REVISTA EMA
2000, VOL. 6, Nº 1, 27-39

¿INECUACIONES EN LOS COMPLEJOS?[1]

EDGAR A. GUACANEME

En tanto profesores de matemáticas, presentamos[2] aquí una reflexión que intenta cuestionar la imposibilidad de definir y solucionar inecuaciones en los números complejos. Así, en primer lugar, asumimos como objeto de provocación la existencia de un conjunto-solución para una determinada "inecuación" de variable compleja. En segundo lugar, como consecuencia de haber cuestionado el uso de la relación de orden usual de los números reales en el campo de los números complejos, recapitulamos un criterio de comparación y ordenación entre complejos y, de esta manera, definimos una relación de orden en los complejos. Finalmente, a través de dicha relación de orden, redefinimos y resolvemos algunas inecuaciones de variable compleja, las cuales revelan un aspecto estético admirable en la representación gráfica de sus conjuntos-solución.

INTRODUCCIÓN

El contexto general de la pregunta

Desde ciertas concepciones, "hacer matemáticas" parece ser una actividad exclusiva de los matemáticos, o mejor, de los investigadores de las matemáticas. El resultado de esta actividad generalmente puede conducir a ofrecer a la comunidad matemática nuevas teorías, teoremas y/o demostraciones. Desde esta postura, existe una exigua probabilidad de que los aprendices y profesores de las matemáticas podamos emprender una actividad tal.

Desde otras perspectivas, algunas de ellas completamente antípodas a las primeras, se reconoce una mayor probabilidad de "hacer matemáticas"

---

1. Una versión preliminar de este artículo fue presentada como conferencia en la XII Reunión Latinoamericana de Matemática Educativa (Relme 12), que se llevó a cabo en Bogotá, Colombia, en 1998.
2. Utilizaré en el documento la primera persona del plural debido a que si bien el trabajo de reflexión sobre la experiencia y escritura del mismo fue una tarea personal (en la que por supuesto interactué con algunos colegas), la experiencia en torno a la pregunta fue una tarea en la que participamos, en el primer semestre de 1998, un grupo de profesores del área de matemáticas del Plan de Nivelación Universitaria de la Universidad del Valle. En este sentido, el uso de este estilo gramatical es una manera de reconocer el trabajo de aquel equipo de profesores.

por parte de los aprendices y maestros, sin que el resultado de esta actividad implique la producción de una matemática reconocida por la comunidad de matemáticos como socialmente novedosa. Se habla aquí de “hacer matemáticas para sí” y se relaciona con el hecho de aprender matemáticas, de construir conocimiento matemático para sí mismo. Este aprendizaje o construcción generalmente exige y promueve acciones de pensamiento matemático similares a las implicadas en la construcción de nuevas teorías matemáticas.

Algunos maestros, como parte de nuestro quehacer docente, nos preocupamos por permitir y favorecer la realización de esta actividad en nuestros estudiantes. En esta dirección nos esforzamos por diseñar estrategias que enfrenten a los estudiantes con problemas y preguntas que en el proceso de solución o respuesta impliquen —entre otras— el uso del razonamiento matemático (v.g., el uso de los procesos de conjetura, de argumentación y validación), de la resolución de problemas (v.g., la modelización de una situación, la identificación del problema, la búsqueda de soluciones, la verificación y contextualización de respuestas), o de la comunicación y/o representación de ideas matemáticas (v.g., la simbolización, la elaboración e interpretación de gráficas). En algunas ocasiones, estas estrategias les conducen a aprender algo más de matemáticas, y en algunas oportunidades logramos percibir que también nosotros hemos aprendido un poco más de matemáticas.

Sin embargo, esta actividad de “hacer matemáticas para sí” es poco frecuente en nuestra vida profesional como profesores de matemáticas y no siempre en nuestro quehacer docente hacemos un esfuerzo semejante para favorecer nuestro aprendizaje de las matemáticas. Esta actitud tal vez pueda justificarse en nuestra creencia de que conocemos ya las matemáticas que nuestros estudiantes deben aprender a través de la escolaridad y que, en consecuencia, no necesitamos saber nada más de éstas que lo aprendido en los procesos de formación de pregrado; o tal vez pueda justificarse en las escasas preguntas y dudas que sobre las matemáticas nos surgen cuando estamos adelantando procesos de preparación de clases.

El presente documento reporta, de manera organizada, una experiencia de construcción “para sí” de conocimiento matemático en torno a la pregunta sobre la posibilidad de definir y resolver inecuaciones de variable compleja. Esta experiencia fue vivida —a partir de las reflexiones que la práctica de enseñanza nos posibilitaba— de manera personal y colectiva por profesores de matemáticas dispuestos a aprender algo más de aquellas matemáticas que procurábamos que nuestros estudiantes aprendieran. En consecuencia, en tanto experiencia de construcción “para sí”, no pretende aportar nuevo conocimiento al acervo de conocimientos de la comunidad de matemáticos;

aunque su intención sí es comunicar que es posible y necesario generar vivencias de construcción de conocimiento matemático —"para sí"— por parte de profesores de matemáticas de cualquier nivel de la escolaridad.

El contexto particular de la pregunta

Como profesores de matemáticas en secundaria o en la universidad, frecuentemente hemos introducido los números complejos como un conjunto en el que encuentran solución algunas ecuaciones de solución vacía en los números reales. Particularmente, la no existencia de raíces reales para ecuaciones cuadráticas de la forma $x^2 + \alpha = 0$ donde $\alpha \in \Re^+, x \in \Re$, la incorporamos como motivación, justificación o recurso didáctico en la aparición de los complejos.

No con esta misma frecuencia, advertimos que admitir la existencia de raíces no reales implica un cambio en el conjunto de referencia de la variable de la ecuación; ya no es el conjunto de los números reales, o un subconjunto de los mismos, sino los números complejos. Así, en el ejemplo anterior, la ecuación que solucionamos es $z^2 + \alpha = 0$ donde $\alpha \in \Re^+, z \in C$.

Posiblemente, tampoco notamos que en el proceso de solución de estas ecuaciones utilizamos estrategias y recursos matemáticos válidos para ecuaciones de variable real, y no reflexionamos sobre la validez de los mismos en ecuaciones de variable compleja (recordemos, por ejemplo, el uso que se hace de la factorización de expresiones polinómicas o la utilización de la *fórmula cuadrática*). Sabemos sí, que tanto los números reales como los números complejos constituyen un campo, y seguramente podemos reconocer en esta estructura algebraica común y/o en la afinidad de sus operaciones, la justificación y legitimación de los procedimientos, algoritmos y/o procesos.

Pero si consideramos que la estructura de campo legitima la equivalencia procedimental en la solución de ecuaciones, ¿qué es lo que impide que existan procedimientos análogos en la solución de inecuaciones de variable compleja?, o más aun, ¿por qué no se definen inecuaciones en los números complejos?

Estas preguntas, eventualmente abordadas en cursos de variable compleja, emergen inicialmente en nosotros como inquietud de carácter estrictamente matemático, y no siempre llegamos a reconocer su validez al interior del ambiente de nuestras indagaciones didácticas o pedagógicas. Ingenuamente, hasta llegamos a pensar que conocer su respuesta sólo ampliará el acervo de conocimientos matemáticos que se catalogan como inútiles en la escolaridad básica, denominación debida a la ausencia de los mismos en los habituales programas escolares.

UN EJEMPLO DE NUESTRA COSECHA

Con la intención de construir pacientemente camino hacia una respuesta a las anteriores preguntas, examinemos en primer lugar un resultado que, extraído de la experiencia de debate y confrontación de nuestro conocimiento matemático (actividad relativamente cotidiana entre algunos profesores del Plan de Nivelación Universitaria de la Universidad del Valle), hemos podido compartir parcialmente con nuestros estudiantes a través de una situación expuesta en las *Guías de Estudio de Álgebra*:[3]

> Discuta la validez de cada una de las siguientes afirmaciones:
>
> - Para la ecuación cuadrática $z^2 + 1 = 0$, con $z \in C$, los elementos del conjunto $S_1 = \{\pm i\}$ son sus soluciones.
>
> - Para la inecuación cuadrática $z^2 + 1 < 0$, con $z \in C$, los elementos del conjunto $S_2 = \{\pm 2i, \pm 3i, \pm 4i, \pm 5i\}$ son algunas de sus soluciones.
>
> - Para la inecuación cuadrática $z^2 + 1 > 0$, con $z \in C$, los elementos del conjunto $S_3 = \{\pm\frac{1}{2}i, \pm\frac{1}{4}i, \pm\frac{2}{3}i, \pm\frac{5}{8}i\}$ son algunas de sus soluciones.

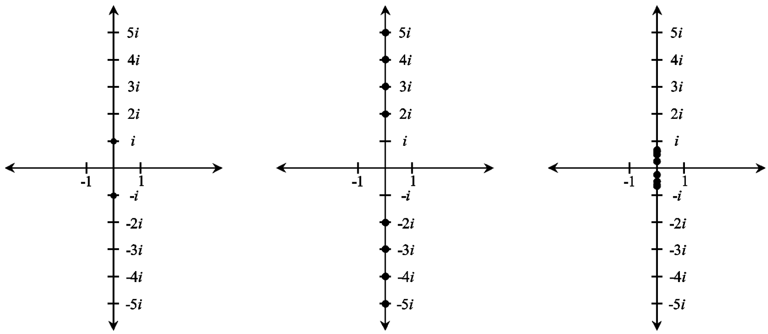
Desarrollar el producto de dos números complejos iguales y sumarlo con el real 1 es suficiente para verificar la validez de cada una de las afirmaciones anteriores. Tal vez por ello, nos parezca que lo más importante de la situación reseñada no sea la respuesta frente a la validez de los enunciados, sino la *visualización del comportamiento* de los elementos de cada conjunto S y el patrón que los mismos sugieren. A través de la representación de estos conjuntos en el plano complejo, obtenemos una manera de visualizar dicho comportamiento y/o patrón (ver Figura Nº 1).

Inicialmente, nuestra intuición nos conduce a enunciar dos hipótesis que condensan nuestro registro visual:

H_1: Los números complejos de la forma *bi*, donde $|b| > 1$, satisfacen la inecuación $z^2 + 1 < 0$.

---

3. Material escrito por docentes del Plan de Nivelación Universitaria a través del cual se plantean situaciones problema sobre el discurso matemático implicado en los cursos *Aritmética y funciones I y II*. Estas situaciones pretenden, fundamentalmente, explicitar elementos que aparecen tácitos en la presentación del texto guía y/o poner en escena escolar algunos otros aspectos relevantes.



$z^2 + 1 = 0$ $\qquad$ $z^2 + 1 < 0$ $\qquad$ $z^2 + 1 > 0$

$S_1 = \{\pm i\}$ $\qquad$ $S_2 = \{\pm 2i, \pm 3i, \pm 4i, \pm 5i\}$ $\qquad$ $S_3 = \{\pm\frac{1}{2}i, \pm\frac{1}{4}i, \pm\frac{2}{3}i, \pm\frac{5}{8}i\}$

Figura Nº 1.

H_2: Además de todos los números reales, los números complejos de la forma bi, donde $|b| < 1$, satisfacen la inecuación $z^2 + 1 > 0$.

Un impulso de necesidad de validación, nos conduce luego hacia la búsqueda de argumentos; entonces, nos damos cuenta de que el proceso de demostración de la validez de estas hipótesis ya no sólo implica desarrollar el producto de dos números complejos iguales y sumarlo con el real 1, sino que, adicionalmente, debemos reconocer las consecuencias impuestas por las restricciones sobre el valor numérico del real *b*.

Pero ahora, justo antes de plasmar la argumentación a modo de demostración, nuestro deseo de generalización nos conduce a formular unas nuevas hipótesis que ubican a las anteriores como un caso particular:

H_3: Los números complejos de la forma bi, donde $|b| > \sqrt{\alpha}$, $\alpha \in \Re^+$ satisfacen la inecuación $z^2 + \alpha < 0$.

H_4: Además de todos los números reales, los números complejos de la forma bi, donde $|b| < \sqrt{\alpha}$, $\alpha \in \Re^+$ satisfacen la inecuación $z^2 + \alpha > 0$.

Examinemos la siguiente argumentación sobre la validez de las hipótesis H_3 y H_4, que se apoya en el hecho de que un número complejo satisface una inecuación, si al reemplazarlo en la misma se obtiene una desigualdad válida:

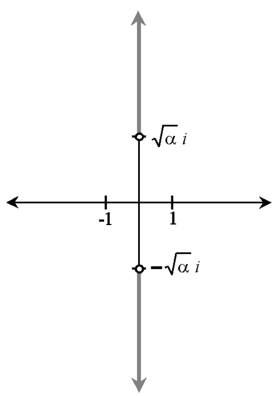
Sea $z = 0 + bi$, entonces $z^2 + \alpha = (0 + bi)^2 + \alpha = -b^2 + \alpha$.

Ahora bien:

a. Cuando $|b| > \sqrt{\alpha}$, se tiene que $b > \sqrt{\alpha} \vee b < -\sqrt{\alpha}$; de donde se sigue que $b^2 > \alpha$, o lo que es equivalente, que $-b^2 < -\alpha$; así, $-b^2 + \alpha < 0$. Lo cual demuestra H_3.

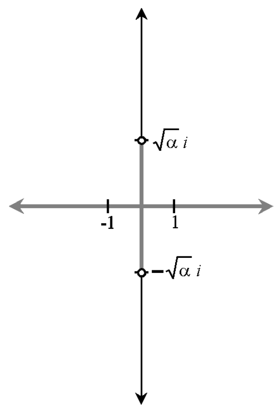
b. Cuando $|b| < \sqrt{\alpha}$, se tiene que $-\sqrt{\alpha} < b < \sqrt{\alpha}$; de donde se sigue que $b^2 < \alpha$; así, $0 < -b^2 + \alpha$. Lo cual demuestra la validez de H_4.

La representación gráfica de estas conclusiones nos permite observar en el eje imaginario intervalos de solución de las inecuaciones de variable compleja, análogos a los obtenidos al resolver inecuaciones de variable real (ver Figura Nº 2).



$z^2 + \alpha < 0, \alpha \in \Re^+$

$S_2 = \{bi \mid |b| > \sqrt{\alpha}\}$



$z^2 + \alpha > 0, \alpha \in \Re^+$

$S_3 = \{bi \mid |b| < \sqrt{\alpha}\} \cup \Re$

Figura Nº 2.

Es precisamente este resultado en los números complejos y su afinidad con el resultado usual en los números reales, el que nos anima a continuar con la indagación en torno a las preguntas iniciales: ¿qué es lo que impide que existan procedimientos análogos en la solución de inecuaciones de variable compleja? y ¿por qué no se definen inecuaciones en los números complejos? Para ello, veamos la formulación de las hipótesis recíprocas a H_3 y H_4, respectivamente:

H$_5$: Los números complejos que satisfacen la inecuación $z^2 + \alpha < 0$, donde $\alpha \in \Re^+$ son de la forma bi, donde $|b| > \sqrt{\alpha}$.

H$_6$: Además de todos los números reales, los números complejos que satisfacen la inecuación $z^2 + \alpha > 0$, donde $\alpha \in \Re^+$ son de la forma bi, donde $|b| < \sqrt{\alpha}$.

La demostración de su validez nos conduce a un terreno posiblemente aún más álgido, pero no menos interesante. Sin embargo, presentemos primero una argumentación típica para la hipótesis H$_5$:

Supongamos que la inecuación $z^2 + \alpha < 0$ tiene como solución al número complejo $z = a + bi$. Se tendría por tanto que $(a + bi)^2 + \alpha < 0$, o lo que es equivalente, que $(a^2 - b^2 + \alpha) + (2ab)i < 0$. Pero para que ello *tenga sentido*, es necesario que $2ab = 0$, es decir, que $a = 0 \vee b = 0$, lo cual nos determina tres casos posibles. Examinemos cada uno de ellos:

a. Si $a = 0 \wedge b \neq 0$ entonces $-b^2 + \alpha < 0$, de donde se sigue que $-b^2 < -\alpha$ y por tanto $b^2 > \alpha$. Así, $|b| > \sqrt{\alpha}$.

b. Si $a \neq 0 \wedge b = 0$ entonces $a^2 + \alpha < 0$, de donde se sigue que $a^2 < -\alpha$, lo cual no es posible ya que no existe un real a cuyo cuadrado sea menor que un número negativo (recuérdese que $\alpha \in \Re^+$ y por tanto $-\alpha \in \Re^-$).

c. Si $a = 0 \wedge b = 0$ entonces $\alpha < 0$, lo cual contradice la consideración $\alpha \in \Re^+$.

Por tanto el complejo z debe tener la forma binómica $0 + bi$, donde $|b| > \sqrt{\alpha}$, $\alpha \in \Re^+$.

Podríamos esgrimir un argumento similar para validar la hipótesis H$_6$, sin embargo, en él también encontraríamos un hecho que constituye una nueva puerta de acceso a nuestras inquietudes iniciales. Este hecho previamente lo hemos resaltado mediante las palabras *tenga sentido* aplicadas a la desigualdad $(a^2 - b^2 + \alpha) + (2ab)i < 0$. Consideramos que con estas palabras se está enunciando que el símbolo “<” está representando el *orden usual* en los números reales y que por ello no es posible aplicarlo si la expresión $(a^2 - b^2 + \alpha) + (2ab)i$ representa un complejo no real. Pero, ¿por qué el símbolo “<” no puede significar una relación de orden en los números complejos?

¿ORDEN EN LOS COMPLEJOS?

Desde nuestro acervo de conocimientos, ante la anterior pregunta, la respuesta ingenua que más frecuentemente emerge es que en el conjunto de los números complejos no se puede definir una relación de orden, porque éste no es un campo ordenado. Aunque también nos vemos tentados a responder que podría establecerse una relación de orden a través del uso de la norma o módulo de los complejos, advertimos que la propiedad antisimétrica no se satisfaría[4]. Sin embargo, sabemos también que el desconocimiento de la existencia de una relación de orden no es argumento suficiente para garantizar su inexistencia.

Vemos así la necesidad de realizar una pesquisa en los libros de texto para determinar si en ellos se aborda la discusión en torno al orden en los complejos. En general, el resultado de esta indagación no nos conduce a una respuesta diferente a las arriba mencionadas. Empero, en algunos pocos textos se introduce someramente una reflexión acerca de la relación de orden en los complejos. Por ejemplo, Rey Pastor (1966, p. 451) ofrece, a modo de ejercicios, dos criterios de ordenación de los complejos. Enunciemos y examinemos el primero de ellos (Criterio de Thieme), notando que utilizamos el símbolo $\prec$ para denotar la relación de orden en los complejos, mientras que con $<$ simbolizamos la relación de orden usual en los reales:

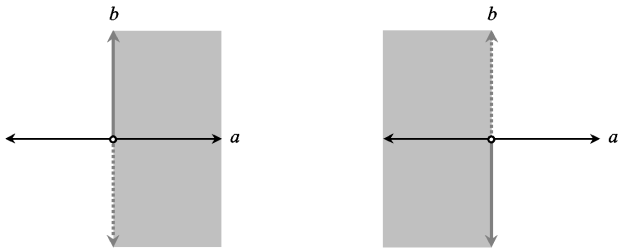
> Sean z y w dos números complejos, donde $z = a + bi$ y $w = c + di$. Se dice que $z \prec w$ cuando $a < c$, o cuando siendo $a = c$, se verifica que $b < d$.

En primer lugar, observamos que dos números complejos cualesquiera, expresados en su forma binómica, se pueden comparar mediante este criterio, definiendo así cuál de los dos es el mayor. Particularmente, mediante la comparación con el complejo cero $(0 + 0i)$ es posible definir un subconjunto de números complejos *positivos*, así como otro subconjunto de complejos *negativos*; gráficamente, en cada caso se tendría una región que incluye dos de los cuadrantes y uno de los semiejes imaginarios (ver Figura Nº 3).

En segundo lugar, adjuntando al criterio de Thieme la relación usual de igualdad entre complejos, se obtiene una relación que es reflexiva, antisimé-

4. Recordemos que una relación R es antisimétrica en R si y sólo si cuando $x \neq y$, no se puede tener simultáneamente $x \mathsf{R} y$ y $y \mathsf{R} x$. En los complejos, a través de un contraejemplo, se verifica fácilmente que la relación de orden definida por la norma no es antisimétrica: Sea $z = 1 + 0i$ y $w = 0 + i$, luego siendo $z \neq w$ se tiene $|z| \leq |w|$ a la vez que $|w| \leq |z|$.

trica y transitiva, y por tanto se configura como una relación de orden para los números complejos.



$C^{+} = \{z = a + bi|0<z\}$ $C^{-} = \{z = a + bi|z<0\}$

Figura Nº 3.

En tercer lugar, colegimos que aunque exista una relación de orden en los complejos, no se sigue necesariamente que éstos sean un campo ordenado. Recordemos que para que un campo sea ordenado se deben satisfacer cuatro condiciones: "Todo elemento de un campo ordenado pertenece a una de las tres clases siguientes: el elemento es 0, es positivo o es negativo. Si $a \neq 0$, entonces a y $-a$ son de clases diferentes. La identidad multiplicativa de un campo ordenado es positiva. Si a es un elemento de un campo ordenado, $a \neq 0$, entonces a^2 es positivo." (Tomber, 1967, p. 338).

Como señalamos anteriormente, la primera condición se satisface, ya que se determinan tres clases de complejos; la simetría de C^{+} con C^{-} respecto del complejo $0 + 0i$ garantiza el cumplimiento de la segunda condición; es claro que $1 + 0i$ (identidad multiplicativa) es positivo, con lo cual se verifica la tercera condición; pero, no se satisface la última ya que existen infinitos complejos, particularmente el complejo i, cuyo cuadrado no pertenece al conjunto de los complejos positivos.

ALGUNAS INECUACIONES EN LOS COMPLEJOS

Ahora bien, si nuestro interés es determinar cuáles son los números complejos no nulos cuyo cuadrado no pertenece al conjunto de los complejos positivos, nos enfrentaremos a la inecuación de variable compleja $z^2<0$, donde "<" representa la desigualdad definida bajo el criterio de Thieme. Para resolverla, supongamos que existe un complejo $z = a + bi$ que la satisface. Entonces tenemos que $(a + bi)^2 < 0 + 0i$, lo cual puede reescribirse mediante la expresión $(a^2 - b^2) + (2ab)i < 0 + 0i$. Aplicando ahora el criterio de Thieme se presentan dos situaciones, a saber:

a. $a^2 - b^2 < 0$, o,

b. siendo $a^2 - b^2 = 0$ se verifica que $2ab < 0$.

No es difícil verificar que los complejos que satisfacen cada una de las situaciones anteriores se pueden representar de manera gráfica mediante regiones o “semirrectas”, respectivamente, (ver Figura Nº 4).

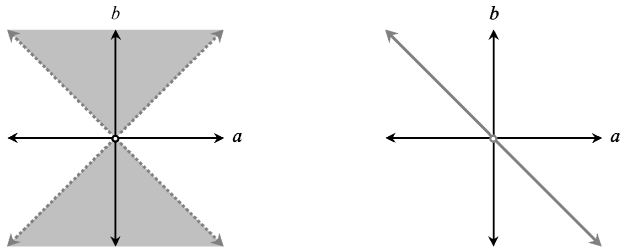


Figura Nº 4.

De donde se concluye que los complejos que solucionan la inecuación $z^2 < 0$ pertenecen a la región resultante de unir las dos gráficas anteriores.

En este resultado se vislumbran ya matices de una belleza matemática habitualmente esquiva, que se nos revela con mayor intensidad en la solución de la inecuación de variable compleja que hemos venido trabajando: $z^2 + \alpha < 0$, $\alpha \in \Re^+$, advirtiendo nuevamente que la desigualdad implicada está definida bajo el criterio de Thieme. De manera similar que en la anterior inecuación, supongamos que existe un complejo $z = a + bi$ que la satisface. Entonces tenemos que $(a + bi)^2 + \alpha < 0 + 0i$, lo cual puede reescribirse mediante la expresión $(a^2 - b^2 + \alpha) + (2ab)i < 0 + 0i$. Aplicando el criterio de Thieme se presentan dos situaciones:

a. $a^2 - b^2 + \alpha < 0$, o,

b. siendo $a^2 - b^2 + \alpha = 0$ se verifica que $2ab < 0$.

Para verificar cuáles son los complejos que satisfacen la inecuación $a^2 - b^2 + \alpha < 0$, expresada en la situación (a.), podemos recurrir a la interpretación de ésta a través de la función definida por $f(x, y) = x^2 - y^2 + \alpha$ y de su “relación” con el plano xy. Graficando la función *f*, se obtiene un paraboloide hiperbólico simétrico respecto a los planos zx y yz, con $(0, 0, \alpha)$ como punto de ensilladura o minimax (ver Figura Nº 5). Los puntos de la superficie que están "por debajo" del plano xy, forman dos regiones determinadas por la curva de nivel (hipérbola) con este plano. Estos puntos se pueden hacer corresponder con la solución de la inecuación $a^2 - b^2 + \alpha < 0$ (ver Figura Nº 6).

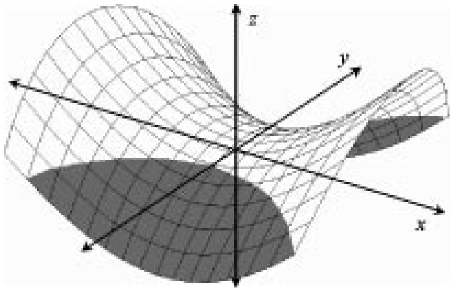


Figura Nº 5.

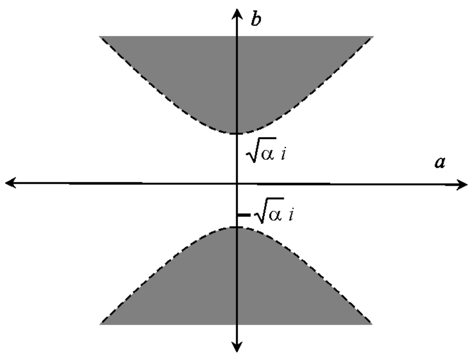


Figura Nº 6.

Ahora bien, los complejos $z = a + bi$ para los cuales $a^2 - b^2 + a = 0$, expresada en la situación (b.), se pueden graficar mediante la hipérbola con vértices $\pm\sqrt{\alpha}i$ y asíntotas $a = \pm b$. De éstos, seleccionamos aquellos para los cuales $2ab < 0$; es decir, las dos "semiramas" de la hipérbola ubicadas en los cuadrantes II y IV.

Por lo tanto, la inecuación de variable compleja $z^2+\alpha<0$, $\alpha\in\Re^+$ tiene como solución los complejos de dos de las regiones definidas por la hipérbola y por dos "semiramas" de la misma (ver Figura Nº 7).

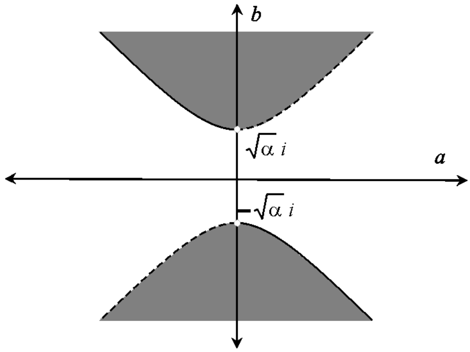


Figura Nº 7.

De manera análoga, podríamos mostrar que la inecuación $z^2+\alpha>0$, $\alpha\in\Re^+$, tiene como solución los complejos de la tercera región y las otras dos "semiramas"; mientras que la ecuación $z^2+\alpha = 0$, $\alpha\in\Re^+$ la satisfacen los complejos de la forma $\pm\sqrt{\alpha}i$.

A MODO DE CONCLUSIÓN

Desde una perspectiva matemática, de una parte hemos establecido —a través de la formulación de una relación de orden en los complejos— que existe la posibilidad de definir y solucionar inecuaciones en este campo no ordenado, con lo cual podemos conjeturar que la condición de campo ordenado no es necesaria, pero sí suficiente, para definir inecuaciones. Como lo reseñamos en la introducción de este documento, este hecho no aporta nada novedoso al acervo de conocimientos matemáticos aceptados por la comunidad matemática, pero sí al conocimiento personal de algunos profesores de matemáticas.

De otra parte, desde esta misma perspectiva, podemos intuir que en la solución de las inecuaciones que se definan en este campo y bajo la relación de orden construida, podremos frecuentemente recurrir a las funciones en dos variables y a la gráfica de las superficies como recurso matemático que ofrece a través de la visualización de la solución un aspecto estético encantador.

Desde una perspectiva didáctica, surgen también algunas observaciones. De una parte, en el contexto de la matemática escolar, se redimensiona la cuestión acerca de las diferencias entre los números reales y los números complejos, ya que podría colegirse que no existen —o no debieran existir— diferencias entre estos conjuntos numéricos más allá de la condición de ser, o no, campo ordenado; para ambos conjuntos es posible definir las operaciones aritméticas usuales, una relación de igualdad a través de la cual definir ecuaciones, y una relación de orden a partir de la cual se pueden definir inecuaciones.

De otro lado, es innegable que aún existen conocimientos matemáticos que circulan en las matemáticas escolares, a través de textos y maestros de matemáticas, con un halo de verdad incuestionable y eterna. Es precisamente sobre estos conocimientos que se hace necesario —mas no suficiente— generar actividades de indagación y cuestionamiento como aspecto vital tanto en la construcción personal del conocimiento matemático para sí, como en la investigación en Didáctica de las Matemáticas.

Finalmente, la importancia que pueda tener la aproximación de respuesta a las preguntas iniciales de este documento, se ve disminuida ante la posibilidad que nos hemos brindado de cualificar y enriquecer nuestra formación matemática y didáctica, al convertir un aspecto de nuestra labor docente cotidiana en objeto de reflexión e indagación, y con ello haber sentido y vivido una manera de "hacer matemáticas para sí".

REFERENCIAS

Pastor, R. (1966). *Elementos de análisis algebraico*. Madrid: Martin–Industria Gráfica.

Tomber, M. (1967). *Introducción al álgebra contemporánea.* México: Centro Regional de Ayuda Técnica.

Edgar A. Guacaneme
"una empresa docente"
Universidad de los Andes
A.A. 4976
Tel.: 3394949 ext. 2717
Bogotá, Colombia
eguacane@uniandes.edu.co