DIFICULTADES EN EL APRENDIZAJE DEL ÁLGEBRA ESCOLAR

DIFFICULTIES IN LEARNING SCHOOL ALGEBRA

Castro, E.

Universidad de Granada

Resumen

En este texto asumimos que las dificultades y obstáculos en el aprendizaje del álgebra pueden ser clasificadas en tres tipos (aquellas que son intrínsecas al objeto, otras que son inherentes al propio sujeto y aquellas otras que son consecuencia, involuntaria quizá, de las técnicas de enseñanza). Desde dicha asunción reflexionamos sobre las dificultades que presentan los estudiantes en el aprendizaje del álgebra en relación con el objeto. Nos centramos, así mismo, en dos de los enfoques que se consideran del álgebra: álgebra como generalización de la aritmética y álgebra como lenguaje. Introducimos ejemplos de datos obtenidos en investigaciones que hemos realizado y que tienen relación con el tema que nos ocupa.

Abstract

This paper argues that pitfalls in learning algebra can be classified in three: those inherent to object, those inherent to subject, and those as a consequences of the teaching modes. Here we point to students' difficulties for learning algebra inherent to object, by focusing in two concepts of algebra: algebra as a generalization of arithmetic, and algebra as a language. We use empirical data from previous research on this topic.

Palabras clave: *Álgebra escolar, dificultades de aprendizaje.*

Key words: *Difficulty learning, school algebra.*

Castro, E. (2012). Dificultades en el aprendizaje del álgebra escolar. En A. Estepa, Á. Contreras, J. Deulofeu, M. C. Penalva, F. J. García y L. Ordóñez (Eds.), Investigación en Educación Matemática XVI (pp. 75 - 94). Jaén: SEIEM

El aprendizaje del álgebra se hace difícil a la mayoría de los estudiantes. Esta es afirmación con la que están de acuerdo las comunidades de profesores y de investigadores en educación matemática. Así se pone de manifiesto en publicaciones de diversos autores, como por ejemplo: Booth (1984), Cerdán (2010), Espinosa (2004), Fernández (1997), Herscovics (1989), Kieran (1989), Martínez (2011), Molina (2007), Nortes, y Nortes (2010), Socas (2007), Trujillo, Castro y Molina (2009), Vega-Castro, Molina y Castro (2011).

Los profesores constatan que los alumnos no llegan a obtener un conocimiento algebraico satisfactorio a pesar del empeño puesto en su enseñanza. La toma de conciencia de esta situación ha generado gran cantidad de trabajos de investigación los cuales tratan de detallar, lo más ampliamente posible, la problemática del aprendizaje del álgebra, las causas que dan origen a la misma y cómo encontrar soluciones que palien dicha problemática. Gran número de investigaciones están centradas en indagar las dificultades que encuentran los estudiantes en el trabajo algebraico escolar que les lleva a producir errores en el mismo, así como en identificar aquellos errores que son resistentes incluso a situaciones de enseñanza que se pueden considerar de “choque” (Herscovics y Linchevski, 1994; Palarea, 1998; Ruano, Socas y Palarea, 2008). Entre las nociones que producen dificultad se señalan la clausura para las expresiones algebraicas que los estudiantes sienten necesidad de hacer; el lenguaje algebraico al que no le “ven” sentido y que les lleva a asignar valores numéricos a las letras o a la sobre-generalización de ciertas propiedades; la preservación de la jerarquía de la operaciones para la que no encuentran justificación; el uso de paréntesis; la percepción del signo igual como expresión de una equivalencia, entre otras.

La investigación sugiere que las dificultades y obstáculos en el aprendizaje del álgebra pueden ser clasificadas en tres tipos (Wagner y Parker, 1999): aquellas que son intrínsecas al objeto, otras que son inherentes al propio sujeto y aquellas otras que son consecuencia, involuntaria quizá, de las técnicas de enseñanza.

Se señala que las dificultades y obstáculos inherentes al objeto son debidas, en gran parte, a la naturaleza misma del álgebra, su lenguaje, los elementos que lo componen, las reglas que lo rigen. Que las dificultades debidas al sujeto están relacionadas con la complejidad que supone la abstracción y la generalización, acciones que desempeñan un papel destacado en el álgebra, haciéndose hincapié en la componente abstracta de estas acciones como una de las razones que originan las dificultades que presentan los estudiantes en el aprendizaje de esta materia (Breiteig y Grevholm, 2006). La generalización es considerada como un camino cuya meta está en el álgebra, una ruta hacia el álgebra (Mason, Graham y Wilder, 2005) y forma parte de su esencia. La consideración del álgebra como generalización tiene sus raíces en el uso de la notación algebraica como una herramienta para expresar demostraciones (Kieran, 2006). Se trata de un proceso psicológico cognitivo sofisticado que involucra reflexión (Amit y Neria, 2008; Dörfler, 1991) y cuyos productos son esquemas cognitivos. Este proceso requiere tiempo y esfuerzo por parte de los estudiantes, en el mismo destaca una etapa que exige “centrarse” o “prestar atención” a un invariante o relación y abstraer una posible propiedad (Castro, Cañadas y Molina, 2010; Cañadas, 2007; Lobato, Ellis y Muñoz, 2003; Radford, 2010), de ahí la dificultad asociada al proceso de generalización. La posibilidad de que las dificultades de los alumnos con el álgebra se deban al tipo de enseñanza recibida es destacada por algunos investigadores (Blanton y Kaput, 2005; Booth, 1999; Carpenter, Franke y Levi, 2003; Carraher, Schliemann, Brizuela y Earnest, 2006; Fujii, 2003), indicándose que la enseñanza tradicional ha sido tal que personas que estudiaron algún curso de álgebra durante su etapa escolar, cuando piensan en "álgebra" recuerdan algo relacionado con solución de ecuaciones, factorización de polinomios, funciones y gráficas. En general, cosas que aprendieron y utilizaron en sus clases de secundaria en las que intervenían letras, sobre todo *x* e *y*. Incluso algún estudiante que tenía buenas notas en matemáticas recuerda que el estudio del álgebra significó el punto en el que las matemáticas dejaron de tener relación con el mundo real (Breiteig y Grevholm, 2006). La enseñanza, en todo caso, está muy ligada a la concepción que de la materia tengan los diseñadores del currículo y los profesores que lo ponen en práctica.

La enseñanza del álgebra

Se habla de crisis en la enseñanza del álgebra (Malara y Navarra, 2012) provocada por diferentes motivos. Un motivo es de tipo cognitivo, por tanto achacable al sujeto, se refiere a que la generalización y la utilización de símbolos suponen dificultad (lo hemos apuntado en el párrafo anterior). Otro motivo es de tipo psicológico, solamente oír la palabra álgebra ya asusta a los estudiantes, mucho más a aquellos que "no se le dan bien" las matemáticas. Una tercera causa es de tipo social, la sociedad tiene catalogada el álgebra entre las ramas más complejas de las matemáticas. Un motivo pedagógico también se apunta como causante de dicha crisis, actualmente la mayoría de los estudiantes están menos motivados hacia el estudio, por lo tanto su formación es más compleja. Por último se apunta una causa didáctica, los métodos de enseñanza del álgebra han quedado anticuados.

Indica Booth (1984) que el objetivo principal de la enseñanza del álgebra debe ser el que los estudiantes aprendan a representar relaciones generales y procedimientos, porque a través de estas representaciones, se pueden resolver una amplia gama de problemas y pueden desarrollarse nuevas relaciones a partir de las conocidas. Sin embargo, los estudiantes terminan viendo el álgebra como un conjunto de técnicas de manipulación arbitraria y poco más. Por su parte, los contenidos de álgebra incluidos en el currículo escolar de secundaria, que han cambiado muy poco durante el siglo pasado (Kieran, 1996), están demasiado centrados en la simplificación y la manipulación en lugar de la generalización de ideas que son la base de álgebra. El álgebra no se enseña generalmente a través de una progresión lenta, como instrumento u objeto del pensamiento (Radford, 2012) sino que se trata como un mecanismo manipulador y se enfatizan los aspectos de cálculo. En consecuencia, el álgebra pierde algunas de sus características esenciales, una de las cuales es el uso de un lenguaje preciso para describir la realidad, otra es ser un poderoso instrumento de razonamiento y pronóstico, mediante la formulación de hipótesis para construir conocimiento. Se considera por tanto necesario, no sólo realizar cambios significativos en la enseñanza del álgebra de secundaria sino también prever, en las escuelas de primaria, una aproximación a estos cambios de manera que favorezcan una aproximación temprana al pensamiento algebraico (Malara, 2003; Molina, 2007).

Se han realizado intentos por determinar enfoques que guíen la enseñanza del álgebra, por diferentes autores. Cuatro enfoques diferentes señala Usiskin (1987) mediante los que se puede trabajar el álgebra escolar: aritmética generalizada, estudio de procedimientos para resolver problemas, estudio de relaciones entre cantidades (incluyendo la modelización y las funciones) y estudio de estructuras. Kieran (1996), tomando como referencia las actividades propias que realizan los estudiantes, caracteriza el álgebra escolar de acuerdo a tres tipos de tareas: de generalizar, de transformar y tareas globales o de alto nivel (meta-nivel). Las actividades de generalizar involucran expresiones y ecuaciones que son objeto del álgebra, incluyen: ecuaciones que contienen una incógnita que representa la solución del problema, expresiones de generalización que se presentan desde patrones geométricos o secuencias numéricas y expresiones de las reglas que rigen las relaciones numéricas. Entre las actividades de transformación incluye: factorizar, sumar y multiplicar expresiones polinómicas, resolver ecuaciones, trabajar con expresiones y ecuaciones equivalentes. El nivel global o meta-nivel comprende actividades en las que el álgebra se usa como herramienta, si bien las tareas no tienen que ser exclusivas del álgebra, incluye: resolución de problemas, modelización, reconocimiento de estructuras, generalización, justificación, prueba, y predicción. Después de una revisión de documentos sobre el tema, Drijvers y Hendrikus (2003) consideran que se utilizan cuatro enfoques del álgebra los cuales conforman una categorización fenomenológica. El primer enfoque se centra en el álgebra como un medio para resolver problemas. El segundo lo hace en el estudio de las funciones, es decir, de relaciones entre variables. En tercer lugar hacen referencia a un enfoque centrado en la generalización de relaciones y el estudio de patrones y estructuras. El último enfoque se centra en el lenguaje, considerando el álgebra como un medio de expresión de ideas matemáticas, en otras palabras, como un sistema de representación.

Los diferentes enfoques permiten abordar la introducción y enseñanza del álgebra escolar desde posicionamientos distintos. No obstante, en la práctica educativa, dichos enfoques no pueden ser separados radicalmente debido a que una situación o contexto a menudo provoca actividades algebraicas relacionadas con más de un enfoque (Drijvers y Hendrikus, 2003). Un equilibrio entre las diferentes componentes del álgebra y la consideración de las variadas situaciones que las hacen significativas, puede permitir a los estudiantes comprender la pertinencia del álgebra, su estructura, el significado de los conceptos algebraicos fundamentales y el uso de razonamiento algebraico (Bednarz y Janvier, 1996). El uso de la tecnología en la enseñanza, por su parte, proporciona a los estudiantes soporte visual sobre gráficos y representación simbólica y tablas que les posibilita la manipulación de los mismos y herramienta que les permite resolver problemas (Arnau, Arevalillo-Herráez y Puig, 2011), entendiendo que el uso de la tecnología requiere una sofisticada comprensión de los símbolos y las operaciones con los mismos.

Desde esta variedad de enfoques aparece una propuesta curricular sobre la enseñanza del álgebra denominada Early–Algebra. La concepción que se maneja en Early–Algebra es muy amplia, comprende estudio de relaciones numéricas (se incluye aritmética generalizada), de estructuras abstraídas de cálculos y relaciones, generalización de patrones, relaciones funcionales, desarrollo y manipulación del simbolismo y la modelización como dominio de expresión y formalización de generalizaciones (Blanton y Kaput, 2005). El objetivo de dicha propuesta es que los estudiantes desarrollen un aprendizaje del álgebra con comprensión.

En lo que sigue tratamos sobre dificultades de los estudiantes en el aprendizaje del álgebra, relativas al objeto, nos centramos en dos de los enfoques que han señalado algunos autores referenciados en el párrafo anterior: álgebra como generalización de la aritmética y álgebra como lenguaje, haciéndose inevitable rozar elementos de otros enfoques. A lo largo del discurso insertaremos resultados de investigaciones que hemos realizado en relación con el tema que nos ocupa. No abordamos la resolución de problemas ni la modelización en álgebra por ser campos muy amplios que desbordarían las posibilidades de este trabajo.

Algebra escolar y su relación con la aritmética

El álgebra es una de las principales ramas (o subárea) de la matemática y el álgebra escolar (elemental) es la forma más básica de la misma. El álgebra escolar y la aritmética (otra rama de la matemática) están tan relacionadas que en ocasiones es considerada el álgebra como aritmética generalizada. Sobre esta caracterización del álgebra se encuentran tanto defensores como detractores. Entre los autores que justifican estrechas conexiones entre aritmética y álgebra se encuentra Vallejo, (1841)[1], quien establece que las relaciones entre los números pueden ser de tipo general o particular. Las leyes de los números proporcionan relaciones generales de los mismos, por ejemplo: "la suma de dos números pares es par", es una ley aplicable a todos los números pares, por lo tanto es una relación de tipo general. Por su parte, los hechos proporcionan la particularidad, ejemplo: "tres más cinco es igual a ocho", es una relación solo entre los números 3, 5 y 8, por tanto es una relación de tipo particular. Divide así la ciencia de los números en dos ramas; el álgebra que trata de las leyes, y la aritmética que trata de los hechos. Más recientemente otros autores también defienden esta relación entre aritmética y álgebra, de la que venimos hablando. Gómez (1995) señala que el álgebra generaliza a la aritmética, y la aritmética, por su parte, se apropia de su lenguaje horizontal de igualdades y paréntesis. Drijvers y Hendrikus (2003) indican que existe una relación dual entre ambas ramas, la aritmética proporciona al álgebra raíces y fundamentación y el álgebra proporciona a la aritmética la posibilidad de simbolizar, generalizar y razonar algebraicamente. Palarea (1998) se refiere al álgebra como parte de la matemática que trata de la simbolización de las relaciones numéricas generales, de las estructuras matemáticas y de las operaciones de esas estructuras; desde esta posición se puede ver el álgebra escolar como aritmética generalizada que involucra formulación y manipulación de relaciones y propiedades numéricas. Subramaniam y Banerjee (2011) precisan que el álgebra no es solo generalización de la aritmética sino que proporciona una fundamentación para la misma.

Hay autores que no comparten la concepción de esa estrecha relación entre aritmética y álgebra y consideran que el álgebra es, entre otras cosas, una herramienta para la comprensión, expresión y comunicación de generalizaciones, para revelar estructuras, para establecer conexiones y para formalizar argumentos matemáticos (Arcavi, 1994). Se considera el pensamiento algebraico y se caracteriza como aquel que permite analizar relaciones entre cantidades, reconocer estructuras, estudiar cambios, hacer generalizaciones, resolver problemas, modelizar, justificar, probar y predecir (Bell, 1995; Kieran, 2006). Una aproximación a situaciones cuantitativas que enfatizan las relaciones y aspectos generales; la expresión de estas acciones no tendrían que ser letras o símbolos necesariamente, que quedarán reservadas para el discurso más tradicional del álgebra (Kieran 1989). Dos indicadores señalan Lins y Kaput (2004) con los cuales se caracteriza el pensamiento algebraico: a) entraña actos deliberados de generalización y expresión de la generalidad, b) conlleva, usualmente, razonamientos basados en formas de generalización sintácticamente estructuradas que incluyen guías de acciones sintácticas y semánticas. El pensamiento algebraico se describe en contraposición a lo que se entiende por pensamiento aritmético, en el acto de resolver problemas. Se señala que mientras que los problemas aritméticos se pueden resolver operando con los números dados en el problema y en los que las cantidades desconocidas (solución del problema) pueden llegar a obtenerse operando con las cantidades conocidas (dadas en el problema), en la resolución de los problemas

[1] (Tomado de Gómez, 1995)

algebraicos se requiere la identificación de aquello que es desconocido (incógnita), representándolo con una letra y operando con ella como si fuese conocido (Bednarz y Janvier, 1996; Stacey y MacGregor, 2000).

Dificultades con el álgebra asociadas a la aritmética

Hay una gran tradición de enseñar, en las escuelas, aritmética antes que álgebra. El aprendizaje de la aritmética se produce en la educación primaria y el aprendizaje del álgebra en la educación secundaria. Esta secuencia temporal se justifica por el hecho de que el álgebra se desarrolla sobre la aritmética debido a la necesidad de sistematizar y describir propiedades, operaciones y procesos generales para resolver una clase de problemas (Banerjee, 2008). Pero las propias experiencias de profesores indican que los estudiantes muy raramente establecen conexión entre aritmética y álgebra y es que la ruta de la aritmética para llegar al álgebra está plagada de obstáculos pedagógicos (Balacheff, 2001). La manera de hacer la conexión aritmética-álgebra es, por lo tanto, una de las causas de tensiones en la enseñanza. Esto ha conducido a que en algunos currículos se introduzca el álgebra por otros métodos, a través del uso de patrones, como generalización de dichos patrones, donde la aritmética puede ayudar a la comprensión de los símbolos y las transformaciones entre ellos (Banerjee. 2008).

La relación entre aritmética y álgebra lleva a que muchas de las dificultades de los estudiantes que conducen a errores al trabajar en álgebra escolar se justifiquen, bien desde la falta de conocimiento de los estudiantes sobre el mismo asunto en aritmética o bien porque el conocimiento aritmético supone un obstáculo para el algebraico. Hacemos referencia a algunos ejemplos.

Los estudiantes presentan dificultades en relación a las convenciones algebraicas y, dado que las convenciones del álgebra rigen también en aritmética, el fracaso de los estudiantes al aplicarlas o ignorarlas en álgebra, son achacables a su desconocimiento en aritmética, nos referimos al uso de paréntesis y jerarquía (o prioridad) de operaciones. Por ejemplo, en una “cadena” de operaciones aritméticas como la que recoge la Figura 1[2] el estudiante muestra cometer un error al aplicar distributividad en el segundo sumando y, o bien se olvida del primer factor 2 que aparece en la multiplicación 2.20.7 que debe de realizar, o se olvida de poner un paréntesis entre la suma 100+140 que está multiplicada por 2 (puede que no sea solo un olvido).

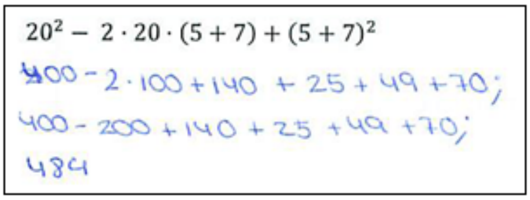


Figura 1: Aplicación incorrecta de la propiedad distributiva

Además, en las cadenas de operaciones, es necesario seguir las reglas de preferencia para realizar dichas operaciones en un cierto orden para mantener el valor de tales expresiones. Algunos estudiantes tienen dificultades para cumplir con tales reglas en aritmética. Se percibe en el caso que recoge la Figura 2, en el que el estudiante, que ha de indicar la corrección de la igualdad, suma los números 169 y 10, ignorando que 10 está multiplicado por 17.

[2]A menos que se señale lo contrario, los ejemplos proceden del trabajo de tesis en curso de Danellys Vega-Castro que realiza bajo la dirección de Encarnación Castro y Marta Molina.

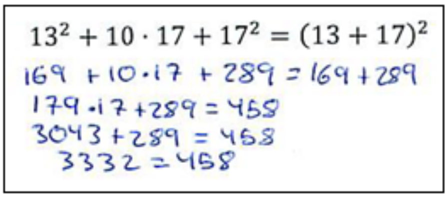


Figura 2: Uso incorrecto de la regla sobre jerarquía de operaciones

La utilización de una noción primitiva de la propiedad distributiva al transformar $(a+b)^2$ en a^2+b^2, tiene su reflejo en la aritmética, no estando claro hacia donde está dirigida la influencia si desde la aritmética hacia el álgebra o viceversa. La Figura 3 muestra el desempeño de un estudiante a quien se le ha pedido que opere para comprobar si la expresión es correcta.

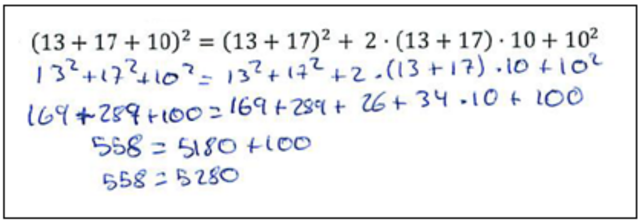


Figura 3: Uso incorrecto del cuadrado de una suma

La concepción de que el álgebra es la generalización de la aritmética o la terminación de la aritmética (Usiskin, 1987) lleva a poner la atención en el proceso de generalización en aritmética y se observa que este proceso supone una de las causas de dificultad frecuentes y persistentes en álgebra. En este ámbito, una de las dificultades que tienen estudiantes de (12-14 años), se observa cuando han de escribir la expresión algebraica del término general de una sucesión como puede ser la de los números impares (1, 3, 5, 7---). Se resisten a escribir una expresión compuesta, como es 2n-1, argumentando que los términos de la sucesión presentan una forma simple y el término general debe de ser también de forma simple (Castro, 1994). La apariencia diferente entre los términos particulares y el término general es la causa de dicha dificultad. Otra dificultad, una vez llegado a encontrar un patrón como generalización, consiste en expresarlo algebraicamente, o sea, utilizar el lenguaje algebraico adecuadamente para expresar dicho patrón (Cañadas 2007, Trujillo, Castro, y Molina, 2009).

Algebra como lenguaje

Una de las caracterizaciones que se hacen del álgebra es como un lenguaje para describir acciones y relaciones entre cantidades. En este caso, como en cualquier lenguaje, pueden surgir dificultades debidas a las características del propio lenguaje o al hacer traducciones entre lenguajes diferentes. Un conocimiento básico del lenguaje es el del vocabulario. Partiendo de esta premisa y considerando que la falta del vocabulario adecuado lleva al fracaso de los estudiantes en álgebra, Miller y Smith (1994) desarrollan su investigación. Recogen un listado de 30 términos básicos e indagan el uso que los estudiantes hacen de los mismos. Obtienen, como resultado, que los estudiantes conocen un promedio de 15 de los 30 términos recogidos.

Tanto en su sintaxis como en su semántica, el lenguaje del álgebra se aleja del lenguaje natural y también del lenguaje aritmético (Rojano, 1994), lo cual no facilita dar significado a los símbolos y expresiones del álgebra. Una de las causas de la persistencia de errores sintácticos se explica por el hecho de que el uso del lenguaje simbólico del álgebra está restringido al aula, en desventaja con el uso de la lengua vernácula. Los errores en lengua usual tienden a desaparecer con el tiempo y uso de la misma, cosa que no ocurre con el lenguaje simbólico, del que se hace un uso restringido. A esto hay que añadir el carácter formal del lenguaje algebraico que contrasta tanto con el lenguaje aritmético (si bien este tiene cierta formalidad) como con el vernáculo, lo que impide también un traspaso entre dichos lenguajes algebraico y aritmético o vernáculo (Freudenthal, 1983).

Gran cantidad de las dificultades achacables al lenguaje del álgebra, surge en la resolución de problemas al hacer translaciones desde las expresiones verbales a las algébricas o viceversa. Apareciendo la dificultad en la formulación de ecuaciones algebraicas cuando la información se presenta con palabras (MacGregor y Stacey 1997). En la investigación que hemos realizado (y que continúa en curso) centrada en estudiar la manera de hacer traducciones entre los lenguajes simbólico y verbal por estudiantes de educación secundaria, se ha manifestado que, utilizando las mismas expresiones, los estudiantes cometen más errores al realizar la traducción de enunciados verbales a su representación simbólica, que cuando se hace desde el simbólico al verbal. Por esto consideramos que ofrece mayor dificultad la traducción de lo verbal a lo simbólico que lo contario. A su vez, una metodología basada en el juego produce efectos positivos en el aprendizaje de estas traducciones en estudiantes poco motivados con el estudio de las matemáticas.

El dialogo que se recoge a continuación muestra la actuación de dos estudiantes cuando tratan de unir fichas de un "dominó algebraico" especialmente preparado para la ocasión (una de las fichas presenta una expresión algebraica que hay que unir con otra ficha que presente la misma expresión en lenguaje verbal) y cómo uno señala a otro el error que ha cometido (Rodríguez, 2011).

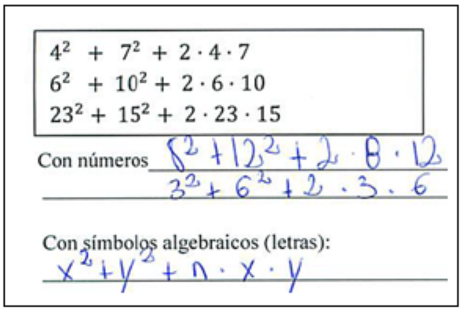
> *AH. Pongo ésta porque la raíz cuadrada de un número que vale x es igual a dicho número (une el enunciado leído en una ficha con la expresión simbólica* $\left(\sqrt{x}\right)^y$ *).*
>
> *MP. No, está mal… porque no dice que esté elevada a dos, dice la raíz cuadrada de un número elevada a otro número.*

Hacemos a continuación un recorrido por diferentes componentes del lenguaje algebraico con la mirada puesta en las dificultades que los mismos ocasionan a los estudiantes.

Variables

Las variables son símbolos literales con los que se representan números. En el álgebra escolar, las variables tienen tres usos diferentes: como incógnitas, como números generalizados y para señalar relaciones funcionales (Ursini, Escareño, Montes y Trigueros, 2005), estos tres usos suponen confusión en algunos estudiantes. Las variables cuando aparecen en el estudio del álgebra, son causa de dificultades para muchos estudiantes (Küchemann, 1981). La investigación muestra que en sus primeras aproximaciones al álgebra, no entienden el significado de las letras y comúnmente las interpretan como suplencia de objetos o palabras (MacGregor y Stacey, 1997). Una explicación a este hecho indica que las aproximaciones iniciales que los estudiantes tienen con las letras puede entorpecer la construcción del concepto de variable. Se señala como impedimento el asignar una letra como nombre de una persona (A, por Alberto) o cuando se indica cinco peras con la expresión 5p, al dar el resultado de un problema, ya que se puede asumir que las letras son abreviaturas. Booth (1984) sostiene que las dificultades de los alumnos, al comenzar a trabajar en álgebra es el resultado de la utilización desigual de las letras en la aritmética y el álgebra. En aritmética, letras como "m" y "c" se utilizan como etiquetas para representar metros y céntimos, no un número de metros o de céntimos, como lo harían en el álgebra. La interpretación de las variables como abreviaturas afecta a la trasformación de problemas orales en expresiones algebraicas aptas para obtener el resultado a través de su transformación (Wagner y Parker, 1999).

Dado que las variables operan al igual que los números de la aritmética, y conceptualmente se asemejan a sustantivos en el lenguaje común, hace que muchos estudiantes adquieran cierta facilidad en la rutina de manipular variables y pueden trabajar con ellas aunque no tengan plena comprensión de la potencialidad y flexibilidad de las mismas (Wagner, 1983). Por ejemplo, los estudiantes que se enfrentan a las variables como incógnitas en las ecuaciones a veces no entienden que las letras representan un valor específico. Una concepción ingenua acerca de las variables se ha detectado, se trata de considerar que diferentes letras deben tener diferentes valores (Kieran, 1989). Incluso cuando se asegura que cualquier letra puede ser utilizada como algo desconocido, se llega a pensar que el cambio de una letra puede cambiar la solución de una ecuación. En la enseñanza se refuerza esta idea cuando para ilustrar la propiedad distributiva, por ejemplo, los profesores tomamos números distintos para cada letra (Wagner, 1983). Küchemann (1981) encontró que solo un porcentaje muy pequeño de estudiantes de entre 13-15 años podía considerar una letra como un número generalizado. Menos aún eran capaces de interpretar una letra como una variable. La mayoría de los estudiantes tomó las letras como objetos concretos o simplemente los ignoró. En el proceso inverso de asignar letras como variables, al hacer una generalización, los estudiantes también encuentran dificultades para discernir la asignación de letras. En la Figura 4 se presenta el desempeño de un estudiante de tercero de enseñanza secundaria obligatoria que ha de escribir una expresión algebraica que generalice un patrón. Se le indica que construya dos expresiones con números y una con letras que tengan la misma estructura que las dadas. Se aprecia cómo a la constante 2, que aparece en todas las expresiones y que el alumno ha detectado, le asigna una letra como si se tratase de una variable.


$4^2 + 7^2 + 2 \cdot 4 \cdot 7$
$6^2 + 10^2 + 2 \cdot 6 \cdot 10$
$23^2 + 15^2 + 2 \cdot 23 \cdot 15$

Con números $8^2 + 12^2 + 2 \cdot 8 \cdot 12$
$3^2 + 6^2 + 2 \cdot 3 \cdot 6$

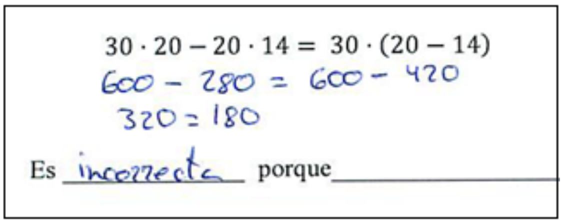
Con símbolos algebraicos (letras):
$x^2 + y^2 + n \cdot x \cdot y$

Figura 4: Expresión simbólica de la generalización de un patrón

Símbolos

En álgebra, los símbolos “+”; “-” e “=” tienen varios significados. Pueden indicar procesos de cálculo o situación estática de respuesta final. Por ejemplo $x + 8$ indica, por una parte, la instrucción de realizar la adición de añadir 8 a cualquier número, o bien, dar una respuesta en la cual se indica que existe la relación “cualquier número sumado con 8”. Algunas dificultades en el aprendizaje del álgebra están asociadas al uso de los símbolos (Wagner y Parker, 1999), por ejemplo, considerar que en una expresión como $5x^2 - x$, la segunda x representa un número negativo en lugar del opuesto a x.

El signo = en álgebra tiene significado de equivalencia cuantitativa entre los dos lados del signo (Filloy y Rojano, 1989; Kieran, 1989). La correcta interpretación del signo de igualdad es esencial para el aprendizaje del álgebra (Carpenter, Franke y Levi, 2003), porque el razonamiento algebraico se basa en la capacidad de los estudiantes para entender la igualdad en su totalidad y utilizar adecuadamente el signo de igualdad para expresar generalizaciones (Molina, Castro y Castro, 2009). La comprensión de la igualdad y la equivalencia que significa, está en el centro de la comprensión del álgebra ya que las expresiones equivalentes tienen el mismo valor numérico para todos los valores de las letras y se mantienen las aplicaciones de validez de las reglas de transformación de una expresión en la otra. Esta noción tiene relevancia en la simplificación de expresiones algebraicas en la que toda expresión intermedia y la final, simplificada, han de ser equivalentes. Al buscar la solución de ecuaciones y hacer transformaciones de las expresiones, dichas transformaciones han de seguir las normas establecidas por el álgebra, de modo que se obtengan expresiones equivalentes y no se modifique la solución. Algunos estudiantes que no tienen en cuenta la equivalencia transforman las expresiones o ecuaciones arbitrariamente. La no comprensión del signo = como equivalencia hace que los estudiantes presenten dificultades en la comprensión del álgebra. Por ejemplo, en aritmética, a veces, no juzgan la igualdad de dos expresiones sin haber realizado todos los cálculos. Mostramos en la Figura 5 un ejemplo del desempeño de un estudiante de tercero de educación secundaria obligatoria ante la tarea de comprobar si la sentencia es o no correcta. Realiza todos los cálculos para decir que es incorrecta la igualdad una vez vistos los dos resultados numéricos finales, no da explicación, suponemos que lo considera innecesario, visto que los números en cada uno de los lados de la igualdad son diferentes


$30 \cdot 20 - 20 \cdot 14 = 30 \cdot (20 - 14)$

$600 - 280 = 600 - 420$

$320 = 180$

Es incorrecta porque

Figura 5: Valoración de la veracidad de la sentencia dada

Algunos estudiantes creen que el signo igual indica una operación que hay que hacer en el primer miembro de la igualdad para dar la respuesta a la derecha del signo, Por ejemplo, un alumno de 3º de educación primaria da las siguientes explicaciones al juzgar la veracidad de las expresiones que se le presentan (Molina, 2006, p. 623)

Tabla 1: explicaciones de estudiantes de 3er curso de primaria sobre la veracidad de expresiones aritméticas

75 + 23 = 23 + 75	**7 + 15 = 8 + 15**	**53 + 41 = 54 + 40**	**16 + 14 – 14 = 36**
Falsa porque 75 + 23 no es 75 ni 23	Falsa porque 7 + 15 no es 8 ni 15	Falsa porque 53 + 41 no es 54 ni 40	Verdadera porque 16 + 14 – 24 =36

No admitiendo que en el segundo miembro de la igualdad pueda haber más de un número. Describen la igualdad en términos de operador, con una operación en el lado izquierdo y un resultado en el lado de la derecha. En aritmética, tanto la igualdad como el signo más se suelen interpretar como acciones a realizar, a veces estas acciones no son las adecuadas. Ejemplo, escribir 17 al completar la igualdad 14+ □=13+4 (Molina, 2006).

Para construir el significado de equivalencia del signo igual, se aconseja que dicho significado comience a tratarse en el trabajo con igualdades aritméticas antes de la introducción del álgebra. Si esta idea se construye a partir del conocimiento aritmético de los estudiantes, pueden llegar a adquirir una comprensión intuitiva del significado de una ecuación y transformar dicha comprensión en conocimiento para el álgebra. Booth (1984) señala que en aritmética el signo igual no debe ser leído solo como indicación de resultado, como en el caso "2 más 3 hace 5" sino como "2 más 3 es equivalente a 5".

Relacionado con el uso de los símbolos, Arcavi (1994) introduce la noción de sentido del símbolo como una meta deseada en la enseñanza de las matemáticas. Señala que una definición explícita del sentido del símbolo no es viable debido a la complejidad y variación en todo lo que se necesita para utilizar con eficacia y razonar con diferentes formas simbólicas del álgebra. Describe una serie de descriptores que caracterizan al sentido del símbolo en el dominio de álgebra en secundaria: 1) apreciación del poder de los símbolos que incluye lo que los símbolos pueden y no pueden hacer, 2) capacidad para determinar cuándo abandonar el uso de símbolos y recurrir a otras formas de representación, 3) capacidad de leer expresiones y ecuaciones, 4) capacidad para diseñar formas simbólicas, y 5) conocimiento de los diferentes roles que los símbolos juegan en diferentes contextos. En palabras de Hoch (2003), el sentido simbólico, según Arcavi, es un conglomerado de "sensibilidades" (feeling) sobre los símbolos que incluyen reconocimiento del poder de los mismos, sentimiento de cuándo es apropiado utilizar los símbolos, capacidad de manipular e interpretar expresiones simbólicas, diferentes roles que pueden jugar los símbolos en diferentes contextos y añade que la adquisición de sentido del símbolo es un objetivo importante de la enseñanza del álgebra.

Expresiones

Una expresión algebraica es una descripción de unas operaciones que contienen símbolos y signos. Ejemplos de expresiones algebraicas son 8y, x + 4, 7x2 - 4x +2 = 0. En estas expresiones se emplean dos sistemas de símbolos distintos (letras y números) lo que conlleva economía en la notación pero, dado que las letras y los números se ajustan a diferentes reglas, causan dificultades a los estudiantes (Wagner y Parker, 1999).

Entre las expresiones algebraicas que forman parte del currículo escolar están las ecuaciones y las funciones. Estos dos conceptos, si bien forman parte del álgebra escolar, no son conceptualmente equivalentes sino que entre ellos existe un gran salto cognitivo. En las ecuaciones (cuando no se trata de sistemas de ecuaciones) aparece una sola variable, que representa algunos números. En las funciones hay dos o más variables que pueden asumir una infinidad de valores relacionados entre sí. Las desigualdades están entre los dos conceptos anteriores, una sola variable representa todo un continuo de números.

En las ecuaciones el signo igual adquiere especial relevancia. En la resolución de ecuaciones, el signo igual es una señal explícita de relación y los estudiantes han de operar en toda la relación para encontrar una secuencia de relaciones equivalentes. Pocos estudiantes aprecian plenamente el hecho de que la solución de una ecuación es encontrar el valor o valores de la variable para la cual los lados, izquierdo y derecho, de la ecuación son iguales. Se aconseja, en la enseñanza trabajar con igualdades aritméticas para desarrollar el concepto de ecuación (Herscovics y Kieran, 1980) y utilizar métodos basados en el uso de la calculadora para encontrar aproximaciones con el objetivo que los estudiantes se centren más en el aspecto relacional de una ecuación y menos en la solución algorítmica.

El concepto de función es difícil de entender para muchos estudiantes (Welder, 2006) y la notación formal f(x) que condensa una gran cantidad de información, de manera muy eficiente, tiene poco significado incluso para algunos estudiantes avanzados. La falta de significado puede ser debida a que la definición de función apoyada en la teoría de conjuntos, muy utilizada en la enseñanza, no expresa la riqueza del concepto de función en toda su extensión. Algunas investigaciones, centradas en el proceso cognitivo de los estudiantes al construir el concepto formal de función, concluyen que se realiza por etapas. El comienzo está en la noción de una regla o ley que determinará la función y se progresa a través del vocabulario y el simbolismo, la representación, las operaciones sobre las funciones y propiedades internas de las funciones específicas (Lovell, 1971). Otras investigaciones se han centrado en ideas intuitivas acerca de las funciones y la transición desde la intuición al simbolismo formal (Dreyfus y Eisenberg, 1982), una de las conclusiones es que algunos estudiantes de secundaria pueden comprender fácilmente la idea básica de función como regla de correspondencia ya sea en situaciones concretas o en tablas de dos columnas de números. Otras investigaciones se han centrado en estudiar las dificultades que presentan los estudiantes; una dificultad específica encontrada en estudiantes que habían trabajado funciones generales y lineales está en el uso de los términos del vocabulario relacionados con las mismas: preimagen, imagen, dominio, rango (Markovits, Eylon, y Bruckheimer, 1988), los estudiantes también ponen de manifiesto dificultades en el estudio de cierto tipo de funciones como funciones constantes y funciones cuyas representaciones gráficas es discontinua. Un conocimiento erróneo mostrado con frecuencia es considerar que todas las funciones son lineales. Según Markovits Eylon y Bruckheimer (1988), para los estudiantes de menor capacidad resulta más fácil manejar situaciones que involucran funciones que se dan dentro de una historia gráfica frente a las que sólo se presentan algebraicamente. Este resultado les lleva a sugerir que el desarrollo de las capacidades gráficas debería preceder al aprendizaje de las funciones (Welder, 2006). Pero, por otra parte, la gráfica ha sido específicamente identificada como objeto de dificultades en el aprendizaje del álgebra por los estudiantes (Leinhardt, Zaslavsky y Stein, 1990).

En gran parte de estas investigaciones se dan pautas para hacer la enseñanza más efectiva. Así, introducir las funciones con ejemplos sencillos y utilizar una variedad de tipos ayudará a los estudiantes a construir una más completa conceptualización de las funciones. Para el trabajo con funciones simples, identificar patrones y describir verbalmente las reglas de asociación. Establecer una relación funcional entre dos variables es también una actividad esencial en los cursos de introducción al álgebra (Welder, 2006).

Estructura de las expresiones algebraicas

Se ha argumentado que muchas de las dificultades de los estudiantes con el álgebra simbólica y las transformaciones en la misma, son debidas a la falta de comprensión de los estudiantes de la estructura de las expresiones (Hoch y Dreyfus, 2004). Sobre la estructura cabe distinguir un significado doble: la estructura externa de una expresión y la estructura interna. La estructura externa muestra los términos que componen la expresión, los signos que los relacionan, el orden de los diferentes elementos y las relaciones que existen entre ellos (Molina, 2012). Se trataría de la forma gramatical de las expresiones en términos de Esty (1992), la estructura superficial de una expresión en palabras de Kieran (1992) o la estructura sintáctica, según Kirshner (1989). Desde un punto de vista amplio, se puede decir que la estructura externa da cuenta de la forma en que una entidad se compone de partes (existiendo conexiones o relaciones entre las partes que componen dicha entidad). El reconocimiento de dicha estructura no requiere evocar posibles significados para los símbolos involucrados. La estructura interna describe el valor de la expresión y las relaciones entre los componentes de la expresión con el mismo, estas acciones requieren mayor implicación de conocimientos. En este mismo orden de ideas Hoch y Dreyfus (2004) distinguen entre el orden y la forma de una expresión algebraica, la forma está relacionada con la apariencia externa de la expresión y el orden con las relaciones que mantienen los componentes de dichas expresiones entre sí y con otras estructuras.

Asociado a la estructura de las expresiones algebraicas surge el constructo sentido estructural o sentido de estructura (Linchevski y Livneh, 1999). Se sugiere que algunas de las dificultades de los estudiantes con el álgebra se explican por la deficiencia de sentido estructural que presentan y que, a su vez, podrían estar ligadas a falta de comprensión de aspectos estructurales de la aritmética. Se sugiere que un estudiante muestra buen sentido estructural cuando opta por un método eficaz y elegante para resolver un problema. Un ejemplo se muestra en la Figura 6 en donde el estudiante ha de simplificar la fracción algebraica dada (Vega-Castro 2010).

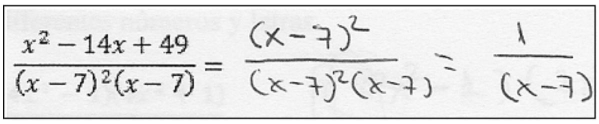


Figura 6: Simplificación de una fracción algebraica

Una definición de sentido estructural podría incluir la capacidad para reconocer la estructura algebraica y utilizar las funciones apropiadas de esa estructura, en el contexto dado, como una guía para elegir las operaciones a realizar. En sus investigaciones Linchevski y Livneh (1999) parten del supuesto de que el álgebra escolar hereda las propiedades estructurales de la aritmética. La tendencia a calcular las cadenas de operaciones de forma secuencial, de izquierda a derecha, en aritmética suele acarrear dificultades en álgebra y no ayuda a construir sentido estructural. La Figura 7, muestra un ejemplo del cálculo secuencial que realiza un estudiante (también se muestra la necesidad de cierre que tiene para responder que la igualdad es incorrecta) para discernir sobre la corrección de la expresión dada.

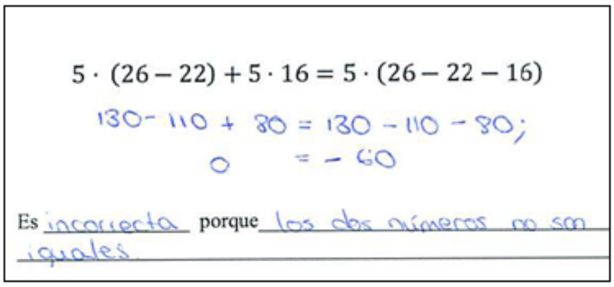


Figura 7: Comprobación de la corrección de la expresión dada

En álgebra, cuando se trata de simplificar expresiones algebraicas al reordenar los términos aplicando algunas propiedades de las operaciones para reducir la expresión a una forma de apariencia más simple que no tiene que ser necesariamente solo un término, es necesario evaluar la expresión antes de realizar cálculos y ahí interviene el sentido estructural. Calcular secuencialmente es un escollo que a veces conduce a no alcanzar éxito en la tarea, como ocurre en el caso que se presenta en la Figura 6 en el proceso de simplificar la fracción algebraica (Vega-Castro 2010).

$$\frac{x^2-14x+49}{(x-7)^2(x-7)}=\frac{x^2-14x+49}{(x^2+2x(-7))\cdot(x-7)}=\boxed{\frac{x^2-14x+49}{(x-7)^3}}=\frac{x^2+14x+49}{x^3(-7)^3+3x^2(-7)+3x\cdot(-7)^2}=\frac{x^2+14x+49}{x^3-343-21x^2+42x}$$

$$\frac{x^2+14x+49}{x^3-21x^2+42x-343}\ ?$$

Figura 8: Simplificación de una fracción algebraica

En el proceso de reconocer manejar o reproducir una estructura hay muchas demandas cognitivas que el estudiante tiene que cumplimentar para poder operar con símbolos algebraicos: comprender los diferentes significados de los símbolos, elección del que mejor se ajusta a la situación, reconocer lo que los símbolos representan, tanto para el resultado como para el proceso (Sfard y Linchevski, 1994). La falta de reconocimiento de esta complejidad puede llevar a muchos estudiantes a sentir que los símbolos del álgebra son arbitrarios y por lo tanto pueden ser ignorados.

Para concluir

Cerramos esta reflexión en la que nos hemos centrado en hacer un recorrido por diferentes dificultades que muestran los estudiantes en sus aprendizajes algebraicos, achacables a lo peculiar de esta materia, indicando que si bien han sido muchos los autores consultados y recogidos en las referencias de este documento, muchos más son los que se han quedado sin incluir. Ello puede proporcionar una idea de la cantidad de trabajos de investigación realizados en torno al álgebra escolar. Aún así, las dificultades siguen persistiendo, por lo que hay que seguir indagando. La investigación puede ayudar a comprender cómo los alumnos construyen conceptos y aprenden procedimientos complejos. Puede sugerir actividades para el aula que fomenten las conexiones y que llevan a la comprensión de conceptos. Indagar sobre maneras de hacer las ideas algebraicas accesibles a los estudiantes de manera que el álgebra se convierta en el motor que impulse a un mayor rendimiento de los estudiantes en lugar del filtro que supone actualmente. La divulgación adecuada de los resultados de la investigación, de forma que llegue a los profesores, puede ayudar a los mismos en su trabajo profesional a hacer una enseñanza del álgebra más eficaz, lo que se traduciría en un aprendizaje más eficiente por los estudiantes.

Nuestro interés, actual está centrado en experimentar propuestas de enseñanza dentro del paradigma de la metodología de diseño (Molina, Castro, Molina y Castro, 2011). Dichas propuestas vienen enmarcadas por el análisis didáctico, sistematizado por Lupiáñez y Rico (2008), de los conceptos involucrados en las propuestas y que dan soporte científico a los tres momentos diferentes de los experimentos de enseñanza: preparación, implementación y análisis de resultados.

Referencias

Amit, M. y Neria, D. (2008). ‘‘Rising to the challenge’’: using generalization in pattern problems to unearth the algebraic skills of talented pre-algebra students. *The International Journal on Mathematics Education* (ZDM), 40(1), 111–129.

Arcavi, A. (1994). Symbol sense: Informal sense-making in formal mathematics. *For the Learning of Mathematics, 1*(3), 24-35.

Arnau, D. Arevalillo-Herráez, M. y Puig, L. (2011). Características de un sistema tutorial inteligente para la resolución de problemas verbales aritmético-algebraicos. En M. Marín, G. Fernández, L. Blanco y M. Palarea (Eds.). *Investigación en educación Matemática XV*, 257- 266. SEIEM. Ciudad Real.

Balacheff, N. (2001). Symbolic arithmetic vs algebra: The core of a didactical dilemma. En R. Sutherland, T. Rojano, A. Bell y R. Lins (Eds.), *Perspectives on school algebra* (p. 249–260). Dordrecht, the Netherlands: Kluwer Academic Publishers.

Banerjee, R. (2008). *Developing a learning sequence for transiting from arithmetic to elementary algebra*. Ph. D. dissertation Consultado 27/05/2012 en:

http://www.hbcse.tifr.res.in/research-development/ph.d.-thesis/rakhi-synopsis.

Banerjee R, (2011). Is Arithmetic Useful for the Teaching and Learning of Algebra? *SAGE*. Consultado 27/05/2012 en: http://www.sagepublications.com.

Bell, A. (1995). Purpose in school algebra. *Journal of Mathematical Behavior*, *14*(1), 41–73.

Bednarz, N. y Janvier, B. (1996). Emergence and development of algebra as a problem-solving tool: Continuities and discontinuities with arithmetic. En N. Bednarz, C. Kieran y L. Lee (Eds.), *Approaches to algebra: Perspectives for research and teaching*, 115–136. Dordrecht, the Netherlands: Kluwer Academic Publishers.

Blanton, M. L. y Kaput, J. (2005). Characterizing a Classroom Practice that Promotes Algebraic Reasoning. *Journal for Research in Mathematics Education, 36*(5), 412-446.

Breiteig, T. y Grevholm, B. (2006). The transition from arithmetic to algebra: to reason, explain, argue, generalize and justify. En Novotná, J., Moraová, H., Krátká, M. y Stehlíková, N. (Eds.). *Proceedings 30th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, Vol. 2, 225-232. PME. Prague.

Booth, L. R. (1984). *Algebra: Children's strategies and errors*. Windsor, UK: NFER-Nelson.

Booth, L. R. (1999). Children's Difficulties in Beginning Algebra. En B. Moses (Ed.), *Algebraic thinking*. *Grades K-12*. *Readings from NCTM's school-based journals and others publications,* 299-307. Reston, VA: NCTM.

Brizuela, B. M. y Schliemann, A. D. (2003). Fourth graders solving equations. En N. A. Pateman, B. J. Dougherty y J. T. Zilliox (Eds.), *Proceedings of the 27th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education and the 25th Conference of Psychology of Mathematics Education North America*, Vol. 2, 137-144. Honolulu, HI: CRDG, College of Education, University of Hawaii.

Castro, E. (1994). *Exploración de patrones numéricos mediante configuraciones puntuales*. *Estudio con escolares de primer ciclo de secundaria (12-14 años)*. Tesis doctoral. Dto. Didáctica de la Matemática. Universidad de Granada.

Castro, E.; Cañadas, Mª. C. y Molina, M. (2010). El razonamiento Inductivo como generador de conocimiento matemático. *UNO Competencia numérica y cálculo mental,* 55-67.

Cañadas, M.ª C. (2007). *Descripción y Caracterización del Razonamiento Inductivo utilizado por estudiantes de Educación Secundaria al resolver tareas relacionadas con sucesiones lineales y cuadráticas*. Tesis doctoral. Dto. Didáctica de la Matemática. Universidad de Granada.

Carpenter, T. P., Franke, M. L. y Levi, L. (2003). *Thinking mathematically: integrating arithmetic y algebra in elementary school*. Portsmouth: Heinemann.

Carraher, D. W., Schliemann, A. D., Brizuela, B. M. y Earnest, D. (2006). Arithmetic and Algebra in Early Mathematics Education. *Journal for Research in Mathematics Education,* 37 (2), 87-115.

Cerdán, F. (2010). Las igualdades incorrectas producidas en el proceso de traducción algebraico: un catálogo de errores. *PNA*, *4*(3), 99-110.

Dörfler, W. (1991). Forms and Means of Generalization in Mathematics. En A.J. Bishop (Ed.) *Mathematical Knowledge: Its growth through teaching* 63-85. Dordrecht: Kluwer Academic.

Dreyfus, T. y Eisenberg, T. (1982). Intuitive functional concepts: A baseline study on intuitions. *Journal for Research in Mathematics Education,* 13(5), 360-380.

Drijvers, P. y Hendrikus, M. (2003). *Learning algebra in a computer algebra environment: design research on the understanding of the concept of parameter*. Tesis doctoral. Utrecht. Universidad de Utrecht.

Espinosa, M. E. (2004). *Tipologías de resolutores de problemas de álgebra elemental y creencias sobre evaluación con profesores en formación inicial*. Tesis doctoral. Dto. Didáctica de la Matemática. Universidad de Granada.

Esty, W. W. (1992). Language concepts of mathematics. *Focus on Learning Problems in Mathematics 14*(4), 31-53.

Fernández, F (1997). *Evaluación de competencias en álgebra elemental a través de problemas verbales*. Tesis Doctoral. Dto. Didáctica de la Matemática. Universidad de Granada.

Filloy, E. y Rojano, T. (1989). Solving equations: The transition from arithmetic to algebra. *For the Learning of Mathematics, 9*(2), 19–25.

Freudenthal, H., (1983). *Didactical Phenomenology of Mathernatical Structures*. Reidel Publishing Co.: Utrecht.

Fujii, T. (2003). Probing students' understanding of variables through cognitive conflict problems is the concept of a variable so difficult for students to understand? En N. Pateman, G. Dougherty y J. Zilliox (Eds.), *Proceedings of the 27th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education and the 25th Conference of Psychology of Mathematics Education North America*, Vol. 1, 49-66. Honolulu, HI: CRDG, College of Education, University of Hawaii.

Gómez, B. (1995). Los viejos métodos de cálculo un dominio para transitar de la aritmética al álgebra y viceversa. *Suma* 20, 61-68.

Herscovics, N. (1989). Cognitive Obstacles Encountered in the Learning of Algebra. In S.Wagner y K. Kieran (Eds.), *Research Issues in the Learning and Teaching of Algebra,* 60-86. Reston, Virginia: LEA.

Herscovics, N. y Linchevski, L. (1994). Cognitive gap between arithmetic and algebra. *Educational Studies in Mathematics, 27*(1), 59-78.

Herscovics, N. y Kieran, C. (1980). Constructing meaning for the concept of equation. *Mathematics Teacher,* 73(8), 572-580.

Hoch, M. (2003). Structure sense. In M. A. Mariotti (Ed.), *Proceedings of the 3rd Conference for European Research in Mathematics Education (CD)*. Bellaria, Italy: CERME. M. Consultado 18/05/2012 en:

http://www.dm.unipi.it/~didattica/CERME3/proceedings/Groups/TG6/TG6_hoch_cerme3.pdf.

Hoch, M. y Dreyfus, T. (2004). Structure sense in high school algebra: The effect of brackets. En M. J. Høines y A. B. Fuglestad (Eds.), *Proceedings of the 28th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education,* Vol.3, 49-56. Bergen, Norway: Bergen University College.

Kaput, J. (2000). *Transforming algebra from an engine of inequity to an engine of mathematical power by "algebrafying" the K-12 curriculum.* National Center for Improving Student Learning and Achievement in Mathematics and Science, Dartmouth, MA.

Kieran, K. (1989). The Early Learning of Algebra: a Sctructural Perspective. En S. Wagner y K. Kieran (Eds.), *Research Issues in the Learning and Teaching of Algebra,* 33-56. Reston, Virginia: LEA

Kieran, C. (1996). The changing face of school algebra. En C. Alsina, J. Álvarez, B. Hodgson, C. Laborde y A. Pérez (Eds.), *8th International Congress on Mathematical Education: Selected lectures,* 271-290. Sevilla, España: S.A.E.M. Thales

Kieran, C. (2006). Research on the learning and teaching of algebra. A broadening of sources of meaning. En A. Gutiérrez y P. Boero (Eds.), *Handbook of Research on the Psychology of Mathematics Education: Past, Present and Future,* 11-49. Rotterdam: Sense Publishers.

Kieran, C. (1992). The learning and teaching of school algebra. In D. A. Grouws (Ed.), *Handbook of research on mathematics teaching and learning,* 390-419. New York: MacmillanKirshner (1989). The visual syntax of algebra. *Journal for Research in Mathematics Education*. 20(3), 274-284.

Kirshner, D. (1989). The visual syntax of algebra. *Journal for Research in Mathematics Education, 20*(3), 274-287.

Küchemann, D. E. (1981). Algebra. In K.M. Hart, M.L. Brown, D.E. Kuchemann, D. Kerslake, G. Ruddock y M. McCartney (Eds), *Children's understanding of mathematics: 11–16,* 102–119. London: John Murray.

Leinhardt, G., Zaslavsky, O. y Stein, M. K. (1990). Functions, graphs, and graphing: Tasks, learning and teaching. *Review of Educational Research*, 60, 1-64.

Linchevski, L. y Livneh, D. (1999) Structure sense: the relationship between algebraic and numerical contexts. *Educational Studies in Mathematics, 40*(2), 173-196.

Lins, R. y Kaput, J. (2004). The early development of algebraic reasoning: The current state of the field. En K. Stacey, H. Chick y M. Kendal (Eds.), *Proceedings of the 12th ICMI study conference: The future of the teaching and learning of algebra,* 47–70. Dordrecht, The Netherlands: Kluwer Academic Publishers.

Lobato, J., Ellis, A. y Muñoz, R. (2003). How "focusing phenomena" in the instructional environment afford students' generalizations. *Mathematical Thinking and Learning*, 5(3), 1-36.

Lovell, K. (1971). Some aspects of the growth of the concept of a function. En M. F. Rosskopf, L. P. Steffe, y S. Taback (Eds.), *Piagetian cognitive-development research and mathematical education*. Washington, DC: National Council of Teachers of Mathematics.

Lupiáñez, J. L. y Rico, L. (2008). Análisis didáctico y formación inicial de profesores: competencias y capacidades en el aprendizaje de los escolares. *PNA,* 3(1), 35-48.

MacGregor, M. y Stacey, K. (1997). Students' understanding of algebraic notation: 11–15. *Educational Studies in Mathematics, 33*(1), 1–19.

Malara, N. A. (2003). Dialectics between theory and practice: theoretical issues and aspects of practice from an early algebra project. In N.A. Pateman et al. (Eds.), *Proceedings of the 27th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*. Vol.1, 33-48. Honolulu.

Malara, N.A. y Navarra G. (2012). *Promoting an early approach to the algebraic thought in primary and middle school*. Consultado 28/0572012 en:

http://didmat.dima.unige.it/progetti/COFIN/biblio/art_mal/MalNavS01.pdf

Markovits, Z., Eylon, B.-S. y Bruckheimer, M. (1988). Difficulties students have with the function concept. En A. F. Coxford y A. P. Schulte (Eds.), *The ideas of algebra, K-12*. (1988 Yearbook, 43-60. Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.

Martínez, M.ª V. (2011). *Utilización del método geométrico lineal (MGL) para la resolución de problemas de álgebra elemental*. Tesis doctoral. Dto. Didáctica de la Matemática. Universidad de Granada.

Mason, J., Graham, A. y Wilder, J. S. (2005). *Developing thinking in algebra*. Londres, Reino Unido: The Open University.

Miller, C. A., y Smith, B. D. (1994). Assessment of prerequisite Mathematics Vocabulary terms for intermediate and college algebra. *Focus on Learning Problems in Mathematics*, 16(2), 39-50.

Molina, M. (2006). *Desarrollo de pensamiento relacional y comprensión del signo igual por alumnos de tercero de educación primaria*. Tesis Doctoral. Dto. Didáctica de la Matemática. Universidad de Granada. Disponible en:

http://cumbia.ath.cx:591/pna/Archivos/MolinaM07-2822.PDF.

Molina, M. (2007). La integración de pensamiento algebraico en educación primaria. En M. Camacho, P. Flores P. Bolea (Eds.). *Investigación en Educación Matemática XII*, 53-69. SEIEM. La Laguna.

Molina, M. (2012). *Proyecto investigador*. Plaza de Titular de Universidad. Departamento de Didáctica de la Matemática. Universidad de Granada.

Molina, M., Castro, E. y Castro, E. (2009). Elementary students´ understanding of the equal sign in number sentences. *Electronic Journal of Research in Educational, 7(1), 341-368*.

Molina, M., Castro, E., Molina, J. L. y Castro, E. (2011). Un acercamiento a la investigación de diseño a través de los experimentos de enseñanza. *Enseñanza de las Ciencias, 29*(1), 75–88.

Nortes, A. y Nortes, R. (2010). Resolución de Problemas de Matemáticas en las pruebas de acceso a la Universidad. Errores significativos. *Educatio Siglo XXI*, 28(1), 317-342.

Palarea, M.ª M. (1998). *La adquisición del lenguaje algebraico y la detención de errores comunes cometidos en álgebra por los alumnos de 12 a 14 años*. Tesis Doctoral. Tenerife: Universidad de la Laguna.

Radford, L. (2010). Layers of generality and types of generalization in pattern activities. *PNA, 4*(2), 37-62.

Radford, L. (2012). On the development of early algebraic thinking. *PNA*, *6*(4), 117-133.

Rodríguez-Domingo S. (2011). *Traducción de enunciados algebraicos entre los sistemas de representación verbal y simbólica por estudiantes de secundaria*. Trabajo fin de máster. Dto. Didáctica de la Matemática. Universidad de Granada.

Rojano (1994). La matemática escolar como lenguaje. Nuevas perspectivas de investigación y enseñanza. *Enseñanza de las Ciencias,* 12 (1). 45-56.

Ruano, R. M., Socas, M. y Palarea, Mª. M. (2008). Análisis y clasificación de errores cometidos por alumnos de secundaria en los procesos de sustitución formal, generalización y modelización en álgebra. *PNA*, *2*(2), 61-74.

Sfard, A. y Linchevski, L. (1994). The gains and the pitfalls of reification: The case of algebra. *Educational Studies in Mathematics, 26*(2-3), 191-228.

Stacey, K. y MacGregor, M. (2000). Learning the algebraic method of solving problem. *Journal of Mathematical Behavior*, *18*(2), 149–167.

Subramaniam, K. y Banerjee R. (2011). *Early Algebraization*. *A Global Dialogue from Multiple Perspectives*. En Jinfa Cai y Eric Knuth (Eds.). Early Springer Heidelberg Dordrecht London New York.

Socas, M. (2007). Dificultades y errores en el aprendizaje de las matemáticas. Análisis desde el enfoque lógico semiótico. En M. Camacho, P. Flores y P. Bolea (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XI,* 19-52. SEIEM. La Laguna:

Trujillo, P. A., Castro, E. y Molina, M. (2009). Un estudio de casos sobre el proceso de generalización. En M. J. González, M. T. González y J. Murillo (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XIII,* 511-521. SEIEM. Santander:

Ursini, S.; Escareño, F.; Montes, D.; Trigueros, Mª. (2005). *Enseñanza del álgebra elemental*. *Una propuesta alternativa*. México. Trillas.

Usiskin, Z. (1987). Why elementary algebra can, should and must be an eighth-grade course for average students. *Mathematics Teacher*, *80*, 428-438.

Vega-Castro, D. C. (2010). *Sentido estructural manifestado por alumnos de 1º de bachillerato en tareas que involucran igualdades notables*. Trabajo fin de máster, Universidad de Granada. Granada.

Vega-Castro, D., Molina, M., Castro, E. (2011). Estudio exploratorio sobre el sentido estructural en tareas de simplificación de fracciones algebraicas. En M. Marín; G.

Fernández; L. J. Blanco y M.ª M. Palarea (Eds.). *Investigación en Educación Matemática XV*, 575-584. SEIEM. Ciudad Real.

Wagner, S. (1983). What are these things called variables? *Mathematics Teacher,* 76(7), 474-479.

Wagner, S. y Parker, S. (1999). Advancing algebra. En B. Moses (Ed.), *Algebraic Thinking, Grades K-12,* 328-340. Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.

Welder, R. (2006). Prerequisite Knowledge for the Learning of Algebra Hawaii *International Conference on Statistics, Mathematics and Related Fields*. Honolulu, Hawaii. Consultado 27/05/2012 en:

http://www.rachaelwelder.com/files/vitae/Welder_Prereq_Know_Algebra.pdf.