“DISTINTOS NIVELES DE COMPETENCIA FORMAL ENRESOLUTORES DE PROBLEMAS DE CINEMÁTICA”

“DIFFERENT LEVELS OF FORMAL COMPETENCEIN KINEMATICS PROBLEM SOLVERS”

Matías, F., Gallardo, A.

Cinvestav, México

Resumen

En este reporte de investigación, alumnos de segundo grado de secundaria y profesores resuelven dos problemas de cinemática. Durante los procesos de resolución se advierte que la competencia formal es alcanzada por los profesores y unos pocos alumnos de este Estudio Empírico. Sin embargo, la comprensión de la situación física requiere tomar en cuenta marcos de referencia. Los sistemas de coordenadas son ignorados por todos los sujetos, poniendo al descubierto dificultades intrínsecas con los números negativos.

Abstract

In this research report, students of second year of High School and professors solve two problems in Kinematics. During the resolution process of these problems it is noticed that the formal competence is reached by professors and just a few of the students of this Empirical Study. Nevertheless, to understand the physical situation requires to take into account reference frameworks. The coordinate systems are ignored by all individuals, exposing intrinsic difficulties with negative numbers.

Palabras clave: *Cinemática, competencia formal, números negativos, resolución de problemas.*

Key words: *Kinematics, formal competence, negative numbers, problem solving.*

Matías, F., Gallardo, A. (2012). “Distintos niveles de competencia formal enresolutores de problemas de cinemática”. En A. Estepa, Á. Contreras, J. Deulofeu, M. C. Penalva, F. J. García y L. Ordóñez (Eds.), Investigación en Educación Matemática XVI (pp. 385 - 395). Jaén: SEIEM

Hemos llevado a cabo una revisión curricular de la asignatura de Ciencias II (Física) del Plan y Programas de Estudios (SEP, 2006) impartida a estudiantes de segundo grado de secundaria. En el primer bloque de este nivel se aborda el tema **“El trabajo de Galileo: una aportación importante para la ciencia”** donde se analizan problemas relacionados con la cinemática, en particular de movimiento rectilíneo, movimiento uniformemente acelerado, caída libre y tiro vertical. Examinamos ejercicios de libros de texto de distintas editoriales, encontrando que la mayoría de éstos, sólo abarcan problemas que arrojan respuestas positivas limitando la compresión de conceptos físicos como son: velocidad, aceleración y en particular el de la fuerza de gravedad y el signo de la misma al operarla. Así mismo, se hizo una selección de problemas que permitan encontrar resultados con número enteros y no solo “positivos” para indagar sobre los conocimientos que tienen los alumnos de la interpretación de los mismos y el significado que dan a las soluciones negativas.

Marco teórico.

Filloy, E. (1999) introdujo el concepto teórico metodológico de Modelo Teórico Local (MTL) para la observación experimental en Matemática Educativa. Este autor afirma: “El objeto de estudio se enfoca desde cuatro componentes interrelacionados: Modelos de Enseñanza, Modelos para los Procesos Cognitivos, Modelos de Competencia Formal y Modelos de Comunicación” (página 2 obra citada).

En nuestra investigación analizamos el desempeño físico-matemático puesto en juego en el proceso de enseñanza-aprendizaje por la población elegida (alumnos y profesores), a la luz del modelo de competencia formal. Filloy, afirma (…) “en el caso de la competencia formal, su necesidad parte de poder contar con una descripción de las situaciones observadas por medio de un sistema matemático de signos (SMS) más abstracto que permita descodificar todos los textos que se producen en un intercambio de mensajes en que los actores tienen diversos grados de competencia”. (…) (p. 7, obra citada).

Puig, L. (2006) analiza el sentido atribuido por Filloy al término “competencia formal” y lo relaciona con los componentes de los modelos de los procesos cognitivos y los modelos de enseñanza. Parafraseando a Filloy, Puig menciona (…)”la competencia explica y predice la conducta del sujeto epistémico, el sujeto ideal que conoce el conjunto de las matemáticas socialmente establecidas en un momento histórico determinado”. (p. 109, obra citada).

Nosotros decidimos designar como sujeto competente, no al sujeto epistémico, sino al profesor de educación básica que posee un grado mayor de competencia formal que la adquirida por sus estudiantes. Esta consideración está de acuerdo con lo manifestado por Filloy: “(…) Basta afortunadamente, con que el observador cuente con el modelo formal descrito en un sistema matemático de signos más abstracto que el utilizado por todos los sujetos observados, cuando se ve involucrado en el intercambio de mensajes, por ejemplo, en la entrevista clínica (…)” (p. 8, obra citada). Cabe señalar además, lo reconocido por Poblete, M. (2006) al respecto: “La competencia viene a ser un concepto integrador, cuya aplicación supone un cambio coperniquiano en la docencia (…). La adquisición de competencias es clave en el nuevo paradigma educativo, con el fin de lograr una transferencia de los mismas” (p. 83, obra citada). Este autor, como Ledford, G. (1995) caracteriza las competencias: (…) “Transferibles de un puesto a otro, de una actividad a otra” (…). (p. 94, obra citada).

Esta característica de la transferencia, permite en nuestra investigación considerar la competencia formal "transferida" al contexto de problemas de cinemática.

El estudio empírico.

En la etapa inicial de esta investigación hemos detectado que profesores y alumnos de secundaria, resuelven problemas de cinemática usando mecánicamente el lenguaje algebraico, posponiendo la interpretación del movimiento y sentido del mismo. Este hecho, parece evitar la compresión del fenómeno físico.

Además los alumnos están acostumbrados a manipular datos y respuestas positivas sin dotar de sentido a los enteros, evitando su uso e interpretación. Por otra parte, no utilizan ningún tipo de representación que les permita asignar algún eje de coordenadas que advierta la situación física y el dominio numérico real de la misma.

El planteamiento del problema conduce a la siguiente pregunta de investigación:

- **¿Cómo influye el nivel de competencia en la resolución de problemas de cinemática?**

Compartimos la visión de Torigoe, Gladding (2010) en el sentido de que "hay mayor dificultad en la compresión del fenómeno físico que en el lenguaje algebraico que modela la situación problemática real". En la escuela tradicional sólo se enseñan fórmulas sin explicar a fondo los conceptos y los principios físicos (p. 138, obra citada). Para considerar, por ejemplo, velocidades positivas y negativas hay que definir un sistema de coordenadas, Mochón, S. (1997) afirma (…) "en un fenómeno físico se puede cambiar su descripción matemática por medio del uso de un eje de referencia diferente pero también válido". (p.73, obra citada).

Además, hay que admitir que en la enseñanza de las matemáticas y la física existen entre otras, concepciones erróneas vinculadas a la no compresión de la negatividad. Este hecho pudiera evitarse en parte si se tiene siempre presente la situación física real. Además en la resolución de un problema físico ayuda el no perder de vista durante el proceso de resolución el análisis dimensional. Así al obtener finalmente, por ejemplo, la velocidad de un móvil, ésta debe tener unidades de m/s. Si esto no sucede, es necesario revisar el procedimiento realizado, Encalada, N. & Gallardo, A. (2001). (p. 7, obra citada).

Los instrumentos metodológicos para esta investigación inician con un cuestionario piloto para obtener el definitivo que contiene problemas de Cinemática, en particular del Movimiento Uniformemente Acelerado, Caída Libre y Tiro Vertical. Para el diseño de estos cuestionarios se tomaron en cuenta los conocimientos previos de los alumnos y los problemas de los libros de texto de segundo grado (Ciencias II).

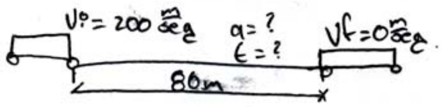
La investigación se realizó en una escuela secundaria pública urbana de México, D.F., con **27** estudiantes de **13** a **15** años de edad. También se analizó el desempeño académico de **5** profesores que impartían la asignatura de física, específicamente en el tema de cinemática. Se aplicaron cuestionarios a ambas poblaciones y se analizaron sus producciones escritas en el caso de dos problemas típicos de cinemática. La siguiente etapa de este Estudio Empírico consistente en análisis de Estudios de Caso, no se reporta en este artículo.

A continuación únicamente mostramos las producciones escritas de dos estudiantes y dos profesores con el fin de evidenciar sus niveles de competencia en la resolución de problemas de cinemática. Estos alumnos son de los pocos que explicitan el proceso de resolución y concluyen con respuestas incorrectas pero interesantes para su análisis. Respecto a los dos profesores, podemos afirmar que muestran distintas maneras de procesar la información dada. Analizamos dos problemas característicos de movimiento uniformemente acelerado que involucran números enteros.

Problema 1.

Un automóvil viaja a 200 m/s, se aplican los frenos y se detiene después de recorrer 80 metros. Calcular la aceleración y el tiempo que demora en detenerse.

Solución Correcta



DATOS

$d = 80$ metros $= 80m$

$a = ?$

$t = ?$

$V_f = 0$

$V_i = 200 \frac{m}{seg}$

MOVIMIENTO UNIFORMEMENTE VARIADO

$$a = \frac{V_f - V_i}{t}$$

Como $V_f = 0$ entonces:

$$\boxed{a = \frac{0 - V_i}{t} = \frac{-V_i}{t}} \text{ ---(1)}$$

$d = V_i t + \frac{1}{2} a t^2$ SUSTITUYENDO (1) TENEMOS:

$$80m = \left(200 \frac{m}{seg}\right) t + \frac{1}{2}\left(\frac{-V_i}{t}\right) t^2$$

$$80m = \left(200 \frac{m}{seg}\right)(t) + \frac{1}{2}\left(\frac{-200 \frac{m}{seg}}{t}\right) t^2$$

$$80m = \left(200 \frac{m}{seg}\right) t - \left(100 \frac{m}{seg}\right) t$$

$$80m = \left(100 \frac{m}{seg}\right) t$$

$$\boxed{t = \frac{80m}{100 \frac{m}{seg}} = 0.8 \frac{seg \cdot m}{m} = 0.8 seg}$$

SUSTITUYENDO $t = 0.8 seg$ en (1) TENEMOS

$$\boxed{a = \frac{-200 \frac{m}{seg}}{0.8 seg} = -250 \frac{m}{seg^2}}$$

LA ACELERACIÓN ES NEGATIVA PUES EL MOVIL VA FRENANDO.

Profesor 1.

Resuelto correctamente.

Inicia con un esquema y escribe los datos del problema. Asigna a cada uno su valor con la unidad de medida correspondiente. Usa la fórmula a = (V_f – Vi) / t obteniendo al sustituir a = -Vi/t …. (1). Continua con la fórmula d = Vi t + ½ at^2 sustituye los datos y en "a" coloca el valor "–V_i/t" de …(1) quedando 80m = (200m/s)t + ½ (-V_i/t)t^2 con sus unidades respectivas. Encuentra el valor del tiempo t = 0.8 seg. Haciendo uso de a = -Vi/t …..(1) sustituye el tiempo y encuentra a= -250 m/seg^2. Concluye de forma textual que la aceleración es negativa pues el móvil va frenando.

El profesor muestra tener la competencia formal necesaria para dar solución al problema. El esquema usado no permite interpretar el movimiento, porque si se analiza con cuidado se observa una discrepancia por la distancia correspondiente a la longitud del móvil, que no es tomada en cuenta de acuerdo a la posición mostrada. Es decir, al inicio considera como referencia la llanta delantera y al concluir el movimiento, toma la llanta trasera.

$$a = \frac{V_f - V_i}{t} = \frac{0 - 200\,m/s}{t} = \frac{-200\,m/s}{t} \quad \ldots (1)$$

$$X_f = \frac{1}{2}at^2 + V_i t + x_i$$

$$80m = \frac{1}{2}at^2 + 200\,m/s\, t + 0 \quad \ldots\ldots (2)$$

Sust (1) en (2)

$$80m = \frac{1}{2}\left(\frac{-200\,m/s}{t}\right)t^2 + 200\,m/s\, t$$

$$80m = -100\,m/s\, t + 200\,m/s\, t = 100\,m/s\, t$$

$$t = \frac{80m}{100\,m/s} = 0.8 seg$$

Sust t en (1)

$$a = \frac{-200\,m/s}{0.8\,s}$$

$$a = -250\,m/s^2$$

Profesor 2.

Resuelve Correctamente.
Inicia con a = (Vf – Vi)/t = -200/t … (1). Ocupa una fórmula que toma en cuenta las posiciones inicial y final del móvil: $X_f = \frac{1}{2} at^2 + V_it + X_i$ considerando $X_f = 80$ m como la distancia recorrida por el móvil para detenerse y $X_i = 0$ como inicio de frenado. Sustituye valores 80m = ½ at^2 + 200m/s t+ 0 … (2). Inserta (1) en (2) ya que desconoce el valor de la aceleración. Obtiene t = 0.8 seg. Sustituye en … (1) el valor del tiempo obteniendo a = -250 m/s^2.

Tiene la competencia necesaria para solucionar el problema. No esquematiza. Es importante señalar que, la fórmula $X_f = \frac{1}{2} at^2 + V_it + X_i$ no es usada comúnmente al resolver problemas de cinemática en secundaria, incluso no aparece en los libros de texto actuales. Sin embargo es pertinente, mostrarla como un recurso más en la resolución de problemas de este tipo.

Alumno 1.
Resuelto incorrectamente.

Escribe los datos, utiliza la fórmula para movimiento rectilíneo uniforme V = d/t. Despeja t = d/V donde t = .4 seg. Continua con la fórmula $a = (V_f – V_i) / t$ colocando los valores, resuelve y encuentra a = -500 m/s^2.

Utilizando este mismo método pudo haberlo resuelto de la siguiente manera:
Iniciar con la fórmula $Vf^2 = Vi^2 + 2ad$. Como Vf = 0 tenemos: 0 = $(200\ m/seg)^2$ + 2a(80m)". Hacer los despeje y encontrar el valor de a = -250 m/s. Para terminar ocupar la fórmula a = (Vf – Vi) / t, y sustituir los datos con sus unidades respectivas. Despejar "t" encontrando su valor t = 0.8 seg.

Datos:

$V_i = 200\,m/s$

$V_f = 0$

$$V = \frac{d}{t}$$

$$t = \frac{d}{V} = \frac{80}{200} = 0.4 seg$$

$$a = \frac{(V_f - V_i)}{t}$$

$$a = \frac{(0 - 200\,m/s)}{.4\,seg}$$

$$a = \frac{-200}{.4\,seg}$$

$$a = -500\,m/s^2$$

80m

$V = 200\,m/s$

$d = 80\,m$

$V_i = 200\,m/s$

$V_f = 0\,m/s$

$V = d/t$

$V =$

$d = \frac{1}{2} g t^2$

$80m = \frac{1}{2}\, 9.81\, m/s^2$

$t = \sqrt{16.30}$

$t = 4.0385$ seg.

$a = \frac{V_f - V_i}{t}$

$a = \frac{0 - 200\,m/s}{4.0385}$

$a = -49.52\,m/s^2$

Alumno 2.

Resuelto Incorrectamente.

Indica los datos V = 200 m/s y d = 80 m. Escribe V_i = 200 m/s y V_f = 0 m/s. Dibuja una recta acotada que indica la distancia del frenado 80 m. Usa la fórmula d = ½ gt^2 para caída libre. Sustituye los datos y encuentra t = 4.0385 seg. Ocupa la fórmula a = (V_f – V_i)/t sustituye valores y obtiene: a = - 49.52 m/s^2.

Utilizando este mismo método pudo haberlo resuelto de la siguiente manera:

Iniciar con la fórmula $Vf^2 = Vi^2 + 2ad$, dado que Vf = 0 tenemos: 0 = $(200\ m/seg)^2$ + 2a(80m)". Hacer los despeje y encontrar el valor de a = -250 m/s. Terminar con la fórmula a = (Vf – Vi) / t, sustituir los datos con sus unidades respectivas, despejar "t" encontrando su valor t = 0.8 seg.

Este resultado (t = 4.0385) muestra lo que manifiesta Mochón, S. (1997). (…) "sobre la obsesión de los estudiantes mexicanos por encontrar respuestas exactas y no conformarse con soluciones aproximadas o estimaciones" (…). (p. 76, obra citada).

Problema 2.

Un globo aerostático se eleva verticalmente con una velocidad constante de 5 m/s. Cuando éste se encuentra a 30 metros del piso se deja caer una piedra. ¿Con qué velocidad y después de cuántos segundos caerá la piedra al piso?

Para este problema estamos de acuerdo con (Peduzzi, L.O.Q. y Zilberztajn, A. (1997)) que afirman: "Muchos estudiantes, incluso universitarios, al plantearse este problema consideran que el saco de arena inmediatamente después de dejar el globo tiene un movimiento descendiente en relación con el suelo. (…) el error, como se sabe, está en la no consideración de la velocidad que el objeto posee cuando abandona el respectivo sistema en movimiento: por compartir la misma velocidad del globo después de dejarse caer, el costal de arena sube un poco hasta que su velocidad se hace nula para después caer" (…). (p. 351, obra citada). Debemos aclarar que en nuestro problema es una piedra lo que se deja caer en lugar de un saco de arena.

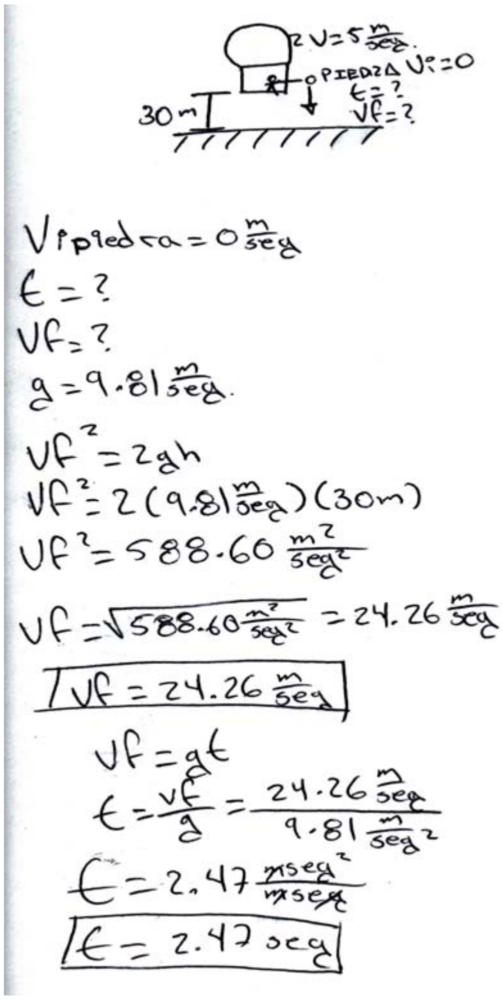
Profesor 1.

Solución incorrecta.

Inicia con un esquema del movimiento, colocando los datos en el mismo, asignando a cada variable su valor, y a las desconocidas el signo de interrogación. Indica que la V_i piedra=0 m/seg y para la gravedad g = 9.81 m/seg^2, después coloca la formula $V_f^2 = 2gh$, sustituye valores, opera y obtiene V_f = 24.26 m/seg. Continua con la fórmula $V_f = gt$, despeja el tiempo y encuentra t = 2.47 seg.

Olvida que por compartir la misma velocidad del globo, después de dejarse caer, la piedra sube un poco hasta que su velocidad se hace nula para después caer. Lo resuelve como si a los 30 m. de altura el globo se hubiese detenido, solo así: V_i = 0 m/s.

El profesor muestra una competencia suficiente para dar solución al problema. Sin embargo no tiene la interpretación total del movimiento, hecho que origina el error mostrado. Elabora un esquema que no corresponde a ejes de coordenadas del movimiento.



$V_{piedra} = 0 \frac{m}{seg}$

$t = ?$

$Vf = ?$

$g = 9.81 \frac{m}{seg}$

$Vf^2 = 2gh$

$Vf^2 = 2(9.81 \frac{m}{seg})(30m)$

$Vf^2 = 588.60 \frac{m^2}{seg^2}$

$Vf = \sqrt{588.60 \frac{m^2}{seg^2}} = 24.26 \frac{m}{seg}$

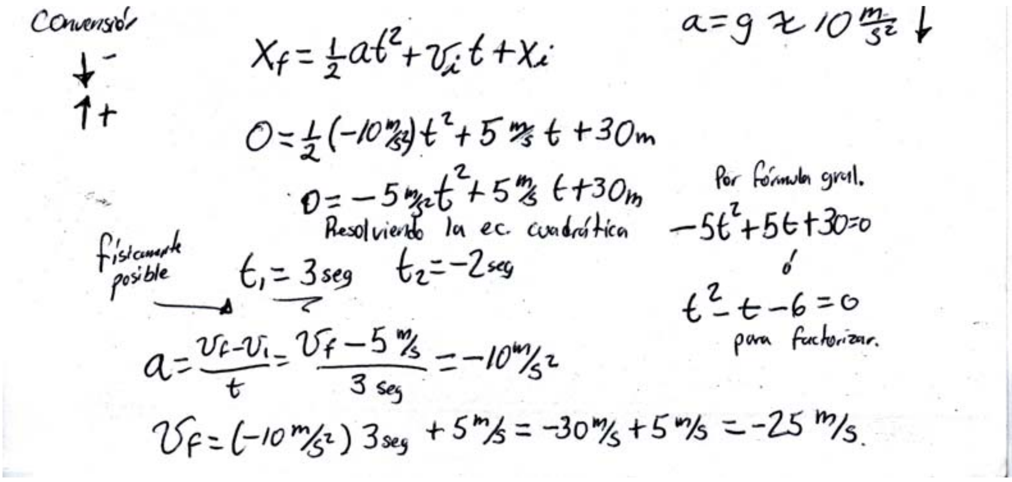
$\boxed{Vf = 24.26 \frac{m}{seg}}$

$Vf = gt$

$t = \frac{Vf}{g} = \frac{24.26 \frac{m}{seg}}{9.81 \frac{m}{seg^2}}$

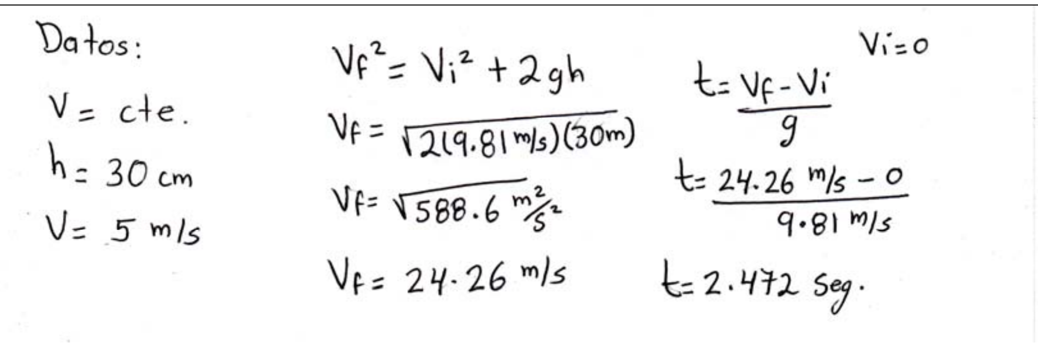
$t = 2.47 \frac{\cancel{m} seg^2}{\cancel{m} seg}$

$\boxed{t = 2.47 seg}$



Profesor 2.

Solución correcta.
Comienza indicando una convención de signos para el sentido del movimiento: abajo negativo, arriba positivo. Trabaja la fórmula con las posiciones inicial y final del movimiento $X_f = ½ at^2 + V_i t + X_i$, tomando $X_f = 0$, aceleración g = -10 m/s^2 V_i = 5 m/s y X_i = 30 m. Sustituye, opera y obtiene: 0 = - 5 m/s^2 t^2 + 5 m/s t + 30 m. Sugiere resolver la ecuación por fórmula general ó usando el (-5) como factor común $t^2 - t - 6 = 0$ para factorizar por binomios con término común y obtiene t_1 = 3seg escribiendo que es físicamente posible. También obtiene t_2 = -2seg pero este dato no lo ocupa. Con t_1 usa la fórmula $a = (V_f – V_i)/ t$, sustituye y despeja V_f = (-10m/s^2) 3 seg. + 5 m/s = -30 m/s + 5 m/s = -25 m/s. El profesor muestra competencia formal utilizando el álgebra fluidamente. Es el único que obtiene una solución negativa a causa de la convención tomada inicialmente.



Alumno 1
Respuesta incorrecta.
Inicia con $V_f^2 = 2gh$ usando como valor de la gravedad 9.81 m/s. (Debió escribir m/s^2). Resuelve y obtiene V_f = 24.26 m/s. Su proceder indica que toma V_i = 0 y usa la fórmula $t = (V_f – V_i)/g$ arribando al valor del tiempo t = 2.472 seg.

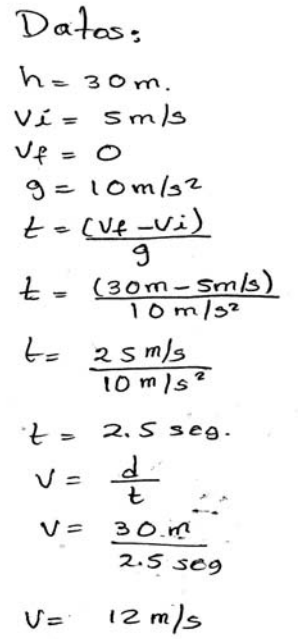
Utilizando este mismo método pudo haberlo resuelto de la siguiente manera:
Indicar que la V_i = 5 m/seg y para la gravedad el valor de g = 10 m/seg^2. (Se redondea la aceleración para facilitar los cálculos numéricos). Usar la formula $V_f^2 = 2gh$, sustituir, operar y obtener V_f = 25 m/seg. Seguir con la fórmula $V_f = gt$, despejar el tiempo, sustituir los valores y encontrar t = 3 seg.

Alumno 2.
Solución Incorrecta.

Inicia con h = 30 m. V_i = 5 m/s. V_f = 0 g = 10 m/s^2. Usa equivocadamente t = (V_f – V_i) / g. Toma el dato de h = 30 m como V_f = 30 m/s obteniendo t = 2.5 seg. Considera de forma errónea el movimiento uniforme. Ocupa la fórmula V = d/t en la cual retoma h = d = 30m y obtiene V = 12 m/s.

Utilizando el mismo método pudo haberlo resuelto de la siguiente manera:

Indicar que la V_i = 5 m/seg y para la gravedad el valor de g = 10 m/seg^2, usar la fórmula V_f^2 = 2gh, sustituir, operar y obtener V_f = 25 m/seg. Seguir con la fórmula V_f = gt, despejar el tiempo, sustituir los valores y encontrar t = 3 seg.



Reflexiones finales.

De la primera etapa de nuestra investigación, referente al desempeño académico de dos estudiantes y dos profesores reportados en este artículo, se desprenden las siguientes conclusiones:

El nivel mayor de competencia formal en los problemas de cinemática propuestos, lo obtuvo el profesor 2, pues transfirió este nivel de competencia a la comprensión correcta del movimiento del segundo problema ya que consideró que la piedra inicia su trayectoria con una Velocidad Inicial de 5 m/s.

Ambos profesores manifestaron tener un grado mayor de competencia formal que la adquirida por los estudiantes pues sus procesos de resolución fueron matemáticamente correctos, a diferencia de los estudiantes que arribaron a respuestas fallidas.

Ninguno de los sujetos utiliza representación gráfica para describir el movimiento del problema que le permitiría reconocer y manipular correctamente los datos involucrados, así como la elección adecuada de la fórmula algebraica. Los únicos lenguajes usados por los estudiantes son el aritmético y el algebraico. Los profesores recurren al uso de los signos en lugar de referirse a magnitudes signadas que en el nivel superior serían consideradas como magnitudes vectoriales. Dado el hecho de que las dificultades en estos problemas se encuentran en la relatividad del tiempo y el espacio donde los fenómenos físicos ocurren, es necesario definir los objetos dados y los puntos de referencia de su movimiento o el intervalo del tiempo en que tienen lugar. Nótese que es importante advertir el sistema de referencia utilizado. Otro problema surgido en la enseñanza es la omisión del análisis dimensional.

Las unidades de medidas asociadas a las magnitudes deben tenerse en mente durante el proceso de resolución. Esta consideración ayudaría a verificar si la respuesta es correcta y arrojaría luz sobre los posibles errores en la asignación de fórmulas y en las operaciones llevadas a cabo con las magnitudes correspondientes. Como afirman

Saavedra, G. Gallardo, A. (2011). (…) "Los alumnos no resuelven problemas de cinemática utilizando álgebra porque no entienden entre otros los conceptos de velocidad y aceleración como razones de cambio ni como cantidades relativas a los número positivos y negativos. Afrontan los problemas que describen el movimiento generalmente con acercamientos aritméticos o gráficos". (p. 368, obra citada).

Del análisis anterior se desprendió la necesidad de realizar entrevistas video grabadas individuales con fase de enseñanza, en la segunda etapa de la investigación, a fin que los estudiantes puedan identificar los paradigmas físicos y los sistemas de referencia involucrados en problemas.

Apoyándonos en las idea de Freudenthal, H. (1983), el modelo de enseñanza utilizado en esta segunda etapa, pretenderá que los alumnos logren mayor competencia al concebir los conceptos físicos como medio de organización de los fenómenos del mundo real. Dentro del marco de los modelos teóricos locales (MTL), un modelo de enseñanza se define como una secuencia de textos donde el intercambio de mensajes entre profesores y alumnos, produce conceptos nuevos a través de la producción de nuevos sentidos. Este punto de vista semiótico precisa tener presente a sus tres personajes fundamentales, al profesor, al alumno y al contenido físico-matemático en cuestión.

Esperamos que la enseñanza durante la entrevista les permita en la mayoría de los casos arribar a la solución correcta del fenómeno involucrado haciendo ver el hecho de usar primero tablas y gráficas así como posteriormente introducir el lenguaje algebraico. Ello conducirá a la identificación desde un principio de los distintos sistemas de referencia y a concebir una visión inercial del movimiento. En algunos casos será necesaria una reformulación de conceptos tanto físicos como matemáticos, indispensables ambos para comprender la situación real. Además, la enseñanza que toma en consideración los procesos cognitivos de los estudiantes y sus niveles de competencia mostrados en situación de entrevista, conlleva al desarrollo de rutas didácticas para la enseñanza en el aula de las matemáticas y la física escolares. Profesores y alumnos, deben aprender el uso correcto de unidades en las distintas variables involucradas en el proceso y solución del problema. Es importante señalar que la convención de los signos más y menos en fórmulas, implícitamente contiene un sistema de referencia cartesiano que no siempre es mencionado a los estudiantes.

Referencias bibliográficas

Encalada, N. & Gallardo, A. (2001). *Difficulties with negative solutions in kinematics problems.* En Proceedings of the 25th Conference, vol. 3 pp. 1-9.

Eugene, T. & Gary, E. (2011). *Connecting simbolic difficulties with failure in physics.* Physics Education Research Section. Vol. 79 pp. 133-140

Filloy, E. y colaboradores: Rojano T., y Puig L. Rubio G. (1999). *Aspectos teóricos del álgebra educativa.* México. Grupo Editorial Iberoamérica.

Freudenthal, H. (1983). *Didactical Phenomenology of Mathematical Structures.* Dordrecht: Reidel.

Gallardo, A., & Saavedra, G. (2011). Significado de los números negativos fraccionarios en estudiantes de secundaria. *En M. Marin, G. Fernández, L.J. Blanco & M. Palarea (Eds.), Investigación en Educación Matemática* XV (pp. 361-369). Ciudad Real: SEIEM.

Ledford, G. (1995). *The design of Skill-basad pay plans.* London: Sage.

Mochón, S. (1997). ¿Qué signo tiene realmente la "g"? el significado y la enseñanza del signo negativo en la física. *Educación Matemática, Vol. 9, Núm. 3, pp. 64-76.*

Pedduzzi, L.O.Q. y Zylbersztajn, A. (1997). La física de la fuerza impresa y sus implicaciones para la enseñanza de la mecánica. *Enseñanza de las Ciencias.* 15 (3), 351-359.

Poblete, M. (2006). Las competencias, instrumento para un cambio de paradigma. *P. Bolea, M. J. González y M. Moreno (Eds.)*, *Investigación en Educación Matemática* X (pp. 83-106). Huesca: SEIEM.

Puig, L. (2006). Sentido y Elaboración del Componente de Competencia de los Modelos Teóricos Locales en Investigación de la enseñanza y aprendizaje de contenidos Matemáticos Específicos. *P. Bolea, M. J. González y M. Moreno (Eds.)*, *Investigación en Educación Matemática* X (pp. 107-126). Huesca: SEIEM.