relaciones generales representadas en las situaciones problema, ya fuera recursivamente o en términos de la relación entre las variables independiente y dependiente. Sin embargo, fue un reto mayor representar estas relaciones simbólicamente.

Representación simbólica

Todos los estudiantes excepto uno fueron capaces de generar una ecuación para al menos una de las situaciones, aunque dos estudiantes generaron solamente una de las seis ecuaciones. El estudiante que no fue capaz de representar ninguna situación simbólicamente también tuvo dificultad para calcular con números específicos y para describir las relaciones generales de manera verbal. La situación más difícil para los estudiantes fue la del problema de la sala de conciertos, una situación lineal representada por la expresión $a(n-1)+b$. Las relaciones en la variación inversa (problema del lavado de carros) y exponencial (problema del doblado de papel) también demostraron ser más difíciles de generalizar que aquellas en las que la situación era directamente lineal con uno o dos pasos.

Aunque la mayoría de estudiantes pudo representar situaciones lineales simples de manera simbólica, algunos utilizaron una notación no estándar. La Figura Nº 3 muestra algunos ejemplos del trabajo de los alumnos. Un estudiante utilizó de manera consistente una notación vertical, similar a los algoritmos computacionales estándares, como lo ilustra la solución al problema sobre el salario en el panel A de la Figura Nº 3. La estudiante también etiquetó cada cantidad del problema con una letra. En el mismo problema (ver panel B de la Figura Nº 3) (E_9) utilizó la letra *n* para representar tanto el número de horas extras como el número total de dólares ganados por ese tiempo adicional. Esta estudiante, lo mismo que seis de los diez estudiantes, representó situaciones que involucran más de una operación con dos expresiones o dos ecuaciones para indicar el resultado del primer cálculo. Por ejemplo, el estudiante cuyo trabajo se muestra en el panel C de la Figura Nº 3 dejó un espacio en blanco para los resultados obtenidos en el primer cálculo en el problema del borde. Otros, como el estudiante cuyo trabajo se muestra en el panel D de la Figura Nº 3 introdujeron una nueva variable para representar el resultado del primer cálculo.

Un estudiante que pudo describir una situación en forma verbal, no necesariamente fue capaz de representar la situación simbólicamente. De hecho, sólo en el problema del lavado de carros, cada quien pudo describir la situación y también representarla simbólicamente. En contraste, todos los diez estudiantes fueron capaces de describir la situación del doblado de papel, pero sólo tres pudieron representarla en forma simbólica sin ayuda de la notación exponencial. Sin embargo, estos estudiantes de grado sexto tenían experiencia limitada con exponentes más allá de las potencias de dos y ninguno utilizó una variable como un exponente.

Para el problema del borde, la mayoría de estudiantes dio una ecuación que generalizaba el procedimiento utilizado para resolver los problemas que involucraban casos específicos; sin embargo, un estudiante produjo una ecuación no relacionada con los procedimientos que había usado previamente. Inicialmente el estudiante (E_4) encontró el borde de las cuadrículas de tamaño 10 por 10 y 5 por 5, sumando los números de cuadrados en dos lados opuestos y en los dos lados restantes, menos las esquinas [la estrategia $n + n + (n-2) + (n-2)$]. El entrevistador presionó a este alumno para que pensara otra manera de resolver el problema para la cuadrícula de tamaño 5 por 5.

> E_4: Mmm, 5 veces 5 es 25, y entonces se tienen 9 en el medio. Se restan precisamente esos [el número de cuadrados del interior, del número del cuadrado completo].

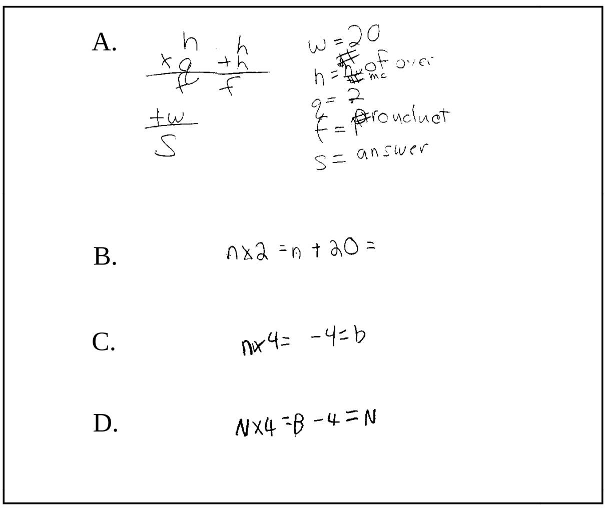

Figura Nº 3. Ecuaciones no estándares de los estudiantes

Para la cuadrícula 100 por 100, el estudiante (E_4) se devolvió a “100 arriba, 100 abajo y después 98 en ese [lado] y 98 allí [en el otro lado]”. Después se le pidió completar una tabla para las cuadrículas de tamaño 3 por 3, 4 por 4, 5 por 5, hasta 12 por 12.

Yo: Puedes escribir o usar tu calculadora; no tienes que hacerlo mentalmente [pausa mientras (E_4) escribe]. ¿Cómo estás haciendo eso? Lo estas haciendo terriblemente rápido.

E_4: Encontré un patrón.

Yo: Encontraste un patrón. Dime cuál es.

E_4: Mmm, se comienza con 8 y se agrega 4 cada vez.

Yo: Muy bien, ¿puedes escribir una fórmula para encontrar el borde de un cuadrado de cualquier tamaño? … [pausa mientras (E_4) escribe $n \times 4 - 4\ =$] Bien, explica esa fórmula.

E_4: El número de cuadrados de cada lado por el número de lados y menos 4 porque no se pueden usar estos [las esquinas] dos veces.

Este estudiante, lo mismo que (E_7) en el problema de la sala de conciertos discutido anteriormente, parece usar los casos específicos y la tabla para reducir sus procesos de solución a formas más económicas. Tuvo dos maneras de describir la relación entre las variables dependiente e independiente y vio la relación recursiva en la tabla. Pero cuando se le pidió escribir una fórmula, dio una ecuación que representaba una relación diferente de las que había descrito verbalmente. Es como si después de describir las varias relaciones en el problema fuera capaz de sintetizar sus procesos computacionales en una forma más económica que representó simbólicamente.

Estos estudiantes de grado sexto mostraron de manera notable, y a veces creativa, habilidades para representar situaciones mediante el uso de ecuaciones, especialmente para representar situaciones lineales inmediatas. Como lo esperábamos sólo aquellos estudiantes que describieron la relación entre las variables independiente y la dependiente pudieron llegar a generar ecuaciones. Sin embargo, no cualquiera que hubiera descrito una relación necesariamente produjo una ecuación apropiada.

Uso de ecuaciones

Aunque por lo menos la mitad de los estudiantes pudo generar consistentemente ecuaciones para representar las situaciones dadas, en raras ocasiones pudieron usar sus ecuaciones como objetos matemáticos. Sin embargo, dos estudiantes usaron explícitamente sus ecuaciones para resolver problemas realizando las operaciones inversas representadas en las ecuaciones.

El problema del tiempo y el salario

Yo: ¿Puedes usar tu fórmula para encontrar cuánto tiempo adicional tendría que trabajar María para ganar 50 dólares?

E_2: Bien, en este caso es [escribe en su papel, ver panel A en la Figura Nº 4] 50 menos 20 igual…habría que dividir por 2, igual… 15 horas de tiempo extra.

Yo: Bien, explícalo.

E_2: Bien, 50 menos 20 es [30], dividido por 2 es 15.

De modo similar, el panel B de la Figura Nº 4 ilustra cómo otro estudiante utilizó su ecuación para resolver el mismo problema realizando las operaciones en forma inversa.

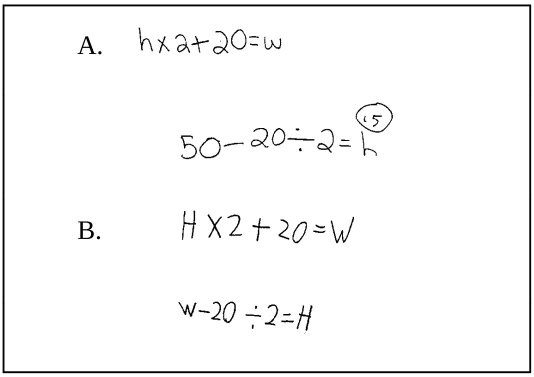

Figura Nº 4. Uso que hacen los estudiantes de las ecuaciones para resolver problemas

Para el problema del borde, este estudiante explicó de qué manera utilizó su ecuación ($n \times 4 - 4 = b$) para encontrar el tamaño de la cuadrícula, dado el número de cuadrados del borde.

Yo: Talvez tu fórmula puede ayudarte con esto. ¿De qué tamaño es la cuadrícula si el borde contiene 76 cuadrados?

E_8: Bien, pienso que dividir ese número [76] por 4 sería muy complicado, así que resté el 4 de eso… No, espere. (Pausa) Sumé el 4 porque eso sería el reverso de la fórmula. Y, entonces obtuve 80. Y entonces dividí eso por 4 y obtuve 20.

Yo: ¿Cómo llega a funcionar eso?

E_8: Bien, porque haciendo exactamente lo opuesto se obtiene el número [de cuadrados en un lado]. … Usando el número [de cuadrados en un lado, n] se comienza con [el número n] para obtener el borde. Así estoy usando el borde para comenzar. Así que tengo que hacer el reverso de cada cosa para obtener el número [de cuadrados sobre un lado].

Algunos estudiantes utilizaron el mismo proceso de operar en sentido inverso pero no lo asociaron con su ecuación.

El problema de la sala de conciertos

Yo: Si la última fila en la sala de conciertos tiene 50 sillas, ¿podrías decirme cuántas filas hay en el auditorio?

E_3: Se podría conjeturar y revisar. Se tiene que calcular cuántas veces 2 es igual a 42.

Yo: Y, ¿cómo obtuviste 42?

E_3: Porque 50 - 8 da 42.

Yo: ¿Sabes cuántas veces 2 es 42?

E_3: 21.

Yo: Por tanto, ¿cuántas filas debe haber?

E_3: 21.

Yo: ¿Puedes usar tu fórmula $r \times 2 = [espacio] + 8 = s$ para calcular el número de la fila si hubiera 50 sillas?

E_3: No.

El problema del tiempo y el salario

En las entrevistas individuales, se preguntó a los estudiantes (E_3) y (E_7), si podían usar sus fórmulas para calcular cuánto tiempo extra debería trabajar María para ganar 50 dólares:

E_3: (Yo: Tú estás diciendo que no con la cabeza. ¿Puedes calcularlo mentalmente?) Creo que no. Es conjetura y revisión. … Podría hacerse en la cabeza. Debería ser 30 [de tiempo extra] porque $20 + 30$ es igual a 50. Por tanto, ella debería trabajar 15 horas extra, porque 30 dividido por 2 es 15.

E_7: Bien, 50-20 es 30. Hay que quitarle lo que gana básicamente. Es decir, 20 dólares y a eso que es 30 dividirlo por 2 que es 15.

En vez de usar sus ecuaciones la mayoría de los estudiantes utilizó estrategias matemáticas mentales o tablas extendidas para resolver problemas que podrían haber sido resueltos utilizando una ecuación. Por ejemplo, después de haber generado una ecuación para el problema del depósito, a los estudiantes se les pidió encontrar el número de envases necesarios para obtener un depósito de 3 dólares de vuelto. (E_4) utilizó cálculo mental:

> E_4: 60.
>
> Yo: ¿Cómo lo obtuviste?
>
> E_4: Lo que hice fue, 50 centavos son 10 envases, por tanto, 20 envases hacen un dólar, y entonces debo multiplicar eso por 3.

Aunque algunos estudiantes utilizaron cálculos mentales, otros extendieron una tabla ya fuera mentalmente o en el papel. E_9 extendió una tabla en su cabeza utilizando sus dedos para imaginarse cuánto tiempo extra era necesario para ganar un salario total de 50 dólares.

> E_9: Debería ser 15 [horas] extra.
>
> Yo: ¿Puedes decirme de qué manera lo obtuviste?
>
> E_9: Pues me imaginé 10 horas extra, es decir, 40 dólares en total, luego, seguí sumando 2 dólares por cada [hora] extra hasta llegar a 50. Con mis dedos pude contar cinco veces.

Como lo ilustran los ejemplos, incluso los estudiantes que dieron ecuaciones correctas, con frecuencia resolvieron problemas relacionados sin el uso explícito de sus ecuaciones. De hecho, sólo dos estudiantes resolvieron los problemas, clara y consistentemente, mediante la especificación referida a sus ecuaciones. Sin embargo, solamente uno de los estudiantes dijo no poder usar ecuaciones para resolver un problema relacionado cuando se le pidió. Los otros estudiantes simplemente no respondieron la pregunta "¿Puedes utilizar tu fórmula para encontrar…?" Y no parecen referirse a la utilización de sus ecuaciones para resolver los problemas relacionados.

Papel de las tablas

Aunque hacer o ver una tabla parecía apoyar a algunos estudiantes en sus intentos para representar una situación simbólicamente, para otros estudiantes, una tabla parecía obstaculizar sus habilidades para reconocer y describir la relación entre las variables dependiente e independiente implícitas en la situación. Este hallazgo se puede ilustrar con el problema de la sala de conciertos. Para por lo menos uno de los estudiantes la tabla apoyó el reconocimiento de una relación funcional, $2r+8$, aunque esta relación no fuera la que el entrevistador tenía en mente. La relación esperada era $10 + 2(r - 1)$, que representa directamente “10 sillas en la primera fila y 2 adicionales para cada fila siguiente”. Sin embargo, la expresión equivalente que dio el estudiante, $2r + 8$, se puede interpretar en el contexto del problema de la sala de conciertos, como un inicio con 8 sillas y 2 adicionales por cada fila.

En otros casos, sin embargo, la tabla opacó más bien que clarificar el reconocimiento por parte de los estudiantes de una relación entre las variables independiente y dependiente. Tres estudiantes a quienes se les presentó la tabla para el problema de la sala de conciertos (ver Figura Nº 5) observaron el mismo falso patrón: en la fila número 8 el número de sillas es tres veces el número de la fila. Al moverse hacia arriba o hacia abajo de la fila 8, el número de sillas es igual al número de la fila por 3, aumentado o disminuido en 1 cada vez.

Yo: Estás viendo un montón de patrones.

E_5: Sí, hay una gran cantidad de ellos… Como por ejemplo, la fila [8] por tres. [Murmura para sí mismo] Es difícil de explicar porque
(9x3) menos 1 es 26;
(8x3) es 24;
(7x3) es 21 más 1 es 22;
(6x3) más 2 es 20;
(5x3) más 3 es 18;
(4x3) más 4 es 16.
[Extiende este patrón hacia abajo hasta la fila 1 y hacia arriba, hasta la fila 10].
Cada vez, el número que usted suma después de multiplicar por 3 es 1 menos y después de pasar 8, estos números menos 1, multiplicados por 3 entonces [el número sustraído] se incrementa un número.

El patrón que observaron esos tres estudiantes en la tabla es $s = 3r + (8 - r)$, que es equivalente a la ecuación esperada $s = 10 + 2(r - 1)$. Aunque el $3r$ más o menos “algo” es una descripción legítima de la relación funcional, es difícil de simbolizar. Más aun, la conexión entre esta ecuación y el contexto del problema es oblicua. Por tanto enfocándose en la tabla, estos estudiantes perdieron contacto con el contexto del problema que les habría podido conducir a una generalización.

De manera que el número que usted suma, una vez lo ha multiplicado por 3, se le resta cada vez 1 y una vez que se pasa de 8, ese número digamos menos uno por tres y luego ese [el número al que se le hace la resta] sube un número.

Número de la fila	Número de sillas
1	10
2	12
3	14
4	16
5	18
6	20
7	22
8	24
9	26
10	28

Figura Nº 5. Tabla para el problema de la sala de conciertos

En otros problemas, la tabla pareció fijar la atención de los estudiantes en la relación recursiva entre los valores consecutivos de la variable dependiente en cambio de hacerlo entre las variables dependiente e independiente, incluso cuando el entrevistador trató explícitamente de enfocarlos sobre la relación entre las dos columnas de la tabla. Por ejemplo, en el problema del doblado de papel varios estudiantes solamente vieron la relación de "duplique el anterior". A la pregunta "¿Puedes describir algún patrón en esta tabla?" se dieron las siguientes respuestas:

E_7: Cada vez que se dobla, se duplica él mismo. … No veo un verdadero patrón en esto.

E_8: Este número [el número anterior] debe multiplicarse por 2 porque cuando se doble por la mitad otra vez, habrá el doble de regiones.

Otros estudiantes trataron de forzar una relación artificial entre los números de la tabla sin considerar el contexto de la situación. Después de completar una tabla, duplicando cada entrada previa, al estudiante (E_1) se le preguntó si había alguna relación entre el número de dobleces y el número de regiones.

E_1: Bueno, para algunos de ellos funciona. No para todos. Dos veces él mismo es 4 y entonces 4 veces él mismo es 16, pero eso no va a funcionar para todos porque 3 veces él mismo es 9 no 8. Siempre va a ser un número par.

Parece ser que las tablas son más útiles cuando los estudiantes las construyen para darle sentido al problema. Sin embargo, cuando el entrevistador proporcionó una tabla al estudiante para que la completara o la examinara, la tabla pareció ser más una distracción que una ayuda, que desviaba la atención del estudiante del contexto del problema a una serie de números. Otros han hecho observaciones similares. En un ambiente de computadores, Kieran, Garançon, Boileau y Pelletier (1988) observaron que las representaciones tabulares "condujeron a procesos no contextuales basados simplemente en relaciones de orden y patrones numéricos" (p. 149). Así como lo comentó uno de los estudiantes en este estudio, "si se hace una tabla, los dos números no tienen nada en común. Con una fórmula uno tiene que imaginarse qué hay de común entre ellos".

DISCUSIÓN

En este estudio investigamos el conocimiento intuitivo de los estudiantes acerca del álgebra antes de la instrucción formal. Más específicamente, investigamos las habilidades de los estudiantes de sexto grado para resolver problemas que involucraban casos específicos, para generalizar situaciones problema usando descripciones verbales y ecuaciones, y para resolver problemas relacionados usando sus ecuaciones. Los estudiantes de grado sexto, por lo general, pudieron resolver problemas que involucraban casos específicos y mostraron una habilidad notable para generalizar las situaciones problema y para escribir ecuaciones utilizando variables, con frecuencia en forma no estándar. Sin embargo, rara vez utilizaron sus ecuaciones para resolver problemas relacionados y quienes lo hicieron utilizaron tales ecuaciones como una lista de operaciones que debían ser "deshechas".

Aunque antes de estudiar álgebra los estudiantes pueden no ver las ecuaciones como objetos matemáticos en sí mismos, no comienzan el estudio formal del álgebra sin un conocimiento previo al respecto. Como ha sido demostrado en otras ocasiones (Bednarz y Janvier, 1996; Boero y Shapiro, 1992; Filloy y Rojano, 1989; Gallardo y Rojano, 1987; Herscovics y Linchevski, 1994; Kieran, 19984), los estudiantes traen unas intuiciones muy potentes y unas herramientas para dar sentido a las situaciones. Con este estudio contribuimos a comprender el conocimiento preinstruccional de los estudiantes. En particular, queremos subrayar la necesidad de que la instrucción escolar del nivel medio construya la comprensión de los estudiantes acerca de las estructuras multiplicativas, proporcione oportunidades a los estudiantes para hacer y representar generalizaciones y los ayude a desarrollar sus intuiciones acerca de familias de funciones (lineal, exponencial y racional).

Estos estudiantes de grado sexto fueron capaces de resolver numéricamente todos los problemas que involucraban casos específicos con la excepción de la situación que involucraba una variación inversa (problema del lavado de carros). Para este problema, los estudiantes generalmente pudieron dar sólo el número correcto de horas necesarias para lavar los carros si el número de lavadores era la mitad o el doble del 36 original. Sin embargo, para otras situaciones de variación inversa, como por ejemplo, el problema del timbre, incluso niños muy pequeños fueron capaces de encontrar respuestas correctas a diversos casos específicos (Lubinski y Otto, 1997). En ese problema, la división (compartir) es explícita —dos niños comparten de manera equitativa 12 galletas, pero de pronto suena el timbre y entran más niños a compartir también las galletas. Si el problema del lavado de carros se hubiera presentado como que 1 lavador necesita 36 horas en lugar de 36 lavadores necesitan 1 hora, ¿los estudiantes habrían visto el problema como un problema de compartir (dividir) un trabajo de 36 horas? Claramente los estudiantes necesitan más experiencias con situaciones de variación inversa antes de estudiarlas analíticamente en álgebra.

Los estudiantes de grado sexto también demostraron que podían describir relaciones usando representaciones verbales, simbólicas, o una combinación de verbal y simbólica. De hecho, los datos sustentan la afirmación de que el desarrollo cognitivo del álgebra sigue el desarrollo histórico de la materia. Excluyendo el problema del lavado de carros que no fue bien entendido, en 98% de las situaciones restantes, los estudiantes pudieron resolver problemas que involucraban casos específicos utilizando métodos numéricos (preálgebra). Más aun, en 88% de las situaciones pudieron describir las relaciones verbalmente (álgebra retórica). Pero, en solamente 50% de las situaciones los estudiantes pudieron representar las relaciones simbólicamente o con una mezcla de palabras y símbolos (álgebra sincopada/simbólica). En situaciones aun más raras, 20%, los estudiantes pudieron utilizar las representaciones simbólicas para resolver problemas relacionados y solamente de manera operacional como una secuencia de operaciones para deshacer. Por lo menos en términos del nivel de dificultad de las tareas, el desempeño del estudiante reflejó las etapas históricas.

Mirando las mismas tareas a lo largo de la serie de contextos planteados, identificamos variaciones en las respuestas de los estudiantes al describir las relaciones y escribir las ecuaciones. En los problemas en que la relación entre la variable independiente y la dependiente se estableció de manera explícita o era intuitivamente obvia, como en los problemas del depósito y del salario, para los estudiantes fue más fácil generalizar que en aquellos problemas formulados en términos de la relación entre valores sucesivos, tal como la duplicación del número de regiones con cada doblez en el problema del doblado de papel, o la adición de dos sillas más a la fila anterior en el problema de la sala de conciertos. Los problemas del depósito y del salario representan modelos directos de los significados de operaciones que los estudiantes han estudiado en grados anteriores. El problema del depósito es un problema de multiplicación por una cierta rata y el del salario es un problema de dos pasos, que involucra multiplicación y adición. Aunque el problema de la sala de conciertos también es un problema de dos pasos (dos sillas más por fila después de 10 en la fila 1) se tiene que calcular el multiplicador constante (número de fila menos uno) y aislar el valor inicial. Nuevamente la diferencia en el desempeño en estos problemas indica que la instrucción escolar necesita impulsar la comprensión de los estudiantes más allá de las situaciones de rutina. Los estudiantes parecen poder generalizar la aritmética que ellos conocen bien pero tienen dificultad para generalizar la aritmética que no les es familiar. En particular, los estudiantes de la escuela media se beneficiarían al tener más experiencias con una rica variedad de situaciones multiplicativas en las que se incluya la proporcionalidad, la variación inversa y la exponenciación.

El análisis de las mismas tareas a lo largo de diferentes situaciones problema revela también de qué manera al trabajar casos específicos que involucran diferentes números en el mismo contexto, se apoya el proceso de generalización. Parece ser que la resolución de problemas (e.g., problema del borde) para una variedad de casos enfocó la atención de los estudiantes en los procesos que estaban utilizando y les facilitó la generalización de aquellos procesos. Esto apunta a la eficacia potencial de hacer que los estudiantes trabajen más de una vez en el mismo problema, utilizando números diferentes, en cambio de tener estudiantes que trabajen en una variedad de problemas con diferentes contextos. La instrucción en los grados de primaria se enfoca en el desarrollo de significados de las operaciones a través de una variedad de contextos. Sin embargo, en los grados de nivel medio el foco debería cambiarse al desarrollo de la comprensión de los estudiantes acerca del efecto de cambios en un operador dentro del mismo contexto, tal como es el caso, de cambiar el tamaño de la cuadrícula en el problema del borde o el número de envases retornados en el problema del depósito.

Los problemas de la sala de conciertos y del borde también ofrecieron contrastes interesantes. Ambos son situaciones lineales de la forma $ax + b$. El problema de la sala de conciertos se presentó en términos de filas sucesivas mientras que el problema del borde no se presentó en términos de cuadrículas sucesivamente más grandes. Si el problema de la sala de conciertos se hubiera propuesto como se hizo con el problema del borde, con un diagrama de la fila 10 y de la fila 5, seguido por una pregunta acerca de la fila 100, sin un diagrama, ¿los estudiantes se habrían enfocado de manera más exitosa en un proceso computacional que fuera función del número de la fila en cambio del número de sillas en la fila anterior? Estas diferencias en los resultados para dos tipos de problemas de la misma clase de funciones, indica qué tan difícil puede ser desarrollar un currículo que pueda usarse para construir efectivamente las intuiciones de los estudiantes acerca de una familia de funciones.

Adicionalmente, hay un beneficio potencial al examinar el mismo problema a través de diferentes representaciones tales como diagramas, gráficos, tablas, descripciones verbales y ecuaciones. Sin embargo, el uso de representaciones múltiples no es suficiente por sí mismo. Por ejemplo, en el caso de las tablas, los estudiantes podían identificar patrones aislados entre parejas de variables dependiente e independiente pero no podían ver un patrón que fuera consistente a través de la tabla entera. Como lo señaló Lee (1996) el problema no está en la incapacidad de ver un patrón sino en la incapacidad de ver un patrón útil algebraicamente. Las tablas fueron más útiles cuando fueron producidas por los estudiantes para tratar de dar sentido al contexto del problema en cambio de cuando fueron proporcionadas o sugeridas por el entrevistador. Cualquiera que sea la representación, los estudiantes necesitan establecer vínculos entre la representación y el contexto del problema y entre una representación y otra. Dreyfus (1991) ha sugerido que el proceso de aprendizaje necesita proceder a través de cuatro etapas: (a) la utilización de una sola representación, (b) la utilización de más de una representación, (c) la elaboración de vínculos entre representaciones paralelas, y (d) la integración y el cambio flexible entre representaciones. La instrucción con frecuencia se enfoca en las dos primeras etapas con el supuesto de que los estudiantes alcanzarán las otras dos etapas como un subproducto de las actividades en las etapas previas. En el nivel de preálgebra, el énfasis en el currículo debería estar en el desarrollo y vinculación de representaciones múltiples para generalizar situaciones problema en cambio de solamente construir representaciones que los estudiantes no asocian con las situaciones problema.

Antes de la instrucción formal en álgebra, estos estudiantes de grado sexto, raramente vieron y utilizaron sus ecuaciones como objetos matemáticos. Sin considerar el contexto del problema, estos estudiantes mantuvieron una visión operacional. Kieran (1979) ha discutido las dificultades de los estudiantes para percibir las expresiones como objetos más que como acciones. Es decir, los estudiantes interpretaron $a+b$ como “adicione *b* a *a*” en vez de “la suma de *a* y *b*”. Resultados similares se encontraron en este estudio como se ilustra en los paneles C y D de la Figura Nº 3. Los estudiantes, o bien asignaron una variable a la cantidad $n \times 4$ o dejaron un espacio en blanco para el producto con lo que indicaban que no veían aún la expresión $n \times 4$ como un objeto.

Además de usar rara vez las ecuaciones como objetos matemáticos, algunos de los estudiantes de grado sexto estaban inseguros de los usos apropiados de las variables. Por ejemplo, aunque una estudiante generó eventualmente una ecuación para el problema del depósito, ella tuvo dificultad con el uso de la variable *c* para representar más de un envase. Otros estudiantes no pudieron generar una ecuación aunque pudieron describir la relación verbalmente. Para estos estudiantes las letras deben tener asignado un valor antes de que puedan ser usadas. Por tanto, antes de estudiar álgebra, los estudiantes ya han comenzado a usar variables para representar relaciones cuantitativas. Sin embargo, desarrollar una comprensión más completa de cómo utilizar las variables parece ser una meta importante que se debe desarrollar en el estudio formal del álgebra. Algunos enfoques innovadores hacia el álgebra en los grados medios ("Algebraic thinking", 1997) enfatizan el uso de variables para representar un rango de valores en situaciones contextuales, para describir patrones, o para explorar familias de funciones. Estos enfoques son consistentes con los hallazgos de este estudio.

Por medio de esta investigación contribuimos a completar un poco más la imagen que se tiene del conocimiento preinstruccional de los estudiantes acerca del álgebra, describiendo el alcance con el que ellos pueden usar ecuaciones para describir y representar una variedad de situaciones problema. También llegamos a preguntas adicionales acerca del currículo más apropiado para construir sobre el conocimiento intuitivo de los estudiantes acerca del álgebra. Específicamente, los investigadores necesitan investigar el uso más efectivo de tablas y otras representaciones para apoyar las generalizaciones y también necesitan estudiar cómo comprenden los estudiantes las diferentes situaciones problema dentro de familias específicas de funciones. También se requieren estudios en otros niveles o con los mismos estudiantes a través de diversos niveles para poder reportar la emergencia de varios usos intuitivos de ecuaciones para diferentes tipos de funciones. De manera más general, los investigadores deben investigar el efecto del currículo innovador de la escuela del nivel medio en el enriquecimiento de las habilidades de los estudiantes para usar variables y generalizar relaciones funcionales.

REFERENCIAS

Algebraic thinking: Opening the gate. (1997). *Mathematics Teaching in the Middle School*, 2 (4).

Arzarello, F. (1992). Pre-algebra problem solving. En J.P. Ponte, J.F. Matos, J.M. Matos y D. Fernandes (Eds.), *Mathematical problem solving and new information technologies* (NATO ASI Series F, Vol. 89, pp. 155-166). Berlin, Germany: Springer-Verlag.

Bednarz, N. y Janvier, B. (1996). Emergence and development of algebra as a problem-solving tool: Continuities and discontinuities with arithmetic. En N. Bednarz, C. Kieran y L. Lee (Eds.), *Approaches to algebra: Perspectives for research and teaching* (pp. 115-136). Dordrecht: Kluwer.

Boero, P. y Shapiro, L. (1992). On some factors influencing students' solutions in multiple operations problems: Results and interpretations. En W. Geeslin y K. Graham (Eds.), *Proceedings of the sixteenth PME conference* (Vol. I, pp. 89-96). Durham, NH: Program Committee of the 16th PME Conference.

Booth, L. R. (1984). *Algebra: Children's strategies and errors: A report of the strategies and errors in secondary mathematics project*. Windsor, UK: NFER-NELSON.

Carpenter, T.P. y Moser, J. M. (1984). The acquisition of addition and subtraction concepts in grades one through three. *Journal for Research in Mathematics Education*, 15, 179-202.

Dreyfus, T. (1991). Advanced mathematical thinking processes. En D. Tall (Ed.), *Advanced mathematical thinking* (pp. 25 41). Dordrecht: Kluwer.

Edwards, E.L., Jr. (Ed.). (1990). *Algebra for everyone*. Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.

Fennema, E., Carpenter, T. P., Franke, M.L., Levi, L., Jacobs, V.R. y Empson, S.B. (1996). A longitudinal study of learning to use children's thinking in mathematics instruction. *Journal for Research in Mathematics Education*, 27, 403-434.

Filloy, E. y Rojano, T. (1989). Solving equations: The transition from arithmetic to algebra. *For the Learning of Mathematics*, 9 (2), 19-25.

Gallardo, A. y Rojano, T. (1987). Common difficulties in the learning of algebra among children displaying low and medium pre-algebraic proficiency levels. En J.C. Bergeron, N. Herscovics y C. Kieran (Eds.), *Proceedings of the eleventh international conference for the Psychology of Mathematics Education* (Vol. 1, pp. 301-307). Montreal, Canada: University of Montreal.

Herscovics, N. y Chalouh, L. (1984). Using literal symbols to represent hidden quantities. En J.M. Moser (Ed.), *Proceedings of the sixth annual meeting of PME-NA* (pp.64-70). Madison: University of Wisconsin.

Herscovics, N. y Kieran, C. (1980). Constructing meaning for the concept of equation. *Mathematics Teacher*, 73, 572-580.

Herscovics, N. y Linchevski, L. (1994). A cognitive gap between arithmetic and algebra. *Educational Studies in Mathematics*, 27, 59-78.

Jones, G.A., Langrall, C.W., Thornton, C.A. y Mogill, A.T. (1997). A framework for assessing and nurturing young children's thinking probability. *Educational Studies in Mathematics*, 32, 101-125.

Jones, G.A., Langrall, C.W., Thornton, C. A. y Mogill, A.T. (1999). Using students' probabilistic thinking in instruction. *Journal for Research in Mathematics Education*,30, 487-519.

Kaput, J.J. (1989). Linking representation in the symbol systems of algebra. En S. Wagner y C. Kieran (Eds.), *Research issues in the learning and teaching of algebra* (pp. 167-194). Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics and Hillsdale, NJ: Erlbaum.

Kieran, C. (1979). Children's operational thinking within the context of bracketing and the order of operations. En D. Tall (Ed.), *Proceedings of the third international conference for the Psychology of Mathematics Education* (pp. 128-133). Coventry, England: Mathematics Education Research Centre, Warwick University.

Kieran, C. (1984). Cognitive mechanisms underlying the equation-solving errors of algebra novices. En B. Southwell, R. Eyland, M. Cooper, J. Conroy y K. Collis (Eds.), *Proceedings of the eighth international conference for the Psychology of Mathematics Education* (pp. 70-77). Sydney, Australia: International Group for the Psychology of Mathematics Education.

Kieran, C., Garançon, M., Boileau, A. y Pelletier, M. (1988). Numerical approaches to algebra problem solving in a computer environment. En M.J. Behr, C.B. Lacampagne y M.M. Wheeler (Eds.), *Proceedings of the tenth annual meeting of the North American Chapter of the lnternational Group for the Psychology of Mathematics Education* (pp. 141-149). DeKalb: Northern Illinois University.

Küchemann, D. (1978). Children's understanding of numerical variables. *Mathematics in School*, 7, 23-26.

Küchemann, D. (1981). Algebra. En K.M. Hart (Ed.), *Children's understanding of mathematics: ll-16* (pp. 102-119). London: John Murray.

Lamon, S. J. (1993). Ratio and proportion: Connecting content and children's thinking. *Journal for Research in Mathematics Education*, 24, 41 61.

Lee, L. (1996). An initiation into algebraic culture through generalization activities. In N. Bednarz, C. Kieran y L. Lee (Eds.), *Approaches to algebra: Perspectives for research and teaching* (pp. 87-106). Dordrecht: Kluwer.

Lubinski, C.A. y Otto, A.D. (1997). Literature and algebraic reasoning. T*eaching Children Mathematics*, 3, 290 295.

Mack, N.K. (1990). Learning fractions with understanding: Building on informal knowledge. *Journal for Research in Mathematics Education*, 21, 16 32.

Mason, J. (1996). Expressing generality and roots of algebra. En N. Bednarz, C. Kieran y L. Lee (Eds.), *Approaches to algebra: Perspectives for research and teaching* (pp. 65-86). Dordrecht: Kluwer.

Miles, M. B. y Huberman, A.M. (1994). *Qualitative data analysis: An expanded source book* (2ª ed.). Thousand Oaks, CA: Sage.

National Council of Teachers of Mathematics. (1991). Pr*ofessional standards for teaching mathematics*. Reston, VA: NCTM.

Peck, D.M. y Jencks. S.M. (1988). Reality, arithmetic, algebra. *Journal of Mathematical Behavior*, 7, 85-91.

Sfard, A. (1995). The development of algebra: Confronting historical and psychological perspectives. *Journal of Mathematical Behavior*, 14, 15-39.

Sutherland, R. y Rojano, T. (1993). A spreadsheet approach to solving algebra problems. *Journal of Mathematical Behavior*, 12, 353-383.

Thompson, F.M. (1988). Algebraic instruction for the younger child. En A.F. Coxford (Vol. Ed.) y A.P. Shulte (Series Ed.), *The ideas of algebra, K-12*. 1988 Yearbook of the National Council of Teachers of Mathematics (pp. 69-77). Reston, VA: NCTM.

Wagner, S. (1981). Conservation of equation and function under transformations of variable. *Journal for Research in Mathematics Education*, 12, 107-118.

Jane Swafford
Cynthia Langrall
Illinois State University
USA
E-mail: swafford@ilstu.edu
E-mail: langrall@ilstu.edu