ANÁLISIS HISTÓRICO SOBRE LA ENSEÑANZA DE LA RAZÓN Y LA PROPORCIÓN

HISTORICAL ANALYSIS OF THE TEACHING OF RATIO AND PROPORTION

Gairín, J.M.[1] (1), **Oller, A.M.** (2)

Universidad de Zaragoza (1), *Centro Universitario de la Defensa* (2)

Resumen

En este trabajo se realiza un análisis del tratamiento recibido por los conceptos de razón y proporción en textos escolares españoles de los últimos 160 años. Fruto de dicho análisis se presentan algunas alternativas a la enseñanza actual que pretenden mejorar el modo en que los alumnos de secundaria adquieren y manejan dichos conceptos.

Abstract

In this work we discuss the treatment that the concepts of ratio and proportion have received in Spanish textbooks during the last 160 years. As a result, we present some alternatives to the current practice that might improve the way in which Secondary school pupils acquire and handle those concepts.

Palabras clave: *Análisis de textos, práctica educativa, razón, proporción, secundaria.*

Key words: *Analysis of textbooks, educational practice, ratio, proportion, secondary school.*

[1] Financiado por el proyecto I+D+i, EDU2009-12063, del Ministerio de Ciencia e Innovación.

Introducción

La situación con la que iniciamos este trabajo tuvo lugar en clase de la asignatura optativa *Juegos Educativos Matemáticos* que el primer autor imparte para alumnos de 2º y 3º de la Diplomatura de Magisterio. Se plantea a los estudiantes la siguiente propuesta:

Resolver de dos formas el siguiente problema:
A una reunión asisten 100 personas. Cada una saluda a las restantes mediante un apretón de manos. ¿Cuántos apretones de manos se producirán en total?

El estudiante A respondió del siguiente modo:

> "*Primera forma: mediante una regla de tres. Si una persona da 99 apretones de manos, 100 personas darán x apretones de manos. Resuelvo la regla de tres y me salen 9900 apretones de manos.*
>
> *Segunda forma: al ver el resultado de la primera forma me he dado cuenta de que se puede resolver mediante una multiplicación. He multiplicado 100×99 y me sale el mismo resultado, 9900 apretones de manos.*"

La situación que acabamos de presentar ilustra dos fenómenos provocados por la enseñanza tradicional de la proporcionalidad y, en concreto, de la regla de tres:

1. Se elige la técnica de resolución de un problema por la estructura del enunciado y no por la adecuación de la misma al problema. Así, en situaciones en las que aparecen dos magnitudes de manera que se conoce una pareja de valores relacionados (número de personas y apretones de manos en el ejemplo) y después se desea encontrar la cantidad (desconocida) asociada a un valor conocido de una de esas magnitudes se tiende a utilizar la regla de tres sin valorar la existencia o no de proporcionalidad entre las magnitudes implicadas.
2. El uso de la regla de tres eclipsa los conocimientos anteriores sobre los significados de las operaciones en las estructuras multiplicativas de los naturales y los racionales positivos. Así (como apreció el propio estudiante) se recurre a una regla de tres cuando basta hacer uso de un significado de la multiplicación.

Pensamos que estos dos fenómenos, que se mantienen hasta la enseñanza universitaria (Espinel et al., 2010), tienen su origen en la práctica educativa, más allá de la dificultad de los conceptos involucrados o de las deficiencias cognitivas de los alumnos. Sin embargo encontramos que la mayor parte de los trabajos dedicados a la didáctica de la proporcionalidad aritmética se centran principalmente estas dos últimas posibilidades (Fernández y Llinares, 2010; Modestou et al., 2008; Van Dooren et al., 2004, 2006) sin criticar la práctica educativa tradicional, y mucho menos proponiendo posibles alternativas.

En (Gairín y Oller, 2011) se presentan algunas ideas que se consideran imprescindibles para elaborar una propuesta que mejore la enseñanza tradicional de la proporcionalidad. Estas ideas, en nuestra opinión, han de sustentarse:

- En el uso significativo de las estructuras multiplicativas que han estudiado con anterioridad.
- En la aprehensión de los aspectos conceptuales relacionados con la proporcionalidad.

- En la aplicación de dichos aspectos a la hora de resolver situaciones problemáticas relacionadas con la proporcionalidad.

El análisis de libros de texto es una importante herramienta a la hora de estudiar los procesos de enseñanza-aprendizaje. Esto es así, entre otros motivos, porque: "*observar el proceso de aprendizaje de la humanidad requiere dirigir la atención a la historia de las ideas matemáticas, a través del único registro disponible de las mismas. Esto es, a través de textos y manuales escolares y mediante un análisis de los mismos*" (Gómez, 2011, p. 50).

Dentro de la distinción que Van Dormolen (1986) hace del análisis de libros de texto, nuestro trabajo se enmarcaría dentro del análisis a posteriori. En concreto (Gómez, 2011), se trata de un trabajo inclinado hacia el análisis textual. De hecho, nuestro trabajo tiene una orientación similar al llevado a cabo por González y Sierra (2004) sobre el concepto de punto crítico, por Escolano (2007) respecto a los significados del número racional positivo o por Picado y Rico (2009) sobre el sistema métrico decimal.

Método

Pretendemos aplicar el análisis de libros de texto al estudio del tratamiento que ciertos aspectos conceptuales de la proporcionalidad han recibido en manuales escolares desde 1850 hasta la vigente ley de educación. Los aspectos que seleccionados para el estudio son:

1. Objetos entre los que se define la razón: entre números o entre cantidades de magnitud.
2. Significado de la razón: la razón como fracción, como cociente o como factor multiplicante.
3. Pertinencia del concepto de razón: la preocupación por la posibilidad de definir la razón en una situación dada.
4. La idea de proporción.

Organizamos el análisis en torno a cinco periodos caracterizados por la existencia de leyes educativas (Escolano, 2007):

i.	1850-1900	iv.	1970-1980
ii.	1900-1950	v.	1980-1990
iii.	1950-1970	vi.	1990-2010

Se han consultado un total de 48 libros. Por razones de espacio no se referencian todos, por lo que citaremos sólo aquellos de los que figuran explícitamente en este trabajo:

a. 1850-1900: (Sanjurjo, 1884).
b. 1900-1950: (Bruño, 1912), (Hurtado, 1932) y (Ruíz, 1931).
c. 1950-1970: (Baratech, 1966a, 1966b).
d. 1970-1980: (Rico et al., 1977).
e. 1980-1990: (Mansilla y Bujanda, 1984).
f. 1990-2010: (Álvarez et al., 1999), (Cólera y Gaztelu, 2008a, 2008b) y (S.M., 2009).

Para cada uno de los textos seleccionados se analiza el tratamiento dado a cada uno de los aspectos conceptuales referidos anteriormente. Respecto a los puntos 1 y 2, encontramos textos que consideran la razón entre números y entre cantidades o que presentan diversos significados para la razón entre ellos. En esos casos se ha optado por tener en cuenta aquel aspecto que aparece en primer lugar, entendiendo que esta elección por parte del autor no es arbitraria.

En último lugar, a modo de conclusiones, se presentan algunas alternativas que pueden dar lugar a una propuesta de innovación.

Objetos entre los que se define la razón

A lo largo de la historia este concepto se ha presentado en dos contextos: entre números y entre cantidades de magnitud.

	1850-1900	**1900-1950**	**1950-1970**	**1970-1980**	**1980-1990**	**1990-2010**
Números	SÍ	SÍ	SÍ	SÍ	SÍ	SÍ
Cantidades	SÍ	SÍ	SÍ	SÍ	SÍ	NO

Tabla 1: Evolución a lo largo del tiempo de los contextos en los que aparece la razón

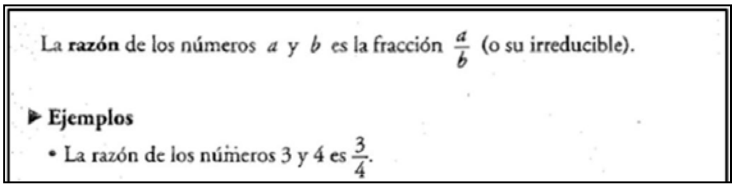
Resulta llamativo que la extensión de la enseñanza obligatoria haya desembocado en la presentación de la razón únicamente entre números; es decir, en una presentación con un alto grado de abstracción que aleja el concepto del mundo de las magnitudes.

Significados de la razón

La razón entre números

En este contexto se han encontrado tres posibles interpretaciones para el concepto de razón:

1º. La razón como fracción (Figura 1):



La **razón** de los números a y b es la fracción $\frac{a}{b}$ (o su irreducible).

▶ **Ejemplos**

• La razón de los números 3 y 4 es $\frac{3}{4}$.

Figura 1: (Cólera y Gaztelu, 2008, p. 84)

Pese a que se utiliza el término fracción, esta interpretación presenta la razón como dos números separados. En la fracción resultante se perciben el numerador y denominador separadamente como objetos independientes.

Predomina el aspecto formal de la notación fraccionaria puesto que, en principio los números implicados no tendrían por qué ser enteros.

2º. La razón como cociente (Figura 2):

664. Llámase **razón** ó **relación** el resultado de la comparación de dos cantidades de una misma especie.
665. Dos cantidades pueden compararse entre sí por *diferencia* ó por *cociente*, de donde resultan dos clases de razones : las *aritméticas* y las *geométricas*.

Figura 2: (Bruño, 1912, p. 221)

En este caso la razón sí es un solo número, obtenido al comparar los números iniciales mediante una división. Sin embargo no se hace alude al significado que se podría asignar al resultado de tal división. Se habla de comparación pero la razón es, finalmente, un número sin significación alguna.

3º. La razón como factor multiplicante (Figura 3):

XIV-1. Razón de dos números. — *Se denomina razón de dos números, al cociente exacto de esos números o, lo que es igual, el número por el que se ha de multiplicar el segundo para obtener el primero.*

Figura 3: (Baratech, 1966b, p. 89)

Aquí la razón aparece en un contexto de estructura multiplicativa, asignando, ahora sí, un significado al resultado de la división de los números implicados. Esta interpretación surge de entender la división como la operación inversa de la multiplicación.

En la tabla siguiente se muestra la evolución en la aparición de estas interpretaciones:

	1850-1900	**1900-1950**	**1950-1970**	**1970-1980**	**1980-1990**	**1990-2010**
Fracción	SÍ	SÍ	SÍ	SÍ	SÍ	SÍ
Cociente	SÍ	SÍ	NO	NO	NO	NO
Factor multiplicante	NO	NO	SÍ	NO	NO	NO

Tabla 2: Interpretaciones de la razón entre números

Se observa que la interpretación de la razón como fracción (Clark et al., 2003) parece imponerse desde mediados del siglo pasado. Parece, por tanto, que desde la enseñanza se ha optado por interpretar la razón como una fracción, sin preocuparse de que esto no tiene sentido para el alumno salvo que los números implicados sean enteros y sin tratar de asignar un significado al objeto que se presenta. Esta interpretación de la razón como fracción choca frontalmente con el significado de fracción como parte-todo al que los alumnos estan excesivamente habituados (Escolano, 2001).

La razón entre cantidades de magnitud

Esta idea ha convivido con la idea de razón entre números hasta los años 90 del siglo pasado. En el análisis realizado resulta llamativo que las cantidades que se utilicen sean siempre de la misma magnitud, en ningún caso se relacionen magnitudes diferentes. En nuestra opinión es más comprensible dar sentido a relaciones entre cantidades de distinta magnitud y, además, es un ámbito más cercano a la aplicación práctica.

En este contexto se han encontrado también tres posibles interpretaciones para el concepto de razón, que se corresponden con las que ya presentadas para el caso de la razón entre números:

1º. La razón como fracción (Figura 4):

> Si a y b son cantidades de una misma magnitud, la medida de a, cuando se toma por unidad a b, se llama *razón entre a y b,* y se escribe así:
>
> $$\frac{a}{b}$$

Figura 4: (Mansilla y Bujanda, 1984, p. 62)

Aunque se utilizan cantidades de magnitud, la razón entre ellas se convierte en una fracción numérica que no se interpreta como una cantidad de magnitud. En este caso se asigna a la fracción el significado de medida. Si tenemos en cuenta que el alumno suele tener como referencia el significado de fracción como parte-todo, esta interpretación resulta muy exigente para él y, además, este significado pierde sentido si tratamos de aplicarlo a cantidades de diferentes magnitudes.

2º. La razón como cociente (Figura 5):

> Llamamos razón al cociente de las medidas de dos cantidades de una misma magnitud.

Figura 5: (Rico et al., 1977, p. 191)

Se utilizan cantidades de magnitud, pero de una forma ficticia, por cuanto no se atiende al tipo de magnitud que resulta al dividir dos cantidades de la misma magnitud. Esta interpretación considera la razón como un número no medida ya que el cociente que figura en la definición no está referido a ninguna magnitud (es un cociente entre números, cuyo resultado es un número). Así, si aplicásemos esta definición al caso de magnitudes diferentes, surgiría el problema de asignar un significado concreto y claro al número obtenido.

3º. La razón como factor multiplicante (Figura 6):

> **203. Llámase razón** *de dos cantidades homogéneas el número por el cual debe multiplicarse la segunda para obtener la primera.*

Figura 6: (Ruíz, 1931, p. 129)

Esta claro que si las dos cantidades son de la misma magnitud el producto de una cantidad por un número produce una cantidad de la misma magnitud. Pero, si se trata de distintas magnitudes, el producto de una cantidad por un número no da como resultado una cantidad de la otra magnitud.

Las interpretaciones presentadas tienen un rasgo común. Todas entienden la razón principalmente en su vertiente numérica. Ninguna parece entender la razón como una cantidad de magnitud. Pensamos que esto es una consecuencia de no considerar la razón entre cantidades de magnitudes distintas.

En la tabla siguiente se muestra la evolución en la aparición de estas interpretaciones en los distintos periodos estudiados:

	1850-1900	1900-1950	1950-1970	1970-1980	1980-1990	1990-2010
Fracción	SÍ	SÍ	SÍ	NO	SÍ	NO
Cociente	NO	SÍ	NO	SÍ	NO	NO
Factor multiplicante	NO	SÍ	SÍ	NO	NO	NO

Tabla 3: Interpretaciones de la razón entre cantidades homogéneas

Como ya hemos mencionado, no hemos encontrado referencias a la razón entre cantidades de magnitud en textos del periodo actual. Sin embargo, se observa que también en este caso la interpretación como fracción parecía haberse impuesto con el paso del tiempo.

Pertinencia del concepto de razón

En ninguno de los textos estudiados hemos encontrado ningún caso en que se reflexione sobre las condiciones que deben darse para que tenga sentido el cálculo de la razón entre dos magnitudes. Quizás el caso más cercano sea el mostrado en la Figura 7.

2.º *Si 23 libros de igual precio han costado 1 242 pesetas. ¿Cuántos libros hubiéramos adquirido con 918 pesetas, en las mismas condiciones?*

El precio de un libro será 1 242 ptas. : 23 = 54 pesetas.

por lo que el número de libros comprados con 918 ptas., será el cociente

918 : 54 = 17.

Figura 7: (Baratech, 1966a, p. 89)

El autor enuncia las condiciones para la existencia de la razón (que todos los libros sean de igual precio), pero no hay un tratamiento explícito y sistemático de tales situaciones.

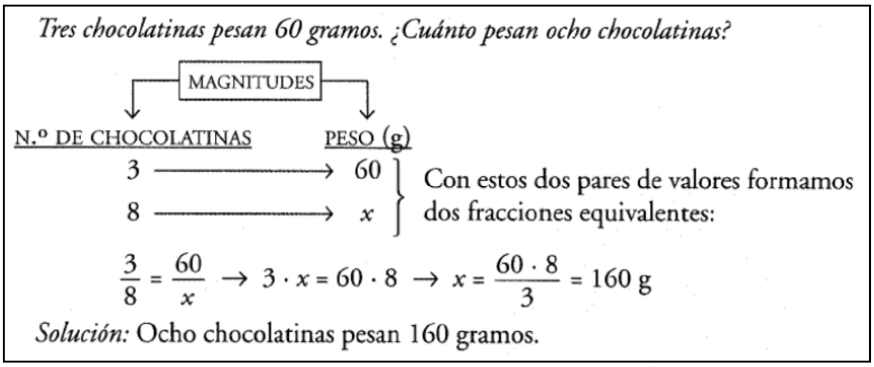


Figura 8: (Cólera y Gaztelu, 2008a, pág. 165)

La Figura 8 muestra un ejemplo de esta despreocupación. Para los autores tiene pleno sentido considerar la fracción 3/8 pues se trata de un cociente entre números, pero no se observa intento alguno por asignarle un significado y, mucho menos, por discutir si tiene sentido considerarla.

La idea de proporción

Frente a la riqueza y variabilidad observadas al hablar del concepto de razón, encontramos que la idea de proporción permanece invariante a lo largo del tiempo. Todos los autores entienden una proporción como la igualdad de dos razones.

Se llama proporción la igualdad de dos razones. Así: $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$, que también se escribe $a:b::c:d$, y se lee a es á b como c es d, es una proporción.

Figura 9: (Sanjurjo, 1884, p. 119)

Los números a, b, c y d **forman una proporción** si la razón entre a y b es igual a la razón entre c y d.

Se escribe $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}$ y se lee "*a* es a *b* como *c* es a *d*".

Figura 10: (S.M., 2009, p. 147)

En las figuras 9 y 10 se muestran dos ejemplos que, pese a estar separados en el tiempo 125 años, son casi idénticos. Se observa además una gran preocupación por los aspectos formales ("se escribe") e institucionales ("se lee").

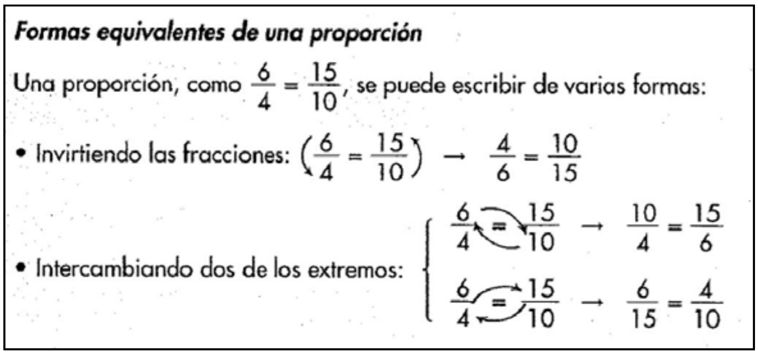
Claramente, esta igualdad entre razones debería tener interpretaciones diferentes según la interpretación que los autores hayan asignado al concepto de razón. Sin embargo no existe en los textos analizados discusión alguna sobre este punto. Se presenta la idea de proporción de manera formal y descontextualizada, pasando a presentar la llamada "propiedad fundamental". Así, en Hurtado (1932, p. 158) leemos:

"*Si las dos razones que forman una proporción tienen que ser iguales, fácilmente se comprende que «el producto de los términos extremos será igual al producto de los términos medios».*"

Esta propiedad es esencialmente numérica y en un contexto numérico admite una justificación más o menos simple. Pero, si pensamos la razón en el ámbito de las magnitudes, resulta imposible dar una interpretación a esta "propiedad fundamental".

Enunciados de este tipo son los que, en nuestra opinión, han llevado a priorizar la interpretación de la razón como fracción entre números. El alumno está familiarizado con el concepto de fracciones equivalentes y, sobre todo, tiene muy interiorizada la idea de "producto de medios igual a producto de extremos" por lo que no le supone un gran problema asumir esta nueva propiedad. Sin embargo, si entendemos la razón como factor multiplicante, aunque la igualdad de razones tiene un significado claro y preciso, resulta difícil justificar la "propiedad fundamental". En todo caso los autores están más preocupados de preparar la introducción del algoritmo de la regla de tres que de fomentar la comprensión del alumno.

También se presta atención en los textos estudiados (con menor frecuencia con el paso del tiempo) a las manipulaciones que permiten obtener nuevas proporciones a partir de otras conocidas: intercambiar medios o extremos, invertir etc… (Figura 11).



Formas equivalentes de una proporción

Una proporción, como $\frac{6}{4} = \frac{15}{10}$, se puede escribir de varias formas:

- Invirtiendo las fracciones: $\left(\frac{6}{4} = \frac{15}{10}\right) \rightarrow \frac{4}{6} = \frac{10}{15}$
- Intercambiando dos de los extremos: $\frac{6}{4} = \frac{15}{10} \rightarrow \frac{10}{4} = \frac{15}{6}$; $\frac{6}{4} = \frac{15}{10} \rightarrow \frac{6}{15} = \frac{4}{10}$

Figura 11: (Álvarez et al., 1999, p. 78)

Otro aspecto que aparece repetidamente a lo largo del tiempo es la siguiente propiedad de las proporciones:

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} = \frac{a \pm c}{b \pm d}$$

Los autores utilizan esta propiedad como base para una de las posibles formas de tratar los problemas de repartos directamente proporcionales.

Tanto las manipulaciones presentadas en la Figura 11, como la propiedad anterior tienen pleno sentido y pueden justificarse con facilidad desde un punto de vista puramente numérico. No obstante, es imposible hacerlo en el contexto de las magnitudes, con las dificultades que esto supone para la comprensión de los alumnos.

En definitiva, tanto la propia definición de la idea de proporción, como sus propiedades, se presentan tradicionalmente de un modo descontextualizado que, a menudo, no encaja en el marco conceptual en que se ha definido la razón. Esto se debe principalmente a que estas ideas y propiedades se presentan de un modo puramente instrumental encaminado a dotar al alumno de técnicas mecánicas para resolver problemas.

Conclusiones

1. La enseñanza ha llevado a una presentación de las ideas de razón y proporción en el campo numérico. Este tipo de instrucción no favorece la construcción de las ideas por parte del alumno puesto que no tiene un modelo físico desde el que pueda alcanzar una buena comprensión de los conceptos puestos en juego.

   En nuestra opinión, si la razón ha de tener aplicaciones en el mundo real, la enseñanza debe priorizar el significado como razón entre cantidades de magnitud (especialmente entre las no homogéneas). Hemos visto que en el caso de magnitudes no homogéneas las interpretaciones tradicionales del concepto de razón no son adecuadas. Se hace necesario recurrir a una interpretación diferente que abarque dichas situaciones. Proponemos entender la razón como 'tanto por uno'. Es decir, la razón entre dos cantidades de magnitud mide la cantidad de la primera magnitud que le corresponde a una unidad de la segunda magnitud. Con este enfoque, la razón entre dos cantidades de magnitudes distintas (si tiene sentido definirla) se interpreta como una cantidad de una nueva magnitud.

2. La enseñanza no se ha ocupado de analizar los contextos en los tiene sentido definir el concepto de razón. Como consecuencia, el alumno adquiere la idea de que la proporcionalidad es siempre útil y eficaz en todas aquellas situaciones en

las que haya cantidades de dos magnitudes y se pregunte por la cantidad de una de ellas conocida otra cantidad de la segunda.

Entendemos que el concepto de razón (como toda la proporcionalidad aritmética) está asociado a la noción de función de proporcionalidad. Sin embargo, en el momento de introducir estos conceptos en secundaria los alumnos apenas tienen nociones sobre funciones. Estas carencias obligan a articular un recurso didáctico que denominamos *condición de regularidad*. La condición de regularidad sería *la condición indispensable que debe darse para que la razón pueda calcularse*. La preocupación por hacer explícita esta condición, indicando su porqué, así como las consecuencias que su consideración (o no) tienen en una situación concreta debe ser, a nuestro juicio, un aspecto fundamental en la enseñanza de la proporcionalidad, previo, incluso, a la modelización de los problemas.

3. La idea de proporción se ha presentado tradicionalmente de un modo puramente formal y descontextualizado, enfocado siempre a la justificación de técnicas algorítmicas de resolución de problemas.

   Al presentar la razón como tanto por uno, pensamos que la idea de proporción como igualdad de razones puede suprimirse puesto que, entre otros motivos, se hace innecesaria la introducción de las técnicas algorítmicas que justificaban en parte la presentación del concepto de proporción.

Referencias

ÁLVAREZ, F., GARRIDO, L.M., RUIZ, A. (1999). *Fractal 2 Matemáticas.* Vicens Vives. Barcelona.

BARATECH B. (1966a). *Matemáticas. Primer curso de Bachillerato.* Edición del autor. Zaragoza.

BARATECH B. (1966b). *Matemáticas. Segundo curso de Bachillerato.* Edición del autor. Zaragoza.

BRUÑO, G.M. (1912). *Elementos de Aritmética con algunas nociones de Álgebra.*

CLARK, M.R., BERENSON, S.B. Y CAVEY, L.O. (2003). A comparison of ratios and fractions and their roles as tools in proportional reasoning. *J. Math. Beh.*, 22, pp. 297-317.

CÓLERA, J. y GAZTELU, I. (2008a). *Matemáticas 1*. Toledo: Anaya.

CÓLERA, J. y GAZTELU, I. (2008b). *Matemáticas 2*. Toledo: Anaya.

ESCOLANO, R. (2001). Enseñanza del número racional positivo en Educación Primaria: un estudio desde el modelo cociente. En M. F. Moreno, F. Gil, M. Socas & J. D. Godino, (Eds.), *Investigación en Educación Matemática V* (pp. 151-158). Almería: S.E.I.E.M.

ESCOLANO, R. (2007). *Enseñanza del número racional positivo en Educación Primaria: un estudio desde los modelos de medida y cociente.* Tesis Doctoral, Universidad de Zaragoza.

ESPINEL, M.C., BRUNO, A. y CRUZ, I. (2010). La comprensión de gráficas de porcentaje de variación en situaciones cotidianas. *Union*, 24, pp. 83-102.

FERNANDEZ, C. y LLINARES, S. (2010). Evolución de los perfiles de los estudiantes de primaria y secundaria cuando resuelven problemas lineales. En M.M. Moreno, A. Estrada, J. Carrillo, & T.A. Sierra, (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XIV* (pp. 281-290). Lleida: SEIEM

GAIRÍN, J. M. y OLLER, A. M. (2011). Proporcionalidad aritmética en secundaria. Ideas para una propuesta didáctica. En J. L. Lupiáñez, M. C. Cañadas, M. Molina, M. Palarea, y A. Maz (Eds.), *Investigaciones en Pensamiento Numérico y Algebraico e Historia de la Matemática y Educación Matemática - 2011* (pp. 179-189). Granada: Dpto. Didáctica de la Matemática, Universidad de Granada.

GÓMEZ, B. (2011). El análisis de manuales y la identificación de problemas de investigación en Didáctica de las Matemáticas. *PNA*, 5(2), pp. 49-65.

GONZÁLEZ, Mª.T. y SIERRA, M. (2004). Metodología de análisis de libros de texto de matemáticas. Los puntos críticos en la enseñanza secundaria en España durante el siglo XX. *Enseñanza de las Ciencias*, 22(3), pp. 389-408.

HURTADO, F. (1932). *Rudimentos de Aritmética*. Labor. Barcelona.

MANSILLA, S., BUJANDA, Mª.P. (1984). *Pitágoras. Matemáticas 7º E.G.B.* S.M. Madrid.

MODESTOU, M., ELIA, I., GAGATSIS, A. y SPANOUDIS, G. (2008). Behind the scenes of pseudo-proportionality. *Int. J. Math. Educ. Sci. Technol.*, 39(3), pp. 313-324.

PICADO, M. y RICO, L. (2011). Análisis de contenido en textos históricos de matemáticas. *PNA*, 6(1), pp. 11-27.

RICO, L, CORPAS, A., FERNÁNDEZ, A., GONZÁlEZ, J, LÓPEZ, F., MESAS, T., SÁENZ, O. y VALENZUELA, J. (1977). *Matemáticas 7.* Anaya. Cádiz.

RUÍZ, A. (1931). *Nociones y Ejercicios de Aritmética y Geometría.* Imprenta Editorial Gambón. Zaragoza.

SANJURJO, R. (1884). *Elementos de Aritmética y Álgebra*. Imprenta y litografía de "La Guirnalda". Madrid.

S.M. (2009). *Esfera. Matemáticas 1º E.S.O.* S.M. Madrid.

VAN DOOREN, W., DE BOCK, D., EVERS, M. y VERSCHAFFEL, L. (2006). Pupils' over-use of proportionality on missing-value problems: how numbers may change solutions. En *Proceedings of the 30th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, Vol. 5. Praga.

VAN DOOREN, W., DE BOCK, D., HESSELS, A., JANSSENS, D. y VERSCHAFFEL, L. (2004). Remedying secondary school students' illusion of linearity: a teaching experiment aiming at conceptual change. *Learn. Inst.*, 14, pp. 485-501.

VAN DORMOLEN, J. (1986). Textual analysis. En B. Christiansen, A.G. Howson y M. Otte (Eds.), Perspectives on Mathematics Education (pp. 141-171). Dordrecht, The Nederlands: Reidel.