

VALORACIÓN DE RESPUESTAS A PROBLEMAS DE DIVISIÓN-MEDIDA CON FRACCIONES POR ESTUDIANTES PARA MAESTRO

EVALUATION OF RESPONSES OF STUDENT TEACHER TO PROBLEMS WITH FRACTIONS DIVISION-MEASURE

Fernández, C., Callejo, M.L., Márquez, M.

Universidad de Alicante

Resumen

Esta investigación se centra en cómo estudiantes para maestro (EPM) valoran respuestas dadas por alumnos de 6º curso de primaria (11-12 años) a problemas de división-medida con fracciones y que han resuelto previamente. Los resultados muestran que (i) hubo EPM que aunque no resolvieron el problema correctamente sí valoraron adecuadamente la resolución de los alumnos de primaria, y (ii) la tendencia de algunos EPM a valorar mejor una respuesta con resultado correcto y procedimiento con errores que una respuesta con un procedimiento correcto pero con un error en la interpretación del resultado. Los resultados obtenidos constatan la potencialidad de las tareas propuestas para el desarrollo del conocimiento profesional de los EPM.

Abstract

This research focuses on how pre-service teachers (EPM) grade six-grade primary school students' answers to quotitive division word problems involving fractions. These problems have been previously solved by these EPM. Results show that (i) there were EPM that although they were not able to solve problems correctly, they correctly graded primary school students' answers and (ii) the tendency of some EPM to grade better students' answers with a correct result but incorrect procedure than answers with a correct procedure but with an incorrect result. Results illustrate the potential of the proposed tasks to develop pre-service teachers' professional knowledge.

Palabras clave: *Conocimiento del profesor, problemas de división-medida, división de fracciones.*

Key words: *Teacher knowledge, quotitive division word problems, division of fractions*

Introducción

Un aspecto importante en la investigación en educación matemática es identificar los conocimientos necesarios para enseñar matemáticas y cómo se relacionan entre sí (Llinares y Krainer, 2006). La caracterización de estos conocimientos emerge de identificar las tareas profesionales del profesor de matemáticas (Llinares, 2009): (a) planificar y organizar el contenido matemático para enseñar; (b) gestionar el contenido matemático en el aula; y (c) analizar, interpretar y valorar las producciones matemáticas de los alumnos. Una aportación clave en la identificación de los conocimientos necesarios para enseñar ha sido la de Shulman (1989) que distingue entre “conocimiento de la materia” y “conocimiento de contenido pedagógico”. Esta última expresión se ha utilizado para referirse a diversos aspectos relacionados con la disciplina a enseñar y con la enseñanza, por lo que es necesario un desarrollo teórico específico en el área de matemáticas en contenidos concretos. En esta comunicación nos centramos en el conocimiento del profesor sobre los problemas de estructura multiplicativa (Vergnaud, 1997), en concreto problemas de división-medida con fracciones.

Diversas investigaciones se han centrado en el “conocimiento de matemáticas” de los estudiantes para maestro (EPM) necesario para resolver problemas de división-medida. Estas investigaciones han revelado deficiencias y lagunas. Por ejemplo, Graeber, Tirosh y Glover (1986) señalaron que los EPM tendían a interpretar la división sólo como división-partitiva, es decir reparto de un conjunto de objetos de forma equitativa entre un número de grupos, y tenían dificultades en las situaciones en las que la división tenía el significado de división-medida, es decir determinar cuántos grupos de un tamaño determinado se pueden formar con un número dado de objetos; en el caso de la división-partitiva el cociente es el número de objetos que hay en cada grupo y en el caso de la división-medida el cociente es el número de grupos que se han formado. Ball (1990) encontró que los EPM tenían dificultades con el significado de la división de fracciones ya que muchos de ellos sólo eran capaces de interpretar la división en términos de reparto, que no es válida en situaciones en que el divisor es una fracción que tiene el significado de división-medida. Nillas (2003) describió las estrategias que utilizan los EPM para resolver problemas de división con fracciones y mostró que la habilidad de los EPM para resolver esta tarea no implicaba que tuvieran una comprensión conceptual del tópico, que se mostró también en el poco éxito que tuvieron en la formulación de problemas. Osana y Royea (2011) diseñaron una intervención con EPM centrada en las fracciones; sus resultados revelaron una mejora en el conocimiento conceptual, pero no en la capacidad de formular problemas. Asimismo identificaron en los participantes algunos obstáculos de tipo cognitivo cuando trataban de construir soluciones y representarlas simbólicamente.

En cuanto al “conocimiento de contenido pedagógico” Tirosh (2000) diseñó un curso para mejorar el conocimiento de los EPM sobre la división de fracciones. Antes de la intervención la mayoría de los EPM eran capaces de dividir fracciones pero no sabían explicar por qué funcionaba el algoritmo y atribuían las causas de las respuestas incorrectas que suelen tener los alumnos a dificultades de comprensión lectora o de aplicación del algoritmo. Sin embargo, al final del curso los EPM supieron identificar otras causas de los errores más comunes que se cometen como la interpretación de la división como reparto o una limitada concepción del concepto de fracción o de las propiedades de las operaciones.

Estas investigaciones previas están centradas en el conocimiento de los EPM en el ámbito de la división de fracciones pero aportan poca información sobre cómo valoran

las producciones de los estudiantes en estos problemas, que es un aspecto del conocimiento de contenido pedagógico, ya que los EPM deben identificar la estrategia seguida por los estudiantes y las dificultades. En este contexto nuestra pregunta de investigación es:

- ¿Qué conocimientos utilizan los EPM cuando valoran respuestas dadas por alumnos de 6° curso de primaria a un problema de división-medida con fracciones que previamente han resuelto?

Método

Participantes

Los participantes fueron 79 EPM del primer curso de un programa de formación de “Maestro de Primaria”. El estudio se realizó antes de la enseñanza de los tópicos sobre problemas de estructura multiplicativa. Los EPM resolvieron cuatro problemas de división-medida y luego se les pidió que valoraran las respuestas dadas por alumnos de primaria a estos mismos problemas.

Instrumentos

El Cuestionario 1 está formado por cuatro problemas de diferentes características que fueron seleccionados y modificados de otras investigaciones ya que ponen de manifiesto algunas dificultades que alumnos de 10-14 años tienen en su resolución. Estos problemas pueden ser resueltos mediante el algoritmo de la división o por otros métodos alternativos como sumas o restas repetidas, estrategias constructivas o utilizando representaciones gráficas. En el Cuestionario 2 se presentaban cuatro respuestas de alumnos de primaria a cada uno de los problemas. Para su elaboración los problemas del Cuestionario 1 fueron resueltos por un grupo de estudiantes de 6° curso (11-12 años).

En este estudio presentamos los resultados obtenidos en el problema *Pasteles* de división-medida ya que permite mostrar características de la relación entre el conocimiento de los EPM puesto de manifiesto en la resolución del problema y su valoración de las respuestas dadas por los alumnos de primaria:

Tengo cuatro pasteles. Quiero dar tres quintos de pastel a cada niño.

- *¿A cuántos niños puedo dar?*
- *¿Qué me sobra?*

Las respuestas de los estudiantes de primaria al problema *Pasteles* se seleccionaron atendiendo a las estrategias de resolución y a los errores identificados en las investigaciones (Figura 1). Una de ellas es correcta (respuesta D con representación gráfica) y las otras tienen diferentes tipos de errores (Tirosh, 2000). La respuesta A utiliza una representación gráfica, tiene un error de conteo y lo que sobra “3 trozos” no se expresa como fracción, además $3/5$ no puede ser el resto porque es igual al divisor; en la respuesta B se opera correctamente con fracciones pero “lo que sobra” no se expresa en relación a las partes en que se divide la unidad (quintos); en la respuesta C se invierten los términos de la división como si esta operación tuviese la propiedad conmutativa y además se aplica mal el algoritmo, pero ambos errores se neutralizan y se obtiene un resultado correcto.


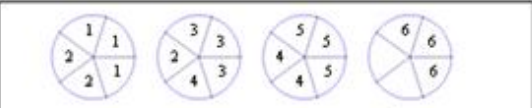
<p>Respuesta A</p>  <p>"Le puedo dar a 6 niños y me sobran 3 trozos"</p>	<p>Respuesta B</p> $4 \div \frac{3}{5} = \frac{4 \times 5}{3} = \frac{20}{3}$ $\begin{array}{r} 20 \overline{) 3} \\ \underline{2} \\ 6 \end{array}$ <p>"Puedes dar a 6 niños y sobran $\frac{2}{3}$"</p>
<p>Respuesta C</p> $\frac{3}{5} \div \frac{4}{1} = \frac{20}{3}$ $\begin{array}{r} 20 \overline{) 3} \\ \underline{2} \\ 6 \end{array}$ <p>"Le doy a 6 niños y sobran $\frac{2}{5}$ de pastel"</p>	<p>Respuesta D</p>  <p>"Le puedo dar a 6 niños y me sobran $\frac{2}{5}$ de pastel"</p>

Figura 1. Respuestas dadas por estudiantes de primaria y seleccionadas en el problema *Pasteles* y que formaban parte del Cuestionario 2

Los EPM resolvieron los cuatro problemas del Cuestionario 1 y 15 días más tarde respondieron al Cuestionario 2 donde debían valorar las respuestas dadas por los alumnos de primaria dándoles una puntuación: 1 punto si consideraban que la respuesta era *totalmente correcta*, 0 puntos si pensaban que la respuesta era *absolutamente incorrecta*, y 0.5 puntos si consideraban la respuesta *parcialmente correcta* y justificar su valoración. Dispusieron de 50 minutos para responder cada uno de los cuestionarios y se les explicó el objetivo del estudio y la forma de responder.

Análisis

Las respuestas de los EPM al problema *Pasteles* en el Cuestionario 1 fueron clasificadas como correctas cuando tanto el procedimiento como la respuesta eran correctos con independencia del método utilizado; como regulares cuando los EPM realizaban un procedimiento correcto e indicaban a cuánto niños se puede dar pero decían que sobraban "2 trozos" o "2 tercios de pastel" o cuando dividían un gráfico en partes no congruentes pero razonaban correctamente; y como incorrectas cuando no interpretaban bien el enunciado o la respuesta no tenía sentido (Figura 2).

En relación al Cuestionario 2, se hizo un análisis de las justificaciones dadas por los EPM a la valoración utilizando categorías que se obtuvieron mediante un análisis inductivo en un estudio previo (Márquez, Callejo, Fernández, 2011): justificaciones basadas en la *corrección* (del método, la ejecución o el resultado), en la *competencia* o en la *explicación* del método empleado.

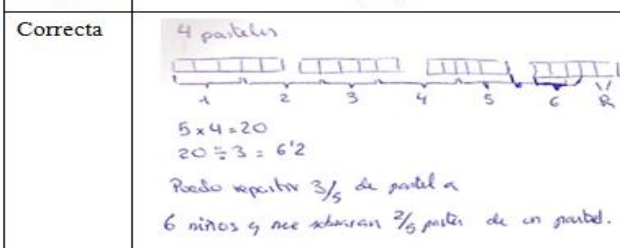
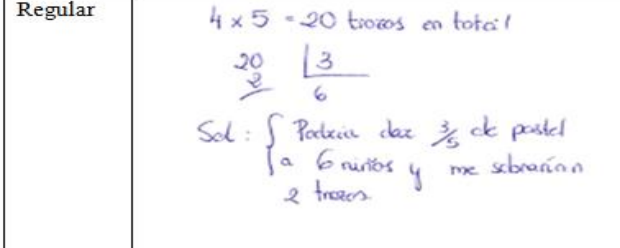
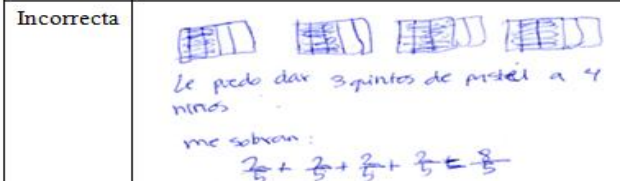
Respuesta	Ejemplos	
Correcta	 <p>4 pasteles</p> <p>$5 \times 4 = 20$ $20 \div 3 = 6 \frac{2}{3}$</p> <p>Puedo repartir $\frac{3}{5}$ de pastel a 6 niños y me sobran $\frac{2}{5}$ partes de un pastel.</p>	El EPM hace una representación gráfica dividiendo la unidad (cada pastel) en cinco partes congruentes. Responde correctamente que puede dar pastel a 6 niños y que sobran $\frac{2}{5}$ del pastel
Regular	 <p>$4 \times 5 = 20$ trozos en total</p> <p>$\frac{20}{3} = 6$</p> <p>Sol: } Puedo dar $\frac{3}{5}$ de pastel a 6 niños y me sobran 2 trozos.</p>	El EPM realiza correctamente una división e indica correctamente que puede darles $\frac{3}{5}$ del pastel a 6 niños. Sin embargo señala que quedan 2 trozos en lugar de indicar que quedan $\frac{2}{5}$ del pastel.
Incorrecta	 <p>Le puedo dar $\frac{3}{5}$ partes de pastel a 4 niños.</p> <p>me sobran:</p> <p>$\frac{2}{5} + \frac{2}{5} + \frac{2}{5} + \frac{2}{5} = \frac{8}{5}$</p>	El EPM utiliza un procedimiento sin sentido

Figura 2. Categorización de respuestas de los EPM al problema *Pasteles* (Cuestionario 1)

Resultados

Describimos los resultados en dos apartados: (1) resolución por parte de los EPM del problema *Pasteles*, (2) relación entre la resolución del problema (Cuestionario 1) y la valoración dada a las respuestas de los alumnos de primaria (Cuestionario 2).

Resolución del problema *Pasteles*

La Tabla 1 muestra el número de EPM que resolvió el problema correctamente, regular o incorrectamente y el método de resolución seguido: gráfico, aritmético (con o sin fracciones), o cuando usaban dos métodos (uno gráfico y otro aritmético).

Tabla 1. Resolución del problema *Pasteles* y métodos empleados

	Gráfico	Aritmético		Dos métodos	Total	%
		Fracciones	Sin fracciones			
Correcta	26	3	8	7	44	55.7
Regular	5	3	5	3	16	20.2
Incorrecta	9	6	4	0	19	24.1
Total	40	12	17	10	79	

Los EPM prefirieron los métodos gráficos a los aritméticos y tuvieron más éxito en la resolución del problema cuando aplicaron métodos gráficos (26 de 40, 65.0%) que cuando usaron métodos aritméticos (11 de 29, 37.9%). Los EPM que tuvieron más éxito fueron los que emplearon dos métodos (7 de 10, 70%).

Los 40 EPM que lo hicieron de forma gráfica representaron los pasteles mediante un rectángulo o un círculo. Los 12 EPM que operaron con fracciones lo hicieron de tres formas: dividiendo 4 entre $\frac{3}{5}$; con sumas repetidas de $\frac{3}{5}$ hasta aproximarse a 4 por defecto; o restando repetidamente $\frac{3}{5}$ a 4 hasta obtener un valor inferior a $\frac{3}{5}$. Sólo 3 de

ellos (25%) lo hicieron de forma correcta. Otros métodos aritméticos sin utilizar fracciones fueron dividir 20 (quintos) entre 3 (quintos), transformar $3/5$ en 0.6 y dividir 4 entre 0.6. Casi la mitad lo hicieron correctamente (8 de 17, 47%) obteniendo por tanto más éxito que los que operaron con fracciones. De los 10 que emplearon dos métodos, 5 utilizaron fracciones.

Relación entre la resolución del problema por parte de los EPM y su valoración de las respuestas de los estudiantes de Primaria

La Tabla 2 muestra el número de EPM que resolvieron de manera correcta, regular o incorrecta el problema *Pasteles* (Cuestionario 1) y las puntuaciones que dieron a las respuestas dadas por los alumnos de primaria (Cuestionario 2).

Tabla 2. Respuestas de los EPM al problema *Pasteles* (Cuestionario 1) y puntuaciones de las respuestas dadas a las respuestas de los alumnos de primaria

Resoluciones de los EPM (Cuestionario 1)	Valoraciones dadas por los EPM a las respuestas de los estudiantes de primaria (Cuestionario 2)											
	Respuesta A (Gráfico con error)			Respuesta B (División correcta. Interpretación resto incorrecto)			Respuesta C (División con dos errores compensados. Resultado correcto)			Respuesta D (Gráfico correcto)		
	1	0.5	0	1	0.5	0	1	0.5	0	1	0.5	0
Correctas (44)*	3	29	12	9	28	7	29	9	6	38	4	2
Regulares (16)	0	14	2	3	9	4	11	2	3	13	3	0
Incorrectas (19)	0	14	5	3	16	0	13	4	2	19	0	0
Total 79	3	57	19	15	53	11	53	15	11	70	7	2

*El número que aparece entre paréntesis en las respuestas de los EPM al Cuestionario 1 son el número de EPM que dio una respuesta correcta, regular o incorrecta.

Un alto porcentaje de EPM valoraron la respuesta D como correcta (70 de 79; 88.6%). 38 de ellos lo habían resuelto correctamente, 19 EPM de forma incorrecta y 13 regular. Por tanto hubo EPM que aunque no fueron capaces de resolver el problema correctamente o de dar una explicación explícita de lo que sobraba sí valoraron como correcta esta respuesta de los alumnos de primaria. Por otra parte, de los 44 EPM que resolvieron correctamente el problema, 6 puntuaron esta respuesta con 0.5 o 0. Estos EPM consideraron que aunque el resultado era *correcto*, los alumnos deberían haber operado con fracciones, es decir, apuntaban que la estrategia utilizada *no era competente* al usar gráficos: “*Lo ha realizado correctamente, no obstante la dificultad residía en operar con números fraccionarios*”.

La respuesta A en forma gráfica con error fue puntuada con un 0 por 19 de los 79 EPM y con un 0.5 por 57 de los 79. La mayoría argumentaron que *el resultado era incorrecto* “*Solución incorrecta ya que sobran $2/5$ trozos*”. Este grupo de EPM tuvo en cuenta en su valoración la manera en la que el estudiante de educación primaria expresaba la cantidad que representaba “lo que sobraba”.

En cuanto a las respuestas B y C en las que se opera con fracciones, la mayoría de los EPM valoró la B con 0.5 y la C con 1, aunque C tenía más errores pero el *resultado*

era correcto. Los que puntuaron la respuesta B con 0.5 advirtieron el error de interpretación de las partes en que se divide la unidad y consideraron que la *estrategia/planteamiento utilizado era correcto*. Los que puntuaron con 1 la respuesta C dijeron que tanto la estrategia utilizada como el resultado eran *correctos*: “*La estrategia y la solución son correctas y le doy la máxima nota ya que ha entendido el problema y además ha efectuado las operaciones correctas para solucionarlo*”. Estos EPM focalizaron su atención en que la solución de *la respuesta C era correcta* pero no advirtieron los dos errores en el procedimiento (inversión de términos y algoritmo).

Por otra parte 11 EPM puntuaron la respuesta B con un 0 argumentando que *el resultado no era correcto*: “*El resultado de la operación o conclusión a la que llega no es correcta*”, pero sin indicar que el todo se había dividido en 5 partes y por tanto lo que sobraban no podían ser tercios. Es posible que esta constatación se debiera más al contexto en que se hacía la pregunta, con otras respuestas y una de ellas fácilmente comprensible y correcta (D), que a la comprensión por parte de estos EPM del significado de los términos de una fracción. En otro contexto quizá no se hubiera advertido de forma tan clara el error de interpretación que comete el alumno de primaria. Lo relevante en este dato es que la valoración dada por los EPM se apoyaba en la *corrección o no de la respuesta* sin considerar el procedimiento seguido por los estudiantes de educación primaria.

15 EPM puntuaron la respuesta C con un 0.5 argumentando que *la solución era correcta* y advirtiendo solo un error, ya sea en el algoritmo: “*Lo he calificado con 0.5 porque pese a que la solución es correcta, en la operación de división hay un error puesto que en una división de fracciones no se multiplica así*”, ya sea la inversión de los términos: “*El resultado es correcto. La división de la fracción sería $4:3/5$, pero al final el resultado lo hace correcto*”.

Finalmente 11 EPM puntuaron la respuesta C con un 0 dando a veces las mismas razones que los que puntuaron con 0.5: “*Está mal porque ha dividido lo que tiene que dar a cada persona entre las personas que hay. Después se habrá dado cuenta que $3:20$ no podía ser y lo ha puesto bien, el resultado le da bien pero el planteamiento que es lo que importa está mal*”; sólo 2 de ellos advirtieron los dos errores cometidos. En este caso la valoración se apoyaba en la *no corrección del procedimiento* seguido y no en el resultado obtenido.

Conclusiones y discusión

Esta investigación se enmarca en la línea del conocimiento necesario para enseñar matemáticas (Linares, 2009; Shulman, 1989). El foco específico ha sido qué conocimiento emplean los EPM cuando valoran respuestas de estudiantes de 6º curso de primaria a un problema de división-medida con fracciones.

Los resultados han mostrado que la mayoría de EPM basó sus justificaciones de las valoraciones de las respuestas en la *corrección* o no del método y del resultado; sólo 6 EPM que lo resolvieron correctamente hicieron mención a la *competencia* del procedimiento y ninguno hizo alusión a la *explicación* del procedimiento para justificar la puntuación. La falta de referencia a la competencia de los distintos procedimientos contrasta con el resultado obtenido en otro trabajo similar con problemas de división-medida con números naturales, donde un gran número de EPM consideraron que los métodos alternativos como sumas o restas repetidas o constructivos eran poco competentes (Márquez, Callejo y Fernández, 2011). Ello se puede explicar por el comportamiento de los EPM en el Cuestionario 1 pues la mayoría usaron métodos

gráficos, sólo 12 de 79 operaron con fracciones y de ellos únicamente 3 lo hicieron correctamente; esto les pudo llevar a considerar que los diferentes métodos empleados por los alumnos de 6° de primaria eran igualmente competentes.

Por otra parte todos los EPM que resolvieron incorrectamente el problema y un buen número de los que lo resolvieron regular fueron capaces de identificar la respuesta correcta (D), pero sin embargo no siempre supieron identificar errores en los procedimientos empleados en otras respuestas, en particular en la C donde el alumno llegaba a un resultado correcto.

En efecto, los EPM valoraron mayoritariamente la respuesta incorrecta (C) con un 1 pues basaron su justificación en la *corrección del resultado* sin tener en cuenta el procedimiento erróneo seguido. Esta manera de valorar la respuesta de los estudiantes de primaria fue independiente de que los EPM hubieran resuelto bien, regular o mal el problema. Este hecho se puede interpretar de dos formas: en primer lugar porque sus conocimientos sobre la división de fracciones eran insuficientes para advertir los errores cometidos, ya que sólo 2 EPM advirtieron los dos errores cometidos. En este sentido, como ya se ha dicho, es especialmente llamativo constatar que de los 44 EPM que resolvieron correctamente el problema, 29 puntuaron con 1 esta respuesta, lo que pone de manifiesto que saber resolver correctamente un problema (conocimiento de matemáticas) no es suficiente para poder valorar adecuadamente las respuestas de los alumnos (conocimiento de contenido pedagógico relativo a la didáctica de la matemática), pues es preciso conocer distintos procedimientos de resolución así como los errores más comunes que cometen los alumnos (Tirosh, 2000). Otra posible interpretación que damos apoyada en otros trabajos (Callejo y Vila, 2009), es que los EPM pudieron considerar suficiente revisar el resultado debido a la creencia de que “en la resolución de un problema el resultado es más importante que el proceso”. Esta segunda interpretación pone de manifiesto el papel de las creencias sobre la resolución de problemas en el proceso de interpretar las respuestas dadas por los estudiantes de educación primaria sobre el que se apoya la valoración realizada, y se refuerza por el hecho de que un mayor número de EPM haya valorado como correcta la respuesta C que la B, ambas con división de fracciones pero mientras en C hay dos errores y el resultado es correcto, en B la división es correcta pero es erróneo el resultado de lo que sobra.

Estos resultados tienen implicaciones para la formación de maestros. En primer lugar muestran la potencialidad de las tareas propuestas para iniciar el desarrollo del conocimiento profesional de los EPM y, en particular, de la competencia para valorar las respuestas de los alumnos de educación primaria. En segundo lugar, la necesidad de considerar perspectivas de formación que incidan no solo en el conocimiento de la materia (comprensión matemática) de los EPM, sino también en el conocimiento pedagógico relativo a la didáctica de la matemática necesario para enseñar matemáticas en la educación primaria. En el contexto de este estudio, el desarrollo de la competencia para valorar las respuestas de los estudiantes implica que los EPM tengan en cuenta el grado de comprensión de los alumnos de primaria del significado de la división, las formas de representación de las fracciones, el nivel de dominio del algoritmo de la división a lo largo de la educación primaria, los errores y las dificultades más comunes y sus causas (Tirosh, 2000).

Reconocimientos

Esta investigación ha recibido el apoyo del Ministerio de Ciencia e Innovación, Secretaria de Estado de Investigación (España) a través del proyecto EDU2011-27288 y de la Universidad de Alicante (España) con el proyecto GRE10-10.

Referencias

- Ball, D.L. (1990). Prospective elementary and secondary teachers' understanding division. *Journal for Research in Mathematics Education*, 21(2), 132-144.
- Callejo, M.L. y Vila, A. (2009). Approach to mathematical problem solving and students' belief systems: two case studies. *Educational Studies in Mathematics*, 72(1), 11-126.
- Graeber, A. O., Tirosh, D., y Glover, R. (1986). Preservice teachers' misconceptions in solving verbal problems in multiplication and division. *Journal for Research in Mathematics Education*, 20(1), 95-102.
- Llinares, S. (2009). Competencias docentes del maestro en la docencia en matemáticas y el diseño de programas de formación. *UNO. Revista de Didáctica de las Matemáticas*, 51, 92-101
- Llinares, S. y Krainer, K. (2006). Mathematics (student) teacher and teacher educator as learners. En: A. Gutiérrez y P. Boero (Eds.), *Handbook of Research on the Psychology of Mathematics Education: Past, Present and Future* (pp. 429-459). Rotterdam: Sense Publishers
- Márquez, M., Callejo, M.L. y Fernández, C. (2011). Cómo estudiantes para maestro interpretan soluciones de alumnos de primaria a problemas de división con resto. En M. Marín, G. Fernández, L. Blanco y M. Palarea (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XV* (pp. 417-427). Ciudad Real: SEIEM.
- Nillas, L. (2003). Division of fractions: Preservice teachers' understanding and use of problem solving strategies. *The Mathematics Educator*, 7(2), 96-113.
- Osana, H.P. y Royea, D.A. (2011). Obstacles and challenges in preservice teachers' explorations with fractions: A view from a small-scale intervention study. *Journal of Mathematical Behavior*, 30, 333-352.
- Shulman, L. S. (1989). Paradigmas y programas de investigación en el estudio de la enseñanza: Una perspectiva contemporánea. En M.C. Wittrock (Ed.), *La investigación de la enseñanza, I. Enfoques, teorías y métodos* (pp. 9-91). Barcelona: Paidós/MEC.
- Tirosh, D. (2000). Enhancing prospective teachers' knowledge of children's conceptions: The case of division of fractions. *Journal for Research in Mathematics Education*, 31(1), 5-25.
- Vergnaud, G. (1997). *El niño, la matemática y la realidad*. México: Trillas.