

DIFICULTADES ALGEBRAICAS EN EL AULA DE 1º BAC. EN CIENCIAS Y EN CIENCIAS SOCIALES

ALGEBRAIC DIFFICULTIES IN 1ST YEAR POST- SECONDARY SCHOOL CLASSES WHEN TEACHING NATURE SCIENCE AND SOCIAL SCIENCE

Pazos, A.L., Salinas, M.J.

Universidad de Santiago de Compostela

Resumen

En este trabajo se presenta un estudio llevado a cabo con alumnos de primer curso de bachillerato de ciencias y ciencias sociales, en el que se analiza su rendimiento, errores y dificultades en la resolución de tareas algebraicas. Para ello se elaboró una prueba con 10 ítems de desarrollo de operaciones de tipo algebraico que se aplicó a 49 alumnos de dichos niveles. Se analizaron cuantitativamente los datos mediante el paquete estadístico SPSS: fiabilidad del instrumento de medida, análisis descriptivo de los ítems y análisis de varianza para comparar los resultados de las distintas modalidades del bachillerato. Por otra parte se hizo una clasificación de los errores encontrados, conectándolos con propuestas de clasificación de otros autores.

Abstract

The present essay introduces a research carried out with students from the first year of Science and Social Studies branches of BAC (Post Compulsory Education), analysing their achievements, mistakes and difficulties when solving algebraic tasks. In order to do so, a test containing 10 algebraic operation expansion items was taken by 49 students from the previously mentioned levels. Later, the input was analysed quantitatively using the SPSS statistical package, checking the validity and reliability of the measurement tool, describing the items, comparing these between themselves and testing whether the result depends on the option chosen analysing the discrepancy. Moreover, the main mistakes found were enumerated and exemplified, connecting them with the classification proposals made by other authors.

Palabras clave: *Bachillerato, Rendimiento, Procesos algebraicos, Análisis de errores..*

Introducción

El aprendizaje de las matemáticas genera, en los alumnos, muchos errores y dificultades de naturaleza distintas. En el caso del álgebra, muchos docentes coinciden en afirmar que la mayoría de los alumnos cometen los mismos errores de forma reiterada, síntoma de las serias dificultades que tienen en su aprendizaje. Estos problemas parecen estar relacionados con una serie de deficiencias en comprensión de conceptos y en la forma de enfocar el álgebra que traen como consecuencia inmediata una forma errónea de enfrentarse con su aprendizaje.

En diversas investigaciones se han trabajado aspectos de la enseñanza/aprendizaje del álgebra que conforman diversos obstáculos para su aprendizaje. Palarea y Socas (1999) hacen aportaciones sobre el valor que los alumnos atribuyen al signo igual, encontrando la prevalencia de la aritmética sobre el álgebra. Cerdán (2010) clasifica los errores al pasar de problemas a ecuaciones en tres categorías: uso de letras, construcción de expresiones aritméticas o algebraicas y de igualdad.

Enfedaque (1990) llevó a cabo un estudio con alumnos de 8º de EGB, de 1º y de 2º de BUP, aportando algunas sugerencias sobre cómo introducir el uso de las letras en álgebra para disminuir los errores en la misma, así como algunas cuestiones sobre la actitud del profesorado para detectar los anteriores y mejorar la competencia algebraica de los alumnos.

Trigueros, Reyes, Ursini y Quintero (1996) diseñan un cuestionario de diagnóstico del manejo del concepto de variable en el álgebra. Para ellos, el concepto de variable se usa con significados diversos en diferentes contextos y dependiendo de ello se maneja de distinta manera. Consideran tres las formas en las que la variable suele usarse en el álgebra escolar: como incógnita, como número generalizado y en relación funcional.

Vega-Castro, D., Molina, M., Castro, E. (2011) analizan el sentido estructural que ponen de manifiesto estudiantes de 1º de Bachillerato en la simplificación de fracciones algebraicas que involucran igualdades notables.

En esta investigación, el objetivo general que se persigue es la evaluación del rendimiento, errores y dificultades en la resolución de tareas algebraicas por alumnos del primer curso de bachillerato de las modalidades de ciencias y ciencias sociales del IES “Daviña Rey” de Monforte de Lemos (Lugo). Este objetivo general se concreta en los siguientes objetivos específicos:

- O1. Analizar el rendimiento global de los alumnos en el bloque de álgebra.
- O2. Comparar el rendimiento de los alumnos de las diferentes modalidades de BAC.
- O3. Describir los errores que cometen los alumnos en la descripción de las tareas.

Concepciones sobre pensamiento algebraico

En las investigaciones desarrolladas sobre pensamiento algebraico, las referencias a consideraciones históricas y al análisis epistemológico es algo inherente a las mismas.

La relación entre los marcos teóricos históricos/epistemológicos y los psicológicos es habitual en educación matemática con relación al lenguaje algebraico. Así, la existencia de etapas históricas durante las que varios conceptos matemáticos tales como número y función han evolucionado desde operacional a estructural, ha

llevado a Sfard (1991) a crear un modelo conceptual paralelo de tres fases: interiorización, condensación y reificación.

En el análisis histórico del desarrollo del simbolismo algebraico se estudia el signo y los tipos de signos, como los procesos de significación y búsqueda de sentido, y su repercusión en los procesos de enseñanza y aprendizaje, Puig (1996).

Algunas investigaciones de carácter cognitivo han apuntado a ciertos cambios conceptuales y/o simbólicos que establecen la diferencia entre el pensamiento aritmético y el algebraico en el individuo. Algunos de estos trabajos tienen que ver con las diferentes interpretaciones de la letras y convenciones gráficas y simbólicas para codificar operaciones y transformaciones en la resolución de ecuaciones (Matz, 1982). Estas observaciones han hecho posible hacer hipótesis sobre ciertas líneas de evolución del lenguaje aritmético al algebraico, las cuales corresponden a las nociones y a las formas de representación de los objetos y operaciones que ocurren en el cambio.

Errores y dificultades

Los errores son un tema de constante malestar en los docentes de todos los niveles educativos. En el desarrollo de la construcción de conocimientos matemáticos se presentan los errores de manera sistemática y es por eso que dicho proceso debe considerar criterios de diagnóstico, corrección y superación de los mismos.

Rico (1999) considera organizadores del currículo a aquellos conocimientos que adoptamos como componentes fundamentales para articular el diseño, desarrollo y evaluación de las mismas. El mismo Rico incluye, entre los organizadores del currículo, los errores y dificultades en el aprendizaje.

En el marco del análisis didáctico compuesto por cuatro tipos de análisis: de contenido, cognitivo, de instrucción y de actuación; los errores y dificultades se enmarcan en el análisis cognitivo donde el profesor describe sus hipótesis acerca de cómo los estudiantes pueden progresar en la construcción del conocimiento (Gómez, 2007).

Brousseau, Davis y Werner (citados en Rico, 1995) señalan cuatro vías por las que los errores pueden presentarse: Como resultado de concepciones incorrectas acerca de principios básicos de las matemáticas, cuando los alumnos recrean o inventan su propio método en base al método descrito por el profesor, por la aplicación correcta y sistematizada de procedimientos imperfectos fácilmente reconocidos por el profesor, al aplicarse por parte del alumno procedimientos imperfectos y concepciones inadecuadas no reconocidas por el profesor.

Mulhern (1989) hace una caracterización general de los errores cometidos por los alumnos: los errores surgen en la clase, son espontáneos y generalmente resultan sorprendentes para el profesor; son persistentes, resistentes a cambiar por sí mismos y difíciles de corregir porque requieren de una reorganización de los conocimientos en el alumno; son más frecuentes los errores sistemáticos (revelan los procesos mentales que han llevado al alumno a una comprensión equivocada) con respecto a los errores por azar u ocasionales.

Categorizaciones y clasificaciones

A continuación se presentan algunas categorizaciones y clasificaciones realizadas por diferentes autores teniendo en cuenta distintos enfoques. Estas categorizaciones son las que hemos utilizado en el análisis de los errores.

En Radatz (1979) se ofrece una taxonomía para clasificar los errores a partir del procesamiento de la información, estableciendo categorías generales para este análisis: errores debidos a dificultades de lenguaje, errores debidos a dificultades para obtener información espacial, errores debidos a un aprendizaje deficiente de hechos, destrezas y conceptos previos, errores debidos a asociaciones incorrectas o a rigidez del pensamiento y errores debidos a la aplicación de reglas o estrategias irrelevantes.

Mosvshovitz-Hadar, Zaslavsky e Inbar (1987, citados por Rico, 1995) hacen una clasificación empírica de los errores, sobre la base de un análisis constructivo de las soluciones de los alumnos realizadas por expertos. De acuerdo con la metodología propuesta determinan seis categorías descriptivas para clasificar los errores encontrados: datos mal utilizados, interpretación incorrecta del lenguaje, inferencias no válidas lógicamente, teoremas o definiciones deformadas, falta de verificación en la solución y errores técnicos.

Astolfi (1999) describe la siguiente tipología de los errores: errores debidos a la redacción y comprensión de las instrucciones, errores resultado de los hábitos escolares o de una mala interpretación de las expectativas, errores como resultado de las concepciones alternativas de los alumnos, errores ligados a las operaciones intelectuales implicadas, errores en los procesos adoptados, errores debidos a la sobrecarga cognitiva en la actividad, errores que tienen su origen en otra disciplina y errores causados por la complejidad propia del contenido.

Nuestro estudio

Metodología de la investigación

Esta investigación cumple los requisitos para considerarse Ex post facto y descriptiva.

La muestra está formada por 49 alumnos con edades promedio de 17 años del IES Francisco Daviña Rey de Monforte de Lemos, elegidos sin selección de ningún tipo. Las características de cada grupo son:

1º BAC A: 14 alumnos de ambos sexos que cursan la modalidad de ciencias sociales.

1º BAC B: 20 alumnos de ambos sexos que cursan la modalidad de ciencias.

1º BAC C: 15 alumnos de ambos sexos que cursan la modalidad de tecnología.

Instrumento de medida

Hemos construido una prueba que consta de 10 ítems de desarrollo de operaciones de tipo algebraico distribuidos en los siguientes bloques temáticos:

Nº de ítem	1,3	2,7	4,5	6,8	9,10
Contenido algebraico	Resolución de ecuaciones y de SEL	Aplicación de reglas de operaciones algebraicas	Desarrollo de reglas de operaciones algebraicas	Factorización de expresiones algebraicas	Resolución de inecuaciones lineales

Tabla 1: Descripción del contenido de los ítems

En la elaboración de la prueba se consideraron ejercicios tipo generados al azar teniendo en cuenta los contenidos mínimos que un alumno de 1º BAC, independientemente de su modalidad, debe conocer una vez impartida esa parte de la asignatura, con los conocimientos previos que se les consideran adquiridos. Así, se llevó a cabo una acción de contraste de estos contenidos con los objetivos curriculares y contenidos de la asignatura correspondiente y, finalmente, se comprobó que los objetivos y contenidos seleccionados formaban parte de los currículos establecidos por ley. Por otra parte resultaba imprescindible que el cuestionario abarcara todos los aspectos considerados capitales en el bloque temático de álgebra en el bachillerato y que la prueba evitara cualquier tipo de sesgo. Con todo lo anterior podemos asegurar la validez del contenido de la prueba.

Prueba planteada:

1. Encuentra el valor de x para la siguiente ecuación: $3(x + 4) - 4 = 2x - 5$

2. Efectúa la siguiente división: $\frac{2y^3+5y^2+2y+15}{y+3}$

3. Resuelve el siguiente sistema de ecuaciones lineales:

$$2x + 2y + 2z = 4; 4x + 10y + 6z = 2; 6x - 2y - 4z = -2$$

4. Desarrollar el siguiente binomio: $(2x - 3y^2)^2$

5. Desarrolla el siguiente binomio: $(xy^2 + z^2)^3$

6. Factoriza el siguiente polinomio: $x^2 - 15x + 54$

7. Desarrolla la siguiente expresión: $4xy(5x + 3y - 3xy)$

8. Factorizar: $8x^2y^3 - 2xy^2 + 4x^3y^2 + x^2y^2$

9. Encontrar el intervalo de solución de la desigualdad: $4 < 3x - 4 < 11$

10. Resolver la siguiente desigualdad: $\frac{2x+3}{2} + 4 < 3x + 5$

Para la realización de la prueba, se les dejó una clase y el recreo (80 minutos) utilizando el orden de sus apellidos para distribuirlos en el salón de actos, lugar de celebración.

Criterios de corrección de la prueba

Cada ítem se puntuó con una nota entre 0 y 4 puntos donde;

0. planteamiento erróneo desde el punto de vista estructural o en blanco. Se incluyen también las respuestas que incorporen secuencias que resultan incoherentes o incomprensibles y que impiden culminar el procedimiento de forma satisfactoria.

1. planteamiento estructural correcto pero con errores graves de tipo conceptual, en el manejo de propiedades o definiciones. Por ejemplo, confundir un polinomio con una ecuación.

2. planteamiento estructural correcto. Ejecutivamente presenta fallos distintos al punto anterior, en su mayoría procedimentales, que impiden llegar al resultado. Por ejemplo, no cambiar la desigualdad de sentido cuando se despeja la x con coeficiente negativo o simplemente no se completa.

3. planteamiento estructural correcto con errores de carácter leve que no impiden obtener la solución requerida. Por ejemplo, pequeñas imprecisiones en el uso del lenguaje o uso incorrecto de la notación.

4. ejercicio correcto.

Variables

a) Calificación de cada ítem (del 1 al 10) para cada sujeto con valores de 0 a 4.

b) Nota media por alumno entre 0 y 4.

c) Calificación total de cada alumno con valores de 0 a 40

d) Modalidad cursada {0: ciencias; 1: ciencias sociales}

Análisis de los datos cuantitativos de la prueba

Fiabilidad

Para poder estudiar la fiabilidad del instrumento utilizado, se aplica la prueba Alfa de Cronbach. Se obtuvo un valor para α de 0,794, valor bastante alto para este tipo de pruebas no estandarizadas, por lo que la prueba se considera fiable.

Análisis descriptivo de los ítems

En la siguiente tabla se muestran los resultados globales de la prueba para cada ítem.

	ITEM1	ITEM2	ITEM3	ITEM4	ITEM5	ITEM6	ITEM7	ITEM8	ITEM9	ITEM10
Media	3,76	2,80	1,78	2,82	1,88	2,31	3,35	3,22	1,51	2,45
D.T.	,751	1,354	1,373	1,629	1,576	1,357	1,408	1,490	1,721	1,634
Mínimo	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0
Máximo	4	4	4	4	4	4	4	4	4	4

Tabla 2: Resultados globales de la prueba para cada ítem

La media de las calificaciones de los alumnos para cada ítem muestra la dificultad que presentan; el ítem más difícil es el 9 con una media de 1,51 y el más sencillo es el 1, con una media de 3,76. La desviación estándar, superior a 1 en todos los ítems excepto en el 1, también nos muestra una gran dispersión de las calificaciones para cada uno de los ítems. De acuerdo con la dificultad establecida por la media de la totalidad de los alumnos para cada ítem, desde el más difícil al más sencillo, el orden de los ítems sería: Ítem 9, Ítem 3, Ítem 5, Ítem 6, Ítem 10, Ítem 2, Ítem 4, Ítem 8, Ítem 7, Ítem 1.

Comparación de ítems

Una vez analizados los ítems de manera individual se procedió a investigar su posible relación mediante el análisis por clúster. En un primer nivel aparecen dos clúster

que se constituyen de acuerdo al nivel de dificultad. En un segundo nivel de asociación los ítems 5, 9, 3 y 10 forman un clúster, caracterizados por estar por debajo de la media global. Los ítems 1, 7, 2 y 8 definen un grupo en el que todos superan la media global y se diferencian del 4 porque este último ostenta una desviación típica superior a 1,5. En un último nivel aparecen pares de ítems relacionados que presentan niveles de media y/o desviación típica semejantes.

Comparación entre modalidades

Con el análisis de la varianza tratamos de comprobar si el resultado de los alumnos en los diferentes ítems depende de la modalidad que están cursando. Los resultados obtenidos se muestran a continuación.

	N	Media	D.T
CIENCIAS	35	2,8571	,71796
CCSS	14	1,9071	,82785
Total	49	2,5857	,85951

Tabla 3: Medias en las calificaciones de los alumnos para cada una de las modalidades y la media global

El análisis de la varianza se llevó a cabo mediante el ANOVA resultando para un valor menor que 0,001 por lo que podemos afirmar que existen diferencias significativas entre las medias de los grupos.

Análisis de los errores

Se procedió a examinar cada una de las respuestas de las 49 pruebas aplicadas. Inicialmente se distinguieron los errores que se presentaban en cada uno de los ítems de las pruebas, después se clasificaban de acuerdo a criterios comunes de aquellos errores que coincidían entre las pruebas y finalmente se categorizaron de una manera más general tratando de resaltar las relaciones entre ellos. Por último se clasifican los errores de acuerdo a las categorías existentes surgidas de investigaciones previas según lo especificado en el marco teórico. En nuestro caso: Radatz (1979), Mosvshovitz-Hadar y otros (1987), Astolfi (1999)

i. Eliminación incorrecta de denominadores. Por ejemplo, para resolver el ítem 10, utilizan un procedimiento como el siguiente:

$$"2\left(\frac{2x+3}{2}\right) + 4 < 3x + 5; \quad 4x + 6 + 8 < 3x + 5; \quad 4x - 3x < 5 - 6 - 8; \quad x < -9"$$

Este error podríamos clasificarlo como técnico, según la clasificación de Mosvshovitz-Hadar y otros; según Radatz se deben a un aprendizaje deficiente de hechos, destrezas y conceptos previos.

ii. Errores al realizar operaciones aritméticas-algebraicas. Algunos ejemplos serían:

Para el ítem 3 un alumno, en la parte final del proceso de resolución, obtiene "8y = -16 de donde y = -16 / -8; y = 2". Otro alumno, en el mismo ejercicio, establece que " - 50 + 6 = 44"

Este tipo de errores estaría en la categoría de errores técnicos según Mosvshovitz-Hadar y otros y según Radatz a la categoría 3.

iii. Procedimiento inconcluso. Por ejemplo, en el ítem 10 un alumno presenta como resultado, " $x < \frac{-1}{\frac{-1}{2}}$ ". Según Astolfi, este error estaría ligado a las operaciones intelectuales implicadas.

iv. Procedimientos incorrectos e inferencias no válidas. Por ejemplo para el ítem 5 se presenta como respuesta " $a^3b^5 + b^5a^3y^5 + b^5y^5$ "

Según Radatz son identificados como errores de asociación, que incluyen razonamientos o asociaciones incorrectas entre elementos singulares así como "errores debidos a la aplicación de reglas o estrategias irrelevantes". Por su parte en Mosvshovitz-Hadar y otros, los describen como inferencias no válidas lógicamente, refiriéndose a los fallos que tienen que ver con el razonamiento.

v. Aplicación parcial de regla de factorización por factor común. Por ejemplo en el ítem 8 se presenta como respuesta " $2xy^2(4xy - 1) + x^2y^2(4x + 1)$ " o también " $xy(8xy^2 - 2y + 4x^2y + xy)$ ".

Estos errores están relacionados con los descritos en Mosvshovitz-Hadar y otros, como teoremas o definiciones deformadas de un principio, regla, teorema o definición identificable. Para Radatz, este error estaría causado por un aprendizaje deficiente.

vi. Asociación incorrecta de productos notables. Por ejemplo en el caso del ítem 8 se presenta como respuesta: " $[2(2xy) - (xy)]^2$ ". Para Radatz este tipo de errores se identifican como errores debidos a asociaciones incorrectas o a rigidez de pensamiento ocasionados cuando los alumnos continúan empleando operaciones cognitivas aun cuando las condiciones originales se hayan modificado.

vii. Uso de la aritmética básica ignorando las reglas del álgebra. Por ejemplo para el ítem 8 escriben " $8x^2y^3 - 2xy^2 + 4x^3y^2 + x^2y^2 = 12x^5y^4 - 2x^3y^4 = 10x^3$ ". Estos errores estarían relacionados con los reseñados en Radatz como errores debidos a un aprendizaje deficiente de hechos, destrezas y conceptos previos donde se incluyen todas las deficiencias en el manejo de conceptos, contenidos y procedimientos para las tareas matemáticas.

viii. Resolución aditiva de la potencia de un binomio. Por ejemplo para el desarrollo del binomio se presenta como solución " $(ab^2 + y^2)^3 = a^3b^6 + y^6$ ". Este error está relacionado con el descrito por Radatz como un error debido a un aprendizaje deficiente.

ix. Aplicación incorrecta de la regla del cubo de un binomio. Por ejemplo para el desarrollo del binomio anterior se responde " $3a^3b^6 + 3a^3b^4y^2 + 3y^4ab^2 + 3y^6$ ". Estos errores están relacionados con los descritos en Mosvshovitz-Hadar y otros, como teoremas o definiciones deformadas que se producen por deformación de un principio, regla, teorema o definición identificable; sería debido a la aplicación de reglas irrelevantes para Radatz.

x. Error de cálculo simple: Este error se presenta cuando el alumno se equivoca al realizar alguna de las operaciones básicas de la aritmética y por lo tanto obtiene un valor incorrecto que sigue utilizando sin detectar el error. Este error está relacionado con los descritos en Mosvshovitz-Hadar y otros como errores técnicos en los cuales los errores de cálculo y otros derivados de la ejecución de algoritmos y de tipo 3 según Radatz.

Conclusiones

De acuerdo a los datos estadísticos obtenidos en este trabajo se pone de manifiesto el razonable rendimiento de los alumnos de 1º de bachillerato en álgebra. Globalmente obtuvieron 2,5857 puntos sobre un máximo de 4, lo que conlleva superar la barrera de los 2 puntos donde estaría situada la línea del aprobado.

En relación con el rendimiento de los alumnos de cada modalidad es importante resaltar que los datos obtenidos nos muestran que los alumnos de ciencias que acreditan nota media 2,8571, superan de forma significativa a los de ciencias sociales con media 1,9071. Esto corrobora lo previsible, pero quizás la diferencia constatada es mucho mayor de lo esperado a priori.

Se identificaron 10 tipos de errores particulares en la resolución de las pruebas y cuya relación con la literatura revisada se describió en el punto anterior.

Por último debemos de tener en cuenta que nuestro trabajo está limitado a un único centro. Una muestra más amplia mejoraría la información con la que contamos y nos permitiría generalizar las conclusiones.

Referencias

- Astolfi, J. P. (1999). *El "error", un medio para enseñar*. Investigación y enseñanza. Sevilla: Díada.
- Brousseau, G., Davis, R. y Werner, T. (1986). Observing students at work. En B. Christiansen, A.G. Howson, y M. Otte (Eds.). *Perspectives on Mathematics Education*. Dordrecht: Reidel Publishing Company.
- Cerdán, F. (2010). Las igualdades incorrectas producidas en el proceso de traducción algebraico: un catálogo de errores. *PNA*, 4(3), 99 – 109.
- Enfedaque, J. (1990). De los números a las letras. *Suma*, 5, 23-34.
- Gómez, P. (2007). *Desarrollo del conocimiento didáctico en un plan de formación inicial de profesores de matemáticas de secundaria*. Tesis doctoral. Departamento de Didáctica de la Matemática. Universidad de Granada. Granada.
- Matz, M. (1982). Towards a process model for high school algebra errors. En Sleeman, D. y Brown, J.S. (Eds.). *Intelligent Tutoring Systems*. Academic Press: New York.
- Movshovitz-Hadar, N., Zaslavsky, O. y Inbar, S. (1987). An empirical classification model for errors in high school mathematics. *Journal for Research in Mathematics Education*, 18 (1), 3-14.
- Mulhern, G. (1989). Between the ears: Making inferences about internal processes. In B. Greer & G. Mulhern (Eds.). *New Directions in Mathematics Education*. London: Routledge.
- Palarea, M.M. y Socas, M.M. (1999-2000). Procesos cognitivos implicados en el aprendizaje del lenguaje algebraico. Un estudio biográfico. *El Guiniguada*, 8/9, 319-336.
- Puig, L. (1996). Pupils' Prompted Production of a Medieval Mathematical Sign System. *Proceedings PME-XX*, 1, 77-84. Valencia. España.
- Radatz, H. (1979). Error analysis in mathematics education. *Journal for Research in Mathematics Education*, 9, 163-172.

- Rico, L. (1995). Errores en el aprendizaje de las Matemáticas. En Kilpatrick, J., Rico, L. y Gómez, P. (Eds.). *Educación Matemática*. México: Grupo Editorial Iberoamérica.
- Rico, L. (1999). Los organizadores del currículo de matemáticas. En Rico, L. y otros (Eds.). *La educación matemática en la Enseñanza Secundaria*. Buenos Aires: Erre Eme S.A.
- Sfard, A. (1991). On the dual nature of Mathematical conceptions: Reflections on processes and objects as different sides of the same coin. *Educational Studies in Mathematics*, 22(1), 1-36
- Trigueros, M., Reyes, A., Ursini, S. y Quintero, R. (1996). Diseño de un cuestionario de diagnóstico acerca del manejo del concepto de variable en el álgebra. *Enseñanza de las ciencias*, 14(3), 351-363.
- Vega-Castro, D., Molina, M., Castro, E. (2011). Estudio exploratorio sobre el sentido estructural en tareas de simplificación de fracciones algebraicas. En Marín Rodríguez, M. y otros (Eds.). *Investigación en Educación Matemática XV*, 575- . Ciudad Real: SEIEM.