LA FUNCIÓN CUADRÁTICA EN LOS TEXTOS ESCOLARES DE GRADO NOVENO DE LA EDUCACIÓN BÁSICA

ANDRÉS FABIÁN HURTADO GARCÍA
FANOR YESID ZÚÑIGA PATIÑO

UNIVERSIDAD DEL VALLE
INSTITUTO DE EDUCACIÓN Y PEDAGOGÍA
ÁREA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA
SANTIAGO DE CALI
2011

LA FUNCIÓN CUADRÁTICA EN LOS TEXTOS ESCOLARES DE GRADO NOVENO DE LA EDUCACIÓN BÁSICA

FANOR YESID ZÚÑIGA PATIÑO
ANDRÉS FABIÁN HURTADO GARCÍA

Trabajo de grado para optar el título de
Licenciado en Educación Básica con énfasis en Matemáticas

Asesora
Lic. María Fernanda Mejía Palomino

UNIVERSIDAD DEL VALLE
INSTITUTO DE EDUCACIÓN Y PEDAGOGÍA
ÁREA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA
SANTIAGO DE CALI
2011

Nota de aceptación

Mg. Maritza Pedreros Puente

Mg. María Cristina Velasco

Santiago de Cali, 9 de Mayo de 2011

A Dios, por fortalecer mi voluntad en los momentos más difíciles de mi vida, y en aquellos en los que solo él podría darme esperanza para continuar.

A mis padres por su apoyo incondicional.

Fanor Yesid

A Dios por brindarme la voluntad, dedición y perseverancia en los momentos en los cuales más lo necesitaba.

A mi familia por brindarme su apoyo incondicional en toda mi carrera y en todas las decisiones de mi vida.

Andrés Fabián

AGRADECIMIENTO

Damos el reconocimiento a nuestra Directora por su voluntad, paciencia y compromiso en el desarrollo del trabajo, la profesora María Fernanda Mejía Palomino.

También agradecemos a todos nuestros profesores a lo largo de la carrera, y en especial a aquellos que con sus sabios consejos nos brindaron su apoyo para ser mejores.

TABLA DE CONTENIDO

LISTA DE TABLAS

LISTA DE FIGURAS

RESUMEN

En el siguiente trabajo se realizó el análisis de dos textos escolares, con el fin de reconocer la coherencia que guarda la propuesta educativa del texto, con la idea que el Ministerio de Educación Nacional (MEN) establece para la enseñanza de las Matemáticas, mediante los lineamientos curriculares respecto al Pensamiento Variacional. Para tal propósito, se buscó reconocer, el tratamiento que el texto escolar le da al concepto de función cuadrática. Este análisis se realizó teniendo en cuenta dos textos escolares de grado Noveno (9°) de la educación básica, que han estado dentro del mercado durante los años 2007 al 2009.

Una parte del análisis de los textos pretende evaluar de qué manera las características del texto escolar satisfacen las necesidades básicas de enseñanza y aprendizaje realizadas dentro y fuera del salón de clases con respecto a lo propuesto por el MEN en los Lineamientos Curriculares para la Educación Matemática.

Pero también se reconoció en este análisis de Textos escolares la Teoría Antropológica de lo Didáctico (TAD), como herramienta para llevar a cabo el análisis didáctico de la propuesta del texto escolar, esta teoría se centra en el análisis de las *Praxeologías Matemáticas* las cuales se componen de : tareas, técnicas, tecnologías y teorías.

Palabras claves: Función cuadrática, análisis de textos escolares, Teoría Antropológica de lo Didáctico (TAD).

INTRODUCCIÓN

Antes de presentar este trabajo, es importante mostrar las razones por las que son importantes los análisis de textos escolares. La primera razón es reconocer la influencia que éste tiene como herramienta en el proceso educativo, ya que usualmente se convierte en un complemento para la enseñanza. La decisión de seleccionar un texto escolar toma importancia si se tiene en cuenta la implicación que tiene sobre los propósitos educativos, esto a razón de que al elegir un texto escolar que apoye el trabajo en clase y ayude a la comprensión de un saber matemático, le exige al profesor ser consciente de la propuesta que éste ofrece, y que de ello depende los resultados que se esperan para la construcción de conocimiento.

Reconociendo que la propuesta del Ministerio de Educación Nacional (MEN) genera algunas reformas en la Educación Matemática, esto implicó replantear la labor que desempeñaba el docente, y la de cualquier medio que tuviera como propósito enseñar matemáticas. Surgió la necesidad de considerar la propuesta del texto escolar para verificar si cumple este propósito, debido a la influencia que tienen en el proceso educativo. Primero, porque muchas de las instituciones educativas lo incluyen y lo recomiendan en clase, y por otro lado porque el docente muchas veces sigue el contenido y la propuesta que éste plantea.

Por otro lado, se destaca la importancia que el texto escolar le debería dar al *saber sabio* (Arbeláez, Arce, Guacaneme & Sánchez, 1999) el cual posee un desarrollo histórico y un contexto en el cual fue descubierto (génesis natural del saber) que no se puede dejar de lado. Por tanto, es necesario que en el análisis de texto escolar se revisen algunos aspectos de tipo histórico-epistemológico en el desarrollo del saber, con el propósito de reconocerlo y darle sentido, teniendo en cuenta que los cuerpos de conocimiento generalmente son descubiertos para cumplir necesidades prácticas o con fines diferentes al educativo. Para el objetivo del análisis, se buscan obtener elementos que faciliten establecer la relación que guarda con el saber a enseñar que se difunde en el ámbito escolar (Arbeláez et. al., 1999).

En este orden de ideas se consideró que el fin de la propuesta que plantea el texto escolar recae sobre las tareas que se plantean dentro de sus capítulos o unidades, de esta manera es como existe una integración entre el contenido o la parte teórica y la práctica. Por esta razón se recurrió a la *Teoría Antropológica de lo Didáctico* (TAD) como herramienta para llevar a cabo el análisis de lo que en esta teoría se denomina *Praxeología Matemática*, según esta teoría *l*as *Praxeologías* permiten considerar en un mismo tiempo y atribuyéndoles la misma importancia, la dimensión teórica del saber con su dimensión practica (cercana al "saber hacer"), lo cual es planteado por el docente, o en este caso en el texto escolar como una tarea o actividad que será desarrollada por el estudiante.

Es necesario tener en cuenta que la *Praxeologia Matemática* hace énfasis en la manipulación de los conocimientos matemáticos, es decir al saber hacer con esos conocimientos que posee el estudiante, por lo cual se debieron considerar aspectos referidos a que las tareas que se planteen sean posibles de realizar por el estudiante, de igual forma con este análisis se evidencia si el tratamiento que se le da al objeto matemático esta en relación con la propuesta que establece el MEN a través de los estándares y lineamientos curriculares.

Por lo dicho anteriormente, se consideró necesario realizar a la luz de los referentes que propone el MEN, un análisis sobre la coherencia que guarda la propuesta del texto escolar con relación a los referentes currículo propuesto y a la vez que esta propuesta contribuya en si misma a la comprensión del concepto *función cuadrática*.

Es por tanto, que este trabajo presentó un análisis de textos en relación a la función cuadrática, teniendo en cuenta *la Teoría Antropológica de lo Didáctico (*TAD) y los referentes curriculares propuestos por el MEN.

Para tal propósito en este primer capítulo se muestran los aspectos generales que fundamentan la realización del análisis de textos escolares así como los objetivos que guían el desarrollo de este trabajo.

En el segundo capítulo se hace el reconocimiento de los referentes teóricos que sustentan el desarrollo del análisis de los textos escolares, estos referentes son: la Teoría Antropológica de lo Didáctico que ofrece las herramientas para un análisis didáctico, segundo los lineamientos curriculares en matemáticas propuestos por el MEN, con lo cual se hará énfasis en el pensamiento variacional y los sistemas algebraicos y analíticos que están estrechamente relacionados con la formación educativa del concepto de función cuadrática y tercero los referentes teóricos sobre la función cuadrática.

En el tercer capítulo se plantea la metodología y desarrollo de los análisis de dos textos escolares y por último en el quinto capítulo, se ofrecen las conclusiones obtenidas del análisis y el alcance de los objetivos.

1. ASPECTOS GENERALES

En este capítulo se presentó los aspectos relacionados con la propuesta del trabajo de grado, por lo que se da cuenta del planteamiento del problema, la justificación y los objetivos. El propósito es orientar al lector en los referentes que dieron cuenta del proyecto de trabajo de grado y que permitieron el desarrollo de este informe final.

1.1. PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA

En los Lineamientos Curriculares para la Educación Matemática se especifican algunos requerimientos que estructuran el currículo en Colombia y que trazan las pautas para la elaboración de textos escolares. Con estos parámetros las diversas editoriales[1]de la mano de los autores, deberán realizar los textos escolares para un determinado grado de escolaridad.

También se plantean en estos (lineamientos), “referentes que propician reflexiones acerca de la naturaleza, de la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas y sobre los principios básicos que ayudan a organizar el currículo y a orientar la evaluación; se propicia una nueva visión de Educación Matemática y por ende de una actividad matemática” (MEN, 1998, p. 6).

No obstante, existen diversas situaciones que comprometen a las instituciones encargadas de la elaboración de textos (editoriales). El plantear, analizar y hacer textos escolares dentro de las pautas que dan los lineamientos curriculares se torna de alguna manera “complicado”, al tener en cuenta la organización del currículo como un todo armonioso e integrado dentro de tres grandes ejes (procesos, conocimientos básicos y contextos) (MEN, 1998, p.18). Algunos textos escolares en el aula de clase, muestran una desarticulación entre el currículo planteado por el MEN y el que presenta, generando prácticas de enseñanza que van en contra de los desempeños esperados en los estudiantes.

1 Las editoriales disponen y hacen uso de algunos aspectos generales para la elaboración de textos, algunos de estos requerimientos son: el análisis de documentos producto de investigaciones en educación, el análisis de los documentos que expide el Ministerio de Educación Nacional como apoyo a las áreas fundamentales del conocimiento, como son los lineamientos y los estándares curriculares y el uso que hacen los docentes y estudiantes de estos textos.

Dentro del aula de clase la utilización del texto escolar puede ser absoluto en la organización del currículo, ya que algunos profesores tienden a seguir linealmente lo que se propone en ellos sin realizar situaciones complementarias o diferentes. Por tanto, la realización de análisis de textos escolares permitió determinar la propuesta de enseñanza de los autores y de esa manera mirar la coherencia con las políticas educativas y los desempeños, competencias y conocimientos que se esperan desarrollar en los estudiantes.

Por otro lado surge la inquietud acerca de cómo la propuesta del texto escolar promovió a través de su contenido y tareas la comprensión y manejo del conocimiento matemático, en este sentido se indaga las propuestas mediante la cual algunos textos escolares que serán analizados permiten el estudio del concepto matemático función cuadrática o si al contrario se presentan falencias que no contribuyen al propósito educativo.

Esto hace que el análisis curricular dé cuenta de qué se debe y cómo se debe enseñar, respetando la autonomía de las instituciones educativas pero garantizando la equidad de los educandos. Los componentes del currículo de matemáticas determinan diversas tareas que a su vez remiten a unas técnicas y a una teoría constituyéndose una Praxeología Matemática, por lo que se retoman los planteamientos de la TAD y el MEN para realizar el análisis de textos desde lo curricular y lo didáctico.

Por otra parte, luego de haber reconocido un problema que es frecuente en la educación, se deben tener en cuenta que los análisis de textos escolares reflejan las intenciones del autor, los saberes matemáticos a estudiar en un determinado orden, de esta manera el texto se debe reconocer como "un objeto con intenciones, las cuales se ponen en juego a través del contenido propuesto mediante una metodología que facilite su comprensión" (Arbeláez et. al., 1999, p. 131)

> En el momento de realizar un análisis sobre la comprensión del significado educativo del texto escolar, es necesario reconocerlo como un "artefacto", por consiguiente cuesta mucho la dimensión gráfica y la parte editorial para su elaboración esto conlleva a que el texto se convierta prácticamente en una "mercancía" que requiere de

> su comercialización y mercadeo. Pero realmente la comprensión del texto no debe pasar por un proceso de mercadeo, debe depender generalmente de un enfoque educativo el cual si tiene argumentos de peso para saber si un texto en matemáticas es realmente eficiente y con los requerimientos necesarios para su actualización (Arbeláez et. al., 1999, p.10).

Es pertinente mencionar que el objeto matemático con el que se desarrolló el trabajo, es en primera instancia el concepto de Función y luego se empieza a realizar un análisis más profundo acerca de la Función Cuadrática por lo que se presentó un resumen del análisis matemático de Zill y Dewar (1992) y Stewart, Redlin y Watson (2007) e histórico y epistemológico de Ruíz (1998), además un análisis curricular alrededor del pensamiento variacional. De acuerdo a estos conceptos y a la TAD, se revisó la propuesta educativa, en la unidad correspondiente a la función cuadrática en dos libros de grado noveno (9°) de la educación básica: Espiral 9 y Delta 9, ambos de la Editorial Norma.

Para Chevallard, Bosch y Gascón (1997) el currículo deja de lado el problema de "cuestionar las organizaciones desde sus elementos técnicos, tecnológicos y teóricos que convierten los contenidos aptos para ser enseñados" (p.141). Solamente el currículo se preocupa por qué enseñar o no enseñar sin mirar en profundidad lo que componen las Praxeologías Matemáticas.

Considerando lo dicho acerca del planteamiento de la propuesta del texto escolar en lo que corresponde al currículo y las Praxeologías Matemáticas alrededor de la función cuadrática, surgió la siguiente inquietud: **¿cómo se estructura los textos escolares en relación a Praxeologías Matemáticas locales relativamente completas y frente al currículo?** La caracterización de una Praxeologia Matemática Local Relativamente Completa (PMLRC) se presentó en los referentes teóricos; por el momento se define como la integración de diversas Praxeologías Matemáticas puntuales (que tratan un único tipo de tareas) alrededor de un mismo discurso tecnológico.

1.2. JUSTIFICACIÓN

En este trabajo se reconoció la importancia de la formación en Educación Matemática, sus reflexiones sobre las necesidades sociales y culturales a las cuales deben corresponder los propósitos educativos (ya que los resultados de las investigaciones así lo han evidenciado). En este sentido el análisis busca corresponder a estos aspectos (sociales y culturales) considerando elementos teóricos que permitan evidenciar de qué manera las propuestas educativas de los textos escolares posibilitaron el aprendizaje matemático. Esto hace que la propuesta del MEN sea uno de estos elementos a considerar y a través de él se pueda establecer si el trato que se le da al concepto de función cuadrática en ambos textos, contribuye a un aprendizaje para la sociedad a la cual está dirigida.

El segundo elemento teórico que permitió la realización del análisis de la propuesta educativa de los textos escolares es la Teoría Antropológica de lo Didáctico (TAD), y en esta teoría lo concerniente a las Organizaciones o Praxeologías Matemáticas Locales (OML), que en relación a los referentes curriculares del MEN permitieron analizar las diferentes Praxeologías Matemáticas que se proponen en los textos escolares para enseñar la función cuadrática, y en conjunto para propiciar el estudio de este concepto.

Un referente frente a los análisis de textos y la TAD es el trabajo de investigación realizado por Bosch, Fonseca y Gascón (2004) en que se corrobora la incompletitud de las organizaciones matemáticas en instituciones escolares. Para esto se analizan Praxeologías Matemáticas locales, entendiéndose estas como:

> La integración de diversas praxeologías *puntuales* en torno a un discurso tecnológico común. Cada Organización Matemática Local (OML) está caracterizada por dicha *tecnología*, que sirve para justificar, explicar, relacionar entre sí y producir las técnicas de todas las Organizaciones Matemáticas Puntuales (OMP) que la integran. En general, las OM puntuales se integran en OM locales para poder dar respuesta satisfactoria a un conjunto de *cuestiones problemáticas* que no se podían resolver

> completamente en ninguna de las OMP de partida. (Bosch, Fonseca & Gascón, 2004, p. 215).

Por otra parte, es necesario tener presente la relación entre el saber matemático sabio y el saber matemático escolar, es decir la transposición didáctica presente en los textos escolares. En algunos casos los contenidos seleccionados y la manera de enseñarlos se relaciona con las necesidades de usos de los saberes matemáticos y por ello se espera que los estudiantes adquieran de manera significativa conocimientos que puedan asociar y utilizar en una situación determinada que satisfagan una función en su vida (social e intelectual) en pro de desarrollar competencias matemáticas.

Se consideró para el propósito de este trabajo, que el desarrollo de un campo conceptual como el de la ***función cuadrática*** en los estudiantes, se genere a partir de lo que sugiere el MEN, por tal motivo se reconoció la importancia del desarrollo del "***pensamiento variacional***" en la adquisición de conocimientos, estructurados dentro de un mismo campo teórico que el estudiante ha adquirido y ha asimilado a través de su contacto con experiencias significativas que le ayuden desde su formación inicial en aritmética a dar los primeros pasos en la construcción de dominios conceptuales asociados al razonamiento algebraico, ya que como se expresa en el texto pensamiento variacional y razonamiento algebraico:

> El pensamiento variacional, se fundamenta y se desarrolla sobre lo que se denomina en general razonamiento algebraico, es decir el desarrollo del conocimiento matemático, va asociado desde los primeros años de escolaridad con el desarrollo del razonamiento y el uso de estos conocimientos, que han de ser las bases del pensamiento variacional (Universidad de Antioquia, 2007, p.18)

Ahora bien reconociendo que la existencia y desarrollo del pensamiento variacional está ligada a los fenómenos de variación y cambio que se hacen evidentes en diversos contextos, desde los que están asociados a la cotidianidad, hasta los que pueden resultar de otras disciplinas, surgió la necesidad de mirar cómo se desarrolla este pensamiento en la propuesta de los textos escolares.

1.3. OBJETIVOS

OBJETIVO GENERAL

- Establecer las características curriculares y las Praxeologías Matemáticas de algunos textos escolares colombianos alrededor de la función cuadrática.

OBJETIVOS ESPECIFICOS

- Analizar las Praxeologías Matemáticas alrededor de la función cuadrática presentes en los textos escolares.

- Establecer la coherencia entre la propuesta curricular del MEN con lo que se presenta en los textos escolares.

2. MARCO TEÓRICO

2.1. ASPECTOS DIDÁCTICOS

En este capítulo se consideró los referentes teóricos que permitieron indagar sobre los aspectos didácticos en la propuesta educativa de ambos textos (Espiral 9 y Delta 9) y la eficacia de las consideraciones que al respecto presentaron los textos para la enseñanza del concepto de función cuadrática. En este sentido fueron la Teoría Antropológica de lo Didáctico (TAD) y los lineamientos curriculares de matemáticas elementos teóricos mediante los cuales se llevó a cabo este análisis de textos escolares.

Con estos referentes teóricos se buscó centrar el análisis en el estudio de las Praxeologías Matemáticas que se presentan a lo largo del texto escolar en lo referente al concepto de la función cuadrática, ya que conforman un elemento importante en la propuesta educativa de los textos escolares dentro de las expectativas de lo que se puede enseñar y lo que realmente se enseña en el aula de clase.

2.1.1. TRANSPOSICIÓN DIDÁCTICA

Teniendo en cuenta que la propuesta del texto escolar tiene como propósito enseñar el objeto matemático *función cuadrática,* por medio de situaciones que buscan reconstruir y establecer este concepto, se debe reconocer que existe una distancia que separa esta adaptación didáctica del objeto matemático en sí, esto hace necesario establecer una permanente vigilancia sobre la correspondencia o coherencia entre el objeto matemático y su adaptación en el texto escolar.

En relación a lo anterior se tiene en cuenta la transposición didáctica de un saber considerado *sabio* con el propósito de que cumpla una función educativa. "La transposición didáctica, remite al paso del *saber sabio* al *saber enseñado*, y por lo tanto a la distancia eventual obligatoria que los separa, da testimonio de ese cuestionamiento necesario, al tiempo que se convierte en su primera herramienta" (Chevallard, 1998, p.16).

Lo anterior llevó a que Chevallard (1998) genere algunos cuestionamientos, “Por qué el funcionamiento *didáctico* del saber es distinto del funcionamiento académico, por qué hay dos regímenes del saber, interrelacionados pero no superponibles” (p. 25).Comúnmente el saber enseñado vive muy encerrado sobre sí mismo, en una placida independencia, protegido por lo que se ha llamado “la clausura de la conciencia didáctica”.

En relación a la transposición didáctica y a sus cuestionamientos, se pudo reconocer que los textos escolares permiten difundir el *saber a enseñar*, aunque su uso varía en relación a las intencionalidades que puede generar el maestro. Los textos escolares son herramientas dentro de un salón de clases, le permiten al estudiante tener una ayuda externa al aula o en algunos casos el maestro puede usarlo como una fuente de situaciones de enseñanza donde el saber matemático tiene una utilidad. Cabe aclarar que la calidad del uso en el aula de clase de un texto escolar depende de algunos requerimientos, debe ser observado, manipulado, evaluado, estudiado y de alguna manera “puesto a prueba” antes de llevarlo a un salón de clases; no es simplemente “tener un texto escolar por tenerlo”.

En cuanto a la organización de los textos escolares de matemáticas, éstos están estructurados por sesiones o unidades, en ellas se presenta un contenido matemático junto a una serie de situaciones de enseñanza para el estudiante. En el currículo colombiano de matemáticas cada una de las unidades está asociada a los diferentes conocimientos básicos, procesos y contextos. Su organización también depende de una Praxeología Matemática, por lo que se pueden presentar definiciones, propiedades, teoremas entre otros, en donde los ejemplos son una forma de concretar estos saberes matemáticos en lo práctico. Posteriormente se le propone al estudiante usar estos saberes matemáticos en tareas. Por ello, este análisis desde la TAD, observó las conexiones entre las Praxeologías Matemáticas y el currículo.

2.1.2. TEORÍA ANTROPOLOGICA DE LO DIDÁCTICO

El texto escolar pone en juego su intención educadora a través de una metodología que permita la comprensión del saber matemático, de allí la necesidad de determinar su propuesta educativa desde diferentes aspectos. En el caso de este trabajo desde lo curricular y el análisis de Praxeologías Matemáticas. De igual manera es necesario tener en cuenta que las tareas que se proponen conforman un elemento importante en el texto como parte de su propuesta educativa, las cuales deben servir para aclarar lo que ya ha sido enseñado y para promover el uso e integración de los conocimientos.

En este sentido se consideró la ***Teoría Antropológica de lo Didáctica (TAD)*** como herramienta para llevar a cabo el análisis de la propuesta educativa que establece el texto escolar. A través de esta teoría se evidenció que las tareas constituyen un punto esencial en el que recae la propuesta educativa y a la vez determinan su éxito (Bosch & Gascón, 2006).

De igual forma las tareas son el punto de llegada de la propuesta educativa, así que hay una conexión entre lo que ha sido enseñado y como ha sido enseñado con lo que se espera que el estudiante haya aprendido, tomándose la tareas y la Praxeología Matemática que las contiene, como la base de este análisis de textos escolares.

La Teoría Antropológica de lo Didáctico, propuesta por Yves Chevallard a finales de los 80 y consistió en estudiar al profesor y al estudiante en el rol de enseñar y de aprender la Estructura Matemática, frente a la relatividad del saber científico con respecto a las instituciones sociales.

En este caso quien busca cumplir la función de enseñar el contenido matemático es el texto escolar, en el existen concepciones acerca del sujeto al cual está dirigido, como por ejemplo los conocimientos que el estudiante ya posee, las habilidades y destrezas que se asumen para el nivel escolar, y también ciertas concepciones sociales y culturales que de manera global se pueden asumir en el texto, ya que de esto también depende que el conocimiento cumpla una función social y además que se logre el objetivo educativo.

El punto crucial al respecto, es que la TAD sitúa la actividad *matemática*, y en consecuencia la actividad del *estudio* en matemáticas, *es el conjunto de actividades humanas y de instituciones sociales*, como se menciona en el texto: *Evolución de la didáctica de las matemáticas como disciplina científica.* "Este enfoque propugna que la actividad matemática debe ser interpretada (modelizada) como una actividad humana, en lugar de considerarla únicamente como la construcción de un sistema de conceptos, como la utilización de un lenguaje o como un proceso cognitivo" (Gascón, 1998, p.11).

Por lo que la TAD da herramientas para modelizar las prácticas matemáticas, incluyendo su dimensión material, y los saberes matemáticos como componentes inseparables de las prácticas dando lugar a la noción de *Praxeología Matemática*. *"*Esta teoría está basada en la noción de que la actividad matemática debe ser interpretada como una actividad humana más y, en consecuencia, propone un modelo general de las actividades humanas que formula en términos de *Praxeología"*(Bosch & Gascón, 2006, p. 13).

Las *Praxeologías* permiten considerar en un mismo tiempo y atribuyéndoles la misma importancia, la dimensión teórica del saber con su dimensión práctica (cercana al "saber hacer"), lo cual es planteado por el docente, o en este caso en el texto escolar como una tarea o actividad que será desarrollada por el estudiante.

> Las Tareas, tipos de tareas, géneros de tareas no son datos de la naturaleza, son "artefactos", "obras", construcciones institucionales, cuya reconstrucción en tal institución, y por ejemplo en tal clase, es un problema completo, que es el objeto mismo de la didáctica. (Chevallard, 1999, p. 3)

Ahora, la puesta en práctica de la tarea representa la forma estática de la Praxeología, la cuestión dinámica y la razón de su génesis requiere una manera de realizar las *tareas*, determinada por una manera de hacer. Chevallard (1999) denomina el saber hacer de una tarea como una *técnica*.

La *técnica* define la competencia matemática cuya caracterización se ubica en: 1) tener el compromiso por solucionar la tarea, esto es, estar sensibilizado por el problema y asumir la responsabilidad por resolverla; y 2) contar con los medios y recursos tanto cognitivos como instrumentales en matemáticas para llevar a cabo la tarea.

El saber hacer la tarea debe estar precedido de los medios y recursos para encarar dicha situación de reto. Serán las combinaciones inteligibles de los dispositivos cognitivos de origen antropológico e instrumentales de origen cultural, quienes estructuran el bloque de tecnologías y teorías matemáticas.

Pues bien, la tecnología es un discurso formal interpretativo y justificativo que nace en la estructura Matemática en su naturaleza clasificatoria como algoritmo o como elemento de una clase.

> El funcionamiento de las *Praxeologías Matemáticas* obedece al estudio de las matemáticas y en particular al estudio de ciertos objetos matemáticos como ocurre en este caso con el concepto de la *función cuadrática*, en este sentido no se plantea una sino un grupo de *Praxeologías Matemáticas* con el fin de permitir un verdadero estudio que potencie su comprensión, a este grupo de Praxeologías Matemáticas se le denomina *organización matemática* (Chevallard, Bosch & Gascón, 1997, p. 126).

"El modelo que propone actualmente la Teoría Antropológica de lo Didáctico, en la que explícitamente se situó este trabajo, describe el conocimiento matemático en términos de *organizaciones* o *Praxeologías Matemáticas* (en adelante OM) cuyos componentes principales son *tipos de tareas*, *técnicas*, *tecnologías* y *teorías"* (Bosch, Fonseca & Gascón, 2004, p. 213).

Se debe recordar que las organizaciones matemáticas se componen de un bloque práctico o "saber-hacer" formado por los tipos de tareas y las técnicas y por un bloque teórico o "saber" formado por el discurso tecnológico-teórico que justifica la práctica. También que las OM surgieron como producto de un *proceso de estudio* estructurado. La forma concreta de llevar a cabo un proceso de estudio en una institución determinada se describe a su vez en términos de *organizaciones* o *Praxeologías Didácticas*.

De acuerdo a lo dicho hasta el momento se afirmó que toda actividad matemática institucional puede ser modelizada mediante la noción de Praxeología Matemática u organización matemática que en el texto escolar se evidencia en un conjunto de tareas, por lo cual es posible analizar a la luz de esta teoría las Praxeologías Matemáticas que plantean el estudio del concepto de la *función cuadrática* con el fin de establecer su pertinencia y funcionalidad.

Teniendo en cuenta que se trata de una obra ya propuesta y concluida y no en construcción, entonces los criterios mediante los cuales se analizan estas Praxeologías son propuestos para establecer si todos y cada uno de estos elementos que conforman la obra matemática permiten su estudio, así surge la noción de *Organización o Praxeologia Matemática Local* OML (Bosch, Et. Al., 2004, p. 215), la cual se define como la integración de diversas *Praxeologías Matemáticas Puntuales OMP* en torno a un discurso tecnológico común, es decir las Praxeologías que se resuelven por medio de una misma técnica. Cada OML está caracterizada por esta *tecnología*, cuyo propósito es producir las técnicas de todas las OMP que la componen.

> En general, las OM puntuales se integran en OM locales para poder dar respuesta satisfactoria a un conjunto de cuestiones problemáticas que no se podían resolver completamente en ninguna de las OMP de partida. Hemos dicho que una OML permite plantear y resolver problemas (o, al menos, responder ante ellos) que en las OMP iniciales no podían formularse con toda propiedad. Resulta, por lo tanto, que estas nuevas cuestiones problemáticas deberían constituir la "razón de ser" que da sentido a la OML (Bosch, et. al., 2004, p. 215).

De esta forma las tareas que en el texto escolar se agruparon en este trabajo en tablas donde (ver Anexo 2 y 3) se presentan sus técnicas, tecnologías y teorías vinculadas. Esta organización también da cuenta de los componentes curriculares de matemáticas.

A continuación se muestran las características que deben tener las componentes (tarea, técnica, tecnología, teoría) de las OML para que conformen una *unidad indivisible*, una *totalidad organizada* cuyos componentes se implican mutuamente.

El cumplimiento de estas características se evalúa por el grado de completitud que muestre la OML en el cumplimiento de los siguientes siete indicadores (Bosch, Et. Al., 2004, p. 215):

1. *Integración de los tipos de tareas:* en una OML conviven necesariamente varios tipos de tareas problemáticas relacionadas entre sí, ya sea por un discurso tecnológico, o bien mediante sucesivos desarrollos de las técnicas. Con este criterio se quiere hacer énfasis en que el estudio del objeto matemático se da gracias a la integración de los diferentes tipos de tareas que se proponen en el capítulo y de los vínculos que entre ellas puedan existir, en caso contrario la OML será menos completa ya que las tareas serán realizables mediante técnicas que no están relacionadas mediante ningún elemento tecnológico.

2. *Diferentes técnicas y criterios para elegir entre ellas*: una OML será más completa en la medida que puedan existir técnicas alternativas (que pueden ser variaciones de una misma técnica) para realizar algunos de sus tipos de tareas, sin que haya entonces una identificación absoluta entre cada tipo de tarea con su técnica asociada. Este indicador de la completitud comporta que en la OML existan, además, los elementos tecnológicos que permiten cuestionar las distintas técnicas alternativas, analizar sus equivalencias o diferencias y discernir cuál es la más fiable o económica. En este caso se debe reconocer que el uso de procesos como ejercitación de procedimientos contribuye al manejo de las técnicas que es uno de los procesos que se deben trabajar en la escolaridad como se menciona en los lineamientos curriculares, sin embargo su propuesta no debe exceder la de otros procesos que también contribuyen al manejo, la apropiación y buen uso de las tecnologías y por ende de las técnicas.

3. *Independencia de los ostensivos que integran las técnicas:* la flexibilidad de las técnicas de una OML comporta, en particular, que éstas no se identifiquen rígidamente con los *objetos ostensivos*[2] (Bosch, 1994) que se utilizan para describirlas y para aplicarlas sino que, por el contrario, acepten diferentes representaciones ostensivas dependiendo de la actividad matemática en la que están inmersas y hasta de la tarea específica abordada dentro de un tipo de tareas. Uno de los aspectos que permiten que las técnicas se identifiquen con los *ostensivos* se da cuando el texto escolar recurre a la similitud con los ejemplos para el planteamiento de las tareas, en este sentido muchas veces se mantienen los mismos *objetos ostensivos* con el propósito de que la técnica este en función del *ostensivo* y el estudiante siga el procedimiento de resolución.

4. *Existencia de tareas y de técnicas "inversas":* otro indicador de la flexibilidad de las técnicas y, por lo tanto, del grado de completitud de la OML lo proporciona el hecho que existan en OML técnicas "reversibles", es decir que permiten resolver un tipo de tarea y también la tarea inversa, entendiendo por "inversa" aquella que se define, por ejemplo, intercambiando datos e incógnitas o cuestionando las condiciones de realización de la tarea o de aplicación de una determinada técnica. Está claro que la tarea inversa de una tarea dada no está definida unívocamente. Al respecto se aclara que el planteamiento de una tarea inversa no necesariamente tiene que ser el proceso opuesto al que se hace normalmente para realizar una tarea, sino que involucran ciertos variaciones en términos del planteamiento que hacen que el estudiante deba reajustar las técnicas e integrar conocimientos que resultan al darse cuenta que se tiene lo que en tareas anteriores era el resultado para llegar al inicio.

5. *Interpretación del resultado de aplicar las técnicas:* en la medida que una OML sea más completa, su discurso tecnológico deberá adquirir mayor funcionalidad, especialmente en la interpretación del funcionamiento de las técnicas y de su resultado. Este aspecto de la completitud implica que en OML existen los elementos

[2] Son los posibles medios utilizados por el texto escolar para plantear la tarea, pueden ser símbolos, gráficos o palabras escritas.

tecnológicos necesarios para llevar a cabo esta tarea de interpretación de las técnicas, que deberá hacerse en referencia a la OML en su conjunto, en términos de todos sus componentes. Hay que tener presente que el propósito de la OML es permitir la justificación y explicación de las tareas que aquí se plantean de acuerdo a la tecnología que caracteriza la OML, de acuerdo a esto el contenido o propuesta que hace el texto de estas tecnologías es fundamental para que el estudiante pueda comprenderlas y ampliarlas con la ayuda de las tareas.

6. *Existencia de tareas matemáticas "abiertas":* una OML será más completa en la medida en que permita abordar cuestiones "abiertas", esto es, tipos de tareas en los que se estudian situaciones donde los datos y las incógnitas no están prefijados completamente de antemano. En un primer nivel, las cuestiones abiertas son aquellas en las que los datos son valores conocidos que se tratan como si fuesen desconocidos (parámetros) y las incógnitas no son objetos matemáticos concretos (como, por ejemplo, valores numéricos) sino las relaciones que se establecen entre ellos en determinadas condiciones explicitadas en el enunciado de la tarea. Existe un segundo nivel de tareas abiertas en las que el estudiante ha de decidir, ante una situación determinada, qué datos debe utilizar y cuáles son las incógnitas más pertinentes.

7. *Incidencia de los elementos tecnológicos sobre la práctica:* el último indicador hace referencia explícita al hecho que cada OML viene caracterizada por su tecnología. Por ello, consideramos que el grado de completitud de la OML depende también de las relaciones que se establezcan entre estos elementos tecnológicos y de su incidencia efectiva sobre la práctica matemática que se lleva a cabo en OML. En particular, un indicador importante del grado de completitud de una OML lo constituye la medida en que la tecnología permita construir técnicas nuevas (para la comunidad de estudio) capaces de ampliar los tipos de tareas de OML.

De acuerdo a esto las tareas de las Praxeologías Matemáticas no solo son un medio para que el estudiante ponga en práctica las técnicas que ha aprendido sino que además son parte del proceso educativo encaminado a la comprensión y mejoramiento de las tecnologías vistas lo largo del texto escolar, lo cual se evidencia en el tipo de tareas que se puedan plantear que involucren procesos de razonamiento y resolución de problemas.

Hasta aquí se menciono en qué consiste la *Teoría Antropológica de lo Didáctico,* ahora con respecto al análisis de los textos escolares esta teoría fue de gran ayuda, ya que permitió indagar sobre los siguientes aspectos:

Con respecto a la noción de *Praxeología Matemática* la actividad matemática debe tratar dos dimensiones que es la dimensión teórica del saber junto con su dimensión práctica (saber hacer), en este sentido se debe recordar que uno de los propósitos que orientaron este trabajo fue mirar la coherencia que guarda la propuesta del texto escolar con la propuesta del MEN, y esta teoría facilita evidenciar de qué manera el texto escolar promueve un aprendizaje significativo en sus estudiantes a través de la integración de los procesos, los conocimientos básicos y contextos.

Con respecto a las tareas que se proponen, hay que tener en cuenta el conocimiento que posee el estudiante a cerca de ese objeto matemático, qué tan claro fue el texto escolar en sus explicaciones para que el estudiante lo comprendiera, y cuáles fueron los medios utilizados para que ese conocimiento sea significativo y pueda utilizarlo en situaciones diversas. También se debe considerar si estas actividades realmente responden a indagar el “saber hacer” del estudiante con ese conocimiento o por el contrario los ejercicios que en este se proponen no permiten evidenciarlo.

2.2. ASPECTOS CURRICULARES Y MATEMÁTICOS

2.2.1. PROPUESTA DEL MEN PARA LA EDUCACIÓN MATEMÁTICA

Mediante los lineamientos curriculares que expide el MEN se reconoció que la educación matemática debe involucrar los aspectos sociales, culturales y políticos entre otros que influyen en el proceso educativo en las diferentes regiones del país.

De igual manera se reconoció que las matemáticas son una disciplina que se renueva constantemente y que muchos de los descubrimientos que en ella suceden son repuesta a necesidades socioculturales comunes a toda la humanidad, por ende las matemáticas que se enseñaban años atrás no corresponden a las necesidades que hoy día se presentan ni tampoco a los adelantos que en términos científicos y tecnológicos presentan muchos países desarrollados y subdesarrollados en términos educativos.

Considerando lo anterior el MEN busca aclarar, promover y orientar a las distintas instituciones encargadas de la educación, el desarrollo y ejecución de procesos curriculares en el área de matemáticas, partiendo del hecho que las matemáticas deben ser integradas con la vida y las demás áreas de estudio, es decir que las matemáticas deben ser un medio para explorar la realidad.

En concordancia a esta visión global e integral del quehacer matemático se propone en los lineamientos curriculares tres grandes aspectos para organizar el currículo en un todo armonioso: procesos, conocimientos básicos y contextos.

En la Figura 1 se mostró que desde la elaboración del currículo hasta su ejecución en el aula los tres aspectos mencionados son transversales y necesarios para llevar a cabo una propuesta enfocada en una educación matemática que propicie aprendizajes de mayor alcance y más duraderos que los tradicionales, esto es que no sólo haga énfasis en el aprendizaje de conceptos y procedimientos sino en procesos de pensamiento ampliamente aplicables y útiles para aprender cómo aprender.

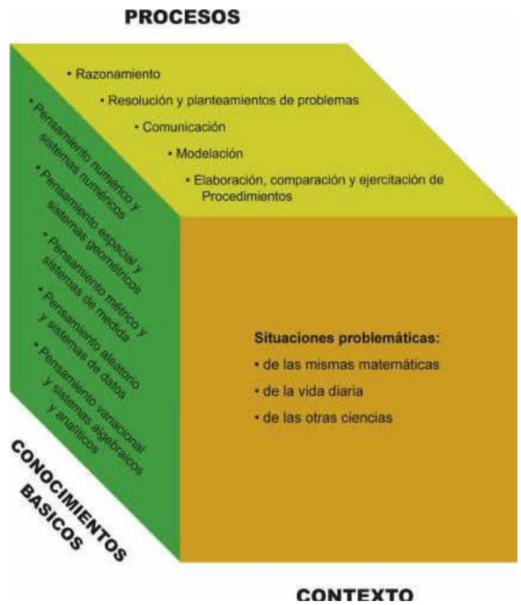


Figura 1. Estructuración del Currículo de matemáticas

> **Conocimientos básicos:** en este aspecto se integra el contenido a enseñar y las habilidades relacionadas con los contenidos matemáticos, el trabajo de estas dos componentes o procesos específicos desarrollan el pensamiento matemático y con sistemas propios de las matemáticas (MEN, 1998, p. 35).

Estos procesos específicos se relacionan con el desarrollo del pensamiento numérico, el espacial, el métrico, el aleatorio y el variacional, entre otros.

Cada uno de estos pensamientos está estrechamente relacionado con ciertos contenidos matemáticos como se indica en cada uno de ellos, y a la vez el trabajo con procesos que implementen estos pensamientos facilitan la enseñanza de los contenidos correspondientes.

Sin embargo hay que aclarar que los sistemas correspondientes a cada pensamiento no son ni deben ser el medio exclusivo para desarrollarlo, en la mayor parte de los casos se permite la articulación de tipos de sistemas para ampliar el campo de su desarrollo y contribuir a la integración de conocimientos.

Según el MEN los sistemas son aquéllos propuestos desde la Renovación Curricular: sistemas numéricos, sistemas geométricos, sistemas de medida, sistemas de datos y sistemas algebraicos y analíticos.

> **El contexto:** tiene que ver con los ambientes que rodean al estudiante y que les dan sentido a las matemáticas que aprende. Variables como las condiciones sociales y culturales tanto locales como internacionales, el tipo de interacciones, los intereses que se generan, las creencias, así como las condiciones económicas del grupo social en el que se concreta el acto educativo, deben tenerse en cuenta en el diseño y ejecución de experiencias didácticas (MEN, 1998, p. 36).

El diseño de una situación problemática debe ser tal que además de comprometer la afectividad del estudiante, desencadene los procesos de aprendizaje esperados. La situación problemática se convierte en un microambiente de aprendizaje que puede provenir de la vida cotidiana, de las matemáticas y de las otras ciencias.

En esta propuesta se integran nuevos elementos a la educación matemática que estructuran y orientan los fines de la educación en Colombia, a la vez que se propicia un campo de discusión y enriquecimiento de ideas para la comunidad educativa que contribuirán a mejorar la propuesta del MEN y al perfeccionamiento del currículo en el país.

> **Procesos generales:** tienen que ver con el proceso de aprendizaje, en él se destacan cinco procesos que tipifican la actividad o proceso matemático que son: el razonamiento; la resolución y planteamiento de problemas; la comunicación; la modelación y la elaboración, comparación y ejercitación de procedimientos.

A continuación se presentaron las definiciones y explicaciones de cada uno de los procesos generales correspondientes a los lineamientos curriculares para la educación matemática:

Procesos generales

La resolución y el planteamiento de problemas

Este proceso se destaca como un elemento de gran importancia para alcanzar niveles avanzados con el manejo y comprensión del conocimiento, lo cual induce a la aplicación e integración de conocimientos en situaciones que se pueden dar en cualquiera de los contextos citados para modelar y comprender el problema que conlleve a su resolución.

De esta manera también cobra importancia el trabajo del docente como individuo que planifica y permite establecer de manera consciente una relación entre los diferentes conocimientos a través de una situación problema, además la resolución de problemas incluye no solo los conocimientos matemáticos del estudiante sino también sus concepciones y sus conocimientos de otras áreas que incluye también los medios simbólicos y representaciones que se necesitan para replantear el problema en términos más manejables.

Esto hace que su implementación propicie a que se integren otros procesos como la modelación y el razonamiento que son características propias de la resolución de problemas.

El razonamiento

La propuesta que hace el MEN a cerca de este proceso sugiere que la educación matemática implique de forma permanente el desarrollo de procesos de razonamiento acordes al nivel educativo del estudiante así como a su edad, el razonamiento como proceso intelectual que solo puede llevar a cabo el individuo sobre sus conocimientos o sobre una situación conduce a la comprensión y apropiación del conocimiento que posteriormente podrá utilizar de forma dinámica integrándola con otros conocimientos y aplicándola en situaciones diversas.
El trabajo permanente con este tipo de proceso permiten desarrollar niveles avanzados de

razonamiento que a la vez se traduce en el hábito de tratar de justificar y explicitar el funcionamiento de los conocimientos, guiado por una estructura conceptual y la habilidad para el desarrollo de formas más elaboradas.

En el razonamiento matemático es necesario tener en cuenta de una parte, la edad de los estudiantes y su nivel de desarrollo y, de otra, que cada logro alcanzado en un conjunto de grados se retoma y amplía en los conjuntos de grados siguientes. Así mismo, se debe partir de los niveles informales del razonamiento en los conjuntos de grados inferiores, hasta llegar a niveles más elaborados del razonamiento, en los conjuntos de grados superiores. (MEN, 1998, p. 54)

La comunicación

Sobre este proceso se destaco el papel que juega la comunicación en el desarrollo del conocimiento y para enseñarlo a sus semejantes, de igual manera se reconoce que el uso y la habilidad que posea el estudiante para comunicarse contribuye a mejorar su capacidad de aprender y de expresarse, por lo cual se pide que este recurso tan fundamental para el ser humano sea mejor valorado como proceso educativo para establecer medios que lleven al docente a escuchar, entender y actuar de forma apropiada de acuerdo a las concepciones que muestre el estudiante, también que se faciliten espacios en los que los estudiantes puedan exponer sus conocimientos que deben ser valorados como tal teniendo en cuenta que estos son influenciados de igual forma por el entorno social al que pertenece el estudiante.

La comunicación juega un papel fundamental, al ayudar a los niños a construir los vínculos entre sus nociones informales e intuitivas y el lenguaje abstracto y simbólico de las matemáticas; cumple también una función clave como ayuda para que los alumnos tracen importantes conexiones entre las representaciones físicas, pictóricas, gráficas, simbólicas, verbales y mentales de las ideas matemáticas. Cuando los niños ven que una representación, como puede serlo una ecuación, es capaz de describir muchas situaciones distintas, empiezan a comprender la potencia de las matemáticas; cuando se dan cuenta de que hay formas de representar un problema que son más útiles que otras, empiezan a comprender la flexibilidad y la utilidad de las matemáticas.(MEN, 1998, p. 74)

La modelación

La modelación como se ha venido viendo está integrada a otros procesos tan importantes como la resolución de problemas y al razonamiento que a la vez constituyen este proceso, esto hace que la modelación sea un proceso de gran importancia en la educación matemática y no menos exigente su ejecución que parte de una situación problemática cuyos datos no develan cómo proceder para ser resuelta, esto le da sentido al proceso ya que es aquí donde el estudiante pone en juego sus conocimientos y la destreza para utilizarlos en las diferentes representaciones para crear un modelo matemático que dé cuenta de la situación para ser resuelta matemáticamente.

El éxito de modelar una situación matemáticamente y poderla resolver da cuenta de que el estudiante se ha apropiado del conocimiento y ha creado herramientas valiosas para ver cómo es el funcionamiento del conocimiento en situaciones diferentes. Cuando se habla de la actividad matemática en la escuela se destaca que el alumno aprende matemáticas "haciendo matemáticas", lo que supone como esencial la resolución de problemas de la vida diaria, lo que implica que desde el principio se integren al currículo una variedad de problemas relacionados con el contexto de los estudiantes.(MEN, 1998, p. 76)

La elaboración, comparación y ejercitación de procedimientos

Así como son importantes los procesos anteriormente mencionados estos deben ir de la mano de este proceso que establece las primeras herramientas con las cuales ir entretejiendo y fortaleciendo el conocimiento, el uso apropiado de procedimientos y de técnicas que hacen parte del concepto son las que permiten los procesos de resolución y a la vez validar la pertinencia de los algoritmos así como de la pertinencia de su solución con respecto a la situación a la que responde.

> Bajo el nombre de procedimientos se hace referencia a los conocimientos en cuanto a actuaciones, a las destrezas, estrategias, métodos, técnicas, usos y aplicaciones diversas, resaltando en el alumno la capacidad de enfocar y resolver las propias actuaciones de manera, cada vez, más hábil e independiente, más estratégica y eficaz, con prontitud, precisión y exactitud. (MEN, 1998, p. 81).

2.2.1.1. Los Estándares de Competencias en Matemáticas

El propósito de los estándares de competencias en matemáticas es establecer los niveles de conocimientos que deben tener los estudiantes de acuerdo al grado en que se encuentre (que van desde el grado primero hasta el grado once, asociados en niveles), los cuales se clasifican de acuerdo a los cinco tipos de pensamientos que a la vez incluyen los procesos y contextos.

La creación de los *estándares de competencias en matemáticas* responden a tres factores que son: la necesidad de una educación básica de calidad para todos los ciudadanos, el valor social ampliado de la formación matemática y el papel de las matemáticas en la consolidación de los valores democráticos.

Es así como se considera la noción de *competencia matemática* como indicador de la formación en matemáticas, definida como un conjunto de conocimientos, habilidades, actitudes, comprensiones y disposiciones cognitivas, socio afectivas y psicomotoras apropiadamente relacionadas entre sí para facilitar el desempeño flexible, eficaz y con sentido de una actividad en contextos relativamente nuevos y retadores.

Con base en lo anterior el aprendizaje de las matemáticas cobra un nuevo sentido ya que no se puede valorar el avance o progreso del estudiante de forma inmediata, sino que tal valoración debe entenderse como la posibilidad de determinar el nivel de desarrollo de cada competencia, en progresivo crecimiento y en forma relativa a los contextos institucionales en donde se desarrolla, de otro lado el crecimiento o desarrollo de las competencias en matemáticas se obtienen por medio de ambientes de aprendizaje que así lo permitan, en el documento de los estándares se cita que deben ser situaciones problema significativas y comprensivas, que posibiliten avanzar a niveles de competencia más y más complejos.

En los estándares de competencias en matemáticas se habla de la inclusión de los conocimientos informales de los estudiantes como recurso para la formación con sentido de los saberes matemáticos, es decir que no se deben desechar lo que el estudiante ya sabe sobre el tema de las matemáticas que se va a iniciar (formal o informalmente), pues estos elementos son de gran importancia ya que su consideración permiten fomentar en el estudiante actitudes de aprecio, seguridad y confianza hacia las matemáticas. Esto quiere decir que el trabajo educativo requiere de un largo proceso que estructure situaciones de aprendizaje orientadas al aprendizaje de las competencias matemáticas en diferentes contextos y que estas situaciones integren los conocimientos básicos y promuevan el desarrollo de los diferentes procesos citados en los lineamientos curriculares.

De otro lado se referenció los procesos de evaluación formativa desde esta propuesta curricular, estos procesos implican la observación atenta y paciente como herramienta necesaria para obtener información sobre la interacción entre estudiantes, entre éstos y los materiales y recursos didácticos y sobre los procesos generales de la actividad matemática tanto individual como grupal. Para obtener información de calidad sobre las actividades de los estudiantes fue necesario precisar los criterios de referencia acordes con lo que se cree es el nivel exigible de la actividad matemática del estudiante en el conjunto de grados al que pertenece. De esta forma los fines de la educación matemática quedan mucho más claros en sus planteamientos y los medios para obtenerlos. Los estándares se distribuyen en cinco conjuntos de grados (primero a tercero, cuarto a quinto, sexto a séptimo, octavo a noveno y décimo a undécimo) para dar mayor flexibilidad a la distribución de las actividades dentro del tiempo escolar y para apoyar al docente en la organización de ambientes y situaciones de aprendizaje significativo y comprensivo que estimulen a los estudiantes a superar a lo largo de dichos grados los niveles de competencia respectivos y, a ir mucho más allá de lo especificado en los estándares de ese conjunto de grados.

El conjunto de estándares debe entenderse en términos de procesos de desarrollo de competencias que se da de forma gradual e integradamente, con el fin de ir superando los niveles de complejidad creciente en el desarrollo de las competencias matemáticas a lo largo del proceso educativo.

La complejidad conceptual y la gradualidad del aprendizaje de las matemáticas a las que ya se hizo mención exigen en los estándares una alta coherencia tanto vertical como horizontal. La primera está dada por la relación de un estándar con los demás estándares del mismo pensamiento en los otros conjuntos de grados. La segunda está dada por la relación que tiene un estándar determinado con los estándares de los demás pensamientos dentro del mismo conjunto de grados.

En la Tabla 1, se presentaron algunos de los estándares relacionados con el estudio de la función y en particular con la función cuadrática en el nivel de octavo a noveno grado. La relación de la función cuadrática se da en primer lugar con el pensamiento variacional, sin embargo la coherencia horizontal, vínculos con los estándares de otros pensamientos, depende del tipo de tareas que se propongan en los textos escolares.

Se estableció de forma general algunos de los aspectos de cada uno de los pensamientos que conllevan a una coherencia horizontal con respecto al estudio de la función cuadrática.

Con respecto al pensamiento espacial y métrico se destaco los aportes al concepto de función cuadrática y ecuación cuadrática que generan tipos de situaciones referidos a la medición de áreas y perímetros de figuras bidimensionales, esto a la vez facilito la representación y manipulación de la información en contextos de la vida que se refieren a la medición, como en la agrimensura y en la construcción, en estos contextos se integra la ecuación cuadrática para determinar las longitudes de los lados de las figuras.

Con respecto al pensamiento variacional y el pensamiento numérico el planteamiento y resolución de las ecuaciones promueven la aplicación de las propiedades de los números reales, esto conllevo a un mayor nivel de manejo del concepto en el que se reconozcan y utilicen los números para establecer relaciones de tipo algebraico. De igual manera, el desarrollo de este pensamiento llevó consigo el desarrollo de la noción de variación y cambio a través de las situaciones que tratan los conceptos de incógnita, variable y relaciones de dependencia de una magnitud o situación con respecto a otra.

PENSAMIENTO NUMÉRICO Y SISTEMAS NUMÉRICOS	PENSAMIENTO ESPACIAL Y SISTEMAS GEOMÉTRICOS	PENSAMIENTO MÉTRICO Y SISTEMAS DE MEDIDAS	PENSAMIENTO VARIACIONAL Y SISTEMAS ALGEBRAICOS Y ANALÍTICOS
• Utilizo números reales en sus diferentes representaciones y en diversos contextos. • Resuelvo problemas y simplifico cálculos usando propiedades y relaciones de los números reales y de las relaciones y operaciones entre ellos. • Identifico y utilizo la potenciación, la radicación y la logaritmación para representar situaciones matemáticas y no matemáticas y para resolver problemas.	• Conjeturo y verifico propiedades de congruencias y semejanzas entre figuras bidimensionales y entre objetos tridimensionales en la solución de problemas. • Uso representaciones geométricas para resolver y formular problemas en las matemáticas y en otras disciplinas.	• Generalizo procedimientos de cálculo válidos para encontrar el área de regiones planas y el volumen de sólidos.	• Identifico relaciones entre propiedades de las gráficas y propiedades de las ecuaciones algebraicas. • Construyo expresiones algebraicas equivalentes a una expresión algebraica dada. • Modelo situaciones de variación con funciones polinómicas. • Identifico la relación entre los cambios en los parámetros de la representación algebraica de una familia de funciones y los cambios en las gráficas que las representan.

Tabla 1. Algunos Estándares Básicos de Competencias en Matemáticas para el grado noveno que se pueden relacionar con la Función cuadrática.

2.2.1.2. El Pensamiento Variacional

Dado que el pensamiento variacional es el que directamente se vincula con la función cuadrática, se consideró necesario ampliar un poco más lo que se propone en el MEN para su desarrollo, dado que se busca mirar la coherencia curricular en las praxeologías didácticas propuestas en los textos escolares seleccionados.

El pensamiento variacional, como su nombre lo indica, pone su acento en el estudio sistemático de la noción de variación y cambio en diferentes contextos: en las ciencias naturales y experimentales, en la vida cotidiana y en las matemáticas mismas. Desde lo matemático hay una relación directa con los otros pensamientos, muy especialmente métrico pues el pensamiento variacional se encarga, fundamentalmente, de la modelación matemática y esto requiere de la activación constante de procesos de medición, elaboración de registros y establecimiento de relaciones entre cantidades de magnitud (MEN, 1998)

Es así como la comprensión de las situaciones provenientes de la observación y la sistematización de patrones y regularidades, tanto numéricas como geométricas, las variaciones proporcionales, las ciencias experimentales, la ingeniería y demás áreas del conocimiento que se basen en los principios de cálculo diferencial, adquieren más sentido cuando se estructuran desde el pensamiento variacional (Universidad de Antioquia, 2007, p. 15).

> El pensamiento variacional puede describirse como una manera de pensar dinámica que intenta reproducir mentalmente sistemas que relacionan sus variables internas, de tal manera que covaríen en forma semejante a los patrones de covariación de cantidades de las mismas o distintas magnitudes en los subprocesos recortados de la realidad. (Vasco, 2002, p. 70)

El MEN (1998) mostro que el desarrollo del pensamiento variacional debe iniciarse desde los primeros años de escolaridad a través de situaciones problemáticas cuyos escenarios sean los referidos a fenómenos de variación y cambio, cuyo interés se enfatice a que sean situaciones de la vida práctica buscando propiciar la implementación de estos procesos por parte de los estudiantes y tratar de que los reconozcan, se familiaricen con ellos y le faciliten la comprensión de los conceptos matemáticos.

Por tanto, el MEN (1998) delega al profesor una gran responsabilidad, ya que le encarga el estudio de los diversos aspectos que intervienen en el aprendizaje del estudiante como lo es el aspecto sociocultural, espacio que le ofrece unas herramientas al individuo desde las cuales él puede abordar o interpretar todo lo que pueda influenciar su formación, el docente debe tenerlo en cuenta y tratar de potenciar este aprendizaje mediante el diseño e implementación de situaciones amplias y diversas que vayan orientadas a que los alumnos puedan establecer relaciones con su accionar cotidiano y sus experiencias escolares. Con esto se hizo evidente que el futuro maestro que vaya a desempeñar la labor de enseñar las matemáticas debe vigilar que su práctica sea coherente con la propuesta del MEN (considerando básicamente el funcionamiento en el ámbito escolar).

Por lo tanto, surge la necesidad de considerar el caso del texto escolar, ya que como se mencionó éste tiene una función educativa ayudando al estudiante a acercarse al conocimiento matemático. Sin embargo este acercamiento al conocimiento que pretende el texto no es fácil de lograr, debido a consideraciones que se destacan en la propuesta del MEN. El texto escolar no siempre tiene presente los aspectos socioculturales que caracterizan a cada individuo por ser un objeto comercial que depende de su aceptación masiva. También se puede presentar el caso de que la propuesta del texto escolar no considere que los procesos de enseñanza estén encaminados al desarrollo de competencias básicas en Matemáticas.

2.3. ASPECTOS MATEMÁTICOS E HISTÓRICOS ACERCA DEL CONCEPTO DE FUNCIÓN Y FUNCIÓN CUADRÁTICA

2.3.1. ESTRUCTURA MATEMÁTICA DE LA FUNCIÓN CUADRÁTICA

A continuación se presentó la teoría correspondiente al objeto matemático de función, en particular el de función cuadrática, seleccionados para este análisis de textos escolares. Esta teoría matemática fue tomada de los textos universitarios de Zill y Dewar (1992) y Stewart, Redlin y Watson (2007)

En primera instancia se presenta la Tabla 2 donde se encontraron algunos conceptos pertenecientes a la ecuación cuadrática, dentro de este esquema se observo términos como: raíces de un polinomio de grado *n*, tipos de raíces de la ecuación cuadráticas, fórmula cuadrática, entre otros., es importante mencionar que solo se mencionan ***definiciones*** y ***teoremas*** que posteriormente fueron utilizados en el análisis de los textos. Por otra parte se presento un mapa conceptual en la Figura 2 en cual se ven reflejado las definiciones y teoremas pertenecientes a los términos de función y función cuadrática, en este se observo conceptos como: función, función polinómica, función cuadrática, entre otras., que también se tuvo en cuenta al momento de realizar el análisis de los textos escolares. Es importante mencionar que algunas definiciones y teoremas se presentaron por fuera de los dos esquemas anteriores ya que por razones de uso y consecuencia entre los conceptos podrían causar algún tipo de abertura entre ellos.

Tabla 2. Estructura conceptual respecto a la ecuación cuadrática.

Ecuación Cuadrática (definición)	Una ecuación cuadrática es una ecuación de la forma $ax^2 + bx + c = o$ en donde $a, b\ y\ c$ son números reales y $a \neq 0$.
Raíces de un polinomio de grado n (n>0) (teorema)	Si *f*(*x*) es un polinomio de grado *n*>*o*, y si la raíz de multiplicidad *m* se considera *m* veces, entonces *f(x)* tiene precisamente *n* raíces.
Tipos de raíces de la ecuación cuadrática (Discriminante) (Teorema)	(i) Si $b^2 - 4ac > 0$, la ecuación cuadrática tiene dos raíces reales diferentes. (ii) Si $b^2 - 4ac = 0$, la ecuación cuadrática tiene raíces reales iguales. (iii)Si $b^2 - 4ac < 0$, la ecuación cuadrática no tiene raíces reales.
Solución de la ecuación cuadrática por la formula cuadrática (Teorema)	Las raíces de la ecuación cuadrática $ax^2 + bx + c = 0$, donde $a \neq 0$, son: $$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$
Producto nulo (Teorema)	Sí *a* y *b* representan números reales y $a.b = 0$, entonces $a = 0\ o\ b = 0$.
Teorema del factor (Teorema)	Un número *c* es una raíz de un polinomio $f(x)$ si y solo sí $x - c$ es un factor de $f(x)$.

ESTRUCTURA CONCEPTUAL RESPECTO A LA FUNCIÓN CUADRÁTICA

Función

(Definición): Una función f de un conjunto D a un conjunto E es una correspondencia que asigna a cada elemento x de D un único elemento y de E.

Función polinómica

(Definición): Sí $f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$ en donde los coeficientes $a_0, a_1, \ldots, a_n$ son números reales y los exponentes son enteros no negativos.

Función cuadrática

(Definición): Una función f es una función cuadrática si $f(x) = ax^2 + bx + c$ en donde a, b y c son números reales y $a \neq 0$.

Grafica de una función cuadrática

(Definición): La grafica de una función cuadrática de la forma si $f(x) = ax^2 + bx + c$ con $a \neq 0$ es una parábola.

Vértice de la parábola

(Teorema): El vértice de la parábola si $f(x) = ax^2 + bx + c$ está en el punto $\left(\frac{-b}{2a}, \frac{4ac-b^2}{2a}\right)$.

Concavidad de la parábola

(Definición):

Si $a > 0$, la parábola es cóncava hacia arriba.

Si $a < 0$, la parábola es cóncava hacia abajo.

Interceptos con los ejes

El intercepto en y para $f(x) = x^2$ es el valor $f(0) = c$. Si la grafica tiene interceptos en x se debe hallar cualquier raíz real de $f(x)$. Esto es $f(x) = 0$ ó $ax^2 + bx + c = 0$.

Figura 2. Estructura conceptual respecto a la función cuadrática.

Teorema del valor máximo o mínimo de una función cuadrática)

El valor máximo o mínimo de una función cuadrática *f(x)* ocurre en $x = \frac{-b}{2a}$.

Si *a>0*, entonces el valor mínimo es $f\left(\frac{-b}{2a}\right)$.

Si *a<0*, entonces el valor máximo es $f\left(\frac{-b}{2a}\right)$.

Teorema de simetría

Para graficar *y = - f(x)*, refleje la gráfica de *y = f(x)* en el eje *x*.

Para graficar *y = f (-x)*, refleje la gráfica de *y = f(x)* en el eje *y*.

Teorema de desplazamiento horizontal y vertical de una gráfica

Suponga que *c>0*.

Para graficar *y = f(x) + c*, desplace *c* unidades hacia arriba la gráfica de *y = f(x)*.

Para graficar *y = f(x) – c*, desplace *c* unidades hacia abajo la gráfica de *y = f(x)*.

Para graficar *y = f(x – c)*, desplace la gráfica de *y = f(x)* a la derecha *c* unidades.

Para graficar *y = f(x + c)*, desplace la gráfica de *y = f(x)* a la izquierda *c* unidades.

Además de la teoría alrededor de las funciones y ecuaciones cuadráticas, se dan algunas relaciones con definiciones como perímetro y área en problemas en contextos métricos, así mismo se retoman todas las propiedades de los números reales, dado que las funciones son de $\mathbb{R}$ en$\mathbb{R}$. En la Tabla 2 se menciona solamente un teorema de los números reales, el producto nulo.

En el estudio de la función cuadrática es necesario hallar los valores del dominio que satisfacen un valor de la imagen, por lo que se estudian las ecuaciones. En las funciones cuadráticas algunas imágenes son de mayor relevancia para realizar la parábola, como lo son sus ceros (raíces) y el vértice, en dicho proceso se resuelve una ecuación cuadrática. En la construcción de los saberes matemáticos, el estudio de las ecuaciones y las funciones se dieron separadamente. Sin embargo en la actualidad el estudio de la función lleva a mirar la ecuación cuadrática. En este trabajo se realiza un recorrido histórico que devela el proceso de construcción, oculto en el proceso de transposición didáctica.

Aunque el recorrido histórico no está presente en el análisis de textos escolares propuesto, tenerlo en cuenta muestro el proceso vivido en la historia. Por otra parte es importante para develar si los autores consideraron algunos problemas clásicos, reseñas u organización en el texto escolar.

2.3.2. DESARROLLO HISTORICO DEL CONCEPTO DE FUNCIÓN

Con la realización del recorrido histórico del concepto de función se busco destacar los aspectos sociales y culturales que en cada época o momento produjeron avances significativos para su constitución. Se tuvo en cuenta que los aspectos históricos permiten:

- Observar el proceso de construcción del concepto de función en la historia.
- Conocer los problemas que derivaron en el origen del concepto de función.
- Determinar los saberes matemáticos que circulan en la escuela.

De esta manera se dará paso a mostrar diferentes concepciones que a lo largo de los tiempos y relevantes autores fueron descubriendo, interpretando, implementando y lo más importante en este análisis de textos escolares dando las pautas para lo que hoy se determina como un saber matemático escolar.

Al llevar a cabo un repaso sobre algunas de las investigaciones que tratan la evolución histórica del concepto de función se observo en ellas la siguiente recomendación dirigida a los educadores de matemáticas, se les pide que reconozcan y sean conscientes de la importancia que cumple el aspecto histórico del concepto como factor determinante en el proceso educativo a lo largo de los distintos niveles de enseñanza. Esto se debe a que el descubrimiento y desarrollo del concepto de función a través de la historia, así como el de otros conceptos que han sido de gran interés para el ser humano se ven influenciados por los intereses y concepciones culturales que pueden ir desde las creencias y concepciones de índole religioso hasta propósitos utilitarios del entorno que conllevan a determinar los elementos para el estudio de estos conceptos y por ende el alcance de estos estudios.

La evolución histórica del concepto de función está determinada por estadios de desarrollo que suceden en épocas y culturas distintas, en este breve análisis se destacan aquellos en los que suceden los problemas más significativos para su formación y que han determinado su alcance, por lo cual y de acuerdo al trabajo realizado por Ruíz (1998) se establecen las diferentes etapas en las que se dieron estos aportes y que caracterizó su estudio.

La antigüedad: hacia una búsqueda de regularidades

En esta etapa que considera los primeros aportes en el desarrollo del concepto de función se involucran la cultura Babilónica y la cultura Griega, en ellas el estudio e interés por esta noción sucede en los individuos que poseen cierto grado de conocimiento en las matemáticas y en otras áreas de estudio como las astronomía y la filosofía.

Su estudio hacia esta noción se lleva a cabo a través de distintos casos en los que se evidencian dependencias entre cantidades de diferentes magnitudes, sin embargo se dice que no se llegaron a aislar las nociones generales de cantidad variable y de función.

La civilización Babilónica corresponde al periodo de tiempo que se sitúa entre (2000 A.C. – 600 A.C.), se originan los primeros aportes a la noción de función gracias al trabajo realizado en el área de la astronomía, el interés de esta cultura por los fenómenos y acontecimientos astronómicos se estudian realizando cálculos que pudieran medir, interpretar y relacionar el comportamiento de los objetos que se observaban en el firmamento, para esto realizaron observaciones sistemáticas de diversos fenómenos que se repetían periódicamente, tratando de enlazarlos a través de relaciones aritméticas. En este sentido, las tablillas del período seleucida[3] muestran algunas de estas relaciones, como los períodos de visibilidad de un planeta y el ángulo que este forma con el sol.
La forma en que realizaban tales estudios se llevaba a cabo en tablas dispuestas en dos columnas, de forma similar a las que se utilizan actualmente para graficar cualquier función

[3]El periodo seleucida se denomina de esa manera porque fue un estado de la Antigüedad, creado en los años posteriores a la muerte de Alejandro Magno, fundado por Seleuco I Nicátor, tras la derrota y muerte del general Antígono Monóftalmos. Durante un periodo de guerras y conflictos entre los diáconos, quienes lucharon por preservar algunas porciones del gran imperio.

f(x). A través de esta disposición se buscaba establecer regularidades entre los valores de una misma columna, así como entre una y otra columna, sin embargo no se puede asegurar que con esto los babilonios llegaran a expresar sus resultados de forma general.

En la cultura Griega surgieron nuevos aportes a la noción de función, los cuales se deben a que la filosofía Aristotélica estaba consagrada al estudio de cuestiones referidas al movimiento, la continuidad y el infinito. De igual forma el pensamiento griego había heredado el conocimiento que sobre estos aspectos se tenían desde la época de Heráclito y de Zenón, lo que permitía que las ideas de cambio y de cantidad fueran conocidas y estudiadas en este periodo de tiempo.

Sin embargo así como se propiciaban herramientas en beneficio de consolidar una noción más elaborada alrededor de la funcionalidad, también se presentaron obstáculos para su desarrollo que son originados en las concepciones y en el pensamiento griego que surgen al considerar que el cambio y el movimiento eran aspectos que estaban por fuera de las matemáticas, o mejor aún, que la concepción de "variabilidad" era una característica propia de las magnitudes físicas, ajenas a la matemática que se caracteriza como ciencia estrictamente teórica que estudia los objetos fijos y sus relaciones.

Edad Media: Representación cinemática y geométrica de las relaciones funcionales

Para esa época en el continente europeo cobra interés el estudio de la lógica de Aristóteles y la matemática griega y árabe, a la vez que influyen en el pensamiento de las nuevas escuelas por querer encontrar explicación racional a los fenómenos naturales, por esto y con relación al pensamiento griego consagrarían a la matemática como la ciencia racional por excelencia que permitiría alcanzar el descubrimiento de lo real, lo verdadero que solo se podía acceder por medio de la razón.

Sin embargo tal propósito implicaba resolver obstáculos como los fenómenos sujetos al cambio y a los movimientos presentes en la naturaleza, por lo cual, concentrarían todo su interés en entender y dar razón desde la matemática a este tipo de hechos que implicaba buscar respuestas a estas y otras cuestiones en las ideas de Aristóteles y Platón por ser precursores en esta ideología, sin embargo se hace claridad sobre las consideraciones de cada uno de estos dos pensadores que llevarían más adelante a asumir una de estas dos concepciones en detrimento de la otra.

> Mientras que para Platón las matemáticas podían servir para definir la causa, para Aristóteles, Física y matemática eran bien distintas – las matemáticas eran la ciencia de la cantidad abstracta – y, las causas del cambio según él, había que buscarlas en las cosas materiales (Ruíz, 1998, p. 111).

El propósito de dar explicación racional a los fenómenos naturales a partir de la matemática hace que esta ciencia ocupe un lugar importante en las ciencias naturales y por ende cada vez más se vaya poniendo en duda la concepción de Aristóteles por separar la matemática de las ciencias físicas, también que se destaque el tratamiento de la matemática en el campo que se creía estaba en el dominio de la física.

Siglos XV y XVI: el desarrollo de la notación algebraica.

En este periodo de tiempo según los investigadores no se obtuvieron descubrimientos significativos en el ámbito matemático, pero hubo un perfeccionamiento en el simbolismo algebraico que contribuye a establecer el término de lo que actualmente se denomina “variable” en un sentido funcional o “incógnita” en una ecuación, y también a la formación definitiva de la trigonometría como una rama particular de la matemática a través del estudio de las funciones trigonométricas. Estas dos direcciones de estudio contribuirán a enriquecer las bases para consolidar la noción de función y los conocimientos para realizar un estudio más fuerte en este sentido.

De otro lado el concepto de función obtiene aportes de Galileo quien se interesa por el estudio de los fenómenos naturales relacionados al movimiento, que habían interesado a los matemáticos de la edad media pero esta vez a través de la experimentación. Aprovechando los nuevos instrumentos que servían para realizar mediciones centra su estudio en la velocidad, la aceleración y la distancia que obtiene de diferentes relaciones entre ellas y mediante reglas inspiradas por la experimentación y la observación.

A través de estas leyes vuelve a ley de las proporciones: *si dos cuerpos están en movimiento uniforme entonces la razón de sus velocidades es igual a la razón de las trayectorias y a la razón inversa de sus tiempos*.

El trabajo de Galileo se dice que profundiza en la concepción de la funcionalidad ya que estas relaciones de magnitudes surgen de un trabajo cuantitativo, que es resultado de la experimentación, lo cual devela cómo se dá esta relación entre las magnitudes involucradas.

Para esta época se iría concretando una idea más elaborada de función definida por una correspondencia entre la variable dependiente e independiente.

Siglo XVII: Introducción de la representación analítica.

Durante este periodo de tiempo se destacan diversos progresos en la matemática que favorece el desarrollo del concepto de función, lo cual sucede gracias a la creación del álgebra simbólica – literal, la extensión del concepto de número (reales, imaginarios y complejos), y el crecimiento de los cálculos matemáticos.

El crecimiento de la matemática crea las condiciones para que Descartes y Fermat contribuyan con sus trabajos a la construcción de la geometría analítica como un método para expresar las relaciones numéricas de las dimensiones, formas y propiedades de los objetos geométricos, utilizando esencialmente el método de coordenadas. Esto se debe a la posibilidad de definir las figuras planas como las rectas, los círculos y las cónicas a través de ecuaciones, lo que condujo el interés de los matemáticos por el estudio de las curvas con ecuaciones de este tipo.

El interés que orienta el trabajo de Descartes lleva al desarrollo de herramientas que beneficiaran grandemente al concepto de función como lo es el método de coordenadas, pues a Descartes no le interesaba tanto el estudio del concepto de función, ni la relación de dependencia entre dos variables sino el estudio de ciertas figuras planas así como de las propiedades obtenidas de la relación entre los elementos que la componen.

Una de las concepciones más significativas que aporta Descartes en sus trabajos sobre geometría analítica y en la matemática consiste en la idea de *variable*, la cual se aborda desde una forma muy diferente a como la habían pensado y manejado los matemáticos griegos.

> Para Descartes, x^2 no sugería un área, sino más bien el cuarto término de la proporción $1: x = x: x^2$ y, como tal puede representarse por un segmento de recta que se construye fácilmente cuando se conoce *x*. Utilizando un segmento unidad se puede, de esta forma, representar cualquier potencia de una variable por un segmento de recta, pudiéndose construir este segmento con herramientas euclidianas (Ruíz, 1998, p. 119).

De acuerdo a esta idea Descartes utiliza un gráfico para establecer los datos y encontrar las relaciones entre estos. Según las investigaciones al respecto se dice que es aquí por primera vez donde aparece la idea de que una ecuación en *x* e *y* es un medio en el cual se introduce una dependencia entre dos cantidades variables, de forma que permite el cálculo de los valores de una de ellas correspondientes a los valores dados de la otra, todos estos conocimientos obtenidos consolidan y crean las herramientas para profundizar en el concepto de función.

Proceso de creación de las matemáticas variables

El interés por la experimentación y el análisis de los fenómenos físicos relacionados al movimiento conduce a la búsqueda de precisión en las medidas cuantitativas tales como el calor y la presión apoyadas en la invención de instrumentos científicos. Con estos estudios se pretenden elementos que respondan al problema sobre la relación entre el movimiento curvilíneo y las fuerzas que afectan al movimiento.

La posibilidad de los estudios que empezaran a desarrollar en este periodo de tiempo, así como del desarrollo del concepto de función se da gracias a la existencia del álgebra, la introducción en las matemáticas de la variable y del método de las coordenadas, son causados por los problemas de mecánica y los conocimientos que se tenían de la astronomía y la física. Estos estudios conducirán la formación del análisis infinitesimal.

Siglo XVIII: el concepto de función se considera central en las matemáticas.

Hasta el momento no había una noción clara que definiera la función, pero parte de esta estaba presente en el pensamiento e ideas que suceden desde la civilización griega con los trabajos enfocados en la búsqueda de regularidades al comparar datos numéricos que obtenían de sucesos celestes y en las culturas posteriores con el interés por definir matemáticamente los fenómenos naturales asociados al movimiento, esto se debe a que los obstáculos surgidos de las concepciones culturales y a la falta de elementos teóricos no permitieron que se destacara como centro de interés en esta evolución, pero ya en este periodo se consolidan y cobran sentido para la formación definitiva del concepto de función.

Los adelantos matemáticos consolidados desde la época de Descartes permiten un mayor enriquecimiento conceptual alrededor del concepto de función que a finales del siglo XVII con Leibniz y Bernoulli se va a concretar desde una forma analítica, la cual es descrita por primera vez por Bernoulli así:

> Llamamos función de una magnitud variable a una cantidad compuesta de cualquier manera que sea de esta magnitud variable y de constantes (Ruíz, 1998, p. 125).

Esta definición se encuentra claramente sujeta al análisis infinitesimal por ser el área que junto a la geometría analítica han propiciado en este momento su reconocimiento, sin embargo este concepto se irá desligando de su condición de forma gradual, gracias a la continuación que hace Euler del trabajo de Bernoulli, sobre el cual define las nociones iniciales como *constante* y *variable*, y en su definición de función cambia el término cantidad por *expresión analítica*.

> Una función de una cantidad variable es una **expresión analítica** compuesta de cualquier forma que sea, de esta cantidad y de números o cantidades constantes (Ruíz, 1998, p. 126).

A partir de estas consideraciones comienza un estudio más profundo sobre el concepto de función para determinar su campo de acción, es decir los valores numéricos que se pueden asumir así como de las operaciones y el tipo de expresiones que conforman la función, con lo cual logra realizar una clasificación de los tipos de funciones, así logra la siguiente definición.

> Las funciones se dividen en algebraicas y trascendentes; las primeras están formadas por operaciones algebraicas solamente, y las últimas necesitan para su formación operaciones trascendentes. (…) Las funciones algebraicas se subdividen en racionales e irracionales. En las últimas la variable está afectada por radicales, y en las primeras no está afectada (...). Las funciones racionales, por último se dividen en enteras y fraccionarias. (Euler, Introducción al análisis de los infinitos, 1748) (Ruíz, 1998, p. 126)

De acuerdo a lo anterior la función obtiene por vez primera una expresión que la describe y le da vida en las matemáticas como objeto gracias al trabajo de Euler, quien a la vez determina el uso de la notación *f(x)* que caracteriza la expresión.

Los trabajos realizados por Euler en el campo de la matemática habían profundizado en el concepto de función gracias a los recursos teóricos desarrollados en la geometría analítica y en el análisis infinitesimal, esto conlleva a que la definición de función estuviera centrada en expresiones de tipo analítico, sin embargo esto no fue impedimento para que Euler pudiera llegar a considerar la necesidad de una definición más general de función. Esto se logra gracias a los trabajos de Euler sobre física – matemática en los que nuevamente la matemática obtiene aportes de otras disciplinas y específicamente del problema de las vibraciones infinitamente pequeñas de una cuerda finita, homogénea y fijada a sus dos extremidades.

Euler desarrolla una nueva definición de función como correspondencia arbitraria que dice lo siguiente:
Si ciertas cantidades dependen de otras cantidades de tal manera que si las otras cambian, estas cantidades cambian también, entonces tenemos la costumbre de nombrar estas cantidades funciones de estas últimas (Ruíz, 1998, p. 129).

Esto permite considerar dos definiciones para el concepto de función, la concepción formal de expresión analítica y la concepción más general de correspondencia arbitraria que conlleva a un problema de relación entre ambas que es resuelto a finales del siglo XIX.

El impacto de la continuidad en el progreso de la noción de función

El planteamiento del concepto de función, la clasificación y sus propiedades crean las condiciones para que los matemáticos se interesen por el estudio de estos nuevos objetos matemáticos y en especial en lo concerniente a los problemas relativos a la "**continuidad de las funciones**" que era un tema que aún no había sido abordado de manera profunda pero que se reconocía en su comportamiento en la función.

Se crea así la necesidad de ahondar en este aspecto ya que hasta el momento el tipo de funciones discontinuas o mixtas no eran tratadas tan ampliamente como las funciones continuas, lo cual representaba en la matemática un hecho limitante en el sentido de no poder ampliar su campo de estudio en situaciones que tuvieran por representación este aspecto y por otro lado significaba un atraso conceptual que afectaba grandemente a la matemática. Sin embargo este problema que se había hecho notorio en el enfoque analítico del cual había surgido demuestra que era necesario del segundo enfoque definido por Euler para su tratamiento.

Se hizo evidente que la noción de correspondencia funcional contenía mucho más de lo que implicaba la expresión analítica que, generalmente, la traducía. Vemos, pues, que la idea sobre la que se centraba la reflexión fue la de continuidad y, a través de ella, la noción de correspondencia funcional (Ruíz, 1998, p. 130).

La solución a este problema se confiere a Fourier quien en 1822 afirma que una serie trigonométrica puede ser utilizada para representar toda función mixta (o no continúa en el sentido de Euler), lo cual surge a raíz de un estudio más profundo sobre el problema de las cuerdas vibrantes que lo llevan a establecer que ciertas funciones no continuas pueden ser representadas por medio de una serie trigonométrica convergente de la forma:

$$\sum_{n=0} a_n \cos x + b_n \sin x$$

De acuerdo a esto se logra un avance significativo en la solución de este problema logrando establecer posteriormente y de manera formal que*: el desarrollo en serie trigonométrica permite representar una clase más general de funciones*, refiriéndose con esto no solo a las funciones mixtas sino también a otro tipo de funciones que permiten ser tratadas a través de este medio.

Siglo XIX: la idea de correspondencia arbitraria.

Una de las razones que han llevado al rápido desarrollo del concepto de función se debe a que cumple un carácter transversal y necesario para el estudio y desarrollo de áreas como el análisis que de igual manera exigen la formación de concepciones cada vez más generales del concepto de función que fundamenten los trabajos que allí se realicen. Esto se evidencia en los años posteriores a 1827, en los que se proponen nuevas concepciones referidas al concepto de función que consideran los fines analíticos, como por ejemplo la definición que al respecto ofrece Riemann en 1958: "se dirá que y es función de x si a todo valor bien determinado de x corresponde un valor bien determinado de y cualquiera que sea la forma de la relación que una a **x** y a **y**" (Desanti, 1976, p. 192, citado por Ruíz, 1998, p. 132)

Además de que el concepto toma un carácter cada vez general también se va desligando de consideraciones características de la función como las clases de funciones, así como de la exclusividad de la intuición geométrica para consolidarse en una concepción rigurosa totalmente aritmetizada. Así como con el concepto de función, las matemáticas comienzan a desligarse de la geometría para desarrollar sus propias herramientas teóricas que fundamenten sus conocimientos, de allí que el desarrollo del concepto de función considere este aspecto y en conjunto resultara en una teoría rigurosa del número real.

Siglo XX: el concepto de función como terna.

El concepto de función con respecto a la definición actual se logra establecer en el siglo XIX con Dirichlet, a partir de su definición se basan formalmente las actuales. Sin embargo las propuestas que se encuentran en las instituciones de investigación y educación en matemática no son necesariamente iguales, estas varían con el propósito de ofrecer niveles diferentes de precisión y formalidad de acuerdo al nivel en que se trabaja y a los fines que se busquen con su tratamiento.

Esto ha hecho que se establezcan “definiciones en las que permanece el carácter de correspondencia univoca (aplicación) y se mantenga explicita la idea de asignación entre variables; mientras que en otras, en un intento de mayor precisión y rigor, se introduzcan a través de la noción de grafo (pares de elementos relacionados” (Ruíz, 1998, p. 133).

De acuerdo a este aspecto los matemáticos tratan de pulir cada vez más el concepto de manera que se estructure en una terminología matemática y que a la vez pueda ser descrita de manera eficaz, con lo cual se modifica y se reemplaza por la siguiente:

Se llama función a la terna $f = (G, X, Y)$, en donde G, X, Y son conjuntos que verifican las condiciones siguientes:

1) $G \subset X\, x\, Y$

2) Para todo $x \in X$ existe un y solo un $y \in Y$, tal que $(x, y) \in G$, Ges la gráfica de la función *f*.

El único elemento y de Y tal que $(x, y) \in G$ se llama valor de la función de la función *f* en *x*, y se utiliza para designarlo $y = f(x)$. Es evidente entonces que la gráfica G es el conjunto de pares de la forma$(x, f(x)$donde $x \in X$, lo que está de acuerdo con la idea intuitiva de función.

$G \subset X$ .Se le denomina conjunto de partida de *f* y a *Y* conjunto de llegada de *f*.

(Godement, 1971, pp. 63-64 citado en Ruíz, 1998, p. 134)

En esta definición se preserva el carácter de relación binaria que a la vez se destaca en muchos otros libros de tipo universitario.

3. ANÁLISIS DE LOS TEXTOS ESCOLARES

3.1. REJILLAS Y METODOLOGÍA

En este capítulo se mostraron las fases o consideraciones que se siguieron para el desarrollo del análisis; primero se hizo el reconocimiento de los criterios y referentes teóricos que dieron pie a la selección de los textos escolares que fueron analizados, mencionando algunos aspectos importantes que originaron la realización del análisis a partir de una rejilla desde los análisis matemático y didáctico. Es necesario tener en cuenta que la estructuración de la rejilla de Análisis de Textos Escolares tuvo en cuenta algunos criterios de Obando (2008).

Buscando cumplir el objetivo de realizar un contraste del tratamiento que ofrece el texto escolar para el concepto de función cuadrática con respecto a las pautas que propone el currículo a partir de los estándares y lineamientos curriculares[4], se hizo la revisión del desarrollo histórico que presenta el concepto de función junto con aspectos que están asociados a él, como lo es la noción de variación y cambio, todo esto mediante los referentes que se mencionaron en el marco teórico.

También se utilizó la Teoría Antropológica de lo Didáctico y lo concerniente a las organizaciones matemáticas (puntuales y locales) para indagar por el grado de completitud de las Praxeologías Matemáticas de los textos escolares; de esta forma se realizó un análisis más a fondo de las diferentes apreciaciones que se tienen hasta el momento, con el fin de presentar argumentos para la composición de un análisis válido tanto en lo matemático desde los conceptos como en lo didáctico desde el saber transpuesto.

Teniendo en cuenta lo anterior y lo dicho en los referentes teóricos, (especialmente en el documento: Análisis de textos escolares de Matemáticas), se desarrollo la rejilla de análisis, la cual sirvió de guía al momento de analizar cada uno de los textos escolares seleccionados. La rejilla tuvo como elementos básicos y claves: la Teoría Antropológica de lo Didáctico y específicamente lo concerniente a las Praxeologías Matemáticas locales

4 Los estándares curriculares que se utilizaran para el análisis de los textos serán los propuestos por el MEN en 2006.

relativamente completas (PMLRC), los lineamientos curriculares (conocimientos básicos, procesos y contextos), y el desarrollo histórico y epistemológico del concepto de función; estos cuatro elementos conforman los referentes para el análisis de los textos escogidos del grado noveno (9°) de la educación básica.

Para la elaboración de la rejilla se consideró: el documento Análisis de textos escolares (Arbeláez et al, 1999), en el cual se especifican los criterios que se deben tener en cuenta para reconocer y evaluar, si es el caso, la calidad del texto escolar, la propuesta del MEN para la Educación Matemática específicamente lo referente al concepto de la función cuadrática en el grado octavo y noveno de la educación básica, y los criterios que se establecen en la TAD para determinar las Praxeologías Matemáticas (Tareas, Técnicas, Tecnologías, Teoría), y también los referentes que desde la misma línea didáctica permitieron indagar por el grado de completitud de las Praxeologías Matemáticas locales que aparecen en el texto escolar. Estos cuatro elementos permitieron la elaboración de las rejillas propuestas que giraran en torno a los estándares de evaluación matemática de los años 2003 para el texto Espiral 9 y 2006 para el texto Delta 9.

En las Figuras 3 y 4, se hace un resumen de la estructura de la rejilla de Análisis de Textos Escolares.

ESTRUCTURA DEL ANALISIS DEL TEXTO ESPIRAL 9°

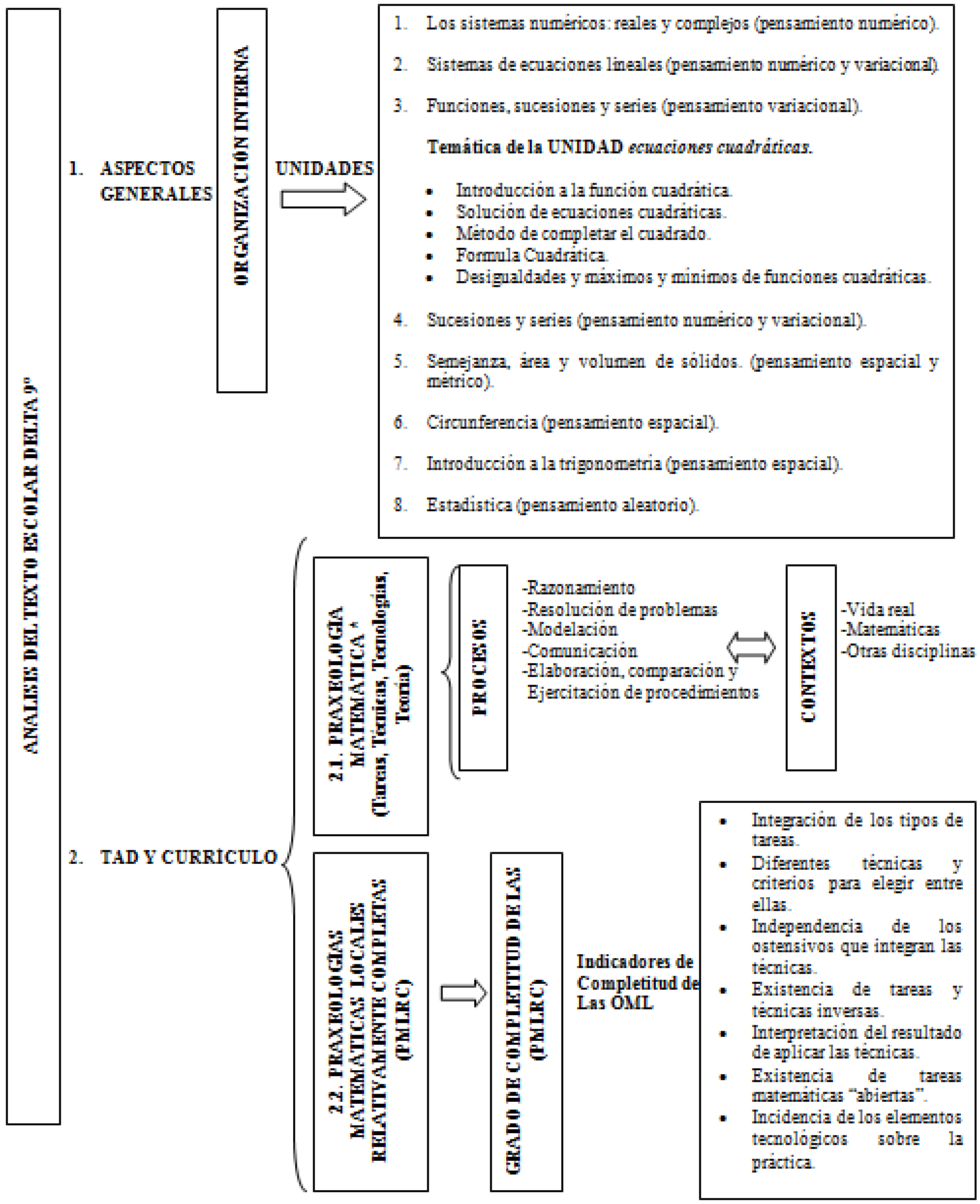


Figura 3. Estructura del análisis del texto escolar Espiral 9.

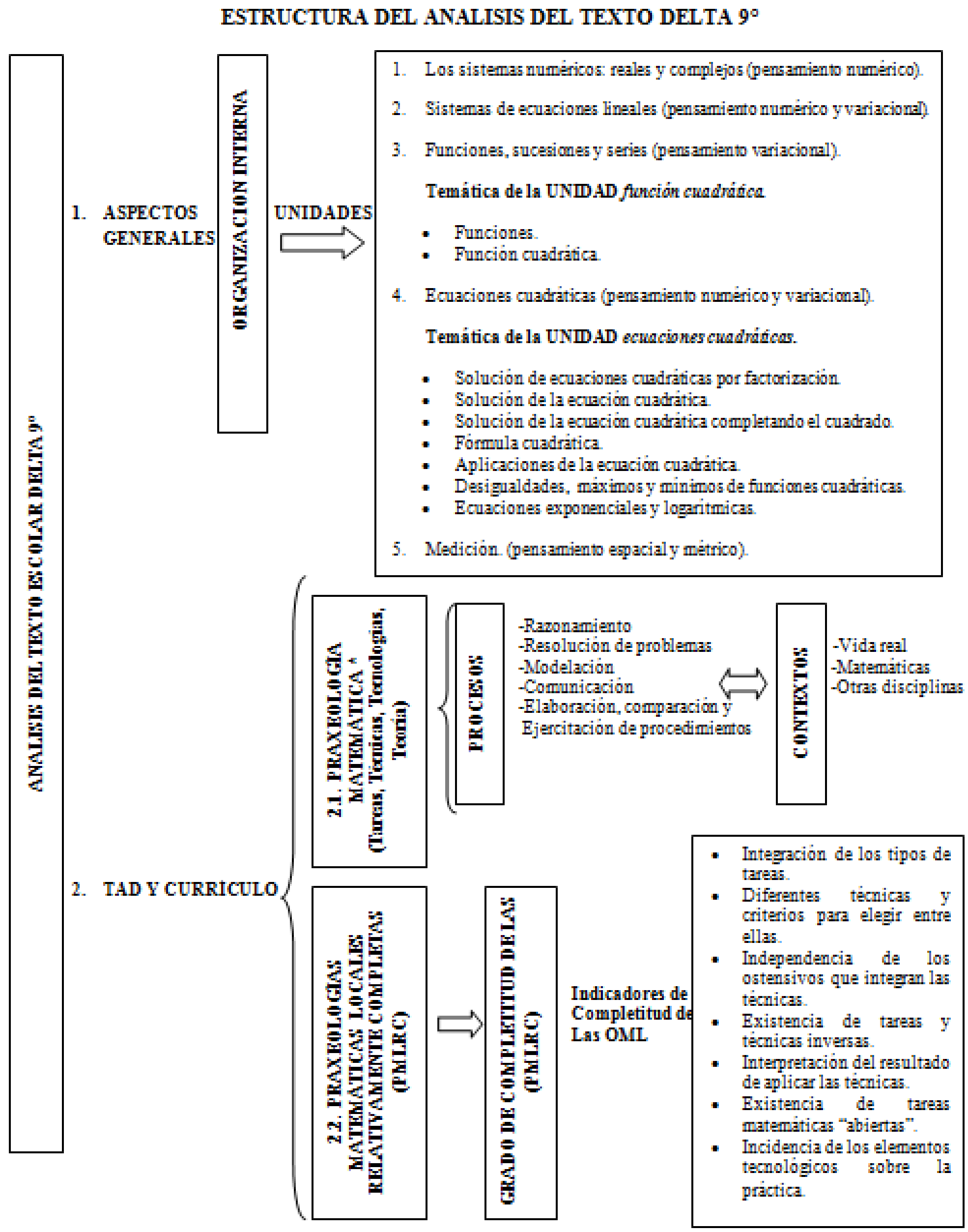


Figura 4. Estructura del análisis del texto Delta 9.

3.2. CRITERIOS DE SELECCIÓN DE LOS TEXTOS ESCOLARES

La selección de los textos escolares siguió los siguientes criterios:

1. Que la propuesta educativa evidencie la puesta en práctica de los referentes curriculares propuestos por el Ministerio de Educación Nacional (MEN), especialmente en lo que se refiere a los aspectos organizadores de los currículos de matemáticas en el país (conocimientos básicos, procesos y contextos) y el cumplimiento de los Estándares Básicos de Matemáticas para el grado y tema correspondiente, a razón de esto se optó por elegir los textos que se implementan en las instituciones en las cuales laboran los autores de este trabajo, los cuales cumplen las anteriores condiciones.

2. En el texto escolar debe aparecer de manera explícita que el contenido del mismo incluye los Estándares Básicos en Matemáticas propuestos por el MEN. Como ya se ha mencionado anteriormente se trabajo con dos textos escolares de grado noveno (9°) que manejan diferentes estándares, el primero es el texto Espiral 9 que maneja estándares de mayo de 2003 y el otro texto Delta 9 maneja estándares del 2006. Esta particularidad dará algunas pautas para la elaboración de las diferentes rejillas con las cuales se realizara el análisis; además la selección de estos dos textos con diferentes estándares curriculares permitió realizar una comparación.

3. Los textos deben incluir la función cuadrática en su contenido. Este criterio es relevante teniendo en cuenta que el análisis de textos escolares se centró en la propuesta educativa de este concepto.

4. Que en su organización se evidencien los componentes del currículo de matemáticas propuestos por los lineamientos curriculares de Matemáticas (por ejemplo ver Figura 5).

PRAXEOLOGÍAS MATEMÁTICAS DE LA UNIDAD 3[5] DEL LIBRO ESPIRAL 9
(Ecuación cuadrática)

Propician la integración y estudio de los siguientes aspectos

CONOCIMIENTOS BASICOS

Pensamiento variacional:
-Identificar relaciones entre propiedades de las graficas y propiedades de las ecuaciones algebraicas.
-Identificar relaciones entre propiedades graficas y propiedades algebraicas.
-Analizar en representaciones graficas el comportamiento de funciones cuadráticas.

Pensamiento numérico:
-Utilizar números reales en sus diferentes representaciones, en diversos contextos.
-Solucionar ecuaciones cuadráticas por diversos métodos.

PROCESOS

Comunicación:
-Explicar relaciones entre las graficas de funciones cuadráticas y la solución de ecuaciones cuadráticas.
-Encontrar soluciones de ecuaciones cuadráticas por medio de la grafica de la función cuadrática.

Razonamiento lógico:
-Clasificar las soluciones de una ecuación cuadrática a partir del discriminante.
-Proponer ecuaciones cuadráticas que modelen situaciones dadas.
-Proponer funciones cuadráticas a partir del conocimiento de sus raíces.

Resolución de problemas:
-Formular y resolver problemas de situaciones geométricas que involucren situaciones que involucran ecuaciones cuadráticas.
-Resolver, aplicando distintas estrategias, problemas que requieran el planteamiento de ecuaciones y desigualdades cuadráticas.
-Interpretar gráficamente problemas y resolverlos haciendo uso de ecuaciones cuadráticas.

Conexiones:
-Modelar y solucionar problemas en geometría y de la vida diaria, en otras disciplinas, por medio de ecuaciones cuadráticas.
-Identificar máximos y mínimos en funciones cuadráticas.

CONTEXTOS

Vida real
Matemáticas
Otras disciplinas

Figura 5. Organización curricular de la Unidad 3 del Texto Espiral 9.

[5] Los siguientes indicadores que se citan para los procesos y para los conocimientos básicos son presentados en el texto escolar al inicio de la unidad.

3.3. ASPECTOS GENERALES DE LOS TEXTOS ESCOLARES

3.3.1. ASPECTOS GENERALES DEL TEXTO ESCOLAR ESPIRAL 9

Figura 6. Portada del texto escolar Espiral 9.

El texto escolar *Espiral 9* hace parte de la serie de matemáticas para básica secundaria y media *Espiral* del grupo editorial Norma, la cual sale al mercado en el 2005 con una propuesta educativa organizada de acuerdo a los parámetros promulgados por el Ministerio de Educación Nacional en mayo de 2003, de acuerdo a ello el texto promueve el planteamiento de las diferentes actividades buscando el desarrollo de competencias básicas en matemáticas que respondan a lo propuesto en el MEN, lo anterior se expone de forma detallada en la contraportada del texto escolar.

De forma general la propuesta del texto escolar está conformada por cinco partes. La primera parte corresponde a la sección **conoce tu libro** la cual consta de tres páginas en las cuales se trata de familiarizar al estudiante con el texto y su manejo, de igual forma se quiere a través de este medio motivar al estudiante por medio de explicaciones simples y recurriendo a ilustraciones que aparecen a lo largo de su contenido.

Así como se dan a conocer los procesos que se desarrollaran también se definen cada uno de los cinco pensamientos que irán caracterizando las unidades, además hay que tener en cuenta que el texto escolar asocia cada uno de los cinco pensamientos con una ilustración que permita recordar lo dicho en la definición y contribuya a su comprensión.

La segunda parte corresponde al **contenido temático** para el grado noveno y que posteriormente se presenta.

La tercera parte corresponde al **glosario** del texto escolar en el cual se da una definición de una gran cantidad de expresiones matemáticas que aparecen a lo largo del texto y que pueden no ser claras para el estudiante.

La cuarta parte corresponde a la **Bibliografía** en la cual se referencian las fuentes matemáticas y didácticas utilizadas para llevar a cabo esta propuesta.

La quinta y última parte corresponde al **índice temático** en la cual aparecen organizados en orden alfabético los diferentes conceptos que se trabajan en el texto y su ubicación en el mismo.

El saber matemático en el texto aparece distribuido en ocho unidades temáticas, cuyos contenidos se asocian con uno o dos de los cinco tipos de pensamientos propuestos en los documentos curriculares. Así, por ejemplo, en el texto considerado se proponen:

- Cuatro unidades relacionadas con el pensamiento numérico:
  Unidad 1: los sistemas numéricos: reales y complejos.
  Unidad 2: sistemas de ecuaciones lineales.
  Unidad 3: ecuaciones cuadráticas.
  Unidad 4: sucesiones y series.

- Dos unidades relacionadas con el pensamiento espacial:
  Unidad 6: circunferencias.
  Unidad 7: introducción a la trigonometría.

- La unidad 8 presenta contenidos del pensamiento aleatorio:
  Unidad 8: estadística.

• La unidad 5 presenta una combinación de contenidos relativos al pensamiento espacial y al pensamiento métrico:

Unidad 5: semejanza, área y volumen de sólidos.

• Y finalmente encontramos tres unidades con contenidos relativos al pensamiento variacional: unidades 2, 3 y 4:

Unidad 2: sistemas de ecuaciones lineales.

Unidad 3: ecuaciones cuadráticas.

Unidad 4: sucesiones y series.

Cada una de las ocho unidades está conformada por los diferentes temas o capítulos correspondientes al concepto trabajado en la unidad, la cantidad de capítulos temáticos de una unidad puede variar entre 4 y 9 y están organizados de forma gradual con el fin de permitir un estudio progresivo de la unidad. Los capítulos se establecen con una franja de color en la cual se encuentra el icono del estándar al cual pertenece el tema y el logro que se pretende alcanzar con su estudio.

De esta manera la unidad 3 correspondiente a ecuaciones cuadráticas presenta la siguiente temática para el estudio de la ecuación y función cuadrática:

- Introducción a la función cuadrática.
- Solución de ecuaciones cuadráticas.
- Método de completar el cuadrado.
- Fórmula cuadrática.
- Aplicación de la ecuación cuadrática.
- Desigualdades y máximos y mínimos de funciones cuadráticas.

En la segunda página de cada unidad se especificaron los estándares que se trabajaran así como los pensamientos que están asociados a estos estándares, de igual manera se especifican las competencias que se lograran con el estudio de la unidad, especificando uno a uno los logros para cada uno de los cinco procesos.

Posteriormente se encontraron las **actividades preparatorias** con situaciones y actividades que ayudan a determinar las habilidades del estudiante y a utilizar los recursos matemáticos para adquirir una mejor comprensión de los conceptos que se van a estudiar.

En algunas páginas al inicio de los temas aparece la sección **conexión con la vida** y **comentario.** En la primera, se presentan situaciones de la vida real en las cuales se aplican los conceptos que se están trabajando. En los comentarios se hacen breves aclaraciones sobre algún aspecto del contenido.

Al finalizar cada uno de los capítulos se propone el **taller de procesos**, en estos talleres se plantean problemas y actividades de aplicación inmediata agrupados según el proceso de pensamiento a desarrollar, estos procesos se definen al inicio del texto (en la sección conoce tu libro) de la siguiente forma:

Comunicación: actividades que te llevan a usar el lenguaje matemático para expresar ideas matemáticas de manera clara y precisa en distintos contextos.

Resolución de problemas: problemas variados que te permiten aplicar distintas estrategias y traducir representaciones matemáticas para solucionarlos.

Conexiones: situaciones que te ayudan a relacionar y aplicar las ideas matemáticas en contextos distintos a los escolares.

Razonamiento lógico: actividades que te posibilitan desarrollar tus habilidades y competencias matemáticas, a la vez que te diviertes y afianzas tu ingenio.

Así como se dan a conocer los procesos que se desarrollaran también se definen cada uno de los cinco pensamientos que irán caracterizando las unidades.

Al finalizar cada unidad se encuentran las secciones: **estándares de evaluación, lectura comprensiva, prueba saber y taller de profundización**.

En la sección estándares de evaluación se da la oportunidad de establecer el nivel de competencia que el estudiante alcanzó con el desarrollo de la unidad, en esta sección se incluye la autoevaluación, mediante la cual el estudiante deberá establecer si realmente superó el logro propuesto o aún está por superar y la coevaluación, en la cual se plantea una serie de ejercicios que buscan afianzar los indicadores de logro que se han superado y reforzar aquellos que están por superar.

La sección lectura comprensiva busca motivar al estudiante a continuar el estudio de los temas de la unidad a través de lecturas que tienen que ver con la historia y desarrollo de estos conceptos matemáticos, al final de la lectura aparece un recuadro que sugieren algunas preguntas sobre la lectura, esta componente se denomina **competencia lectora.**

La sección prueba saber busca preparar al estudiante para las evaluaciones de competencias, en ellas se presentan situaciones contextualizadas a partir de las cuales se plantean preguntas de comprensión y análisis.

El taller de profundización que completa el cierre de la unidad es un elemento de repaso para los contenidos vistos, pero que requiere de nuevos elementos tecnológicos.

3.3.2. ASPECTOS GENERALES DEL TEXTO ESCOLAR DELTA 9

Figura 7. Portada del texto escolar Delta 9.

El texto escolar *Delta 9* hace parte de la serie de matemáticas para básica secundaria y media *Delta* del grupo editorial Norma, la cual sale al mercado en el 2009 con una propuesta educativa organizada de acuerdo a los parámetros promulgados por el Ministerio de Educación Nacional en mayo de 2006, de acuerdo a ello el texto promueve el planteamiento de las diferentes actividades buscando el desarrollo de competencias básicas en matemáticas que respondan a lo propuesto en el MEN, lo anterior se expone de forma detallada en la contraportada del texto escolar.

De forma general la propuesta del texto escolar está conformada por cuatro partes. La primera parte corresponde a la sección **conoce tu libro,** la cual consta de tres páginas en las cuales se trata de familiarizar al estudiante con el texto y su manejo, de igual forma se quiere a través de este medio motivar al estudiante a través de explicaciones simples y recurriendo a ilustraciones que aparecen a lo largo de su contenido; en cada una de las explicaciones se hace referencia a ejemplos de actividades tales como: Lecciones, piensa y práctica, evaluación por competencias, tú creación y la conexión histórica.

La segunda parte del texto corresponde al **contenido temático** que el libro posteriormente desarrolla en cada una de las unidades propuestas por él, vale la pena aclarar que el libro ***Delta 9*** se conforma por ocho unidades de estudio.

La tercera parte corresponde al **glosario** del texto escolar en el cual se da una definición de una gran cantidad de expresiones matemáticas que aparecen a lo largo del texto y que pueden no ser claras para el estudiante. El libro presenta un glosario cada vez que finaliza una unidad temática.

La cuarta parte corresponde al **índice temático** en la cual aparecen organizados en orden alfabético los diferentes conceptos que se trabajan en el texto y su ubicación en el mismo.

La quinta y última parte corresponde a la **Bibliografía** en la cual se referencian las fuentes matemáticas y didácticas utilizadas para llevar a cabo esta propuesta. El saber matemático en el texto aparece distribuido en ocho unidades temáticas, cuyos contenidos se asocian con uno o dos de los cinco tipos de pensamientos propuestos en los documentos curriculares. Así, por ejemplo, en el texto considerado se proponen:

• Cuatro unidades relacionadas con el pensamiento numérico:
Unidad 1: los sistemas numéricos: reales y complejos.
Unidad 2: sistemas de ecuaciones lineales.
Unidad 3: funciones, sucesiones y series.
Unidad 4: ecuaciones cuadráticas.

• Dos unidades relacionadas con el pensamiento espacial:
Unidad 5: medición.
Unidad 8: semejanza de triángulos. Circunferencias.

• Una unidad presenta contenidos del pensamiento aleatorio:
Unidad 7: estadística y probabilidad.

•Una unidad presenta una combinación de contenidos relativos al pensamiento espacial y al pensamiento métrico:
Unidad 5: medición.

•Y finalmente encontramos cuatro unidades con contenidos relativos al pensamiento variacional: unidades 2, 3, 4 y 6:

Unidad 2: sistemas de ecuaciones lineales.
Unidad 3: funciones sucesiones y series.
Unidad 4: Ecuaciones cuadráticas.
Unidad 6: Introducción a la trigonometría.

Cada una de las ocho unidades está conformada por los diferentes temas o lecciones correspondientes al concepto trabajado en la unidad, la cantidad de lecciones temáticas de una unidad puede variar entre 4 y 12 y están organizados de forma gradual con el fin de permitir un estudio progresivo de la unidad. Las lecciones se establecen con una franja de color en la cual se encuentra el icono del pensamiento matemático que se va a desarrollar durante cada una de las lecciones y que permitirán el desarrollo fundamental para el tema que se está presentando.

De esta manera la unidad 4 correspondiente a ecuaciones cuadráticas presenta la siguiente temática:

- Solución de ecuaciones cuadráticas por factorización.
- Solución de la ecuación cuadrática completando el cuadrado.
- Fórmula cuadrática.
- Aplicaciones de la ecuación cuadrática.
- Desigualdades, máximos y mínimos de funciones cuadráticas.
- Ecuaciones exponenciales y logarítmicas.

La unidad 3 correspondiente a funciones, sucesiones y series presenta las siguientes temáticas para el estudio de la función.

- Funciones.
- Funciones creciente y decreciente.
- Función inversa.
- Función lineal y afín.
- Función cuadrática.
- Función exponencial.

- La función logarítmica.
- Aplicaciones de las funciones exponencial y logarítmica.
- Sucesiones.
- Progresiones aritméticas.
- Progresiones geométricas.
- Series aritméticas y geométricas.

Observación: en la unidad 3 solamente se hizo referencia en la lección número 5 la cual trata sobre la función cuadrática, esta se desarrolla a partir de los mapas conceptuales presentados más adelante.

En la primera y segunda página de cada unidad aparecen los estándares que se manejan durante cada una de las lecciones y que permiten el desarrollo fundamental para el tema que se está presentando, de igual manera se especifican las competencias que se logran con el estudio de la unidad, mostrando cada uno de los logros para el desarrollo de los cinco procesos.

A continuación se encuentran las actividades de **analiza y resuelve** cuya intención es analizar la información que se presenta en el contexto de cada unidad, por medio de preguntas, que además le exigen a los estudiantes a repasar algunos conceptos matemáticos que pueden necesitar en la comprensión de los temas de la unidad.

En algunas páginas al inicio de los temas aparece la sección **conexión con la vida** y **comentario.** En la primera, se presentan situaciones de la vida diaria en las cuales se aplican los conceptos que se están trabajando. En los comentarios se hacen breves aclaraciones sobre algún aspecto del contenido.

Al finalizar cada uno de los capítulos se propone un taller que se llama **Piensa y Practica**, en esta sección se plantean actividades y ejercicios variados en los que se aplicaran los conceptos vistos. Los ejercicios propuestos están clasificados de acuerdo con cada uno de los procesos de Comunicación, Razonamiento lógico, Resolución de problemas y Conexiones, estos procesos se definen al inicio del texto (en la sección conoce tu libro) de la siguiente forma:

Comunicación: actividades que te llevan a usar el lenguaje matemático para expresar ideas matemáticas de manera clara y precisa en distintos contextos.

Razonamiento lógico: actividades que posibilitan desarrollar las habilidades y competencias matemáticas, a la vez que el estudiante se divierte y afianza su ingenio.

Resolución de problemas: problemas variados que permiten aplicar distintas estrategias y traducir representaciones matemáticas para solucionarlos.

Conexiones: situaciones que ayudan a relacionar y aplicar las ideas matemáticas en contextos distintos a los escolares.

Observación: en algunas de estas páginas, también se encuentra la sección ***Uso de la tecnología*** donde se proponen actividades para realizar con calculadora y la sección ***Formación ciudadana*** con situaciones que involucran las competencias ciudadanas.

Así como se dan a conocer los procesos que se desarrollaran también se definen cada uno de los cinco pensamientos que irán caracterizando las unidades, además hay que tener en cuenta que el texto escolar asocia cada uno de los cinco pensamientos con una ilustración que permita recordar lo dicho en la definición y contribuya a su comprensión. Al finalizar cada unidad se encuentran las secciones: **evaluación por competencias, tú creación, prueba saber, conexión histórica, glosario y razonamiento.**

En la sección ***evaluación por competencias*** se encuentra al inicio una autoevaluación que pretende que el estudiante sea analítico y reflexivo consigo mismo(a). Los ejercicios y actividades propuestos en la coevaluación permiten afianzar y a reforzar lo aprendido en el desarrollo de las lecciones de la unidad.

La sección ***tú creación*** es el espacio creado para que el estudiante escriba, invente o genere una situación o construya modelos a partir de una cierta información con el fin de desarrollar más las competencias matemáticas. La sección ***prueba saber*** se presentan diferentes contextos o situaciones a partir de las cuales se proponen preguntas de selección múltiple con única respuesta.

La sección ***conexión histórica*** se encuentra una lectura que contiene aspectos de la historia de la matemática relacionados con el tema de la unidad. Está acompañada de unas preguntas de reflexión que buscan afianzar las habilidades lectoras información previamente dicha al inicio del texto.

Al final de cada unidad se presenta un ***glosario*** con la definición de los términos más relevantes de la unidad y la sección ***razonamiento*** que plantea actividades de lúdica matemática.

3.3. EL CONCEPTO DE ECUACIÓN CUADRÁTICA Y FUNCIÓN CUADRÁTICA EN EL TEXTO ESPIRAL 9 y DELTA 9

En los siguientes mapas conceptuales se muestra cómo se lleva a cabo el estudio de los conceptos de función cuadrática y ecuación cuadrática de los textos escolares *Espiral 9 y Delta 9* (Ver Figuras 8, 9, 10 y 11).

En cada uno de estos mapas se mostraron las definiciones por capítulo o lección que llevan el desarrollo de los contenidos que se van a enseñar, además la intención de estos es mostrar la forma en que cada texto escolar enseña a sus lectores el proceso de conceptos correspondientes a la función, función cuadrática y ecuación cuadrática; con estos elementos y los mencionados anteriormente forman parte fundamental en el análisis que se realizo a partir de la Teoría Antropológica de lo Didáctico (TAD) y las praxeologías matemáticas. Por otra parte es importante dejar bien referenciado en los mapas conceptuales las formas de escritura y representación que en la mayoría de los casos son de tipo algebraico o gráfica.

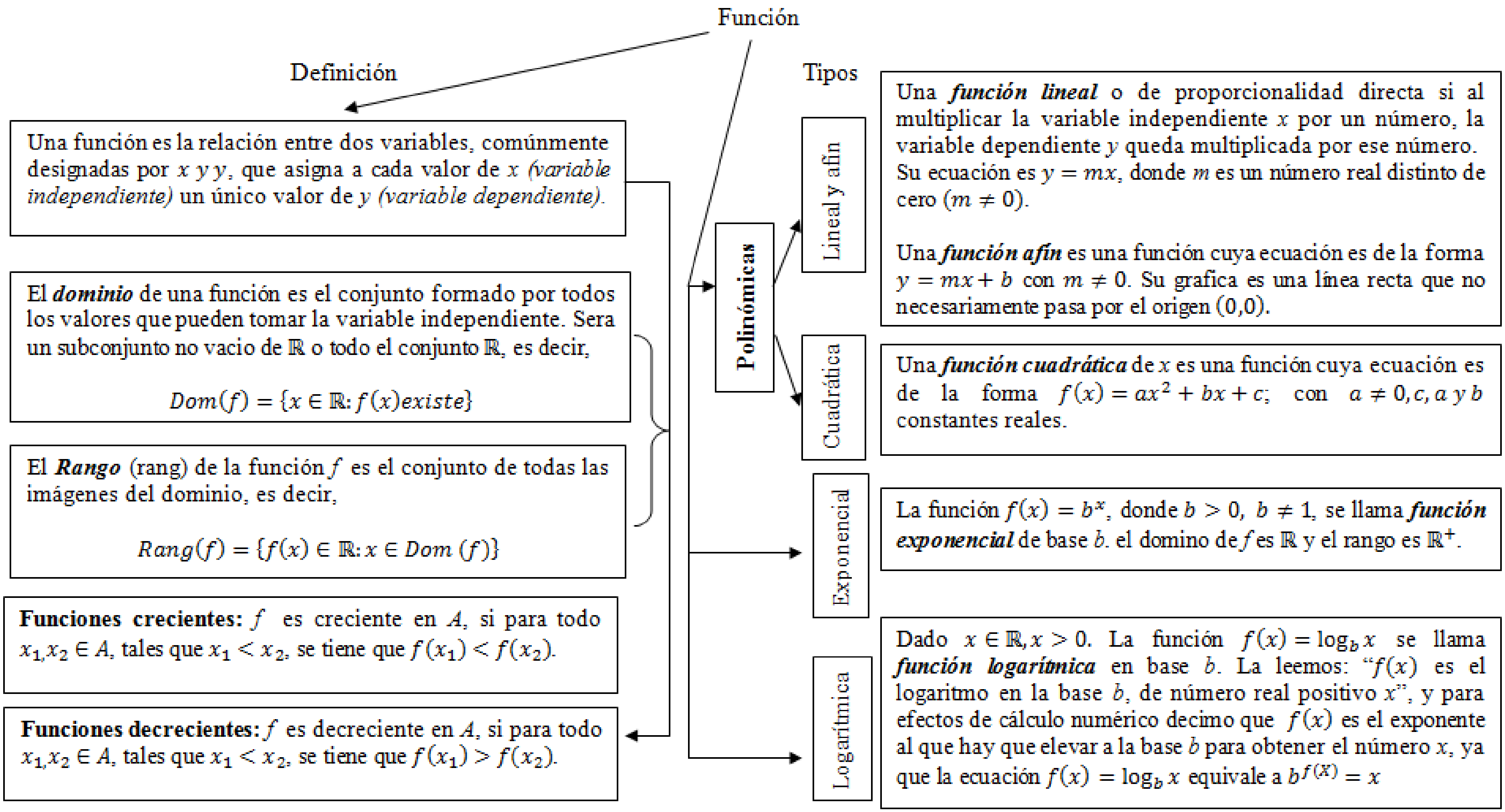


Figura 8. La función en el texto escolar Espiral 9

Ecuación cuadrática

Una ecuación de la forma $ax^2 + bx + c = d \; con \; a \neq 0$, se denomina **ecuación cuadrática** en la variable x.

Tipos de solución

Factorización

Recordemos que si $f(x) = 0$, entonces alguno de ellos $f \; o \; g, o \; ambas$, es cero. En consecuencia si logramos ***factorizar*** la expresión $ax^2 + bx + c = f(x)g(x)$, en donde $f(x) \; y \; g(x)$ son polinomios lineales, entonces podemos resolver la ecuación $ax^2 + bx + c = 0$ solucionando los casos $f(x) = 0 \; o \; g(x) = 0$.

Si $ax^2 + bx + c = 0$ y existen m, n números enteros tales que $m * n = a * c$ y $m \pm n = b$, entonces es posible ***factorizar*** el trinomio y obtener las dos raíces.

Completación del cuadrado

Completar el cuadrado, requiere adicionar y sustraer términos para que la expresión dada originalmente no se altere y sea lo más cercana a un cuadrado perfecto.

Recordemos: $(x - h)^2 = x^2 - 2xh + h^2$.

Entonces debemos transformar la ecuación $ax^2 + bx + c = 0$ en una de forma $a\,(x - h)^2 + k$, el término k es una constante.

Fórmula cuadrática

La ***fórmula cuadrática*** nos da las raíces o soluciones de la ecuación cuadrática $ax^2 + bx + c = 0$ en términos de los coeficientes a, b y c.
La ecuación $ax^2 + bx + c = 0$, tiene dos soluciones que corresponden a números reales, cuando $b^2 - 4ac > 0 \; y \; a \neq 0$. Estas son:

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}, \qquad x_2 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$

aplicaciones

Contexto 1(matemáticas)

Si una raíz es *2i* para un polinomio cuadrático, halla la otra raíz, y escribe tres polinomios con estas raíces.

Contexto 2 (vida real)

Un granjero tiene *2000 metros* de alambre y quiere utilizarlos para cercar un terreno rectangular que tenga la mayor área posible. ¿Cuáles son las dimensione del terreno?

Contexto 3 (otras disciplinas)

Un cohete se lanza desde el suelo con una velocidad inicial de *100 m/s*.

¿Cuál es la altura máxima que alcanza?

¿Cuánto tarda en regresar al piso?

función cuadrática

desigualdades

Máximos y mínimos

Recuerda que a toda expresión de la forma $ax^2 + bx + c = 0$, podemos trazarle la gráfica como una parábola y que al completar el cuadrado, la podemos escribir como:

$$y = a\left(x + \left(\frac{b}{2a}\right)\right)^2 + \left(c - \frac{b^2}{4a}\right)$$

Entonces, el vértice de la parábola tiene coordenadas:

$$\left(-\frac{b}{2a}, c - \left(\frac{b^2}{4a}\right)\right)$$

Y es el punto "más alto" o "más bajo" de la parábola según si $a < 0 \; o \; a > 0$, respectivamente.

Figura 9. La ecuación cuadrática en el texto escolar Espiral 9.

Función cuadrática

Definición

Una ***función cuadrática*** de x es una función cuya ecuación es de la forma $f(x) = ax^2 + bx + c$; con $a \neq 0, c, a$ y b constantes reales.

Ejemplos:

a. $f(x) = x^2$
b. $g(x) = x^2 - 1$
c. $u(x) = x^2 + 1$

Parábola

La gráfica de la función cuadrática $f(x) = ax^2 + bx + c$; con $a \neq 0$, es una parábola que abre hacia arriba si *a>0* y abre hacia abajo si *a<o*.

Ceros

Si $b^2 - 4ac > 0$, la parábola de ecuación $f(x) = ax^2 + bx + c$; con $a \neq 0$, interseca en el eje x, en los puntos de ordenada 0 (es decir cuándo *y = 0*) y abscisas.

$$x = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}, x = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}.$$

En otras palabras: los intersectos en x son: $\left(\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}, 0\right), \left(\frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}, 0\right)$

formas de escritura

En forma gráfica, como enunciado en lengua natural y algebraicamente o forma estándar.

general-estándar

$f(x) = a\,(x - h)^2 + k, a \neq 0.$
El ***vértice*** de la parábola tiene coordenadas *(h, k)*, y la recta vertical de la ecuación $x = h$ es el ***eje de simetría*** de la parábola.

Forma Polinomica.

$f(x) = ax^2 + bx + c$; Con $a \neq 0$.

Tabulación

Para trazar la gráfica, asignamos arbitrariamente algunos valores a la variable independiente x, y con ellos hallamos los valores correspondientes de la variable dependiente, y, obteniendo parejas ordenadas *(x, y)* que corresponden a puntos de la parábola en el plano cartesiano.

Desigualdades

Siempre que trazamos la gráfica de $f(x)$ en el plano cartesiano, lo estamos dividiendo en tres partes: los puntos que están sobre la curva, estos son los puntos *(x, y)* que satisfacen $y = f(x)$, y los otros son los puntos que quedan a uno u otro lado de la curva, es decir, los puntos *(x, y)* tales que: y< $f(x)$ o y> $f(x)$.

Figura 10. La función cuadrática en el texto escolar Delta 9.

Ecuación cuadrática

Una ***ecuación cuadrática*** en la variable x es cualquier ecuación que se pueda escribir en la forma $ax^2 + bx + c = 0$, donde a, b y c son números enteros reales constantes y $a \neq 0$.

Tipos de solución

Factorización

Paso 1. Escribir la ecuación dada en la forma $ax^2 + bx + c = 0$. Esto consiste en efectuar todas las operaciones elementales a cada lado de la igualdad y posteriormente igualar todos los términos resultantes a cero.
Paso 2. Factorizar (si es posible), escribir la ecuación obtenida en el ***paso 1*** como el producto de dos factores lineales igualados a cero.
Paso 3. Hacemos uso de la propiedad del factor cero.
Paso 4. Igualamos a cada uno de los factores lineales a cero, para determinar los posibles valores de la variable.

Completación del cuadrado

El método ***completar el cuadrado*** consiste en la transformación de una ecuación cuadrática en forma estándar a otra ecuación cuadrática equivalente que involucra un trinomio cuadrado perfecto completado con el termino ax^2 y el termino bx, de manera que la última ecuación se resuelve mediante el método de la raíz cuadrada. $b^2 - 4ac \geq 0$.

Fórmula cuadrática

La ecuación cuadrática se puede resolver aplicando la ***fórmula cuadrática*** la cuál es:

$$x_1 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}, \quad x_2 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

. Donde a, b y c son los coeficientes de la ecuación cuadrática $ax^2 + bx + c = 0$. En esta formula $\Delta = b^2 - 4ac$, se denomina ***discriminante*** de la ecuación cuadrática.

aplicaciones

Contexto 1(matemáticas)

Las soluciones de la ecuación $x^2 + 3x - 4 = 0$ son m y n. Halla una ecuación cuadrática cuyas soluciones sean $m^2 y n^2$.

Contexto 2 (vida real)

Se necesita hacer un mantel para una mesa rectangular cuya superficie tiene el doble de largo que de ancho. En todo el borde del mantel debe quedar una franja de 30 cm de ancho. Sí el área total del mantel es $36.000m^2$. ¿Cuáles son las dimensiones de la base de la mesa?

Contexto 3 (otras disciplinas)

Un deportista camino *30 km* en un determinado número de horas. Sí hubiese caminado un *km* más por hora habría tardado una hora menos en recorrer la misma distancia. ¿Cuántos *km* por hora recorrió?

función cuadrática

desigualdades

Máximos y mínimos

Una desigualdad cuadrática en la variable x es una expresión cuadrática que en vez de estar determinada por una igualdad involucra una relación de orden.

$$ax^2 + bx + c \leq 0$$

Una parábola que abre hacia arriba si $a > 0$ y que en este caso tiene un ***valor mínimo*** que está en su vértice de abscisa $x = -\frac{b}{2a}$.

Una parábola que abre hacia abajo si $a < 0$ y que en este caso tiene un ***valor máximo*** que está es su vértice de abscisa $x = -\frac{b}{2a}$.

Figura 11. La ecuación cuadrática en el texto escolar Delta 9.

3.4. EL TEXTO ESCOLAR DESDE LA TAD

3.4.1. LAS PRAXEOLOGÍAS MATEMÁTICAS DEL TEXTO ESCOLAR Y LA PROPUESTA CURRICULAR DEL MEN

El análisis de las Praxeologías Matemáticas presentes en los textos escolares reflejó lo que inicialmente éstos establecieron como propuesta educativa a la luz de la Teoría Antropológica de lo Didáctico (TAD), se analizó la coherencia de las tareas en relación a los componentes del currículo: conocimientos básicos, procesos generales y contextos. Para esto se clasificaron las tareas de acuerdo a sus contextos y procesos, luego se establece la *técnica* que determina cómo se debe realizar cada una de estas tareas, la *tecnología* que da explicación de estas técnicas (las cuales corresponden a teoremas, axiomas y definiciones) y por último la *teoría* sobre la cual se está trabajando, que en este caso es la función cuadrática.

Es necesario tener en cuenta que aunque en los textos escolares se hace una clasificación de las tareas de acuerdo a los procesos de: razonamiento lógico, comunicación, resolución de problemas y conexiones, se realiza una clasificación nueva de acuerdo a la propuesta del MEN, así que algunas tareas no coincidieron con la división que plantean los autores. En cuanto a lo que denominan conexiones, en cada texto se involucra la modelación y otro tipo de procesos, por lo que se dedujo que el término conexiones hace alusión a tareas en contextos diferentes al matemático. Sin embargo la modelación no solo se presenta en conexiones, sino que también está presente en resolución de problemas. En cuanto al proceso de elaboración, comparación y ejercitación de procedimientos, este no se hace explícito en la clasificación de los autores, estuvo presente en otros procesos, por lo que en la clasificación que aquí se presenta, se decidió escoger aquellas tareas en donde más se destaca. Esto mostro que las tareas no solo desarrollan un proceso, en ellas pueden estar involucrados varios.

La Praxeología Matemática presenta unas tecnologías que no necesariamente se explicitan en el texto escolar. Las tecnologías asociadas a esta praxeología se han escrito con siglas buscando simplificar su escritura. D, significa definición. T, teorema. A, axioma. Estas se encuentran enumeradas en relación al orden de organización. Esta revisión fue necesaria ya que los textos escolares no presentan las tecnologías clasificadas en definiciones, axiomas y teoremas, en ocasiones se escriben en recuadros de color que sintetizan la información de una temática que a veces pueden ser técnicas. Algunas de estas tecnologías en los textos escolares no se escriben con los signos matemáticos, sino que se privilegia la lengua natural, por lo cual en los Anexos se muestran todas las tecnologías que están asociadas a las Praxeologías Matemáticas presentes en los textos, además se hace un paralelo con las definiciones que allí muestran.

De acuerdo a lo mencionado el análisis buscó evaluar el nivel en que las Praxeologías Matemáticas planteadas a lo largo de la unidad permiten la integración de sus componentes (tareas, técnicas, tecnologías, teoría) con el fin de conformar una *Organización Matemática Local* (OML), es decir una organización matemática que dio cuenta del objeto que se está trabajando y a la vez permitió su construcción a través de las tareas que en ella se propusieron.

Por esta razón se busco evaluar en términos de grado (bajo, medio, alto) el cumplimiento de las praxeologías matemáticas planteadas a lo largo de la unidad, esto se llevo a cabo a la luz de los siete indicadores establecidos para verificar la *completitud* de la OML en la Teoría Antropológica de lo Didáctico TAD. Se ha decidido tomar esta escala valorativa ya que con ella se indaga de forma básica el nivel en que estas praxeologías potencian el cumplimiento de estos criterios, ya que de entrada se asume el cumplimiento de estos criterios por mínimo que sea considerando su función educativa.

Por otro lado con el resultado de esta indagación sobre el cumplimiento de estos criterios en cada texto escolar se pretende comparar y valorar cuál de ellos contribuye en mayor medida a la comprensión de la función cuadrática de acuerdo también a los referentes curriculares.

3.4.2. CLASIFICACIÓN DE LAS TAREAS POR CONTEXTOS Y PROCESOS EN LOS TEXTOS ESCOLARES

En las siguientes rejillas se realizó la clasificación de las tareas de ambos textos de acuerdo a los procesos y contextos que establece el MEN en los lineamientos curriculares.

Se debe aclarar que en esta clasificación sólo se tomaron las tareas que se presentan como parte de la propuesta educativa dentro del tema, estas tareas están presentes en los talleres que establecen el cierre de cada capítulo o lección de la unidad[6], y por ende permiten evaluar, corregir y ser consciente de los conocimientos adquiridos a lo largo del desarrollo tema. En el texto Espiral estos talleres se identifican como ***taller de procesos***, mientras que en el texto Delta se identifican como taller ***piensa y práctica,*** de esta forma se excluyeron las actividades adicionales que también se proponen al final de cada capítulo o lección como lo son las preguntas pruebas saber, lectura comprensiva, taller de profundización y la autoevaluación y coevaluación en el texto Espiral; y en el texto Delta se excluyen actividades correspondientes a las preguntas pruebas saber, evaluación por competencias, y conexión histórica.

Para la clasificación de las tareas que se proponen en la unidad *ecuación cuadrática* del texto Espiral 9 se asumió lo siguiente:

- Las tareas del primer capítulo se distinguieron en **color rojo**, el capítulo es introducción a la función cuadrática,
- Las tareas del segundo capítulo se distinguieron en **color azul**, el capítulo trata sobre la solución de ecuaciones cuadráticas,
- Las tareas del tercer capítulo se distinguieron en **color naranja**, en este capítulo se presenta el método de completar el cuadrado,
- Las tareas del cuarto capítulo se distinguieron en **color verde**, en este capítulo se presenta la fórmula cuadrática,
- Y las tareas del quinto capítulo se distinguieron en **color vino tintó**, el capítulo trata sobre desigualdades, máximos y mínimos de funciones cuadráticas.

Todas estas tareas se presentan en la Tabla 3.

[6] En el texto Espiral 9 los temas que conforman la unidad se determinan como capítulos, mientras que en el texto Delta 9 estos temas son determinados como lecciones.

Tabla 3. Clasificación de tareas por conocimientos, procesos y contextos en el texto escolar Espiral 9.

CONTEXTOS	PROCESOS				
	Comunicación	Razonamiento	Resolución de Problemas	Elaboración, comparación y ejercitación de procedimientos	Modelación
VIDA DIARIA			4-tarea 12 Pág.137		
OTRAS DISCIPLINAS			4-tarea 11 Pág.137 1- tarea 4 Pág.114 1-tarea 5 Pág.114 4-tarea 14 Pág.137 5-tarea 5 Pág.141		4-tarea 7 Pág.136 4-tarea 8 Pág.136
MATEMÁTICAS	1- tarea 6 Pág. 114 1-tarea 7 Pág. 115 1-tarea 8 Pág. 115 1-tarea 9 Pág. 115 1-tarea 10 Pág.115 1-tarea 11 Pág. 115 2-tarea 1 Pág. 120 2-tarea 3 Pág.120 3-tarea 1 Pág.124 3-tarea 2 Pág.124 3-tarea 3 Pág.124 3-tarea 4 Pág.124 4-tarea 1 Pág.135 4-tarea 2 Pág.136 4-tarea 3 Pág.136 5-tarea 1 Pág.141 5-tarea 2 Pág.141 5-tarea 3 Pág.141 5-tarea 4 Pág.141	1- tarea 1 Pág. 113 1- tarea 2 Pág. 113 2-tarea 6 Pág. 120 2-tarea 7 Pág. 120 3-tarea 5 Pág.124 4-tarea 4 Pág.131 4-tarea 5 Pág.131 4-tarea 6 Pág.131 4-tarea 7 Pág.131 4-tarea 9 Pág.136 4-tarea 10 Pág.136	3-tarea. 7 Pág. 124 3-tarea. 8 Pág. 124 3-tarea 9 Pág. 124 4-tarea 9 Pág. 131 4-tarea 10 Pág. 131 4-tarea 11 Pág. 131 4-tarea 10 Pág. 137 4-tarea 13 Pág.137 5-tarea 6 Pág. 141	1- tarea 3 Pág.114 2-tarea 2 Pág.120 2-tarea 4 Pág.120 2-tarea 5 Pág.120 3-tarea 6 Pág.124 4-tarea 1 Pág.131 4-tarea 2 Pág.131 4-tarea 3 Pág.131 5-tarea 7 Pág.141	4 - tarea 4 Pág.136 4-tarea 5 Pág.136 4-tarea 6 Pág.136

Para la clasificación de las tareas que se proponen en las unidades *función cuadrática* y *ecuación cuadrática* del texto Delta 9 se asumió lo siguiente:

Para la lección *función cuadrática* desarrollada en la unidad 3 se distinguió en **color negro** (ver Tabla 4) debido a que en el texto se especifica está por fuera de la lección de ecuación cuadrática, algo que no sucedió en el texto escolar Espiral 9; mientras que las tareas que se proponen para las 5 lecciones de la unidad 4: *ecuaciones cuadráticas* (ver Tabla 5) se distinguen por colores al igual que el texto Espiral 9. Las tareas son:

- Las de la primera lección se distinguieron en **color rojo**, la lección es la solución de ecuaciones cuadráticas por factorización,
- Las de la segunda lección se distinguieron en **color azul**, la lección trata sobre la solución de la ecuación cuadrática completando el cuadrado,
- Las de la tercera lección se distinguieron en **color naranja**, la lección es sobre Fórmula cuadrática,
- Las de la cuarta lección se distinguieron en **color verde**, la lección presenta las aplicaciones de la ecuación cuadrática,
- Y las de la quinta lección se distinguieron en **color vino tintó**, la lección es sobre desigualdades, máximos y mínimos de funciones cuadráticas.

Tabla 4. Clasificación de tareas por conocimientos, procesos y contextos en la Lección de Función Cuadrática en el texto escolar Delta 9.

CONTEXTOS	PROCESOS				
	Comunicación	**Razonamiento**	**Resolución de Problemas**	**Elaboración, comparación y ejercitación de procedimientos**	**Modelación**
VIDA COTIDIANA					No existen ejercicios dentro de esta unidad que tomen como referencia el proceso de modelación.
OTRAS DISCIPLINAS		4-tarea 8 Pág. 119	4-tarea 11 Pág.119 4-tarea 12 Pág.119		
MATEMÁTICAS	4- tarea 1 Pág. 119 4-tarea 2 Pág. 119 4-tarea 3 Pág. 119 4-tarea 4 Pág. 119 4-tarea 6 Pág. 119	4-tarea 7 Pág. 119	4-tarea 9 Pág. 119 4-tarea 10 Pág.119	4-tarea 5 Pág. 119	

Tabla 5. Clasificación de tareas por conocimientos, procesos y contextos, Lección de Ecuación Cuadrática del texto escolar Delta 9.

CONTEXTOS	PROCESOS				
	Comunicación	Razonamiento	Resolución de Problemas	Elaboración, comparación y ejercitación de procedimientos	Modelación
VIDA COTIDIANA			2-tarea 11 Pág. 175 2-tarea 12 Pág. 175 2-tarea 15 Pág. 175 2-tarea 19 Pág. 175 2-tarea 20 Pág. 175 3-tarea 14 Pág.181 3-tarea 16 Pág. 181 3-tarea 19 Pág. 181		4-tarea 14 Pág.185 4-tarea 15 Pág.185
OTRAS DISCIPLINAS			3-tarea 17 Pág. 181 3-tarea 18 Pág. 181 4-tarea 3 Pág.185 4-tarea 6 Pág.185 4-tarea 10 Pág. 185 4-tarea 13 Pág. 185		
MATEMATICAS	1- tarea 1 Pág. 169 2-tarea 1 Pág. 174 3-tarea 1 Pág.180 3-tarea 2 Pág.180 3-tarea 3 Pág.180 3-tarea 4 Pág.180 3-tarea 5 Pág.180 3-tarea 6 Pág.181 4-tarea 1 Pág.185 5-tarea 11 Pág.191	1- tarea 2 Pág. 169 2-tarea 5 Pág. 174 2-tarea 6 Pág. 174 2-tarea 7 Pág. 174-175 5-tarea 7 Pág.191	1- tarea 5 Pág.170 (f) 2-tarea 8 Pág. 175 2-tarea 9 Pág. 175 2-tarea 10 Pág. 175 2-tarea 13 Pág. 175 2-tarea 14 Pág. 175 2-tarea 16 Pág. 175 2-tarea 17 Pág. 175 2-tarea 18 Pág. 175 3-tarea. 8 Pág. 181 3-tarea 9 Pág. 181 3-tarea 10 Pág. 181 3-tarea 11 Pág. 181 3-tarea 12 Pág. 181 4-tarea 2 Pág. 185 4-tarea 4 Pág.185 4-tarea 5 Pág. 185 4-tarea 7 Pág.185 4-tarea 8 Pág. 185 4-tarea 9 Pág. 185 5-tarea 4 Pág.191 5-tarea 8 Pág. 191 5-tarea 9 Pág.191 5-tarea 10 Pág.191	1- tarea 3 Pág.169-170 1- tarea 4 Pág.170 2-tarea 2 Pág.174 2-tarea 3 Pág.174 2-tarea 4 Pág.174 3-tarea 7 Pág.181 5-tarea 1 Pág.190 5-tarea 2 Pág.190 5-tarea 3 Pág.190-191	

3.4.3. LAS PRAXEOLOGÍAS MATEMÁTICAS EN EL TEXTO ESCOLAR ESPIRAL 9

El análisis de las Praxeologías Matemáticas se realizó a partir de tablas en la que se organizó cada uno de sus componentes (tareas, técnicas, tecnologías y teoría) teniendo en cuenta los contextos y los procesos descritos por el MEN: En algunas de estas clasificaciones se analizó en detalle una tarea, los criterios de selección son diferentes, en algunos casos son aquellas tareas que presentan aspectos relacionados con los objetos ostensivos, errores en la información, la complejidad de los procesos de solución, entre otros aspectos que se explícita en cada una de ellas.

Tareas – Vida Cotidiana – Resolución de problemas

Se observo que las Praxeologías Matemáticas que integran el contexto de la vida diaria y el proceso resolución de problemas, la exigencia y complejidad con respecto al manejo de las tecnologías y de las técnicas asociadas a ellas se va dando de forma gradual, así en los últimos capítulos se destacan los procesos de modelación y razonamiento. Estas tareas se refieren necesariamente a las técnicas vistas hasta el momento.

De otro lado se pudo observar que la cantidad de tareas de este tipo es muy reducida con respecto a otros que implican procesos como los mencionados, no sólo las tareas que tratan la resolución de problemas relacionadas con este tipo de contexto sino también con los demás contextos.

El planteamiento de este tipo de tareas trata de ser explicita y coherente con respecto al contexto del estudiante así como a situaciones que él pueda entender, de igual forma se busca que las palabras y expresiones utilizadas sean claras para el estudiante.

En la Tabla 6 se presenta la tarea correspondiente a este proceso.

Tabla 6. Tareas – Vida Cotidiana – resolución de problemas del texto escolar Espiral 9.

CONTEXTO – VIDA COTIDIANA/DIARIA	TAREAS	TÉCNICAS	TECNOLOGIAS[7]	TEORÍA
Campo de flores	Plantear una ecuación racional y encontrar sus raíces para resolver una situación. (4-tarea 12 Pág.137)	Se plantea una ecuación en la cual la incógnita *x* hace referencia a los días. Las fracciones que representan los días que tardan cada niña en cosechar solas el campo de flores, multiplicadas por la incógnita *x*, representan la parte del campo que cosecharan trabajando juntas cada una en los *x* días. La suma de estas dos expresiones es igual a 1 que representa el campo cosechado. La resolución de esta ecuación se lleva a cabo homogenizando las dos fracciones y sumando los numeradores, posteriormente se despeja la expresión resultante que es una ecuación cuadrática y se resuelve mediante uno de los métodos vistos.	D: Ecuación cuadrática. T: raíces de la ecuación cuadrática. Propiedades de los números reales.	**Funciones Cuadráticas[8]**

Tareas – matemáticas – comunicación

Las Praxeologías Matemáticas que integraron el contexto matemático con el proceso de comunicación se caracterizaron por promover la ejercitación de algoritmos y de procedimientos que la mayoría de las veces se da en un solo registro de representación que es el algebraico. Se observo además que la cantidad de tareas de este tipo es mayor que aquellas que involucran procesos como razonamiento, resolución de problemas o modelación, convirtiéndose en el proceso que se destaca mayormente en las tareas del texto.

Se escogió analizar el **Capítulo 2-tarea 3 Pág.120**, en la que dada la ecuación cuadrática y una de sus raíces se pide hallar la segunda raíz. Para factorizar la ecuación y resolverla se requiere hallar *h* (abscisa del vértice) (ver la Figura 12). La segunda raíz se halla conociendo la distancia

[7] Todas las tecnologías se presentan en el Anexo 1.
[8] Dado que la teoría de todas las praxeologías matemáticas analizadas corresponde a la función cuadrática, de ahora en adelante en las siguientes tablas se omite.

que separa la raíz x_1 de h (concepto de simetría). No tendría sentido resolver la tarea por factorización o por otro de los métodos para hallar las raíces, pues no se utilizaría la raíz dada, en este sentido se observa que el concepto de simetría no está bien integrado al concepto de función cuadrática como para que el estudiante interprete que debe encontrar la distancia entre la raíz dada y el eje de simetría.

3. Factoriza el polinomio si conoces una raíz.

a. $3x^2 + 15x - 108;\ x_1 = 4$

b. $-2x^2 - 8x + 24;\ x_1 = -6$

c. $x^2 - 3x - 18;\ x_1 = -3$

Figura 12. Capítulo 2-tarea 3 Pág.120 del texto escolar Espiral 9.

En la Tabla 7, se presenta un resumen de las tareas en un contexto matemático y que desarrollan el proceso de comunicación.

Tabla 7. Tareas – matemáticas – comunicación del texto escolar Espiral 9.

TAREAS	TÉCNICAS	TECNOLOGÍAS
Hallar el vértice y eje de simetría a las funciones cuadráticas dadas. Graficar las funciones cuadráticas dadas. (Capítulo 1- tarea 6 Pág. 114)	Solución similar al ejemplo explicado previamente, se factoriza el coeficiente de x^2 en los términos que contengan la variable *x;* a la expresión entre paréntesis se le adiciona y sustrae el cuadrado de la mitad del coeficiente de *x*; se simplifica las fracciones y se aplica la propiedad distributiva; Se factoriza dentro del paréntesis el trinomio cuadrado perfecto y se hace la adición de números reales.	D: gráfica de la función. T: vértice, simetría. Propiedades de los números reales
Identificar cuáles gráficas representan traslaciones. (Capítulo 1-tarea 7 Pág. 115)	Establecer si el par de gráficas que aparecen en cada uno de los tres casos son iguales, para esto se debe considerar aspectos de tipo visual, como la forma, que ambas gráficas tengan igual cantidad de líneas, que tengan una misma inclinación y si son parábolas observar que ambas abran hacia el mismo lado. Establecer por medio de los ejes coordenados en qué posición se encuentran y cuantas unidades separan las dos gráficas.	T: Desplazamiento (vertical y horizontal)
Determinar en cada caso el tipo de traslación que ha sufrido la función cuadrática dada (representación algebraica) (Capítulo 1-tarea 8 Pág. 115)	Establecer en la segunda función a cuál de las dos variables (*x* o *y)* se le suma o resta alguna cantidad. Si la suma o resta se realiza a la variable *x*, entonces la traslación es horizontal. Si la suma o resta se realiza a la variable *y*, entonces la traslación es vertical.	T: Desplazamiento (vertical y horizontal)

TAREAS	TÉCNICAS	TECNOLOGÍAS
Encontrar la imagen de la parábola $y = 5x^2$ que ha sufrido una traslación *T (2,3)* y determinar su vértice. (Capítulo 1-tarea 9 Pág. 115)	Utilizó la ecuación para hallar la imagen de una parábola cuando además se conoce el punto que determina la traslación. Como la función cuadrática dada solo tiene un término, entonces el vértice es el punto que determina la traslación, teniendo en cuenta que para esta función cuadrática el vértice se encuentra el origen. Se hallan puntos de la función cuadrática $y = 5x^2$, estos puntos se organizan en una tabla, se ubican en el plano cartesiano y se traza la gráfica.	T: vértice, desplazamiento (vertical y horizontal)
Hallar el vértice de la parábola que representa la ecuación cuadrática dada y hallar su eje de simetría. (Capítulo 1-tarea 10 Pág.115)	Ya que la fórmula dada tiene la forma $y - k = a(x - h)^2$, entonces el vértice de la parábola es el punto conformado por las componentes numéricas *(h, k)*, el eje de simetría es *x=h.*	D: concavidad. T: simetría, vértice, reflexión.
Para la ecuación $y = (x + 2)^2 + 3$ Hallar: vértice, hacia donde abre la parábola y eje de simetría. (Capítulo 1-tarea 11 Pág.115)	Utiliza la ecuación del vértice, Identificar *a, h* y *k* en la ecuación. Vértice: *h, k* Si $a<0$ la parábola abre hacia abajo, si $a>0$ la parábola abre hacia arriba. Eje de simetría: $x = h$	D: concavidad. T: Vértice, simetría.
Identificar los coeficientes de cada ecuación cuadrática dada. (Capítulo 2-tarea 1 Pág. 120)	Identificar en las ecuaciones cuadráticas dadas los coeficientes *a, b* y *c*.	D: Ecuación cuadrática.
Factorizar el polinomio si se conoce una de las raíces. (Capítulo 2-tarea 3 Pág.120)	Se halla el vértice con la ecuación del vértice y los coeficientes *a, b* y *c* de la ecuación dada. Se halla la longitud de la componente *h* del vértice a la raíz dada. Luego se suma esta longitud a *h* para obtener la segunda raíz. Utilizando ambas raíces se expresa el polinomio como el producto de factores. $a(x + r_1)(x + r_2) = 0$	D: Ecuación cuadrática. T: simetría, raíces de la ecuación cuadrática, vértice de una parábola. Propiedades de los números reales.
Completar el cuadrado en las expresiones cuadráticas dadas. (Capítulo 3-tarea 1 Pág.124)	Solución similar al ejemplo 10. Se halla el factor común en los términos que tienen la variable *x*. se completa el cuadrado con el término independiente. Se aplica la propiedad distributiva para extraer el término que sobra y se factoriza el trinomio cuadrado perfecto.	D: ecuación cuadrática. T: vértice de una parábola, raíces de la ecuación cuadrática. Propiedades de los números reales.

TAREAS	TÉCNICAS	TECNOLOGÍAS
Solucionar las ecuaciones cuadráticas completando el cuadrado. (Capítulo 3-tarea 2 Pág.124)	Se halla el factor común en los términos que tienen la variable *x*. Se completa el cuadrado con el término $\left(\frac{b}{2}\right)^2$. Se aplica la propiedad distributiva para extraer el término que sobra y se factoriza el trinomio cuadrado perfecto. Se utiliza factorización para obtener las raíces en la ecuación.	D: ecuación cuadrática. T: vértice de una parábola, raíces de la ecuación cuadrática. Propiedades delos números reales.
Encontrar el vértice de las parábolas. (Capítulo 3-tarea 3 Pág.124)	Se halla el factor común en los términos que tienen la variable *x*. se completa el cuadrado con el término independiente. Se aplica la propiedad distributiva para extraer el término que sobra y se factoriza el trinomio cuadrado perfecto. el vértice de la parábola es el punto conformado por las componentes numéricas *(h, k)*	D: ecuación cuadrática, valor máximo y mínimo de la parábola. T: vértice de una parábola, raíces de la ecuación cuadrática. Propiedades de los números reales.
Determinar el tipo de soluciones (reales distintas, una sola raíz o complejas) que tienen las ecuaciones. (Capítulo 3-tarea 4 Pág.124)	Se halla el vértice de las ecuaciones. Se halla el factor común en los términos que tienen la variable *x*. se completa el cuadrado con el término independiente. Se aplica la propiedad distributiva para extraer el término que sobra y se factoriza el trinomio cuadrado perfecto. el vértice de la parábola es el punto conformado por las componentes numéricas *(h ,k)* Si $h>0$ y $a<0$ o $h<0$ y $a>0$ la ecuación tiene dos raíces reales. Si $k=0$ la ecuación tiene una sola raíz real. Si $h>0$ y $a>0$ o $h<0$ y $a<0$ ambas raíces son complejas.	D: concavidad, ecuación cuadrática. T: Vértice de una parábola, raíces de la ecuación cuadrática. Propiedades de los números reales.
Calcular el discriminante de cada ecuación cuadrática. (Capítulo 4-tarea 1 Pág.131)	Se identifica a, b y c en la ecuación. Luego se reemplazan estos valores en la expresión que corresponde al discriminante y se realizan las operaciones indicadas. $b^2 - 4ac$.	D: ecuación cuadrática. T: raíces de la ecuación cuadrática.
Hallar la ecuación del polinomio que pasa por los tres puntos dados. (Capítulo 4-tarea 2 Pág.136)	Utilizando la ecuación $ax^2 + bx + c = 0$ Se plantea una expresión en la cual la incógnita x y la respuesta sean reemplazadas por los valores numéricos dados. Con las tres ecuaciones obtenidas se plantea un sistema de ecuaciones lineales que se puede resolver por método de sustitución o igualación. Los valores obtenidos son los coeficientes que se ubican en la expresión general de la ecuación cuadrática.	D: función, dominio, rango, gráfica de la función cuadrática**.** T: teorema del factor. Propiedades de los números reales.
Solucionar las ecuaciones dadas (con radicales) (Capítulo 4-tarea 3 Pág.136)	Primero se eliminan los radicales de la ecuación elevando ambos lados al cuadrado; posteriormente se desarrolla los productos que haya. Se identifica a, b y c en la ecuación cuadrática obtenida y se utiliza la fórmula cuadrática para hallar las raíces.	D: ecuación cuadrática. T: raíces de la ecuación cuadrática. Propiedades de los números reales.
Identificar las regiones del plano que representa cada expresión (desigualdades).	Si es una desigualdad, establecer cuáles son las regiones determinadas y en cuál de estas dos regiones se encuentran los puntos *x*, si es una igualdad determinar la línea que representa el valor de *x*.	D: desigualdad cuadrática.

TAREAS	TÉCNICAS	TECNOLOGÍAS
(Capítulo 5-tarea 1 Pág.141)		
Identifica los puntos (x, y) del plano que satisfacen cada una de las desigualdades. (Capítulo 5-tarea 2 Pág.141)	Se realiza la gráfica de la función con respecto a la variable x, establecer cuales regiones se obtienen y en cuál de estas regiones se encuentran los puntos y de acuerdo a la desigualdad. Los puntos x son todos los números reales y los puntos y son los que están en la región determinada por la desigualdad.	D: función, función cuadrática, dominio, rango, gráfica de la función, desigualdad cuadrática.
Identificar las regiones en el plano que satisfacen las desigualdades indicadas. (Capítulo 5-tarea 3 Pág.141)	Se realiza la gráfica de la función con respecto a la variable x, establecer cuales regiones se obtienen y en cuál de estas regiones se encuentran los puntos y de acuerdo a la desigualdad.	D: función, función cuadrática, dominio, rango, gráfica de la función, desigualdad cuadrática.
Dibujar la región solución para cada una de las desigualdades. (Capítulo 5-tarea 4 Pág.141)	Se realiza la gráfica de las dos funciones indicadas hallando puntos de la función cuadrática, estos puntos se organizan en una tabla, se ubican en el plano cartesiano y se traza la gráfica. Indicar cuál es la región que se obtiene de la intersección de las dos funciones.	D: función, función cuadrática, dominio, rango, gráfica de la función, desigualdad cuadrática.

Tareas – matemáticas – razonamiento

Se observo que el tipo de tareas que integran el contexto matemático con el proceso de razonamiento recurrieron la mayoría de las veces a la representación algebraica sobre representaciones del tipo gráfico, así como el uso del contexto matemático sobre los demás, este hecho favorece a que haya un solo enfoque para la ejecución de este proceso y que además sea en mayor grado dependiente a las explicaciones hechas en este contexto como sucede con las raíces de la función cuadrática y el procedimiento para encontrar el polinomio cuadrático si se conocen tres puntos. En este sentido la tarea Capítulo 3-tarea 5 Pág.124 se relaciono con lo dicho (ver Figura 13), en ella se pide determinar la veracidad o falsedad sobre afirmaciones hechas del polinomio $y = ax^2 + bx + cy$ que se puede comprender mucho más con la parábola, pero al desvincularla como sucede de la representación gráfica se limita su alcance, ya que la parábola tiene la función de apoyar y servir como herramienta para afianzar la comprensión del concepto.

5. Determina si las siguientes afirmaciones sobre $f(x) = ax^2 + bx + c$, un polinomio cuadrático, son ciertas o falsas. Justifica tu respuesta.

a. Si $f(x)$ tiene dos raíces reales distintas, entonces $-f(x)$ tiene dos raíces reales y distintas.

b. Si las raíces reales de $f(x)$ son x_1 y x_2, entonces las raíces reales de $-f(x)$ son $-x_1$ y $-x_2$.

c. Si $f(x)$ tiene una sola raíz real, entonces $-f(x)$ no tiene raíces reales.

d. Si $f(x)$ no tiene raíces reales, entonces $-f(x)$ tiene sus dos raíces reales.

Figura 13. Capítulo 3-tarea 5 Pág.124 del Texto Escolar Espiral 9.

Se podría considerar que el estudiante trace una parábola que cumpla con los datos que se mencionan en la tarea y que responda de acuerdo a lo que observa, teniendo en cuenta que el propósito de las tareas es cuestionar y a la vez afianzar el conocimiento, este tipo de tareas promueve que se memoricen conceptos y nociones, pero no profundiza en actividades en las que el estudiante deba hacer algo como trazar la parábola para responder.

En la Tabla 8 se muestran las tareas correspondientes a este tipo de contexto y proceso.

Tabla 8 . Tareas – matemáticas – razonamiento del texto escolar Espiral 9.

TAREAS	TÉCNICAS	TECNOLOGÍAS
Relacionar cada función cuadrática con la parábola que le corresponde. (Capítulo 1- tarea 1 Pág. 113)	Identificar tres puntos representativos en la parábola como los intersectos con el eje *x* y el vértice. Se evalúa en cuál de las funciones cuadráticas se obtiene estos puntos, reemplazando el valor de *x* y realizando las operaciones indicadas para obtener el valor de *y*.	D: función cuadrática, ecuación cuadrática, concavidad. T: vértice de la parábola.
Determinar si a la función dada le corresponde la gráfica. (Capítulo 1- tarea 2 Pág. 113)	Identificar tres puntos representativos en la parábola como los intersectos con el eje *x* y el vértice. Reemplazar el valor de *x* de cada uno de los puntos en la función y realizar las operaciones indicadas para establecer a cual función corresponde la parábola.	D: función cuadrática, ecuación cuadrática, Concavidad. T: vértice de la parábola.
Hallar los polinomios cuadráticos que pasan por los puntos dados y hallar las gráficas. (Capítulo 2-tarea 6 Pág. 120)	Con estos tres puntos y utilizando la ecuación $ax^2 + bx + c = 0$ se plantea una expresión en la cual la incógnita *x* y la respuesta sean reemplazadas por los valores numéricos dados. Con las tres ecuaciones obtenidas se plantea un sistema de ecuaciones lineales que se puede resolver por método de sustitución o igualación. Los valores obtenidos son los coeficientes que se ubican en la expresión general de la ecuación cuadrática. Hallar puntos de la función cuadrática, estos puntos se organizan en una tabla, se ubican en el plano cartesiano y se traza la gráfica.	T: desplazamiento (vertical y horizontalmente)

TAREAS	TÉCNICAS	TECNOLOGÍAS
Halla las soluciones para la ecuación. $ax^2 + bx + c = 0$ $Sí\ a = 0.$ (Capítulo 2-tarea 7 Pág. 120)	Decidir el grado de la ecuación resultante. Despejar la incógnita *x* mediante la propiedad uniforme y asociativa de los números reales, el valor obtenido para *x* es la solución única.	T: desplazamiento (vertical y horizontalmente)
Determinar la veracidad o falsedad sobre las afirmaciones hechas del polinomio. $ax^2 + bx + c = 0$ (Capítulo 3-tarea 5 Pág.124)	Se hace una parábola que ejemplifique cada caso. Se obtiene la parábola simétrica con respecto al eje *x* subrayando la gráfica que aparece al doblar la hoja por la línea que representa el eje *x*. Se establece la veracidad o falsedad del enunciado con respecto a lo observado en el papel sobre el corte de la parábola obtenida con el eje *x*.	D: función cuadrática, concavidad, gráfica de la función cuadrática. T: vértice de una parábola, ecuaciones de la parábola, raíces de la ecuación cuadrática, simetría, desplazamiento vertical y horizontal.
Si x_1 y x_2 son las raíces de un polinomio cuadrático, calcular. $(x_1 - x_2)^2 = 0$ (Capítulo 4-tarea 4 Pág.131)	Multiplicación de polinomios (binomios). Se obtiene un polinomio cuadrático.	Propiedades de los números reales.
Calcular el discriminante de los polinomios dados. (Capítulo 4-tarea 5 Pág.131)	Se desarrolla los productos que haya en el polinomio, se simplifica mediante la suma o resta de los términos semejantes. Identificar *a*, *b* y *c* en la ecuación cuadrática obtenida. Se reemplazan en la expresión que corresponde al discriminante y se realizan las operaciones indicadas. $b^2 - 4ac$	D: ecuación cuadrática. T: raíces de la ecuación cuadrática, desplazamiento vertical y horizontal.
Para los polinomios dados, conjeturar cual debe ser el signo del discriminante. Calcular el discriminante. (Capítulo 4-tarea 6 Pág.131)		
Trazar la gráfica de los polinomios. Describir las similitudes entre estos polinomios. ¿Qué se puede concluir sobre los discriminantes de los polinomios si se mueve horizontalmente la gráfica? ¿Y si se mueven verticalmente? (Capítulo 4-tarea 7 Pág.131)	Hallar puntos de la función cuadrática, estos puntos se organizan en una tabla, se ubican en el plano cartesiano y se traza la gráfica. La suma o resta de una cantidad a la variable *x* indica que son una misma función que ha sufrido una traslación horizontal. Se observa que al mover la parábola horizontalmente el discriminante de la función se mantiene constante. Si se mueven verticalmente el discriminante varia.	D: gráfica de la función cuadrática. T: raíces de la ecuación cuadrática, desplazamiento vertical y horizontal.
Para que valores de c el discriminante de: $x^2 + c = 0$ es el indicado. (Capítulo 4-tarea 9 Pág.136)	Identificar los coeficientes *a*, *b y c* en el polinomio. Sustituir *a*, *b* y *c* en la expresión $b^2 - 4ac$ del discriminante. Establecer para que valores se cumplen estas condiciones en *c*.	D: ecuación cuadrática. T: raíces de la ecuación cuadrática.

TAREAS	TÉCNICAS	TECNOLOGÍAS
		Propiedades de los números reales.
¿Para qué valores de c el polinomio$x^2 + 2x + c = 0$ tiene solución única? (Capítulo 4-tarea 10 Pág.136)	El discriminante de la ecuación cuadrática debe ser igual a cero, para esto se identifican los coeficientes a, b y c y se reemplazan en $b^2 - 4ac = 0$. Se despeja c y el valor obtenido es el buscado.	D: ecuación cuadrática. T: raíces de la ecuación cuadrática. Propiedades de los números reales.

Tareas – matemáticas – resolución de problemas

Una de las características de las tareas que involucraron el proceso de resolución de problemas es que permita el uso de diversas estrategias para resolverla o por lo menos que no haga evidente el procedimiento, por esta razón se eligió analizar la tarea Capítulo 4 -tarea 11 Pág. 131, que por sus características permite asumir que involucra el proceso de resolución de problemas (ver Figura 14), pero su planteamiento hace evidente el procedimiento o la técnica que se debe utilizar para resolverla, ya que se enuncia de forma similar al ejemplo.

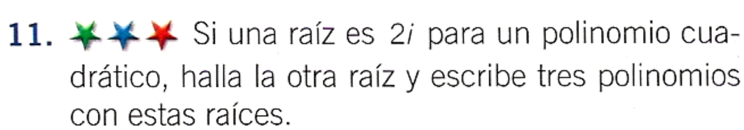

11. Si una raíz es $2i$ para un polinomio cuadrático, halla la otra raíz y escribe tres polinomios con estas raíces.

Figura 14 . Capítulo 4-tarea 11 Pág. 131 del texto escolar Espiral 9.

En la Tabla 9 se presenta la Praxeología Matemática del contexto matemático y el proceso de resolución de problemas.

Tabla 9. Tareas – matemáticas – resolución de problemas en el texto escolar Espiral 9.

TAREAS	TÉCNICAS	TECNOLOGÍAS
Plantear una ecuación cuadrática y encontrar sus raíces para resolver una situación. (Capítulo 3-tarea 7 Pág.124)	Plantear la ecuación del área y la ecuación del perímetro del lote rectangular, despejar la misma incógnita en ambas ecuaciones. Igualar las expresiones resultantes en cada caso. Simplificar la expresión resultante. Utilizar la fórmula cuadrática para hallar las raíces de la ecuación cuadrática obtenida.	D: ecuación cuadrática, perímetro, área. T: raíces de la ecuación cuadrática. Propiedades de los números reales.

TAREAS	TÉCNICAS	TECNOLOGÍAS
Hallar valores de a, h y k de tal forma que la expresión $a(x-h)^2+k=0$ Tenga raíces reales. (Capítulo 3-tarea. 8 Pág. 124)	Hallar los valores para h y k. Si k es negativo a debe ser positivo o si k es negativo entonces a debe ser positivo para que la gráfica corte el eje x en dos puntos.	D: función cuadrática, concavidad, ecuaciones de la parábola. T: vértice de una parábola, valor máximo o mínimo de una función cuadrática.
Encontrar los polinomios pedidos dados dos o tres puntos. (Capítulo 3-tarea 9 Pág. 124)	Con estos tres puntos y utilizando la ecuación $ax^2+bx+c=0$ se plantea una expresión en la cual la incógnita x y la respuesta sean reemplazadas por los valores numéricos dados. Con las tres ecuaciones obtenidas se plantea un sistema de ecuaciones lineales que se puede resolver por método de sustitución o igualación. Los valores obtenidos son los coeficientes que se ubican en la expresión general de la ecuación cuadrática	D: concavidad, ecuaciones de la parábola. . T: simetría, vértice de una parábola, ecuaciones de la parábola, teorema del factor. Propiedades de los números reales.
Hallar dos números cuyo producto sea 180 y su diferencia sea -3. (Capítulo 4-tarea 9 Pág. 131)	Plantear dos ecuaciones con los datos dados. Despejar en ambas ecuaciones la misma incógnita utilizando la propiedad uniforme y asociativa, se igualan las expresiones resultantes. Al simplificar esta expresión se obtiene una ecuación cuadrática que se puede resolver mediante la fórmula cuadrática. Verificar cual de las dos raíces cumple con la condición inicial.	D: Área, perímetro. T: raíces de la ecuación cuadrática. Propiedades de los números reales.
Un cuadrado tiene de lado $x+3$ y su área es $100cm^2$. Calcula el valor de x. (Capítulo 4-tarea 10 Pág. 131)	Plantear la ecuación que representa el área del cuadrado. Realizar la multiplicación de los factores y simplificar. Resolver la ecuación cuadrática que de aquí se obtiene mediante la fórmula cuadrática, escoger la raíz positiva.	D: Área. T: raíces de la ecuación cuadrática. Propiedades de los números reales.
Si una raíz es $2i$ para un polinomio cuadrático, halla la otra raíz y escribe tres polinomios con estas raíces. (Capítulo 4-tarea 11 Pág. 131)	La segunda raíz es el conjugado de la raíz compleja dada, con estas raíces se plantean los factores de la ecuación cuadrática. Se multiplican ambos factores para obtener la ecuación. Escoger tres números cualquiera y multiplicar la ecuación cuadrática por cada uno de estos tres números. Las tres son las ecuaciones con las raíces de la primera ecuación.	D: ecuaciones cuadráticas. T: raíces de la ecuación cuadrática. Propiedades de los números reales.
¿Para qué valores de c el polinomio $x^2+2x+c=0$ tiene solución única? (Capítulo 4-tarea 10 Pág.136)	El discriminante de la ecuación cuadrática debe ser igual a cero, para esto se identifican los coeficientes a, b y c y se reemplazan en $b^2-4ac=0$. Se despeja c y el valor obtenido es el buscado.	D: ecuación cuadrática. T: raíces de la ecuación cuadrática. Propiedades de los números reales.

TAREAS	TÉCNICAS	TECNOLOGÍAS
Con base en la figura: encontrar la ecuación de la parábola, la ecuación de la recta y las desigualdades correspondientes a la región sombreada. (Capítulo5-tarea 6 Pág. 141)	Identificar tres puntos de la parábola y plantear un sistema de ecuaciones lineales como se realizó en el Capítulo 3-tarea 9 Pág. 124. Resolver por cualquiera de los métodos determinados anteriormente. Identificar dos puntos de la recta, con ellos hallar la pendiente. Utilizando la ecuación punto pendiente establecer la ecuación. Si *y* son los puntos que están en la región sombreada, identificar cual de las dos funciones es mayor y cual menor y expresarlo algebraicamente.	D: sistemas de ecuaciones lineales, resolución de sistemas de ecuaciones, desigualdad cuadrática. Propiedades de los números reales.

Tareas – matemáticas -elaboración, comparación y ejercitación de procedimientos

De forma general se observo que las tareas que integran el contexto matemático con el proceso elaboración, comparación y ejercitación de procedimientos estuvieron enfocados al uso de algoritmos y de procedimientos, en este sentido guardan coherencia con los contenidos vistos y un nivel de complejidad apropiado, también se observo que estas tareas recurren al mismo tipo de representaciones (algebraica) usados en los ejemplos que se presentan dentro del estudio de la unidad y anteriores al taller de aplicación, lo cual evidencia fácilmente lo que se debe hacer, ya que, cuenta con los datos apropiados para promoverlo.

Para evidenciar el cumplimiento de lo dicho se escogió analizar la tarea Capítulo 1- tarea 3 Pág.114 en la cual se da la función cuadrática y se pide trazar la gráfica y determinar los puntos de intersección con los ejes (ver Figura 15), se observo que la tarea cumple aspectos básicos para ser resuelta y promover así la ejercitación de procedimientos y el uso de algoritmos para realizar la gráfica.

3. Traza la gráfica de cada función cuadrática y determina los puntos de intersección con los ejes coordenados.

a. $f(x) = 9 - x^2$ **b.** $g(x) = x^2 - \frac{1}{4}$

c. $h(x) = x^2 - 3$ **d.** $f(x) = 6 - x^2$

e. $g(x) = x^2 - 5$ **f.** $h(x) = 7 - x^2$

Figura 15. Capítulo 1- tarea 3 Pág.114 del texto escolar Espiral 9.

En la Tabla 10, se presenta la Praxeología Matemática.

Tabla 10. Tareas – matemáticas – elaboración, comparación y ejercitación de procedimientos del texto escolar Espiral 9.

TAREAS	TÉCNICAS	TECNOLOGÍAS
Trazar la gráfica de cada función cuadrática y determinar los puntos de intersección con los ejes coordenados. (Capítulo 1- tarea 3 Pág.114)	Hallar puntos de la función cuadrática, estos puntos se organizan en una tabla, se ubican en el plano cartesiano y se traza la gráfica. Identificar en la gráfica los puntos en los que la parábola corta al eje *x* y al eje *y*.	D: Función cuadrática, dominio, rango, Interceptos con los ejes.
Encontrar las raíces de las siguientes ecuaciones cuadráticas. (Capítulo 2-tarea 2 Pág.120)	Si las ecuaciones no están factorizadas se procede a expresar el polinomio a la forma: $ax^2 + bx + c = a(x + r_1)(x + r_2)$ despeje de la variable *x* en ambos factores.	D: ecuación cuadrática, función cuadrática. T: vértice de una parábola, raíces de la ecuación cuadrática, reflexión. Propiedades de los números reales.
Realiza el bosquejo de la gráfica de las siguientes parábolas. (Capítulo 2-tarea 4 Pág.120)	Para las ecuaciones factorizadas, ubico los ceros sobre el eje *x*, hallo el vértice mediante la ecuación del vértice, lo ubico en el plano y trazo la gráfica. Para las demás ecuaciones utilizo la fórmula cuadrática para hallar los ceros. Ubico los ceros sobre el eje *x*, hallo el vértice mediante la ecuación del vértice, lo ubico en el plano y trazo la gráfica.	D: función, función cuadrática, raíces de la función cuadrática, dominio, rango, gráfica de la función. T: simetría.
Escribir a cada gráfica el polinomio correspondiente. (Capítulo 2-tarea 5 Pág.120)	Identificar dos o tres puntos en la parábola. Se evalúa en cuál de las funciones cuadráticas se obtiene estos puntos, reemplazando el valor de *x* y realizando las operaciones indicadas para obtener el valor de *y*.	D: función cuadrática, dominio, rango, gráfica de la función cuadrática.
Trazar la gráfica de las funciones dadas. (Capítulo 3-tarea 6 Pág.124)	Hallar puntos de la función cuadrática, estos puntos se organizan en una tabla, se ubican en el plano cartesiano y se traza la gráfica.	D: función, función cuadrática, concavidad, dominio, rango, gráfica de la función. T: vértice, reflexión.
Calcular el discriminante de cada ecuación cuadrática. (Capítulo 4-tarea 1 Pág.131)	Solución similar al ejemplo 18. Se identifica *a*, *b* y *c* en la ecuación. Luego se reemplazan estos valores en la expresión que corresponde al discriminante y se realizan las operaciones indicadas. $b^2 - 4ac$.	D: ecuación cuadrática. T: raíces de la ecuación cuadrática.
Usar la fórmula cuadrática para solucionar las ecuaciones. (Capítulo 4-tarea 2 Pág.131)	Solución similar al ejemplo 14. Se identifica *a*, *b* y *c* en la ecuación. Luego se reemplazan estos valores en la fórmula cuadrática y se realizan las operaciones indicadas.	D: ecuación cuadrátic**a.** T: raíces de la ecuación cuadrática.

TAREAS	TÉCNICAS	TECNOLOGÍAS
Usar la fórmula cuadrática para hallar las raíces de las ecuaciones. (Capítulo 4-tarea 3 Pág.131)	Se identifica *a, b* y *c* en la ecuación. Luego se reemplazan estos valores en la fórmula cuadrática y se realizan las operaciones indicadas.	D: ecuación cuadrática**.** T: raíces de la ecuación cuadrática.
Halla el máximo o el mínimo de las siguientes funciones. (Capítulo 5-tarea 7 Pág.141)	Identificar *a,* y si $a>0$ el vértice es el punto máximo, si $a<0$ el vértice es el punto mínimo. Se hallan *a*, *b* y *c* en la función cuadrática y con la ecuación del vértice se halla el vértice de la función cuadrática.	D: función cuadrática, concavidad. T: vértice de una parábola, valor máximo o mínimo de una función cuadrática.

Tareas – otras disciplinas – modelación

Para el tipo de tareas que integraron el contexto otras disciplinas con el proceso de modelación se destaco la tarea Capítulo 4-tarea 8 Pág.136 que involucro el contexto otras disciplinas (física) (ver Figura 16), la importancia de su planteamiento se puede observar en el recurso gráfico que utiliza para explicitar lo dicho pero sin hacer evidente algún procedimiento, además el uso de este tipo de recursos permite que el estudiante considere sus conocimientos y técnicas que es lo que busca el proceso de modelación y no lo vea como un tipo de evaluación que se cierra al método impuesto por el libro, en este sentido se valora el planteamiento de esta tarea.

8. Un cohete se lanza desde el suelo con velocidad inicial de 100 m/s.

a. ¿Cuál es la altura máxima que alcanza?
b. ¿Cuánto tarda en regresar al piso?
c. ¿Cuánto dura el vuelo?
d. ¿En qué momento el cohete se encuentra a 100 m del piso?

Figura 16. Capítulo 4-tarea 8 Pág.136 del texto escolar Espiral 9.

En la Tabla 11 se presenta esta Praxeología Matemática.

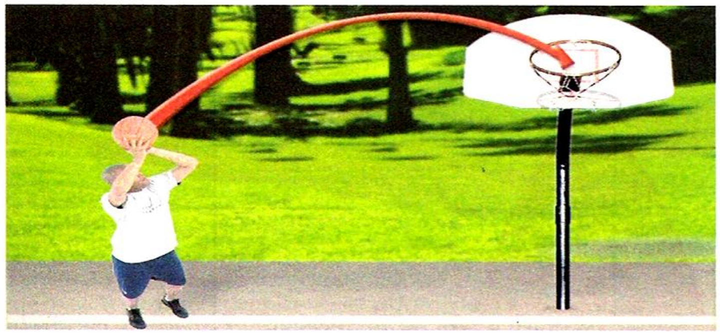
Tabla 11. Tareas – otras disciplinas – modelación del texto escolar Espiral 9.

CONTEXTO-OTRAS DISCIPLINAS	TAREAS	TÉCNICAS	TECNOLOGÍAS
Física: Lanzamiento de un objeto desde un globo.	Plantear una ecuación cuadrática y resolverla. Interpretar las soluciones con relación a la situación. (Capítulo 4-tarea 7 Pág.136)	Sustitución de valores numéricos en la función cuadrática que representa la altura. Despeje de la variable indicada. Hallar las raíces de la función utilizando uno de los métodos vistos (Factorización, Completación del cuadrado, raíces y ecuación cuadrática).	D: función cuadrática. T: valor máximo y mínimo de una función cuadrática, raíces de la ecuación cuadrática. Propiedades de los números reales.
Física: Lanzamiento de un proyectil.	Plantear una ecuación cuadrática con los datos y obtener información de esta ecuación. (Capítulo 4-tarea 8 Pág.136)	Sustitución de valores numéricos en la función cuadrática que representa la altura. Despeje de la variable indicada. Hallar las raíces de la función utilizando uno de los métodos vistos.	D: función cuadrática. T: valor máximo y mínimo de una función cuadrática, raíces de la ecuación cuadrática. Propiedades de los números reales.

Tareas – otras disciplinas – resolución de problemas

A pesar de que son pocas las tareas que trataron el proceso de resolución de problemas con el contexto otras disciplinas, este tipo de tareas se destaco en la mayoría de capítulos de la unidad, ya que en la mayoría de capítulos se propone al menos una tarea que integra este proceso con el contexto otras disciplinas. El proceso resolución de problemas se podría destacar mayormente con el contexto otras disciplinas, ya que este contexto es reconocido por proveer de muchas situaciones cuyo desarrollo tiene que ver con este proceso, sin embargo en toda la unidad no se proponen más que cinco tareas al respecto, una de ellas que trata de ser significativa para el estudiante es la tarea Capítulo 4-tarea 11 Pág.137 (ver Figura 17), en esta tarea puede haber dificultad para su resolución debido a un problema que se da en la información, esta tarea es en la que se debe plantear y graficar la expresión cuadrática dado dos puntos o tres puntos.

11. Un jugador de baloncesto lanza un balón hacia la canasta; supongamos que el desplazamiento del balón es una parábola. El centro del aro lo localizaremos en el punto (0, 3) y el balón es lanzado desde una distancia de 10 m respecto al eje vertical que pasa por el centro del aro. Sea x la distancia horizontal entre el balón y el eje vertical.



a. Si la trayectoria tiene su vértice en (3; 3,5), ¿cuál es la ecuación, en términos de x, que describe el balón si el lanzamiento es bueno? (¡El balón pasa por el aro!)

b. ¿Cuál es la trayectoria del balón si este pasa por (1; 3,2)?

c. Escribe tres ecuaciones más que representen lanzamientos válidos y que sean considerados buenos en un partido de baloncesto.

Figura 17. Capítulo 4- tareas 11 pág. 137

En la tarea se observo que al referenciar *x* como una distancia, no se aclara que *x* puede variar de acuerdo al punto en que se encuentre el balón, es decir que asumir a *x* como la distancia horizontal entre el balón y el eje vertical hace pensar más en un valor único (incógnita) a que sea una variable que puede tomar valores reales entre 0 y 10.

En la Tabla 12 se presentaron las demás tareas correspondientes al contexto otras disciplinas y al proceso resolución de problemas.

Tabla 12. Tareas – otras disciplinas – resolución de problemas del texto escolar Espiral 9.

CONTEXTO-OTRAS DISCIPLINAS	TAREAS	TÉCNICAS	TECNOLOGÍAS
Ed. Física: lanzamiento de un balón de basquetbol	Plantear y graficar la expresión cuadrática dados dos o tres puntos. (Capítulo 4-tarea 11 Pág.137)	Encontrar el tercer punto simétrico a la primera raíz, con los tres puntos plantear un sistema de ecuaciones lineales que se resuelve por el método de sustitución o igualación.	D: función cuadrática, grafica de la función cuadrática, sistema de ecuaciones lineales. T: vértice de una parábola, reflexión. Propiedades de los números reales.
Dimensiones de un puente.	Graficar la función cuadrática y obtener información sobre la distancia entre los cortes con el eje *x*, así como la altura máxima de la parábola con respecto al eje *x*. (Capítulo 1-tarea 4 Pág.114)	Hallar algunos puntos de la función cuadrática, estos puntos se organizan en una tabla, se ubican en el plano cartesiano y se traza la gráfica.	D: función cuadrática, dominio, rango, Interceptos. T: reflexión.
Ingresos de un comerciante	Obtener las imágenes de una función cuadrática dado un conjunto de elementos del dominio y la expresión algebraica. (Capítulo 1-tarea 5 Pág.114)	Se sustituye la variable x por un valor determinado, se realizan las operaciones indicadas por la expresión algebraica de la función cuadrática.	D: función cuadrática, dominio, rango.
Lanzamiento de un proyectil	Hallar el vértice de la función cuadrática. Encontrar las raíces de la función cuadrática. (Capítulo 4-tarea 14 Pág.137)	Sustitución de valores numéricos en la función cuadrática que representa la altura. Despeje de la variable indicada. Hallar las raíces de la función cuadrática utilizando la fórmula cuadrática.	D: función cuadrática. T: valor máximo y mínimo de una función cuadrática, raíces de la ecuación cuadrática. Propiedades de los números reales.
Campo petrolífero	Con base en la figura: encontrar la ecuación de la parábola, la ecuación de la recta y las desigualdades correspondientes a la región sombreada. (Capítulo 5-tarea 5 Pág.141)	Identificar tres puntos de la parábola y plantear un sistema de ecuaciones lineales como se realizó en Capítulo 3-tarea 9 Pág. 124 Resolver por cualquiera de los métodos determinados anteriormente. Identificar dos puntos de la recta, con ellos hallar la pendiente. Utilizando la ecuación punto pendiente establecer la ecuación. Si *y* son los puntos que están en la región sombreada, identificar cuál de las dos funciones es mayor y	D: sistemas de ecuaciones lineales, desigualdad cuadrática, resolución de sistemas de ecuaciones. Propiedades de los números reales.

CONTEXTO-OTRAS DISCIPLINAS	TAREAS	TÉCNICAS	TECNOLOGÍAS
		cual menor y expresarlo algebraicamente.	

Tareas – matemáticas – modelación.

Se observo que las tareas que propician el desarrollo de este tipo de proceso se dan en los últimos capítulos de la unidad, a la vez que con su propuesta se integran las diferentes tecnologías vistas a lo largo de la unidad, las cuales implementan también los conceptos y definiciones de la geometría que contribuyen a mostrar por medio de las figuras rectangulares y en triángulos el cálculo de áreas mediante la ecuación cuadrática.

Lo anterior se evidencio en las tres tareas que se destacan para este contexto y proceso, esto se observa en la Tabla 13.

Tabla 13.Tareas – otras disciplinas – modelación del texto escolar Espiral 9.

TAREAS	TÉCNICAS	TECNOLOGÍAS
Hallar las dimensiones de un triángulo rectángulo de área $60cm^2$, si la diferencia de la medida de sus catetos es 7cm. Capítulo 4 - tarea 4 Pág.136	Determinar la expresión algebraica del perímetro y del área, relacionar las variables del perímetro con el área del rectángulo, para encontrar una expresión algebraica en términos de una variable. Hallar las raíces de la ecuación cuadrática obtenida mediante la fórmula cuadrática, determinar la raíz positiva.	D: área, perímetro. T: raíces de la ecuación cuadrática. Propiedades de los números reales.
Hallar las dimensiones de un triángulo rectángulo cuya medida de sus catetos suma 31 cm y la hipotenusa mide 25 cm. Capítulo 4-tarea 5 Pág.136	Plantear una ecuación para la hipotenusa y la suma de los lados del triángulo, relacionar las variables de la hipotenusa y de la suma de los lados para encontrar una expresión algebraica en términos de una sola variable. Hallar las raíces de la ecuación cuadrática obtenida mediante la fórmula cuadrática, identificar la raíz positiva.	D: ecuación cuadrática. T: raíces de la ecuación cuadrática, teorema de Pitágoras. Propiedades de los números reales.
Encontrar el área máxima de un rectángulo cuyo perímetro es fijo. Capítulo 4-tarea 6 Pág.136	Determinar la expresión algebraica del perímetro, relacionar las variables del perímetro con el área del rectángulo, para encontrar una expresión algebraica en términos de una variable. Hallar el vértice de la función cuadrática del área (con la fórmula del vértice o la gráfica)	D: área, perímetro, ecuación cuadrática, concavidad . T: vértice de una parábola, raíces de la ecuación cuadrática. Propiedades de los números reales.

3.4.4. LAS PRAXEOLOGÍAS MATEMÁTICAS EN EL TEXTO ESCOLAR DELTA 9

En la clasificación de las Praxeologías Matemáticas se siguió la misma estructura del texto escolar Espiral 9.

Tareas – Vida Cotidiana – Resolución de problemas

Dentro de este tipo de Praxeologías Matemáticas, se resalto que en cada una de las unidades analizadas hay un proceso gradual en lo que se refiere a la solución de problemas utilizando situaciones de la vida cotidiana o en contextos de las mismas matemáticas. En el texto Delta 9 los problemas de la vida cotidiana mostraron una pequeña imagen que hace referencia a la situación propuesta, otros por el contrario solo presentan el enunciado.

Así pues dentro de las 6 unidades analizadas; 1 acerca de la función cuadrática y 5 acerca de la ecuación cuadrática se caracterizan por mostrar una menor cantidad de ejercicios de este tipo en comparación a los demás propuestos por el texto, por mencionar dos ejemplos: algorítmicos o de razonamiento.

El planteamiento de este tipo de tareas trata de ser explícita y coherente con respecto al entorno del estudiante así como a situaciones que él pueda entender, de igual forma se busca que las palabras y expresiones utilizadas sean claras para el estudiante y tenga muy pocas dificultades en la solución del mismo. Pero sin embargo pudimos encontrar en la tarea siguiente (ver Figura 18), que puede haber dificultad para su resolución debido que la imagen que se presenta para hacer referencia al problema tiene muy poco que ver con la información dicha, esta tarea es Capítulo 2-tarea 15 Pág.175 en la que se debe plantear la ecuación cuadrática y resolverla aplicando el método de completar el cuadrado.

15. En una reunión hay el triple del número de mujeres que de hombres, y el doble del número de niños que de hombres y mujeres juntos. ¿Cuántas mujeres, hombres y niños hay si asistieron a la reunión 60 personas?

Figura 18. Capítulo 2-tarea 15 Pág.175 del texto escolar Delta 9

En la tarea se pudo referenciar que la imagen no es totalmente la adecuada para tomarla como base para la solución del problema que es lo quiere buscar el texto con ella; es simplemente una imagen que quiere mostrar un núcleo de personas reunidas; por lo tanto el estudiante si quiere hacer uso de la imagen como apoyo para la solución del problema no lo va a poder hacer y solamente quedará limitado a la información escrita (enunciado) que está antes de la imagen.

En la Tabla 14 se presentaron las demás tareas correspondientes al contexto **vida cotidiana y al proceso resolución de problemas.**

Tabla 14. Tareas – Vida cotidiana – Resolución de problemas del texto escolar Delta 9.

CONTEXTO- VIDA COTIDIANA/ DIARIA	TAREAS	TÉCNICAS	TECNOLOGÍAS
Edad: Hallar la edad de una persona.	La edad de Laura hace 35 años era la raíz cuadrada de la edad que tendrá dentro de 35 años. Determinar la edad actual. (Capítulo 2-tarea 11 Pág. 175)	Plantear las ecuaciones que representan las edades en cada caso, igualar estas ecuaciones y resolver la expresión resultante. Utilizar la fórmula cuadrática para hallar las raíces de la ecuación cuadrática obtenida.	D: ecuaciones cuadráticas**.** T: raíces de ecuaciones cuadráticas. Propiedad de los números reales.
Edades: Hallar las edades de los miembros de una familia.	Hallar las edades de los cuatro miembros de una familia de acuerdo a los	Plantear la edad de cada miembro de la familia en términos de la edad de la madre,	D: ecuaciones cuadráticas**.**

CONTEXTO- VIDA COTIDIANA/ DIARIA	TAREAS	TÉCNICAS	TECNOLOGÍAS
	datos que relacionan la edad de la madre con la de los otros tres. (Capítulo 2-tarea 12 Pág. 175)	plantear la suma de las edades igualada al valor total que se da, simplificar la expresión y despejar la incógnita, hallar la edad de los otros miembros con este dato obtenido.	T: raíces de ecuaciones cuadráticas. Propiedad de los números reales.
Asistentes a una reunión.	Hallar la cantidad de hombres, mujeres y niños que asistieron a una reunión de acuerdo a los datos que relacionan la cantidad de hombres con la del resto de asistentes. (Capítulo 2-tarea 15 Pág. 175)	Plantear la cantidad de cada tipo de asistentes en términos de la cantidad de hombres, plantear la suma de las cantidades igualada a la cantidad total que se da, simplificar la expresión y despejar la incógnita, hallar la cantidad de los otros asistentes con este dato obtenido.	
Repartir una cantidad de libros entre tres personas.	Hallar la cantidad de libros que reciben tres personas de acuerdo a los datos que relacionan la cantidad de libros que recibe una persona con respecto a las otras dos. (Capítulo 2-tarea 19 Pág. 175)	Plantear la cantidad que recibe cada uno de los tres individuos en términos de la cantidad recibida por la persona de referencia, plantear la suma de las cantidades igualada a la cantidad total que se da, simplificar la expresión y despejar la incógnita, hallar la cantidad de libros recibida por los otros dos de acuerdo al dato obtenido.	D: ecuaciones cuadráticas. T: raíces de ecuaciones cuadráticas. Propiedades de los números reales.
Compra de una cantidad de gafas	Mauricio compro cierto número de gafas playeras en US 300. Podría haber comprado 10 gafas más, si cada una hubiese costado US 5 menos, ¿Cuántas gafas compro? (Capítulo 2-tarea 20 Pág. 175)	Plantear la igualdad de las expresiones que representan el precio pagado, menos el dinero que se hubiera ahorrado si cada una hubiera costado US 5 menos, y la expresión del cociente entre la suma del total de gafas compradas y las 10 que hubiera podido adquirir, y el precio pagado menos el dinero que se hubiera ahorrado si cada una hubiera costado US 5 menos. Simplificar y resolver la ecuación cuadrática resultante.	D: ecuación cuadrática. T: raíces de la ecuación cuadrática. Propiedad de los números reales.
Edades: hallar las edades del padre e hijo	La edad de un padre es el cuadrado de la de su hijo. Dentro de 24 años la edad del padre será el doble de la del hijo ¿Cuántos años tiene ahora cada uno? (Capítulo 3-tarea 14 Pág.181)	Plantear la ecuación que relaciona las edades de ambos y la ecuación que relaciona en 24 años las edades de ambos, se despeja la incógnita que representa la edad del padre en cada caso y se igualan las expresiones resultantes, se resuelve la ecuación cuadrática obtenida y la solución representa la edad actual del	

CONTEXTO- VIDA COTIDIANA/ DIARIA	TAREAS	TÉCNICAS	TECNOLOGÍAS
		hijo.	
Costo de tres artículos	Por una cámara digital, unos binóculos y un equipo de pesca, Oscar pago US 1430. La cámara es 5 veces más costosa que los binóculos, y estos cuestan el doble que el equipo de pesca. ¿Cuál era el precio de cada artículo? (Capítulo 3-tarea 16 Pág.181)	Plantear el costo de cada artículo en términos del costo de los binóculos, plantear la suma de los costos igualado al costo total que se da, simplificar la expresión y despejar la incógnita, hallar el precio de los otros artículos con este dato obtenido.	D: ecuación cuadrática. T: raíces de ecuaciones cuadráticas. Propiedad de los números reales.
Dimensiones de un patio	Un hombre desea usar 6 metros cúbicos de concreto para construir el piso de un patio rectangular. Si la longitud del patio debe ser el doble del ancho y el grosor del piso debe ser 8 cm, ¿Cuáles son las dimensiones del patio? (Capítulo 3-tarea 19 Pág.181)	Plantear la ecuación del volumen y la ecuación del perímetro del patio, despejar la misma incógnita en ambas ecuaciones. Igualar las expresiones resultantes en cada caso. Simplificar la expresión resultante. Utilizar la fórmula cuadrática para hallar las raíces de la ecuación cuadrática obtenida.	D: ecuación cuadrática, perímetro, área. T: raíces de ecuaciones cuadráticas. Propiedades de los números reales.

Tareas – Vida Cotidiana – Modelación

En la siguiente tabla se analizaron las Praxeologías Matemáticas asociadas a las actividades propuestas por el texto que hacen referencia al contexto de la vida cotidiana y que van de la mano con la modelación; este tipo de tareas asignaron un alto valor al análisis e interpretación de la situación para responder o para realizar el procedimiento apropiado. Existen muy pocos ejercicios que mostraron el desarrollo de este proceso, dentro de las 6 unidades analizadas solamente dos (para nosotros) actividades muestran tareas de este tipo, las demás actividades van más de la mano con aquel proceso que reúne ejercicios de otras disciplinas con contextos de la vida cotidiana.

Este tipo de tareas propicio un nivel avanzado en el manejo y comprensión de los conceptos matemáticos así como de los procedimientos que están relacionados con estos conceptos, hecho que requiere indagar por las concepciones del estudiante tanto previas como posteriores al desarrollo de la tarea, para saber cómo el estudiante entiende la tarea y la relaciona con la solución que puede plantear. Sin embargo pudimos ver que en la Capítulo 4- Tarea 14 Pág.185 (ver Figura 18) no se hizo un análisis profundo acerca de lo que el estudiante puede concluir al resolver un problema de esta categoría, simplemente se propone la actividad para que el estudiante encuentre un valor numérico de personas y dinero aplicando la ecuación cuadrática.

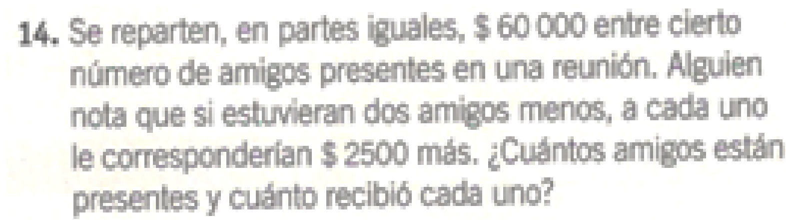

14. Se reparten, en partes iguales, \$ 60 000 entre cierto número de amigos presentes en una reunión. Alguien nota que si estuvieran dos amigos menos, a cada uno le corresponderían \$ 2500 más. ¿Cuántos amigos están presentes y cuánto recibió cada uno?

Figura 19. Capítulo 4- Tarea 14 Pág.185 del texto escolar Delta 9.

En la Tabla 15 se presentaron las tareas correspondientes al contexto **vida cotidiana y al proceso de modelación.**

Tabla 15. Tareas – Vida cotidiana – Modelación del texto escolar Delta 9.

CONTEXTO-VIDA COTIDIANA /DIARIA	TAREAS	TÉCNICAS	TECNOLOGÍAS
Repartición de dinero.	Se repartes, en partes iguales \$ 60.000 entre cierto número de amigos presentes en una reunión. Alguien nota que si estuvieran dos amigos menos, a cada uno le corresponderían \$ 2500 más. ¿Cuántos amigos están presentes y cuánto recibió cada uno? (Capítulo4-tarea 14 Pág.185)	Plantear la ecuación cuadrática que le da solución al problema propuesto, por lo tanto se debe tener en cuenta: $x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$ Donde se le puede dar solución a la aplicación.	D: ecuación cuadrática. T: raíces de ecuaciones cuadráticas. Propiedades de los números reales.
Deportista.	Un deportista camino 30 km en un determinado número de horas. Si hubiese caminado 1 km más por hora habría tardado una hora menos en recorres la misma distancia. ¿Cuántos kilómetros por hora recorrió? (Capítulo 4-tarea 15 Pág.185)	Utilizando la ecuación de la velocidad, se plantea la relación entre la distancia y el tiempo de acuerdo a los datos y las condiciones. Se resuelve esta expresión mediante la solución de la ecuación cuadrática.	D: ecuaciones cuadráticas. T: raíces de ecuaciones cuadráticas. Propiedades de los números reales.

Tabla 15. Tareas – Vida cotidiana – Modelación del texto escolar Delta 9

Tareas – matemáticas – comunicación

Las Praxeologías Matemáticas que se presentaron están dentro del contexto de las matemáticas asociadas al proceso comunicativo; la gran mayoría de tareas propuestas dentro de este grupo tienen en común la solución de ejercicios aplicando la ejercitación de algoritmos que en la mayoría de veces se realiza en un solo registro que es el algebraico. Este tipo de tareas son las frecuentes en las lecciones analizadas; se realizan sus enunciados de manera que el estudiante aplique la teoría enseñada dentro de la unidad, también debe de tener en cuenta la explicación realizada en los ejemplos anteriores a los ejercicios propuestos.

Este tipo de tareas llevan al estudiante a usar el lenguaje matemático para expresar ideas matemáticas de manera clara y precisa dentro de distintos contextos; pero sin embargo se presentan algunas actividades donde esta información aparece de manera muy explícita y en algunos casos "pareciera" que no se presentara.

En la tarea Capítulo 4-tarea 1 Pág. 174 (ver Figura 20) donde el estudiante debe decidir si las ecuaciones presentadas se pueden o no resolver por el método de completar el cuadrado; no se especifica cuál es la necesidad de realizar esta conclusión, simplemente el ejercicio lleva al estudiante a suponer un proceso donde puede solucionar sin saber a ciencia cierta que la solución es la correcta. Por otra parte la tarea deja de manera implícita la forma de solución de los ejercicios por la forma de completar el cuadrado, una forma precisa de establecer el enunciado seria resolver todos los ejercicios propuestos y clasificarlos según su método de solución.

1. Decide si las siguientes ecuaciones se pueden resolver por el método completar el cuadrado.

a. $x^2 - 3x = 4$

b. $x^2 = 6x - 5$

c. $x^2 + x + 1 = 0$

d. $y^2 - 7y = -9$

e. $y^2 + 15 = -4y$

f. $y^2 + 2y + 2 = 0$

g. $z^2 + 2z + 1 = 0$

h. $z^2 - 18z + 81 = 0$

i. $4x^2 + 20x + 30 = 0$

j. $m^2 - 4m - 4 = 0$

k. $m^2 + 10m - 11 = 0$

Figura 20. Capítulo 2- tarea 1 Pág. 174 del texto escolar Delta 9.

En la Tabla 16 se presentaron las otras tareas correspondientes al contexto **matemáticas y al proceso de comunicación.**

Tabla 16. Tareas – Matemáticas – Comunicación del texto escolar Delta 9.

TAREAS	TÉCNICAS	TECNOLOGÍA
Describir los movimientos que se deben aplicar a la gráfica de la función $y = x^2$ para obtener las gráficas de las funciones dadas. (Capítulo 4- tarea 1 Pág. 119)	Realizar la gráfica de la función dada, así como la de cada una que se quiere comparar. Establecer las unidades de traslación que separan la segunda gráfica con respecto a la de referencia, así como la dirección del desplazamiento, concluir al respecto el tipo de desplazamiento y las unidades que las separan.	D: Función cuadrática, gráfica de una función cuadrática. T: desplazamiento (vertical y horizontalmente)
Determinar, entre los valores dados para k, cual(es) permiten que la parábola $y = x^2 - 4x + 2k + 4$ Pase por el origen. (Capítulo 4- tarea 2 Pág. 119)	Sin considerar el término *2k*, evaluar *f(0)*, con el valor obtenido se plantea la ecuación *2k = -f(0),* la resolución de esta ecuación da el valor que debe tomar k para que cumpla la condición *f(0)= 0* .	D: Función cuadrática. Propiedades de los números reales.
En un campo de forma rectangular, el largo tiene 6 metros más que el ancho, si el área es de 104 metros cuadrados, hallar el largo. (Capítulo 4- tarea 3 Pág. 119)	Se plantea con estos datos la ecuación que representa el área del campo en términos de una incógnita x (ancho del campo), se resuelve la ecuación cuadrática obtenida mediante la fórmula cuadrática.	D: ecuación cuadrática. T: raíces de la ecuación cuadrática.
Determinar cuál de los puntos dados no pertenece a la función cuadrática. (Capítulo 4- tarea 4 Pág. 119)	Evaluar cada uno de los puntos para decidir su pertenencia a la función.	D: función cuadrática,
Dada una función cuadrática *f(x)* y una función lineal *g(x)*, determinar algebraicamente los puntos de intersección y trazar en un mimo plano ambas gráficas para corroborar la solución. (Capítulo 4- tarea 6 Pág. 119)	Se igualan ambas funciones y se simplifican los términos semejantes, se resuelve la función cuadrática obtenida, los valores obtenidos determinan los puntos de corte. Se tabulan 4 o 5 puntos de cada función, se ubican en el plano cartesiano y se trazan las gráficas.	D: Función cuadrática, gráfica de una función cuadrática. T: raíces de la función cuadrática. Propiedades de los números reales.
Clasifica las siguientes ecuaciones en cuadráticas (C), lineales (L) o ninguna (N). (Capítulo 1- tarea 1 Pág. 169)	Según el conocimiento que se tiene acerca de las funciones; se debe clasificar cada una de ellas según la clase solicitada; lineal cuadráticas o ninguna. Por otra parte se puede tener en cuenta también el grado que acompaña a cada una de las ecuaciones propuestas, de acuerdo a esto servirá como una base para su clasificación.	D: Función, función cuadrática.
Decide si las siguientes ecuaciones se pueden resolver por el método completar el cuadrado. (Capítulo 2-tarea 1 Pág. 174)	Se transforma cada ecuación cuadrática en su forma estándar, a otra ecuación cuadrática equivalente que involucre un trinomio cuadrado perfecto completado con el término ax^2 y el término bx, de manera	D: Función cuadrática, Ecuación cuadrática. T: soluciones de la ecuación cuadrática.

TAREAS	TÉCNICAS	TECNOLOGÍA
	que la última ecuación construida se resuelva fácilmente mediante el método de la raíz cuadrada. Por otra parte, cada ecuación de la forma: $x^2 + bx + c = 0$ se puede resolver por el método de completar el cuadrado siempre y cuando $b^2 - 4ac \geq 0$.	
Averigua el número de soluciones de las siguientes ecuaciones de segundo grado sin resolverlas. (Capítulo 3-tarea 1 Pág.180)	Teniendo en cuenta el tipo de solución que puede existir cuando se resuelven ecuación de segundo grado se debe hacer referencia en lo siguiente: $\Delta > 0$. Dos soluciones reales distintas. $x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2-4ac}}{2a}$. $\Delta < 0$. Ninguna solución real. No tiene. $\Delta = 0$. Una única solución (repetida dos veces) $x = \frac{-b}{2a}$.	T: Raíces de la ecuación cuadrática.
¿Cuántas soluciones puede tener la ecuación cuadrática incompleta $ax^2 + b = 0$? (Capítulo 3-tarea 2 Pág.180)	Tomando como referencia $ax^2 + b = 0$, tenga en cuenta: $\Delta > 0$. Dos soluciones reales distintas. $x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2-4ac}}{2a}$. $\Delta < 0$. Ninguna solución real. No tiene. $\Delta = 0$. Una única solución (repetida dos veces) $x = \frac{-b}{2a}$.	T: Raíces de la ecuación cuadrática.
¿Cuántas soluciones puede tener la ecuación cuadrática incompleta $ax^2 + bx = 0$? (Capítulo 3-tarea 3 Pág.180)	Tomando como referencia $ax^2 + bx = 0$, tenga en cuenta: $\Delta > 0$. Dos soluciones reales distintas. $x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2-4ac}}{2a}$. $\Delta < 0$. Ninguna solución real. No tiene. $\Delta = 0$. Una única solución (repetida dos veces) $x = \frac{-b}{2a}$.	T: Raíces de la ecuación cuadrática.
Inventa: a. Una ecuación cuadrática completa con dos soluciones. b. Una ecuación cuadrática completa con una solución. c. Una ecuación cuadrática completa sin solución. (Capítulo 3-tarea 4 Pág.180)	Teniendo en cuenta los tipos de solución conocidos, analizar cada situación y proponer una ecuación: para tener en cuenta: $\Delta > 0$. Dos soluciones reales distintas. $x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2-4ac}}{2a}$. $\Delta < 0$. Ninguna solución real. No tiene. $\Delta = 0$. Una única solución (repetida dos veces) $x = \frac{-b}{2a}$.	D: Ecuación cuadrática. T: Raíces de la ecuación cuadrática.
Determina los valores de k para que la ecuación cuadrática $\left(\frac{11-5k}{4}\right)x^2 + (k-1)x + 1 = 0$ tenga una única raíz real. (Capítulo 3-tarea 5 Pág.180)	A partir del conocimiento sobre la teoría de ecuaciones cuadráticas se buscan los valores posibles de k para que la ecuación tenga una única solución real; por lo tanto: $\Delta = 0$. Una única solución (repetida dos veces) $x = \frac{-b}{2a}$.	D: Ecuación cuadrática. T: Raíces de la ecuación cuadrática. Propiedades de los números reales.
Escribir todos los pasos seguidos	A cada paso del proceso de resolución	D: ecuación cuadráticas.

TAREAS	TÉCNICAS	TECNOLOGÍA
por los babilonios para resolver una ecuación cuadrática. Diga que método utilizaban los babilonios para resolver etas ecuaciones. (Capítulo 3-tarea 6 Pág.181)	indicar que propiedad o procedimiento matemático se llevó a cabo de acuerdo al método de completar el cuadrado.	T: raíces de la ecuación cuadrática
La suma de tres números positivos es 30. El segundo es el doble del cuadrado del primero, y el tercero es el triple de primero. Halla los tres números. (Capítulo 4-tarea 1 Pág.185)	Plantear la ecuación que representa la suma de los tres números en términos del primer número, Utilizar la fórmula cuadrática para hallar las raíces de la ecuación cuadrática obtenida.	D: ecuación cuadrática,. T: raíces de la ecuación cuadrática.
Teniendo en cuenta el conjunto solución de las desigualdades cuadráticas si $a < b$, escribir una desigualdad cuadrática en forma estándar cuyo conjunto solución sea el dado en cada caso. (Capítulo 5-tarea 11 Pág.191)	A partir de la definición de desigualdades cuadráticas donde en la variable x es una expresión cuadrática que en vez de estar determinada por una igualdad involucra una relación de orden.	D: Desigualdad cuadrática.

Tareas – matemáticas – razonamiento

Las Praxeologías Matemáticas que se presentaron están dentro del contexto de las matemáticas asociadas al proceso de razonamiento; este tipo de tareas se caracterizaron por asociar ejercicios que se resuelven de manera gráfica con algunos que se utiliza procesos algorítmicos para llegar a su solución. Este tipo de tareas al igual de las anteriores son abundantes dentro de las 6 unidades analizadas y busca que el estudiante interprete, analice, resuelve y concluya a partir de conceptos y procedimientos previamente estudiados.

Este tipo de tareas dentro del texto Delta 9 son conocidas también como ***Razonamiento lógico*** y busca establecer actividades que le posibiliten al estudiante desarrollar habilidades y competencias en matemáticas donde a la vez se divierta y afiance su ingenio. Pero sin embargo en la tarea: Capítulo 2- tareas 6 Pág. 174 (ver Figura 21) se encontró que el estudiante debe de utilizar una supuesta propiedad que está en un ejemplo de la unidad, si se entra en un análisis a fondo de esta propiedad nos damos cuenta que es un caso de factorización y se debe utilizar en la solución de la tarea en donde $x^2 + bx + c = (x + m)(x + n)$; por lo tanto el estudiante puede tener otra impresión de los ejercicios si establecieran pautas diferentes en la enunciación y seria más aplicable el razonamiento al cual se remite el texto.

6. Utiliza la propiedad establecida en el ejemplo 9, para reconstruir la ecuación cuadrática $x^2 + bx + c = 0$, que tiene dos soluciones que satisfacen:

a. Su suma es 15 y su producto es 4.

b. Su suma es –12 y su producto es 7.

c. Su suma es –20 y su producto –2.

d. Su suma es 15 y su producto es –6.

e. Una solución es $-\frac{1}{4}$, y el producto de las soluciones es 8.

f. Una solución es $2 - \sqrt{2}$, y la suma de las soluciones es 2.

Figura 21. Capítulo 2-tarea 6 Pág. 174 del texto escolar Delta 9.

En la Tabla 17 se presentaron las demás tareas correspondientes al contexto **matemáticas y al proceso de razonamiento.**

Tabla 17. Tareas – Matemáticas – Razonamiento del texto escolar Delta 9.

TAREAS	TÉCNICAS	TECNOLOGÍAS
Determinar los posible valores de *m* para que: La gráfica de la función $f(x) = mx^2 - x - 1$ Intercepte al eje *x* en dos puntos. La gráfica de la función $f(x) = -x^2 - mx - 5$ Intercepte al eje *x* en un solo punto. (Capítulo 4- tarea 7 Pág. 119)	Se utiliza la expresión para hallar el vértice de la función, como el valor *x* debe ser *1/2m,* entonces $f(1/2m) = \frac{1-2m}{4m}$ A partir de esto se concluye que si *m>0* entonces la función abre hacia arriba y el vértice está por debajo del eje y. Si *m<0* la función abre hacia abajo y el vértice está por debajo del eje, así que *m* debe ser mayor que cero. Para resolver la segunda, se procede de igual forma, se halla la expresión correspondiente a la componente *k*, y se iguala a cero, se resuelve y con el valor hallado se encuentra *h (h, k).*	D: función cuadrática, interceptos con los ejes, T: vértice, máximo o mínimo de una función cuadrática, raíces de la ecuación cuadrática. Propiedades de los números reales.
De acuerdo con la gráfica de cada función, establece las soluciones de la correspondiente ecuación cuadrática. *Cuatro imágenes de ecuaciones cuadráticas graficadas en el plano. (Capítulo 1- tarea 2 Pág. 169)	Se establecen las soluciones de cada una de las gráficas dadas utilizando el ***método gráfico*** como elemento específico para su solución; donde la solución de la gráfica serán los ***puntos de corte de corte*** de la gráfica con el eje *x*.	D: función cuadrática, interceptos con los ejes. T: vértice, máximo o mínimo de una función cuadrática, raíces de la ecuación cuadrática. Propiedades de los números reales.
Plantea una ecuación cuadrática para resolver cada uno de los siguientes problemas; se realizan	Se plantean las expresiones para cada uno de los enunciados y se resuelve mediante la fórmula cuadrática.	D: ecuación cuadrática. T: raíces de la ecuación

TAREAS	TÉCNICAS	TECNOLOGÍAS
enunciados los cuales se deben plantear y resolver. (Capítulo 2-tarea 5 Pág. 170)		cuadrática.
Utiliza la propiedad establecida en el ejemplo 9, para reconstruir la ecuación cuadrática $x^2 + bx + c = 0$. Que tiene dos soluciones que satisfacen: a. Su suma es 15 y su producto es 4. b. Su suma es -12 y su producto es 7. c. Su suma es -20 y su producto es -2. d. Su suma es 15 y su producto es -6. (Capítulo 2-tarea 6 Pág. 174	Se plantean cada una de las ecuaciones cuadráticas para los ejercicios propuestos en los cuales se debe tener en cuenta lo siguiente: Suponer que la ecuación se puede resolver por factorización en el conjunto de los ***enteros*** (***z***); es decir: $x^2 + bx + c = (x + m)(x + n)$, donde luego se debe de buscar dos números enteros que satisfagan el producto y la suma en la ecuación presentada.	D: ecuación cuadrática. T: raíces de la ecuación cuadrática.
Resuelve cada situación. Plantear y resolver cada situación utilizando el método de completar el cuadrado para cada una de las ecuaciones cuadráticas. (Capítulo 2-tarea 7 Pág. 174-175)	Plantear la situación de cada una de las ochos situaciones propuestas utilizando el método de completar, donde se debe tener en cuenta: la transformación de una ecuación cuadrática en forma estándar a otra ecuación cuadrática equivalente que involucre un trinomio cuadrado perfecto completando el término ax^2 y el término bx, de tal manera que la última ecuación construida se resuelva fácilmente utilizando el método de la raíz cuadrada.	D: ecuación cuadrática. T: raíces de la ecuación cuadrática.
Escribe un resultado general para hallar los valores de dos números reales x, y, cuya suma sea s y su producto xy es máximo. (Capítulo 5-tarea 7 Pág.191)	Encontrar el resultado utilizando un proceso de factorización para encontrar los valores que satisfagan la ecuación cuadrática (***máximos y mínimos***) por lo tanto: $x^2 + bx + c = (x + m)(x + n)$, donde luego se debe de buscar dos números enteros que satisfagan el producto y la suma en la ecuación encontrada.	D: ecuación cuadrática, concavidad de la parábola. T: raíces de la ecuación cuadrática, vértice, máximo o mínimo de una función cuadrática.

Tareas – matemáticas – resolución de problemas

Las Praxeologías Matemáticas presentadas en la siguiente tabla hacen énfasis al contexto de las matemáticas asociadas con el proceso de la resolución de problemas; este tipo de tareas en su mayoría buscaban el uso de diversas estrategias para resolverlas o por lo menos que no hagan evidente el procedimiento de su solución; la cantidad de ejercicios de este tipo se presentan de menos frecuentes dentro de las 6 lecciones analizadas, cada una de ellas tiene en sus actividades de piensa y practica una sección dedicada a la resolución de problemas aplicando las teorías aprendidas anterior a los talleres propuestos.

Este tipo de tareas también buscaban implementar problemas variados que permiten al estudiante aplicar distintas estrategias y traducir representaciones matemáticas para solucionarlas. Sin embargo se puede observar que en algunos de los problemas propuestos no es tan evidente este tipo de aplicación y puede en algún momento ocasionar dificultades al estudiante en el momento de darle solución al ejercicio ya sea por el tipo de enunciación propuesta o por alguna información implícita o que no aparece y es necesaria; por ejemplo la tarea Capítulo 5 Pág. 170 (a-g-h-i) (ver Figura 22) mostro en su enunciado algo muy general y que evidencio claramente el proceso que el estudiante debe de utilizar para su solución, de esta manera no se va aplicar en ningún momento diferentes estrategias que permitan abordan el problema, simplemente se remitirá a la utilización de la ecuación cuadrática como fórmula para llegar a la respuesta.

Resolución de problemas

5. Plantea una ecuación cuadrática para resolver cada uno de los siguientes problemas.

a. Determina los números reales que verifican que el doble de su cuadrado, más un tercio de su triple es igual a cero.

g. Encuentra dos números enteros tales que su suma sea – 5 y su producto 84.

h. Encuentra dos números reales tales que su suma sea 0 y su producto igual a –3.

i. Encuentra dos números enteros consecutivos cuyo producto sea 210.

Figura 22. Capítulo 5 Tarea 5 Pág. 170 (a, g, h, i) del texto escolar Delta 9.

En la Tabla 18 se presentaron las demás tareas correspondientes al contexto **matemáticas y al proceso de resolución de problemas.**

Tabla 18. Tareas – Matemáticas – Resolución de problemas del texto escolar Delta 9.

TAREAS	TÉCNICAS	TECNOLOGÍAS
Determinar la gráfica de la función cuadrática para que: Su gráfica pase por el punto (1, -1) y su vértice es el punto (2, -3). Su gráfica interseca al eje Y en el punto (0, 3) y su vértice es el punto (1, 2). La coordenada de una de sus raíces es x= 3 y el vértice es (-1/2, -2) (Capítulo 4-tarea. 9 Pág. 119)	Con estos dos puntos se halla por simetría el tercer punto, utilizando la ecuación $ax^2 + bx + c = 0$ se plantea una expresión en la cual la incógnita *x* y la respuesta sean reemplazadas por los valores numéricos dados. Con las tres ecuaciones obtenidas se plantea un sistema de ecuaciones lineales que se puede resolver por método de sustitución o igualación. Los valores obtenidos son los coeficientes que se ubican en la expresión general de la ecuación cuadrática	D: concavidad, sistemas de ecuaciones lineales. T: simetría, vértice de una parábola, raíces de la ecuación cuadrática, teorema del factor. Propiedades de los números reales.
Escribir las funciones $f(x) = 3x^2 - 2x - 1$ y $f(x) = x^2 + x - 6$ de forma estándar.	Solución similar al ejemplo 10. Se halla el factor común en los términos que tienen la variable *x*. se completa el cuadrado con el término independiente. Se aplica la	D: ecuaciones cuadráticas. T: vértice de una parábola, raíces de la ecuación

TAREAS	TÉCNICAS	TECNOLOGÍAS
(Capítulo 4-tarea. 10 Pág. 119)	propiedad distributiva para extraer el término que sobra y se factoriza el trinomio cuadrado perfecto.	cuadrática. Propiedades de los números reales.
Plantear las expresiones que representan los enunciados verbales. (Capítulo 1- tarea 5Pág. 170 (a-g-h-i))	Se plantean las expresiones para cada uno de los enunciados y se resuelve mediante la fórmula cuadrática.	D: función cuadrática, ecuación cuadrática. T: raíces de la ecuación cuadrática. Propiedades de los números reales.
Resolver cada una de las ecuaciones cuadráticas si k representa una constante real positiva. (Capítulo 2-tarea 8 Pág. 175)	Utilizo la fórmula cuadrática, se identifica los coeficientes necesarios asumiendo en esto a k y se simplifica hasta donde sea posible.	D: función cuadrática, ecuación cuadrática, solución de ecuaciones, cuadráticas. **(2, 10, 15)**
Transforma cada ecuación a cuadrática y resuélvela (Capítulo 2-tarea 9 Pág. 175)	Se utiliza las propiedades de los números reales y el concepto de ecuación cuadrática para llevar estas expresiones a esta forma.	D: función cuadrática, ecuación cuadrática.
Hallar las longitudes de los lados de un rectángulo, cuyo perímetro es 50 metros y su área es 150 metros cuadrados. (Capítulo 2-tarea 10 Pág. 175)	Plantear la ecuación del área y la ecuación del perímetro del rectángulo, despejar la misma incógnita en ambas ecuaciones. Igualar las expresiones resultantes en cada caso. Simplificar la expresión resultante. Utilizar la fórmula cuadrática para hallar las raíces de la ecuación cuadrática obtenida.	D: ecuación cuadrática, perímetro, área. T: raíces de la ecuación cuadrática Propiedad de los números reales.
Dos cuerdas de un círculo se cortan. Una mide 10 cm, la otra mide 30 cm y pasa por el punto medio de la primera ¿Cuáles son las medidas de los dos segmentos en que ha quedado dividida la segunda cuerda? (Capítulo 2-tarea 13 Pág. 175)	Utilizando la semejanza de triángulos se plantea una relación de proporcionalidad entre los cuatro segmentos que resultan de la intersección de las dos cuerdas, se resuelve la proporción obtenida utilizando la fórmula cuadrática.	D: Ecuación cuadrática. T: raíces de ecuaciones cuadráticas. Propiedades de los números reales.
Un rectángulo de 576 cm cuadrados es tal que la longitud de uno de sus lados es la cuarta parte de la longitud del otro lado. Determine las longitudes de los lados. (Capítulo 2-tarea 14Pág. 175)	Plantear la ecuación del área y la ecuación del perímetro del rectángulo, despejar la misma incógnita en ambas ecuaciones. Igualar las expresiones resultantes en cada caso. Simplificar la expresión resultante. Utilizar la fórmula cuadrática para hallar las raíces de la ecuación cuadrática obtenida.	D: ecuación cuadrática, perímetro, área. T: raíces de la ecuación cuadrática. Propiedades de los números reales.
Plantear una ecuación cuadrática y encontrar sus raíces para resolver una situación. (Capítulo 2-tarea 16 Pág. 175)	Plantear la ecuación del área y la ecuación del perímetro del lote rectangular, despejar la misma incógnita en ambas ecuaciones. Igualar las expresiones resultantes en cada caso. Simplificar la expresión resultante. Utilizar la fórmula cuadrática para hallar las raíces de la ecuación cuadrática obtenida.	D: ecuación cuadrática, perímetro, área. T: raíces de la ecuación cuadrática. Propiedades de los números reales.

TAREAS	TÉCNICAS	TECNOLOGÍAS
Determina las longitudes de los lados de un rectángulo, si el lado mayor excede en 10 cm al menor, y la diagonal mide 50 cm. (Capítulo 2-tarea 17 Pág. 175)	Plantear la ecuación del área del triángulo rectángulo, y del perímetro del rectángulo, despejar la misma incógnita en ambas ecuaciones. Igualar las expresiones resultantes en cada caso. Simplificar la expresión resultante. Utilizar la fórmula cuadrática para hallar las raíces de la ecuación cuadrática obtenida.	D: ecuación cuadrática, perímetro, área. T: raíces de la ecuación cuadrática. Propiedades de los números reales.
Plantear una ecuación cuadrática y encontrar sus raíces para resolver una situación. (Capítulo 2-tarea 18 Pág. 175)	Plantear la ecuación del volumen y la ecuación del perímetro de la caja, despejar la misma incógnita en ambas ecuaciones. Igualar las expresiones resultantes en cada caso. Simplificar la expresión resultante. Utilizar la fórmula cuadrática para hallar las raíces de la ecuación cuadrática obtenida.	D: ecuación cuadrática, perímetro, área. T: raíces de la ecuación cuadrática. Propiedades de los números reales.
Calcula las dimensiones de un rectángulo en el que la base mide 2 cm menos que la altura y la diagonal mide 10 cm. (Capítulo 3-tarea. 8 Pág. 181)	Plantear la ecuación del área del triángulo rectángulo, y del perímetro del rectángulo, despejar la misma incógnita en ambas ecuaciones. Igualar las expresiones resultantes en cada caso. Simplificar la expresión resultante. Utilizar la fórmula cuadrática para hallar las raíces de la ecuación cuadrática obtenida.	D: ecuación cuadrática, perímetro, área. T: raíces de la ecuación cuadrática. Propiedades de los números reales.
Al aumentar en 5 m el lado de un cuadrado, su superficie aumenta en 75 metros cuadrados. Calcule el lado del cuadrado. (Capítulo 3-tarea. 9 Pág. 181)	Plantear la ecuación del área y la ecuación del perímetro del cuadrado, despejar la misma incógnita en ambas ecuaciones. Igualar las expresiones resultantes en cada caso. Simplificar la expresión resultante. Utilizar la fórmula cuadrática para hallar las raíces de la ecuación cuadrática obtenida.	D: ecuación cuadrática, perímetro, área. T: raíces de la ecuación cuadrática. Propiedades de los números reales.
El área total A de la superficie de un cilindro circular recto de altura *h* y radio de la base *r*, está dada por la fórmula citada. ¿Cuál es el radio del cilindro circular recto de altura 10 cm y área total igual a 78π cm cuadrados? (Capítulo 3-tarea. 10 Pág. 181)	Sustituir los valores dados en la ecuación del área del cilindro y posteriormente despejar *r*.	Propiedades de los números reales.
Calcula la hipotenusa de un triángulo rectángulo, sabiendo que las medidas de sus lados son tres números enteros consecutivos. (Capítulo 3-tarea. 11 Pág. 181)	Plantear una ecuación para la hipotenusa y la suma de los lados del triángulo, relacionar las variables de la hipotenusa y de la suma de los lados para encontrar una expresión algebraica en términos de una sola variable. Hallar las raíces de la ecuación cuadrática obtenida mediante la fórmula cuadrática, identificar la raíz positiva.	D: ecuaciones cuadráticas. T: raíces de la ecuación cuadrática, teorema de Pitágoras. Propiedades de los números reales.
En un rectángulo la base mide el triple que la altura. Si disminuimos en 1 cm cada lado, el área inicial disminuye en 15 cm cuadrados. Calcula las dimensiones y el área del rectángulo inicial.	Plantear la ecuación del área y la ecuación del perímetro del rectángulo, despejar la misma incógnita en ambas ecuaciones. Igualar las expresiones resultantes en cada caso. Simplificar la expresión resultante. Utilizar la fórmula cuadrática para hallar las	D: ecuación cuadrática, perímetro, área. T: raíces de la ecuación cuadrática.

TAREAS	TÉCNICAS	TECNOLOGÍAS
(Capítulo 3-tarea. 12 Pág. 181)	raíces de la ecuación cuadrática obtenida.	Propiedades de los números reales.
Halla las dimensiones de un rectángulo cuyo perímetro es 270 m y su área 4500 m cuadrados. (Capítulo 4-tarea 2 Pág. 185)	Plantear la ecuación del área y la ecuación del perímetro del rectángulo, despejar la misma incógnita en ambas ecuaciones. Igualar las expresiones resultantes en cada caso. Simplificar la expresión resultante. Utilizar la fórmula cuadrática para hallar las raíces de la ecuación cuadrática obtenida.	D: ecuación cuadrática, perímetro, área. T: raíces de la ecuación cuadrática. Propiedades de los números reales.
Hallar las dimensiones de la franja que se va a adicionar a una cancha para que su área sea mayor. (Capítulo 4-tarea 4 Pág.185)	Plantear la ecuación del área y la ecuación del perímetro del lote rectangular, despejar la misma incógnita en ambas ecuaciones. Igualar las expresiones resultantes en cada caso. Simplificar la expresión resultante. Utilizar la fórmula cuadrática para hallar las raíces de la ecuación cuadrática obtenida.	D: ecuación cuadrática, perímetro, área. T: raíces de la ecuación cuadrática. Propiedades de los números reales.
Se tiene una lámina rectangular y de cada esquina se corta un cuadrado de 10 cm de lado. Se dobla y resulta una caja sin tapa de 18000 cm cúbicos de volumen. El largo de la base es el doble del ancho. Halla las dimensiones de la lámina. (Capítulo 4-tarea 5 Pág. 185)	Se plantea el volumen de la caja en términos de los datos dados, se realiza el producto de estos tres factores, se resuelve la ecuación cuadrática resultante que determina la longitud de los lados de la lámina.	D: ecuación cuadrática, perímetro, área. T: raíces de la ecuación cuadrática. Propiedades de los números reales.
Se necesita hacer un mantel para una mesa rectangular cuya superficie tiene el doble de largo que de ancho. En todo el borde del mantel debe quedar una franja de 30 cm de ancho. Si el área total del mantel es 36000 cm, ¿Cuáles son las dimensiones de la base de la mesa? (Capítulo 4-tarea 7 Pág.185)	Plantear la ecuación del área y la ecuación del perímetro del mantel, despejar la misma incógnita en ambas ecuaciones. Igualar las expresiones resultantes en cada caso. Simplificar la expresión resultante. Utilizar la fórmula cuadrática para hallar las raíces de la ecuación cuadrática obtenida.	D: ecuación cuadrática, perímetro, área. T: raíces de la ecuación cuadrática. Propiedades de los números reales,
El volumen de un cilindro circular recto esta dado por la fórmula dada, donde r es el radio de la base y h la altura del cilindro circular recto. Si al querer envasar 600 cm cúbicos de agua en un cilindro de 18 cm de altura quedaron por fuera 91,32 cm cúbicos de agua ¿Cuál es el radio de la base del cilindro? (Capítulo 4-tarea 8 Pág. 185)	Hallar la cantidad que fue envasada e igualarla a la expresión del volumen, sustituir los valores dados y despejar el radio r.	Propiedad de los números reales.
En un jardín rectangular se quiere destinar dos espacios rectangulares iguales para cultivar flores, si se conoce el área del jardín y los espacios entre el borde del jardín y los espacios, ¿cuáles son las	Plantear la ecuación del área del jardín en términos de las dimensiones de los espacios, se simplifica y despeja la misma incógnita en ambas ecuaciones. Utilizar la fórmula cuadrática para hallar las raíces de la ecuación cuadrática obtenida.	D: ecuación cuadrática, perímetro, área. T: raíces de la ecuación cuadrática.

<table>
<tr><th>TAREAS</th><th>TÉCNICAS</th><th>TECNOLOGÍAS</th></tr>
<tr><td>dimensiones de estos espacios?
(Capítulo 4-tarea 9 Pág.185)</td><td></td><td>Propiedad de los números reales.</td></tr>
<tr><td>Hallar dos números cuya suma sea 10 y su producto el máximo.
(Capítulo 5-tarea 4 Pág.191)</td><td>Establecer los posibles valores que cumplen esta condición y por ultimo verificarlo con la comparación de los productos.</td><td>D: Función, ecuación cuadrática.</td></tr>
<tr><td>Se construye un rectángulo de manera que dos de sus lados están en los ejes coordenados, un vértice esta en el origen y el vértice opuesto a este pertenece a la recta de ecuación $x + 6y = 10$. Determinar las coordenadas (x, y) del vértice opuesto al origen, de manera que el área del rectángulo sea máxima.
(Capítulo 5-tarea 8 Pág. 191)</td><td rowspan="3">Se halla el área determinada por el punto que se encuentra sobre la recta, de acuerdo a esto, y al concepto de área y máximos o mínimos, se halla el punto medio del segmento de recta que se encuentra en el primer cuadrante, el producto de estos valores maximizan el área del rectángulo</td><td rowspan="3">D: función cuadrática, ecuación cuadrática. máximo o mínimo de una función cuadrática
D: función cuadrática, ecuación cuadrática, máximo o mínimo de una función cuadrática.</td></tr>
<tr><td>Se construye un rectángulo de manera que dos de sus lados están en los ejes coordenados, un vértice esta en el origen y el vértice opuesto a este pertenece a la recta de ecuación $5x + 12y = 70$. Determinar las coordenadas (x, y) del vértice opuesto al origen, de manera que el área del rectángulo sea máxima.
(Capítulo 5-tarea 9 Pág. 191)</td></tr>
<tr><td>Se construye un rectángulo de manera que dos de sus lados están en los ejes coordenados, un vértice esta en el origen y el vértice opuesto a este pertenece a la recta de ecuación $ax + by = c$. con b diferente de 0. Determinar las coordenadas (x, y) del vértice opuesto al origen, de manera que el área del rectángulo sea máxima.
(Capítulo 5-tarea 10 Pág. 191)</td></tr>
</table>

Tareas – matemáticas – elaboración, comparación y ejercitación de procedimientos

Las Praxeologías Matemáticas que se presentaron hacen referencia al contexto de las matemáticas asociadas a los procesos de elaboración, comparación y ejercitación de procedimientos, este tipo de tareas permitió en su gran mayoría el uso de algoritmos y de procedimientos para solucionar los diferentes ejercicios. De manera general se puede ver que los ejercicios clasificados son coherentes y guardan gran claridad acerca de su proceso de solución, el texto Delta 9 también muestra gran afinidad con este tipo de tareas que aparecen de manera moderada dentro de cada una de las 6 unidades analizadas.

Por esta razón pudimos observar en la tarea Capítulo 3 Pág.169-170 (ver Figura 24) una gran cantidad de tareas en donde se propone claramente la utilización del método de factorización para solucionar las diferentes ecuaciones cuadráticas; así el estudiante puede hacer uso de los procedimientos vistos y ejemplificados anteriores al taller para tomarlos como referencia clave para dicha solución.

3. Resuelve las siguientes ecuaciones cuadráticas por factorización.

a. $x^2 - 4x = 0$

b. $x^2 - 10x = 0$

c. $-x^2 + 254x = 0$

d. $x^2 - 49x = 0$

e. $-x^2 - 7x = 0$

f. $x^2 - 0{,}25x = 0$

g. $x^2 + 1{,}1x = 0$

h. $4x^2 - 64x = 0$

i. $-9x^2 - 36x = 0$

j. $x^2 + \pi x = 0$

k. $x^2 - \sqrt{2}x = 0$

l. $x^2 - x - 20 = 0$

m. $14x^2 - 42x - 28 = 0$

Figura 23. Tarea 3 Pág.169-170 del Texto Escolar Delta 9.

En la Tabla 19 se presentaron las demás tareas correspondientes al contexto **matemáticas y al proceso de elaboración, comparación y ejercitación de procedimientos.**

Tabla 19. Tareas – Matemáticas – Elaboración, comparación y ejercitación de procedimientos del texto escolar Delta 9.

TAREAS	TÉCNICAS	TECNOLOGÍAS
Hallar el eje de simetría, el vértice, los interceptos en *x*, el valor máximo o mínimo de la función, los intervalos donde es creciente y decreciente cada función. (Capítulo 4- tarea 5 Pág. 119)	Se halla el vértice de la función cuadrática, con lo cual se identifica el eje de simetría, intervalos donde es creciente y decreciente y el valor máximo o mínimo, dependiente de la concavidad.	D: función cuadrática, concavidad, valor máximo o mínimo de una función cuadrática. T: vértice de una parábola, simetría.
Resuelve las siguientes ecuaciones cuadráticas por factorización. (Capítulo 1- tarea 3 Pág.169-170)	Establecer la solución de cada una de las ecuaciones cuadráticas presentadas utilizando el método de la factorización; donde se factoriza si es posible la expresión $ax^2 + bx + c = 0$, luego se hace uso de la propiedad del factor cero y por último se iguala cada uno de los factores lineales a cero para determinar los posibles valores de la variable.	D: Ecuación cuadrática. T: raíces de ecuaciones cuadráticas.
Resuelve las siguientes ecuaciones por raíz cuadrada. (Capítulo 1- tarea 4 Pág.170)	Establecer la solución de cada una de las ecuaciones cuadráticas presentadas utilizando el método de la raíz cuadrada; donde se utiliza el valor absoluto. Así: $\|c\|$ es la distancia del número real c al origen de la	D: Ecuación cuadrática. T: raíces de ecuaciones cuadráticas.

TAREAS	TÉCNICAS	TECNOLOGÍAS
	recta real *O* y se denomina ***valor absoluto*** de *c*. Además; $\lvert c \rvert = a, si\ y\ solo\ si, x = a, o, x = -a.$	Propiedades de los números reales.
Resuelve las ecuaciones del punto 1, que son solucionables por el método completar el cuadrado. *Punto 1: grupo de ecuaciones cuadráticas donde se debe decidir si se pueden resolver o no con el método completar el cuadrado. (Capítulo 2-tarea 2 Pág.174)	Plantear la solución de cada una de las ecuaciones (que se puedan resolver) utilizando el método de completar el cuadrado, donde se debe tener en cuenta: la transformación de una ecuación cuadrática en forma estándar a otra ecuación cuadrática equivalente que involucre un trinomio cuadrado perfecto completando el término ax^2 y el término *bx*, de tal manera que la última ecuación construida se resuelva fácilmente utilizando el método de la raíz cuadrada.	D: Ecuación cuadrática. T. raíces de ecuaciones cuadráticas.
Resuelve cada ecuación por el método de completar el cuadrado. (Capítulo 2-tarea 3 Pág.174)	Plantear la solución de cada una de las ecuaciones utilizando el método de completar, donde se debe tener en cuenta: la transformación de una ecuación cuadrática en forma estándar a otra ecuación cuadrática equivalente que involucre un trinomio cuadrado perfecto completando el término ax^2 y el término *bx*, de tal manera que la última ecuación construida se resuelva fácilmente utilizando el método de la raíz cuadrada.	D: Ecuación cuadrática. T: raíces de ecuaciones cuadráticas.
Resuelva cada ecuación utilizando el método de la raíz cuadrada. (Capítulo 2-tarea 4 Pág.174)	Establecer la solución de cada una de las ecuaciones cuadráticas presentadas utilizando el método de la raíz cuadrada; donde se utiliza el valor absoluto. Así: $\lvert c \rvert$ es la distancia del número real *c* al origen de la recta real *O* y se denomina ***valor absoluto*** de *c*. Además; $\lvert c \rvert = a, si\ y\ solo\ si, x = a, o, x = -a.$	D: Ecuación cuadrática. T: raíces de ecuaciones cuadráticas. Propiedades de los números reales.
Resolver las siguientes ecuaciones. (Capítulo 3-tarea 7 Pág.181)	Las ecuaciones son fraccionarias y están factorizadas. Se igualan a cero, se desarrollan estos productos y se simplifica. Se resuelve la ecuación cuadrática obtenida.	
Hallar el conjunto solución de cada desigualdad. (Capítulo 5-tarea 1Pág.191)	Se factoriza la expresión cuadrática, en caso de no estarlo, se resuelve este producto de acuerdo a la relación de orden. Se halla el conjunto solución.	D: desigualdad cuadrática. T: raíces de ecuaciones cuadráticas.
Hallar el conjunto solución de las ecuaciones cuadráticas factorizadas. (Capítulo 5-tarea 2 Pág.191)	Se resuelven estos factores de acuerdo a la relación de orden. Se halla el conjunto solución.	
Hallar el dominio de las funciones. (Capítulo 5-tarea 3 Pág.191)	Teniendo en cuenta que el radicando debe ser positivo para que las raíces existan, entonces se utiliza la relación de orden para establecer que valores debe tomar *x* para que se cumpla esta condición. Se halla el conjunto solución.	

Tareas – otras disciplinas –resolución de problemas

Se observo que las tareas que integran el proceso resolución de problemas con el contexto otras disciplinas son propuestas en los últimos capítulos de la unidad, con estas tareas se trata de mostrar cómo se asocia la ecuación cuadrática con situaciones por fuera de las matemáticas, pero en muchos casos sin exigir algún conocimiento extra con respecto al contexto en que se muestra la situación, sin embargo una tarea que se destaco por permitir un trabajo extra con respecto a los procesos que se han venido mostrando para la resolución de las ecuaciones cuadráticas es el Capítulo 4-tarea 6 Pág.185, con esta tarea no se da la ecuación que representa la situación pero se dan los datos con los cuales el estudiante podrá plantear la expresión que relaciona los recorridos de ambos motociclistas y con ellos plantear la expresión que representa el área del rectángulo con respecto a las distancias recorridas por ambos pilotos, ya que los recorridos forman longitudes perpendiculares, esta actividad contribuye a que el estudiante pueda integrar sus conocimientos e interprete la situación que es algo característico de este tipo de tareas en las que se integra este proceso con el contexto otras disciplinas (ver Figura 25).

6. Dos motociclistas salen desde un mismo punto por caminos perpendiculares y rectos. Si la distancia que recorrió uno de ellos es 85 m menos que la que recorrió el otro, y el área del rectángulo determinado por sus recorridos es 164 250 m^2. ¿Qué distancia recorrió cada uno?

Figura 24. Tarea 4-tarea 6 Pág.185 del texto Delta 9.

En la Tabla 20 se presentaron las demás tareas correspondientes al contexto **otras disciplinas y resolución de problemas.**

Tabla 20. Tareas – Otras disciplinas – Resolución de problemas del texto escolar Delta 9.

CONTEXTO-OTRAS DISCIPLINAS	TAREAS	TÉCNICAS	TECNOLOGÍAS
Movimiento de un cuerpo.	Si un cuerpo se mueve con aceleración constante *a*, la distancia recorrida *d* está dada por la fórmula. $d = \frac{1}{2}at^2 + vt$ Donde *v* es la velocidad con que inicia el movimiento el cuerpo y *t* el tiempo empleado en recorrer la distancia d. hallar el tiempo *t* si *d= 200, v= 3, y a= 2.* (Capítulo 3-tarea 17 Pág. 181)	Se sustituye los datos en la ecuación y se despeja *t*, se realizan las operaciones indicadas en la ecuación.	Propiedades de los números reales.
Temperatura a la que hierve el agua según la altura.	La temperatura a la que hierve el agua según la altura *h*, se calcula mediante la fórmula $h = 100(100 - t) + 580(100 - t)^2$.halle la temperatura *t* a la que hierve el agua en la cima del monte Everest. (Capítulo 3-tarea 18 Pág. 181)	Se desarrollan los productos de la ecuación y se simplifica el resultado, se sustituye la altura correspondiente a la altura del monte Everest, se simplifica nuevamente igualando a cero la ecuación cuadrática obtenida y se resuelve mediante la fórmula cuadrática.	D: función cuadrática. T: raíces de la ecuación cuadrática. Propiedades de los números reales.
Rapidez de una lancha.	Una lancha hace un viaje de ida y vuelta a un lugar que se encuentra 24 km río arriba en un tiempo de 6 horas. En aguas tranquilas la lancha hace 10 km en una hora. ¿Cuál es la rapidez de la corriente? (Capítulo 4-tarea 3 Pág.185)	Se plantea la relación distancia-tiempo que representa la rapidez, se plantea la expresión que representa la rapidez de la corriente en términos de una variable *x* y se simplifica y resuelve la expresión cuadrática mediante la fórmula cuadrática.	D: ecuación cuadrática, solución de ecuaciones cuadráticas. **(9, 15)**
Distancia recorrida por dos motociclistas.	Dos motociclistas salen desde un mismo punto por caminos perpendiculares y rectos. Si la distancia que recorrió uno de ellos es 85 m menos que la que recorrió el otro, y el área del rectángulo determinado por sus recorridos es 164.250 metros cuadrados. ¿Qué distancia recorrió cada	Plantear las expresiones algebraicas que representan los recorridos de cada motociclista de acuerdo a la condición dada, establecer el área del rectángulo como el producto de estos recorridos, desarrollar el producto de los factores, simplificar la expresión y resolver la ecuación cuadrática obtenida mediante la fórmula cuadrática.	D: ecuación cuadrática. T: raíces de la ecuación cuadrática. Propiedades de los números reales.

CONTEXTO-OTRAS DISCIPLINAS	TAREAS	TÉCNICAS	TECNOLOGÍAS
	uno? (Capítulo 4-tarea 6 Pág.185)		
Oferta y demanda de un producto.	Cuando el precio de un producto es *p* dólares por unidad, un fabricante suministra *2p – 8* unidades del producto al mercado y los compradores demandan *300 – 2p* unidades. En el valor de *p* para el cual la oferta es igual a la demanda, se dice que el mercado está en equilibrio. Determine el valor de *p*. (Capítulo 4-tarea 10 Pág.185)	Igualar las dos expresiones oferta y demanda, despejar la variable *p*.	Propiedades de los números reales.
Tiempo que tarda la luz de un faro en regresar al punto inicial.	Un faro mueve su luz de forma horizontal a lo largo de una pared, con una distancia dada por $s = 100t^2 - 300t$del punto de partida, después de t minutos. ¿Cuánto tiempo le tomara a la luz regresar al punto de partida? (Capítulo 4-tarea 13 Pág.185)	Se iguala la ecuación cuadrática a cero y se resuelve mediante la fórmula cuadrática, verificar cual de las raíces cumple la condición.	D: ecuación cuadrática T: raíces de ecuaciones cuadráticas.

Tareas – otras disciplinas - razonamiento

Uno de los procesos que menos se destaco es el de razonamiento, en los talleres se propician más la resolución de problemas y ejercitación de procedimientos, por esta razón en este caso solo se destaco una tarea que integra el proceso de razonamiento con el contexto otras disciplinas, ver Tabla 21.

Tabla 21.Tareas – Otras disciplinas –Razonamiento del texto escolar Delta 9.

CONTEXTO-OTRAS DISCIPLINAS	TAREAS	TÉCNICAS	TECNOLOGÍAS	TEORÍA
Trayectoria de dos vehículos.	Un juego de simulación de carreras muestra en pantalla la fórmula de la trayectoria de dos vehículos. Un carro se desplaza de acuerdo a la trayectoria dada por una función afín, mientras que una motocicleta sigue la trayectoria dada por una función cuadrática. ¿Qué valores puede tomar k para que el carro y la motocicleta no se estrellen? (Capítulo 4-tarea 8 Pág. 119)	Tomar algunos puntos para la función lineal y trazar la gráfica, hacer lo mismo con la función cuadrática, verificar cómo se comporta la parábola si k toma valores entre 0 y 1, y cómo se comporta si k toma valores grandes, de acuerdo a esto concluir sobre los valores que sirven para que las dos funciones no se intercepten.	D: función cuadrática, gráfica de una función.	**Función cuadrática**

3.5. GRADO DE COMPLETITUD DE LAS PRAXEOLOGÍAS MATEMÁTICAS LOCALES DEL TEXTO ESCOLAR ESPIRAL 9[9]

A continuación se analizaron el grado de completitud (alto, medio, bajo) de las Praxeologías Matemáticas Locales correspondientes a cada uno de los cinco capítulos de la unidad *ecuación cuadrática* del texto escolar Espiral 9, esto se hizo con respecto a las tareas que se proponen al final de cada capítulo en los **talleres de procesos.** Si se quieren mirar las praxeologías matemáticas por capítulos se sugiere mirar el Anexo 2 (**Praxeologías Matemáticas Locales del texto Espiral 9**).

Este análisis se estableció a partir de los siete indicadores propuestos en el texto *completitud de las OM locales*, y el grado de Completitud de las Praxeologías Matemáticas Locales en cada capítulo se obtiene de acuerdo al nivel (alto, medio, bajo) más destacado para los siete indicadores que determinan el nivel de completitud, otro factor que permitirá determinar el grado de completitud de las Praxeologías Matemáticas es la homogeneidad entre bajo – medio para indicar que el nivel de completitud es bajo, o medio – alto para indicar que la completitud de las Praxeologías Matemáticas es alto.

[9] Para ver estas praxeologías remítase a anexos, praxeologías matemáticas locales del texto Espiral 9.

Para evaluar la completitud de las Praxeologías Matemáticas Locales de los dos textos escolares ya mencionados, se tomo como referencia el siguiente esquema cualitativito que muestra como en los capítulos y lecciones analizadas, se pueden ver identificados los niveles alto, medio y bajo en cada uno ellos. En su orden:

- ***Alto***: la mayoría de las tareas que se presentaron en el Capítulo o lección cumplen los siete criterios de completitud y existe entre ellas una cierta conexión homogénea para el desarrollo de las actividades propuestas.
- ***Medio***: aproximadamente la mitad de las tareas que se presentaron en el Capítulo o lección cumple los siete criterios de completitud, por ende, existen algunas actividades que no están encadenadas como en el nivel anterior y resultan heterogéneas en el proceso de solución.
- ***Bajo***: menos de la mitad de las tareas que se presentaron en el Capítulo o lección cumplen los siete criterios de completitud, es decir muy pocas de estas actividades muestran una conexión entre ellas y solamente se tiene homogeneidad entre las técnica y la teoría.

Grado de completitud de las Praxeologías Matemáticas del capítulo 1 (*introducción a la función cuadrática*)

1. Integración de los tipos de tareas:

En este primer capítulo del texto escolar se propusieron once tareas para el estudio y reconocimiento de aspectos básicos de la función cuadrática como lo son: las representaciones gráfica y algebraica, los puntos más significativos de la función (puntos de corte con los ejes coordenadas y vértice), la tabulación como método para obtener algunos puntos de la función cuadrática y su uso para graficar o establecer si las representaciones gráfica y algebraica de funciones cuadráticas corresponden a una misma función.

El estudio de los anteriores conceptos y procedimientos se dio en todas las tareas del capítulo. En las tareas (Capítulo 1- tarea 6 Pág. 114), (Capítulo 1- tarea 7 Pág. 115), (Capítulo 1- tarea 8 Pág.115), (Capítulo 1- tarea 9 Pág. 115), (Capítulo 1- tarea 10 Pág. 115) y (Capítulo 1- tarea 11

Pág.115) se enfatizaron en el estudio de los conceptos de vértice de la función cuadrática y desplazamiento vertical y horizontal de la función cuadrática.

Estas once tareas se refirieron a los diferentes procedimientos o técnicas que se vieron en el contenido del texto escolar, a la vez esto permite caracterizarlas por tipos, los tipos de tareas que se identifican son:

Hallar algunos valores de la función en diferentes representaciones: (Capítulo 1- tarea 1 Pág. 113), (Capítulo 1- tarea 2 Pág. 113) y (Capítulo 1- tarea 5 Pág.114).

Graficar: (Capítulo 1- tarea 1 Pág. 113), (Capítulo 1- tarea 2 Pág. 113), (Capítulo 1- tarea 3 Pág.114), (Capítulo 1- tarea 4 Pág. 113) y (Capítulo 1- tarea 6 Pág. 114).

Hallar vértice y eje de simetría: (Capítulo 1- tarea 4 Pág. 114), (Capítulo 1- tarea 6 Pág. 114), (1- tarea 9 Pág.115), (Capítulo 1- tarea 10 Pág. 115) y (Capítulo 1- tarea 11 Pág. 115).

Identificar si dos gráficas representan traslaciones y cuál es la razón: (Capítulo 1- tarea 7 Pág.115), (Capítulo 1- tarea 8 Pág. 115) y (Capítulo 1- tarea 9 Pág. 115).

A razón de lo anterior se observo una integración en la mayoría de tareas, es decir que estas tareas involucran los conceptos que se mencionan al inicio de cada capítulo.

Otra razón que permitió establecer que hay una integración de las tareas que en este capítulo se plantean se da por las técnicas que permiten solucionarlas, para mostrar un ejemplo de esto se pueden observar las tareas (Capítulo 1- tarea 1 Pág. 113), (Capítulo 1- tarea 2 Pág. 113), (Capítulo 1- tarea 4 Pág.114)y(Capítulo 1- tarea 6 Pág.114) en las cuales se pedia obtener información de la función cuadrática para responder a cuestiones como relacionar cada función cuadrática con la parábola o hallar la altura máxima del puente y el ancho de su base, en ambos casos se observa la necesidad de conocer los interceptos con el eje *x*, aunque implícitamente, pues la relación de la función cuadrática con la parábola resulta fácil si podemos establecer que los interceptos de la parábola son los mismos que los de la función cuadrática, por su parte para hallar el ancho de la base del puente es necesario hallar los extremos.

Cada una de estas tareas se dio en los siguientes contextos: la primera, la tercera y la cuarta se dan en contextos matemáticos con representaciones gráfica y algebraica, por su parte la segunda tarea está representada en una situación de la vida diaria.

En general el planteamiento de estas tareas en un grado de complejidad mayor o menor que otras no escapo al cuestionamiento y construcción del concepto de la función cuadrática por lo cual se puede establecer que estas Praxeologías Matemáticas cumplen en un alto grado este criterio.

2. Diferentes técnicas y criterios para elegir entre ellas

Un aspecto positivo que se observo en la mayoría de tareas de este capítulo y que hace que el estudiante pueda comprender mejor la técnica y lograr algunas variaciones de ella consiste en el uso de contextos y situaciones diferentes en cada caso, como ejemplo en las tareas (Capítulo 1- tarea 1 Pág. 113), (Capítulo 1- tarea 2 Pág. 113),se propuso relacionar la representación algebraica de la función cuadrática con la parábola correspondiente, en la tarea (Capítulo 1- tarea 4 Pág. 114) se debe establecer la altura máxima y el ancho de la base de un puente a través de una función cuadrática, en la tarea (Capítulo 1- tarea 5 Pág. 114) se debe conocer los ingresos que recibe un comerciante por vender un producto *x*, y en las tareas restantes se busca el estudio del concepto de vértice de la función cuadrática y desplazamiento horizontal y vertical de la función cuadrática. Este aspecto beneficio en cierta medida el cumplimiento de este criterio, sin embargo esta fortaleza que se presento en el planteamiento de tareas contextualmente diferentes no complementa la posibilidad de diversificar las técnicas para su resolución, ya que se identifica fácilmente la similitud entre la tarea y los ejemplos que se ofrecen a lo largo del capítulo y que hacen evidente los procedimientos de resolución.

Esto hizo que cada tarea se identifique con una técnica y no haya la posibilidad de técnicas alternativas o diferentes, lo que permite establecer que las tareas enfatizan más a una ejercitación de las técnicas que se vieron en el contenido que corresponden a: tabulación, graficación de las funciones así como encontrar algunos puntos específicos mediante las técnicas que han sido mostradas.

Esta falencia que presento el texto se acentúa mucho más al no generar tareas que cuestionen lo que el estudiante asume como la técnica efectiva y que permita indagar el alcance y generen técnicas nuevas o variaciones de la misma pero que permitan resolver un mayor número de tareas que no se podían resolver con la primera técnica, una de las razones que lo causan es por ser el primer capítulo de la unidad, esto hizo que las tareas se refieran a las pocas técnicas que se trabajaron en este capítulo.

Como ejemplo de esta falencia que se presento en el capítulo 1, son las tareas (Capítulo 1-tarea 5 Pág.114) y (Capítulo 1-tarea 8 Pág. 115), así como en la mayoría de las restantes tareas.

En el primer caso el estudiante debe hallar el ingreso $I(x)$ que recibe un comerciante por la venta de una cantidad x de un determinado producto, en este caso se da un grupo de valores para x que el estudiante debe reemplazar en la función dada para conocer el ingreso correspondiente, de igual manera sucede con la segunda tarea en la cual se pide determinar el tipo de desplazamiento que ha sufrido la gráfica dada la función cuadrática en cada caso, al respecto dentro del taller se explica el concepto de desplazamiento de una gráfica y se ejemplifica, con base en esto se proponen las tareas, esto hace que se ratifique la técnica que se debe utilizar.

En general estas tareas requieren de los ejemplos que se dan en el Capítulo para resolverlas, haciendo que las técnicas sean evidentes y el estudiante termine pensando que solo existe esta técnica, con lo cual se establece que estas Praxeologías Matemáticas presentan un bajo grado de cumplimiento para este criterio.

3. Independencia de los ostensivos que integran las técnicas

De acuerdo a las explicaciones y a los ejemplos que se dan en el texto escolar para enseñar el concepto de función cuadrática el estudiante puede generar por cuenta propia algunas técnicas que le permitan resolver las tareas o también puede utilizar las que se enseñan en el texto escolar, en este sentido se puede observar que el planteamiento las primeras 5 tareas de este capítulo (Capítulo 1- tarea 1 Pág. 113), (Capítulo 1- tarea 2 Pág. 113), (Capítulo 1- tarea 3 Pág. 114), (Capítulo 1- tarea 4 Pág. 114) y (Capítulo 1- tarea 5 Pág. 114), el concepto función cuadrática se presenta mediante ostensivos de tipo algebraico y gráfico que son los más utilizados por el texto escolar, sin embargo el uso de contextos diferentes como el de la vida diaria y el matemático hacen que los ostensivos no sean el aspecto principal para considerar que técnica se debe utilizar, a pesar de que estas primeras cinco tareas involucran una misma técnica que tiene que ver con la obtención de uno o varios puntos de una función cuadrática dada, el planteamiento de las tareas hace que no se evidencie sino hasta que se ha leído y analizado que es lo que hay que encontrar con la tarea.

Como se mencionó anteriormente, el texto no propicio el uso de técnicas diferentes, sin embargo el cambio de los ostensivos para mostrar los ejemplos y para proponer las tareas, así como el aprovechamiento de los diferentes contextos hace que el estudiante comprenda mejor la técnica y a la vez le pueda sacar provecho utilizándola en tareas cuya única relación se establezca por el uso de la técnica y que además no se haga evidente que con ella se pueda resolver la tarea.

Sin embargo en tareas posteriores a estas como lo fueron (Capítulo 1- tarea 6 Pág. 114), (Capítulo 1- tarea 8 Pág. 115), (Capítulo 1- tarea 9 Pág. 115), (Capítulo 1- tarea 10 Pág. 115) y (Capítulo 1- tarea 11 Pág. 115), este aspecto deja de ser un elemento que contribuye a desligar la técnica del ostensivo, ya que en estas tareas se afirma a través de las gráficas y de las expresiones algebraicas que se debe establecer el tipo de desplazamiento que ha sufrido la parábola, haciendo que la técnica dependa del objeto ostensivo utilizado.

De acuerdo a esto se pudo establecer que este grupo de Praxeologías Matemáticas establecen un nivel medio para este criterio independencia de los ostensivos.

4. Existencia de tareas y de técnicas “inversas”

Al considerar el estudio de la función cuadrática en sus distintas representaciones, especialmente en la algebraica y gráfica, el texto escolar enfatizo el procedimiento que lleva la función desde la representación algebraica hacia la representación gráfica, esto se muestra mediante tres ejemplos diferentes en los cuales se inicia con la expresión algebraica de la función, luego se muestra como se hallan algunas parejas ordenadas que pueden ser entre cinco y nueve mediante la tabulación como se muestra en los ejemplos de la unidad vista, luego se ubican en el plano cartesiano para concluir con el trazo de la parábola que resulta de la unión de estos puntos. Este proceso que estableció un modo de llevar la función cuadrática de una representación a otra, y que a la vez establece que cada una de las dos representaciones hace referencia a un mismo objeto matemático se constituye en la técnica directa mediante la cual el estudiante ha aprendido a distinguir distintos aspectos que están inmersos o hacen parte del mismo proceso como es el caso de los valores (ceros) que toman las variables *x* e *y* cuando hay cortes con los ejes coordenados.

Al respecto se observo que en la primera tarea del capítulo (Capítulo 1-tarea 1 Pág. 113) se pide determinar si la parábola o gráfica de la función corresponde a la función cuadrática que se da, en las cuatro gráficas presentadas se observa que los puntos de corte corresponden siempre a valores enteros, situación que permite al estudiante no tener que tabular cinco o más puntos que posiblemente no den imágenes enteras, sino tomar los tres puntos de la gráfica y corroborarlos en la ecuación, este proceso no se explicita en el contenido pero el estudiante puede caer en la cuenta de esto fácilmente ya que el texto propicia su visualización durante el capítulo a través de las tablas de valores.

A la vez lo anterior mostro que la tarea posibilita el proceso directo y el inverso, sin embargo utilizar el proceso inverso muestra que ha habido una mayor compresión de la técnica que ha sido enseñada con este fin.

La tarea que requirió el uso de la técnica utilizada por el texto en sus explicaciones (técnica directa) es la tarea (Capítulo 1-tarea 8 Pág. 115), en la cual se dan las funciones cuadráticas y se pide trazar las gráficas y determinar los puntos de corte con los ejes coordenados.

En la séptima tarea (Capítulo 1-tarea 7 Pág. 115) se pide identificar cuáles de las gráficas corresponden a traslaciones, es decir que con respecto al proceso mostrado que es, dada la función y las unidades a trasladar en el sentido indicado se debe hallar la función correspondiente, la tarea pide realizar el procedimiento inverso que consiste en establecer si entre las dos gráficas de funciones hay una traslación, para esto se debe establecer las condiciones anteriores. Sin embargo la tarea facilita los medios para verificarlo como lo son los interceptos con los ejes y las características que se pueden observar en las dos gráficas que se comparan.

De acuerdo a la cantidad de tareas inversas se puede decir que se cumplió en un nivel medio el criterio de tareas y técnicas reversibles en el texto escolar.

5. Interpretación del resultado de aplicar las técnicas

En términos generales se puede establecer que el propósito de este capítulo es el reconocimiento de algunos aspectos básicos de la función cuadrática como son los interceptos con ambos ejes y la concavidad de la función cuadrática, de esta manera la resolución de las tareas propuestas implican el reconocimiento de estos dos conceptos, así como la obtención de los interceptos a través de las técnicas que de ambos conceptos se derivan, esto se puede observar en las tareas (Capítulo 1-tarea 1 Pág. 113), (Capítulo 1-tarea 4 Pág. 114), (Capítulo 1-tarea 7 Pág. 115), (Capítulo 1-tarea 9 Pág. 115) que contribuyen en este sentido al uso consciente de la técnica.

En la primera tarea que posee un bajo nivel de complejidad el estudiante debe establecer la relación entre la función cuadrática y su gráfica, sin embargo teniendo en cuenta que son las primeras tareas de la unidad, a través de ella el estudiante puede establecer y comprender estos conceptos por medio de las técnicas y procedimientos utilizados en las unidades anteriores.

La cuarta tarea esta propuesta en un contexto de la vida diaria, para resolverla se requiere hallar varios puntos de la función cuadrática para realizar la gráfica, en ella la altura máxima así como la base del puente representa los interceptos con los ejes, esto permite que el estudiante vaya formando el concepto de máximos y mínimos que aún no se ha visto.

En la séptima tarea se trata el estudio de los conceptos de desplazamiento y vértice de las funciones cuadráticas, para su resolución se deben identificar las características que hacen que dos o más gráficas estén relacionadas por una traslación (horizontal o vertical) con lo cual se pueda identificar cuáles de las gráficas que aquí se dan representan traslaciones.

En la novena tarea se da la función cuadrática en la forma que permite determinar el vértice y el eje de simetría, con lo cual debe identificarlos. Las tareas restantes tratan la ejercitación de técnicas, o pueden ser tareas similares a las tareas anteriores, razón por la cual el estudiante seguirá sin mayor esfuerzo el procedimiento utilizado en las primeras.

La condición de que estas sean las primeras tareas de la unidad hace que su exigencia no sea muy alta, sin embargo el propósito es que el estudiante comprenda la técnica y la maneje mejor al paso de nuevas tareas.

Hace falta que dentro de la tarea se cuestione sobre las posibles respuestas que se puedan obtener y sobre el por qué de las técnicas utilizadas por el estudiante para llegar a la solución con el propósito de indagar por las concepciones que al respecto puedan tener los estudiantes.

Bajo las anteriores consideraciones se establece que estas Praxeologías Matemáticas cumplen en un nivel medio este criterio.

6. Existencia de tareas matemáticas "abiertas"

En estas primeras once tareas de la unidad no hay mayor exigencia con el uso de las técnicas y tampoco se cuestiona al estudiante por la razón que lo lleva a utilizar algún procedimiento en particular en lugar de otro, esto permite establecer que su función es la de ejercitar algunos procedimientos vistos en los ejemplos.

En este sentido las tareas planteadas no son del tipo donde los datos sean un recurso para generar la reflexión sobre si son o no pertinentes para el propósito de la tarea y tampoco se problematizan a través de datos adicionales que permitan al estudiante analizar el enunciado e ir identificando la información que le permita resolverla.

En este capítulo del texto escolar se observa que no se incluyen tipos de tareas "abiertas", ya que en un primer nivel, se categorizan como tareas abiertas aquellas en las que los datos sean recursos con los que se genere la problematización de la tarea, ejemplo de esto son las tareas (Capítulo 1-tarea 10 Pág.115) y (Capítulo 1-tarea 11 Pág. 115). En cada una de ellas así como en las demás se establecen que datos son los que se deben usar para resolverlas y se ratifica por el interés que se muestra en el procedimiento que utilice el estudiante más que en el análisis de la tarea.

Al respecto se puede establecer que las Praxeologías Matemáticas de este capítulo presentan un bajo grado de cumplimiento de este criterio.

7. Incidencia de los elementos tecnológicos sobre la práctica

Al resolver las tareas propuestas en este capítulo se observa que cada caso implica el uso de una misma técnica y no se posibilita usar técnicas diferentes a la ya establecida, esto hace que en general las tareas enfaticen y sobrevaloren el uso de la técnica pero desligada del objeto matemático que se trabaja y que le da sentido al uso de esta técnica, en este sentido las tareas no propician la reflexión sobre los conceptos y aspectos que conforman la función cuadrática, de igual manera se puede establecer con las técnicas, ya que no se observa la necesidad de cuestionar o decidir sobre la pertinencia de una técnica para el desarrollo de una tarea.

Como se vio anteriormente aquí se busca desarrollar la obtención de puntos de la función cuadrática en cualquiera de los dos ostensivos (gráfico, algebraico) ya sea para identificar en ambos ostensivos una misma función cuadrática o para responder con esto a alguna situación en particular, de cualquier forma la propuesta de las tareas no buscan profundizar en nuevas técnicas y tampoco que las tareas sean un medio para conformar nuevas nociones de la función cuadrática, por esta razón se establece que estas Praxeologías Matemáticas presentan un grado bajo del cumplimiento de este criterio.

De acuerdo a lo observado en las Praxeologías Matemáticas de este primer capítulo se concluye lo siguiente:

El criterio que se cumple en un grado alto es: 1.
Los criterios que se cumplen en un grado medio son: 3, 4 y 5.
Los criterios que se cumplen en un grado bajo son: 2, 6 y 7.

De forma general se evidencia un grado de completitud (medio – bajo) en las Praxeologías

Matemáticas de este primer capítulo, esto se fundamenta en una necesidad por manejar algunas técnicas básicas de la función cuadrática, pero que descuidan el manejo y comprensión del objeto matemático, así como la relación de este con las técnicas.

Grado de completitud de las Praxeologías Matemáticas del capítulo (*solución de ecuaciones cuadráticas)*

1. Integración de los tipos de tareas

De forma general las siete tareas que conforman este taller de procesos concuerdan en permitir el estudio de los conceptos trabajados durante el capítulo, a la vez que las técnicas y procedimientos que resultan del tema cumplen hasta cierto grado el papel integrador de las diferentes tareas. En este sentido se observa que la mayoría de las veces las tareas se enfocan al uso de un procedimiento diferente, haciendo que en las siete tareas se identifiquen cinco tipos diferentes de tareas, los cuales son:

Encontrar la solución a las ecuaciones cuadráticas: tareas (Capítulo 2-tarea 2 Pág.120), (Capítulo 2-tarea 3 Pág.120) y (Capítulo 2-tarea 3 Pág.120).

Factorizar polinomios si se conoce una raíz: (Capítulo 2-tarea 3 Pág.120).

Realizar el bosquejo de la parábola si se da la ecuación cuadrática factorizada: (Capítulo 2-tarea 4 Pág.120).

Relacionar cada parábola con su respectiva función cuadrática: (Capítulo 2-tarea 5 Pág.120).

Hallar los polinomios cuadráticos si se conocen tres puntos: (Capítulo 2-tarea 3 Pág.120).

Este aspecto se debe a que son muy pocas las tareas que se proponen para el amplio campo de estudio que ofrece este tema, pues en el contenido se introducen conceptos anexos al objeto de estudio como el teorema del factor que es utilizado para hallar el polinomio cuando se tienen tres puntos y el uso necesario de los números complejos cuando el discriminante de la ecuación es negativo, esto junto a la limitada cantidad de tareas no permiten un estudio más profundo del tema.

Sin embargo las tareas coinciden en permitir el trabajo de técnicas que se requieren para la solución de las ecuaciones cuadráticas como la factorización y el teorema del factor, así como la integración de varias técnicas como la que se da en la tarea 4 en la que se debe bosquejar la parábola de una ecuación que esta factorizada, esto implica los puntos de corte y el vértice que conforman el procedimiento más eficaz para su resolución.

De igual forma el concepto “raíces de la función cuadrática” aporta en las tareas (Capítulo 2-tarea 2 Pág.120), (Capítulo 2-tarea 3 Pág.120), (Capítulo 2-tarea 4 Pág.120) y (Capítulo 2-tarea 7 Pág.120) elementos en distinto nivel para resolverlas, en la tarea 2 se pide hallar las raíces de cada uno de los diez polinomios que allí se proponen, en la tarea 3 se pide factorizar los polinomios si se conoce una de las raíces, en la tarea 4 se pide realizar el bosquejo de la gráfica para los polinomios dados, aquí hay que tener en cuenta que los polinomios ya están factorizados, esto propicia el uso de la tecnología raíces de la función cuadrática pues de entrada se cuenta con dos puntos que son los cortes de la parábola con el eje x, en la tarea numero 7 se pide hallar las posibles soluciones de la ecuación cuadrática general si $a = 0$.

Esto no implica que en el resto de tareas no se requieran de las técnicas vistas, pues si se analiza la tarea (Capítulo 2-tarea 5 Pág.120). en la cual se pide relacionar la función cuadrática con la parábola, es posible que el estudiante factorice la función cuadrática para hallar las raíces y determinar si son las mismas que las de la parábola, pero en vista de que se trata de la misma tarea que fue propuesta en el Capítulo anterior entonces el estudiante vera mucho más fácil utilizar la técnica que consiste en hallar dos o tres puntos cualquiera de la función y determinar si la parábola también los incluye con lo cual se dejaría de lado el concepto de las raíces y por lo tanto la tarea no potenciaría su manejo, lo mismo sucede con la tarea 6.

Esto permite establecer que este grupo de Praxeologías Matemáticas presentan un grado medio de cumplimiento de este criterio.

2. Diferentes técnicas y criterios para elegir entre ellas

En este grupo de tareas hay mayor posibilidad de recurrir a técnicas diferentes en comparación al capítulo anterior, sin embargo no se cuestiona por la validez y el alcance de estas técnicas con el fin de permitir una mayor comprensión de su uso y la posibilidad de que sean modificadas por parte del estudiante, ejemplo de esto se da en las tareas (Capítulo 2-tarea 3 Pág.120), (Capítulo 2-tarea 4 Pág.120), (Capítulo 2-tarea 5 Pág. 120), (Capítulo 2-tarea 6 Pág.120) y (Capítulo 2-tarea 7 Pág.120), cada una de ellas además de posibilitar la aplicación de técnicas asociadas a la tecnología trabajada en este capítulo (raíces de la ecuación cuadrática) también hay la posibilidad de utilizar las técnicas vistas en el Capítulo anterior.

En la tarea (Capítulo 2-tarea 3 Pág.120) que puede llegar a ser la más compleja de este capítulo se debe factorizar el polinomio conociendo una de las raíces, entre las técnicas que el estudiante puede llegar a utilizar se encuentra la siguiente: hallar el vértice con la ecuación del vértice y los coeficientes a, b y c de la ecuación dada, posteriormente hallar la longitud de la componente h del vértice a la raíz dada y luego sumar esta longitud a h para obtener la segunda raíz. Por último utilizando ambas raíces expresar el polinomio como el producto de factores $(x + r_1)(x + r_2)$.

A pesar de que estos conceptos se trabajan en el texto puede ser que el estudiante no los asuma para resolver esta tarea, esto se debe a que el texto no profundiza en conceptos claves como el eje de simetría de la parábola que es uno de los más importantes para este fin y por lo tanto se termine buscando otra técnica posible.

La segunda técnica que más seguramente puede utilizar el estudiante para resolver esta tarea consiste en factorizar el polinomio con alguno de los métodos conocidos que no necesita de la raíz dada, haciendo que la primera técnica se vea en desventaja en comparación a lo breve y efectiva de la segunda.

En la tarea 4 sucede lo mismo, ya que los polinomios están factorizados hay la alternativa de usar las raíces para ubicar dos puntos de la parábola y hallar el tercero escogiendo un valor para la componente *x* que este entre los dos anteriores, también hay la posibilidad de escoger la técnica de hallar uno por uno los tres puntos reemplazando cualquier valor, sin embargo si el estudiante maneja bien ambas técnicas se dará cuenta que la primera resulta más económica debido a que nos da una información más eficaz si conocemos las dos raíces, con lo cual el tercer punto puede ser mucho más próximo al vértice por simple inspección.

Con respecto a lo dicho el texto escolar favorece el cumplimiento de este criterio en un grado medio, teniendo en cuenta que se han destacado 5 tareas que cumplen este criterio de las 7 que se proponen en este capítulo y ha permitido que el estudiante no deje de lado las técnicas que ha aprendido en capítulos y grados anteriores.

3. Independencia de los ostensivos que integran las técnicas

Se observa que las tareas enfatizan la ejercitación de procedimientos a través de actividades que guardan similitud con los ejemplos propuestos en este capítulo o en el anterior, en este sentido se recurren a los mismos ostensivos y por ende se crea una relación de dependencia de la técnica hacia el ostensivo utilizado, ejemplo de esto ocurre con las tareas (Capítulo 2-tarea 5 Pág.120) y (Capítulo 2-tarea 6 Pág. 120) en las que se ve más claramente este aspecto, igualmente sucede con el resto de las tareas. En la primera tarea el estudiante debe escribir a cada gráfica el polinomio correspondiente, como se había dicho anteriormente el estudiante identificara de entrada que se trata de la misma tarea del capítulo anterior y buscara resolverla mediante aquella técnica, sin embargo el propósito es enfatizar el uso de las técnicas de este capítulo pero a causa del planteamiento de las tareas se ha hecho que las técnicas dependan de los ostensivos y demás recursos utilizados para plantear la tarea. En la segunda se dan los puntos con los cuales el estudiante deberá plantear los polinomios cuadráticos y realizar la gráfica, igualmente se establece una dependencia entre la técnica y los recursos propuestos para tal fin.

Este aspecto que guardan las Praxeologías Matemáticas hace que se cumplan en un bajo grado el cumplimiento de este criterio.

4. Existencia de tareas y de técnicas “inversas”

Una de las características que permite establecer si la tarea es inversa se da cuando los datos e incógnitas son intercambiados con respecto a una tarea inicial, este hecho permite asumir como mínimo dos tipos de tareas de comparación. De igual manera esto se da cuando en el texto se ofrecen los ejemplos y el procedimiento para su resolución, y en la tarea se intercambian los datos e incógnitas.

En este sentido se destaca la técnica que es utilizada en el transcurso del capítulo para encontrar las raíces de las ecuaciones cuadráticas, la cual consiste en factorizar la ecuación cuadrática por el método de factorización y determinar así cuales son estas raíces, mientras que en la tarea (Capítulo 2-tarea 3 Pág.120) se da una de las raíces, la ecuación cuadrática y se pide que con estos datos se encuentre la otra raíz y se factorice la ecuación, esto hace que el método de factorización no sea necesario.

Esto implicaría el uso de tecnologías diferentes a las que normalmente se utilizarían para factorizar un polinomio, sin embargo son tecnologías que se encuentran en el texto, las cuales son, eje de simetría y la propiedad de simetría entre las raíces r_1 y r_2 con respecto al eje de simetría. Con esto se estarían utilizando tecnologías que han sido vistas en este capítulo para factorizar los polinomios.

La tarea que requiere del procedimiento directo que ha sido enseñado durante el capítulo es (Capítulo 2-tarea 3 Pág.120), en esta tarea se dan las funciones cuadráticas y el estudiante debe encontrar sus soluciones, algunas están factorizadas y para las que no el estudiante debe utilizar el método y encontrar las posibles soluciones.

Además de esta tarea no se plantean más tipos de tareas inversas.

Al respecto la existencia de tareas inversas contribuye a establecer el cumplimiento en un grado bajo este criterio.

5. Interpretación del resultado de aplicar las técnicas

Considerando que el discurso tecnológico debe servir como herramienta para comprender las técnicas, se observa que el texto escolar presenta falencias que dificultan el cumplimiento de este aspecto debido al tratamiento que se le da a las tecnologías a lo largo del capítulo, en este sentido se puede recordar lo dicho acerca de la tarea (Capítulo 2-tarea 3 Pág.120) en la cual el propósito es que el estudiante interprete e integre algunas tecnologías que le permitan llevar a cabo la tarea de manera satisfactoria, sin embargo la exigencia de esta tarea no es coherente con el tratamiento que se le da en el capítulo a las tecnologías ya que no se maneja un nivel de profundización apropiado que permita que el estudiante las integre y vea otros aspectos que no se evidencian en las explicaciones. Por otro lado se recurre a los ejemplos como recurso exclusivo para enseñar las tecnologías y no se busca profundizar en su comprensión, al respecto se observa un énfasis en que el estudiante maneje procedimientos sin necesidad de comprender las tecnologías e integrarlas para producir una técnica.

En este sentido las Praxeologías Matemáticas propuestas permiten un bajo grado del cumplimiento de este criterio.

6. Existencia de tareas matemáticas “abiertas”

El tipo de tareas que se presentan en este capítulo se enfocan en la ejercitación de procedimientos haciendo evidente la técnica que se debe utilizar para resolverlas, esto sucede con las tareas (Capítulo 2-tarea 1 Pág.120), (Capítulo 2-tarea 2 Pág. 120), (Capítulo 2-tarea 5 Pág. 120) y (Capítulo 2-tarea 6 Pág. 120), en cada una de ellas se indica claramente lo que hay que hacer para resolverlas.

En las tareas (Capítulo 2-tarea 3 Pág. 120) y (Capítulo 2-tarea 7 Pág. 120) se facilita mas la comprensión de las tecnologías ya que no se mantiene una relación explicita con los ejemplos y su resolución permite la integración de algunos conceptos que fueron trabajados. Al respecto se concluye que son tareas cerradas bajo las pautas que indican la técnica que se debe utilizar y por ende un bajo cumplimiento de la misma.

7. Incidencia de los elementos tecnológicos sobre la práctica

El discurso tecnológico trabajado incide parcialmente sobre la práctica, pues aunque el estudiante debe utilizar técnicas asociadas a estas tecnologías para resolver las tareas, esto no significa que comprenda como están relacionadas las técnicas que utiliza y el discurso tecnológico que aparece en el Capítulo pues no se propicia este proceso que se queda en niveles iniciales. Al respecto ocurre con las tareas destacadas en el anterior ítem, las cuales promueven la ejercitación de las técnicas que se utilizan en los ejemplos, como la factorización de la ecuación cuadrática.

Se puede decir que esto se debe a que la tarea prioriza el uso de la técnica y la resolución de la tarea y no se considera que esto pueda ser un medio para conceptualizar y llegar a otras nociones, lo cual conlleva a desligar la técnica o procedimiento de los objetos matemáticos que le dan sentido y de los cuales proceden.

De esta manera se presenta un mediano cumplimiento de este criterio ya que las Praxeologías Matemáticas como se acaba de mencionar no contribuyen a generar nuevas técnicas.

De acuerdo a lo observado en este segundo capítulo del texto escolar se puede concluir que:

Los criterios que se cumplen en un grado medio son: 1, 2 y 7.
Los criterios que se cumplen en un grado bajo son: 3, 4, 5 y 6.

En este capítulo nuevamente se evidencia un grado de completitud (medio – bajo) en las praxeologías propuestas, hecho que sucede nuevamente al sobrevalorar la ejercitación de técnicas que fueron vistas a lo largo del capítulo pero sin propiciar una integración de estas con las tecnologías y el uso razonado de estas técnicas.

Grado de completitud de las Praxeologías Matemáticas del capítulo 3 (*método de completar el cuadrado*)

1. Integración de los tipos de tareas

El tipo de tareas que se proponen en este capítulo reflejan mayor nivel de complejidad con respecto a las trabajadas en los capítulos anteriores, en ellas se presentan algunas que requieren de los procesos de razonamiento (Capítulo 3-tarea 5 Pág.124), de resolución de problemas (Capítulo 3-tarea 7 Pág.124), (Capítulo 3-tarea 8 Pág.124), (Capítulo 3-tarea 9 Pág.124). Y como es característico también se presentan la ejercitación de procedimientos en las tareas restantes.

Los tipos de tareas que aquí se identifican son:

Completar el cuadrado: (Capítulo 3-tarea 1 Pág.124), (Capítulo 3-tarea 2 Pág.124), (Capítulo 3-tarea 3 Pág.124), (Capítulo 3-tarea 4 Pág.124).
Trazar la gráfica de polinomios: (Capítulo 3-tarea 3 Pág.124), (Capítulo 3-tarea 6 Pág.124).
Determinar el tipo de soluciones de los polinomios: (Capítulo 3-tarea 4 Pág.124).
Determinar la veracidad sobre las afirmaciones hechas de los polinomios cuadráticos: (Capítulo 3-tarea 5 Pág.124).
Plantear una ecuación cuadrática para una situación y resolverla: (Capítulo 3-tarea 7 Pág.124).
Establecer que coeficientes permiten que la ecuación completada del cuadrado perfecto tenga raíces reales: (Capítulo 3-tarea 8 Pág.124).
Encontrar los polinomios cuadráticos si se conocen dos o tres puntos: (Capítulo 3-tarea 8 Pág.124).

A pesar de los diferentes grados de complejidad que presentan estas Praxeologías Matemática con respecto a los procesos de resolución propician la integración del discurso tecnológico en las tareas propuestas, lo cual es necesario destacar pues aunque sean tareas de un nivel de exigencia distinto con respecto a los procesos mencionados, esto no las hace ver fragmentadas o independientes de las demás, también se observa que las técnicas vistas hasta el momento permiten la integración de las tareas cuando permiten justificar, explicar y relacionarse entre sí con el método de completar el cuadrado, tema de estudio del capítulo.

De acuerdo a esto se puede concluir que estas Praxeologías Matemáticas presentan un alto grado de cumplimiento para este criterio.

2. Diferentes técnicas y criterios para elegir entre ellas

Con respecto a lo dicho anteriormente los tipos de tareas que requieren de procesos de resolución diferentes a la ejercitación de procedimientos posibilitan mayormente el uso de técnicas alternativas o variaciones de una misma técnica, es decir que generalmente en este tipo de tareas no se hace evidente que técnica se debe utilizar, ejemplo de esto sucede con las tareas que involucran procesos de razonamiento (Capítulo 3-tarea 5 Pág.124), en esta tarea se cuestiona el conocimiento del estudiante a través de la respuesta que pueda dar sobre afirmaciones hechas de un polinomio cuadrático y la correspondiente argumentación de esta respuesta. En el texto no se dan ejemplos de esto, lo cual es uno de los aspectos que caracterizan este tipo de tareas en la que se debe comprender las tecnologías trabajadas así como las técnicas relacionadas con esta tecnología para ponerlas en práctica.

En general las tareas que permiten el uso de técnicas diferentes o que se deriven de otras son (Capítulo 3-tarea 4 Pág.124), (Capítulo 3-tarea 5 Pág.124), (Capítulo 3-tarea 6 Pág.124), (Capítulo 3-tarea 7 Pág.124), (Capítulo 3-tarea 8 Pág.124) y (Capítulo 3-tarea 9 Pág.124), en ellas se trabajan diferentes procesos que van desde el uso de procedimientos hasta la resolución de problemas, se observa que en la primera tarea se debe determinar el tipo de soluciones que tienen cada uno de los polinomios cuadráticos, para esto se puede trazar la parábola y saberlo, también se puede utilizar el método visto en este capítulo que consiste en hallar el vértice e identificar si la gráfica corta el eje x y en qué puntos de acuerdo al signo del coeficiente a. Algunas de las tareas (Capítulo 3-tarea 6 Pág.124), (Capítulo 3-tarea 7 Pág.124), (Capítulo 3-tarea 8 Pág.124) y (Capítulo 3-tarea 9 Pág.124) tratan de situaciones de la vida diaria, en ellas el estudiante debe plantear la ecuación cuadrática con los datos dados y resolverla, se observa que para esto debe recurrir a los conceptos de área y perímetro y además resolver un sistema de ecuaciones lineales, esto evidencia la complejidad de la tarea y que para ello se requieren de tecnologías de otras disciplinas.

Esto permite que se cumpla en un alto grado la posibilidad de técnicas y criterios para elegir la resolución de la tarea.

3. Independencia de los ostensivos que integran las técnicas

En este grupo de tareas existen algunas que propician que sean los objetos ostensivos los que den la pauta para determinar la técnica a utilizar, ejemplo de esto son las tareas (Capítulo 3-tarea 1

Pág.124), (Capítulo 3-tarea 2 Pág.124) y (Capítulo 3-tarea 3 Pág.124), en las cuales como en el Capítulo anterior se trabaja la ejercitación de procedimientos, en las dos primeras tareas se pide completar el cuadrado con los polinomios dados y en la tercera tarea encontrar el vértice de las funciones cuadráticas dadas. Sin embargo el planteamiento de este tipo de tareas no deja de ser benéfico para adquirir destreza con el manejo de la técnica sin excederse en su propuesta, ya que se dejaría de lado el trabajo con otros procesos que contribuyen en gran medida a la comprensión de las tecnologías.

En este sentido hay balance con el resto de tareas en las que no se recurre a los ejemplos o explicaciones mostradas anteriormente para establecer una similitud, ya que en el caso de las tareas de tipo "ejercitación de procedimientos" este es uno de los referentes utilizados por el texto escolar para establecer una relación con lo conocido por el estudiante y permitir que lo utilice para aplicar una técnica.

De acuerdo a esto se puede establecer que estas Praxeologías Matemáticas permiten un mediano grado de cumplimiento en este criterio.

4. Existencia de tareas y de técnicas "inversas"

Con respecto a la existencia de tareas y de técnicas inversas se puede destacar algunas características de este criterio en las tareas (Capítulo 3-tarea 8 Pág.124) y (Capítulo 3-tarea 9 Pág.124), en la primera se pide hallar los valores que pueden tomar los coeficientes a, h y k de forma que la ecuación $a(x-h)^2+k=0$ tenga raíces reales, en este sentido se había hecho énfasis en el procedimiento de llevar la ecuación cuadrática a esta forma para descubrir los tipos de soluciones que podrían tener, esto hace que el estudiante deba asumir que condiciones y características presentan los polinomios expresados de esta forma para que tengan raíces reales, lo cual implica realizar un proceso inverso encontrando los coeficientes de la ecuación cuadrática a partir de esta expresión, teniendo en cuenta que la parábola debe cortar al eje x.

La tarea que permite utilizar el procedimiento o la técnica desarrollada en el capítulo es la (Capítulo 3-tarea 4 Pág.124), en ella como se dijo, el estudiante debe utilizar el procedimiento para completar el cuadrado y poder determinar el vértice y la concavidad, datos que le permiten establecer el tipo de soluciones de la función.

Con respecto a la segunda tarea la característica de "ser inversa" se evidencia mejor ya que a partir de tres puntos se pide obtener el polinomio cuadrático, de forma similar se había planteado una tarea en el anterior Capítulo, en la cual se pedía obtener la función cuadrática dados tres puntos, sin embargo esta vez sólo se dan dos puntos, el vértice y un corte con el eje *y*, lo que implica que el tercer punto es el simétrico al último con respecto al eje de simetría.

Fuera de estas dos tareas no se destacan otras que cumplan características que las caractericen como inversas. Esto permite establecer que las Praxeologías Matemáticas contribuyen en un grado medio el cumplimiento de este criterio.

5. Interpretación del resultado de aplicar las técnicas

Analizando aquellas tareas que involucran procesos de razonamiento y resolución de problemas se llega a concluir que requieren y a la vez propician el uso de las tecnologías del capítulo como insumo para resolver este tipo de tareas y para utilizar la técnica apropiada en ellas, en este sentido se observa que las tecnologías de este capítulo contribuyen a este propósito facilitando una explicación clara del concepto apoyado en los ejemplos. Al respecto las siguientes tareas permiten establecerlo, (Capítulo 3-tarea 5 Pág.124), (Capítulo 3-tarea 7 Pág.124), (3-tarea 8 Pág.124) y (3-tarea 9 Pág.124).

En estas tareas se promueven procesos de razonamiento y resolución de problemas que requieren establecer una relación con las tecnologías para ser entendidas y resueltas. En la primera se pone en juego la apropiación y manejo que el estudiante tiene de sus conocimientos matemáticos para establecer la validez o falsedad de cada una de las afirmaciones, en este sentido los recursos y procesos para llevarlo a cabo pueden ser distintos en cada estudiante, lo que permite reafirmar que se trata de una tarea que pone en juego la eficacia con que se plantean estas tecnologías a lo largo del capítulo. La segunda tarea plantea un problema que integra los contextos vida diaria y otras disciplinas, en ella el estudiante tiene la posibilidad de utilizar recursos de las matemáticas o de la geometría, en ambos casos la tarea genera la necesidad de plantear un sistema de ecuaciones con los datos dados, y con los datos obtenidos de su resolución debe plantear una ecuación cuadrática recurriendo a las técnicas vistas en capítulos anteriores, esto conlleva a que el estudiante vea necesario integrar diferentes tecnologías y utilice las técnicas que a ellas están asociadas guiado por sus conocimientos y los datos que la tarea va generando. Por último las tareas (Capítulo 3-tarea 8 Pág.124) y (Capítulo 3-tarea 9 Pág.124) en las que se estudia la función cuadrática dependiendo de algunos datos permiten generar procesos de reflexión en el estudiante con respecto a sus conocimientos ya que como se dijo anteriormente no hay ejemplos que mirar para estas tareas.

Al respecto se puede establecer que este grupo de tareas junto con las tecnologías que están allí involucradas permiten en un alto grado el cumplimiento de este criterio.

6. Existencia de tareas matemáticas “abiertas”

Entre las nueve tareas que se proponen en este capítulo se destacan las mencionadas en el punto anterior como referentes del cumplimiento de este criterio, lo cual se puede establecer debido a que los datos no se encuentran prefijados de antemano y el estudiante debe establecerlos como parte del proceso que implica su resolución, estas tareas son: (Capítulo 3-tarea 5 Pág.124), Capítulo (3-tarea 7 Pág.124) y (Capítulo 3-tarea 9 Pág.124). Como se ha visto cada una de ellas implica que el estudiante maneje apropiadamente las tecnologías del capítulo no solo para resolverlas sino también para llevarlas de un ostensivo a otro como parte del proceso de resolución, con lo cual se debe hallar algunos datos que no se dan pero que son necesarios para realizar este proceso de transformación del problema.

Ya que en la tarea (Capítulo 3-tarea 5 Pág.124) se hacen afirmaciones a cerca de la función cuadrática, el estudiante debe recurrir a casos particulares para dar cuenta de esto y decidir si es verdadera o falsa esta afirmación.

En la tarea (Capítulo 3-tarea 7 Pág.124) se determina el área y perímetro de un terreno, con esto se debe hallar la longitud de sus lados, no se enuncia como se debe abordar, sin embargo se tiene el conocimiento de cómo se hallan cada una de estas magnitudes para una figura rectangular y que se deban asumir las incógnitas cuya relación generan estos datos teniendo en cuenta la información dada en el enunciado.

Este proceso que lleva a cabo el estudiante es para plantear el problema en términos algebraicos e implica la restructuración y relación de los datos.

En la última tarea se pide obtener la función cuadrática dados dos puntos, sabiendo que uno de ellos es el vértice se debe recurrir al concepto eje de simetría para hallar el tercer punto.

Al respecto se puede establecer que la existencia de tareas con este grado de complejidad en el manejo de las tecnologías y de las técnicas permita en un grado medio el cumplimiento de este criterio.

7. Incidencia de los elementos tecnológicos sobre la práctica

Retomando lo dicho anteriormente, en estas Praxeologías Matemáticas existe un mayor grado de complementariedad entre las tareas y el discurso tecnológico trabajado, en parte esto se logra gracias a las tareas que involucran los procesos de razonamiento y resolución de problemas. Esta característica permite la integración de las tecnologías para producir algo y a la vez con la propuesta de estas tareas se han visto fortalecidas las técnicas, ya que el uso de una técnica no se debe tanto al ostensivo o a la similitud de la tarea con los ejemplos dados sino al resultado de una lectura reflexiva que haga consciente al estudiante de lo apropiado de recurrir a alguna técnica en particular.

Las tareas que permiten el uso razonado de las técnicas corresponden a (Capítulo 3-tarea 4 Pág.124), (Capítulo 3-tarea 5 Pág.124), (Capítulo 3-tarea 6 Pág.124), (Capítulo 3-tarea 7 Pág.124) y (Capítulo 3-tarea 9 Pág.124). En ellas se requiere la generalización de concepciones que se habían venido fomentando durante el capítulo como lo es los tipos de soluciones que pueden tener una parábola opuesta a otra por medio del eje *x*.

Esto permite concluir que el planteamiento de las Praxeologías Matemáticas permite en un alto grado la incidencia de los elementos tecnológicos sobre la práctica.

De acuerdo a lo observado en el planteamiento de este grupo de Praxeologías Matemáticas de este capítulo se concluye que:

Los criterios que se cumplen en un alto grado son: 1, 2, 5 y 7.
El criterio que se cumple en un grado medio es: 3, 4 y 6.

No se destacan Praxeologías Matemáticas que guarden un grado bajo del cumplimiento de algún criterio.

En este tercer capítulo se hace menos inmediata la identificación de la técnica para el desarrollo de la tarea, ya que se hace necesario procesos de razonamiento para su resolución, esto permite que en términos generales las Praxeologías Matemáticas presenten un grado (alto – medio) de completitud, lo cual se debe a que hay una necesidad de las tecnologías como herramienta de análisis que justifique el uso de la técnica.

Grado de completitud de las Praxeologías Matemáticas del capítulo 4 (*fórmula cuadrática*)

1. Integración de los tipos de tareas

En este penúltimo capítulo se proponen en total 11 tareas que trabajan el método de la fórmula cuadrática e integran las tecnologías vistas en los capítulos anteriores, esto permite establecer un concepto más amplio de la función cuadrática a través de la retroalimentación de las tecnologías vistas, con lo cual también se muestra el interés del texto escolar por desarrollar y establecer el conocimiento por medio de actividades que involucran los procesos de razonamiento, resolución de problemas y otros que contribuyen en mayor medida a la comprensión de las tecnologías así como de las técnicas asociadas.

El primer taller se centra en el tema de la fórmula cuadrática y las técnicas que de ella se derivan, surgiendo así los siguientes tipos de tareas:

Usar la fórmula cuadrática para resolver las ecuaciones: (Capítulo 4-tarea 2 Pág.131), (Capítulo 4-tarea 3 Pág.131), (Capítulo 4-tarea 4 Pág.131).
Hallar el discriminante de las ecuaciones: (Capítulo 4-tarea 1 Pág.131), (Capítulo 4-tarea 5 Pág.131), (Capítulo 4-tarea 6 Pág.131), (Capítulo 4-tarea 8 Pág.131).
Establecer como son los discriminantes de dos o más funciones cuadráticas que se relacionan por una traslación horizontal y como son si la traslación es vertical: (Capítulo 4-tarea 6 Pág.131), (Capítulo 4-tarea 7 Pág.131), (Capítulo 4-tarea 8 Pág.131).
Trazar la gráfica de las funciones cuadráticas y establecer que relaciones hay entre ellas y a que se deben: (Capítulo 4-tarea 7 Pág.131), (Capítulo 4-tarea 8 Pág.131).
Plantear una ecuación cuadrática para una situación y resolverla: (Capítulo 4-tarea 9 Pág.131), (Capítulo 4-tarea 10 Pág.131) y (Capítulo 4-tarea 11 Pág.131).

Lo anterior permite evidenciar que existe de entrada una integración entre las diferentes tipos de tareas que se da por el uso de la fórmula cuadrática y de ella las posibles soluciones que implica su discriminante así como las soluciones que guardan dos o más funciones cuadráticas que están relacionadas por un desplazamiento horizontal.
Entre todas estas tareas se destacan las siguientes: (Capítulo 4-tarea 6 Pág.131), (Capítulo 4-tarea 7 Pág.131), (Capítulo 4-tarea 9 Pág.131), (Capítulo 4-tarea 10 Pág.131) y (Capítulo 4-tarea 11 Pág.131) que corresponden al primer grupo propuesto en la pagina 131.

Para la primera se debe conjeturar acerca de cuál puede ser el signo del discriminante para las ecuaciones cuadráticas dadas, en ellas la expresión que representa la variable x puede ser un distractor ya que a todas las $x´s$ de la primera ecuación cuadrática se les resta 10 unidades, $2(x-10)^2+3(x-10)+1$, sin embargo esto conlleva a relacionar las tecnologías desplazamiento horizontal y raíces de la función cuadrática al asumir que los cortes con el eje x siguen siendo dos como sucedía con la primera parábola, esto implica que el discriminante debe ser positivo.

La segunda permite consolidar este conocimiento a través de una serie de cuestionamientos que se hacen de cuatro polinomios que son obtenidos del primero de ellos a través de un desplazamiento horizontal.

En las tres últimas tareas se establece una relación entre las técnicas que se pueden usar para plantear dos ecuaciones que representen la situación y de esta forma resolverla.

En las primeras tareas (Capítulo 4-tarea 1 Pág.131), (Capítulo 4-tarea 2 Pág.131) y (Capítulo 4-tarea 3 Pág.131) se trabaja la ejercitación de técnicas como el uso de la fórmula cuadrática para hallar raíces o para conocer el discriminante de cada polinomio, así se puede establecer que hay un aporte por parte de estas primeras tareas al manejo de técnicas que en tareas posteriores va a necesitar.

De acuerdo a lo dicho se establece que este grupo de Praxeologías Matemáticas permite el cumplimiento de este criterio en un alto grado.

2. Diferentes técnicas y criterios para elegir entre ellas

La consolidación del conocimiento es llevado a cabo a través de las tareas que se proponen en estos últimos capítulos, esto hace que las tareas tengan un mayor grado de exigencia con el manejo de las tecnologías vistas y de su integración, de igual forma sucede con las técnicas que en muchos casos han sido vistas en unidades anteriores o hasta en años anteriores.

Las tareas a las cuales se hace referencia plantean en su mayoría situaciones de otras disciplinas (de la física), ejemplo de esto son las tareas Capítulo 4-tarea 7 Pág.136, Capítulo 4-tarea 8 Pág.136, Capítulo 4-tarea 14 Pág.136 para la física.

A razón de que estas tareas sean planteadas en situaciones como las mencionadas anteriormente permite que se involucren conocimientos de estas disciplinas para modelar o mirar la tarea desde perspectivas diferentes y que por cualquiera de ellas se llegue a la ecuación cuadrática.

De igual manera se plantean tareas en contextos de la vida diaria y de las mismas matemáticas que requieren procesos de integración de las tecnologías pues no se identifica a primera vista como se deben abordar o que técnicas se deben usar para resolverlas.

En cada uno de estos casos se valora que el estudiante pueda hacer el uso de sus conocimientos para replantear la situación en términos algebraicos sin perder de vista la función de este proceso que es la de responder a algo.

Esta característica que se mantiene para la mayoría de las tareas correspondientes a este penúltimo capítulo hace que se cumpla en un alto grado el criterio, diferentes técnicas y criterios para elegir.

3. Independencia de los ostensivos que integran las técnicas

En general se observa una disminución de las tareas del tipo ejercitación de procedimientos dando paso a tareas del tipo razonamiento y resolución de problemas como ocurre con las tareas destacadas en el punto anterior. Es así como se pone en práctica los conocimientos del estudiante en tareas que relegan las similitudes entre la técnica y los objetos ostensivos para propiciar el uso razonado de las técnicas.

Tomando como ejemplo las tareas del criterio anterior se puede establecer que en un primer nivel del proceso es necesario que el estudiante ejercite estas técnicas y establezca algunas nociones acerca de los datos que requiere para utilizar la técnica, con esto el estudiante tendrá algunos elementos que le permitan avanzar a un nuevo nivel en el cual debe establecer una relación entre sus conocimientos y las nuevas tareas que no hacen evidente la técnica que se debe utilizar.

De acuerdo a este aspecto que presentan las Praxeologías Matemáticas se determina en un alto grado el cumplimiento de este criterio.

4. Existencia de tareas y de técnicas “inversas”

Las tareas planteadas en contextos diferentes al matemático requieren de un proceso inverso para su resolución ya que se deben establecer los datos que representan la situación y relacionarlos utilizando conceptos como el área y el perímetro, con esto se llega a una expresión que se puede resolver mediante las tecnologías vistas y con ellas encontrar la solución.

Los datos que se dan en estas tareas son valores numéricos que representan áreas, perímetros o resultados de alguna operación, con lo cual el estudiante utiliza conceptos que determinan la obtención de estos valores para hallar bien sea la longitud de los lados de la figura o algún otro valor numérico.

Al respecto las siguientes tareas presentan estas características: (Capítulo 4-tarea 9 Pág.131)- (Capítulo 4-tarea 10 Pág.131)- (Capítulo 4-tarea 11 Pág.131)- (Capítulo 4-tarea 2 Pág.136)- (Capítulo 4-tarea 4 Pág.136)- (Capítulo 4-tarea 5 Pág.136)- (Capítulo 4-tarea 6 Pág.136)- (Capítulo 4-tarea 11 Pág.137)- (Capítulo 4-tarea 13 Pág.137).

Con lo cual se concluye que se cumple en un alto grado el criterio existencia de tareas y técnicas “inversas”.

5. Interpretación del resultado de aplicar las técnicas

Además de la contribución que hace en este sentido las tareas propuestas en contextos diferentes al matemático también se observa que las tareas: (Capítulo 4-tarea 6 Pág.131), (Capítulo 4-tarea 7 Pág.131), (Capítulo 4-tarea 8 Pág.131) contribuyen a la reflexión sobre el uso de algunas técnicas y a la vez a su integración, con estas tareas se busca afianzar el concepto de desplazamiento horizontal y vertical, y para llevarlo a cabo se debe realizar la gráfica de varios polinomios y comparar las similitudes que entre ellas existe, posteriormente se pide establecer que sucede con el discriminante de un polinomio que ha sido desplazado horizontalmente con respecto al discriminante del polinomio inicial.

En estas tareas se hacen preguntas o cuestionamientos que relacionan el concepto de desplazamiento horizontal y el discriminante de algunos polinomios que involucran estos elementos, esto permite retomar la actividad anterior y reflexionar sobre ciertos hechos que el estudiante deja de lado por no aportar a la resolución de la actividad, sin embargo son elementos que dan información decisiva en alguna otra situación, ejemplo de esto son el tipo de soluciones que pueden tener dos polinomios que se relacionan a través de un desplazamiento horizontal, si se conoce el discriminante de uno de ellos se puede establecer las soluciones del otro de acuerdo al tipo de desplazamiento que ha sufrido con respecto al otro. Lo que busca el texto con esto es integrar conocimientos que además de servir para resolver nuevos tipos de tareas también le dan sentido a las técnicas actuales y las fortalecen.
Al respecto se concluye que estas Praxeologías Matemáticas permiten un alto grado el cumplimiento de este criterio.

6. Existencia de tareas matemáticas “abiertas”

En la mayor parte de las tareas no se dan más que los datos necesarios para resolverlas evitando que haya un exceso de información o también que hagan falta datos para su resolución, esto garantiza que el estudiante pueda identificar la técnica apropiada para resolverla a través de una relación con los ejemplos. Este ha sido uno de los aspectos que se mantiene desde los primeros capítulos en tareas cuyo propósito está enfocado a la ejercitación de técnicas y procedimientos, sin embargo en virtud de cumplir con los estándares curriculares propuestos por el MEN se plantean algunas tareas que propician procesos de razonamiento y resolución de problemas en las cuales los datos no evidencian cómo se pueden resolver, al contrario parece que la técnica no depende de los datos sino de cómo se manipulan e integran estos datos para poder utilizar la técnica.

Entre las tareas que implican estos procesos se observa que para su resolución se deben manipular los datos para generar expresiones que respondan a lo planteado, esto se da más que todo en las tareas que tratan sobre situaciones de la vida diaria y de otras disciplinas, ya que en ellas como se dijo anteriormente se requiere la integración de los datos a través de tecnologías que el estudiante no espera encontrar en el texto (de la geometría, de la física).

Esta característica se puede ver en las siguientes tareas. (Capítulo 4-tarea 9 Pág.131)- (Capítulo 4-tarea 10 Pág.131)- (Capítulo 4-tarea 4 Pág.131)- (Capítulo 4-tarea 5 Pág.136)- (Capítulo 4-tarea 6 Pág.136)- (Capítulo 4-tarea 11 Pág.136)- (Capítulo 4-tarea 13 Pág.136), cada una de estas tareas se plantean o bien en el contexto de la vida diaria o de otras disciplinas, la razón por la cual estas tareas se catalogan como tareas "abiertas" es porque los datos que se dan no llevan de forma directa a la solución, son datos que el estudiante debe utilizar para plantear una expresión con la cual se llegue a la solución, es decir que como ayuda para resolver la tarea requiere saber cómo utilizarlas e integrarlas.

De acuerdo a este aspecto que se evidencia en las tareas mencionadas se establece que las Praxeologías Matemáticas permiten un alto grado el cumplimiento de este criterio.

7. Incidencia de los elementos tecnológicos sobre la práctica

De acuerdo a lo dicho hasta el momento se deduce que las tareas propuestas en este penúltimo capítulo del texto escolar integran y permiten la incidencia de las tecnologías vistas a lo largo de la unidad, esto también se ve en la enseñanza de las tecnologías en la que los ejemplos no se limitan a mostrar el procedimiento para resolver una ecuación cuadrática a través de la fórmula cuadrática sino que involucra situaciones de otras disciplinas y de la vida diaria con el propósito de utilizar otras tecnologías y técnicas que de otra forma se verían fragmentadas.

En las tareas propuestas se cuestiona y se pregunta por las concepciones que puede tener o crear el estudiante acerca de los conceptos vistos en ciertos casos particulares, esto se puede ver en las tareas (Capítulo 4-tarea 9 Pág.131), (Capítulo 4-tarea 9 Pág.131)y (Capítulo 4-tarea 9 Pág.131), en la primera de ellas se pide obtener los discriminantes para las funciones dadas, lo cual permite la relación del concepto de desplazamiento y las soluciones de las funciones cuadráticas, a la vez esto contribuye al desarrollo de las siguientes dos tareas en las que se profundiza más sobre el tema y se permite llegar a algunas nociones al respecto.

Por otro lado el planteamiento de tareas referidas a situaciones de otras disciplinas y de la vida diaria permite también el uso razonado del conocimiento propiciado al desligarlas de los ejemplos que sirvieron para las explicaciones.

Como se mencionó anteriormente las tareas que permiten una mayor incidencia sobre las tecnologías así como sobre las técnicas son aquellas que problematizan una situación de la vida diaria o de otras disciplinas, para esto el texto intenta preparar al estudiante con algunos ejemplos y explicando algunas propiedades que cumplen la función cuadrática expresada gráficamente o algebraicamente, lo cual se ve reflejado en las tareas propuestas.

Esto permite establecer que las Praxeologías Matemáticas permiten en un alto grado el cumplimiento de este criterio.

De acuerdo a lo observado en el planteamiento de este grupo de Praxeologías Matemáticas de este capítulo se concluye que:

Los criterios que se cumplen en un alto grado son: 1, 2, 3, 4, 5, 6 y 7.

No se destacan Praxeologías Matemáticas que guarden un grado medio y bajo del cumplimiento de algún criterio.

Lo anterior permite observar el trabajo progresivo que maneja el texto escolar como propuesta educativa, esta propuesta va integrando en cada capítulo los conceptos y técnicas vistas en los capítulos anteriores, que a la vez implica niveles diferentes de exigencia en los talleres propuestos y para este penúltimo capítulo (la fórmula cuadrática) presente un alto grado en la completitud de las Praxeologías Matemáticas trabajadas.

Grado de completitud de las Praxeologías Matemáticas del capítulo 5 (*desigualdades y máximos y mínimos de funciones cuadráticas*)

1. Integración de los tipos de tareas

Las tareas que se plantean en este capítulo del texto promueven la graficación de las funciones cuadráticas o lineales como recurso para analizar las desigualdades y obtener regiones que resultan del corte entre las dos gráficas.

En este sentido se observa que las tareas se integran alrededor de las tecnologías: desigualdades cuadráticas y máximos y mínimos de las función cuadrática que se trabajan en el capítulo, a la vez con ellas se promueven algunas técnicas que fueron vistas anteriormente y que aparecen nuevamente con el fin de hallar el máximo o mínimo de una parábola, al respecto se hace referencia al vértice de la parábola.

De acuerdo a esto los tipos de tareas que se presentan para este capítulo se clasifican en:

Identificar las regiones del plano que satisfacen las desigualdades: (Capítulo 5-tarea 1 Pág.141), (Capítulo 5-tarea 2 Pág.141), (Capítulo 5-tarea 3 Pág.141).
Dibujar la región solución para las desigualdades dadas: (Capítulo 5-tarea 4 Pág.141).
Hallar el máximo o el mínimo de las funciones cuadráticas dadas: (Capítulo 5-tarea 7 Pág.141).
Observar la gráfica que representa una situación y responder las preguntas hechas al respecto: (Capítulo 5-tarea 5 Pág.141).
En las primeras cuatro tareas (Capítulo 5-tarea 1 Pág.141), (Capítulo 5-tarea 2 Pág.141), (Capítulo 5-tarea 3 Pág.141) y (Capítulo 5-tarea 4 Pág.141), se busca que el estudiante identifique gráficamente las regiones determinadas por las desigualdades dadas, cada una de estas tareas involucran una misma técnica, la cual como se mencionó anteriormente consiste en obtener un punto cualquiera que no esté sobre la parábola y sustituir cada componente en la variable respectiva, de acuerdo a la desigualdad que define su comparación se puede definir también los puntos *(x, y)* que satisfacen las desigualdades.

Las tareas restantes son más flexibles al uso de una u otra técnica, en ellas hay la posibilidad de usar técnicas de capítulos anteriores y tecnologías anteriores como elemento para analizar una gráfica. En la quinta tarea (Capítulo 5-tarea 4 Pág.141) se muestra una gráfica que hace referencia a la producción de un campo petrolífero y con ella se debe establecer la cantidad de barriles extraídos en el mes de agosto para que el comportamiento de la producción sea cuadrático, posteriormente se pide establecer si la producción es mayor o menor a la esperada en el caso de que se obtengan 5 millones de barriles en el mes de agosto.

Así como en la anterior tarea en las dos últimas se propicia el uso de técnicas que han sido vistas en capítulos anteriores con el propósito de ser aplicadas al estudio de las tecnologías de este capítulo.

De acuerdo a esto se puede concluir que las Praxeologías Matemáticas cumplen en un grado medio el criterio integración de los tipos de tareas.

2. Diferentes técnicas y criterios para elegir entre ellas

Las tareas planteadas en este capítulo enfatizan la técnica que consiste en graficar las expresiones algebraicas y con base en esta gráfica conjeturar sobre la posible solución que determina la desigualdad, ya sean regiones que se encuentran por encima o por debajo de la gráfica, o la región que resulta de la intercepción entre dos gráficas.

Sin embargó la resolución de las tareas permitirá una mejor apropiación de las tecnologías y de las técnicas que en últimas era la propuesta del texto para este capítulo, en la primera tarea (Capítulo 5-tarea 1 Pág.141) el estudiante recurre a la graficación para identificar la región del plano determinada por expresiones como $x > 5$ la cual además de ofrecer información también busca familiarizar al estudiante con su significado, es decir que las tareas se convierten en un recurso para enseñar este concepto y lo hace por niveles, en un primer nivel la desigualdad establece la división del plano o de la recta en dos partes, una de estas dos partes responde a la desigualdad y el estudiante lo podrá identificar visualmente. En niveles posteriores la desigualdad involucra expresiones cuadráticas y por último se pide establecer la región que resulta de la intersección de dos desigualdades, esto se observa en las tareas (Capítulo 5-tarea 1 Pág.141), (Capítulo 5-tarea 1 Pág.141) y (Capítulo 5-tarea 1 Pág.141).

En este sentido la técnica también va cambiando de acuerdo a los elementos que se van incluyendo en las tareas de cada nivel y a la vez no permiten que haya una identificación absoluta entre la tarea y la técnica.

De acuerdo a esto se puede establecer que las Praxeologías Matemáticas permiten cumplir en un grado medio el criterio diferentes técnicas y criterios para elegir.

3. Independencia de los ostensivos que integran las técnicas

En las cuatro primeras tareas de este capítulo se implementa el uso de un mismo ostensivo, la expresión algebraica y el enunciado que pide hallar la región determinada por la desigualdad.

Este aspecto hace que se familiarice el uso de cierta técnica para las tareas que sean similares sin importar si existen otras técnicas.

En las tareas restantes no se guarda esta característica que se venía presentando (Capítulo 5-tarea 1 Pág.141), (Capítulo 5-tarea 1 Pág.141) y (Capítulo 5-tarea 1 Pág.141), en ellas se debe utilizar técnicas diferentes a las anteriores pero que han sido trabajadas en este capítulo y su elección no se debe al ostensivo utilizado.

Por último hay que mencionar que el planteamiento de cuatro tareas tan similares en un grupo de siete que son en total no se justifica ya que dejan de lado la posibilidad de que el estudiante pueda implementar lo que ha aprendido acerca de las funciones cuadráticas en situaciones diferentes al contexto matemático para generar nuevas técnicas.

De acuerdo a este aspecto que se resalta en las primeras cuatro tareas se establece que las Praxeologías Matemáticas permiten un bajo grado del cumplimiento de este criterio.

4. Existencia de tareas y de técnicas "inversas"

Dentro del grupo de tareas que se proponen en este capítulo la tarea (Capítulo 5-tarea 6 Pág.141) requiere llevar a cabo un procedimiento inverso al que ha sido desarrollado en los ejemplos, es decir que la técnica implicada en esta tarea es inversa a la que maneja el estudiante que consiste en encontrar la región que representa la intercepción de las gráficas de las desigualdades dadas. En esta tarea se da la gráfica de las desigualdades y con ella el estudiante debe encontrar la ecuación de la recta y de la parábola, esta actividad la puede llevar a cabo identificando dos o tres puntos de cada función para aplicar el método que consiste en plantear un sistema de ecuaciones lineales con la expresión general de la ecuación lineal y cuadrática, su resolución permite encontrar los coeficientes de la función (lineal y cuadrática).

Con las ecuaciones correspondientes a cada una de las gráficas (función lineal y función cuadrática) el estudiante debe establecer las desigualdades que representan estas gráficas.

La tarea que implementa el uso de la técnica directa, es decir la técnica trabajada por el texto a lo largo del capítulo es (Capítulo 5-tarea 6 Pág.141), en ella se dan dos desigualdades con las cuales se pide dibujar la región solución.

Aparte de esta no se plantean más tareas inversas.

Esto permite establecer que las Praxeologías Matemáticas permiten en un grado bajo el cumplimiento de este criterio.

5. Interpretación del resultado de aplicar las técnicas

La propuesta de las tecnologías no ahonda en los diferentes aspectos y conceptos que están asociados a las desigualdades a la vez que no se ofrecen diferentes enfoques del concepto a través de situaciones de la vida diaria y a través de otros recursos didácticos que potencien su comprensión, sin embargo se puede establecer que el desarrollo de estas tecnologías permite la interpretación de las tareas así como de las respuestas a las cuales se llegan por medio de las técnicas que trabaja el texto. Una razón que permite establecerlo es el uso de las gráficas como recurso para mostrar ejemplos de las desigualdades y también como una técnica para expresar los puntos o la región que determina una desigualdad que está dada algebraicamente a una forma visual.

Así las tareas de diferentes tipos y diferentes niveles de complejidad están asociados al recurso gráfico y en el caso de no estarlo se pide representarlo mediante este ostensivo lo que permite un nivel de comprensión e interpretación de las tecnologías aplicadas en las tareas.

De acuerdo a esta característica se concluye que las Praxeologías Matemáticas cumplen en un grado alto la interpretación del resultado de aplicar las técnicas.

6. Existencia de tareas matemáticas “abiertas”

En general las tareas que se plantean en este capítulo obedecen a una ejercitación de las técnicas y algunos procedimientos que ya han sido mostrados, esto se evidencia también en las tareas de mayor complejidad como la (Capítulo 5-tarea 5 Pág.141) y (Capítulo 5-tarea 6 Pág.141) en las cuales se requiere un mayor trabajo con el uso de las técnicas pero que de igual manera evidencian el procedimiento que se debe usar para llevarla a cabo, esto se da por medio de las preguntas que establece el texto y con los datos que al respecto se complementan para asegurar que el estudiante se dé cuenta de la técnica que debe usar.

Esta característica de las tareas limita la posibilidad de valorar la pertinencia de los datos así como de las respuestas que se obtienen con respecto a la situación ya que en cada caso lo necesario es saber cuál es la técnica que se debe utilizar y saber desarrollarla apropiadamente.

Esto permite afirmar que las Praxeologías Matemáticas mantienen un bajo grado de cumplimiento de tareas matemáticas “abiertas”.

7. Incidencia de los elementos tecnológicos sobre la práctica

Las tareas que aquí se plantean contribuyen a la puesta en práctica de las tecnologías trabajadas, esto se ve reflejado en una serie de actividades similares a los ejemplos utilizados en el desarrollo de las mismas tecnologías como lo es la graficación de la expresiones algebraicas para establecer que regiones representan las desigualdades o también el uso de la ecuación del vértice para hallar el máximo o el mínimo de una función cuadrática. Así aunque se cumple de forma básica este criterio debido a que las tareas no ahondan en la comprensión e integración de estas tecnologías debido a que su resolución implica la ejercitación de las técnicas vistas, es posible y necesario el uso de estas tecnologías en las diferentes tareas que se plantean con este fin.

Como conclusión, de acuerdo a lo observado en el planteamiento de este grupo de Praxeologías Matemáticas de este capítulo se llega a que:
Los criterios que se cumplen en un alto grado son: 1 y 5.
El criterio que se cumple en un grado medio es: 2.
Los criterios que se cumplen en un grado bajo son: 3, 4, 6 y 7.

Este capítulo es una introducción a las desigualdades, lo cual se inicia a través del concepto de función y de función cuadrática para formar una noción de desigualdad, así como a través de las representaciones gráficas que enfatizan su ejercitación, el grado de completitud se destaca en (medio – bajo).

En la Tabla 22 se muestra un consolidado sobre el nivel de cumplimiento de los siete criterios en cada una de los cinco capítulos de la unidad: *función cuadrática* en el texto escolar Espiral 9.

Tabla 22. Completitud de las Praxeologías Matemáticas locales del texto escolar Espiral 9.

Criterio	**C[10] 1**	**C 2**	**C 3**	**C 4**	**C 5**	
Integración de los tipos de tareas.	A	M	A	A	M	**A**
Diferentes técnicas y criterios para elegir entre ellas.	B	M	A	A	M	**M-A**
Independencia de los ostensivos que integran las técnicas.	M	B	M	A	B	**B-M**

[10] capítulo de la unidad ecuación cuadrática.

Criterio	C[10] 1	C 2	C 3	C 4	C 5	
Existencia de tareas y de técnicas inversas.	M	B	M	A	B	**B-M**
Interpretación del resultado de aplicar las técnicas.	M	B	A	A	A	**M-A**
Existencia de tareas matemáticas abiertas.	B	B	M	A	B	**B**
Incidencia de los elementos tecnológicos sobre la práctica.	B	M	B	A	B	**M**
	M-B	**M-B**	**M-A**	**A**	**M-B**	

3.3.8. GRADO DE COMPLETITUD DE LAS PRAXEOLOGÍAS MATEMÁTICAS LOCALES DEL TEXTO ESCOLAR DELTA 9

A continuación se analiza el grado de completitud (alto, medio, bajo) de las Praxeologías Matemáticas Locales correspondientes a cada uno de las seis lecciones que se miraran en el texto escolar Delta 9, una lección para la *función cuadrática* y las cinco restantes para la unidad *ecuación cuadrática*, esto se hace con respecto a las tareas que se proponen al final de cada lección en los talleres que el texto Delta establece como **taller piensa y practica.** Si se quieren mirar las Praxeologías Matemáticas por capítulos se sugiere mirar el Anexo 3 (**Praxeologías Matemáticas Locales del texto Delta 9**).

Este análisis se establece a partir de los siete indicadores propuestos en el texto *completitud de las OM locales.* El grado de Completitud de las Praxeologías Matemáticas Locales del Texto Delta 9 se obtendrá comparando la cantidad de tareas que cumplen cada uno de estos criterios con respecto al total de tareas que se proponen en el respectivo taller de la lección.

PRAXEOLOGÍAS MATEMÁTICAS DE LA FUNCIÓN CUADRÁTICA

Grado de completitud de las Praxeologías Matemáticas de la lección: *función cuadrática*

1. Integración de los tipos de tareas:

Para repasar y fomentar la comprensión del contenido visto en esta primera lección se proponen 12 tareas, cada una de ellas busca que el estudiante reflexione sobre su conocimiento y a la vez ponga en práctica las técnicas vistas a lo largo de la lección.

Los tipos de tareas que se destacan en este taller consiste en:

Describir el tipo de traslación de una parábola con respecto a la función cuadrática x^2: (Capítulo 4- tarea 1 pág. 119), (4- tarea 5 pág. 119)
Decidir qué puntos pertenecen a la función cuadrática: (Capítulo 4- tarea 2 pág. 119), (Capítulo 4- tarea 4 pág. 119), hallar eje de simetría, vértice, interceptos, valor máximo o mínimo e intervalos donde la función cuadrática es creciente y decreciente: (Capítulo 4- tarea 3 pág. 119), (Capítulo 4- tarea 5 pág. 119), (Capítulo 4- tarea 6 pág. 119), (Capítulo 4- tarea 7 pág. 119), (Capítulo 4- tarea 8 pág. 119), (Capítulo 4- tarea 9 pág. 119), (Capítulo 4- tarea 10 pág. 119), (Capítulo 4- tarea 11 pág. 119), (Capítulo 4- tarea 12 pág. 119).
Tabular y trazar la gráfica de las funciones: (Capítulo 4- tarea 4 pág. 119), (Capítulo 4- tarea 6 pág. 119)

Lo anterior permite evidenciar que existe una integración entre las tareas debido primeramente a las técnicas que en ellas se ven involucradas, a la vez, este hecho en conjunto con la propuesta de tareas en contextos diferentes hace que la resolución de la tarea no dependa de su similitud con los ejemplos, sino que pase por un proceso de selección y puesta en práctica de la técnica de manera coherente con lo que explicita la tarea.

Otro aspecto que resalta la integración entre las tareas es el trabajo alrededor de los conceptos que integran la función cuadrática, esto se puede ver cuando se pide hallar la cantidad mínima de un producto para minimizar el costo promedio, o en otro caso, hallar el valor que debe tomar el coeficiente *m* de una parábola para que intercepte al eje *x* en dos puntos, en cada caso es beneficioso considerar el concepto de vértice de una función cuadrática y su concavidad para abordar su resolución.

Lo anterior permite concluir que el taller contribuye en un alto grado el cumplimiento de este primer criterio.

2. Diferentes técnicas y criterios para elegir entre ellas:

Se observa que entre las 12 tareas propuestas en esta lección, no es mayor la cantidad que enfatiza la ejercitación de procedimientos con respecto a las que propician el razonamiento y la resolución de problemas que corresponden a las tareas (Capítulo 4- tarea 2 pág. 119), (Capítulo 4- tarea 3 pág. 119), (Capítulo 4- tarea 6 pág. 119), (Capítulo 4- tarea 7 pág. 119), (Capítulo 4- tarea 8 pág. 119), (Capítulo 4- tarea 9 pág. 119), (Capítulo 4- tarea 11 pág. 119), (Capítulo 4- tarea 12 pág. 119), al contrario, en esta parte de la unidad que se refiere a la introducción del concepto función cuadrática se propicia que el estudiante comprenda mejor las técnicas y sepa utilizarlas en tareas distintas, lo cual hace que el estudiante deba estar revisando constantemente las explicaciones y relacionando lo que se da en la tarea con la funcionalidad de las técnicas así como con las definiciones que dan cuenta de estas técnicas.

Existe una integración que se da gracias a que se necesitan más de una técnica para resolver las tareas, y que la comprensión del concepto permite evidenciar los diferentes aspectos relacionados con la función cuadrática como lo es la relación entre el vértice, el eje de simetría y los intervalos en los cuales es creciente y decreciente la función, de acuerdo a esto el texto busca que el estudiante relacione los datos que lo lleven a elegir las técnicas apropiadas ya que podría elegir una técnica sin fundamentos acordes a la tarea, pero que a la final no le aportaran los resultados que se quieren.

De acuerdo a lo anterior se concluye que este criterio se cumple en un alto grado.

3. Independencia de los ostensivos que integran las técnicas:

Los ostensivos que se utilizan a lo largo de la lección se limitan al medio algebraico y gráfico,cada uno de estos dos ostensivos sirve para mostrar cómo se lleva la función de una expresión algebraica a la gráfica y viceversa también para mostrar los interceptos, vértice y raíces de la función cuadrática.

A pesar de la funcionalidad e influencia que presentan estos dos ostensivos en el tratamiento de las técnicas y los conceptos, en el planteamiento de las tareas se utilizan muy poco y se da cabida a la aplicación de la función cuadrática en contextos diferentes al matemático. Este aspecto hace que las técnicas no se vean dependientes de estos recursos matemáticos y por el contrario el uso de las técnicas pase más por un proceso de razonamiento sobre ellas mismas y sobre las tecnologías.

Así como se mencionó anteriormente para el tipo de tareas que implementan procesos diferentes al de ejercitación de procedimientos, ocurre con las tareas que hacen que las técnicas no dependan de los ostensivos utilizados en los cuales se destacan (Capítulo 4- tarea 2 pág. 119), (Capítulo 4- tarea 3 pág. 119), (Capítulo 4- tarea 6 pág. 119), (Capítulo 4- tarea 7 pág. 119), (Capítulo 4- tarea 8 pág. 119), (Capítulo 4- tarea 9 pág. 119), (Capítulo 4- tarea 11 pág. 119), (Capítulo 4- tarea 12 pág. 119), es necesario aclarar que hay tareas en las que se utilizan el ostensivo de la expresión algebraica, sin embargo con ellas se generan procesos de razonamiento más que el uso de una técnica.

De acuerdo a lo anterior se concluye que este criterio en el taller se cumple en un alto grado.

4. Existencia de tareas y de técnicas inversas:

La lección enfatiza el procedimiento para cambiar de ostensivo, esto se hace hallando algunos valores de la función cuadrática para tabular y graficar, o también para verificar si un punto pertenece a la función cuadrática, sin embargo las tareas (Capítulo 4- tarea 2 pág. 119), (Capítulo 4- tarea 7 pág. 119) piden hallar un coeficiente de la función cuadrática de manera que la función pase por el origen o que corte en uno o dos puntos al eje *x*, este tipo de tarea permite considerar las técnicas utilizadas en el caso inicial para considerar como se debe abordar lo que pide esta tarea, ya que la tabulación da cuenta de la coordenada correspondiente a la función cuadrática, entonces se debe realizar el procedimiento opuesto en el sentido de que si ya se tiene la imagen y la preimagen entonces se deben considerar que procedimientos son los que permiten hallar el punto para así encontrar la expresión cuadrática que se pide. Estas tareas se consideran como tareas inversas al procedimiento inicial y la tarea directa es (Capítulo 4- tarea 6 pág. 119) donde se debe hallar la gráfica si se da la expresión algebraica.

De otro lado se destaca el proceso de resolución que implica la tarea (Capítulo 4- tarea 9 pág. 119), en ella y con relación nuevamente al procedimiento citado al inicio se pide hallar la expresión algebraica de la función si se conocen dos o tres puntos, uno de estos puntos es el vértice, de esta manera el estudiante tiene los recursos para hallar los tres puntos en el caso de que sólo se den dos, esta tarea propone considerar los procedimientos utilizados para pasar de un ostensivo a otro (tabulación), y con estos datos plantear un sistema de ecuaciones que le permitirán resolverla, aunque no se utilizan las mismas técnicas para ir de la tarea directa a la inversa, estas son necesarias para llegar a las técnicas que lo permiten.

De acuerdo a lo anterior se concluye que el criterio se cumple en un alto grado, ya que de estas tareas se desglosan varios puntos.

5. Interpretación del resultado de aplicar las técnicas:

El planteamiento de estas tareas buscan que el estudiante no se acostumbre al manejo de una única técnica, al contrario, se pretende que apropie y maneje técnicas alternativas, este aspecto, como se mencionó anteriormente se da con la propuesta de tareas que no guardan similitud con los ejemplos y que generan razonamiento en el estudiante. Sin embargo se debe considerar en este punto que los conceptos manejados durante la lección, en muchos casos no se desarrollan sino hasta que se llegue a la unidad ecuación cuadrática que se encuentra posteriormente a la función cuadrática, esto puede perjudicar el propósito educativo ya que los conceptos se ven fragmentados al tratar de relacionarlos con otros conceptos en los cuales se requieren.

El cumplimiento de este criterio se beneficia gracias a que las tareas se refieren cada vez a cuestiones diferentes y contextos diferentes, esto conlleva a que la resolución no dependa de la similitud entre las tareas, obligando a tener que ir directamente a la definición y también a los ejemplos para observar cómo se da el funcionamiento de estos objetos matemáticos.

De acuerdo a lo anterior se concluye que este criterio se cumple en un alto grado en la lección.

6. Existencia de tareas matemáticas abiertas:

Aunque las tareas propuestas desarrollan procesos de razonamiento y solución de problemas, estas tareas no se enfocan en que el estudiante sea quien descubra por cuenta propia las técnicas y deduzca de ellas los datos necesarios para elegir la técnica que lo llevará a su solución, ya que en ellas se dan los datos necesarios y suficientes para su resolución así como la evidencia de algunos conceptos cercanos como el máximo o el mínimo de la función y algunas veces la expresión algebraica junto con lo que se debe hallar de ella.

En conclusión las tareas se encuentran en niveles iniciales de acuerdo al criterio existencia de tareas abiertas, lo cual es la consideración en términos de lo que se explicita como una tarea abierta.

De acuerdo a lo anterior se concluye que las Praxeologías Matemáticas presentan un grado medio del cumplimiento de este criterio.

7. Incidencia de los elementos tecnológicos sobre la práctica:

De acuerdo a lo anterior se observa que las tareas propuestas permiten la incidencia de los conceptos trabajados a lo largo de la lección en la práctica, esto sucede con el cuestionamiento y propuesta de tareas diferentes en cada caso, lo cual contribuye a que el desarrollo de la tarea no se quede solo en la ejercitación de procedimientos y en el uso de la técnica sino que se llegue a lo que conforma el propósito de la lección que es la apropiación del objeto matemático y su manejo por medio de las técnicas.

De acuerdo a lo anterior se concluye que las Praxeologías Matemáticas presentan un alto grado en el cumplimiento de este criterio.

De acuerdo a lo observado en las Praxeologías Matemáticas de este primer capítulo se concluye lo siguiente:

Los criterios que se cumplen en un grado alto son: 1, 2, 3, 4, 5,7.
El criterio que se cumple en un grado medio es: 6.
No se destacan tareas que presenten un grado bajo de cumplimiento de estos criterios.

De forma general se evidencia un grado de completitud (alto) en las Praxeologías Matemáticas de este primer capítulo, lo cual se debe a que hay una necesidad de las tecnologías como herramienta de análisis que justifique el uso de la técnica.

PRAXEOLOGÍAS MATEMÁTICAS DE LA UNIDAD 4: ECUACIÓN CUADRÁTICA

Grado de completitud de las Praxeologías Matemáticas de la lección: *Solución de ecuaciones cuadráticas por factorización*.

1. Integración de los tipos de tareas:

En esta segunda lección correspondiente a la primera de la unidad ecuación cuadrática se proponen 5 tareas para el tratamiento de la solución de ecuaciones cuadráticas por este método, las cuales se refieren a uno o más de los siguientes tipos de tareas.

Clasificar las ecuaciones en lineales, cuadráticas o ninguna: (Capítulo 1 – tarea 5 pág. 170)
Establecer las soluciones de las ecuaciones cuadráticas: (Capítulo 1 – tarea 2 pág. 169), (Capítulo 1 – tarea 3 pág. 169), (Capítulo 1 – tarea 4 pág. 170), (Capítulo 1 – tarea 5 pág. 170).

Plantear una ecuación cuadrática para resolver cada uno de los problemas: (Capítulo 1 – tarea 5 pág. 170).

De acuerdo a lo anterior se establece una integración entre las diferentes tareas que resulta de la solución de las ecuaciones cuadráticas por el método de factorización, este hecho permite evidenciar los diferentes ostensivos y contextos en los que se puede expresar la ecuación cuadrática, los cuales son utilizados por el texto escolar para que el proceso de solución no se limite sólo a un método, a pesar de que se trabaja la factorización es importante que se identifique el significado de solucionar la ecuación cuadrática en sus diferentes representaciones.

De otro lado se observa que hay coherencia entre las tareas y los conceptos a los cuales responden estas tareas, además de trabajar el método de factorización para solucionar la ecuación cuadrática se reconoce y se propicia que el estudiante debe comprender que la solución de la ecuación cuadrática conlleva a tres posibles resultados (1 o 2 soluciones reales o ninguna solución en los reales).

De acuerdo a esto se concluye que las Praxeologías Matemáticas correspondientes a la primera lección de la ecuación cuadrática se cumplen en un alto grado.

2. Diferentes técnicas y criterios para elegir entre ellas:

En este primer grupo de tareas se observa que el énfasis en su resolución es hacia el proceso ejercitación de procedimientos de acuerdo a las técnicas desarrolladas en los ejemplos, a pesar de que la quinta tarea se refiere a la resolución de problemas y de ella se desglosan (Capítulo 1 – tarea 9 pág. 170). Tareas, estas se relacionan y mantienen el criterio de una misma técnica para su resolución, en general se observa que hay similitud entre la mayoría de tareas y los ejemplos dados, por lo cual se consolida este proceso matemático en esta primera lección.

De acuerdo a esto se presenta un bajo nivel para este criterio.

3. Independencia de los ostensivos que integran las técnicas:

Se observa que en las tareas (Capítulo 1 – tarea 2 pág. 169), (Capítulo 1 – tarea 3 pág. 169) y (Capítulo 1 – tarea 4 pág. 170), el uso de la técnica se debe a la similitud que guardan estas con los ejemplos y por lo tanto con los ostensivos en los cuales se presentan, esto ocurre en las primeras tareas que tratan la solución de las ecuaciones cuadráticas, para la quinta tarea no se mantiene esta característica y el estudiante debe plantear la ecuación cuadrática que representa la situación ya sea de la vida diaria o de otras disciplinas.

De acuerdo a esto se concluye que estas Praxeologías Matemáticas presentan un bajo nivel de cumplimiento de este criterio.

4. Existencia de tareas y de técnicas inversas:

De acuerdo a lo dicho hasta el momento se puede decir que estas tareas sólo se refieren a un tipo de técnica que es la mostrada en los ejemplos, por lo cual se referencian como las técnicas directas, enfatizadas por el texto para resolver las ecuaciones cuadráticas en contexto matemático, así como aquellas que se dan en los demás contextos. De acuerdo a lo anterior no se presentan tareas inversas en esta primera lección.

En conclusión se presenta un bajo grado de cumplimiento de este criterio para estas Praxeologías Matemáticas.

5. Interpretación del resultado de aplicar las técnicas:

De acuerdo al logro que se plantea al inicio de la lección, se puede observar que se cumple con el propósito planteado que consiste en que el estudiante utilice correctamente el método de factorización para la solución de ecuaciones cuadráticas, también que haya coherencia entre lo propuesto en el contenido y lo que se plantea en las tareas.

Teniendo en cuenta esto se considera que hay cumplimiento en el propósito de que el estudiante llegue a un grado medio de interpretación de los resultados que obtiene al resolver las tareas.

De acuerdo a lo anterior se concluye que las Praxeologías Matemáticas cumplen medianamente este criterio.

6. Existencia de tareas matemáticas abiertas:

Se observa que todos los datos e incógnitas están prefijadas de antemano, así como la orientación de lo que el estudiante debe hacer y la técnica que debe utilizar, de esta manera se concluye que en este grupo de tareas no se destacan tipos de tareas abiertas.

De acuerdo a esto se concluye que las Praxeologías Matemáticas presentan un grado bajo de cumplimiento de este criterio.

7. Incidencia de los elementos tecnológicos sobre la práctica:

Con respecto a este último criterio se observa que la tarea (Capítulo 1 – tarea 5 pág. 170), presenta un mayor nivel de incidencia de los conceptos que han sido trabajados no sólo en esta lección sino también en la función cuadrática sobre la práctica, en ella se evidencia que el planteamiento y resolución de la ecuación cuadrática contribuye a mostrar que los valores obtenidos se relacionan con la situación, y por ende, que estos valores no se limitan en exclusiva a un gráfico o a una ecuación, en las primeras tareas también se aplica lo visto durante el contenido, sin embargo no se ahonda en otros aspectos de la solución de las ecuaciones cuadráticas.

En conclusión se puede decir que las Praxeologías Matemáticas cumplen medianamente este criterio.

De acuerdo a lo observado en el planteamiento de este grupo de Praxeologías Matemáticas de este capítulo se concluye que:

El criterio que se cumple en un grado alto es: 1.
Los criterios que se cumplen en un grado medio son: 5 y 7.
Los criterios que se cumplen en un grado bajo son: 2, 3, 4 y 6.

En este capítulo se evidencia un grado de completitud (medio – bajo) en las Praxeologías

Matemáticas propuestas, hecho que sucede al sobrevalorar la ejercitación de las técnicas trabajadas a lo largo de la lección pero sin propiciar una integración de estas con las tecnologías y el uso razonado de estas técnicas.

Grado de completitud de las Praxeologías Matemáticas de la lección 2: *Solución de la ecuación cuadrática completando el cuadrado*

1. Integración de los tipos de tareas:

En la segunda lección de la ecuación cuadrática se plantean 20 tareas para desarrollar lo visto durante el contenido, los tipos de tareas que aquí se destacan se refieren a:

Decidir si las ecuaciones cuadráticas se pueden resolver completado el cuadrado: (Capítulo 2 – tarea 5 pág. 174)
Resolver las ecuaciones cuadráticas por alguno de los métodos: (Capítulo 2 – tarea 1 pág. 174), (Capítulo 2 – tarea 2 pág. 174), (Capítulo 2 – tarea 3 pág. 174), (Capítulo 2 – tarea 4 pág. 174), (Capítulo 2 – tarea 8-20 pág. 175).
Plantear una expresión que responda a las condiciones y datos dados acerca de la ecuación cuadrática: (Capítulo 2 – tarea 5 pág. 174), (Capítulo 2 – tarea 6 pág. 174), (Capítulo 2 – tarea 7 pág. 174).
Resolver las situaciones que se dan en diferentes contextos: (Capítulo 2 – tarea 8-20 pág. 175).

Existe integración entre los tipos de tareas propuestos gracias a las técnicas desarrolladas en la lección y también a las técnicas de las lecciones anteriores, de acuerdo a esto se observa que la integración de estas tareas no sólo sirven al propósito de ejercitar el buen uso de las técnicas sino que responden a un estudio de las tecnologías vistas a lo largo de las dos lecciones de la ecuación cuadrática.

Se observa que estos tipos de tareas abordan aspectos diferentes que caracterizan la solución de las ecuaciones cuadráticas, esto contribuye a una mejor comprensión de las tecnologías y a una integración entre estas tecnologías y las técnicas, a la vez que dan la posibilidad de usar las diferentes técnicas vistas de acuerdo a la tarea, en lugar de enfocarse en una en especial.

De acuerdo a lo anterior se concluye que estas Praxeologías Matemáticas presentan un alto grado de cumplimiento para este criterio.

2. Diferentes técnicas y criterios para elegir entre ellas:

En primera instancia hay que decir que a pesar de que la lección trata sobre el uso de una técnica para la solución de ecuaciones cuadráticas, hay apertura al uso de cualquiera de las demás técnicas, con esto no se quiere decir que no se trabaje el método visto, al cual se le da cabida al inicio de estas Praxeologías Matemáticas, pero no se quiere acostumbrar al estudiante al uso de un método en especial iniciando su estudio.

De otro lado se observa que hay mayor interés en el reconocimiento del significado de resolver la ecuación cuadrática en diferentes situaciones, es decir que estas Praxeologías Matemáticas propician un trabajo reflexivo sobre el uso de las técnicas y sobre la solución que se obtiene al aplicarlas, de esta manera se destacan tipos de tareas que tratan la resolución de problemas y el razonamiento como las que se proponen para los dos últimos tipos de tareas.
En conclusión se observa que estas Praxeologías Matemáticas presentan un alto grado de cumplimiento de este criterio.

3. Independencia de los ostensivos que integran las técnicas:

Se observa que en el desarrollo de esta lección se enfatiza el uso de la expresión algebraica para explicar cómo se resuelve la ecuación cuadrática por este método, este hecho puede determinar la técnica cuando se propongan tareas similares, sin embargo dentro de las Praxeologías Matemáticas de la lección se observa que sólo en las primeras tareas se propicia este hecho buscando cumplir el proceso de ejercitación de las técnicas trabajadas, en las demás tareas que corresponden a las tareas (Capítulo 2 – tarea 5-20 pág. 175) se fomenta procesos de razonamiento sobre las tecnologías.

A pesar de que en el taller se usa exclusivamente las ecuaciones, también hay que tener en cuenta que estas expresiones presentan grandes diferencias de acuerdo al uso de las operaciones, números reales, y relaciones entre los términos, que en cada caso pretende que el estudiante reconozca características de la ecuación cuadrática.

En conclusión estas Praxeologías Matemáticas no contribuyen a que los ostensivos determinen la técnica que se debe utilizar y por lo tanto que se presente un alto grado de cumplimiento de este criterio.

4. Existencia de tareas y de técnicas inversas:

Como técnica directa el texto promueve que al dar la ecuación cuadrática se utilice el método de factorización para hallar, de ser posible, las dos soluciones reales, esta técnica se pone en práctica en las primeras tareas, de acuerdo a esto se observa que en la tarea (Capítulo 2 – tarea 6 pág. 174). Se da el valor que representa el producto y la suma de las raíces, y con estos valores se debe hallar la ecuación cuadrática, en este sentido el estudiante debe retomar la técnica de la factorización para realizar el camino opuesto, en el cual deba determinar los dos factores que implican la solución de la ecuación cuadrática y con esto obtener la ecuación cuadrática.

Otra tarea en la que su técnica de resolución implica considerar un camino opuesto al que ha sido fijado como la técnica directa, es la tarea (Capítulo 2 – tarea 7 pág. 175), en ella se da la ecuación cuadrática y se explicita que si la solución es m y n, entonces se debe hallar una ecuación cuadrática que tenga como raíces m^2 y n^2, de esta manera el estudiante nuevamente debe considerar un camino opuesto considerando la factorización de la ecuación dada y su relación con las raíces para plantear la ecuación cuadrática a partir de las raíces.

Teniendo en cuenta que de cada una de estas dos tareas se desglosan como mínimo 5 tareas similares, se concluye que estas Praxeologías Matemáticas cumplen en un alto grado este criterio.

5. Interpretación del resultado de aplicar las técnicas:

Se destacan dos aspectos que benefician un uso consciente de las técnicas así como de los resultados que de ellas se obtienen, el primero consiste en el planteamiento de tareas que no enfatizan un mismo tipo de resolución, esto se observa con las tareas que propician el proceso de razonamiento, en las cuales se da una relación entre las raíces y la ecuación cuadrática, el estudiante debe plantear una ecuación que cumpla la condición referida a estas raíces, y el proceso de resolución cuadrática en las que el estudiante debe reflexionar sobre la situación para poder relacionar los datos y plantear así la ecuación cuadrática, esto a la vez contribuye a mostrar que las raíces de esta ecuación respondan a lo pedido en la tarea.

De acuerdo a esto se considera el segundo aspecto referido a que el propósito de las Praxeologías Matemáticas es el estudio de la solución de la ecuación cuadrática y en este proceso se encuentran los métodos de resolución, así que no se puede considerar solo la ejercitación de procedimientos dejando de lado o aislando estas técnicas de las tecnologías a las cuales responden.

De acuerdo a lo anterior se concluye que estas Praxeologías Matemáticas cumplen en un alto grado este criterio.

6. Existencia de tareas matemáticas abiertas:

Se evidencia que las tareas (Capítulo 2 – tarea 5 pág. 174), (Capítulo 2 – tarea 6 pág. 174) y (Capítulo 2 – tarea 7 pág. 174) que tratan el proceso de razonamiento, así como las tareas (Capítulo 2 – tarea 8-20 pág. 174) de resolución de problemas requieren un mayor trabajo con las tecnologías desarrolladas en las dos lecciones, y las de geometría para llevar una expresión algebraica de un ostensivo a otro, aunque no se trata de proponer tareas muy complejas que el estudiante no puede llegar a resolver, estas tareas ponen a prueba los conocimientos del estudiante para ejercer procesos de razonamiento que lo lleven a concluir hechos que son propios del uso de estas técnicas y por lo cual benefician la creación de nuevas técnicas y criterios para decidir sobre la solución de las ecuaciones cuadráticas de forma rápida.

De acuerdo a lo anterior se concluye que estas Praxeologías Matemáticas presentan un alto grado de cumplimiento.

7. Incidencia de los elementos tecnológicos sobre la práctica:

El proceso de resolución de estas Praxeologías Matemáticas implican el reconocimiento de las tecnologías trabajadas, ya que en muchos casos en los cuales se dan las ecuaciones cuadráticas el proceso de resolución es más dispendioso debido a que se presentan fraccionarios y radicales, sin embargo si antes no se ha verificado si el discriminante de la ecuación cuadrática es mayor o igual a cero, entonces se puede realizar un trabajo en vano al tratar de utilizar el método completar el cuadrado, esto se puede observar en la tarea (Capítulo 2 – tarea 9 pág. 174), en otros casos como en las tareas (Capítulo 2 – tarea 5 pág. 174), (Capítulo 2 – tarea 6 pág. 174) y (Capítulo 2 – tarea 7 pág. 174) sucede lo mismo con el proceso de resolución, es necesario recurrir a las tecnologías para entender qué relación hay entre la ecuación cuadrática y las raíces para plantear una ecuación cuadrática o viceversa.

En general se observa que el propósito del texto con estas Praxeologías Matemáticas es permear en un trabajo que integre las tecnologías y propicie un estudio más crítico al respecto.

De acuerdo a esto se concluye que las Praxeologías Matemáticas cumplen en un alto grado este criterio.

De acuerdo a lo observado en este segundo capítulo del texto escolar se puede concluir que:

Los criterios que se cumplen en un grado alto son: 1, 2, 3, 4, 5, 6 y 7.

Lo anterior se debe a que se da mayor importancia a los procesos de razonamiento y de resolución de problemas en las tareas que aquí se plantean.

Grado de completitud de las Praxeologías Matemáticas de la lección 3: *Fórmula cuadrática*

1. Integración de los tipos de tareas:

Para esta lección de la ecuación cuadrática se plantean 19 tareas que tratan el método fórmula cuadrática, estas tareas se refieren a lo siguiente:

Averiguar el número de soluciones de las ecuaciones cuadráticas sin resolverlas: (Capítulo 3 – tarea 1 pág. 180), (Capítulo 3 – tarea 2 pág. 180), (Capítulo 3 – tarea 3 pág. 180), (Capítulo 3 – tarea 4 pág. 180), (Capítulo 3 – tarea 5 pág. 180).

Determinar cuántas soluciones pueden tener las ecuaciones cuadráticas (expresión general) si $c=0$: (Capítulo 3 – tarea 2 pág. 180), (Capítulo 3 – tarea 3 pág. 180).

Determinar los valores del coeficiente k para que la ecuación cuadrática tenga valores reales: (Capítulo 3 – tarea 5 pág. 180).

Inventa una ecuación cuadrática completa que tenga una solución, dos soluciones, ninguna solución: (Capítulo 3 – tarea 4 pág. 180).

Determine los pasos seguidos por los babilonios para resolver la ecuación cuadrática y el método utilizado: (Capítulo 3 – tarea 6 pág. 181),

Resolver las ecuaciones dadas: (Capítulo 3 – tarea 4 pág. 181).

Resolver las situaciones que se dan en diferentes contextos: (Capítulo 3 – tarea 8-19 pág. 181).

Se observa que este grupo de tareas integra las tecnologías trabajadas durante las tres lecciones para la solución de ecuaciones cuadráticas, así como las que corresponden a esta parte de la unidad, a la vez que hay relación entre las diferentes tareas de acuerdo a las técnicas o procedimientos que en ellas se pueden utilizar.

De otro lado se destaca un mayor trabajo sobre el uso de las tecnologías como elemento de reflexión y de igual forma, las técnicas sirven como recurso para indagar sobre algunas situaciones en las que se presenta la ecuación cuadrática y para el planteamiento de la ecuación cuadrática si se conocen sus raíces.

De acuerdo a esto se concluye que estas Praxeologías Matemáticas cumplen en un alto grado este criterio.

2. Diferentes técnicas y criterios para elegir entre ellas:

Como sucede en la lección anterior aquí se busca enfatizar un trabajo reflexivo y consciente sobre el uso de las técnicas y las soluciones de la ecuación cuadrática con respecto a las situaciones en las cuales se puedan evidenciar, de igual manera se observa que cada lección se va enriqueciendo por lo propuesto en las lecciones anteriores, esto da pie a exigir más del estudiante gracias a que se integran los diferentes métodos que se han visto.

Con relación a esta integración que se da entre las técnicas y las tecnologías desarrolladas, el texto procura propiciar tareas que tratan más los procesos de razonamiento y resolución de problemas que sobre la ejercitación de técnicas, esto se muestra en el contenido haciendo una comparación entre las diferentes técnicas y su desarrollo para establecer relaciones entre ellas, y en las tareas se aplica posibilitando el uso de una u otra técnica para la solución de las ecuaciones cuadráticas.

De acuerdo a esto se evidencia un alto grado de cumplimiento de este criterio gracias a que la propuesta educativa se va dando de forma integrada y así mismo las Praxeologías Matemáticas.

3. Independencia de los ostensivos que integran las técnicas:

Como se ha visto, la independencia de las técnicas se ve altamente favorecida cuando las tareas tratan sobre procesos de razonamiento y resolución de problemas, en estos casos la técnica surge de un análisis sobre lo que plantea la tarea, la cual en muchos casos es única en comparación a las demás tareas y a los ejemplos del contenido, esto se evidencia en estas Praxeologías Matemáticas ya que como se dijo anteriormente se nota un énfasis a que las tareas sirvan para el estudio y reflexión de las tecnologías, ejemplo de esto son las tareas que van desde la 6 hasta la 19.

Con respecto al uso de los ostensivos que aquí se presentan, se enfatiza nuevamente el algebraico para mostrar cómo se resuelve la ecuación cuadrática y al mismo tiempo mostrar las propiedades utilizadas en su desarrollo, a pesar de que en la tareas se recurre bastante a este ostensivo, la aplicación de procesos diferentes a la ejercitación de procedimientos y el uso de contextos de la vida diaria y otras disciplinas no permiten que haya una dependencia entre las técnicas y los ostensivos.

De acuerdo a esto se concluye que este criterio se cumple en un alto grado.

4. Existencia de tareas y de técnicas inversas:

Para el cumplimiento de este criterio se destacan las tareas (Capítulo 3 – tarea 4 pág. 180) y (Capítulo 3 – tarea 5 pág. 180), en la primera de ellas se pide inventar una ecuación cuadrática que tenga una solución real, una que tenga dos soluciones reales y una que no tenga solución en los reales, estas tareas requieren considerar lo definido a cerca del discriminante de la ecuación cuadrática, de acuerdo a esto se puede pensar en las condiciones de cada caso y de paso pensar en los valores que puede tomar cada uno de los coeficientes de la ecuación.

En la segunda tarea se da una ecuación cuadrática para la cual los coeficientes dependen de una constante k, de acuerdo a esto se pide hallar el valor que debe tomar k para que la ecuación tenga una raíz real. En esta tarea nuevamente se debe tomar la definición del discriminante para considerar los posibles valores de k para que se cumpla la condición.

Aparte de estas tareas no se destacan otras que puedan presentar características para ser descritas como tareas inversas.

De acuerdo a lo anterior se concluye que las Praxeologías Matemáticas cumplen en un grado medio este criterio.

5. Interpretación del resultado de aplicar las técnicas:

Las Praxeologías Matemáticas que se presentan en esta parte de la unidad propician poner en práctica los conocimientos adquiridos a lo largo de las lecciones, a la vez que se ha ido disminuyendo las tareas que requieren de una única técnica para su resolución y en lugar de esto se evidencia que en estas tareas el uso de las técnicas están determinadas por las concepciones y los conocimientos adquiridos, como ejemplo se pueden observar las tareas (Capítulo 3 – tarea 1 pág. 180) y (Capítulo 3 – tarea 2 pág. 180) en estas dos tareas se pide averiguar el numero de soluciones de las ecuaciones sin resolverlas, esto permite que el estudiante se dé cuenta de que tiene los recursos conceptuales para decidir algo sobre la ecuación sin necesidad de tener que realizar algún calculo, si utiliza el método para conocer esto estaría tomando el camino más difícil y el más largo.

Este tipo de tareas hace que el estudiante piense sobre su proceder para la elección de una técnica, y verifique si es la más conveniente para resolver la tarea.

De acuerdo a esto se concluye que estas Praxeologías Matemáticas cumplen en un alto grado este criterio.

6. Existencia de tareas matemáticas abiertas:

Teniendo en cuenta que las tareas propician que sea el estudiante quien decida sobre la técnica que debe utilizar, en ellas no se muestra más que los datos necesarios para que el estudiante pueda llevar a cabo el trabajo de reflexionar sobre lo dado y considere como abordar su resolución.

De acuerdo a esto se caracteriza nuevamente el estilo de las tareas enfocadas en procesos de razonamiento y resolución de problemas, estas tareas requieren un mayor trabajo a partir de las tecnologías y desde las situaciones de la vida diaria o de otras disciplinas que contribuyen también en la determinación de algunos recursos que el estudiante puede aprovechar para modelar la situación.

De acuerdo a esto se concluye que las tareas propuestas presentan un alto grado de cumplimiento para este criterio.

7. Incidencia de los elementos tecnológicos sobre la práctica:

De acuerdo a lo dicho hasta el momento se deduce que las tareas propuestas en esta lección del texto escolar integran y permiten la incidencia de las tecnologías vistas a lo largo de la unidad, esto también se ve en la enseñanza de las tecnologías en la que los ejemplos no se limitan a mostrar el procedimiento para resolver una ecuación cuadrática a través de la fórmula cuadrática sino que involucra situaciones de otras disciplinas y de la vida diaria con el propósito de utilizar otras tecnologías y técnicas que de otra forma se verían fragmentadas.

A pesar de que no se pide que justifique el porqué de sus respuestas, en las tareas se busca que el estudiante llegue a la comprensión de algunos procesos que suceden al resolver las ecuaciones cuadráticas, pero que se pasan de largo en las explicaciones, como la relación entre las raíces y la ecuación cuadrática en las primeras tareas.

De acuerdo a esto se concluye que las Praxeologías Matemáticas cumplen en un alto grado la incidencia de los elementos tecnológicos sobre la práctica.

De acuerdo a lo observado en este segundo capítulo del texto escolar se puede concluir que:

Los criterios que se cumplen en un grado alto son: 1, 2, 3, 5, 6 y 7.
El criterio que se cumple en un grado medio es: 4.

Se observa que las Praxeologías Matemáticas presentan un alto grado de completitud de acuerdo al cumplimiento de los criterios citados.

Grado de completitud de las Praxeologías Matemáticas de la lección: *Aplicaciones de la ecuación cuadrática*.

1. Integración de los tipos de tareas:

Para el desarrollo de la penúltima lección de esta unidad se plantean 16 tareas, todas estas tareas tratan la aplicación de la función cuadrática en contextos de la vida diaria o de otras disciplinas, por lo cual se refieren al mismo tipo de tareas.

Esta lección recoge las técnicas y tecnologías trabajadas a lo largo de la unidad, por esta razón se observa que de entrada hay una integración de estas tareas en torno a la solución de las ecuaciones cuadráticas, en cada caso se deben plantear las situaciones en términos algebraicos y su resolución se puede llevar a cabo mediante cualquiera de los métodos vistos.

Un aspecto que se debe resaltar en este primer criterio es que el texto ha venido familiarizando al estudiante con la resolución de este tipo de tareas, esto permite que haya coherencia con los procesos trabajados y a la vez no se vea en desventaja uno de los procedimientos trabajados por no haberse abordado a través de estas Praxeologías Matemáticas.

De acuerdo a esto se concluye que estas Praxeologías Matemáticas presentan un alto grado de cumplimiento para este criterio.

2. Diferentes técnicas y criterios para elegir entre ellas:

Aunque la resolución de problemas en contextos diferentes al matemático presenta un nivel adicional de complejidad debido a que en muchos casos involucra conocimientos referidos al contexto, se ha establecido relación de estas tareas con las que fueron propuestas en las lecciones anteriores, como ejemplo las tareas (Capítulo 4- tarea 2 pág. 185), (Capítulo 4- tarea 5 pág. 185), (Capítulo 4- tarea 7 pág. 185), (Capítulo 4- tarea 9 pág. 185), (Capítulo 4- tarea 11 pág. 185), (Capítulo 4- tarea 12 pág. 185) y (Capítulo 4- tarea 16 pág. 185) tienen que ver con la geometría y tratan conceptos manejados en las lecciones anteriores como es el concepto de área y perímetro de figuras rectangulares o de triángulos. Por su parte la tarea (Capítulo 4- tarea 13 pág. 185), tiene que ver con la física también se había manejado en situaciones anteriores.

De acuerdo a esto se puede evidenciar que el estudiante posee los conocimientos para trabajar este tipo de tareas y a la vez para ser consciente de cómo usarlos para expresar algebraicamente lo que plantea la tarea.

De otro lado hay que reconocer que al establecer el área y perímetro se está delimitando en cierto grado el uso de las técnicas sobre todo cuando se propone más de una tarea que se refiere a los mismos conceptos.

En conclusión estas Praxeologías Matemáticas presentan un alto grado de cumplimiento de este criterio.

3. Independencia de los ostensivos que integran las técnicas:

Teniendo en cuenta que los conceptos trabajados en esta unidad se refieren a la resolución las ecuaciones cuadráticas, las tareas planteadas en contextos diferentes al matemático no ofrecen un criterio para el uso de alguna técnica en especial, de esta manera el proceso de resolución se debe a un criterio personal o de conveniencia para el manejo de una técnica en lugar de otra.

De otro lado se debe reconocer que el planteamiento de la ecuación cuadrática que modela la tarea requiere de un manejo apropiado de las técnicas y tecnologías, ya que de otra forma no se podría establecer una relación entre los datos para expresar algebraicamente esta situación.

Se concluye de acuerdo a lo anterior que estas Praxeologías Matemáticas presentan un alto grado de cumplimiento para este criterio.

4. Existencia de tareas y de técnicas inversas:

En general se observa que la resolución de las tareas implica el mismo proceso que consiste en expresar la situación en términos algebraicos y posteriormente resolver esta ecuación por medio del método que se considere, esto se establece para todas las tareas. Así que no se destacan tareas que requieran de técnicas inversas para su resolución.

De acuerdo a esto se concluye que estas Praxeologías Matemáticas presentan un grado bajo de cumplimiento de este criterio.

5. Interpretación del resultado de aplicar las técnicas:

El proceso de resolución que implica cada una de estas tareas debe pasar necesariamente por un proceso de reflexión con el fin de establecer en primera instancia la ecuación cuadrática y posteriormente la solución de esta ecuación cuadrática, esto promueve como se dijo anteriormente que se lleven a cabo procesos de razonamiento que permitan considerar que es y no necesario para expresar la situación en términos algebraicos.

En este sentido se deben considerar también que las soluciones sirvan para la tarea a la cual debe responder, por ejemplo en el caso de que la situación trate sobre las longitudes de una figura no servirían las soluciones negativas, de igual manera si se trata de una expresión que se encuentra dentro de un radical, para esto se debería considerar que las soluciones sirvan para esta expresión algebraica, de acuerdo a esto se establece que en las Praxeologías Matemáticas existen muchas consideraciones de este tipo que requieren atención y no sólo desde las tecnologías, sino de todo lo que involucra en ese momento la resolución de la tarea.

Con respecto a lo anterior se concluye que las Praxeologías Matemáticas presentan un alto grado de cumplimiento de este criterio.

6. Existencia de tareas matemáticas abiertas:

La aplicación de la ecuación cuadrática responde a un proceso de modelación de situaciones que se dan en contextos diferentes, este hecho permite en primera instancia que no se establezca la técnica que permite expresar esta situación en términos algebraicos, sin embargo, si el estudiante es capaz de realizar estas tareas implica que comprendan de la situación en términos de lo que se debe hallar y utiliza en esto sus conocimientos para plantear la ecuación.

De acuerdo a esto se considera que las tareas presentan características que las definen como tareas abiertas, en ellas se dan los datos necesarios y suficientes para que el estudiante pueda abordar la tarea, pero no se le dice de qué manera podrá hacerlo, como por ejemplo la tarea 5 en la cual se da el volumen que debe tener una caja que se va a construir y se da una relación entre los lados, esto puede ser una clara muestra de un tarea abierta, este tipo de tareas para el estudiante representa un trabajo con un alto grado de complejidad ya que el no establece relaciones de forma rápida entre estos datos y podría verla como un gran problema que requiere de conocimientos diferentes a los que ha adquirido.

De acuerdo a esto se concluye que estas tareas presentan un alto grado de cumplimiento de este criterio.

7. Incidencia de los elementos tecnológicos sobre la práctica:

Este criterio es uno de los que el texto busca fortalecer a través de la puesta en práctica de los conocimientos adquiridos y de las tecnologías propias de la ecuación cuadrática, esto se promueve como un trabajo en el que se repasan nuevamente los conocimientos adquiridos desde la función cuadrática con el fin de ponerlos en práctica en la resolución de problemas, como se ha dicho este tipo de trabajo no es ajeno al estudiante debido a que se han venido planteando a lo largo de la unidad y ahora se busca que el estudiante muestre que ha comprendido como se integra estas tecnologías a situaciones de este tipo.

Es claro que en el proceso de solución de estas tareas se ven involucradas diferentes tecnologías que no sólo pertenecen a la ecuación cuadrática, este hecho es el que permite evidenciar que el estudiante ha comprendido lo visto en estas lecciones y puede realizar con estos conocimientos procesos de modelación en situaciones que describen o representan el concepto de la ecuación cuadrática.

Se concluye que estas Praxeologías Matemáticas presentan un alto grado de cumplimiento de este criterio.

De acuerdo a esto se concluye que las Praxeologías Matemáticas cumplen en un alto grado la incidencia de los elementos tecnológicos sobre la práctica.

De acuerdo a lo observado en este segundo capítulo del texto escolar se puede concluir que:

Los criterios que se cumplen en un grado alto son: 1, 2, 3, 5, 6 y 7.
El criterio que se cumple en un grado bajo es: 4.

Se observa que las Praxeologías Matemáticas presentan un alto grado de completitud de acuerdo al cumplimiento de los criterios citados.

Grado de completitud de las Praxeologías Matemáticas de la lección: *Desigualdades, máximos y mínimos de funciones cuadráticas*

1. Integración de los tipos de tareas:

Para esta última lección se proponen 11 tareas que involucran los conceptos de desigualdades, máximos y mínimos de funciones cuadráticas, estos conceptos que son propios de esta lección se desarrollan a partir de los conocimientos que se tienen de lecciones anteriores con relación al dominio y la solución de las funciones cuadráticas, permitiendo que se establezca un concepto más amplio del significado de solución de la ecuación cuadrática a través de la retroalimentación de las tecnologías vistas, con lo cual también se muestra el interés del texto escolar por desarrollar y establecer el conocimiento por medio de actividades que involucran los procesos de razonamiento y resolución de problemas que contribuyen en mayor medida a la comprensión de las tecnologías así como de las técnicas asociadas.

Los tipos de tareas que se destacan en este taller consiste en:

Hallar el conjunto solución de las desigualdades cuadráticas: (Capítulo 5- tarea 1 pág. 190), (Capítulo 5- tarea 2 pág. 190), (Capítulo 5- tarea 8 pág. 190), (Capítulo 5- tarea 9 pág. 190), (Capítulo 5- tarea 10 pág. 190).
Hallar el dominio de las funciones (cuadráticas y logarítmicas): (Capítulo 5- tarea 1 pág. 190).
Resolver situaciones sobre máximos y mínimos: (Capítulo 5- tarea 4 pág. 191), (Capítulo 5- tarea 5 pág. 191), (Capítulo 5- tarea 6 pág. 191), (Capítulo 5- tarea 7 pág. 191), (Capítulo 5- tarea 8

pág. 191) (Capítulo 5- tarea 9 pág. 191), (Capítulo 5- tarea 10 pág. 191).
Escribir una desigualdad cuadrática en forma estándar cuyo conjunto solución sea el dado, en cada caso: (Capítulo 5- tarea 11 pág. 190).

Las tareas que se proponen en esta lección integran la solución y el concepto de máximos o mínimos de las funciones cuadráticas, este aspecto permite evidenciar que la resolución de cada tarea conlleva a una mejor comprensión de estos conceptos y a la vez posibilita la creación de técnicas alternativas para hallar en contextos reales los valores que maximizan el área de una figura.

Teniendo en cuenta este aspecto sobre la integración de los diferentes tipos de tareas por medio de las técnicas y de las tecnologías se concluye que estas Praxeologías Matemáticas presentan un alto grado de cumplimiento de este criterio.

2. Diferentes técnicas y criterios para elegir entre ellas:

Se observa que la cantidad de tareas sobre uso y ejercitación de técnicas no son mayores que la cantidad de tareas que propician la reflexión de estas técnicas así como de las tecnologías trabajadas, ya que sólo en la primera tarea se propicia este proceso se deduce que hay mayor interés en que el estudiante recurra a los conocimientos adquiridos y pueda llegar a plantear técnicas alternativas para solucionar tareas que tienen que ver con el proceso de hallar las dimensiones de una figura rectangular para que su área sea la mayor posible.

De otro lado se observa que el texto involucra las situaciones de la vida diaria como recurso para que el estudiante comprenda la idea sobre los máximos y los mínimos, esto permite integrar el trabajo que el estudiante ha realizado al resolver las tareas que tienen que ver con la resolución de problemas en otras disciplinas y los procedimientos de resolución que en estas tareas fueron utilizados.

De acuerdo a lo anterior se concluye que el texto presenta un alto grado de cumplimiento para este criterio.

3. Independencia de los ostensivos que integran las técnicas:

Teniendo en cuenta el propósito de integración de conocimientos que se viene trabajando desde las primeras lecciones, en estas tareas se facilita el uso de otras técnicas diferentes a la utilizada en la lección, a la vez que en tareas como (Capítulo 5- tarea 4 pág. 191), (Capítulo 5- tarea 5 pág. 191), (Capítulo 5- tarea 6 pág. 191), (Capítulo 5- tarea 7 pág. 191), (Capítulo 5- tarea 11 pág. 191) el trabajo de resolución se da con respecto a un supuesto que puede ser el valor de la suma de x y y o el conjunto solución de una desigualdad. Estos aspectos hacen que el uso de la técnica no sea resultado de similitudes entre la tarea y los ejemplos debido a los ostensivos o a que guardan semejanza en su planteamiento, sino que resulte de un estudio sobre lo que allí se plantea con respecto al conocimiento que se tiene del tema.

De otro lado hay que reconocer que en las tareas (Capítulo 5- tarea 8 pág. 191), (Capítulo 5- tarea 9 pág. 191), (Capítulo 5- tarea 10 pág. 191) se utilizan ostensivos iguales a los utilizados en la lección y también hay similitud en el planteamiento de estas tareas de acuerdo al ejemplo mostrado, esto crea una dependencia entre la elección de la técnica de acuerdo al ostensivo.

En conclusión prevalece la necesidad de reflexión y de estudio de la tarea para la elección de la técnica, esto permite que se cumpla en un alto grado este criterio.

4. Existencia de tareas y de técnicas inversas:

Como técnica directa el texto promueve que dada la ecuación cuadrática se utilice el método de factorización para hallar los conjuntos soluciones, esta técnica se pone en práctica en las primeras tareas. De acuerdo a esto se observa que en la tarea (Capítulo 5- tarea 11 pág. 191) se dan los conjuntos soluciones que representa una desigualdad cuadrática, y con estos valores se debe hallar esta desigualdad, en este sentido el estudiante debe retomar lo propuesto en la definición de desigualdades cuadráticas y en la técnica de factorización para realizar el camino inverso, determinar los dos factores que implican la solución de la ecuación cuadrática y posteriormente la ecuación cuadrática.

De igual manera sucede con las tareas (Capítulo 5- tarea 4 pág. 191), (Capítulo 5- tarea 5 pág. 191), (Capítulo 5- tarea 6 pág. 191), (Capítulo 5- tarea 7 pág. 191) en ellas se da el resultado de la suma de dos valores *x, y* con el cual se deben hallar estos números que haría que su producto fuera el mayor posible. Este grupo de tareas conlleva a que el estudiante de cuenta de la relación entre los dos números, y su relación con la suma y el producto.

Aparte de estas tareas no se destacan más que presenten las características de tareas inversas, de acuerdo a esto se concluye que estas Praxeologías Matemáticas cumplen en un alto grado este criterio.

5. Interpretación del resultado de aplicar las técnicas:

Al observar las tareas que tratan procesos diferentes a la ejercitación de procedimientos, que sólo se da en la primera tarea, se llega a concluir que requieren y a la vez propician el uso de las tecnologías de la lección como insumo para resolver este tipo de tareas y para utilizar la técnica apropiada en ellas, en este sentido se observa que las tecnologías contribuyen a este propósito facilitando una explicación clara del concepto apoyado en los ejemplos.

De otro lado se enfatiza procesos de razonamiento sobre el uso de algunas técnicas y a la vez a su integración como se observa en las tareas (Capítulo 5- tarea 4 pág. 191), (Capítulo 5- tarea 5 pág. 191), (Capítulo 5- tarea 6 pág. 191), (Capítulo 5- tarea 7 pág. 191), (Capítulo 5- tarea 11 pág. 191) que tratan de involucrar las técnicas utilizadas en contextos de áreas de figuras rectangulares para llegar al concepto de máximos de funciones cuadráticas, con estas tareas se busca afianzar el concepto de máximos y mínimos, y para llevarlo a cabo se debe realizar un análisis sobre la suma de los valores para encontrar que números cumplen esta condición y a la vez su producto es el mayor posible.
De acuerdo a esta propiedad de las Praxeologías Matemáticas se concluye un alto grado para este criterio.

6. Existencia de tareas matemáticas abiertas:

De acuerdo al énfasis que se da en estas Praxeologías Matemáticas al tratar de llevar al estudiante a cierto punto para que comprenda lo que se quiere del tema, determina el uso de ciertas técnicas que permitan la comprensión de los máximos y mínimos de la función cuadrática, este hecho hace que las tareas determinen los datos necesarios y las incógnitas del problemas con el fin de que se cumpla con este propósito.

De otro lado las tareas que tratan el proceso de ejercitación de procedimientos que se da en la primera de ellas, así como en las tareas que determinan el uso de la técnica de acuerdo al ostensivo como sucede con las tareas (Capítulo 5- tarea 8 pág. 191), (Capítulo 5- tarea 9 pág. 191), (Capítulo 5- tarea 10 pág. 191) llevan a que este grupo de Praxeologías Matemáticas de forma general determinen el uso de técnicas.

En conclusión se puede establecer que hay un nivel bajo de existencia de tareas matemáticas abiertas.

7. Incidencia de los elementos tecnológicos sobre la práctica:

De acuerdo a lo anterior se observa que las tareas propuestas en conjunto permiten la incidencia de los conceptos trabajados a lo largo de la lección en la práctica, esto sucede con el cuestionamiento y propuesta de tareas diferentes en cada caso, lo cual contribuye a que el desarrollo de la tarea no se quede sólo en la ejercitación de procedimientos y en el uso de una sola técnica sino que se llegue a lo que conforma el propósito de la lección que es la comprensión del concepto y su manejo por medio de las técnicas.

En conclusión se observa que las tareas permiten la incidencia de las tecnologías en la práctica y que el cumplimiento de este criterio se dé en un alto grado.

De acuerdo a lo observado en este segundo capítulo del texto escolar se puede concluir que:
Los criterios que se cumplen en un grado alto son: 1, 2, 3, 4 5, 7.

El criterio que se cumple en un grado bajo es: 6.

Se observa que las Praxeologías Matemáticas presentan un alto grado de completitud de acuerdo al cumplimiento de los criterios citados.

En la Tabla 23 se muestra un consolidado sobre el nivel de cumplimiento de los siete criterios en cada una de las seis lecciones que tratan la *función cuadrática* y *ecuación cuadrática* en el texto escolar Delta 9.

Tabla 23.Completitud de las praxeologías matemáticas locales del texto escolar Delta 9.

Criterio	L[11] 1	L 2	L 3	L 4	L 5	L 6
Integración de los tipos de tareas.	A	A	A	A	A	A
Diferentes técnicas y criterios para elegir entre ellas.	A	B	A	A	A	A
Independencia de los ostensivos que integran las técnicas.	A	B	A	A	A	A
Existencia de tareas y de técnicas inversas.	A	B	A	M	B	A
Interpretación del resultado de aplicar las técnicas.	A	M	A	A	A	A
Existencia de tareas matemáticas abiertas.	M	B	A	A	A	B
Incidencia de los elementos tecnológicos sobre la práctica.	A	M	A	A	A	A
	A	**M-B**	**A**	**A**	**A**	**A**

[11] Lección de la unidad función cuadrática.

4. CONCLUSIONES

El planteamiento de las tareas como parte de la propuesta educativa cumple un papel decisivo para la Educación Matemática, ya que debe fortalecer los saberes vistos y ampliarlos, también debe permitir al estudiante autoevaluar sus conocimientos. De acuerdo a esto las tareas no se pueden considerar como actividades aisladas, por el contrario, las tareas que tratan de una misma tecnología deben permitir su incidencia en la práctica, esto hace que se considerara no una sino un grupo de tareas de diferente tipo y niveles de profundización que en conjunto permiten alcanzar el propósito educativo.

Las diferentes conclusiones expuestas se presentaron en cuatro momentos diferentes, el primero formara parte de las generalidades que se encontraron a partir del análisis de los textos o a partir de las demás interpretaciones expuestas dentro del trabajo, en segunda instancia se presentaron las conclusiones referentes a la propuesta curricular del texto escolar ***Espiral 9***, luego se indicaron las conclusiones que hacen parte de la propuesta curricular recogida en el texto ***Delta 9*** y por último las conclusiones giraron alrededor de la completitud de las praxeologías matemáticas locales que fueron utilizadas en los dos textos. Así pues damos paso a todas las apreciaciones finales que resultaron del minucioso análisis de textos escolares propuesto.

4.1. GENERALIDADES DEL ANÁLISIS

Al comparar la estructuración del contenido correspondiente a la *función cuadrática* presente en los dos textos escolares, se observo que en el texto Delta 9 se establece un mayor tratamiento al concepto de función; con lo cual se busco explicitar los elementos que la caracterizan y definir los conjuntos de números en los que se da. Mientras que en el texto Espiral 9 la propuesta del concepto función cuadrática surge de un ejemplo que busca mostrar la forma en cómo se realiza su gráfica y las características del polinomio que define la función cuadrática.

Dentro la revisión matemática e histórica realizada, podemos evidenciar que en primera instancia los conceptos matemáticos que se utilizaron tienen una relación amplia entre sí, se pudo ver que tanto los elementos que hacen parte de la función cuadrática y los que hacen referencia a la ecuación cuadrática muestran una integración a partir de sus formas de representación, muchos de estos términos son utilizados en los libros de texto analizados y no solamente en estos sino en

la gran mayoría de los libros utilizados para la educación matemática en el grado noveno (9°).
En un segundo orden se encontró una gran diversidad de apreciaciones históricas que se ubican en diferentes épocas de la historia y son de gran ayuda para el estudio de las funciones, pero cabe resaltar que el concepto de función como tal, tuvo un mayor desarrollo histórico y que se encuentra con mayor facilidad documentación; situación que no sucedió con la función cuadrática, es más complejo y con menor cantidad encontrar documentos que hagan referencian estrictamente al proceso histórico que vivió la función cuadrática.

4.2. PROPUESTA CURRICULAR DEL TEXTO ESPIRAL 9.

Se observo que en algunos casos en el texto escolar **Espiral 9,** existe desproporción en la cantidad de tareas que trabajan un mismo tipo de procesos en un mismo capítulo, ya que los resultados que se obtienen al clasificar las tareas, muestran que el proceso de modelación se trabaja de forma exclusiva en el penúltimo capítulo de la unidad. En este sentido se observo que no hay una distribución homogénea de algunos procesos en cada uno de los talleres, lo que hace que la complejidad de las actividades planteadas se organice por niveles, en cada nuevo capítulo va aumentando la complejidad de las tareas, hecho que se evidencio al propiciar en mayor medida el razonamiento y la resolución de problemas.

Referente a lo observado y teniendo en cuenta que cada capítulo trabaja temas diferentes de la función cuadrática no es pertinente que haya esta fragmentación con los procesos, contrariamente su integración en cada taller da cuenta de una mejor formación del concepto ya que de esta manera existirá un trabajo más pertinente y oportuno por parte del sujeto que utilice el texto escolar en este caso el estudiante y tendrá una mayor posibilidad de reconocer, analizar y desarrollar los conceptos que están ligados en el desarrollo de cada unidad.

Reconociendo que la propuesta educativa del texto escolar **Espiral 9** debe permitir al estudiante ser *matemáticamente competente* con respecto al concepto que se trabaja, integralmente a los cinco procesos y el desarrollo de los pensamientos matemáticos que están asociados a la función cuadrática, en especial los pensamientos *numérico y variacional* que por sus características estrechamente relacionadas con el concepto de función permiten el estudio y desarrollo de la función cuadrática, en este sentido se quiso resaltar la importancia del *pensamiento variacional* sin despreciar la importancia de los demás, pero a causa de que este pensamiento cumple un papel integrador con los demás pensamientos y está ligado al concepto de función, se afirmo que el pensamiento variacional contribuye desde sus inicios a la formación de distintos caminos y acercamientos significativos para la comprensión y uso de los conceptos y procedimientos de las funciones y sus sistemas analíticos.

En este sentido y retomando lo dicho a partir del trabajo gradual que hace el texto escolar **Espiral 9** con el concepto de la función cuadrática es importante el trabajo que se hace con la formación del pensamiento variacional y a la vez su contribución para la formación de este concepto. Esto sucede con el planteamiento de actividades que integran conceptos propios del pensamiento variacional como lo son: *constante, la variable, la función, la dependencia e independencia de una variable* con respecto a otra y el uso de contextos que permiten su consolidación como lo son el contexto de la vida diaria y la geometría.

A la vez se pudo ver que el uso de representaciones como la representación gráfica y tabular permiten evidenciar la relación de dependencia entre las variables x e y de forma dinámica que es característico de la noción de variación y cambio.

Se observo que el texto escolar **Espiral 9** contribuyo a desarrollar el pensamiento variacional en un concepto que lo enfatiza como elemento necesario para su formación, esto sucede y a la vez se queda en un nivel inicial en el que el concepto de variación y el concepto de función cuadrática nace y cobra sentido para el estudiante, pero no se avanza al nivel de establecer el reconocimiento de los objetos entre los cuales se da esta funcionalidad, que es entre los conjuntos dominio y rango de la función, también observar a través de este medio cómo se da la variación de los elementos en el conjunto de llegada que están antes o después del punto máximo o mínimo de la parábola, estos elementos que admiten un estudio más formal de la función cuadrática permiten caracterizarla de acuerdo a la variación que se detecte en el rango o conjunto de llegada de la función respecto del dominio, lo cual en la gráfica se visualiza al dividir la parábola en dos partes iguales a través de su eje de simetría.

Por último y como aspecto que podría beneficiar el tratamiento del pensamiento variacional y que es utilizado en el manejo y aplicación de la función son los diagramas sagitales, los cuales sirvieron cómo recurso para evidenciar e introducir el estudio formal de la función cuadrática; este es otro de los elementos que no se utilizan en el texto escolar, por lo menos en esta unidad correspondiente a la función cuadrática.

En general se observo que la mayoría de tareas del texto escolar **Espiral 9** fomentan la ejercitación de procedimientos y uso de las técnicas vistas en cada capítulo, pero no propician un uso razonado de estos procedimientos por medio de las definiciones y discurso matemático que se da en el contenido, tampoco se destaca el cuestionamiento de las técnicas para decidir su alcance o para adaptarlas de acuerdo a las condiciones de la tarea.

El texto **Espiral 9** descuido la integración de los contextos vida diaria o cotidiana y otras disciplinas en la enseñanza del objeto matemático y en las tareas, con lo cual se deja de lado conocimientos y recursos que permitirían el acercamiento y comprensión de la función cuadrática al estudiante. Estos conocimientos se observaron dentro del análisis que se realizó a partir de la integración de procesos y contextos y que se hicieron notar gracias a la praxeologías matemáticas utilizadas en el análisis.

Las tareas correspondientes a los primeros capítulos de la unidad promovieron los procesos elaboración, comparación y ejercitación de procedimientos y comunicación, mientras que en los últimos capítulos se enfatizan los procesos de resolución de problemas, modelación y razonamiento, esto permite concluir que el texto valoro la adquisición del conocimiento y su enriquecimiento a partir de lo que se enseña en el texto y descuidando los conocimientos que el estudiante pueda tener de acuerdo al grado escolar en que se encuentra y a su edad, de otro lado esto implico que la exigencia de las tareas tiene coherencia con los conocimientos desarrollados al término de cada capítulo porque los ejemplos resueltos así lo evidencian.

4.3. PROPUESTA CURRICULAR DEL TEXTO DELTA 9.

En relación a la propuesta curricular del texto **Delta 9** acerca del concepto de función y en especial el concepto de función cuadrática, se pudo observar que el texto muestra similitud en cuanto a la incursión de los procesos y contextos propuestos por el MEN, dentro de las seis lecciones analizadas se observa que el libro tiene poca incursión en tareas donde se puede reconocer la modelación y en algunos casos pocas tareas relacionadas con el razonamiento, que dentro del texto los llaman "Razonamiento lógico", esto hace que en el momento de determinar una completitud de la lecciones analizadas nos permite simplemente reconocer que los procesos menos destacados no evidencian la integración correcta de los demás procesos y por ende no desarrollan la competencia matemática en los estudiantes necesaria que es lo que sugiere el MEN.

De esta manera observando las tareas propuestas en la lección 5 que trato la función cuadrática del texto escolar **Delta 9** en la unida 4, se vio reflejado que no existen tareas que propicien un proceso de modelación y que son muy pocos los que hacen referencia a un proceso de razonamiento, así pues, la lección 4 está compuesta por una gran cantidad de tareas que se aglomeran en procesos como la comunicación, la resolución de problemas y los procesos algorítmicos, estos van de la mano con contextos de la vida diaria, otras disciplinas y desde las mismas matemáticas. Es este sentido se observo que no existe una distribución homogénea de algunos procesos en el taller correspondiente a esta lección lo que hace que el nivel dificultad en estos se vaya aumentado a partir de lecciones próximas las cuales plantean actividades con mayor grado de análisis.

Por otra parte las demás lecciones correspondientes a la ecuación cuadrática hicieron poca referencia a ejercicios correspondientes al proceso de modelación; simplemente en la lección correspondiente a las aplicaciones de la ecuación cuadrática se pueden observar algunas tareas que trabajan el proceso de modelación inmerso en contextos de la vida diaria; así pues, las demás tareas se distribuyen en gran aglomeración en procesos de comunicación, procedimientos algorítmicos y la resolución de problemas; otra cantidad hacen parte del proceso denominado Razonamiento que como se mencionó anteriormente el texto lo denomina "razonamiento lógico".

Cuando se hace referencia a la integración de los diferentes procesos con los contextos que se establecen para el planteamiento de tareas se pudo observar una gran cantidad de tareas donde se asocian los contextos de la vida diaria, otras disciplinas y las matemáticas con el proceso de la resolución de problemas; es el grupo más grande de tareas que se encuentra en las seis lecciones analizadas dando a entender que la propuesta del texto escolar **Delta 9** hace énfasis en que el estudiante resuelva aplicaciones donde utilice los elementos de la función y ecuación cuadrática. Dentro de los contextos más relevantes en el texto se pudo observar las matemáticas al igual que el proceso de la resolución de problemas, este contexto apareció relacionado con procesos de comunicación, razonamiento, resolución de problemas y elaboración, comparación y ejercitación de procedimientos dando a entender que el libro muestra también un gran interés en que el estudiante aplique de manera repetitiva conceptos de solución de ecuaciones cuadráticas por diferentes procesos (factorizando, por completación de cuadrado, usando formula cuadrática) o de gráficas de funciones cuadráticas entre otros conceptos vistos dentro de cada una de las lecciones. También se puede destacar que existió muy poca asociación de procesos de modelación con un contexto diferente al de la vida diaria o al de otras disciplinas; en ningún otro caso se puede observar ejercicios de modelación viendo esto como un déficit de tareas que presenta el texto, hecho que lleva a concluir que bajo esta situación se está dejando de lado algunos conocimientos por fuera de las matemáticas que beneficien el aprendizaje del concepto.

Los pensamientos *numérico y variacional* del texto escolar **Delta 9,** giraron en torno a las 6 lecciones analizadas cada una muestra un gran interés en que el estudiante se encuentre inmerso en estos dos pensamientos al igual los procesos mencionados anteriormente deben ir de la mano con lo numérico y lo variacional ya que por sus características estrechamente relacionadas con el concepto de función permiten el estudio y el desarrollo de la función cuadrática y por ende el de ecuación cuadrática dándole más importancia a lo variacional porque es aquel que asocia o integra los demás pensamientos y conceptos como los ya mencionados contribuye a la formación de distintos caminos y acercamientos significativos para la comprensión y uso de los conceptos y procedimientos de las funciones y sus sistemas analíticos.

El texto **Delta 9** hizo un gran énfasis en mantener el pensamiento variacional vigente, especialmente en la lección que solo dedica al estudio de la función cuadrática teniendo en cuenta también que lo hace durante toda la unidad de funciones, sucesiones y series; es ahí donde ofrece la integración y definición de conceptos fundamentales tales como variable, función, función cuadrática, dominio, rango, gráficas y tabulaciones teniendo en cuenta las variables x y y y la relación de dependencia entre ellas, así como una gran cantidad de ejemplos donde asocia lo variacional con problemas aplicados a la vida diaria o la incursión de otras disciplinas.

El texto escolar **Delta 9** enfatizo en darle un gran acento al desarrollo del pensamiento matemático aunque en algunos casos parece quedarse corto en este proceso; en algunos momentos se reflejo más el desarrollo del pensamiento numérico dejando de lado lo variacional o también suponiéndolo como inmerso. Los conceptos de variación y cambio deben permanecer y fortalecer el conocimiento de los estudiantes, cuando él logre establecer la relación entre ambos puede darse cuenta del trabajo algebraico que está realizando esto se hace a partir del inicio de las unidades en donde se debe establecer muy bien las definiciones claves y básicas para que en el momento de entrar en el estudio más a fondo como por ejemplo el de la función cuadrática lo variacional no pase a un segundo plano y no sea aplicado como se debe de hacer; en este caso el texto muestra algunos vacios que parecen no ser relevantes pero que de alguna manera intervienen en el proceso de avanzar a niveles donde se pueda establecer el reconocimiento de conceptos y aplicaciones desde el campo variacional.

Por último se pudo observar algo que es común durante todas la lecciones del texto escolar **Delta 9** es lo relacionado con el conjuntos de números que se manejan dentro de las actividades propuestas; hay gran cantidad de tareas donde el texto sólo se remite a trabajar con conjuntos de números como los enteros o también mostrando tareas con números naturales; en estos casos los conceptos de función, función cuadrática y ecuación cuadrática se queda en niveles iniciales donde el estudiante no podrá reconocer la finalidad esencial de las lecciones que es establecer el manejo y conocimiento de la variación y el cambio y esto puede tener un mayor grado de grado de completitud utilizando con por ejemplo los números racionales.

Por otra parte el manejo de diagramas y realización de gráficas fue un elemento esencial que presenta el texto en cada una de las lecciones analizadas; es vital en el estudio de la función cuadrática y la manera como el libro presenta la tabulación y luego realizada la gráfica. En cuanto a los diagramas, estos fueron importantes en los pasos para solucionar ejercicios que se remiten al concepto de la ecuación cuadrática tomándolos como referencia para que el estudiante vea reflejado en él la solución de tareas, no solo de procesos algorítmicos sino también de la resolución de problemas.

4.4. COMPLETITUD DE LAS PRAXEOLOGÍAS MATEMÁTICAS LOCALES EN LOS DOS TEXTOS ANALIZADOS.

En cuanto a la Completitud de las Praxeologías Matemáticas locales, las conclusiones que se muestran a continuación fueron obtenidas de las Tablas 21 y 22 (**Completitud de las praxeologías matemáticas locales del texto escolar Espiral 9, Completitud de las praxeologías matemáticas locales del texto escolar Delta 9**) en las cuales se recogen las valoraciones de cada uno(a) de los capítulos o lecciones que conforman las unidades analizadas en ambos textos escolares con respecto a los siete indicadores de completitud de una Praxeología Matemática Local, donde B es bajo, M es medio y A es Alto. A continuación tomamos como referencia el siguiente esquema cualitativito que muestra como en los capítulos y lecciones analizadas, se pueden ver identificados el nivel alto, medio y bajo en cada uno ellos. En su orden:

- ***Alto***: la mayoría de las tareas que se presentaron en el Capítulo o lección cumplen los siete criterios de completitud y existe entre ellas una cierta conexión homogénea para el desarrollo de las actividades propuestas.
- ***Medio***: la mitad de las tareas que se presentaron en el Capítulo o lección cumple los siete criterios de completitud, por ende, existen algunas actividades que no están encadenadas como en el nivel anterior y resultan heterogéneas en el proceso de solución.
- ***Bajo***: menos de la mitad de las tareas que se presentaron en el Capítulo o lección cumplen los siete criterios de completitud, es decir muy pocas de estas actividades muestran una conexión entre ellas y solamente se tiene homogeneidad entre las técnica y la teoría.

En cuanto al desarrollo del concepto *función cuadrática (Capítulo 1 en el texto Espiral 9, lección 1[12]en el texto Delta 9)*, para el segundo libro es propuesto a partir de lo visto previamente sobre la definición de función, de acuerdo a esto se destaco una mejor preparación por parte del estudiante

[12] los capítulos determinan la división temática de las unidades en el texto Espiral 9, mientras que las lecciones corresponden a la división temática de las unidades en el al texto Delta 9.

para abordar aspectos puntuales de la función cuadrática sin que se vea desligada de su aspecto funcional, también se observo que las Praxeologías Matemáticas correspondientes a la función cuadrática contribuyen a poner en práctica su naturaleza funcional a partir de las tecnologías y de las técnicas que surgen del concepto de función, esto hace que en general se destaque un grado alto para el cumplimento de los diferentes criterios. En contraste a esto la propuesta del texto Espiral 9 plantea el estudio de la *función cuadrática* a partir de un ejemplo sobre el movimiento parabólico con el fin de relacionar la parábola con su representación algebraica, a partir de esto el estudio de la función cuadrática queda determinado por el paso de una de estas dos representaciones a la otra y por aspectos de importancia de la parábola como lo son los interceptos, el vértice, la concavidad entre otros, que finalmente se concreta en la propuesta de unas Praxeologías Matemáticas enfocadas más en la ejercitación de las técnicas de acuerdo a lo visto en los ejemplos, con respecto a esto se presenta un grado de cumplimiento de los siete criterios que se encuentra entre medio – bajo.

De acuerdo a esto se concluyo que en el texto escolar Delta 9 se destaca un alto grado de completitud en las Praxeologías Matemáticas que conforman este tema, mientras que en el texto Espiral 9 se presenta un bajo grado de completitud en estas Praxeologías matemáticas, ya que no se establece en mayor medida el nivel medio o alto de cumplimiento en los diferentes criterios.

En la lección que correspondió a la *solución de ecuaciones cuadráticas por el método de factorización (Capítulo 2 en el texto Espiral, Lección 2 en el texto Delta)* se observa que en ambos textos el contenido se enfoca en que el estudiante recuerde los casos de factorización y el teorema $ab = 0 \; si \; y \; solo \; si \; a = 0 \; o \; b = o$ para expresiones cuadráticas como los trinomios de la forma $x^2 + bx + c$ y $ax^2 + bx + c$ y así los relacione con la ecuación cuadrática para hallar sus raíces, con esto se enfatiza que el estudiante memorice las reglas de solución y características que deben tener las expresiones cuadráticas para que se puedan resolver mediante este método y también las condiciones que debe cumplir el coeficiente que lo acompaña para que la ecuación tenga raíces reales, a razón de esto las Praxeologías Matemáticas propuestas para esta lección concuerdan en el planteamiento de tareas en las que se deban utilizar estos elementos para decidir y hallar en caso tal las soluciones de ecuaciones cuadráticas y propicien la ejercitación de las técnicas a partir de la similitud entre las tareas y los ejemplos, por esta razón en ambos textos se presenta un cumplimiento de los siete criterios que está entre medio – bajo.

De acuerdo a esto se estableció en ambos textos escolares un bajo grado de completitud de las Praxeologías Matemáticas en lo relacionado con la solución de ecuaciones cuadráticas, ya que no se destaca en mayor medida un cumplimiento medio o alto de los indicadores de completitud para este tema.

En la lección que correspondió a la solución de *ecuaciones cuadráticas por el método completar el cuadrado (Capítulo 3 en el texto Espiral 9, Lección 3 en el texto Delta 9),* el libro Delta plantea la aplicación de este método y la condición del discriminante para que este método pueda ser usado, con respecto a las Praxeologías Matemáticas propuestas para el estudio de esta lección se observa mayor apertura al uso de alguna de las dos técnicas vistas al igual que un mayor énfasis a ejercer procesos de razonamiento sobre las tecnologías y las técnicas, este hecho permite que se involucren no solo los conocimientos adquiridos en esta lección sino aquellos que se obtuvieron desde la *función cuadrática*. En el texto Espiral este método se manejo de forma similar que como en el texto Delta, sin embargo la propuesta de las Praxeologías Matemáticas en algunos casos se ven ligadas a los ejemplos y no se enfatiza procesos que permitan la reflexión o el razonamiento sobre las técnicas y las tecnologías, este hecho hace que para los criterios existencia de tareas matemáticas abiertas, existencia de tareas y de técnicas inversas e independencia de los ostensivos que integran las técnicas se presenten un grado medio de cumplimiento, para los demás criterios se observa un grado alto de cumplimiento.

De acuerdo a esto se concluyo que en ambos textos se presenta un alto grado de completitud de las praxeologías matemáticas.

Para el desarrollo del último método de *solución de las ecuaciones cuadráticas* (*fórmula cuadrática*) *(Capítulo 4 en el texto espiral, Lección 4 y 5 en el texto Delta),* en ambos textos se mostro como se dio el procedimiento de obtención de esta fórmula y de allí la expresión para hallar el vértice de la parábola, de acuerdo a esto las Praxeologías Matemáticas que en ambos textos se plantean están enfocadas en permitir procesos de razonamiento y resolución de problemas que involucran no solo la fórmula cuadrática sino también las técnicas vistas hasta aquí, así como las tecnologías trabajas a lo largo de las tres lecciones, esto permite que las Praxeologías Matemáticas de ambos textos tengan un alto grado de cumplimiento de los diferentes criterios que conforman la completitud de la organización matemática, y de acuerdo a esto se pueda concluir que las Praxeologías Matemáticas propuestas en ambos textos para este tema presenten un alto grado de completitud.

Con respecto a la lección *desigualdades, máximos y mínimos de las funciones cuadráticas (Capítulo 5 en el texto Espiral 9, Lección 6 en el texto Delta 9),* en ambos textos se involucro lo visto sobre la *función cuadrática* y *ecuación cuadrática* para iniciar el estudio de las desigualdades y para estudiar el concepto de máximos y mínimos, con lo cual las praxeologías matemáticas propuestas en el texto Espiral enfatizo en el proceso de ejercitación de las técnicas de acuerdo a los ejemplos, sin embargo en el texto Delta se plantea un mayor grado de tareas que tratan procesos de razonamiento y resolución de problemas a partir de las lecciones anteriores. En conclusión el texto Espiral 9 presenta un grado de cumplimiento de los criterios que se encuentra entre medio – bajo, mientras que el texto Delta 9 presenta un nivel alto de cumplimiento en la mayoría de criterios.

En conclusión, las Praxeologías Matemáticas que se propusieron para el texto Delta presentan un alto nivel de completitud para este tema, mientras que para el texto Espiral se establece un nivel bajo de completitud debido a que no se destaca en mayor medida un cumplimiento medio o alto de los indicadores mencionados anteriormente.

5. BIBLIOGRAFÍA

Arbeláez, G., Arce, J., Guacaneme, E. & Sánchez, G. (1999). *Análisis de textos matemáticos.* Cali, Colombia: Universidad del Valle. Instituto de Educación y Pedagogía.

Bosch, M. & Gascón. J. (2006). *25 años de Transposición Didáctica*, En: Sociedad, Escuela y Matemáticas (1era Ed.). Aportaciones de la Teoría Antropológica de lo Didáctico. España: Universidad de Jaén.

Bosch, M., Fonseca, C. & Gascón, J. (2004). *Incompletitud de las organizaciones matemáticas locales en las instituciones escolares*. RDM, 24 (2,3), pp. 205-250.

Chevallard, Y. (1998). *La Transposición Didáctica.* Del saber sabio al saber enseñado (3ra Ed.). Francia: Ed. Aique.

Chevallard, Y., Bosch, M. & Gascón, J. (1997). *Estudiar Matemáticas*. El eslabón perdido entre la enseñanza y el aprendizaje. Barcelona, España: Ed. Horsori.

Chevallard, Y. (1999). *El análisis de las prácticas docentes en la teoría antropológica de lo didáctico*. (Barroso. R, Trad.). Sevilla, España: Universidad de Sevilla.

Estrada, W.; Novoa, J. & Moreno, V. (2005). *Espiral 9*. Bogotá. Colombia. Editorial Norma.

Gascón, J. (1998). *Evolución de la Didáctica de la Matemática como disciplina científica.* Recherches en Didactique des Mathemathiques. 18 (52), pp. 7-33. Recuperado el 6 de agosto de 2010 de: http://servidoropsu.tach.ula.ve/profeso/guerr_o/didmat_web/referencias/1.%20perspectiva/gascon_evoluciondidac.pdf

MEN, (1998). *Lineamientos Curriculares para el área de matemáticas.* Colombia, Santafé de Bogotá, Colombia: MEN

MEN, (2006). *Estándares Básicos de competencias en matemáticas.* Santafé de Bogotá, Colombia: MEN

Obando, F. (2008). *Análisis del tratamiento de las transformaciones geométricas en los textos escolares de grado 6º y 7º*. Trabajo de Grado sin publicar. Universidad del Valle: Cali, Colombia.

Padilla, S.; Moreno, V.; Báez, A.; Samper, C. & Toquica, M. (2007). *Delta Matemáticas 9*. Bogotá, Colombia: Editorial Norma.

Ruíz, L. (1998). *La noción de función: análisis epistemológico y didáctico.* Andalucía, España: Universidad de Jaén.

Stewart, J.; Redlin, L. & Watson, S. (2007). Precalculo (5 ed.). México: Thomson.

Universidad de Antioquia (2007). *Pensamiento Variacional y razonamiento algebraico*. Serie didáctica de las matemáticas. Medellín, Colombia: Secretaria de Educación para la cultura de Antioquia.

Vasco, C. (2002) El pensamiento variacional, la modelación y las nuevas tecnologías. *Memorias del Congreso Internacional Tecnologías Computacionales en el Currículo de Matemáticas*. (pp. 68-77) Bogotá, Colombia: MEN.

Zill, D & Dewar, J. (1992). *Álgebra y Trigonometría* (2 ed.). Colombia. McGraw-Hill Interamericana.

ANEXOS

ANEXO 1: DISCURSO MATEMÁTICO

Para analizar las Praxeologías Matemáticas del texto así como el tratamiento que en él se le da al saber matemático es necesario haber hecho una revisión de las *tecnologías* (teoremas, axiomas, definiciones) asociadas al concepto de función cuadrática, esta revisión sirvió como herramienta a la hora de analizar las Praxeologías Matemáticas del texto y del tratamiento que en él se le da al saber, por esto a continuación se muestran las *tecnologías* haciendo un paralelo con el marco definicional y de generalización que aparecen en los textos escolares, en el caso de que el espacio este vacío es porque no se presenta dicha tecnología. Estas *tecnologías* fueron obtenidas de dos textos universitarios mencionados anteriormente y establecen una relación con las tecnologías manejadas en los textos analizados

FUNCIÓN

DEFINICIÓN 1 (función)

Una función *f* de un conjunto *D* a un conjunto *E* es una correspondencia que asigna a cada elemento *x* de *D* un único elemento *y* de *E*.

FUNCIÓN CUADRÁTICA

DEFINICIÓN (función cuadrática)	TEXTO ESCOLAR Espiral 9	TEXTO ESCOLAR Delta 9
Una función f es una función cuadrática si $f(x) = ax^2 + bx + c$ en donde $a, b\ y\ c$ son números reales y $a \neq 0$.	La familia de las funciones cuadráticas está formada por expresiones de la forma $f(x) = ax^2 + bx + c$, con las siguientes características: • *x* es variable independiente y puede tomar cualquier valor real. • *a*, *b*, *c* son números reales y *a* es diferente de cero. • *y* es la variable dependiente. • Su grafica es una parábola.	Una ***función cuadrática*** de *x* es una función cuya ecuación es de la forma $f(x) = ax^2 + bx + c; con\ a\ \neq 0, c, a\ y\ b$ constantes reales. Toda ***función cuadrática*** $f(x) = ax^2 + bx + c; con\ a\ \neq 0$ se puede escribir de la ***forma estándar*** $f(x) = a(x-h)^2 + k, a \neq 0$. El vértice de la parábola tiene coordenadas (h, k), y la recta vertical de ecuación $x = h$ es el ***eje de simetría*** de la parábola.

VÉRTICE DE UNA PARÁBOLA

TEOREMA (ubicación del vértice de una parábola)	TEXTO ESCOLAR Espiral 9	TEXTO ESCOLAR Delta 9
El vértice de la parábola si $f(x) = ax^2 + bx + c$ está en el punto$\left(\frac{-b}{2a}, \frac{4ac-b^2}{2a}\right)$.	Cuando una parábola abre hacia abajo o abre hacia arriba el punto más alto o el punto más bajo se llama **vértice** de la parábola. Las coordenadas del vértice usualmente se escriben como la pareja ordenada *(h, k).* Toda función cuadrática $y = ax^2 + bx + c$ se puede llevar a la forma $f(x) = a(x-h)^2 + k$ para determinar tanto su vértice como su eje de simetría.	El vértice de la parábola tiene coordenadas (h, k), y la recta vertical de ecuación $x = h$ es el ***eje de simetría*** de la parábola. Una manera de obtener el vértice de la parábola $f(x) = x^2 + bx + c$ es: $\left(-\frac{b}{2a}, f\left(-\frac{b}{2a}\right)\right)$

TEOREMA (valor máximo o mínimo de una función cuadrática)

El valor máximo o mínimo de una función cuadrática *f(x)* ocurre en $x = \frac{-b}{2a}$.
Si $a>0$, entonces el valor mínimo es $f\left(\frac{-b}{2a}\right)$.
Si $a<0$, entonces el valor máximo es $f\left(\frac{-b}{2a}\right)$.

CONCAVIDAD DE LA PARABOLA

DEFINICIÓN (concavidad)	TEXTO ESCOLAR espiral 9	TEXTO ESCOLAR Delta 9
Si$a > 0$, la parábola es cóncava hacia arriba. Si $a < 0$, la parábola es cóncava hacia abajo.	La gráfica de la función $f(x) = ax^2 + bx + c$ donde a, b, c son números y $a \neq 0$, es una parábola que abre hacia arriba si $a > 0$ y abre hacia abajo si $a<0$.	La grafica de la ***función cuadrática*** $f(x) = ax^2 + bx + c \; con \; a \neq 0$, es una parábola que abre hacia arriba si $a > 0$, o, abre hacia abajo si $a < 0$.

RAÍCES DE LA FUNCIÓN CUDRÁTICA

DEFINICIÓN (raíces)	TEXTO ESCOLAR Espiral 9	TEXTO ESCOLAR Delta 9
(iv) Si $b^2-4ac>0$, la ecuación cuadrática tiene dos raíces reales diferentes. (v) Si $b^2-4ac=0$, la ecuación cuadrática tiene raíces reales iguales. (vi) Si $b^2-4ac<0$, la ecuación cuadrática no tiene raíces reales.	En cualquier función cuadrática de la forma $f(x)=x^2-k, k\geq 0$ para hallar el punto de intersección con el eje x, hacemos $f(0)=o^2-k=-k$, y el punto es *(0,-k)* y para hallar la intersección con el eje *x* hacemos $0=x^2-k$ de donde $0=\left(x-\sqrt{k}\right)\left(x+\sqrt{k}\right)$ y $x=-\sqrt{k}$ y $x=\sqrt{k}$ con lo cual tenemos los puntos $\left(\sqrt{k},\ 0\right)$ y $\left(-\sqrt{k},0\right)$	Si $b^2-4ac>0$, la parábola de ecuación $f(x)=ax^2+bx+c; con\ a\neq 0$ interseca en el eje *X*, en los puntos de ordenada 0 (es decir cuándo *y = 0*) y abscisas. $$x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$$

SIMETRÍA

DEFINICIÓN (simetría)	TEXTO ESCOLAR Espiral 9	TEXTO ESCOLAR Delta 9
Para graficar *y = - f(x),* refleje la gráfica de *y = f(x)* en el eje *x*. Para graficar *y = f (-x),* refleje la gráfica de *y = f(x)* en el eje *y*.	La recta vertical que pasa por el número real *h*, sobre el eje *x* recibe el nombre de **eje de simetría** de la parábola. Toda función cuadrática $y = ax^2 + bx + c$ se puede llevar a la forma $f(x)=a(x-h)^2+k$ para determinar tanto su vértice como su eje de simetría.	La recta vertical de ecuación $x=h$ es el ***eje de simetría*** de la parábola. Toda ***función cuadrática*** $f(x)=ax^2+bx+c; con\ a\neq 0$ se puede escribir de la ***forma estándar*** $f(x)=a(x-h)^2+k, a\neq 0$.

GRÁFICA DE UNA FUNCIÓN CUADRÁTICA

DEFINICIÓN:

La grafica de una función cuadrática de la forma si $f(x)=ax^2+bx+c$ con $a\neq 0$ es una parábola.

ECUACIÓN CUADRATICA

DEFINICION (ecuación cuadrática)	TEXTO ESCOLAR Espiral 9	TEXTO ESCOLAR Delta 9
Una ecuación cuadrática es una ecuación de la forma $ax^2+bx+c=o$ en donde $a, b\ y\ c$ son números reales y $a\neq 0$.	Una ecuación de la forma $ax^2+bx+c=d$ Se denomina **ecuación cuadrática** en la variable *x*.	Una **ecuación cuadrática** en la variable x es cualquier ecuación que se pueda escribir en la forma $ax^2+bx+c=0$, donde *a*, *b* y *c* son números reales constantes, y $a\neq 0$.

RAICES DE LA ECUACIÓN CUADRÁTICA

TEOREMA 6 (raíces de la ecuación cuadrática)	TEXTO ESCOLAR Espiral 9	TEXTO ESCOLAR Delta 9
(i) Si $b^2 - 4ac > 0$, la ecuación cuadrática tiene dos raíces reales diferentes. (ii) Si $b^2 - 4ac = 0$, la ecuación cuadrática tiene raíces reales iguales. (iii) Si $b^2 - 4ac < 0$, la ecuación cuadrática no tiene raíces reales.	Discriminante de un polinomio cuadrático Una forma para determinar la naturaleza de las raíces de una ecuación cuadrática es observar su discriminante. En general, hay tres posibles casos para las raíces de una ecuación cuadrática, es decir, las intersecciones de una parábola con el eje x. **Primer caso:** la parábola interseca al eje x en dos puntos distintos. **Segundo caso:** la parábola interseca al eje x en un solo punto. **Tercer caso:** la parábola no interseca al eje x.	La siguiente formula $\Delta = b^2 - 4ac$ se denomina el ***discriminante*** de la ecuación cuadrática. Se pueden presentar tres caos de posibles soluciones de la ecuación cuadrática dependiendo el ***discriminante.*** Sí $\Delta = b^2 - 4ac = 0$, entonces: Caso 1. $\Delta > 0$; tendrá dos soluciones reales distintas. $x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2-4ac}}{2a}$. Caso 2. $\Delta < 0$; No tendrá ninguna solución. Caso 3. $\Delta = 0$; Tendrá una única solución real. $x = \frac{-b}{2a}$.

SOLUCIÓN DE ECUACIONES CUADRÁTICAS

MÉTODO 1. Solución por factorización	TEXTO ESCOLAR Espiral 9	TEXTO ESCOLAR Delta 9
Si, $ax^2 + bx + c = (x + r_1)(x + r_2)$, entonces, la ecuación $ax^2 + bx + c = 0$ es equivalente a: $(x + r_1)(x + r_2) = 0$ (1). La ecuación (1) puede resolverse usando la propiedad del sistema de los números reales: $x * y = 0 \leftrightarrow x = 0 \; o \; y = 0$	Recordemos que si *f X g=0*, entonces *f* o *g*, o ambas, es cero. en consecuencia, si logramos factorizar la expresión $ax^2 + bx + c = f(x)g(x)$en donde *f(x)* y *g(x)* son polinomios lineales, entonces podemos resolver la ecuación $ax^2 + bx + c$ solucionando los casos *f(x)=0 o g(x)=0*	**Paso 1**: Escribimos la ecuación dada en la forma $ax^2 + bx + c = 0$. Esto consiste en efectuar todas las operaciones elementales a cada lado de la igualdad y posteriormente igualar todos los términos resultantes a cero. **Paso 2**. Factorizamos (sí es posible), es decir, escribimos la ecuación obtenida en el paso 1 como el producto de dos factores lineales igualados a cero. **Paso 3**. Hacemos uso de la propiedad del ***factor cero***. **Paso 4**. Igualamos cada uno de los factores lineales a cero, para determinar los posibles valores de la variable.

MÉTODO 2. Solución por completación de Cuadrados	TEXTO ESCOLAR Espiral 9	TEXTO ESCOLAR Delta 9
Se supone que la ecuación: $ax^2 + bx + c = 0$, con $a \neq 0$, es equivalente a la ecuación cuadrática: $x^2 + px = q(1)$. Sumando $\left(\frac{p}{2}\right)^2$ en ambos miembros de la ecuación (1), se obtiene: $x^2 + px + \left(\frac{p}{2}\right)^2 = q + \left(\frac{p}{2}\right)^2$ ó $$\left(x + \frac{p}{2}\right)^2 = \frac{4q + p^2}{4}$$ Extrayendo raíz cuadrada en ambos miembros de la última igualdad (lo cual tiene sentido solo si $4q + p^2 \geq 0$, se obtiene: $x + \frac{p}{2} = \pm\sqrt{\frac{4q+p^2}{4}}$, de donde $x = -\frac{p}{2} = \pm\sqrt{\frac{4q+p^2}{4}}(2)$. La fórmula (2) proporciona las dos soluciones (una para cada signo) de la ecuación cuadrática (1), que es equivalente a la ecuación: $ax^2 + bx + c = 0$	Consiste en transformar la expresión $ax^2 + bx + c$ en una de la forma $a(x - h)^2 + k$, es decir, en casi un cuadrado perfecto, excepto que, claro, aparece un término k que es una constante.	El método denominado ***completar el cuadrado*** consiste en la transformación de una ecuación cuadrática en forma estándar, a otra ecuación cuadrática que involucra un trinomio cuadrado perfecto completa con el termino ax^2 y el término bx, de manera que la última ecuación construida se resuelve fácilmente mediante el método de la raíz cuadrada. La ecuación $ax^2 + bx + c = 0$ se puede resolver por el ***método de completar el cuadrado*** siempre y cuando $b^2 - 4c \geq 0$.

METODO 3 Solución por la Formula General	TEXTO ESCOLAR Espiral 9	TEXTO ESCOLAR Delta 9
La ecuación: $ax^2 + bx + c = 0$, con $a \neq 0$,es equivalente a la ecuación : $$x^2 + \frac{b}{a}x = -\frac{c}{a}$$ Sumando $\left(\frac{b}{a}\right)^2$,en ambos miembros de la igualdad anterior, se obtiene: $$x^2 + \frac{b}{a}x + \left(\frac{b}{a}\right)^2 = -\frac{c}{a} + \left(\frac{b}{a}\right)^2$$ O equivalentemente, $$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{b^2 - 4ac}{4a^2}$$ Extrayendo la raíz cuadrada en ambos miembros de la última igualdad(si b^2-4ac $\geq$ 0), se obtiene: $$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \pm\sqrt{\frac{b^2 - 4ac}{4a^2}}$$ De donde : $x = -\frac{b}{2a} \pm \sqrt{\frac{b^2-4ac}{4a^2}} = \frac{-b \pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$	La fórmula cuadrática nos da las raíces o soluciones de la ecuación cuadrática $ax^2 + bx + c = 0$ en términos de los coeficientes *a, b, c*. La ecuación $ax^2 + bx + c = 0$ tiene soluciones que corresponden a números reales	La ecuación cuadrática se puede resolver aplicando ***la formula cuadrática*** la cual es: $x = \frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$, donde a, b y c son los coeficientes de la ecuación cuadrática $ax^2 + bx + c = 0$. En esta formula $\Delta = b^2 - 4ac$ se denomina ***el discrimínate*** de la ecuación cuadrática.

(2) La fórmula (2) se conoce como la fórmula general para resolver la ecuación cuadrática: $ax^2 + bx + c = 0$; con $a \neq 0$.		

DESPLAZAMIENTO HORIZONTAL Y VERTICAL DE UNA GRÁFICA

DEFINICION (desplazamiento horizontal y vertical)	TEXTO ESCOLAR Espiral 9	TEXTO ESCOLAR Delta 9
Suponga que $c>0$. Para graficar $y = f(x) + c$, desplace c unidades hacia arriba la gráfica de $y = f(x)$. Para graficar $y = f(x) – c$, desplace c unidades hacia abajo la gráfica de $y = f(x)$. Para graficar $y = f(x – c)$, desplace la gráfica de $y = f(x)$ a la derecha c unidades. Para graficar $y = f(x + c)$, desplace la gráfica de $y = f(x)$ a la izquierda c unidades.	Para trasladar una gráfica h unidades a la derecha de la gráfica original se reemplaza a x por x-h. Esta traslación se denomina **traslación horizontal**. Para trasladar una gráfica k unidades arriba de la gráfica original. Se reemplaza a y por y-k.	El Texto Delta 9, no presenta definición alguna formal acerca del ***desplazamiento horizontal y vertical*** de una gráfica; en algunas ocasiones lo relaciona de manera implícita pero sin utilizar un teorema, propiedad o postulado alguno.

DESIGUALDADES CUADRÁTICAS

DEFINICIÓN 22 (desigualdad cuadrática)	TEXTO ESCOLAR Espiral 9	TEXTO ESCOLAR Delta 9
Una desigualdad en la variable x se llama cuadrática cuando la podemos escribir en la forma: $ax^2 + bx + c >0$ Para resolver esta desigualdad, es decir encontrar las *x´s* que satisfacen esta desigualdad, escribimos el lado izquierdo como el producto de dos expresiones lineales, esto es, factorizamos y examinamos el signo de los factores en los intervalos definidos por las raíces de los factores.	Siempre que trazamos la gráfica de $f(x)$en el plano cartesiano, lo estamos dividiendo en tres partes: los puntos que están sobre la curva, estos son los puntos *(x, y)* que satisfacen $f(x) = y$, y los otros son los puntos que quedan a uno u otro lado de la curva, es decir, los puntos (x, y) tales que $y < f(x)$ *o* $y > f(x)$. En una parábola podemos pensar en esas tres partes como la parte interior de la parábola, la parte exterior de ella y, claro, la parábola misma.los puntos de la parábola satisfacen la igualdad: $y = ax^2 + bx + c$ Y, por tanto, tenemos que decidir cuales puntos *(x, y)* satisfacen $y > ax^2 + bx + c$ y cuales a $y < ax^2 + bx + c$	Una ***desigualdad cuadrática*** en la variable x es una expresión cuadrática que en vez de estar determinada por una igualdad, involucra una relación de orden. Una ***desigualdad cuadrática estándar*** tiene una de las siguientes formas: $ax^2 + bx + \leq 0$, $ax^2 + bx + c > 0$, $ax^2 + bx + c \geq 0$; *o*, $ax^2 + bx + c > 0$. Donde *a*, *b* y *c*, son constantes y $a \neq 0$.

INTERCEPTOS CON LOS EJES

DEFINICIÓN:

El intercepto en *y* para $f(x) = x^2$es el valor $f(0) = c$. Si la grafica tiene interceptos en *x* se debe hallar cualquier raíz real de $f(x)$. Esto es $f(x) = 0$ ó $ax^2 + bx + c = 0$.

TEOREMA DEL FACTOR

TEOREMA 9 (teorema del factor)	**TEXTO ESCOLAR Espiral 9**	**TEXTO ESCOLAR Delta 9**
Un número c es una raíz de un polinomio $f(x)$ si y solo sí $x - c$ es un factor de $f(x)$.	Si $f(x) = q(x)(x - a) + r$ y si *a* es raíz de *f*, entonces $0 = f(a) = q(a)(a - a) + r = r$ de donde concluimos que *(x-a)* es un factor de *f(x).*	Si ***A*** y ***B*** son dos expresiones algebraicas tales que *AB = 0*, entonces *A = 0* o *B = 0*, o ambas expresiones son iguales a cero.

ANEXO 2: PRAXEOLOGÍAS MATEMÁTICAS LOCALES DEL TEXTO ESCOLAR ESPIRAL 9

Praxeologías Matemáticas del capítulo 1 (*Introducción a la función cuadrática*)

TAREAS	TÉCNICAS	TECNOLOGÍAS
Relacionar cada función cuadrática con la parábola que le corresponde. (1- tarea 1 Pág. 113)	Identificar tres puntos representativos en la parábola como los intersectos con el eje *x* y el vértice. Se evalúa en cuál de las funciones cuadráticas se obtiene estos puntos, reemplazando el valor de *x* y realizando las operaciones indicadas para obtener el valor de *y*.	D: función cuadrática, ecuación cuadrática, concavidad. T: vértice de la parábola..
Determinar si a la función dada le corresponde la gráfica. (1- tarea 2 Pág. 113)	Identificar tres puntos representativos en la parábola como los intersectos con el eje *x* y el vértice. Reemplazar el valor de *x* de cada uno de los puntos en la función y realizar las operaciones indicadas para establecer a cual función corresponde la parábola.	D: función cuadrática, ecuación cuadrática, Concavidad. T: vértice de la parábola.
Trazar la gráfica de cada función cuadrática y determinar los puntos de intersección con los ejes coordenados. (1- tarea 3 Pág.114)	Hallar la tabla de valores de la función cuadrática y realizar la gráfica correspondiente. Factorizar la ecuación y luego despejar *x*.	D: Función cuadrática, dominio, rango, Interceptos con los ejes.
Graficar la función cuadrática y obtener información de ella. (1- tarea 4 Pág.114)	Hallar puntos de la función cuadrática, estos puntos se organizan en una tabla, se ubican en el plano cartesiano y se traza la gráfica.	D: Función cuadrática, dominio, rango, Interceptos con los ejes. T: simetría.
Obtener las imágenes de una función cuadrática dado un conjunto de elementos del dominio y la expresión algebraica. (1-tarea 5 Pág.114)	Se sustituye la variable *x* por un valor determinado, se realizan las operaciones indicadas por expresión algebraica de la función cuadrática.	D: función cuadrática, dominio, rango.
Identificar cuáles gráficas representan traslaciones. (1-tarea 7 Pág. 115)	Establecer si el par de gráficas que aparecen en cada uno de los tres casos son iguales, para esto se debe considerar aspectos de tipo visual, como la forma, que ambas gráficas tengan igual cantidad de líneas, que tengan una misma inclinación y si son parábolas observar que ambas abran hacia el mismo lado. Establecer por medio de los ejes coordenados en qué posición se encuentran	D: ecuación cuadrática, grafica de la función cuadrática. T: desplazamiento (vertical y horizontalmente)
Determinar en cada caso el tipo de traslación que ha sufrido la función cuadrática dada (representación algebraica) (1-tarea 8 Pág. 115)	Establecer en la segunda función a cuál de las dos variables (*x* o *y)* se le suma o resta alguna cantidad. Si la suma o resta se realiza a la variable *x*, entonces la traslación es horizontal. Si la suma o resta se realiza a la variable *y*, entonces la traslación es vertical.	D: ecuación cuadrática, grafica de la función cuadrática. T: desplazamiento (vertical y horizontalmente)

TAREAS	TÉCNICAS	TECNOLOGÍAS
Encontrar la imagen de la parábola dada que ha sufrido una traslación T (2,3) y determinar su vértice. (1-tarea 9 Pág. 115)	Utilizo la ecuación para hallar la imagen de una parábola cuando además se conoce el punto que determina la traslación. Como la función cuadrática dada solo tiene un término, entonces el vértice es el punto que determina la traslación. Se hallan puntos de la función cuadrática, estos puntos se organizan en una tabla, se ubican en el plano cartesiano y se traza la gráfica.	D: ecuación cuadrática, grafica de la función cuadrática. T: desplazamiento (vertical y horizontalmente), vértice de la parábola.
Hallar el vértice de la parábola que representa la ecuación cuadrática dada y hallar su eje de simetría. Para la ecuación $y = (x + 2)^2 + 3$ (1-tarea 10 Pág.115)	Ya que la fórmula dada tiene la forma $y - k = a(x - h)^2$, entonces el vértice de la parábola es el punto conformado por las componentes numéricas *(h ,k)* El eje de simetría es x=h.	D: concavidad, ecuación cuadrática, función cuadrática. T: vértice, simetría.
Hallar: vértice, hacia donde abre la parábola y eje de simetría. (1-tarea 11 Pág.115)	Utiliza la ecuación del vértice, Identificar *a, h* y *k* en la ecuación. Vértice: *h, k* Si a<*0* la parábola abre hacia abajo, si a>*0* la parábola abre hacia arriba. Eje de simetría: $x = h$	D: concavidad, ecuación cuadrática, función cuadrática. T: Vértice de la parábola, simetría, máximo y mínimo de la parábola.

Praxeologías Matemática del capítulo 2 (*Solución de ecuaciones cuadráticas*)

TAREAS	TÉCNICAS	TECNOLOGÍAS
Identificar los coeficientes de cada ecuación cuadrática dada. (2-tarea 1 Pág. 120)	Identificar en las ecuaciones cuadráticas dadas los coeficientes *a, b* y *c*.	D: ecuación cuadrática
Encontrar las raíces de las siguientes ecuaciones cuadráticas. (2-tarea 2 Pág.120)	Si las ecuaciones no están factorizadas se procede a expresar el polinomio a la forma: $ax^2 + bx + c = a(x + r_1)(x + r_2)$ Despeje de la variable *x* en ambos factores.	D: ecuación cuadrática, función cuadrática. T: vértice de una parábola, raíces de la ecuación cuadrática, simetría. Propiedades de los números reales.
Factorizar el polinomio si se conoce una de las raíces. (2-tarea 3 Pág.120)	Se halla el vértice con la ecuación del vértice y los coeficientes *a, b* y *c* de la ecuación dada. Se halla la longitud de la componente *h* del vértice a la raíz dada. Luego se suma esta longitud a *h* para obtener la segunda raíz. Utilizando ambas raíces se expresa el polinomio como el producto de factores. $(x + r_1)(x + r_2)$	D: ecuación cuadrática. T: vértice de una parábola, raíces de la ecuación cuadrática, simetría. Propiedades de los números reales.

TAREAS	TÉCNICAS	TECNOLOGÍAS
Realiza el bosquejo de la gráfica de las siguientes parábolas. (2-tarea 4 Pág.120)	Para las ecuaciones factorizadas, ubico los ceros sobre el eje *x*, hallo el vértice mediante la ecuación del vértice, lo ubico en el plano y trazo la gráfica. Para las demás ecuaciones utilizo la fórmula cuadrática para hallar los ceros. Ubico los ceros sobre el eje *x*, hallo el vértice mediante la ecuación del vértice, lo ubico en el plano y trazo la gráfica.	D: función, función cuadrática, dominio, rango, grafica de la función cuadrática. T: raíces de la ecuación cuadrática, simetría.
Escribir a cada gráfica el polinomio correspondiente. (2-tarea 5 Pág.120)	Identificar dos o tres puntos en la parábola. Se evalúa en cuál de las funciones cuadráticas se obtiene estos puntos, reemplazando el valor de *x* y realizando las operaciones indicadas para obtener el valor de *y*.	D: función cuadrática, dominio, rango, gráfica de la función cuadrática.
Hallar los polinomios cuadráticos que pasan por los puntos dados y hallar las gráficas. (2-tarea 6 Pág. 120)	Solución similar al ejemplo 20. Con estos tres puntos y utilizando la ecuación $ax^2 + bx + c = 0$ se plantea una expresión en la cual la incógnita *x* y la respuesta sean reemplazadas por los valores numéricos dados. Con las tres ecuaciones obtenidas se plantea un sistema de ecuaciones lineales que se puede resolver por método de sustitución o igualación. Los valores obtenidos son los coeficientes que se ubican en la expresión general de la ecuación cuadrática. Hallar puntos de la función cuadrática, estos puntos se organizan en una tabla, se ubican en el plano cartesiano y se traza la gráfica.	D: función, función cuadrática, dominio, rango, gráfica de la función cuadrática. T: teorema del factor, raíces de la ecuación cuadrática. Propiedades de los números reales.
Halla las soluciones para la ecuación $ax^2 + bx + c = 0$ si $a=0$ (2-tarea 7 Pág. 120)	Decidir el grado de la ecuación resultante. Despejar la incógnita *x* mediante la propiedad uniforme y asociativa de los números reales, el valor obtenido para *x* es la solución única.	D: ecuación cuadrática. Propiedades de los números reales.

Praxeologías Matemática del capítulo 3 (*Método de completar el cuadrado*)

TAREAS	TÉCNICAS	TECNOLOGÍAS
Completar el cuadrado en las expresiones cuadráticas dadas. (3-tarea 1 Pág.124)	Solución similar al ejemplo 10. Se halla el factor común en los términos que tienen la variable *x*. se completa el cuadrado con el término independiente. Se aplica la propiedad distributiva para extraer el término que sobra y se factoriza el trinomio cuadrado perfecto.	D: ecuación cuadrática. T: vértice de una parábola, raíces de la ecuación cuadrática. Propiedades de los números reales.
Solucionar las ecuaciones cuadráticas completando el cuadrado. (3-tarea 2 Pág.124)	Se halla el factor común en los términos que tienen la variable *x*. se completa el cuadrado con el término $\left(\frac{b}{2}\right)^2$. Se aplica la propiedad distributiva para extraer el término que sobra y se factoriza el trinomio cuadrado perfecto. Se utiliza factorización para obtener las raíces en la ecuación.	D: ecuación cuadrática. T: vértice de una parábola, raíces de la ecuación cuadrática. Propiedades de los números reales.

TAREAS	TÉCNICAS	TECNOLOGÍAS
Encontrar el vértice de las parábolas. (3-tarea 3 Pág.124)	Solución similar al ejemplo 11. Se halla el factor común en los términos que tienen la variable *x*. se completa el cuadrado con el término independiente. Se aplica la propiedad distributiva para extraer el término que sobra y se factoriza el trinomio cuadrado perfecto. el vértice de la parábola es el punto conformado por las componentes numéricas *(h, k)*	D: ecuación cuadrática. T: vértice de una parábola, raíces de la ecuación cuadrática. Propiedades de los números reales.
Determinar el tipo de soluciones (reales distintas, una sola raíz o complejas) que tienen las ecuaciones. (3-tarea 4 Pág.124)	Se halla el vértice de las ecuaciones. Se halla el factor común en los términos que tienen la variable *x*. se completa el cuadrado con el término independiente. Se aplica la propiedad distributiva para extraer el término que sobra y se factoriza el trinomio cuadrado perfecto. el vértice de la parábola es el punto conformado por las componentes numéricas *(h, k)* Si $h>0$ y $a<0$ o $h<0$ y $a>0$ la ecuación tiene dos raíces reales. Si $k=0$ la ecuación tiene una sola raíz real. Si $h>0$ y $a>0$ o $h<0$ y $a<0$ ambas raíces son complejas.	D: concavidad, ecuación cuadrática. T: vértice de una parábola, raíces de la ecuación cuadrática. Propiedades de los números reales.
Determinar la veracidad o falsedad sobre las afirmaciones hechas del polinomio. $ax^2 + bx + c = 0$ (3-tarea 5 Pág.124)	Se hace una parábola que ejemplifique cada caso. Se obtiene la parábola simétrica con respecto al eje *x* subrayando la gráfica que aparece al doblar la hoja por la línea que representa el eje *x*. Se establece la veracidad o falsedad del enunciado con respecto a lo observado en el papel sobre el corte de la parábola obtenida con el eje *x*.	D: función cuadrática, concavidad de la parábola, gráfica de la función cuadrática. T: vértice de una parábola, ecuaciones de la parábola, desplazamiento horizontal y vertical, simetría, raíces de la ecuación cuadrática.
Trazar la gráfica de las funciones dadas. (3-tarea 6 Pág.124)	Hallar puntos de la función cuadrática, estos puntos se organizan en una tabla, se ubican en el plano cartesiano y se traza la gráfica.	D: función cuadrática, concavidad de la parábola, gráfica de la función cuadrática. T: vértice de una parábola, ecuaciones de la parábola, desplazamiento horizontal y vertical, simetría, raíces de la ecuación cuadrática.
Plantear una ecuación cuadrática y encontrar sus raíces para resolver una situación. (3-tarea 7 Pág.124)	Plantear la ecuación del área y la ecuación del perímetro del lote rectangular, despejar la misma incógnita en ambas ecuaciones. Igualar las expresiones resultantes en cada caso. Simplificar la expresión resultante. Utilizar la fórmula cuadrática para hallar las raíces de la ecuación cuadrática obtenida.	D: función cuadrática, concavidad de la parábola, gráfica de la función cuadrática. T: vértice de una parábola, ecuaciones de la parábola, desplazamiento horizontal y vertical, simetría, raíces de la ecuación cuadrática. Propiedades de los números reales.

TAREAS	TÉCNICAS	TECNOLOGÍAS
Hallar valores de a, h y k de tal forma que la expresión $y-k=a(x-h)^2+k=0$ Tenga raíces reales. (3-tarea. 8 Pág. 124)	Hallar los valores para h y k. Si k es negativo a debe ser positivo o si k es negativo entonces a debe ser positivo para que la gráfica corte el eje x en dos puntos.	D: función cuadrática, concavidad de la parábola, gráfica de la función cuadrática. T: vértice de una parábola, ecuaciones de la parábola, desplazamiento horizontal y vertical, simetría, raíces de la ecuación cuadrática.
Encontrar los polinomios pedidos dados dos o tres puntos. (3-tarea 9 Pág. 124)	Con estos tres puntos y utilizando la ecuación $ax^2+bx+c=0$ se plantea una expresión en la cual la incógnita x y la respuesta sean reemplazadas por los valores numéricos dados. Con las tres ecuaciones obtenidas se plantea un sistema de ecuaciones lineales que se puede resolver por método de sustitución o igualación. Los valores obtenidos son los coeficientes que se ubican en la expresión general de la ecuación cuadrática	D: función cuadrática, concavidad de la parábola, gráfica de la función cuadrática. T: vértice de una parábola, ecuaciones de la parábola, desplazamiento horizontal y vertical, simetría, raíces de la ecuación cuadrática. Propiedades de los números reales

Praxeologías Matemática del capítulo 4 (*Fórmula cuadrática*)

TAREAS	TÉCNICAS	TECNOLOGÍAS
Calcular el discriminante de cada ecuación cuadrática. (4-tarea 1 Pág.131)	Solución similar al ejemplo 18. Se identifica a, b y c en la ecuación. Luego se reemplazan estos valores en la expresión que corresponde al discriminante y se realizan las operaciones indicadas. b^2-4ac	D: ecuación cuadrática. T: raíces de la ecuación cuadrática.
Usar la fórmula cuadrática para solucionar las ecuaciones. (4-tarea 2 Pág.131)	Solución similar al ejemplo 14. Se identifica a, b y c en la ecuación. Luego se reemplazan estos valores en la fórmula cuadrática y se realizan las operaciones indicadas.	D: ecuación cuadrática. T: raíces de la ecuación cuadrática.
Usar la fórmula cuadrática para hallar las raíces de las ecuaciones. (4-tarea 3 Pág.131)	Se identifica a, b y c en la ecuación. Luego se reemplazan estos valores en la fórmula cuadrática y se realizan las operaciones indicadas.	D: ecuación cuadrática. T: raíces de la ecuación cuadrática.
Si x_1 y x_2 son las raíces de un polinomio cuadrático, calcular $(x_1-x_2)^2$ (4-tarea 4 Pág.131)	Multiplicación de polinomios (binomios). Se obtiene un polinomio cuadrático.	Propiedades de los números reales.
Calcular el discriminante de los polinomios dados. (4-tarea 5 Pág.131)	Se desarrolla los productos que haya en el polinomio, se simplifica mediante la suma o resta de los términos semejantes. Identificar a, b y c en la ecuación cuadrática	D: ecuación cuadrática. T: raíces de la ecuación cuadrática, desplazamiento

TAREAS	TÉCNICAS	TECNOLOGÍAS
	obtenida. Se reemplazan en la expresión que corresponde al discriminante y se realizan las operaciones indicadas. $b^2 - 4ac$	vertical y horizontal de las gráficas.
Para los polinomios dados, conjeturar cual debe ser el signo del discriminante. Calcular el discriminante. (4-tarea 6 Pág.131)	Se desarrolla los productos que haya en el polinomio, se simplifica mediante la suma o resta de los términos semejantes. Identificar a, b y c en la ecuación cuadrática obtenida. Se reemplazan en la expresión que corresponde al discriminante y se realizan las operaciones indicadas. $b^2 - 4ac$	D: ecuación cuadrática. T: raíces de la ecuación cuadrática, desplazamiento vertical y horizontal de las gráficas.
Trazar la gráfica de los polinomios. Describir las similitudes entre estos polinomios. ¿Qué se puede concluir sobre los discriminantes de los polinomios si se mueve horizontalmente la gráfica? ¿Y si se mueven verticalmente? (4-tarea 7 Pág.131)	Hallar puntos de la función cuadrática, estos puntos se organizan en una tabla, se ubican en el plano cartesiano y se traza la gráfica. La suma o resta de una cantidad a la variable *x* indica que son una misma función que ha sufrido una traslación horizontal. Se observa que al mover la parábola horizontalmente el discriminante de la función se mantiene constante. Si se mueven verticalmente el discriminante varia.	D: gráfica de la función cuadrática, ecuación cuadrática. T: raíces de la ecuación cuadrática, desplazamiento vertical y horizontal.
Hallar dos números cuyo producto sea 180 y su diferencia sea -3. (4-tarea 9 Pág. 131)	Plantear dos ecuaciones con los datos dados. Despejar en ambas ecuaciones la misma incógnita utilizando la propiedad uniforme y asociativa, se igualan las expresiones resultantes. Al simplificar esta expresión se obtiene una ecuación cuadrática que se puede resolver mediante la fórmula cuadrática. Verificar cuál de las dos raíces cumple con la condición inicial.	D: Área, perímetro, ecuación cuadrática. T: raíces de la ecuación cuadrática. Propiedades de los números reales.
Un cuadrado tiene de lado *x+3* y su área es 100 centímetros cuadrados. Calcula el valor de *x*. (4-tarea 10 Pág. 131)	Plantear la ecuación que representa el área del cuadrado. Realizar la multiplicación de los factores y simplificar. Resolver la ecuación cuadrática que de aquí se obtiene mediante la fórmula cuadrática, escoger la raíz positiva.	D: Área, ecuación cuadrática. T: raíces de la ecuación cuadrática. Propiedades de los números reales.
Verificar las soluciones para las ecuaciones dadas. (4-tarea 1 Pág.135)	Se reemplaza el valor indicado en la incógnita, se realizan las operaciones indicadas y se establece si se cumple la igualdad.	D: función, función cuadrática, ecuación cuadrática. T: raíces de la ecuación cuadrática.
Hallar la ecuación del polinomio que pasa por los tres puntos dados. (4-tarea 2 Pág.136)	Solución similar al ejemplo 20. Utilizando la ecuación $ax^2 + bx + c = 0$ se plantea una expresión en la cual la incógnita *x* y la respuesta sean reemplazadas por los valores numéricos dados. Con las tres ecuaciones obtenidas se plantea un sistema de ecuaciones lineales que se puede resolver por método de sustitución o igualación. Los valores obtenidos son los coeficientes que se ubican en la expresión general de la ecuación cuadrática.	D: función, dominio, rango, gráfica de la función cuadrática. T: teorema del factor, raíces de la ecuación cuadrática. Propiedades de los números reales.

TAREAS	TÉCNICAS	TECNOLOGÍAS
Solucionar las ecuaciones dadas (con radicales) (4-tarea 3 Pág.136)	Solución similar al ejemplo 24. Primero se eliminan los radicales de la ecuación elevando ambos lados al cuadrado; posteriormente se desarrolla los productos que haya. Se identifica *a*, *b* y *c* en la ecuación cuadrática obtenida y se utiliza la fórmula cuadrática para hallar las raíces.	D: función, dominio, rango, gráfica de la función cuadrática. T: teorema del factor, raíces de la ecuación cuadrática. Propiedades de los números reales.
Hallar las dimensiones de un triángulo rectángulo de área 60 centímetros cuadrados, si la diferencia de la medida de sus catetos es 7cm. (4 - tarea 4 Pág.136)	Determinar la expresión algebraica del perímetro y del área, relacionar las variables del perímetro con el área del rectángulo, para encontrar una expresión algebraica en términos de una variable. Hallar las raíces de la ecuación cuadrática obtenida mediante la fórmula cuadrática, determinar la raíz positiva.	D: área, perímetro, ecuación cuadrática. T: raíces de la ecuación cuadrática. Propiedades de los números reales.
Hallar las dimensiones de un triángulo rectángulo cuya medida de sus catetos suma 31 cm y la hipotenusa mide 25 cm. (4-tarea 5 Pág.136)	Plantear una ecuación para la hipotenusa y la suma de los lados del triángulo, relacionar las variables de la hipotenusa y de la suma de los lados para encontrar una expresión algebraica en términos de una sola variable. Hallar las raíces de la ecuación cuadrática obtenida mediante la fórmula cuadrática, identificar la raíz positiva.	D: ecuación cuadrática, área de un rectángulo. T: raíces de la ecuación cuadrática, teorema de Pitágoras. Propiedades de los números reales.
Encontrar el área máxima de un rectángulo cuyo perímetro es fijo. (4-tarea 6 Pág.136)	Determinar la expresión algebraica del perímetro, relacionar las variables del perímetro con el área del rectángulo, para encontrar una expresión algebraica en términos de una variable. Hallar el vértice de la función cuadrática del área (con la fórmula del vértice o la gráfica)	D: área, perímetro, ecuación cuadrática, concavidad de la parábola. T: vértice de una parábola, raíces de la ecuación cuadrática. Propiedades de los números reales.
Sustituir valores en la función cuadrática para hallar la altura. Interpretar las soluciones en relación a la situación. (4-tarea 7 Pág.136)	Sustitución de valores numéricos en la función cuadrática que representa la altura. Despeje de la variable indicada. Hallar las raíces de la función utilizando uno de los métodos vistos (factorización, radicación, completación de cuadrados, fórmula cuadrática).	D: función cuadrática, ecuación cuadrática. T: valor máximo y mínimo de una función cuadrática, raíces de la ecuación cuadrática. Propiedades de los números reales.
Sustituir valores en la función cuadrática para hallar la altura. Interpretar las soluciones en relación a la situación. (4-tarea 8 Pág.136)	Sustitución de valores numéricos en la función cuadrática que representa la altura. Despeje de la variable indicada. Hallar las raíces de la función utilizando uno de los métodos vistos.	D: función cuadrática, ecuación cuadrática. T: valor máximo y mínimo de una función cuadrática, raíces de la ecuación cuadrática. Propiedades de los números reales.

TAREAS	TÉCNICAS	TECNOLOGÍAS
Para que valores de c el discriminante de $x^2 + c = 0$ es menor que cero, mayor que cero e igual a cero. (4-tarea 9 Pág.136)	Identificar los coeficientes a, b y c en el polinomio. Sustituir a, b y c en la expresión $b^2 - 4ac$ del discriminante. Establecer para que valores se cumplen estas condiciones en c.	D: ecuación cuadrática. T: raíces de la ecuación cuadrática. Propiedades de los números reales.
¿Para qué valores de c el polinomio $x^2 + 2x + c = 0$ tiene solución única? (4-tarea 10 Pág.136)	El discriminante de la ecuación cuadrática debe ser igual a cero, para esto se identifican los coeficientes a, b y c y se reemplazan en $b^2 - 4ac = 0$. Se despeja c y el valor obtenido es el buscado.	D: ecuación cuadrática. T: raíces de la ecuación cuadrática. Propiedades de los números reales.
Plantear y graficar la función cuadrática dados dos puntos o tres puntos. (4-tarea 11 Pág.137)	Encontrar el tercer punto simétrico a la primera raíz, con los tres puntos plantear un sistema de ecuaciones lineales que se resuelve por el método de sustitución o igualación.	D: función cuadrática, grafica de la función cuadrática. T: vértice de una parábola, simetría. Propiedades de los números reales.
Plantear una ecuación racional y encontrar sus raíces para resolver una situación. (4-tarea 12 Pág.137)	Solución similar al ejemplo 22. Se plantea una ecuación en la cual la incógnita x hace referencia a los días. Las fracciones que representan a 1 sobre los días que tardan cada niña en cosechar solas el campo de flores, multiplicadas por la incógnita x, representan la parte del campo que cosecharan trabajando juntas cada una en los x días. La suma de estas dos expresiones es igual a 1 que representa el campo cosechado. La resolución de esta ecuación se lleva a cabo homogenizando las dos fracciones y sumando los numeradores, posteriormente se despeja la expresión resultante que es una ecuación cuadrática y se resuelve mediante uno de los métodos vistos.	D: ecuación cuadrática. T: raíces de la ecuación cuadrática. Propiedades de los números reales.
Plantear las ecuaciones que representen el área y el perímetro de un rectángulo. Establecer apropiadamente una función que relacione los términos dados. (4-tarea 13 Pág.137)	Se realiza un dibujo, se relacionan las magnitudes de los lados de la figura con una expresión algebraica, se halla el área y el perímetro. Se obtiene una ecuación, cuya solución se da despejando la incógnita.	D: área, perímetro, función cuadrática, ecuación cuadrática. T: raíces de la ecuación cuadrática. Propiedades de los números reales.
Hallar el vértice de la función cuadrática. Encontrar las raíces de la función cuadrática. (4-tarea 14 Pág.137)	Sustitución de valores numéricos en la función cuadrática que representa la altura. Despeje de la variable indicada. Hallar las raíces de la función utilizando uno de los métodos vistos.	D: función cuadrática, ecuación cuadrática. T: valor máximo y mínimo de una función cuadrática, raíces de la ecuación cuadrática. Propiedades de los números reales.

Praxeologías Matemática del capítulo 5 (*desigualdades y máximos y mínimos de funciones cuadráticas*)

TAREAS	TECNICAS	TECNOLOGIAS
Identificar las regiones del plano que representa cada expresión (desigualdades). (5-tarea 1 Pág.141)	Si es una desigualdad, establecer cuáles son las regiones determinadas y en cuál de estas dos regiones se encuentran los puntos *x*, si es una igualdad determinar la línea que representa el valor de *x*.	D: desigualdad cuadrática, función cuadrática.
Identifica los puntos (*x*, *y*) del plano que satisfacen cada una de las desigualdades. (5-tarea 2 Pág.141)	Se realiza la gráfica de la función con respecto a la variable *x*, establecer cuales regiones se obtienen y en cuál de estas regiones se encuentran los puntos *y* de acuerdo a la desigualdad. Los puntos *x* son todos los números reales y los puntos *y* son los que están en la región determinada por la desigualdad.	D: función, función cuadrática, dominio, rango, gráfica de la función cuadrática, desigualdad cuadrática.
Identificar las regiones en el plano que satisfacen las desigualdades indicadas. (5-tarea 3 Pág.141)	Se realiza la gráfica de la función con respecto a la variable *x*, establecer cuales regiones se obtienen y en cuál de estas regiones se encuentran los puntos *y* de acuerdo a la desigualdad.	D: función, función cuadrática, dominio, rango, parábola, gráfica de la función cuadrática, desigualdad cuadrática.
Dibujar la región solución para cada una de las desigualdades. (5-tarea 4 Pág.141)	Se realiza la gráfica de las dos funciones indicadas hallando puntos de la función cuadrática, estos puntos se organizan en una tabla, se ubican en el plano cartesiano y se traza la gráfica. Indicar cuál es la región que se obtiene de la intersección de las dos funciones.	D: función, función cuadrática, dominio, rango, parábola, gráfica de la función cuadrática, desigualdad cuadrática.
La producción de un campo petrolífero en los meses de diciembre, enero, marzo y julio es como se muestra en la tabla, si se espera que el comportamiento de la producción sea cuadrático en ese año, complete la tabla. (5-tarea 5 Pág. 141)	Identificar tres puntos de la parábola y plantear un sistema de ecuaciones lineales como se realizo en 3-tarea 9 Pág. 124 Resolver por cualquiera de los métodos determinados anteriormente. Identificar dos puntos de la recta, con ellos hallar la pendiente. Utilizando la ecuación punto pendiente establecer la ecuación. Si *y* son los puntos que están en la región sombreada, identificar cual de las dos funciones es mayor y cual menor y expresarlo algebraicamente, determinar los punto que faltan en la tabla.	D: desigualdad cuadrática, función cuadrática. Propiedades de los números reales.
Con base en la figura: encontrar la ecuación de la parábola, la ecuación de la recta y las desigualdades correspondientes a la región sombreada. (5-tarea 6 Pág. 141)	Identificar tres puntos de la parábola y plantear un sistema de ecuaciones lineales como se realizo en 3-tarea 9 Pág. 124 Resolver por cualquiera de los métodos determinados anteriormente. Identificar dos puntos de la recta, con ellos hallar la pendiente. Utilizando la ecuación punto pendiente establecer la ecuación. Si *y* son los puntos que están en la región sombreada, identificar cual de las dos funciones es mayor y cual menor y expresarlo	D: desigualdad cuadrática, función cuadrática. Propiedades de los números reales.

TAREAS	TECNICAS	TECNOLOGIAS
	algebraicamente.	
Halla el máximo o el mínimo de las siguientes funciones. (5-tarea 7 Pág.141)	Identificar *a*, y si $a>0$ el vértice es el punto máximo, si $a<0$ el vértice es el punto mínimo. Se hallan *a*, *b* y *c* en la función cuadrática y con la ecuación del vértice se halla el vértice de la función cuadrática.	D: función cuadrática, concavidad. T: vértice de una parábola, valor máximo o mínimo de una función cuadrática.

ANEXO 3: PRAXEOLOGÍAS MATEMÁTICAS LOCALES DEL TEXTO ESCOLAR DELTA 9

Praxeologías Matemáticas de la lección 1 (*función cuadrática*)

TAREAS	TÉCNICAS	TECNOLOGÍAS
Describir los movimientos que se deben aplicar a la gráfica de la función $y = x^2$ para obtener las gráficas de las funciones dadas. (4- tarea 1 Pág. 119)	Realizar la gráfica de la función dada, así como la de cada una que se quiere comparar. Establecer las unidades de traslación que separan la segunda gráfica con respecto a la de referencia, así como la dirección del desplazamiento, concluir al respecto el tipo de desplazamiento y las unidades que las separan.	D: Función cuadrática, gráfica de una función cuadrática. T: desplazamiento (vertical y horizontalmente)
Determinar, entre los valores dados para *k,* cual(es) permiten que la parábola $y = x^2 - 4x + 2k + 4$ Pase por el origen. (4- tarea 2 Pág. 119)	Sin considerar el término *2k,* evaluar *f(0),* con el valor obtenido se plantea la ecuación *2k = -f(0),* la resolución de esta ecuación da el valor que debe tomar *k* para que cumpla la condición *f(0)= 0* .	D: Función cuadrática, ecuación cuadrática. Propiedades de los números reales.
Si en un juego de simulación un carro se mueve de acuerdo a la gráfica dada por la función *t(x) = - 400x + 20000,* mientras que una motocicleta por la trayectoria de $f(x) = -2x^2 + 2kx - 40000$, ¿Qué valores puede tomar *k* para que el carro y la motocicleta no se estrellen? (4-tarea. 3 Pág. 119)	Se halla la gráfica de las dos funciones dando a *k* un valor arbitrario, luego se toman valores mayores que el dado para *k* y se tabulan suficientes puntos de esta función para compararlos con lo primera, lo mismo se hace con valores menores que el dado al inicio para *k* y se compara, de allí se observa que *m* debe tomar valores próximos a cero para que la trayectoria del carro se aleje del de la motocicleta.	D: función cuadrática, gráfica de una función cuadrática.
Determinar cuál de los puntos dados no pertenece a la función cuadrática. (4- tarea 4 Pág. 119)	Evaluar cada uno de los puntos para decidir su pertenencia a la función.	D: función cuadrática.
Hallar el eje de simetría, el vértice, los Interceptos en *x*, el valor máximo o mínimo de la función, los intervalos donde es creciente y decreciente cada función. (4- tarea 5 Pág. 119)	Se halla el vértice de la función cuadrática, con lo cual se identifica el eje de simetría, intervalos donde es creciente y decreciente y el valor máximo o mínimo, dependiente de la concavidad.	D: función cuadrática, concavidad. T: vértice de una parábola, valor máximo o mínimo de una función cuadrática, simetría
Dada una función cuadrática *f(x)* y una función lineal *g(x),* determinar algebraicamente los puntos de intersección y trazar en un mimo plano ambas gráficas para corroborar la solución. (4- tarea 6 Pág. 119)	Se igualan ambas funciones y se simplifican los términos semejantes, se resuelve la función cuadrática obtenida, los valores obtenidos determinan los puntos de corte. Se tabulan 4 o 5 puntos de cada función, se ubican en el plano cartesiano y se trazan las gráficas.	D: Función cuadrática, gráfica de una función cuadrática. T: raíces de la función cuadrática Propiedades de los números reales.
Determinar los posible valores de *m* para que: La gráfica de la función	Se utiliza la expresión para hallar el vértice de la función, como el valor *x* debe ser *1/2m*, entonces	D: función cuadrática, ecuación cuadrática, Interceptos con los ejes.

TAREAS	TÉCNICAS	TECNOLOGÍAS
$f(x) = mx^2 - x - 1$ Intercepte al eje x en dos puntos. La gráfica de la función $f(x) = -x^2 - mx - 5$ Intercepte al eje x en un solo punto. (4- tarea 7 Pág. 119)	$f(1/2m) = \frac{1-2m}{4m}$ A partir de esto se concluye que si $m>0$ entonces la función abre hacia arriba y el vértice está por debajo del eje y. Si $m<0$ la función abre hacia abajo y el vértice está por debajo del eje, así que m debe ser mayor que cero. Para resolver la segunda, se procede de igual forma, se halla la expresión correspondiente a la componente k, y se iguala a cero, se resuelve y con el valor hallado se encuentra *h (h, k).*	T: vértice, máximo o mínimo de una función cuadrática, raíces de la ecuación cuadrática. Propiedades de los números reales.
Determinar la gráfica de la función cuadrática para que: Su gráfica pase por el punto (1, -1) y su vértice es el punto (2, -3). Su gráfica interseca al eje Y en el punto (0, 3) y su vértice es el punto (1, 2). La coordenada de una de sus raíces es x= 3 y el vértice es (-1/2, -2) (4-tarea. 9 Pág. 119)	Con estos dos puntos se halla por simetría el tercer punto, utilizando la ecuación $ax^2 + bx + c$ se plantea una expresión en la cual la incógnita x y la respuesta sean reemplazadas por los valores numéricos dados. Con las tres ecuaciones obtenidas se plantea un sistema de ecuaciones lineales que se puede resolver por método de sustitución o igualación. Los valores obtenidos son los coeficientes que se ubican en la expresión general de la ecuación cuadrática	D: concavidad, ecuación cuadrática, función cuadrática. T: vértice de una parábola, teorema del factor, raíces de la ecuación cuadrática, simetría. Propiedades de los números reales.
Escribir las funciones $f(x) = 3x^2 - 2x - 1$ y $f(x) = x^2 + x - 6$ de forma estándar. (4-tarea. 10 Pág. 119)	Solución similar al ejemplo 10. Se halla el factor común en los términos que tienen la variable x. se completa el cuadrado con el término independiente. Se aplica la propiedad distributiva para extraer el término que sobra y se factoriza el trinomio cuadrado perfecto.	D: ecuación cuadrática. T: vértice de una parábola, raíces de la ecuación cuadrática. Propiedades de los números reales.
Si se da el costo promedio de producción de un par de botas, así como el polinomio cuadrático que representa el costo en función de la cantidad producida, determinar qué número de botas minimizara el costo y cuál sería el costo promedio para esa cantidad. (4-tarea 11 Pág.119)	Utilizando la ecuación para hallar el valor máximo o mínimo de una función cuadrática, determinar el punto en el cual se presenta el punto mínimo de costo de producción la cantidad que lo produce.	D: Función cuadrática, gráfica de una función cuadrática. T: valor máximo o mínimo de una función cuadrática.
Determinar la cantidad máxima obtenida por producir y vender x unidades de cierto producto, si la función ganancia está dada por la expresión cuadrática dada. (4-tarea 12 Pág.119)	Utilizando la ecuación para hallar el valor máximo o mínimo de una función cuadrática, determinar el punto en el cual se obtiene la mayor ganancia por la venta del producto.	D: Función cuadrática, gráfica de una función cuadrática. T: valor máximo o mínimo de una función cuadrática.

Praxeologías Matemáticas de la lección 2 (*soluciones de ecuaciones cuadráticas por factorización*)

TAREAS	TÉCNICAS	TECNOLOGÍAS
Clasifica las siguientes ecuaciones en cuadráticas (C), lineales (L) o ninguna (N). (1- tarea 1 Pág. 169)	Según el conocimiento que se tiene acerca de las funciones; se debe clasificar cada una de ellas según la clase solicitada; lineal cuadráticas o ninguna. Por otra parte se puede tener en cuenta también el grado que acompaña a cada una de las ecuaciones propuestas, de acuerdo a esto servirá como una base para su clasificación.	D: Función, función cuadrática.
De acuerdo con la gráfica de cada función, establece las soluciones de la correspondiente ecuación cuadrática. *Cuatro imágenes de ecuaciones cuadráticas graficadas en el plano. (1- tarea 2 Pág. 169)	Se establecen las soluciones de cada una de las gráficas dadas utilizando el ***método gráfico*** como elemento especifico para su solución; donde la solución de la gráfica serán los ***puntos de corte de corte*** de la gráfica con el eje *x*.	D: función cuadrática, ecuación cuadrática, interceptos con los ejes. T: vértice de la parábola, máximo o mínimo de una función cuadrática, raíces de la ecuación cuadrática. Propiedades de los números reales.
Resuelve las siguientes ecuaciones cuadráticas por factorización. (1- tarea 3 Pág.169-170)	Establecer la solución de cada una de las ecuaciones cuadráticas presentadas utilizando el método de la factorización; donde se factoriza si es posible la expresión $ax^2 + bx + c = 0$, luego se hace uso de la propiedad del factor cero y por último se iguala cada uno de los factores lineales a cero para determinar los posibles valores de la variable.	D: Ecuación cuadrática. T: raíces de la ecuación cuadrática.
Resuelve las siguientes ecuaciones por raíz cuadrada. (1- tarea 4 Pág. 170)	Establecer la solución de cada una de las ecuaciones cuadráticas presentadas utilizando el método de la raíz cuadrada; donde se utiliza el valor absoluto. Así: $\|c\|$ es la distancia del número real c al origen de la recta real O y se denomina ***valor absoluto*** de c. Además; $\|c\| = a, si\ y\ solo\ si, x = a, o, x = -a.$	D: Ecuación cuadrática. T: raíces de la ecuación cuadrática. Propiedades de los números reales.
Plantear una ecuación cuadrática y encontrar sus raíces para resolver una situación de la vida diaria. (1- tarea 5 Pág.170 (f))	Plantear la ecuación que representa el producto de las edades y la ecuación que representa la diferencia de estas, despejar la misma incógnita en ambas ecuaciones. Igualar las expresiones resultantes en cada caso. Simplificar la expresión resultante. Utilizar la fórmula cuadrática para hallar las raíces de la ecuación cuadrática obtenida.	D: ecuación cuadrática, perímetro, área. T: raíces de la ecuación cuadrática. Propiedades de los números reales.

Praxeologías Matemáticas de la lección 3 (*solución de la ecuación cuadrática completando el cuadrado*)

TAREAS	TÉCNICAS	TECNOLOGÍAS
Decide si las siguientes ecuaciones se pueden resolver por el método completar el cuadrado. (2-tarea 1 Pág. 174)	Se transforma cada ecuación cuadrática en su forma estándar, a otra ecuación cuadrática equivalente que involucre un trinomio cuadrado perfecto completado con el término ax^2 y el término bx, de manera que la última ecuación construida se resuelva fácilmente mediante el método de la raíz cuadrada. Por otra parte, cada ecuación de la forma: $x^2 + bx + c = 0$ se puede resolver por el método de completar el cuadrado siempre y cuando $b^2 - 4ac \geq 0$.	D: Función cuadrática, Ecuación cuadrática. T: raíces de la ecuación cuadrática.
Resuelve las ecuaciones del punto 1, que son solucionables por el método completar el cuadrado. *Punto 1: grupo de ecuaciones cuadráticas donde se debe decidir si se pueden resolver o no con el método completar el cuadrado. (2-tarea 2 Pág.174)	Plantear la solución de cada una de las ecuaciones (que se puedan resolver) utilizando el método de completar el cuadrado, donde se debe tener en cuenta: la transformación de una ecuación cuadrática en forma estándar a otra ecuación cuadrática equivalente que involucre un trinomio cuadrado perfecto completando el término ax^2 y el término *bx*, de tal manera que la última ecuación construida se resuelva fácilmente utilizando el método de la raíz cuadrada.	D: Función cuadrática, Ecuación cuadrática. T: raíces de la ecuación cuadrática.
Resuelve cada ecuación por el método de completar el cuadrado. (2-tarea 3 Pág.174)	Plantear la solución de cada una de las ecuaciones utilizando el método de completar, donde se debe tener en cuenta: la transformación de una ecuación cuadrática en forma estándar a otra ecuación cuadrática equivalente que involucre un trinomio cuadrado perfecto completando el término ax^2 y el término *bx*, de tal manera que la última ecuación construida se resuelva fácilmente utilizando el método de la raíz cuadrada.	D: Función cuadrática, Ecuación cuadrática. T: raíces de la ecuación cuadrática.
Resuelva cada ecuación utilizando el método de la raíz cuadrada. (2-tarea 4 Pág.174)	Establecer la solución de cada una de las ecuaciones cuadráticas presentadas utilizando el método de la raíz cuadrada; donde se utiliza el valor absoluto. Así: $\|c\|$ es la distancia del número real *c* al origen de la recta real *O* y se denomina ***valor absoluto*** de *c*. Además; $\|c\| = a, si\ y\ solo\ si, x = a, o, x = -a.$	D: Función cuadrática, Ecuación cuadrática. T: raíces de la ecuación cuadrática. Propiedades de los números reales.
Plantea una ecuación cuadrática para resolver cada uno de los siguientes problemas; se realizan enunciados los cuales se deben plantear y resolver. (2-tarea 5 Pág. 170)	Se plantean las expresiones para cada uno de los enunciados y se resuelve mediante la fórmula cuadrática.	D: Función cuadrática, Ecuación cuadrática. T: raíces de la ecuación cuadrática.
Utiliza la propiedad establecida en el ejemplo 9,	Se plantean cada una de las ecuaciones cuadráticas para los ejercicios propuestos en los	D: Función cuadrática, Ecuación cuadrática.

TAREAS	TÉCNICAS	TECNOLOGÍAS
para reconstruir la ecuación cuadrática $x^2 + bx + c = 0$. Que tiene dos soluciones que satisfacen: a. Su suma es 15 y su producto es 4. b. Su suma es -12 y su producto es 7. c. Su suma es -20 y su producto es -2. d. Su suma es 15 y su producto es -6. (2-tarea 6 Pág. 174)	cuales se debe tener en cuenta lo siguiente: Suponer que la ecuación se puede resolver por factorización en el conjunto de los ***enteros*** (***z***); es decir: $x^2 + bx + c = (x + m)(x + n)$, donde luego se debe de buscar dos números enteros que satisfagan el producto y la suma en la ecuación presentada.	T: raíces de la ecuación cuadrática.
Resuelve cada situación. Plantear y resolver cada situación utilizando el método de completar el cuadrado para cada una de las ecuaciones cuadráticas. (2-tarea 7 Pág. 174-175)	Plantear la situación de cada una de las ochos situaciones propuestas utilizando el método de completar, donde se debe tener en cuenta: la transformación de una ecuación cuadrática en forma estándar a otra ecuación cuadrática equivalente que involucre un trinomio cuadrado perfecto completando el término ax^2 y el término *bx*, de tal manera que la última ecuación construida se resuelva fácilmente utilizando el método de la raíz cuadrada.	D: Función cuadrática, Ecuación cuadrática. T: raíces de la ecuación cuadrática.
Resolver cada una de las ecuaciones cuadráticas si *k* representa una constante real positiva. (2-tarea 8 Pág. 175)	Utilizo la fórmula cuadrática, se identifica los coeficientes necesarios asumiendo en esto a *k* y se simplifica hasta donde sea posible.	D: Función cuadrática, Ecuación cuadrática. T: raíces de la ecuación cuadrática.
Transforma cada ecuación a cuadrática y resuélvela (2-tarea 9 Pág. 175)	Se utiliza las propiedades de los números reales y el concepto de ecuación cuadrática para llevar estas expresiones a esta forma.	D: Función cuadrática, Ecuación cuadrática. T: raíces de la ecuación cuadrática.
Hallar las longitudes de los lados de un rectángulo, cuyo perímetro es 50 metros y su área es 150 metros cuadrados. (2-tarea 10 Pág. 175)	Plantear la ecuación del área y la ecuación del perímetro del rectángulo, despejar la misma incógnita en ambas ecuaciones. Igualar las expresiones resultantes en cada caso. Simplificar la expresión resultante. Utilizar la fórmula cuadrática para hallar las raíces de la ecuación cuadrática obtenida.	D: ecuación cuadrática, perímetro, área. T: raíces de la ecuación cuadrática. Propiedades de los números reales.
La edad de Laura hace 35 años era la raíz cuadrada de la edad que tendrá dentro de 35 años. Determinar la edad actual. (2-tarea 11 Pág. 175)	Plantear las ecuaciones que representan las edades en cada caso, igualar estas ecuaciones y resolver la expresión resultante. Utilizar la fórmula cuadrática para hallar las raíces de la ecuación cuadrática obtenida.	D: ecuación cuadrática. T: raíces de la ecuación cuadrática. Propiedades de los números reales.
Hallar las edades de los cuatro miembros de una familia de acuerdo a los datos que relacionan la edad de la madre con la de los otros tres.	Plantear la edad de cada miembro de la familia en términos de la edad de la madre, plantear la suma de las edades igualada al valor total que se da, simplificar la expresión y despejar la incógnita, hallar la edad de los otros miembros	D: ecuación cuadrática. T: raíces de la ecuación cuadrática.

TAREAS	TÉCNICAS	TECNOLOGÍAS
(2-tarea 12 Pág. 175)	con este dato obtenido.	Propiedades de los números reales.
Un rectángulo de 576 cm cuadrados es tal que la longitud de uno de sus lados es la cuarta parte de la longitud del otro lado. Determine las longitudes de los lados. (2-tarea 14Pág. 175)	Plantear la edad de cada miembro de la familia en términos de la edad de la madre, plantear la suma de las edades igualada al valor total que se da, simplificar la expresión y despejar la incógnita, hallar la edad de los otros miembros con este dato obtenido.	D: ecuación cuadrática. T: raíces de la ecuación cuadrática. Propiedades de los números reales.
Hallar la cantidad de hombres, mujeres y niños que asistieron a una reunión de acuerdo a los datos que relacionan la cantidad de hombres con la del resto de asistentes. (2-tarea 15 Pág. 175)	Plantear la cantidad de cada tipo de asistentes en términos de la cantidad de hombres, plantear la suma de las cantidades igualada a la cantidad total que se da, simplificar la expresión y despejar la incógnita, hallar la cantidad de los otros asistentes con este dato obtenido.	D: ecuación cuadrática, perímetro, área. T: raíces de la ecuación cuadrática Propiedades de los números reales.
Plantear una ecuación cuadrática y encontrar sus raíces para resolver una situación. (2-tarea 16 Pág. 175)	Plantear la ecuación del área y la ecuación del perímetro del lote rectangular, despejar la misma incógnita en ambas ecuaciones. Igualar las expresiones resultantes en cada caso. Simplificar la expresión resultante. Utilizar la fórmula cuadrática para hallar las raíces de la ecuación cuadrática obtenida.	D: ecuación cuadrática, perímetro, área. T: raíces de la ecuación cuadrática. Propiedades de los números reales.
Determina las longitudes de los lados de un rectángulo, si el lado mayor excede en 10 cm al menor, y la diagonal mide 50 cm. (2-tarea 17 Pág. 175)	Plantear la ecuación del área del triángulo rectángulo, y del perímetro del rectángulo, despejar la misma incógnita en ambas ecuaciones. Igualar las expresiones resultantes en cada caso. Simplificar la expresión resultante. Utilizar la fórmula cuadrática para hallar las raíces de la ecuación cuadrática obtenida.	D: ecuación cuadrática, perímetro, área. T: raíces de la ecuación cuadrática. Propiedades de los números reales.
Plantear una ecuación cuadrática y encontrar sus raíces para resolver una situación. (2-tarea 18 Pág. 175)	Plantear la ecuación del volumen y la ecuación del perímetro de la caja, despejar la misma incógnita en ambas ecuaciones. Igualar las expresiones resultantes en cada caso. Simplificar la expresión resultante. Utilizar la fórmula cuadrática para hallar las raíces de la ecuación cuadrática obtenida.	D: ecuación cuadrática, perímetro, área. T: raíces de la ecuación cuadrática. Propiedades de los números reales.
Hallar la cantidad de libros que reciben tres personas de acuerdo a los datos que relacionan la cantidad de libros que recibe una persona con respecto a las otras dos. (2-tarea 19 Pág. 175)	Plantear la cantidad que recibe cada uno de los tres individuos en términos de la cantidad recibida por la persona de referencia, plantear la suma de las cantidades igualada a la cantidad total que se da, simplificar la expresión y despejar la incógnita, hallar la cantidad de libros recibida por los otros donde acuerdo al dato obtenido.	D: ecuación cuadrática. T: raíces de la ecuación cuadrática. Propiedades de los números reales.

TAREAS	TÉCNICAS	TECNOLOGÍAS
Mauricio compro cierto número de gafas playeras en US 300. Podría haber comprado 10 gafas mas, si cada una hubiese costado US 5 menos, ¿Cuántas gafas compro? (2-tarea 20 Pág. 175)	Plantear la igualdad de las expresiones que representan el precio pagado, menos el dinero que se hubiera ahorrado si cada una hubiera costado US 5 menos, y la expresión del cociente entre la suma del total de gafas compradas y las 10 que hubiera podido adquirir, y el precio pagado menos el dinero que se hubiera ahorrado si cada una hubiera costado US 5 menos. Simplificar y resolver la ecuación cuadrática resultante.	D: ecuación cuadrática. T: raíces de la ecuación cuadrática. Propiedades de los números reales.

Praxeologías Matemáticas de la lección 4 (*fórmula cuadrática*)

TAREAS	TÉCNICAS	TECNOLOGÍAS
Averigua el número de soluciones de las siguientes ecuaciones de segundo grado sin resolverlas. (3-tarea 1 Pág.180)	Teniendo en cuenta el tipo de solución que puede existir cuando se resuelven ecuación de segundo grado se debe hacer referencia en lo siguiente: $\Delta > 0$. Dos soluciones reales distintas. $x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2-4ac}}{2a}$. $\Delta < 0$. Ninguna solución real. No tiene. $\Delta = 0$. Una única solución (repetida dos veces) $x = \frac{-b}{2a}$.	D: ecuación cuadrática. T: Raíces de la ecuación cuadrática.
¿Cuántas soluciones puede tener la ecuación cuadrática incompleta $ax^2 + b = 0$? (3-tarea 2 Pág.180)	Tomando como referencia $ax^2 + b = 0$, tenga en cuenta: $\Delta > 0$. Dos soluciones reales distintas. $x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2-4ac}}{2a}$. $\Delta < 0$. Ninguna solución real. No tiene. $\Delta = 0$. Una única solución (repetida dos veces) $x = \frac{-b}{2a}$.	D: ecuación cuadrática. T: Raíces de la ecuación cuadrática.
¿Cuántas soluciones puede tener la ecuación cuadrática incompleta $ax^2 + bx = 0$? (3-tarea 3 Pág.180)	Tomando como referencia $ax^2 + bx = 0$, tenga en cuenta: $\Delta > 0$. Dos soluciones reales distintas. $x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2-4ac}}{2a}$. $\Delta < 0$. Ninguna solución real. No tiene. $\Delta = 0$. Una única solución (repetida dos veces) $x = \frac{-b}{2a}$.	D: ecuación cuadrática. T: Raíces de la ecuación cuadrática.
Inventa: a. Una ecuación cuadrática completa con dos soluciones. b. Una ecuación cuadrática completa con una solución. c. Una ecuación cuadrática completa sin solución. (3-tarea 4 Pág.180)	Teniendo en cuenta los tipos de solución conocidos, analizar cada situación y proponer una ecuación: para tener en cuenta: $\Delta > 0$. Dos soluciones reales distintas. $x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2-4ac}}{2a}$. $\Delta < 0$. Ninguna solución real. No tiene. $\Delta = 0$. Una única solución (repetida dos veces) $x = \frac{-b}{2a}$.	D: ecuación cuadrática. T: Raíces de la ecuación cuadrática.
Determina los valores de *k* para que la ecuación	A partir del conocimiento sobre la teoría de ecuaciones cuadráticas se buscan los valores	D: ecuación cuadrática.

TAREAS	TÉCNICAS	TECNOLOGÍAS
cuadrática $\left(\frac{11-5k}{4}\right)x^2 + (k-1)x + 1 = 0$ tenga una única raíz real. (3-tarea 5 Pág.180)	posibles de k para que la ecuación tenga una única solución real; por lo tanto: $\Delta = 0$. Una única solución (repetida dos veces) $x = \frac{-b}{2a}$.	T: Raíces de la ecuación cuadrática. Propiedades de los números reales.
Escribir todos los pasos seguidos por los babilonios para resolver una ecuación cuadrática. Diga que método utilizaban los babilonios para resolver etas ecuaciones. (3-tarea 6 Pág.181)	A cada paso del proceso de resolución indicar que propiedad o procedimiento matemático se llevo a cabo de acuerdo al método de completar el cuadrado.	D: ecuación cuadrática. T: Raíces de la ecuación cuadrática.
Resolver las siguientes ecuaciones. (3-tarea 7 Pág.181)	Las ecuaciones son fraccionarias y están factorizadas. Se igualan a cero, se desarrollan estos productos y se simplifica. Se resuelve la ecuación cuadrática obtenida.	D: ecuación cuadrática. T: Raíces de la ecuación cuadrática. Propiedades de los números reales.
Calcula las dimensiones de un rectángulo en el que la base mide 2 cm menos que la altura y la diagonal mide 10 cm. (3-tarea. 8 Pág. 181)	Plantear la ecuación del área del triángulo rectángulo, y del perímetro del rectángulo, despejar la misma incógnita en ambas ecuaciones. Igualar las expresiones resultantes en cada caso. Simplificar la expresión resultante. Utilizar la fórmula cuadrática para hallar las raíces de la ecuación cuadrática obtenida.	D: ecuación cuadrática, perímetro, área. T: Raíces de la ecuación cuadrática. Propiedades de los números reales.
Al aumentar en 5 m el lado de un cuadrado, su superficie aumenta en 75 metros cuadrados. Calcule el lado del cuadrado. (3-tarea. 9 Pág. 181)	Plantear la ecuación del área y la ecuación del perímetro del cuadrado, despejar la misma incógnita en ambas ecuaciones. Igualar las expresiones resultantes en cada caso. Simplificar la expresión resultante. Utilizar la fórmula cuadrática para hallar las raíces de la ecuación cuadrática obtenida.	D: ecuación cuadrática, perímetro, área. T: Raíces de la ecuación cuadrática. Propiedades de los números reales.
El área total A de la superficie de un cilindro circular recto de altura *h* y radio de la base *r*, está dada por la fórmula citada. ¿Cuál es el radio del cilindro circular recto de altura 10 cm y área total igual a 78π cm cuadrados? (3-tarea. 10 Pág. 181)	Sustituir los valores dados en la ecuación del área del cilindro y posteriormente despejar *r*.	Propiedades de los números reales.
Calcula la hipotenusa de un triángulo rectángulo, sabiendo que las medidas de sus lados son tres números enteros consecutivos. (3-tarea. 11 Pág. 181)	Plantear una ecuación para la hipotenusa y la suma de los lados del triángulo, relacionar las variables de la hipotenusa y de la suma de los lados para encontrar una expresión algebraica en términos de una sola variable. Hallar las raíces de la ecuación cuadrática obtenida mediante la fórmula cuadrática, identificar la	D ecuación cuadrática. T: raíces de la ecuación cuadrática, teorema de Pitágoras. Propiedades de los números

TAREAS	TÉCNICAS	TECNOLOGÍAS
	raíz positiva.	reales.
En un rectángulo la base mide el triple que la altura. Si disminuimos en 1 cm cada lado, el área inicial disminuye en 15 cm cuadrados. Calcula las dimensiones y el área del rectángulo inicial. (3-tarea. 12 Pág. 181)	Plantear la ecuación del área y la ecuación del perímetro del rectángulo, despejar la misma incógnita en ambas ecuaciones. Igualar las expresiones resultantes en cada caso. Simplificar la expresión resultante. Utilizar la fórmula cuadrática para hallar las raíces de la ecuación cuadrática obtenida.	D: ecuación cuadrática, perímetro, área. T: Raíces de la ecuación cuadrática. Propiedades de los números reales.
La edad de un padre es el cuadrado de la de su hijo. Dentro de 24 años la edad del padre será el doble de la del hijo ¿Cuántos años tiene ahora cada uno? (3-tarea 14 Pág.181)	Plantear la ecuación que relaciona las edades de ambos y la ecuación que relaciona en 24 años las edades de ambos, se despeja la incógnita que representa la edad del padre en cada caso y se igualan las expresiones resultantes, se resuelve la ecuación cuadrática obtenida y la solución representa la edad actual del hijo.	D: ecuación cuadrática, perímetro, área. T: Raíces de la ecuación cuadrática. Propiedades de los números reales.
Por una cámara digital, unos binóculos y un equipo de pesca, Oscar pago US 1430. La cámara es 5 veces más costosa que los binóculos, y estos cuestan el doble que el equipo de pesca. ¿Cuál era el precio de cada artículo? (3-tarea 16 Pág.181)	Plantear el costo de cada artículo en términos del costo de los binóculos, plantear la suma de los costos igualado al costo total que se da, simplificar la expresión y despejar la incógnita, hallar el precio de los otros artículos con este dato obtenido.	D: ecuación cuadrática, perímetro, área. T: Raíces de la ecuación cuadrática. Propiedades de los números reales.
Si un cuerpo se mueve con aceleración constante *a*, la distancia recorrida *d* está dada por la fórmula, donde *v* es la velocidad con que inicia el movimiento el cuerpo y *t* el tiempo empleado en recorrer la distancia *d*. encontrar los valores pedidos si se dan los valores restantes. (3-tarea 17 Pág. 181)	Se sustituyen los valores dados y se resuelve la ecuación resultante	D: función cuadrática, ecuación cuadrática. T: raíces de la ecuación cuadrática.
La temperatura T, en grados centígrados, a la que hierve el agua, depende de la altura h sobre el nivel del mar, medida en metros; y se calcula mediante la fórmula dada. ¿A qué temperatura hierve el agua en la cima del monte Everest que está a 8840 metros de altura sobre el nivel del mar? (3-tarea 18 Pág. 181)	Se sustituyen los valores dados y se resuelve la ecuación resultante	D: función cuadrática, ecuación cuadrática. T: raíces de la ecuación cuadrática.
Un hombre desea usar 6 metros cúbicos de concreto para construir el piso de un patio rectangular. Si la longitud del patio debe ser el doble del ancho y el grosor del	Plantear la ecuación del volumen y la ecuación del perímetro del patio, despejar la misma incógnita en ambas ecuaciones. Igualar las expresiones resultantes en cada caso. Simplificar la expresión resultante. Utilizar la fórmula cuadrática para hallar las	D: ecuación cuadrática, perímetro, área. T: raíces de la ecuación cuadrática.

TAREAS	TÉCNICAS	TECNOLOGÍAS
piso debe ser 8 cm, ¿Cuáles son las dimensiones del patio? (3-tarea 19 Pág.181)	raíces de la ecuación cuadrática obtenida.	Propiedades de los números reales.

Praxeologías Matemáticas de la lección 5 (*aplicaciones de la ecuación cuadrática*)

TAREAS	TÉCNICAS	TECNOLOGÍAS
La suma de tres números positivos es 30. El segundo es el doble del cuadrado del primero, y el tercero es el triple de primero. Halla los tres números. (4-tarea 1 Pág.185)	Plantear la ecuación que representa la suma de los tres números en términos del primer número, Utilizar la fórmula cuadrática para hallar las raíces de la ecuación cuadrática obtenida.	D: ecuación cuadrática, perímetro, área. T: raíces de la ecuación cuadrática**.**
Halla las dimensiones de un rectángulo cuyo perímetro es 270 m y su área 4500 m cuadrados. (4-tarea 2 Pág. 185)	Plantear la ecuación del área y la ecuación del perímetro del rectángulo, despejar la misma incógnita en ambas ecuaciones. Igualar las expresiones resultantes en cada caso. Simplificar la expresión resultante. Utilizar la fórmula cuadrática para hallar las raíces de la ecuación cuadrática obtenida.	D: ecuación cuadrática, perímetro, área. T: raíces de la ecuación cuadrática. Propiedades de los números reales
Una lancha hace un viaje de ida y vuelta a un lugar que se encuentra a 24 km rio arriba en un tiempo de 6 horas. En aguas tranquilas la lancha hace 10 km en una hora. ¿Cuál es la rapidez de la corriente? (4-tarea 3 Pág.185)	Solución similar al ejemplo 18. Se plantea la expresión de la velocidad rio arriba y rio abajo del recorrido, luego, con el resto de datos se plantea que la diferencia de los tiempos empleados en cada caso es igual al tiempo total, se simplifica y resuelve la ecuación cuadrática obtenida.	D: ecuación cuadrática. T: raíces de la ecuación cuadrática. Propiedades de los números reales
Hallar las dimensiones de la franja que se va a adicionar a una cancha para que su área sea mayor. (4-tarea 4 Pág.185)	Plantear la ecuación del área y la ecuación del perímetro del lote rectangular, despejar la misma incógnita en ambas ecuaciones. Igualar las expresiones resultantes en cada caso. Simplificar la expresión resultante. Utilizar la fórmula cuadrática para hallar las raíces de la ecuación cuadrática obtenida.	D: ecuación cuadrática, perímetro, área. T: raíces de la ecuación cuadrática. Propiedades de los números reales
Se tiene una lámina rectangular y de cada esquina se corta un cuadrado de 10 cm de lado. Se dobla y resulta una caja sin tapa de 18000 cm cúbicos de volumen. El largo de la base es el doble del ancho. Halla las dimensiones de la lámina. (4-tarea 5 Pág. 185)	Se plantea el volumen de la caja en términos de los datos dados, se realiza el producto de estos tres factores, se resuelve la ecuación cuadrática resultante que determina la longitud de los lados de la lámina.	D: ecuación cuadrática, perímetro, área. T: raíces de la ecuación cuadrática. Propiedades de los números reales
Dos motociclistas salen desde un mismo punto por caminos perpendiculares y rectos. Si la distancia que recorrió uno de ellos es 85 m menos que la	Plantear las expresiones algebraicas que representan los recorridos de cada motociclista de acuerdo a la condición dada, establecer el área del rectángulo como el producto de estos recorridos, desarrollar el producto de los	D: ecuación cuadrática. T: raíces de la ecuación cuadrática.

TAREAS	TÉCNICAS	TECNOLOGÍAS
que recorrió el otro, y el área del rectángulo determinado por sus recorridos es 164.250 metros cuadrados. ¿Qué distancia recorrió cada uno? (4-tarea 6 Pág.185)	factores, simplificar la expresión y resolver la ecuación cuadrática obtenida mediante la fórmula cuadrática.	Propiedades de los números reales
El volumen de un cilindro circular recto esta dado por la fórmula dada, donde r es el radio de la base y h la altura del cilindro circular recto. Si al querer envasar 600 cm cúbicos de agua en un cilindro de 18 cm de altura quedaron por fuera 91,32 cm cúbicos de agua ¿Cuál es el radio de la base del cilindro? (4-tarea 8 Pág. 185)	Hallar la cantidad que fue envasada e igualarla a la expresión del volumen, sustituir los valores dados y despejar el radio r.	Propiedades de los números reales
Dos motociclistas realizan un recorrido que determina desde el punto de partida un ángulo recto, si el recorrido de uno de ellos está en términos del otro, y se da el área que representa el producto de las distancias recorridas, hallar estas distancias. (4-tarea 6 Pág.185)	Plantear la ecuación del área y la ecuación que determina las distancias en términos del perímetro de una figura rectangular, despejar la misma incógnita en ambas ecuaciones. Igualar las expresiones resultantes en cada caso. Simplificar la expresión resultante. Utilizar la fórmula cuadrática para hallar las raíces de la ecuación cuadrática obtenida.	D: ecuación cuadrática, perímetro, área. T: raíces de la ecuación cuadrática. Propiedades de los números reales
Se necesita hacer un mantel para una mesa rectangular cuya superficie tiene el doble de largo que de ancho. En todo el borde del mantel debe quedar una franja de 30 cm de ancho. Si el área total del mantel es 36000 cm, ¿Cuáles son las dimensiones de la base de la mesa? (4-tarea 7 Pág.185)	Plantear la ecuación del área y la ecuación del perímetro del mantel, despejar la misma incógnita en ambas ecuaciones. Igualar las expresiones resultantes en cada caso. Simplificar la expresión resultante. Utilizar la fórmula cuadrática para hallar las raíces de la ecuación cuadrática obtenida.	D: ecuación cuadrática, perímetro, área. T: raíces de la ecuación cuadrática. Propiedades de los números reales
El volumen de un cilindro circular recto esta dado por la fórmula dada, donde r es el radio de la base y h la altura del cilindro circular recto. Si al querer envasar 600 cm cúbicos de agua en un cilindro de 18 cm de altura quedaron por fuera 91,32 cm cúbicos de agua ¿Cuál es el radio de la base del cilindro? (4-tarea 8 Pág. 185)	Hallar la cantidad que fue envasada e igualarla a la expresión del volumen, sustituir los valores dados y despejar el radio r.	Propiedades de los números reales
En un jardín rectangular se quiere destinar dos espacios rectangulares iguales para	Plantear la ecuación del área del jardín en términos de las dimensiones de los espacios, se simplifica y despeja la misma incógnita en	D: ecuación cuadrática, perímetro, área.

TAREAS	TÉCNICAS	TECNOLOGÍAS
cultivar flores, si se conoce el área del jardín y los espacios entre el borde del jardín y los espacios, ¿cuáles son las dimensiones de estos espacios? (4-tarea 9 Pág.185)	ambas ecuaciones. Utilizar la fórmula cuadrática para hallar las raíces de la ecuación cuadrática obtenida.	T: raíces de la ecuación cuadrática. Propiedades de los números reales
Cuando el precio de un producto es p dólares por unidad, un fabricante suministra 2p – 8 unidades del producto al mercado y los compradores demandan 300 – 29 unidades. En el valor de p para el cual la oferta es igual a la demanda, se dice que el mercado está en equilibrio. Determine el valor de p. (4-tarea 10 Pág.185)	Se igualan ambas expresiones y se despeja la incógnita buscada.	D: ecuación cuadrática, perímetro, área. T: raíces de la ecuación cuadrática. Propiedades de los números reales
Un faro mueve su luz de forma horizontal hacia la derecha y hacia la izquierda a lo largo de una pared, con una distancia dada por, $s = 100t^2 - 300t$ Del punto de partida, después de t minutos. ¿Cuánto tiempo le tomara a la luz regresar al punto de partida? (4-tarea 13 Pág.185)	Se resuelve la ecuación cuadrática, cuando $d= 0$, las raíces determina el tiempo en el que el faro regresa al punto de partida.	D: ecuación cuadrática. T: raíces de la ecuación cuadrática.
Se repartes, en partes iguales $ 60.000 entre cierto número de amigos presentes en una reunión. Alguien nota que si estuvieran dos amigos menos, a cada uno le corresponderían $ 2500 más. ¿Cuántos amigos están presentes y cuánto recibió cada uno? (4-tarea 14 Pág.185)	Plantear la ecuación del área del jardín en términos de las dimensiones de los espacios, se simplifica y despeja la misma incógnita en ambas ecuaciones. Utilizar la fórmula cuadrática para hallar las raíces de la ecuación cuadrática obtenida.	D: ecuación cuadrática, perímetro, área. T: raíces de la ecuación cuadrática. Propiedades de los números reales
Un deportista camino 30 km en un determinado número de horas. Si hubiese caminado 1 km más por hora habría tardado una hora menos en recorres la misma distancia. ¿Cuántos kilómetros por hora recorrió? (4-tarea 15 Pág.185)		D: ecuación cuadrática, perímetro, área. T: raíces de la ecuación cuadrática. Propiedades de los números reales

Praxeologías Matemáticas de la lección 6 (*desigualdades, máximos y mínimos de funciones cuadráticas*)

TAREAS	TÉCNICAS	TECNOLOGÍAS
Hallar el conjunto solución de cada desigualdad. (5-tarea 1Pág.191)	Se factoriza la expresión cuadrática, en caso de no estarlo, se resuelve este producto de acuerdo a la relación de orden. Se halla el conjunto solución.	D: desigualdad cuadrática, función cuadrática. T: raíces de ecuaciones cuadráticas.
Hallar el conjunto solución de las ecuaciones cuadráticas factorizadas. (5-tarea 2 Pág.191)	Se resuelven estos factores de acuerdo a la relación de orden. Se halla el conjunto solución.	
Hallar el dominio de las funciones. (5-tarea 3 Pág.191)	Teniendo en cuenta que el radicando debe ser positivo para que las raíces existan, entonces se utiliza la relación de orden para establecer que valores debe tomar *x* para que se cumpla esta condición. Se halla el conjunto solución.	
Hallar dos números cuya suma sea 10 y su producto el máximo. (5-tarea 4 Pág.191)	Establecer los posibles valores que cumplen esta condición y por ultimo verificarlo con la comparación de los productos.	Función cuadrática, ecuación cuadrática.
Escribe un resultado general para hallar los valores de dos números reales *x*, *y*, cuya suma sea *s* y su producto *xy* es máximo. (5-tarea 7 Pág.191)	Encontrar el resultado utilizando un proceso de factorización para encontrar los valores que satisfagan la ecuación cuadrática (***máximos y mínimos***) por lo tanto: $x^2 + bx + c = (x + m)(x + n)$, donde luego se debe de buscar dos números enteros que satisfagan el producto y la suma en la ecuación encontrada.	D: ecuación cuadrática, concavidad de la parábola. T: vértice de la parábola, máximo o mínimo de una función cuadrática, raíces de la ecuación cuadrática.
Se construye un rectángulo de manera que dos de sus lados están en los ejes coordenados, un vértice esta en el origen y el vértice opuesto a este pertenece a la recta de ecuación x + 6y = 10. Determinar las coordenadas *(x, y)* del vértice opuesto al origen, de manera que el área del rectángulo sea máxima. (5-tarea 8 Pág. 191)	Se halla el área determinada por el punto que se encuentra sobre la recta, de acuerdo a esto, y al concepto de área y máximos o mínimos, se halla el punto medio del segmento de recta que se encuentra en el primer cuadrante, el producto de estos valores maximizan el área del rectángulo	D: función cuadrática, ecuación cuadrática. T: máximo o mínimo de una función cuadrática
Se construye un rectángulo de manera que dos de sus lados están en los ejes coordenados, un vértice esta en el origen y el vértice opuesto a este pertenece a la recta de ecuación 5x + 12y = 70. Determinar las coordenadas *(x, y)* del vértice opuesto al origen, de manera que el área	Se halla el área determinada por el punto que se encuentra sobre la recta, de acuerdo a esto, y al concepto de área y máximos o mínimos, se halla el punto medio del segmento de recta que se encuentra en el primer cuadrante, el producto de estos valores maximizan el área del rectángulo	D: función cuadrática, ecuación cuadrática. T: máximo o mínimo de una función cuadrática

TAREAS	TÉCNICAS	TECNOLOGÍAS
del rectángulo sea máxima. (5-tarea 9 Pág. 191)		
Se construye un rectángulo de manera que dos de sus lados están en los ejes coordenados, un vértice esta en el origen y el vértice opuesto a este pertenece a la recta de ecuación ax + by = c. con $b \neq 0$. Determinar las coordenadas *(x, y)* del vértice opuesto al origen, de manera que el área del rectángulo sea máxima. (5-tarea 10 Pág. 191)	Se halla el área determinada por el punto que se encuentra sobre la recta, de acuerdo a esto, y al concepto de área y máximos o mínimos, se halla el punto medio del segmento de recta que se encuentra en el primer cuadrante, el producto de estos valores maximizan el área del rectángulo	D: función cuadrática, ecuación cuadrática. T: máximo o mínimo de una función cuadrática.
Teniendo en cuenta el conjunto solución de las desigualdades cuadráticas si $a < b$, escribir una desigualdad cuadrática en forma estándar cuyo conjunto solución sea el dado en cada caso. (5-tarea 11 Pág.191)	A partir de la definición de desigualdades cuadráticas donde en la variable *x* es una expresión cuadrática que en vez de estar determinada por una igualdad involucra una relación de orden.	D: Desigualdad cuadrática, función cuadrática.