NIVELES DE RAZONAMIENTO ALGEBRAICO ELEMENTAL

LEVELS OF ELEMENTARY ALGEBRAIC REASONING

Godino, J.D. (1), **Aké, L.P.** (1), **Gonzato, M.** (1), **Wilhelmi, M.R.** (2)

Universidad de Granada (1), *Universidad Pública de Navarra* (2)

Resumen

Las investigaciones sobre la naturaleza y desarrollo del razonamiento algebraico en los primeros niveles de educación primaria no han sido concluyentes sobre las fronteras entre las prácticas matemáticas de índole algebraica y aquellas que no lo son. En este trabajo definimos niveles primarios de algebrización de la actividad matemática escolar y ejemplos prototípicos de tareas de cada nivel, basados en la tipología de objetos y procesos que propone el enfoque ontosemiótico del conocimiento matemático. El modelo puede ser útil para desarrollar el significado del álgebra en los maestros de Educación Primaria y capacitarles para promover el pensamiento algebraico en esta etapa educativa.

Abstract

Research on the nature and development of algebraic reasoning in the early grades of primary education have been inconclusive about the boundaries between the mathematical practices of algebraic nature and those not algebraic. In this paper we define primary levels of algebrization in school mathematics activity and prototypical examples of tasks of each level, based on the type of objects and processes proposed by the onto-semiotic approach of mathematical knowledge. The model can be useful to develop the meaning of algebra in elementary school teachers and empower them to promote algebraic thinking in primary education.

Palabras clave: *Algebra elemental, práctica matemática, niveles de razonamiento, formación de maestros, enfoque ontosemiótico.*

Key words: *Elementary algebra, mathematical practice, reasoning level, teacher's training, onto-semiotic approach.*

Godino, J.D., Aké, L.P., Gonzato, M., Wilhelmi, M.R. (2012). Niveles de razonamiento algebraico elemental. En A. Estepa, Á. Contreras, J. Deulofeu, M. C. Penalva, F. J. García y L. Ordóñez (Eds.), Investigación en Educación Matemática XVI (pp. 285 - 294). Jaén: SEIEM

Introducción

Diversas investigaciones han evidenciado las dificultades de los niños en el tránsito desde la aritmética hasta el álgebra en la escuela secundaria (Bednarz, Kieran y Lee, 1996; Lacasta, Madoz y Wilhelmi, 2006; Kieran, 2007; Filloy, Puig y Rojano, 2008). El álgebra, entendida de una manera restrictiva como lenguaje simbólico, y orientada básicamente a la resolución de ecuaciones y estudio de los polinomios, aparece de manera abrupta en secundaria, sin continuidad con los temas de aritmética, medida y geometría tratados en primaria.

La inclusión del álgebra en el currículo de la escuela primaria (NCTM, 2000) reclama una concepción más amplia del razonamiento algebraico. Dicho razonamiento debe contemplar no sólo los *contextos de uso* (aritmética, medida, geometría o análisis de datos) y la actividad matemática asociada, sino también el *"grado" de algebrización*.

Avanzar en la clarificación de la naturaleza del razonamiento algebraico es un tema complejo pero necesario desde el punto de vista educativo. Como afirma Radford (2000, p. 238), "necesitamos profundizar en nuestra propia comprensión de la naturaleza del pensamiento algebraico y la manera en que se relaciona con la generalización".

La elaboración de un modelo comprensivo sobre el álgebra elemental podría facilitar el diseño de actividades instruccionales que favorezcan el surgimiento y consolidación progresivos del razonamiento algebraico. En este trabajo abordaremos este problema utilizando algunas herramientas teóricas del "enfoque ontosemiótico" del conocimiento matemático (Godino, Batanero y Font, 2007). Consideramos, junto con diversos autores (Mason y Pimm, 1984; Carraher, Martínez y Schliemann, 2008; Cooper y Warren, 2008), que la generalización es un rasgo característico del razonamiento algebraico, así como los medios para simbolizar, tanto las situaciones de generalización, como las de indeterminación (uso de incógnitas y ecuaciones para modelizar situaciones). En primer lugar sintetizamos la visión del álgebra elemental según el enfoque ontosemiótico desarrollada en Godino, Castro, Aké y Wilhelmi (2012); a continuación, definimos dos niveles de razonamiento proto-algebraico enmarcados entre otros dos niveles: uno, en el que el razonamiento es exclusivamente aritmético (nivel 0 de algebrización); otro, en el que los rasgos algebraicos están consolidados (nivel 3). Finalmente resaltamos algunas implicaciones del modelo para la formación de profesores de Educación Primaria.

Enfoque ontosemiótico del álgebra elemental

La perspectiva pragmatista, antropológica y semiótica del "enfoque ontosemiótico" del conocimiento matemático (EOS) (Godino, Batanero y Font, 2007; Godino, Font, Wilhelmi y Lurduy, 2011) aporta herramientas teóricas que pueden ayudar a caracterizar el razonamiento algebraico en términos de los tipos de objetos y procesos que intervienen en la práctica matemática. La consideración de una práctica matemática como de índole algebraica puede hacerse con base en la presencia de cierto tipo de objetos y procesos, usualmente considerados en la literatura como algebraicos.

Objetos algebraicos prototípicos

1) *Relaciones binarias* —de equivalencia o de orden— y sus respectivas propiedades (reflexiva, transitiva y simétrica o antisimétrica). Estas relaciones son usadas para definir nuevos conceptos matemáticos.

2) *Operaciones y sus propiedades*, realizadas sobre los elementos de conjuntos de objetos diversos (números, transformaciones geométricas, etc.). El denominado cálculo algebraico se caracteriza por la aplicación de propiedades. También pueden intervenir conceptos como ecuación, inecuación, incógnita, y procedimientos tales como, eliminación, transposición de términos, factorización, etc.

3) *Funciones algebraicas, no trascendentes*, es decir, aquellas que se generan mediante adición, sustracción, multiplicación, división, potenciación y radicación de la variable independiente. Es necesario considerar los distintos tipos de funciones (polinómicas, racionales, radicales) y su álgebra asociada (operaciones y propiedades).

4) *Estructuras y sus tipos* (semigrupo, grupo, anillo, cuerpo, etc.) propias del álgebra superior o abstracta.

Procesos algebraicos prototípicos

En el caso de la actividad algebraica los procesos de particularización – generalización tienen una importancia especial, dado el papel de la generalización como uno de los rasgos característicos del razonamiento algebraico. Así, para el análisis de los niveles de algebrización de la actividad matemática es útil fijar la atención en los objetos resultantes del proceso de generalización, y de particularización. Como resultado de un proceso de generalización obtenemos un tipo de objeto matemático que denominaremos *objeto intensivo*, que viene a ser la regla que genera la clase (Godino et al., 2011) y que permite identificar un elemento particular como representante de la misma.

Mediante el proceso de particularización se obtienen objetos que denominamos *extensivos*, esto es, objetos particulares. Una colección finita simplemente enumerada de objetos particulares no se debe considerar como un intensivo hasta el momento en que el sujeto muestra la regla que se aplica para delimitar los elementos constituyentes del conjunto. Entonces el conjunto pasa a ser algo nuevo, diferente de los elementos que lo constituyen, como una entidad unitaria emergente del sistema. Por tanto, además de la generalización que da lugar al conjunto, hay un proceso de *unitarización*.

Por otra parte, la nueva entidad unitaria tiene que ser hecha ostensiva o materializada mediante un nombre, icono, gesto o un símbolo. El objeto ostensivo que materializa al objeto unitario emergente de la generalización es otro objeto que refiere a la nueva entidad intensiva, por lo que tiene lugar un proceso de *representación* que acompaña a la generalización y a la materialización. Finalmente, el símbolo se desprende de los referentes a los cuales representa/sustituye para convertirse en objeto sobre el cual se realizan acciones (proceso de *reificación*). Estos símbolos-objetos forman nuevos conjuntos sobre los cuales se definen operaciones, propiedades y estructuras, esto es, sobre los cuales se opera de manera sintáctica, analítica o formal (figura 1).

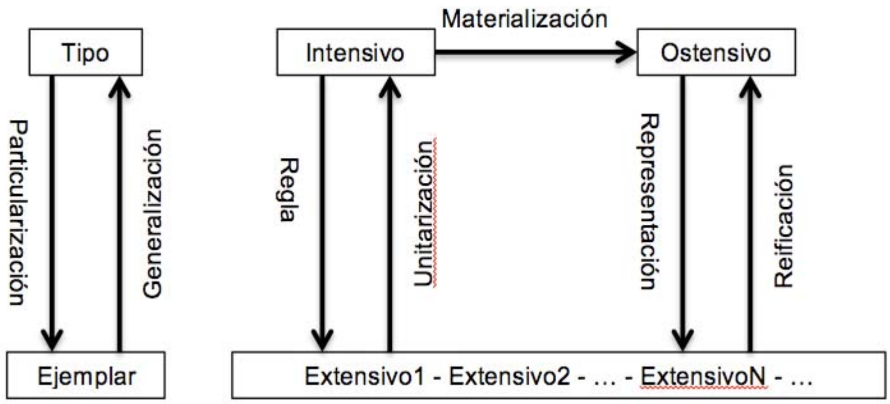


Figura 1. Procesos asociados a la dualidad ejemplar-tipo.

Los tipos de objetos y procesos algebraicos se pueden expresar con diversos lenguajes, preferentemente de tipo alfanumérico en los niveles superiores de algebrización. Pero los estudiantes de los primeros niveles educativos también pueden usar otros medios de expresión para representar objetos y procesos de índole algebraica, en particular el lenguaje ordinario, gráfico, incluso gestual (Radford, 2003).

En la siguiente sección, describimos la frontera entre la aritmética y el álgebra en términos de las dualidades y procesos descritos. Pero esta frontera no está objetiva o platónicamente establecida, puesto que estas dualidades y procesos son relativos al contexto donde se desarrolla la práctica matemática. De hecho, el carácter algebraico está esencialmente ligado al reconocimiento por el sujeto que realiza la actividad de la regla que conforma el objeto intensivo, la consideración de la generalidad como una nueva entidad unitaria y su materialización mediante cualquier registro semiótico para su posterior tratamiento analítico. Este triple proceso (reconocimiento o inferencia de la generalidad, unitarización y materialización) va a permitir definir dos niveles primarios del pensamiento algebraico, distinguibles de un nivel más avanzado en el que el objeto intensivo es visto como una nueva entidad representada con lenguaje alfanumérico.

Niveles de algebrización

En esta sección describimos las características de las prácticas realizadas para resolver tareas matemáticas, abordables en educación primaria, que permiten definir distintos niveles de algebrización. Proponemos distinguir dos niveles de algebrización primarios (que llamamos proto-algebraicos). Dichos niveles están enmarcados entre un nivel 0 de algebrización y un tercer nivel en el que la actividad matemática se puede considerar como propiamente algebraica. Las etapas del proceso de algebrización de las praxeologías matemáticas que identifica Bolea (2002) corresponden a tareas y actividades matemáticas que, según nuestra modelización del razonamiento algebraico, tienen ya un carácter algebraico consolidado. Por ejemplo, la primera etapa del proceso de algebrización que describen Ruiz, Bosch y Gascón (2010), consistente en la formulación escrita (simbólica) de un "programa de cálculo aritmético", ya corresponden a una actividad matemática del nivel 3 según nuestro modelo.

El nivel se asigna, no a la tarea en sí misma, sino a la actividad matemática que se realiza, por lo que dependiendo de la manera en que se resuelve una tarea, la actividad matemática puede ser clasificada en un nivel u otro. No se trata por tanto de niveles exclusivamente matemáticos (centrados en las tareas), sino de estadios del funcionamiento de los conocimientos matemáticos en la resolución de problemas (centrados en la relación de los sujetos con las tareas). Además, el cambio en alguna de las variables del problema puede dar lugar a nuevas prácticas matemáticas con progresivo nivel de algebrización.

Nivel 0 algebrización

Si deseamos capacitar al maestro de primaria para que desarrolle el razonamiento algebraico en sus estudiantes, es necesario describir las prácticas matemáticas de nivel 0, esto es, aquellas que no incluyen características algebraicas. Proponemos la siguiente regla para asignar el nivel 0 de algebrización a una práctica matemática:

> *Intervienen objetos extensivos (particulares) expresados mediante lenguajes natural, numérico, icónico o gestual. Pueden intervenir símbolos que refieren a un valor desconocido, pero dicho valor se obtiene como resultado de operaciones sobre objetos particulares. En tareas funcionales el reconocimiento de la relación de un término con el siguiente, no implica la determinación de una regla recursiva que generaliza la relación de los casos particulares.*

Ejemplo 1: Un estudiante recibió de sus padres una cierta cantidad de dinero para comer durante 40 días. Sin embargo, encontró sitios en donde pudo ahorrar 4 euros al día en la comida. De esta forma, el presupuesto inicial le duró 60 días. ¿Cuánto dinero recibió?

En la figura 2 incluimos la respuesta de un estudiante a este problema.

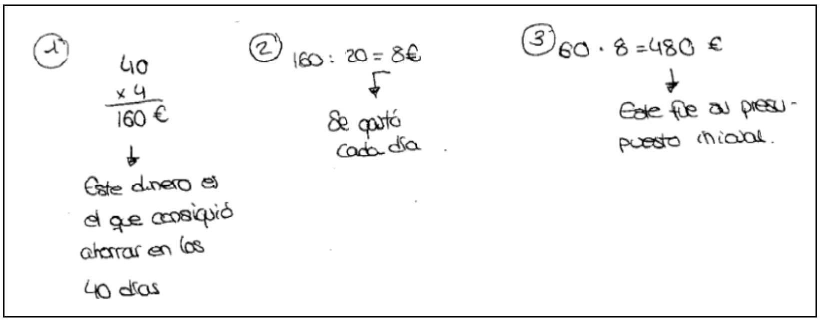


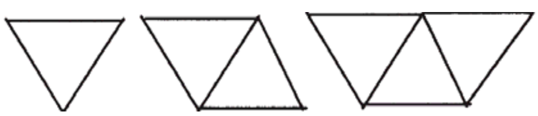
Figura 2. Respuesta del estudiante 1

En esta resolución todos los objetos que aparecen en el proceso de resolución son medidas de cantidades particulares de magnitudes y operaciones aritméticas con los valores numéricos de dichas medidas. No hay ningún rasgo propio de razonamiento algebraico (nivel 0).

Nivel 1 de algebrización

> *Intervienen objetos intensivos cuya generalidad se reconoce de manera explícita mediante lenguajes natural, numérico, icónico o gestual. Pueden intervenir símbolos que refieren a los intensivos reconocidos, pero sin operar con dichos objetos. En tareas estructurales se aplican relaciones y propiedades de las operaciones y pueden intervenir datos desconocidos expresados simbólicamente.*

Ejemplo 2: ¿Cuántos palillos son necesarios para formar la 4ª figura? ¿Y para formar la figura que estuviera en la posición 20? ¿Cuántos palillos serían necesarios para construir la figura que estuviera en la posición 100?



1ª 2ª 3ª 4ª

En la figura 3, se muestra la respuesta del estudiante 2.

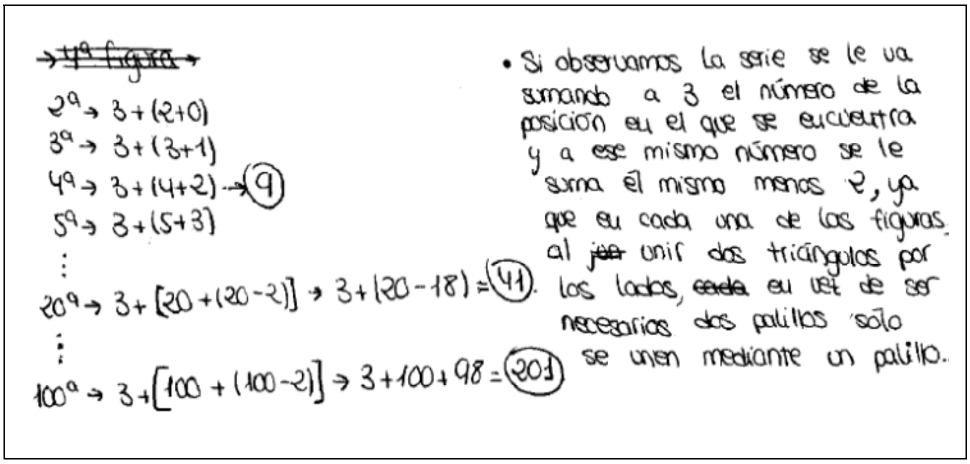


Figura 3. Respuesta del estudiante 2.

El estudiante 2 escribe la secuencia de números naturales contextualizados para designar las figuras desde la 2ª posición hasta la 100ª. Establece una correspondencia entre la posición y el número de palillos necesarios para construir la figura, encontrando la respuesta para las posiciones pedidas (20ª → 41; 100ª → 201). La escritura permite identificar una relación entre el lugar que ocupa la figura en la serie y el número de palillos. Así, el estudiante identifica la regla general:

N-ésimo lugar ➔ Nº de palillos=3+ [N + (N – 2)]

Esta regla la enuncia verbalmente y mediante símbolos no formalizados: los puntos suspensivos (…) indican que la misma estructura se mantiene para todos los términos; la flecha (➔), es la asignación de un valor (número de palillos) según el lugar que ocupa la figura en la serie. Estos símbolos evocan la escritura formal-literal que representa el término general de la sucesión "número de palillos":

$$a_n = 3 + [n + (n - 2)] = 2n + 1$$

Esta escritura aparecerá en niveles superiores de algebrización.

Nivel 2 de algebrización

Intervienen indeterminadas o variables expresadas con lenguaje simbólico – literal para referir a los intensivos reconocidos, aunque ligados a la información del contexto espacial o temporal. En tareas estructurales las ecuaciones son de la forma Ax ± B = C. En tareas funcionales se reconoce la generalidad, pero no se opera con las variables para obtener formas canónicas de expresión.

En el ejemplo 2, el estudiante 3, propone la solución de la figura 4.

1ª = 3 pal.
2ª = 5 pal. (3+2)
3ª = 7 pal. (5+2)

2ª fig ⇒ $3 \cdot 2 - 1 = 5$
3ª fig ⇒ $3 \cdot 3 - 2 = 7$
4ª f. ⇒ $3 \cdot 4 - 3 = 9$
nª f. ⇒ $3 \cdot n - (n-1)$

4ª figura → 3ª(+2) → 7 + 2 = 9 palillos
20ª fig → $3 \cdot 20 - 19$ = 41 palillos
100ª fig → $3 \cdot 100 - 99$ = 201 palillos

*(n-1) → Cada triángulo añadido se forma con 2 palillos, no con 3. Esta diferencia se acumula con cada nuevo triángulo que se añade.

→ Se multiplican los 3 palillos constituyentes del triángulo por tantos como indique el ordinal de la figura y a continuación se resta el anterior a dicho ordinal

Figura 4. Respuesta del estudiante 3.

Esta solución incluye los objetos indicados en la solución del estudiante anterior y además expresa el criterio de la correspondencia para un término general *n*, expresado con lenguaje natural y de manera simbólica – literal, *nºf* → *3n-(n-1)*. La fórmula refleja las acciones que se deben hacer con los datos del problema específico; no se opera con las variables para obtener una forma canónica de dicha expresión. El estudiante no llega a formular el criterio de la correspondencia de forma canónica operando con los símbolos literales para obtener la función lineal: $f(n) = 2n+1$.

Nivel 3 de algebrización

Se generan objetos intensivos representados de manera simbólica – literal y se opera con ellos; se realizan transformaciones en la forma simbólica de las expresiones conservando la equivalencia. Se realizan tratamientos con las incógnitas para resolver ecuaciones del tipo $Ax \pm B = Cx \pm D$, y la formulación simbólica y descontextualizada de reglas canónicas de expresión de funciones y patrones.

En la figura 5 incluimos la respuesta del estudiante 4 al ejemplo 1.

$40x = 60(x-4)$
$40x = 60x - 240$
$240 = 60x - 40x$
$240 = 20x$
$x = \frac{240}{20} = 12$ € recibe inicialmente para comer un día

En total recibe: 12 x 40 = 480 €

Figura 5. Respuesta del estudiante 4.

Este estudiante simboliza con la letra *x* el gasto diario previsto inicialmente para los 40 días, y el gasto diario efectivamente realizado mediante $x - 4$. Es capaz de plantear una ecuación que relaciona los valores numéricos de las medidas de las cantidades que intervienen. A continuación aplica un procedimiento algorítmico para despejar la incógnita y hallar su valor (x = 12 €, dinero que recibe inicialmente para comer un día). Se trata de una modelización claramente algebraica (nivel 3).

Evidentemente, se pueden identificar niveles más avanzados de razonamiento algebraico, como aquellos que implican el reconocimiento, enunciado y justificación de propiedades estructurales de los objetos matemáticos que intervienen en la práctica correspondiente. Sin embargo, puesto que el objetivo de este trabajo se centra en los conocimientos útiles en la formación de maestros de Educación Primaria, consideramos necesario centrarnos en estos tres primeros niveles de algebrización.

Síntesis e implicaciones para la formación de profesores

Los niveles de algebrización que proponemos están relacionados con los dos aspectos que Kaput (2008) identifica como característicos del álgebra y del razonamiento algebraico; a saber, el álgebra como:

a) Simbolización sistemática de generalizaciones de regularidades y restricciones.

b) Razonamiento guiado sintácticamente y acciones sobre generalizaciones expresadas en sistemas de símbolos convencionales.

El aspecto a) se concreta en nuestro modelo en los niveles proto-algebraicos de razonamiento 1 y 2, mientras que el b) se asociada al nivel 3, donde el álgebra está ya consolidada. Nuestro requerimiento del uso de lenguaje simbólico-literal para asignar un nivel propiamente algebraico (nivel 3) a una práctica matemática, y que se opere de manera analítica/sintáctica con dicho lenguaje, concuerda con las posiciones de otros autores interesados por definir "lo algebraico" (Puig y Rojano, 2004, p. 198). Asimismo, operar con la incógnita como si fuese conocida, representada en lenguaje simbólico-literal, marca diferencias distintivas entre el razonamiento aritmético y el propiamente algebraico. "Este tipo de insuficiencia operacional en lo que está representado en el estadio pre-simbólico del álgebra sugiere la presencia de un punto de corte o cambio entre operar sobre la incógnita y no operar sobre ella, aquí al nivel del pensamiento individual" (Filloy, Puig y Rojano, 2008, 93).

En consonancia con las propuestas de los autores que investigan en el campo conocido como "algebra temprana" (Carraher y Schliemann, 2007), hemos propuesto distinguir dos niveles primarios de razonamiento proto-algebraico para distinguirlos de otras formas estables o consolidadas de razonamiento algebraico. La idea clave es "hacer explícita la generalidad", de las relaciones (equivalencia u orden), estructuras, reglas, funciones o en la modelización de situaciones matemáticas o extra-matemáticas, al tiempo que se opera con dicha generalidad o se discute a propósito de ella.

Nuestras reflexiones sobre la naturaleza del razonamiento algebraico tienen implicaciones para la formación de maestros. No basta con elaborar propuestas curriculares (NCTM, 2000) que incluya el álgebra desde los primeros niveles educativos, se precisa que el docente actúe como principal agente de cambio en la introducción y desarrollo del razonamiento algebraico en las aulas de primaria. El modelo de caracterización del "algebra temprana" que se propone en este trabajo, en particular la distinción de los niveles 1 y 2 de razonamiento proto-algebraico, puede ser útil en la formación de maestros de educación primaria. El análisis focalizado en el reconocimiento de objetos y procesos propios del pensamiento algebraico, puede facilitar la identificación de rasgos de las prácticas matemáticas sobre los cuales se puede intervenir para aumentar progresivamente el nivel de algebrización de la actividad matemática de los alumnos.

Reconocimiento

Trabajo realizado en el marco del proyecto de investigación, EDU2010-14947, Ministerio de Ciencia e Innovación (MICINN) y fondos FEDER.

Referencias

Bednarz, N., Kieran, C., y Lee, L. (1996). *Approaches to Algebra: Perpectives for Research and Teaching*. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.

Bolea, P. (2002). *El proceso de algebrización de organizaciones matemáticas escolares.* Tesis doctoral. Universidad de Zaragoza.

Carraher, D. W., Martínez, M. V. y Schliemann. A. D. (2008). Early algebra and mathematical generalization. *ZDM Mathematics Education*, 40, 3-22.

Carraher, D. W. y Schliemann, A. L. (2007). Early algebra and algebraic reasoning. En: F. Lester (Ed.), *Second Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning* (Vol. 2, 669-705). Charlotte, N.C: Information Age Publishing, Inc. y NCTM.

Cooper, T. J. y Warren, E. (2008). The effect of different representations on years 3 to 5 students' ability to generalize. *ZDM Mathematics Education*, 40, 23-37.

Filloy, E., Puig, L. y Rojano, T. (2008). *Educational algebra. A theoretical and empirical approach*. New York: Springer.

Godino, J. D., Batanero, C. y Font, V. (2007). The onto-semiotic approach to research in mathematics education. *ZDM. The International Journal on Mathematics Education*, 39 (1-2), 127-135.

Godino, J. D., Castro, W., Aké, L. y Wilhelmi, M. D. (2012). Naturaleza del razonamiento algebraico elemental. *Boletim de Educação Matemática - BOLEMA*, 26 (42B), 483-511.

Godino, J. D., Font, V., Wilhelmi, M. R. y Lurduy, O. (2011). Why is the learning of elementary arithmetic concepts difficult? Semiotic tools for understanding the nature of mathematical objects. *Educational Studies in Mathematics*, 77 (2), 247-265.

Kaput, J.(2008). What is algebra? What is algebraic reasoning? En J. Kapunt, D. W. Carraher, y M. L. Blanton (Eds), *Algebra in the early grades* (pp. 5-17). New York: Routledge.

Kieran, K. (2007). Learning and teaching algebra at the middle school through college levels. Building meaning for symbols and their manipulation. En, F. Lester (Ed.), *Second Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning* (Vol. 2, 707-762). Charlotte, N.C: Information Age Publishing, Inc. y NCTM.

Lacasta, E., Madoz, E. G. y Wilhelmi, M. R. (2006). El paso de la aritmética al álgebra en la Educación Secundaria Obligatoria. *Indivisa*, Extra 4, 79–90.

Mason, J., y Pimm, D. (1984). Generic examples: seeing the general in the particular. *Educational Studies in Mathematics*, 15, 277-289.

National Council of Teachers of Mathematics (2000). *Principles and standards for school mathematics.* Reston, VA: NCTM.

Puig, L., y Rojano, T. (2004). The history of algebra in mathematics education. En K. Stacey, H. Chick, y M. Kendal (Eds.), *The teaching and learning of algebra: The 12th ICMI study* (pp. 189-224). Norwood, MA: Kluwer Academic Publishers.

Radford, L. (2000). Signs and meanings in students' emergent algebraic thinking: a semiotic analysis. *Educational Studies in Mathematics,* 42, 237-268.

Radford, L. (2003). Gestures, speech, and the sprouting of signs: A semiotic-cultural approach to students' types of generalization. *Mathematical Thinking and Learning*, 5(1), 37-70.

Ruiz, N., Bosch, M., Gascón, J. (2010). La algebrización de los programas de cálculo aritmético y la introducción del álgebra en secundaria. En M.M. Moreno, A. Estrada, J. Carrillo y T.A. Sierra, (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XIV* (pp. 545-556). Lleida: SEIEM.