LA ENCAPSULACIÓN DE PROCESOS EN OBJETOS ANALIZADA DESDE LA PERSPECTIVA DEL ENFOQUE ONTOSEMIÓTICO

LOOKING THE ENCAPSULATION OF PROCESSES INTO OBJECTS FROM THE ONTOSEMIOTICAL APPROACH

Font, V. (1), **Badillo, E.** (2), **Trigueros, M.** (3), **Rubio, N.** (4)

Universitat de Barcelona (1), Universitat Autónoma de Barcelona (2), Instituto Tecnológico Autónomo de México (3), Pontificia Universidad Católica del Perú (4)

Resumen

En este trabajo, después de un breve resumen del APOE y del EOS, se analiza una descomposición genética de la derivada, realizada usando los constructos teóricos del APOE, desde la perspectiva del EOS. La mirada realizada desde el EOS se focaliza en la encapsulación de procesos en objetos que, según el APOE, se realiza en dicha descomposición genética. Esta mirada nos permite concluir que la manera de conceptualizar la encapsulación de procesos en objetos en el APOE no informa sobre la naturaleza del objeto que ha emergido ni de sus cambios de naturaleza.

Abstract

In this paper, after a brief overview of the APOS and the OSA, we analyze a genetic decomposition of the derivative, performed using the theoretical constructs of APOS, from the perspective of OSA. This OSA perspective focuses on the encapsulation of processes into objects that, according to the APOS, is performed in such genetic decomposition. This view allows us to conclude that the way to conceptualize the encapsulation of processes into objects in the APOS does not report the nature of the object that has emerged neither its changes of nature.

Palabras clave: *Encapsulación, objeto matemático, teoría APOE, Enfoque Ontosemiótico.*

Key words: *Encapsulation, mathematical object, APOS theory, Ontosemiotical Approach.*

Font, V., Badillo, E., Trigueros, M., Rubio, N. (2012). La encapsulación de procesos en objetos analizada desde la perspectiva del enfoque ontosemiótico. En A. Estepa, Á. Contreras, J. Deulofeu, M. C. Penalva, F. J. García y L. Ordóñez (Eds.), Investigación en Educación Matemática XVI (pp. 239 - 247). Jaén: SEIEM

Introducción

Actualmente en el área de Educación Matemática la conexión entre diferentes marcos teóricos es un tópico que está recibiendo una atención considerable (Prediger, Bikner-Ahsbahs y Arzarello, 2008). En esta línea, se han publicado trabajos que se han interesado por la conexión entre la Teoría APOE y el Enfoque Ontosemiótico (EOS) (Font, Montiel, Vidakovic y Wilhelmi, 2011). Dicho interés se relaciona con la necesidad de un desarrollo del APOE con aportes de teorías semióticas (Badillo, Azcárate y Font, 2011; Trigueros y Martínez-Planell, 2010). En este trabajo se pretende profundizar en la conexión entre ambas teorías, para ello se analiza, desde la perspectiva del EOS, una descomposición genética de la derivada realizada usando los constructos teóricos del APOE. Esta mirada permite concluir que la manera de conceptualizar la encapsulación de procesos en objetos en el APOE no informa sobre la naturaleza del objeto que ha emergido ni de sus cambios de naturaleza.

El esquema que seguimos es el siguiente, después de esta introducción, en la sección dos se hace un resumen de las dos teorías consideradas, enfatizando el uso del término objeto que se hace en ellas. En la sección tres se propone una descomposición genética de la derivada, que se usa como contexto de reflexión. En la sección 4 se reflexiona sobre el proceso de encapsulación que se realiza en dicha descomposición genética desde el punto de vista del EOS. En la sección 5 se coordinan las dos teorías en el análisis del mecanismo de encapsulación.

Marcos teóricos

A continuación sigue un breve resumen del APOE y del EOS, enfatizando el uso del término objeto que se hace en cada una de ellas

Enfoque Ontosemiótico

La figura 1 (Font y Contreras, 2008, p. 35) muestra algunas de las nociones teóricas propuestas por el EOS. En este enfoque la actividad matemática juega un papel central y es modelada en términos de sistema de prácticas operativas y discursivas. A partir de las prácticas emergen los diferentes tipos de objetos primarios (lenguaje, definiciones, procedimientos, proposiciones, problemas y argumentos) organizándose en configuraciones epistémicas o cognitivas, según se adopte un punto de vista institucional o personal (hexágono interior de la figura 1).

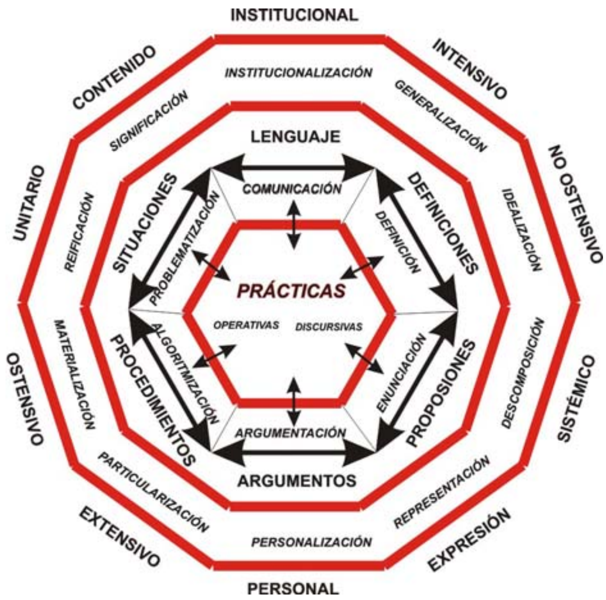

Figura 1. Representación ontosemiótica del conocimiento matemático

Los problemas contextualizan y desencadenan la actividad matemática; el lenguaje (notaciones, gráficos, etc.) representa a las otras entidades y sirve como herramienta para la acción; los argumentos justifican los procedimientos y las proposiciones que relacionan las definiciones. Finalmente, estos objetos primarios que emergen de las practicas matemáticas, según el juego de lenguaje que se considera se pueden mirar desde cinco facetas duales (decágono exterior de la figura 1): personal/institucional, unitario/sistémico, expresión/contenido, ostensivo/no-ostensivo y extensivo/intensivo. Tanto las dualidades como los objetos primarios se pueden analizar desde la perspectiva proceso-producto, lo cual nos lleva a los procesos de la figura 1.

La emergencia de los objetos en el EOS

En Font, Godino y Gallardo (2012) se explica cómo se entiende en el EOS la emergencia de los objetos matemáticos a partir de las prácticas. Resumimos brevemente a continuación dicho proceso. Según estos autores, el proceso por el cual los objetos matemáticos emergen a partir de las prácticas es complejo y en él deben ser distinguidos dos niveles. En un primer nivel, emergen representaciones, definiciones, proposiciones, procedimientos, problemas y argumentos (objetos primarios). Con relación a la naturaleza de dichos objetos, en el EOS, de acuerdo con la filosofía convencionalista de las matemáticas de Wittgenstein, se considera que el tipo de existencia de las definiciones, proposiciones y procedimientos es el que tienen las reglas convencionales. Desde este punto de vista, los enunciados matemáticos son reglas (gramaticales) para el uso de cierto tipo de signos porque de hecho se usan como reglas. No describen propiedades de objetos matemáticos con algún tipo de existencia independiente de las personas que quieren conocerlos y del lenguaje que se usa para conocerlos, aunque lo pueda parecer.

Aunque en el EOS se adopta un punto de vista convencionalista sobre la naturaleza de los objetos matemáticos no se ignora que implícitamente se está sugiriendo, en los procesos de enseñanza, una visión descriptiva/realista de las matemáticas. Para poder explicar cómo se genera dicha visión es necesario considerar un segundo nivel de emergencia en el que emerge un objeto matemático, por ejemplo el objeto función, que es considerado como un objeto que se representa por diferentes representaciones, que puede tener varias definiciones equivalentes, que tiene propiedades, etc.

Para explicar cómo emergen los objetos primarios, resulta útil la metáfora "subir una escalera". Cuando se sube una escalera siempre se está apoyado en un pie, pero cada vez el pie está en un escalón superior. La práctica matemática se puede considerar como "subir una escalera". El escalón en el que nos apoyamos para realizar la práctica es una configuración de objetos primarios ya conocida, mientras que el escalón superior al que accedemos, como resultado de la práctica realizada, es una nueva configuración de objetos en la que alguno (o algunos) de dichos objetos no era conocido antes. Los nuevos objetos primarios aparecen como resultado de la práctica matemática y se convierten en objetos primarios institucionales gracias, entre otros procesos considerados en la figura 1 (incluyendo reificación e idealización), a procesos de institucionalización.

La segunda emergencia es el resultado de diferentes factores. Los principales son los siguientes: 1) El discurso sobre las matemáticas que, de manera explícita o implícita, envía a los alumnos el mensaje de que las matemáticas son una ciencia "cierta", "verdadera" u "objetiva". 2) El éxito predictivo de las ciencias que usan las matemáticas, se utiliza, de manera explícita o implícita, como argumento para avalar la existencia de los objetos matemáticos. 3) La simplicidad que se deriva de la postulación de la existencia de los objetos matemáticos. Su postulación está justificada por ventajas prácticas, en especial simplifica la teoría matemática que se está estudiando. Resulta muy cómodo considerar que existe un objeto matemático que es representado por diferentes representaciones, que se puede definir por varias definiciones equivalentes, que tiene propiedades, etc. 4) La metáfora objetual, la cual siempre está presente en el discurso matemática ya que en él las entidades matemáticas se presentan como "objetos con propiedades". En el discurso matemático es habitual el uso de determinadas expresiones metafóricas que sugieren que los objetos matemáticos son objetos preexistentes descubiertos; nos referimos a palabras del tipo "describir", "hallar", etc. 5) El discurso sobre objetos ostensivos que representan objetos no ostensivos. En el discurso matemático es posible (a) hablar sobre objetos ostensivos que representan objetos no ostensivos que no existen (por ejemplo, se puede decir que $f'(a)$ no existe porque la gráfica de $f(x)$ tiene forma de punta en $x = a$); y (b) diferenciar un objeto matemático de una de sus representaciones (por ejemplo, distinguir entre la función y su gráfica). Ambos aspectos llevan a los estudiantes a interpretar a los objetos matemáticos como algo diferente a sus representaciones ostensivas.

Estos cinco factores generan, implícitamente o explícitamente, la visión descriptiva - realista de las matemáticas que considera (1) que las proposiciones matemáticas describen propiedades de objetos matemáticos y (2) que dichos objetos tienen algún tipo de existencia independiente de las personas que los conocen y del lenguaje que se usa para conocerlos. Dicha visión resulta difícil de evitar ya que las razones que llevan a generarla están actuando constantemente y de manera muy sutil. Más que una posición filosófica asumida conscientemente, se trata de una forma de entender los objetos matemáticos que está presente de manera implícita.

La teoría APOE

APOE es un acrónimo de las iniciales de los términos: acciones, procesos, objetos y esquemas, que son las construcciones mentales que, en según esta teoría, un sujeto realiza para construir conceptos matemáticos. Una *acción* es una transformación de objetos que el sujeto percibe como algo externo y se lleva a cabo como reacción a una indicación que da información precisa sobre los pasos que se van a realizar. Cuando una acción se repite y el individuo reflexiona sobre ella, ésta puede *interiorizarse* en un *proceso*. El *proceso* es una transformación basada en una construcción interna, ya no dirigida por estímulos externos al individuo, de forma que éste puede describir los pasos involucrados en la transformación e incluso invertirlos. Los *objetos* se pueden construir cuando un sujeto reflexiona sobre las operaciones aplicadas a un proceso en particular, toma conciencia del proceso como un todo, realiza aquellas transformaciones (ya sean acciones o procesos) que pueden actuar sobre él, y puede construir de hecho esas transformaciones. Entonces está pensando en este proceso como un *objeto*. En este caso, el proceso se ha *encapsulado* en un *objeto*. Procesos y objetos se relacionan en virtud de que los primeros actúan sobre los segundos. Una colección de procesos y objetos puede ser organizada en una manera estructurada para formar *esquemas* (Dubinsky y McDonald, 2001). Un esquema para un determinado concepto matemático es una colección de acciones, procesos, objetos y otros esquemas conectados de manera consciente o inconsciente en un marco coherente en la mente del sujeto. La propuesta teórica APOE, permite delimitar y describir el camino hacia la construcción, de un concepto matemático, en la mente de un sujeto. La descripción teórica de los pasos que ha de seguir esta construcción se llama *descomposición genética (DG).*

Los objetos en el APOE

En la teoría APOE el mecanismo de encapsulación y desencapsulación juega un papel muy importante en la emergencia de objetos, los cuales son integrados en esquemas que, a su vez, pueden ser convertidos en objetos mediante otro mecanismo llamado tematización. Esta caracterización de la emergencia de objetos matemáticos proviene básicamente de la tradición psicológica, en particular son un extensión del trabajo de Piaget sobre la abstracción reflexiva al pensamiento matemático avanzado.

Propuesta de una descomposición genética para la derivada

A continuación sigue la DG de la derivada que los autores hemos realizado a partir de las DG propuestas en Asiala, Cottrill, Dubinsky y Schwingendorf (1997) y Badillo (2003). Esta descomposición se ha realizado utilizando únicamente los constructos teóricos del APOE:

1a. Gráfico-analítico: la acción de conectar dos puntos sobre una curva para formar una cuerda que es una porción de la secante, a través de los dos puntos; junto con la acción de calcular la pendiente de la recta secante a través de los dos puntos

1b. Algebraico-numérico: la acción de calcular la tasa media de variación entre el punto y otro punto "próximo" $\left(m = \overline{V} = TMV = \dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}\right)$

2a. Gráfico-analítico: interiorización de las acciones del punto *1a* en un proceso único a medida que los dos puntos del gráfico se aproximan más y más

2b. Algebraico-numérico: interiorización de las acciones para calcular la tasa media de variación $\left(m = \overline{V} = \dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}\right)$, cuando b→a; en un proceso único, a medida que la diferencia entre los intervalos se hacen más y más pequeños. Esto es a medida que la longitud del intervalo se acerca más y más a cero

3a. Gráfico-analítico: encapsulación del proceso del punto *2a* para producir la recta tangente como la posición límite de las secantes, y para producir la pendiente de la tangente en un punto sobre la gráfica de una función.

3b. Algebraico-numérico: encapsulación del proceso del punto *2b,* de calcular las tasa medias de variación $\left(\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}\right)$ cuando b→a, para producir la tasa de variación instantánea de una variable respecto de la otra como el $\left(\lim_{b\to a}\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}=f'(a)\right)$

3c. Coordinación gráfica y algebraica de los procesos de construcción 2a y 2b de la tasa instantánea de variación en un punto.

3d. Gráfico-analítico: interiorización de las acciones para construir la tasa instantánea de variación en términos de cocientes de incrementos de variaciones verticales y horizontales cuando h→0.

3e. Algebraico-numérico: interiorización de las acciones para construir la tasa instantánea de variación en términos de cocientes de incrementos de las variables dependientes e independientes cuando h→0.

3f. Coordinación de los procesos 3d y 3e.

3g. Encapsulación del proceso 3f en el objeto tasa instantánea de variación en cualquier punto de la función como $\lim_{h\to 0}\dfrac{f(a+h)-f(a)}{h}=f'(a)$

4a. Numérico- gráfico: Dado un conjunto de puntos en una tabla o en forma gráfica, que relaciona dos magnitudes, realizar las acciones de unir dos puntos consecutivos de la gráfica mediante un segmento de recta y calcular su pendiente, o en el caso de la tabla, usar dos puntos consecutivos para calcular la tasa media de variación.

4b.Numérico- gráfico: Interiorización de estas acciones en un proceso que permite obtener una razón de cambio como una aproximación razonable a la razón de cambio instantánea en un punto.

4c.Numérico- gráfico: Encapsulación del proceso anterior como un objeto $\left(\dfrac{\Delta y}{\Delta x}\right)$ equivalente (en un contexto numérico o gráfico de relación entre magnitudes) al objeto razón de cambio instantánea en un punto. En el caso de la velocidad $\left(\dfrac{\Delta d}{\Delta t}=\bar{v}\right)$.

4d. Coordinar el proceso 4b con el proceso 3d para considerar la posibilidad de reducir el valor del denominador del cociente.

4e Encapsular el proceso anterior en el objeto razón de cambio instantánea en un punto, como límite de razones de cambio $\left(\lim_{\Delta x\to 0}\dfrac{\Delta y}{\Delta x}\right)$ en un punto.

5. Relacionar los objetos que resultan de encapsular 3b, 3g y 4e para formar un esquema de derivada en un punto.

6. Tematizar el esquema anterior en el objeto derivada en un punto $\left(m_{\tan} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{b \to a} \frac{f(b) - f(a)}{b - a} = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} = f'(a) \right)$
7. Generalizar la acción de calcular la derivada en un punto en un proceso que permite calcular la derivada en cualquier punto de la función.
8. Encapsular el proceso anterior en el objeto función derivada f'(x)

8a. Hacer acciones sobre el objeto f'(x) para calcular la derivada de las operaciones con funciones.

8b. Interiorizar y generalizar dichas acciones en los procesos que permiten calcular las reglas de derivación de funciones.

8c. Encapsulación de los procesos anteriores en los objetos que describen las reglas de derivación como propiedades de la derivada.

9. Relacionar los objetos construidos en 6 y 8 en un esquema que evoluciona a través de su uso y/o la modificación de las relaciones entre sus elementos constituyentes para encontrar propiedades de una función cualquiera y de su derivada (monotonía, concavidad, descripción y construcción de gráficas, optimización, etc.).
10. Tematización del esquema derivada.

Una mirada al mecanismo de encapsulación desde el EOS

En el APOE, tal como se ha dicho, hay básicamente dos usos del término objeto. Se considera como un objeto el resultado de la encapsulación de un proceso o bien el resultado de la tematización de un esquema.

En este apartado, utilizando como contexto la DG anterior, se reflexiona, desde la mirada que ofrece la ontología propuesta en el EOS, sobre la emergencia de objetos a partir del mecanismo de encapsulación. El mecanismo de tematización no se analiza por cuestiones de espacio y se deja para futuros trabajos.

En la DG que se propone, la encapsulación aparece primero en 3a y 3b. El punto 3a es el mismo que se propone en la DG de Asiala et al., en cambio el punto 3b se ha modificado sustancialmente con relación a dicha DG “3b. Analítico: encapsulación del proceso del punto 2b para producir la tasa de variación instantánea de una variable respecto de la otra” (Asiala et al., 1997, pp. 426-427).

En nuestro intento de precisar la DG de Asiala et al., en el punto 3b, se ha incorporado una aclaración en forma de definición implícita del objeto que resulta de la encapsulación.

En el paso de la acción al proceso y su posterior encapsulación como objeto, desde la mirada que ofrece el EOS, intervienen muchos aspectos que informan de su complejidad. Primero, el alumno debe comprender que las acciones ejecutadas se pueden realizar de acuerdo a un determinado procedimiento (una regla que dice cómo se deben hacer las acciones). En este momento, ya se produce un determinado nivel de reificación, en el sentido que el procedimiento se puede tratar como una unidad (un objeto, un todo). A continuación, el alumno debe considerar un nuevo objeto, el resultado del proceso, y por último debe comprender el significado de la definición que informa de la naturaleza del nuevo objeto.

Desde la perspectiva del EOS, la encapsulación de un proceso en un objeto es un mecanismo complejo en el que hay que considerar (1) objetos primarios de naturaleza diferente y (2) la intervención de una densa trama de funciones semióticas relacionadas con los procesos asociados a las dualidades unitario/sistémico y extensivo/intensivo (Font y Contreras, 2008). Dicha complejidad se puede resumir en el esquema siguiente:

> Generación de una sucesión de tasas medias de variación que se acercan al límite f'(a) (procedimiento) → Clase de $\left(\frac{f(b)-f(a)}{b-a}\right)$ con $b \to a$ (aplicación de las dualidades unitario/sistémico y extensivo/intensivo) → Un objeto (un número) diferente a la clase anterior $\left(\lim_{b\to a}\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=f'(a)\right)$ (definición) → el nombre "tasa instantánea de variación" (objeto notacional).

En este trabajo no entraremos a explicar la trama de funciones semióticas que un sujeto tiene que activar para poder comprender el significado de la derivada en un punto, ya que ésta se puede obtener fácilmente como adaptación de la trama de funciones semióticas activada en la comprensión de la función derivada propuesta en Font y Contreras (2008). Lo que sí se quiere resaltar en este trabajo es que la mirada que aporta el EOS sobre la encapsulación permite apreciar que en ésta se produce un cambio de naturaleza doble, por una parte se pasa de proceso a objeto como señala el APOE y, por otra parte, según el EOS, se cambia la naturaleza del objeto primario (en el ejemplo considerado se pasa de un procedimiento a una definición).

Lo que se acaba de decir también es aplicable a las encapsulaciones descritas en 3g y 4e. En el caso de la encapsulación descrita en 8c, el cambio de naturaleza se produce entre un procedimiento y una propiedad.

Desde la perspectiva del EOS, el cambio de la naturaleza del objeto primario producido en la encapsulación no resulta sorprendente y se explica, tal como se ha señalado en el apartado 2.1, por el hecho de que la naturaleza de fondo de las definiciones, procedimientos y propiedades es, según este enfoque, la de ser reglas.

Coordinación entre los dos enfoques teóricos

En este trabajo establecemos una conexión parcial sobre el uso que hacen las dos teorías consideradas del término "objeto matemático". En el APOE se usa para referirse (1) a la encapsulación de un proceso y (2) a la tematización de un esquema. Nuestra conclusión es que la noción de encapsulación del APOE se relaciona con la noción de emergencia de un objeto primario en el EOS, mientras que la noción de tematización (aspecto no tratado en este trabajo) estaría relacionada con la noción, considerada en el EOS, de segundo nivel de emergencia de un objeto matemático.

En el APOE se considera que el resultado de la encapsulación de un proceso es un objeto. Dicho de otra manera, el resultado del proceso de encapsulación es "algo" sobre lo que se pueden realizar nuevas acciones. La mirada que aporta el EOS sobre la encapsulación permite apreciar que en ésta se produce un cambio de naturaleza doble, por una parte se pasa de proceso a objeto (primario según el EOS), tal como señala el APOS, pero por otra parte, y no menos importante, se cambia la naturaleza del objeto primario (por ejemplo, en el primer caso considerado se pasa de un procedimiento a una definición).

Agradecimientos

Trabajo realizado en el marco del proyecto de investigación EDU2009-08120. Ministerio de Ciencia e Innovación.

Referencias

Asiala, M., Cottrill, J., Dubinsky, E., y Schwingendorf, K. (1997). The development of students' graphical understanding of the derivate. *Journal of Mathematics Behavior, 16(4)*, 399-430.

Badillo, E. (2003). *La Derivada como objeto matemático y como objeto de enseñanza y aprendizaje en profesores de matemática de Colombia.* Tesis doctoral. Universitat Autònoma de Barcelona.

Badillo, E.; Azcárate, C. y Font, V. (2011). Análisis de los niveles de comprensión de los objetos $f'(a)$ y $f'(x)$ de profesores de matemáticas. *Enseñanza de las Ciencias*, *29*(2), 191-206.

Dubinsky, E. y McDonald, M. A. (2001). APOS: A constructivist theory of learning in undergraduate mathematics education research. En D. Holton (Ed.), *The Teaching and Learning of Mathematics at University Level: An ICMI Study.* Series: New ICMI Study Series, Vol.7 (pp. 273–280). Dordrechet: Kluwer.

Font, V. y Contreras, A. (2008). The problem of the particular and its relation to the general in mathematics education. *Educational Studies in Mathematics*, *69*(1), 33-52.

Font, V., Godino, J. D., y Gallardo, J. (2012). The emergence of objects from mathematical practices. *Educational Studies in Mathematics*, Online First. DOI: 10.1007/s10649-012-9411-0.

Font, V.; Montiel, M.; Vidakovic, D. y Wilhelmi, M. R. (2011). Analysis of Dimensional Analogy by Means of Different Theoretical Perspectives. In R. V. Nata (Ed.), *Progress in Education*, Volume 19 (pp. 39-76). Hauppauge, NY: Nova.

Prediger, S., Bikner-Ahsbahs, A., y Arzarello, F. (2008). Networking strategies and methods for connecting theoretical approaches: first steps towards a conceptual framework. *ZDM, The International Journal on Mathematics Education*, *40*(2), 165-178.

Trigueros, M. y Martínez-Planell, R. (2010). Geometrical representations in the learning of two- variable functions. *Educational Studies in Mathematics*, *73*(1), 3-19.