

EL CASO DE LA CIRCUNFERENCIA TANGENTE A OTRAS DOS. ANÁLISIS DE LA ACTUACIÓN DE UNA PROFESORA DE MAGISTERIO

THE CASE OF THE CIRCLE TANGENT TO ANOTHER TWO CIRCLES. ANALYSIS OF THE PERFORMANCE OF A TEACHER IN A TEACHERS' COLLEGE

Guillén, G. ⁽¹⁾, **Siñériz, L.** ⁽²⁾

Universitat de València ⁽¹⁾,

Universidad Nacional del Comahue.

Centro Regional Universitario Bariloche. Argentina ⁽²⁾

Resumen

Examinamos la actuación de una profesora de Magisterio de Valencia al desarrollar una situación abierta (SA) con estudiantes de 4º curso en el ámbito de una asignatura de didáctica de la geometría. La situación se ha usado como contexto para la enseñanza de competencias referidas a la resolución de problemas de construcciones geométricas y para la enseñanza de procesos matemáticos. Los datos del estudio provienen del relato que hace la profesora de la enseñanza impartida y de grabaciones de video de las sesiones correspondientes. Presentamos el análisis realizado de esta actuación centrandó especialmente la atención en elementos que atañen a su planificación para el desarrollo de la SA y aquellos que se han considerado como objeto de enseñanza a partir de la misma.

Abstract

We have analysed the performance of a teacher in a teachers' college in Valencia during an open activity with fourth-year students in a class of Geometry teaching. This activity was used as a context for the teaching of competences related to the resolution of geometric construction problems and the teaching of mathematical processes. The information of the study comes from the teacher's report and from the video recording of the classes. The analysis of the performance is focused on the elements connected with the planning of the open activity and those other elements that have been considered as teaching subjects.

Palabras clave: *Planteamiento de problemas- resolución de problemas- fases- heurísticas-gestión-conjeturas- pruebas.*

Key words: *Problem posing-problem solving- heuristics- phase- conjecture- proof-management.*

Presentación

Los problemas de construcción pueden considerarse como situaciones interesantes pues propician el estudio sobre modos de comportamiento tanto al plantear como al resolver problemas (Brown & Walter, 1983); algunos corresponden a situaciones abiertas de las que se derivan diversos problemas que promueven la elaboración de estrategias personales de resolución. Las construcciones geométricas ofrecen oportunidades para desarrollar prácticas propias del quehacer matemático; pueden considerarse como contenido curricular objeto de enseñanza y como metodología para la enseñanza de otros contenidos geométricos, dos aspectos que se destacan en los currículos de enseñanza primaria y secundaria de España y Argentina.

En este trabajo indagamos elementos relativos a la enseñanza de resolución de problemas (RP) y de procesos matemáticos (CG), para precisar competencias específicas que se ponen en juego al resolver problemas de construcciones geométricas (PCG), que puedan tomarse como referente para diseñar y/o analizar planes de formación de profesores de primaria y de otros niveles educativos.

Examinamos la actuación de una profesora al desarrollar la *Situación abierta*¹ (SA) “Construir una circunferencia tangente a dos circunferencias exteriores”. El análisis se ha realizado sobre la base de los elementos de competencia delimitados en estudios anteriores y del Modelo de Enseñanza (ME) previo² desarrollado en el mismo ámbito del estudio. Con él podremos identificar nuevos elementos que debieran formar parte de la conducta competente al enseñar construcciones geométricas, cuando dicha enseñanza apunta a promover la exploración, las prácticas argumentativas y la apropiación de procedimientos de carácter heurístico.

Antecedentes. Un Marco de referencia

Lo que describimos aquí es parte de un Proyecto de investigación que se está desarrollando en Argentina, titulado “Hacia un modelo teórico respecto a la enseñanza de las construcciones geométricas que favorezca el trabajo heurístico y las prácticas argumentativas”³. En estudios previos (Siñeriz, 2002; Siñeriz y Puig, 2006) se ha indagado la enseñanza de la resolución de problemas de regla y compás, cuando ésta se mira desde los elementos que conforman el proceso de resolución, elaborando un modelo teórico local (MTL) centrado en la apropiación de un estilo heurístico de resolución de problemas. Con el trabajo de este proyecto se pretende reelaborar dicho MTL, contemplando además otros aspectos asociados al planteamiento de problemas y a la argumentación. Nos proponemos determinar nuevos elementos de competencia indagando sobre elementos que debieran formar parte de la conducta competente al enseñar PCG, considerando conducta competente la de un individuo ideal capaz de generar entornos de aprendizaje que fomenten el uso de los contenidos tratados (referidos a resolución de problemas o a contenidos geométricos) y su transferencia en la resolución de nuevos PCG. También aspiramos a diseñar Modelos de Enseñanza (ME) para la formación de profesores de primaria y secundaria sobre la base de los

¹ Nuestra idea de *Situación abierta* es acorde a lo que Butts (1980) llama *Situación problemática* en cuanto que se han de enunciar diferentes problemas en relación a ella.

² No pretendemos atribuir a esta expresión el sentido de “enseñanza modelo” sino, siguiendo a Filloy (1999), consideramos que un Modelo de Enseñanza se organiza sobre la base de algunos aspectos que constituyen la competencia en el contenido implicado.

³ Proyecto de investigación tipo: I, financiado por la Secretaría de investigación de la Universidad Nacional del Comahue. Argentina. Código: 04/B158.

elementos de la competencia. Para ello decidimos realizar diferentes experimentaciones analizando actuaciones de profesores de diferentes niveles educativos cuando la enseñanza se realiza a partir de 3 problemas representativos. El trabajo que presentamos se centra en una de ellas; analizamos la actuación de una de nosotras, profesora de Magisterio de Valencia, fijándonos en la enseñanza realizada a partir de la SA mencionada en la presentación.

El estudio se desarrolla conjugando dos líneas de investigación, enseñanza de PCG y enseñanza de CG, que vamos a describir brevemente a continuación. Además, tenemos en cuenta trabajos previos en los que hemos analizado la actuación de la misma profesora al enseñar contenidos relativos a los sólidos a estudiantes de Magisterio (González, Guillén y Figueras, 2006) tomando como referentes investigaciones en relación con la formación de profesores y los contenidos pertinentes para su formación inicial (Climent y Carrillo, 2003).

Desde la enseñanza de PCG, consideramos las elaboraciones teóricas en torno a los problemas de regla y compás que se presentan en Siñeriz (2002) que permiten caracterizar la conducta competente en función del espacio teórico de problemas, aspectos cognitivos y fases del proceso de resolución. Seguimos examinando el proceso de RP a partir de las fases cuyo perfil se contempla en Polya (1965), pero la diferencia estriba en que para nosotras no habrá fases perfectas; las concebimos como estados por los que se pasa y a los que se puede volver durante el proceso de resolución; además, separamos la fase de visión retrospectiva en las que denominamos de revisión y extensión. Partir de una SA obliga a interpretar estas fases para ella y los problemas que se generan. La organización del proceso mediante fases con objetivos específicos se traduce en una forma de enseñar dirigida a hacer transitar a los alumnos por las mismas, y su consideración en la enseñanza queda plasmada a través de las sugerencias que hace el docente.

Continuamos con la distinción que hicimos para los aspectos cognitivos al extrapolar y reformular algunos resultados de Schoenfeld (1985): contenido matemático, trabajo heurístico y gestor. Y al considerar la clasificación de heurísticas de Puig (1996) distinguimos entre *destrezas heurísticas*, *dh*, *herramientas heurísticas*, *hh*, *métodos heurísticos*, *mh*, *sugerencias heurísticas*, *sh*. Además, al focalizar el estudio en el uso que se hace de los conocimientos que se tienen, usamos el término *recursos* y hablamos de *sistemas de creencias* con los significados que provienen de Schoenfeld y que indicamos en López y Guillén (2010).

El proceso de resolver problemas no es independiente del de enunciarlos (Brown & Walter, 1983). Siguiendo a estos autores, consideramos “enunciar problemas” planteando cuestiones generales como disparadoras de nuevos problemas, que se corresponden con las *sh* o *hh* identificadas en el plano heurístico, y explorando posibles cambios en las partes principales del problema (datos, incógnita y condición) desde la pregunta ¿Qué pasaría si...?. Algunas fases, como la de comprensión o la de revisión y extensión, contemplan gran riqueza de elementos referidos a enunciar problemas.

Desde la enseñanza de CG, seguimos centrando la atención en conceptos, procesos matemáticos y relaciones, fijándonos en las acciones que se realizan asociadas a estos contenidos como componentes de la práctica escolar (López y Guillén 2010). También se contempla la enseñanza de los contenidos matemáticos a los que nos referimos al hablar de RP pero nos hemos centrado especialmente en la revisión de ideas de los conceptos y en la argumentación relacionada con la elaboración de conjeturas, justificaciones, particularizaciones y generalizaciones.

Las justificaciones las organizamos como en Guillén (1997). Apoyándonos en Vega (1990) distinguimos las justificaciones “*que muestran*”, en las que para convencer de que algo es verdad un dibujo es suficiente, de las *comprobación*, en las que justificar una propiedad geométrica puede ser equivalente a comprobarla en uno o más ejemplos. Hablamos de *pruebas mediante un diagrama o dibujo* que si bien pueden ser incompletas vienen acompañadas de propiedades de los objetos geométricos implicados que refuerzan lo que se muestra visualmente, y de *pruebas informales* en las que se utilizan razonamientos deductivos informales que están encadenados y conectan lo que se sabe con lo que se quiere demostrar; el lenguaje no está perfectamente formalizado y la red de relaciones entre los conceptos es bastante simple. Hablamos también de *demonstraciones* deductivas.

Contexto para la experimentación. Recogida y análisis de datos

El estudio se realizó en noviembre de 2011 con estudiantes de un curso de 4º que ya habían tratado los PCG con otro profesor desde una asignatura de contenidos de 2º.

El análisis de la SA permitió vislumbrar su riqueza para trabajar diferentes elementos acordes con las líneas de investigación mencionadas. Para su desarrollo se dedicaron 3 sesiones de 2 horas cada una; se implementó después de un ME previo, en el que se contemplaron enfoques para el estudio de PCG elementales (mediatriz de un segmento, dibujo de rectas perpendiculares, bisectriz de un ángulo, copia de un ángulo, dibujo de rectas paralelas, construcción de triángulos dados 3 datos) a partir de contextos cotidianos y usando material concreto, así como todos los recursos que se requerían para el desarrollo de la SA.

Los datos provienen de las grabaciones en video de las sesiones, del material entregado a los estudiantes y de las anotaciones que hicimos conjuntamente al terminar cada sesión sobre el desarrollo de la misma.

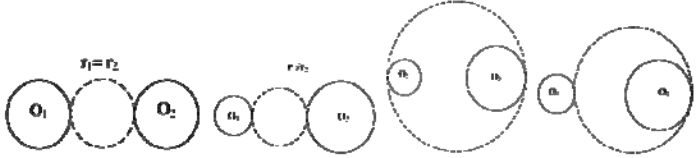
Para el análisis de las grabaciones en video, al igual que en González, Guillén y Figueras (2006), éstas se dividieron en episodios distinguiendo según los modos de desarrollar la enseñanza: la profesora actuó como modelo (TM); usó el propio relato, que distribuyó a los estudiantes, de la enseñanza realizada en relación con uno de los problemas generados (TR); usó algunas respuestas de los estudiantes a cuestiones que se plantearon previamente a la sesión para resolver en casa, o en grupo en el desarrollo de la misma (TG). Cada uno de estos episodios se separaron en otros de cuyo análisis hemos extraído los elementos de diferente naturaleza del apartado siguiente.

Para determinar los elementos relativos a RP en la actuación hemos partido del powerPoint usado para desarrollar las clases y a disposición de los estudiantes en el aula virtual, y hemos dividido los datos de acuerdo al recorrido realizado por las diferentes fases. Este material se ha conjugado con explicaciones de la profesora a preguntas de los estudiantes, extraídas de las grabaciones, y con los elementos descritos en el marco teórico.

"Construir una circunferencia tangente a dos circunferencias exteriores".	
<p>POWERPOINT QUE GUÍA LA ACTUACIÓN DE LA PROFESORA</p> <p>Fase de Lectura-Comprensión</p> <p>1) Revisar los términos que aparecen en el enunciado, si es posible hacer un dibujo, precisar diferentes ideas de ellos y tratar de caracterizarlos: ¿En qué contextos hemos dado ideas para las circunferencias y los círculos? ¿Qué ideas hemos dado para ellos? ¿Cómo se pueden caracterizar? ¿Qué quiere decir que dos circunferencias sean tangentes? ¿Qué otras posiciones pueden tener? ¿En qué contexto hemos trabajado las posiciones de dos circunferencias? ¿Qué significa que dos circunferencias sean tangentes exteriores? ¿Qué otras posiciones relativas pueden tener siendo tangentes? ¿Cómo podemos caracterizar el que dos circunferencias tienen el mismo o diferente tamaño? ¿Cómo pueden estar los centros de las 3 circunferencias implicadas en el problema? ¿Cómo se puede indicar que los centros están en la misma recta o no?</p> <p>2) Distinguir entre datos, condición y pregunta del problema. Introducir notación adecuada para los datos, las condiciones y la pregunta: <i>Datos:</i> ¿Cómo caracterizamos una circunferencia? ¿Cómo nos referimos a ella? No se nos tiene que olvidar el explicar la notación que vamos a usar. En nuestro caso: $C(O_1, r_1)$ y $C(O_2, r_2)$. <i>Incógnita/Pregunta:</i> $C(O, r)$ <i>Condiciones:</i> $C(O_1, r_1)$ y $C(O_2, r_2)$ son exteriores. $C(O, R)$ es tangente a $C(O_1, r_1)$ y $C(O_2, r_2)$. ¿Qué posición puede tener en relación con las circunferencias que son datos? Tangente Interior a las dos, tangente exterior a las dos, tangente interior a una y exterior a otra, ... ¿Pueden ser solución? ¿Cómo podemos enunciar los problemas correspondientes?</p>	<p>ELEMENTOS DE COMPETENCIA</p> <p>Comprensión Se percibe la idea global de la situación, se revisan términos y nociones implicadas, se examina cuáles son los datos, la incógnita y la condición, desde donde se formulan los problemas asociados a la situación.</p> <p>Sugerencias</p> <ul style="list-style-type: none"> - Revisar los términos que aparecen en el enunciado. - Rescatar conocimientos trabajados en otros contextos. - Hacer un dibujo para representar la situación. - Usar notación adecuada y lenguaje preciso para caracterizar los términos. - Separar datos e incógnita utilizando notación adecuada. - Evaluar si el número de datos es suficiente para que la solución sea única. - Explorar con valores concretos de datos y conjeturar sobre las soluciones obtenidas. - Atendiendo a los datos, analizar distintas alternativas. - Atendiendo a la condición, examinar posibles alternativas de la situación. - Buscar conocimientos geométricos adecuados identificando las figuras implicadas. En cada caso, visualizar la configuración resultante y enunciar el problema geométrico correspondiente. - Atendiendo a la incógnita, analizar conocimientos necesarios para determinarla.

Cuadro 1

Los cuadros 1 y 2 muestran la parte del proceso de resolución de la SA en relación con la *Comprensión*. Al lado apuntamos los elementos generales que incluimos para esta fase, provenientes del análisis de su propia actuación al recorrerla. Análogamente hemos determinado elementos de competencia para las restantes fases.

<p>3) Examinar posibilidades: Seamos sistemáticos: <i>Fijándonos en los datos:</i> Los radios de las circunferencias pueden ser iguales o distintos: $r_1 = r_2$ ó $r_1 \neq r_2$ <i>Fijándome en la pregunta:</i> Conjeturando: ¿Dónde puede estar el centro de la circunferencia buscada? Puede estar alineado con los centros de las otras dos o no. ¿Cuál puede ser su radio? Exploremos, demos el problema por resuelto (Dibujamos la figura de análisis) y</p>  <p>¿Qué posición puede tener en relación con las circunferencias que son datos? Tangente Interior a las dos, tangente exterior a las dos, tangente interior a una y exterior a otra,...</p> <p>¿Pueden ser solución?</p> <p>4) Enunciamos los diferentes problemas P1, P2, ... Por ejemplo, "Construir una circunferencia exterior tangente a dos circunferencias exteriores cuyos centros no estén alineados". ¿Cuántos problemas podemos enunciar asociados a la situación de partida?</p>	<p>Problemas generados: - Construir una circunferencia tangente exterior con $C_1(O_1, r_1)$ y $C_2(O_2, r_2)$, $r_1 \neq r_2$, cuyo centro esté en la línea de los centros dados ($O \in O_1O_2$) - Construir una circunferencia tangente exterior con $C_1(O_1, r_1)$ y $C_2(O_2, r_2)$, $r_1 = r_2$, cuyo centro esté en la línea de los centros dados ($O \in O_1O_2$) - Construir una circunferencia tangente exterior con $C_1(O_1, r_1)$ y $C_2(O_2, r_2)$, $r_1 \neq r_2$, cuyo centro esté fuera de la línea de los centros dados ($O \notin O_1O_2$) ... 16 problemas en total. Examen guiado por la herramienta heurística "examen de posibilidades". Se aplica cuando el conjunto de objetos puede descomponerse mediante una partición y se resuelve el problema para cada una de las partes.</p>
--	--

Cuadro 2

Para realizar el análisis desde los CG se han delimitado extractos del video de los siguientes episodios: i) se revisan los términos que aparecen en el enunciado, ii) se efectúa el examen de las posibilidades para delimitar los 16 problemas, iii) se transforma el problema inicial en el de construir un triángulo y se hace referencia a las posibilidades que se tienen para poder realizar esta construcción, iv) se reflexiona sobre las soluciones y sobre si hay o no solución y v) se discute sobre cómo se determina el centro y el radio de una circunferencia cuando se tiene un dibujo de la misma. Los tipos de prueba indicados en el marco teórico, los modos de trabajo y las agrupaciones relacionadas con los tipos de contenidos para la enseñanza han sido los referentes usados para el análisis.

Examinando la actuación de la profesora al desarrollar la situación abierta

De los elementos que hemos distinguido al examinar la actuación de la profesora, en este trabajo sólo ponemos la atención en los que se refieren a su actuación en su conjunto, que asociamos con la planificación de las sesiones (PS), y en los que corresponden a elementos de competencia que se pueden desarrollar con su actuación. En éstos distinguimos tres tipos: referidos a RP, a CG y a conocimientos de la materia para la enseñanza (CE). Dada la brevedad del informe sólo vamos a indicar algunos de cada tipo con ejemplos provenientes de un primer análisis de los datos.

En relación con PS de la enseñanza desde la SA cabe señalar:

PS1) Quedan claramente de manifiesto los distintos problemas asociados a la SA, las fases que se contemplan para la organización de la enseñanza y las sh y hh que guían el proceso de enseñanza.

PS2) Se pone el acento en el planteamiento y en la resolución de problemas.

PS3) Se contempla una fase de comprensión de la SA, un recorrido por todas las fases en los problemas generados y un retorno a la situación para la revisión, marcada por una vuelta hacia atrás, y la extensión, guiada por la cuestión ¿Qué pasaría si...?. La elaboración y ejecución de la SA se desdibujan en el proceso; una vez detectados los problemas las fases están ligadas a cada uno.

PS4) Para los problemas generados, en la fase de la elaboración aparecen rasgos del Método de Análisis-Síntesis y es una fase larga; contiene las intervenciones para hacer el análisis, que llevan a identificar los problemas transformados o construcciones elementales, y también incluye una síntesis o explicitación de los pasos a seguir al recorrer el camino inverso. La ejecución está centrada en “hacer efectiva la síntesis” para una medida concreta para los datos.

PS5) Las *dh*, *sh* y *hh* organizan el trabajo en los diferentes problemas a plantear a los estudiantes en el desarrollo de la sesión, que suponen diversos retos a superar.

Los elementos relativos a RP se refieren a diferentes fases, heurísticas y tareas de gestión.

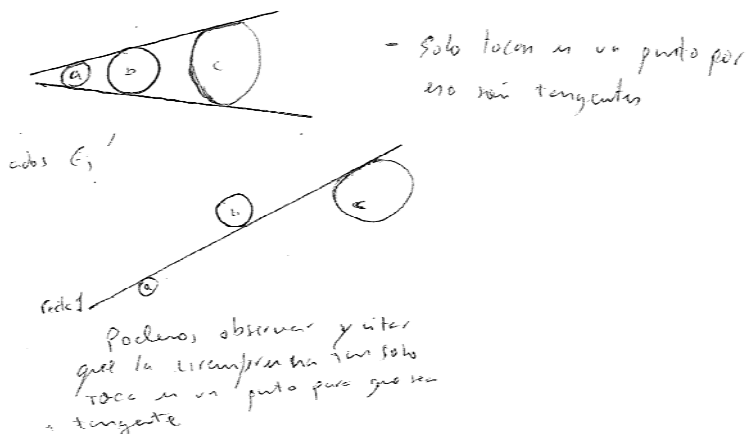
RP1) A las *sh*, *hh* y *dh* se les ha prestado mucha atención. En trabajo TR, los cuadros 2 y 3 dan cuenta de ello en lo que se refiere a la fase de comprensión. En trabajo TG se hizo notar las consecuencias que tenía no considerar alguna de estas *dh*, *sh* o *hh*. Por ejemplo, no usar notación adecuada dificultaba mucho relatar el proceso de resolución.

RP2) *Las fases* que organizan el proceso de resolución también han sido objeto de enseñanza. En trabajo TR se destacó cómo éstas permitían organizar el proceso de resolución y se aclaró lo que contenía cada fase. En trabajo TG se centró la atención en las respuestas de estudiantes que no habían contemplado los elementos del proceso de RP sobre los que se había centrado la atención en las sesiones y las consecuencias que se vislumbraban de ello.

RP3) Se ha puesto el énfasis en los elementos de gestión del proceso. Por ejemplo, se ha incidido en que se ha de evaluar si se está en condiciones de poder resolver el problema al que hemos transformado el de partida y si las normas que se escriben en la síntesis provienen o no de algún problema que se ha planteado en el análisis.

En relación con CG, nos fijamos en ideas y caracterizaciones de los objetos geométricos implicados y en el análisis de observaciones, conjeturas y pruebas.

CG1) Se han examinado ideas, propiedades, relaciones implicados en la situación y su extensión, y se han explicitado los algoritmos de construcción de figuras elementales. Por ejemplo, a partir de un trabajo TG, se revisó la siguiente respuesta:



En la fase de extensión se ha analizado si otras figuras puede cumplir la condición de la incógnita y se ha explorado sobre las propiedades de ellas y las consecuencias del cambio.

CG2) Se ha centrado la atención en las acciones asociadas a la descripción, clasificación, particularización, generalización, conjetura y prueba. Por ejemplo, en uno de los problemas se observó que al fijar los puntos de tangencia se fijaba la incógnita. En un trabajo TG, a partir de ejemplos que se habían usado para evaluar la posibilidad de construir las figuras con los datos del problema y de sus justificaciones, se indicaron las características de cada tipo de prueba y su adecuación para la enseñanza en los diferentes niveles.

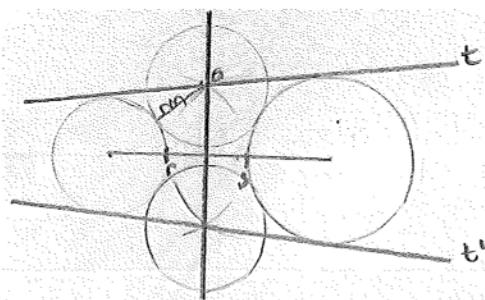
CG3) Ha ocupado atención el análisis de diferentes argumentaciones, fijándose en si contienen saltos en ellas, si son incompletas y si son correctas o incorrectas. Se hizo dudar de las pruebas visuales dadas a partir de un ejemplo en las que se indican propiedades referidas a conceptos familiares pero “las normas” no provienen del análisis del problema.

- En lugar de razonar para transformar un problema en otro, desde un dibujo de la figura de análisis se pasa directamente a concluir que el problema se reduce a determinar el vértice de un triángulo sin dar más explicaciones.

- Se determina el centro y el radio de las circunferencias por aproximación, se da un dibujo visual en el que está marcado el centro sin indicar ninguna otra propiedad. Se obvia aludir a los recursos disponibles, en este caso al problema de determinar el centro de una circunferencia dado el dibujo de la misma, tratado en clase en el contexto de diseños con círculos.

- Se responde que no influye el radio de la circunferencia incógnita en el problema porque “ésta es tangente a las otras dos y distará lo mismo de ellas desde el centro al punto de tangencia”.

- Se responde como sigue:



1. Trazamos una recta que una los dos centros de las circunferencias dadas.
2. Marcamos el segmento \overline{rs}
3. Trazamos la mediatriz del segmento \overline{rs} .
4. Trazamos una recta (t) que sea tangente a las dos circunferencias dadas.
5. El punto de intersección de la mediatriz con la recta t será el centro de la circunferencia que construimos.
6. Trazamos $C(o, r)$.

- El problema de la construcción de un triángulo a partir de un dibujo de la figura de análisis se realiza dibujando un radio cualquiera en cada circunferencia y prolongándolos. Se indica que donde se cortan las rectas es donde está el centro de la circunferencia tangente; sin reparar en los casos en los que la circunferencia obtenida sólo es tangente a una de ellas ni cuestionar cuándo el vértice del triángulo obtenido puede ser centro de la circunferencia buscada.

Cuadro 3

Para ello, en un trabajo TG, se usaron algunos extractos de respuestas dadas por los estudiantes a la cuestión de “construir la circunferencia exterior a dos circunferencias dadas de diferente tamaño” y las descripciones que se hicieron de ellos;

algunas se muestran en el cuadro 3.

CG4) Se han examinado tipos de justificación basados en un ejemplo para hacer notar que cuando se usan propiedades propias que no son datos del problema, es necesario explorar con otros ejemplos y para mostrar la diferencia de cuando se usa éste como ejemplo general.

Los elementos que se refieren a CE están centrados en: i) la ubicación de los contenidos en el currículo, ii) cuestiones metodológicas sobre el desarrollo de las sesiones (estructura de las clases, cómo se implica a los estudiantes, las tareas, los modos de trabajar del profesor), iii) la confección de resúmenes, destacando que la habilidad para sintetizar los conocimientos puede favorecer su selección y uso en la RP, iv) cuestiones referidas al aprendizaje y sus dificultades, examinando dificultades que se han presentado a los estudiantes y haciendo notar el empleo que ha hecho la profesora de ellas para desarrollar actividad, v) el uso que se ha hecho del lenguaje por los estudiantes y por el profesor; al contrastarlo se ha centrado la atención en la dificultad que conlleva expresarse con precisión y en los signos de diferente naturaleza que pueden usarse, que están en diferentes estratos en el nivel de matematización.

Conclusiones

La profesora ha realizado una transferencia de resultados de la investigación a sus clases que es importante para un plan de formación de maestros. Ha mostrado ser conocedora de los elementos determinados en la investigación que intervienen en la resolución de problemas, los ha considerado como objeto de estudio y para organizar la enseñanza de RP y ha reflexionado sobre cómo se podrían utilizar estos elementos si fueran los propios estudiantes los que tuvieran que hacer esa transferencia a sus clases. Desde su actuación hemos determinado nuevos elementos de competencia relativos a la enseñanza de PCG desde el plano heurístico, asociados a la argumentación que se usa en el proceso y referidos a aspectos inherentes a la enseñanza de los mismos. Surge la pregunta: ¿Qué hacer para que los profesores hagan transferencia de resultados de investigación a sus propias clases?

Asimismo, la SA ha resultado muy adecuada para lograr los objetivos planteados. Ha permitido trabajar elementos heurísticos y de gestión, centrando la atención en plantear y resolver problemas, así como competencias específicas asociadas a procesos matemáticos. En su resolución se han usado contenidos matemáticos que se han trabajado previamente lo que ha permitido incidir en la importancia de tratar los contenidos en diferentes contextos y de utilizarlos para descubrir otros nuevos en un contexto de RP.

El estudio ha hecho sentir la necesidad de prestar más atención a la enseñanza de los contenidos tratados en este plan de formación. Las producciones de los estudiantes han resultado incompletas en muchos casos dado que dan respuestas a los problemas planteados sin explicitar el propio proceso de sus resolución. La búsqueda de otras situaciones con este potencial se vislumbra como muy interesante para continuar. Cabe señalar también que estos resultados pueden caracterizar la actuación de una docente, y pueden usarse como referente para interpretar otras actuaciones de profesores al enseñar PCG en un contexto de planes de formación de profesores de primaria, pero las conclusiones no se extrapolan a todos los planes de formación, con lo que se ha de seguir explorando en otros ámbitos de estudio.

Referencias

- Brown, S. I. & Walter M. I. (1983). *The art of problem posing*. Philadelphia: The Franklin Institute Press.
- Butts, T. (1980). *Posing problems property*. En NCTM 1980 Yearbook, págs. 23-34.
- Climent, N. y Carrillo, J. (2003). El dominio compartido de la investigación y el desarrollo profesional. Una experiencia en matemáticas con maestras. *Enseñanza de las ciencias*, vol. 21 (3) págs. 387-404.
- Filloy, E. y cols. (1999). *Aspectos teóricos del álgebra educativa*. México D.F.: Grupo Editorial Iberoamérica.
- González, E.; Guillén, G.; Figueras, O. (2006). Estudio exploratorio sobre la puesta en práctica de un modelo de enseñanza para la geometría de los sólidos en Magisterio. En Bolea, P.; González, M.J. y Moreno M. (eds). *Investigación en Educación Matemática. X Simposio de la Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática (SEIEM)*. Huesca, págs. 195-204.
- Guillén, G. (1997). El modelo de Van Hiele aplicado a la geometría de los sólidos. Observación de procesos de aprendizaje. (Tesis doctoral). Valencia: Universitat de València.
- López, L. y Guillén, G. (2010). Exploración con espejos y enseñanza/aprendizaje de la geometría en la Educación Secundaria Obligatoria. Sobre la actuación de la profesora y la transferencia de procedimientos. En Moreno, M; Estrada, A.; Carrillo, J. y Sierra, T. (eds). *Investigación en Educación matemática XIV*, Lleida: SEIEM, ediciones de la Universitat de Lleida, págs. 395- 407.
- Polya, G. (1957). *How to solve it*. 2nd edition. Princeton, NJ: Princeton University Press. [Trad. castellana: *Cómo plantear y resolver problemas*. México: Trillas, 1965].
- Puig, L. (1996). *Elementos de resolución de problemas*. Madrid: Síntesis.
- Schoenfeld, A. H. (1985). *Mathematical Problem Solving*. Orlando, FL: Academic Press.
- Siñeriz, L. (2002). La enseñanza de resolución de problemas de regla y compás. Del mundo de la pura resolución de problemas a la escuela media argentina: estudio de dos casos". *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa (RELIME)*, vol. 5 (1) págs. 79-101.
- Siñeriz, L. y Puig, L. (2006). Un modelo de competencia para la resolución de problemas de construcción con regla y compás. En Aymerich, J.V. y Vives, S.M. . (eds.) (2006). *Matemáticas para el siglo XXI*. Castellón: Publicacions de la Universitat JAUME I de Castellón, págs. 323-331.
- Vega, L. (1990). *La trama de la demostración (Los griegos y la razón tejedora de pruebas)*. Madrid: Alianza.