REVISTA EMA
2000, VOL. 6, Nº 1, 40-55

ALGUNAS PAUTAS DIDÁCTICAS PARA LA INTRODUCCIÓN DEL CONCEPTO DE LÍMITE FINITO[1]

MÓNICA DE TORRES CURTH

En la práctica docente en matemática y específicamente con relación al concepto de límite, es posible observar algunas dificultades que ocurren en situaciones de su enseñanza y aprendizaje. En este trabajo se analizan algunas de esas dificultades y se presenta una propuesta de trabajo, que fue puesta en práctica en el aula con alumnos de primer año de una universidad argentina, para la introducción del concepto de límite finito de una sucesión de números reales. La experiencia derivada de la aplicación de la propuesta sugiere la promoción de una mejor comprensión del concepto de límite por parte de los estudiantes.

INTRODUCCIÓN

En los primeros años de la universidad y en los últimos años de la escuela secundaria es usual que se considere la enseñanza del concepto de límite en los programas curriculares de matemáticas. En ambos casos, es posible observar en la práctica algunas dificultades que ocurren en situaciones de su enseñanza y aprendizaje.

Por una parte, los alumnos poseen en general un fuerte marco de ideas previas con respecto al concepto de límite, concepto que interpretan principalmente como "frontera", es decir, como algo alcanzable pero no "traspasable"; de ninguna manera lo ven como un proceso de aproximación y menos aún como el resultado de un proceso. Por otra parte, la presentación de ejemplos por parte del docente, que a su juicio ponen de manifiesto contradicciones entre la definición matemática y la idea intuitiva o previa que tienen los estudiantes, no conduce generalmente al conflicto buscado. A pesar de contar con la definición matemática de límite, al momento de explicar los procedimientos prevalece en los alumnos la aproximación intuitiva. Ellos repiten literalmente la definición, pero no logran vincularla, en general, con los procesos que se llevan a cabo.

1. Deseo agradecer a María Luisa Bruschi, Nora Scheuer, Virginia Montoro y María Martha Ferrero por sus comentarios al manuscrito de este trabajo.

La enseñanza tradicional de la matemática supone que esta ciencia tiene una estructura completamente jerárquica, en la cual los nuevos conceptos a enseñar se siguen lógicamente de los conocimientos previos. Sin embargo, hay conceptos en matemática que son difíciles de entender debido a que no se hace clara la relación entre los conceptos previos y los nuevos. La matemática como ciencia formal ha creado definiciones precisas de aquellos conceptos y de sus relaciones con otros conceptos, pero desde el punto de vista cognitivo pueden aparecer importantes problemas cuando los conceptos involucrados no se relacionan con otras partes del conocimiento matemático. Además, en el diseño de los programas de estudio, existe la suposición tácita de que el definir explícitamente los conocimientos prerrequisitos en el curriculum constituye una base necesaria y suficiente para la construcción de nuevos conceptos (Lehtinen y Kasanen, 1997).

Es frecuente que los libros de texto de matemática empiecen la exposición de un tema con la definición de un concepto. En general esto se halla muy alejado del interés y la comprensión de los alumnos. Usualmente, el eje organizador tanto de los conceptos teóricos que se desarrollan en los textos, como del aprendizaje del alumno, es la estructura formal bajo la cual se construyen los conceptos de la disciplina. El objetivo de los “diseños” que replican esa idea, es que el alumno sea capaz de reproducir esa estructura lógica.

Sumado a esto, tenemos la tradición de la enseñanza de la matemática, que es básicamente expositiva, donde el docente presenta los conceptos partiendo de definiciones, intercalando ejemplos, enunciando y demostrando teoremas y, eventualmente, ofreciendo alguna aplicación del concepto a problemas de otras ciencias o de otros campos del conocimiento. Si bien no se puede negar que la forma de enseñanza expositiva posee algún valor didáctico, no es menos cierto que para que se produzca la asimilación de los conceptos, es necesario que aquello que se expone tenga alguna relación explícita con ideas presentes en la mente del alumno.

Sierpinska (1985) —que ha realizado investigaciones donde se combinan los estudios epistemológicos y el análisis de las respuestas de los alumnos enfrentados a tareas y procesos de aprendizaje donde está involucrado el concepto de límite— señala que la dificultad en la enseñanza y aprendizaje de este concepto radica, no sólo en su riqueza y complejidad sino en el hecho de que sólo con base en la definición matemática es difícil esperar que el estudiante comprenda el concepto en toda su riqueza. Se puede recordar la definición, pero construir el concepto es algo muy distinto. Por otra parte, en cierto nivel del aprendizaje de la matemática, el salto de lo intuitivo a lo formal es un salto cualitativo importante, que requiere de un cambio conceptual radical[2]. Estos saltos cualitativos, se pueden relacionar con la superación de los llamados obstáculos epistemológicos[3].

El concepto de obstáculo epistemológico no se refiere a las dificultades derivadas de la ausencia de conocimiento, sino a las dificultades directamente vinculadas con las formas de considerar el conocimiento o con los conocimientos mismos. Este concepto tiene en cuenta el hecho de que el conocimiento científico no es el resultado de un proceso continuo sino que necesita de algunos momentos de ruptura con los conocimientos anteriores. En la escuela los conocimientos previos de los estudiantes, pueden transformarse también en obstáculos para el aprendizaje. Por ejemplo, en las sucesivas ampliaciones del campo numérico, los estudiantes suelen transferir espontáneamente las propiedades anteriores a los nuevos objetos, y les es muy difícil librarse de ello[4].

Sierpinska (1985), en su trabajo acerca de los obstáculos epistemológicos en relación al concepto de límite llega, entre otras, a las siguientes conclusiones:

- La experiencia ha mostrado que los obstáculos epistemológicos en relación a la noción de número y de infinito se reflejan en obstáculos de aprendizaje de los alumnos que permanecen a pesar de una enseñanza sistemática de las nociones en clase.
- Es importante poner una atención particular en la noción de función al inicio de la enseñanza del análisis.
- Del mismo modo que los conceptos básicos se “enganchan” unos a otros, los obstáculos relativos a conceptos tales como número, infinito, función y límite, se encuentran ensamblados en los mismos.
- El recurso de la intuición geométrica ha resultado, en la historia del concepto de límite, un obstáculo serio en la formulación de

2. De acuerdo a teorías recientes, el cambio conceptual debería ser concebido como un proceso complejo compuesto de varios mecanismos de aprendizaje, tales como el enriquecimiento (o crecimiento conceptual), la “afincación” (revisión conceptual) y reestructuración (o cambio conceptual radical) (Pozo, 1997).
3. La noción de obstáculo epistemológico puede ser estudiada en el desarrollo histórico del pensamiento científico y en la práctica de la educación (Bachelard, 1989).
4. Algunos ejemplos que usualmente se presentan en la práctica son:
   • de la igualdad $a.b = c$ deducir erróneamente que tanto a como b son menores que c, cuando a y b son reales o aún enteros,
   • de $a.b < c$ deducir que $a < c$ y $b < c$, aún cuando los números involucrados no son naturales,
   • la afirmación “$a < b$ entonces $a^2 < b^2$” que es cierta en los números naturales se extiende erróneamente a otros campos numéricos.

> una definición rigurosa del mismo. Esto indica la necesidad de tener especial cuidado cuando este recurso se utiliza en la introducción a las nociones de tangente o de límite.

El advenimiento y la formalización del cálculo y del concepto de números reales pueden ser vistos como avances importantes y extremadamente útiles en la historia de la matemática. Sin embargo, desde la perspectiva cognitiva estos avances parecen entrar en conflicto con algunos principios fundamentales de la matemática basados en la lógica de los números racionales. El razonamiento deductivo basado en los conocimientos previos de los alumnos acerca de los números, sistemáticamente resulta en justificaciones insuficientes de las nuevas operaciones. Hay por ello una seria dificultad que proviene de la distancia conceptual entre el conocimiento matemático que interviene en los números racionales a aquel que interviene en los números reales.

El aprendizaje de los números reales requeriría un cambio conceptual radical, el cual fue difícil y lento para los matemáticos en la historia, y parece ser difícil para los estudiantes hoy. Los estudiantes, aún cuando tratan con problemas de cálculo, intentan encontrar una base para su razonamiento matemático en la intuición, que está relacionada más con los números naturales o a lo sumo racionales, que con los números reales.

EL PROBLEMA DESDE EL PUNTO DE VISTA DE LA ENSEÑANZA-APRENDIZAJE DEL CONCEPTO DE LÍMITE

Parece probable que la elaboración de situaciones didácticas a partir de la utilización de problemas permite la toma de consciencia por parte de los alumnos de los obstáculos epistemológicos ligados al concepto en cuestión y su posible superación.

En general se supone que las dificultades que tienen los estudiantes en la adquisición de nuevas áreas del conocimiento matemático, no son sólo debidas al incremento de la complejidad de los conocimientos, sino también a que a las formas de conocimiento previas pueden constituirse en obstáculos. Específicamente con relación al aprendizaje del concepto de límite, son relevantes los obstáculos a los que puede estar ligada la noción de función.

Después del análisis de las propuestas para la enseñanza de los principios del cálculo de Lehtinen y Kasanen (1997), Sierpinska (1985) y Artigue (1995), y desde mi experiencia personal como docente de matemática de primer año de la universidad, creo que una propuesta didáctica conveniente para abordar el concepto de límite con un enfoque que apunte a desarrollar una primera aproximación, debería atender básicamente a las siguientes pautas:

- Realizar con los estudiantes un análisis de la génesis y evolución histórica del concepto, rescatando aquellas cuestiones que entorpecieron o dificultaron la formalización del mismo[5].
- Tener en cuenta que las ideas previas personales son muy resistentes al cambio y que por ello es importante propiciar el que los estudiantes sean conscientes de la complejidad del concepto.
- Promover la reflexión de los estudiantes acerca de sus propias concepciones, sus imágenes, sus intuiciones, sus experiencias, antes de introducir de manera más formal el concepto. Además, es conveniente que los alumnos tomen consciencia de la diversidad de significados de las palabras que se van a utilizar como “límite”, “infinito”, y procurar que el contexto sea de resolución de problemas.
- Tomar como puntos de partida las intuiciones y concepciones de los estudiantes, para trabajarlas y hacerlas evolucionar por medio de situaciones cuidadosamente elegidas. El objetivo de estas actividades sería justamente lograr una estructuración progresiva del cálculo, partiendo de una enseñanza organizada alrededor de la resolución de un conjunto de problemas donde la formalización no intervenga sino cuando sea necesario. Esta forma de trabajo debe apuntar al logro de una maduración del pensamiento matemático.
- Mostrar a los alumnos la necesidad de dar definiciones más precisas y rigurosas y de hacer demostraciones de las conclusiones a las que se llega, cuando el trabajo que se realiza con el concepto parte de la intuición y la percepción; se ponen así en evidencia las limitaciones de este tipo de trabajo y se le da un valor relativo.

Cabe mencionar, que en el desarrollo del presente trabajo, se revisaron algunos libros de texto con los que usualmente se trabaja en los cursos básicos de cálculo y algunos libros de enseñanza media donde el tema de límite es desarrollado. Fue sorprendente encontrar que tanto el concepto de infinito en tanto se lo interpreta como adjetivo —conjunto infinito, crecimiento infinito—, como si se lo usa como sustantivo —la variable crece a infinito—,

5. . D’Amore (1996) hace un breve recorrido por la historia del infinito matemático, y cita una buena cantidad de bibliografía para el análisis de la problemática.

aparece muchas veces sin explicaciones previas. Más aún, se utiliza el símbolo “∞” con distintos significados, ya sea para señalar un proceso, para identificar un atributo de una colección o para indicar un objeto. Vale decir, que pareciera aceptarse que el concepto de infinito es “natural” en el conocimiento de los estudiantes. Sin embargo, es justamente la aceptación y la comprensión de los procesos que involucran tanto al infinito actual como al potencial, los que representan un gran obstáculo en la enseñanza y aprendizaje de la matemática.

UNA PROPUESTA PARA EL TRABAJO EN EL AULA

En esta sección se presenta una propuesta de trabajo con los alumnos, para la introducción de la definición formal de límite finito de una sucesión de números reales. La propuesta atiende por un lado, a las reflexiones hechas en la sección anterior, especialmente en referencia a las dos últimas pautas mencionadas como integradoras de una propuesta didáctica, y por otro lado, a la experiencia recogida al llevar a la práctica una primera versión de la propuesta con dos grupos de 80 alumnos de primer año del Profesorado y Licenciatura en Ciencias Biológicas durante dos años consecutivos.

Se expone una forma interactiva de desarrollar la clase, dirigida desde el pizarrón. La idea básica es partir de una expresión intuitiva de lo que los alumnos definirían como sucesión convergente para llegar, a partir de un trabajo muy detallado y preciso, a la definición formal. El papel del docente en esta clase consiste en ir teniendo en cuenta las distintas respuestas de los alumnos a los distintos *problemas* planteados e ir dirigiendo el trabajo hacia el objetivo perseguido: la definición formal de sucesión convergente, es decir, de límite finito de una sucesión.

Los problemas a los que se hace referencia en el párrafo anterior, son situaciones que se plantean con el propósito de buscar continuamente que los alumnos entren en conflicto con la forma en que van expresando la definición y que hagan ver la necesidad de ir dando rigor a la misma.

Una vez que se llegue a la construcción de la definición formal con los alumnos, también se recomienda tanto proponer una serie de problemas para que los alumnos trabajen y discutan en grupos, como realizar una puesta en común con el grupo total donde se confronten las formas de resolución, y se permita a los alumnos, entre otras cosas, expresar sus ideas, justificar sus propios razonamientos, utilizar lenguaje y notación apropiados, etc.

La presentación se divide en dos partes: primero se presentan algunos de los diversos aspectos que se deberían tener en cuenta antes de trabajar la construcción en la clase de la definición de límite de una sucesión y luego si se presentan las ideas de cómo se podría desarrollar dicha construcción.

Trabajo preliminar

En cuanto al desarrollo de contenidos prerrequisitos, es necesario que los alumnos comprendan y manejen los conceptos de función, valor absoluto —interpretado como una distancia—, la definición de sucesión de números reales, sucesiones acotadas, operaciones con sucesiones, que analicen varios ejemplos, elaboren representaciones gráficas, etc. Particularmente con relación al concepto de función, se debería destinar una parte del trabajo preliminar para promover una mejor comprensión del mismo. Este trabajo debe dar cuenta de dos de las formas como se puede entender la función[6]: vista como un "proceso", es decir en su aspecto operacional o dinámico, y vista como una "entidad conceptual", es decir en su estatus estructural, estático. En particular, se debe intentar que el estudiante mejore su concepción de la idea de función, que la logre ver más allá de su asociación con una fórmula o con una curva regular. Para ello, se recomienda por ejemplo, que se considere su estudio desde distintos tipos de registros y con diferentes tipos de objetos funcionales.

Otras actividades que también pueden ser pertinentes como parte del trabajo preliminar son las siguientes:

- Prestar particular atención al manejo de cuantificadores. Al respecto se puede, por ejemplo, diseñar formas de trabajo en grupo dirigidas con base en guías de trabajos prácticos.

- Realizar una discusión con los alumnos acerca de sus concepciones previas respecto del concepto de infinito, diferenciándolo del infinito matemático, con el objeto evitar confusiones[7]. Las más importantes, si no los más comunes, son los siguientes: el infinito matemático como distinto de "todo", "indefinido", o "muy grande"; la existencia de conjuntos actualmente infinitos, el paso del denso al continuo, el infinito en su aspecto cardinal y ordinal, la posibilidad de que una suma infinita pueda ser finita, la aceptación del principio de inducción, el concepto de número real, los conceptos de magnitud infinitamente pequeña e infinitamente grande; la diferencia entre acotado y finito, entre otros.

- Discutir acerca del significado que se asigna coloquialmente a la palabra "límite". Los alumnos tienen en general una idea de

6. Para detalles acerca de la dualidad operacional-estructural de la noción de función, ver por ejemplo, Sfard (1989, citada en Artigue (1995)).
7. Algunos ejemplos de los núcleos de dificultad con los que se encuentran los alumnos en sus primeros contactos con la noción de infinito son analizados en Montoro y de Torres Curth (1999).

límite como una cota o una frontera y no lo entienden en principio como un proceso.

- Ofrecer material de lectura adicional, consistente en trabajos acerca de la evolución histórica del cálculo y en particular del concepto de límite[8].
- Destinar algún tiempo de clase para discutir con los alumnos de lo que una "buena" definición ha de ser.

La clase

En lo que sigue, se reproduce la clase donde se trabajó con los alumnos en la definición de límite finito de una sucesión. Se transcriben aquí las típicas intervenciones de los alumnos, las cuales se escriben en letra itálica, más pequeña y se anteceden con la letra "A". Las partes en formato regular y también con letra más pequeña, muestran las intervenciones del docente en la clase y se anteceden con la letra "P".

De las intervenciones de los alumnos sólo se incluyen las más significativas, que son aquellas que permiten continuar con el desarrollo de la clase, hacia el objetivo planteado. Es importante destacar que aunque aquí no se mencionan, todas las intervenciones de los alumnos fueron escritas en la pizarra y se analizaron una a una, discutiéndolas y encontrando los mismos alumnos, argumentos para que pudieran ser descartadas. La exposición detallada de ésta tarea sería bastante trabajosa, y engrosaría innecesariamente esta exposición.

Esta característica de la clase hace que sea prácticamente imposible mostrar "cómo" hacer, ya que se basa fundamentalmente en las ideas de los estudiantes. Lo que sigue es un ejemplo que creo adecuado para ilustrar esta propuesta.

Como primera actividad se presentaron a los alumnos la expresión general de ocho sucesiones, solicitándoles que realizaran sus gráficos y que buscaran agruparlas de acuerdo a algún criterio que consideraran importante (ver Tabla Nº 1).

Después de que realizaron esta tarea, (que algunos efectuaron individualmente y otros en pequeños grupos), se pidió a los alumnos que caracterizaran cada gráfico y que expusieran los resultados de la clasificación. Muy esquemáticamente se graficaron las sucesiones en uno de los pizarrones para tener una visión permanente de las mismas.

8. Por ejemplo en de Torres Curth (2000), se presenta un material que expone a los alumnos cuáles fueron las dificultades que se presentaron a los matemáticos a lo largo de la génesis del concepto.

$a_n = 3 - \frac{1}{n}$	$b_n = 2 + \frac{1}{n}$	$c_n = 1 + \left(\frac{-1}{n}\right)^n$
$d_n = n^3$	$e_n = 4 - n^2$	$f_n = (-2)^n$
$g_n = (-1)^n$	$h_n = \begin{cases} n^2 & \text{si } n \text{ es par} \\ 2 & \text{si } n \text{ es impar} \end{cases}$	

Tabla Nº 1. Lista de sucesiones presentadas a los estudiantes

Dado el carácter particular de las sucesiones dadas, era esperable que la clasificación concordara con el criterio siguiente: convergentes si existe límite finito, divergentes si existe límite infinito y oscilantes si no existe límite[9]. Sólo para las sucesiones c_n y f_n, hubo una disparidad de criterios, ya que de alguna manera se observa una "oscilación".

Se convino que al grupo formado por las sucesiones a_n y b_n se las denominaría "convergentes", al grupo formado por las sucesiones d_n y e_n, "divergentes" y finalmente, que a las sucesiones g_n y h_n se les llamaría "oscilantes". Dada la falta de un acuerdo general para la ubicación de las sucesiones c_n y f_n, se convino en que c_n sería incluida en el primer grupo, y que f_n sería incluida en el segundo grupo, acordándose aceptar esta convención hasta analizar particularmente éstas dos sucesiones, después de haber construido las definiciones formales.

A continuación se tomó el grupo de las que se denominaron "convergentes" y se buscó explicitar cuáles fueron las características que llevaron a incluirlas es ese grupo. Los criterios que aparecieron fueron:

A: *Todas están acotadas.*

A: *Todas se acercan cada vez más a una recta horizontal a medida que la variable crece.*

9. Algunos textos de cálculo definen dos tipos de sucesiones de números reales: las convergentes, que son aquellas que tienen límite finito y las no convergentes (también llamadas divergentes) que son las que no tienen límite finito (ver por ejemplo, Salas y otros (1986)). Dado que el objeto del trabajo era la introducción del concepto de límite y considerando la importancia particular del límite infinito en el estudio del cálculo, se dividió la clase de sucesiones no convergentes en: divergentes, cuando el límite es infinito y oscilantes cuando no existe límite. Diremos que la sucesión a_n oscila si existen al menos dos subsucesiones de a_n con diferente límite, esto es, uno finito y otro infinito ó dos finitos y distintos. En éste último sentido, una sucesión oscilante será acotada si toda subsucesión tiene límite finito. Para definiciones formales de sucesiones convergentes, divergentes y/u oscilantes, ver por ejemplo, Pastor y otros (1969).

P: Veamos el primer criterio. ¿Es necesario que una sucesión esté acotada para que esté en este grupo?

Se discutió y se acordó la necesidad.

Primera conclusión: toda sucesión convergente es acotada.

P: ¿Es suficiente que una sucesión esté acotada para que esté en este grupo?

Los alumnos propusieron argumentos por el sí y por el no, y finalmente uno de ellos señaló que en el tercer grupo (las llamadas "oscilantes" había sucesiones acotadas y que sin embargo no fueron incluidas en el mismo grupo, luego se concluyó que es una condición necesaria pero no suficiente.

Segunda conclusión: la afirmación recíproca de la primera conclusión, "toda sucesión acotada es convergente", es falsa.

Tomamos el segundo criterio: *"todas se acercan cada vez más a una recta horizontal a medida que la variable crece"* y lo referimos a la condición que debe cumplir una sucesión para ser convergente:

Una sucesión es convergente si a medida que n crece, sus términos se acercan cada vez más a una recta horizontal.

P: ¿Qué es esa "recta horizontal" a la que se refiere nuestra caracterización?

A: *Un valor del eje y.*

P: ¿Un número real?

A: *Sí, un número real.*

P: Podemos llamarlo L.

P: Para todos los casos, ¿ese número real es el mismo?

Se analizaron los ejemplos graficados (que permanecían en una de las pizarras).

A: *No, para cada sucesión es distinto.*

P: ¿O sea que para dos sucesiones distintas ese número real es distinto?

A: *No, para cada sucesión hay uno, pero pueden coincidir.*

P: ¿Podríamos decir que ese número es propio de cada sucesión convergente?

Se reformuló entonces la caracterización:

Una sucesión es convergente si a medida que n crece, sus términos se acercan cada vez más a un cierto número real L bien determinado y propio.

Convenimos en que si el número real L es propio de cada sucesión podemos decir que “la sucesión converge a L”.

P: Consideremos esta parte: *“sus términos se acercan cada vez más a L”*. ¿Qué significa?

A: ...(*varias respuestas*)

A: *Que están a una distancia de L cada vez menor.*

P: Consideremos la sucesión a_n . ¿Cuánto vale L en este caso?

A: *3*

P: Confeccionemos una tabla como la siguiente para a_n .

n	1	2	3	4	5
a_n					
$a_n - 3$					

P: ¿Cómo nos damos cuenta de que “están a una distancia cada vez menor” de 3?.

A: *Las diferencias son cada vez mas chicas.*

P: Agreguemos una fila más a nuestra tabla, donde pondremos la diferencia entre los términos de la sucesión y 1.

$a_n - 1$					

P: Los términos de la sucesión ¿verifican que están a una distancia cada vez menor de 1? Necesitamos reformular la expresión “están cada vez más cerca de L” porque no es suficientemente precisa. ¿Qué tenemos que pedirle a estas distancias?

A: ...*(varias respuestas).*

A: *Que sean cada vez más próximas a cero.*

La caracterización de sucesiones convergentes quedó reformulada entonces de la siguiente manera:

Una sucesión es convergente si a medida que n crece, sus términos se acercan cada vez más a un cierto número real L bien determinado y propio.

P: ¿Cómo podemos escribir simbólicamente “la distancia entre los términos de la sucesión y L”? (el uso de valor absoluto no es, en general, espontáneo).

A: *Como las diferencias entre* a_n *y L (en ese orden).*

A continuación los alumnos realizaron tablas análogas a las ya realizadas, pero para las sucesiones $b_n = 2 + \frac{1}{n}$ y $c_n = 1 + \left(\frac{-1}{n}\right)^n$ El objeto de esta tarea fue inducir el uso de valor absoluto como expresión de distancia.

P: Vemos que las diferencias entre a_n y L pueden ser positivas o negativas según a_n sea mayor o menor que L. Pensando que estas diferencias representan una distancia (y que es indiferente si a_n es mayor o menor que L), ¿qué herramienta tenemos para incluir los posibles casos en uno sólo?

A: *Poner* a_n *- L ó L -* a_n *según sea el caso.*

A: *Utilizar valor absoluto.*

Se discute la primera propuesta y se acuerda que es “poco práctica” debido a que en una misma sucesión pueden encontrarse los dos casos según sea el valor de n (como es el caso de c_n).

Se considera entonces la segunda propuesta para reformular la definición en los siguientes términos:

Una sucesión converge a L, si a medida que n crece,   ***|*** a_n ***– L | es cada vez más próxima a cero.***

P: Veamos ahora cómo precisar la expresión ”*es cada vez más próxima a cero”*.

Para ello, hicimos referencia al trabajo con intervalos abiertos en el conjunto de números reales. (Los alumnos habían desarrollado en prácticas anteriores, ejercicios y problemas que apuntaban al fortalecimiento de la noción de densidad y completitud de $\Re$).

P: Supongamos que $a_n \neq$ L. El conjunto de distancias posibles entre a_n y L es un intervalo de la forma (0, +∞). Consideremos cualquier distancia, que llamaremos ε, dentro de ese conjunto. Por más próximo que se tome a ε de cero, siempre habrá infinitos valores de distancias menores que él.

Si consideramos que $|a_n - L|$ debe hacerse cada vez más próxima a cero a medida que n crece, dada cualquier distancia ε > 0 (dentro del intervalo) debemos hacer que $|a_n - L| < \varepsilon$.

P: Analizamos la expresión $|a_n - L| < \varepsilon$. ¿Qué intervalo representa?

A: $| a_n - L | < \varepsilon \Leftrightarrow L - \varepsilon < a_n < L + \varepsilon$.

P: Pero lo cierto es que dada una distancia ε > 0, no se verifica siempre que para todo a_n que $|a_n - L| < \varepsilon$. Volvamos a los gráficos que tenemos de las sucesiones "convergentes". Elegimos un valor ε y vemos que la afirmación no ocurre siempre.

A: *Pero es cierto que* $L - \varepsilon < a_n < L + \varepsilon$ *se verifica para los valores de* a_n *desde determinado n en adelante.*

P: Elegimos otro valor de ε y vemos que la afirmación ocurre desde otro valor de n mayor.

A: *El valor de n a partir del cual es cierta la afirmación* $L - \varepsilon < a_n < L + \varepsilon$ *depende del ε elegido*.

A: *Podemos poner n(ε).*

Reformulamos la definición:

Una sucesión converge a L, si para cualquier distancia elegida ε > 0, es posible determinar un número natural n(ε) de modo que si n es tomado mayor que n(ε) entonces $| a_n - L | < \varepsilon$***.***

Se discutió la afirmación ***"para cualquier distancia elegida"*** y se concluyó que:

A: *Esto debería ocurrir para todas las distancias posibles.*

Análogamente se discutió el significado de ***"es posible determinar un número natural n(ε)"***, concluyéndose que:

A: *El número natural n(ε) siempre existe si* a_n *converge.*

La definición formal se concluyó entonces, así:

Una sucesión converge a L, si $\forall\ \varepsilon > 0,\ \exists\, n(\varepsilon) \in N$ ***tal que si*** $n > n(\varepsilon) \Rightarrow | a_n - L | < \varepsilon$ ***.***

A continuación, se trabajó en la resolución de problemas que apuntaban a reafirmar los conceptos trabajados hasta aquí.

La construcción del concepto de sucesión divergente se realizó de manera similar. En el caso de este tipo de sucesiones, la discusión se orientó a observar que dado cualquier número *k* positivo, la sucesión d_n verificaba que

$d_n > k$ con tal de tomar n mayor que un cierto número natural *n(k)* elegido adecuadamente. De forma análoga, se observó también que para la sucesión e_n, se podía afirmar que era posible determinar *n(k)* tal que $e_n < -k$ con tal de tomar $n > n(k)$. Entonces, entendiéndose la necesidad de construir una definición que abarque todos los casos particulares, se buscó una única expresión para estas dos situaciones, lo cual se resolvió a partir del uso del valor absoluto, estableciendo que una sucesión a_n será divergente si para todo *k* positivo, es posible encontrar un *n(k)* natural tal que si $n > n(k)$, $|a_n| > k$.

Una vez establecida esta definición, se realizó un análisis de la sucesión f_n para verificar la coherencia de su incorporación en este grupo.

ALGUNAS CONSIDERACIONES RESPECTO DE LA IMPLEMENTACIÓN DE ESTA FORMA DE TRABAJO

Cabe señalar que el trabajo realizado en clase para la construcción de la definición de límite de una sucesión, fue acompañado por un trabajo práctico acorde a esta propuesta, donde se incluyeron situaciones con las que se pretendía complementar la comprensión de los conceptos involucrados. Este trabajo implicaba la resolución de problemas de diferente tipo en donde se incitaba al estudiante a realizar análisis de gráficos, de la validez de razonamientos y afirmaciones, de ejemplos y casos particulares que inducen a conjeturar propiedades; a buscar ejemplos, contraejemplos y justificaciones de determinados razonamientos o afirmaciones, etc., que siendo de carácter conceptual perseguían mostrar distintos aspectos y características del concepto de límite. También se presentaron a los alumnos problemas teóricos de carácter un poco más formal, problemas contextualizados, donde se hacía necesaria la puesta de los conceptos "en acción" y problemas de cálculo de límite sencillos.

A partir de este trabajo, noté que los alumnos podían enfrentar estos problemas con mucha menos dificultad y que eran capaces de explicar el concepto con palabras propias, explicar el significado y la razón de cada parte de la definición de límite. Estos resultados difieren de los observados previamente en mi experiencia como docente de matemática durante varios años, en donde había notado serias dificultades en la comprensión del concepto de límite. Gran parte de los alumnos no lograba más que reproducir memorísticamente la definición, y no era capaz de resolver los problemas propuestos en las guías de trabajos prácticos.

La implementación de esta propuesta metodológica también facilitó la comprensión de los conceptos de continuidad y derivadas que se enseñan en matemáticas básicas universitarias ya que éstos se basan en el concepto de límite.

Algunos aspectos específicos que es posible puntualizar con relación a lo que sucedió en la clase son los siguientes.

La característica de monotonía de las sucesiones a_n y b_n indujo en los alumnos el criterio de "aproximación" al límite. Dado que algunos alumnos no coincidieron con la incorporación de la sucesión c_n en el "grupo de las convergentes", ya que adopta alternadamente valores por encima y por debajo del límite, se trabajó primero con las sucesiones monótonas y después con c_n, y se vio que si la sucesión no es monótona también responde a la definición construida.

Una vez que la definición de límite divergente fue establecida, se discutió con los alumnos que dada la condición $|a_n| > k$ para n suficientemente grande, podían distinguirse dentro de las sucesiones divergentes tres "tipos" diferentes: sucesiones que divergen a "+∞", si $a_n > k$ para n suficientemente grande, sucesiones que divergen a "-∞" si $a_n < -k$ para n suficientemente grande, o sucesiones que divergen a "±∞", cuando los valores de a_n superan en valor absoluto cualquier cota, pero alternan su signo. En este sentido vale la pena tener en cuenta, tal como sucedió en el caso de la sucesión f_n, que si una sucesión tiene dos subsucesiones con límite infinito pero de diferente signo, no se le considera como si tuviera "diferente límite". Nótese que formalmente esto no entra en contradicción con lo que hemos llamado "sucesiones oscilantes", en donde la definición señala que se pueden tener dos subsucesiones o con distintos límites finitos o con uno finito y el otro infinito.

Posteriormente a la construcción de la definición, fue interesante la discusión acerca de si una sucesión constante es convergente. En la conceptualización de convergencia como "aproximación infinita" del valor de la sucesión a un valor constante (el límite), no es evidente para los alumnos que la diferencia entre estos valores pueda ser cero. Se discutió particularmente este punto, y los alumnos buscaron ejemplos de sucesiones convergentes que pudieran adoptar el valor límite, aún sin ser constantes. Este trabajo, reforzado en los trabajos prácticos con problemas de discusión, fue particularmente importante para desprender el concepto matemático de límite del concepto informal discutido antes de comenzar la construcción del concepto.

REFERENCIAS

Artigue, M. (1995). La enseñanza de los principios del cálculo: problemas epistemológicos, congnitivos y didácticos. En M. Artigue, R. Douday, L. Moreno y P. Gómez (Eds.), *Ingeniería Didáctica en Educación Matemática* (pp. 97-140). México: "una empresa docente" y Grupo Editorial Iberoamérica.

Bachelard, G. (1989). *Epistemología*. Barcelona: Editorial Anagrama.

D'Amore, B. (1996). El infinito: una historia de conflictos, de dudas. Un campo fértil para la investigación en didáctica de la matemática. *Epsilon, 36,* 314-360.

de Torres Curth, M. (2000). El concepto de límite: una mirada histórico- epistemológica. Cuadernillo Universitario, Nº 36. San Carlos de Bariloche: Secretaría de Investigación y Extensión de la Universidad Nacional del Comahue.

Lehtinen, E. y Kasanen, E. (1997). Conceptual change in mathematics: From rational to (un)real numbers. *European Journal of Psychology of Education, 12* (2), 131-145.

Montoro, M. y De Torres Curth, M.(1999). Reflexiones sobre las dificultades que conlleva la noción de infinito en el aprendizaje de la matemática. *Epsilon, 45*, 357-364.

Pozo, J. (1997). *Conceptual change as a process of restructuring, explicitation an hierarchical integration.* Ponencia presentada en la 7º conferencia EARLI , Atenas.

Pastor, R., Pi Calleja, P. y Trejo C. (1969) *Análisis Matemático*. (Vol.1. pp. 273-281). Buenos Aires: Editorial Kapeluz.

Salas, S., Hille, E. y Anderson, J. (1986). *Calculus, one and several variables, with analytic geometry.* Nueva York: John Wiley and Sons.

Sierpinska, A. (1985). Obstacles epistemologiques relatifs a la notion de limite. *Recherches en Didactiques des Mathematiques, 6* (1), 5-67.

Mónica de Torres Curth
Departamento de Matemática
Centro Regional Universitario Bariloche
Universidad Nacional del Comahue
Unidad Postal UNC. 8400 Bariloche
Argentina
E-mail: detorres@bariloche.com.ar