LA COMPRENSIÓN DE LA APROXIMACIÓN A UN NÚMERO EN EL ACCESO AL SIGNIFICADO DE LÍMITE DE UNA FUNCIÓN EN UN PUNTO

THE UNDERSTANDING OF THE APPROXIMATION TO A NUMBER IN THE ACCESS TO THE MEANING OF THE FUNCTION LIMIT AT A POINT

Pons, J., (1), **Valls, J.** (2), **Llinares, S.** (2)

I.E.S Mutxamel, Alicante (1), *Universidad de Alicante* (2)

Resumen

Esta investigación estudia la influencia de la comprensión de la aproximación a un número y de los modos de representación en la construcción de la concepción dinámica del límite en estudiantes de Bachillerato. El análisis de realizó usando el análisis implicativo (Gras, Suzuki, Guillet y Spagnolo, 2008). Los resultados indican que la construcción paulatina de la concepción dinámica del límite se realiza mediante procesos diferenciados de aproximación en el dominio y en el rango, y, dentro de estos últimos, aquellos en los que las aproximaciones laterales coinciden de las que no coinciden. Además, nuestros resultados indican que el modo numérico o el modo algebraico-numérico desempeñan un papel relevante en el desarrollo de la comprensión de la concepción dinámica de límite.

Abstract

The goal of this research was to study the influence of the understanding of the approximations and the modes of representation on secondary high school students' understanding of dynamic conception of the limit of a function. Analysis was carried out using implicative analysis (Gras, Suzuki, Guillet y Spagnolo, 2008). The findings indicate that there is a progressive construction of meanings of the dynamic conception of limit of a function draw on the understanding of idea of approximation to a number in the domain and rank of the function, and also considering in the rank the coincidence of the lateral approaches. Addition, the representation modes played a relevant role in the development of dynamic conception of limit of a function.

Palabras clave: *Comprensión de límite de una función, análisis implicativo, idea de aproximación a un número, modos de representación.*

Key words: *Understanding of limit concept, implicative analysis, idea of approaches to a number, representation modes.*

Pons, J., Valls, J., Llinares, S. (2012). La comprensión de la aproximación a un número en el acceso al significado de límite de una función en un punto. En A. Estepa, Á. Contreras, J. Deulofeu, M. C. Penalva, F. J. García y L. Ordóñez (Eds.), Investigación en Educación Matemática XVI (pp. 435 - 445). Jaén: SEIEM

La comprensión del límite de una función en un punto

La comprensión del límite de una función real de variable real es un aspecto importante para los estudiantes de educación postsecundaria (Tall, 1991). La enseñanza y el aprendizaje del concepto de límite han sido y son objeto de investigaciones en los últimos 30 años. La importancia del concepto de límite radica en que es una idea fundamental del análisis matemático vinculada a conceptos como continuidad, derivada, e integral. Las diferentes investigaciones indican que el concepto de límite es una noción difícil, y que muchas veces la idea de aproximación a un número es el primer contacto que tienen los estudiantes con este concepto a través de la noción dinámica de límite (Cornu, 1991). La metáfora más común entre los estudiantes se apoya sobre la idea de aproximación. La fuerza y la frecuencia de estas ideas no debe sorprendernos, porque la aproximación esta incluida en muchas de las motivaciones históricas del cálculo e impregna las clases y los libros de texto (Oehrtman (2009). Los primeros ejemplos que tienen los estudiantes con el concepto de límite provienen de la idea de sucesión, por eso no debería sorprendernos que la imagen dominante del concepto de límite sea la de una sucesión monótona o que necesiten una fórmula como parte esencial para su comprensión (Tall, 1992). Por eso, la utilización de formulas para el cálculo de límites hace que el algebra sea al mismo tiempo una ayuda y un impedimento (Bergsten, 2006). Diferentes investigaciones (Cornu, 1991; Cotrill, Dubinsky, Nichols, Schwingendrf, Thomas y Vidakovic, 1996; Przenioslo, 2004; Roh, 2008; Oehrtman, 2009; Kidron, 2011) señalan la influencia de la concepción dinámica dada por Blazquez y Ortega (2002):

> *"Sea "f" una función y "a" un número real, el número "L" es el límite de la función "f" en el punto "a", y se debiera escribir* $\lim\limits_{x \to a} f(x)$, *si cuando "x" se acerca al número "a" más que cualquier aproximación, sus imágenes "f(x)" se acercan a "L" más que cualquier otra aproximación fijada"*

en la comprensión de la concepción métrica dada a través de

$$\lim_{x \to a} f(x) = L \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists\, \partial > 0 \; tal\,que \forall\, x,\; 0 < |x-a| < \partial \Rightarrow |f(x) - L| < \varepsilon$$

Cottrill et al. (1996) indican que la dificultad de los estudiantes para comprender la definición formal del límite puede ser el resultado de una comprensión insuficiente de su concepción dinámica. Estos autores indican que los estudiantes deben construir un proceso de aproximación en el dominio y un proceso de aproximación en el rango y usar la función para coordinarlos. Además, conjeturan que la necesidad de coordinar los dos procesos de aproximación con la cuantificación que se deriva de la concepción métrica es lo que hace que el concepto de límite sea inaccesible para muchos estudiantes. En la comprensión de la coordinación de estos procesos de aproximación desempeñan un papel determinante los diferentes modos de representación. En esta dirección, Blázquez y Ortega (2001) indicaron que la utilización de distintos sistemas de representación cuando se trabaja el concepto de límite tropieza con las dificultades del cambio de sistema de representación, que podría ser un obstáculo didáctico, por el abuso del registro algebraico en la enseñanza tradicional.

Las características de la comprensión de los estudiantes del concepto de límite de una función en un punto

Las investigaciones anteriores nos han proporcionado cierta información sobre las características de la comprensión del concepto de límite en los estudiantes, y en particular el papel desempeñado por las traslaciones entre los diferentes modos de representación, pero no aportan información sobre el papel relevante que desempeña la idea de aproximación a un número, tanto en el dominio como en el rango, para el establecimiento de relaciones significativas con la concepción dinámica del límite. Por ello nos hemos planteado las siguientes preguntas:

- ¿Cuál es el papel que desempeña la comprensión de la idea de aproximación a un número en la construcción de la concepción dinámica del límite?
- ¿Cómo influyen los distintos modos de representación en la comprensión de la aproximación a un número?

Método

Participantes

En la investigación han participado 129 estudiantes de bachillerato (66 de 1º curso y 63 de 2º curso de Bachillerato de Ciencias de la Naturaleza y de la Salud. A los estudiantes de 1º de Bachillerato se les había introducido la noción de límite de una función en un punto dos semanas antes de contestar el cuestionario. A los de 2º de Bachillerato les habían introducido la misma noción seis meses antes de que realizaran el cuestionario.

Instrumentos y procedimiento de recogida de datos

Inicialmente revisamos investigaciones previas (Engler, Vrancken, Hecklein, Müller, y Gregorini, 2007, Roh, 2008)) sobre el concepto de límite de una función, analizamos libros de texto, materiales curriculares y las nociones de aproximación dinámica y métrica de límite de una función con el objetivo de identificar los elementos matemáticos que la constituyen. Dichos elementos se muestran en la figura 1. Diseñamos un cuestionario y entrevista inicial (Valls, Pons y Llinares, 2011; Pons, Valls, y Llinares, 2011).

- *Sea f una función y x_0 un número real. El valor de la función f en $x=x_0$, $f(x_0)$ si existe o no, (E0)*
- *Idea de aproximación*
    - *x se aproxima al número a (E1)*
    - *f(x) se aproxima a L (E1)*
- *Coordinación en la concepción dinámica: cuando x se aproxima al número a, sus imágenes f(x) se aproximan a L (E2)*
- *Coordinación en la concepción métrica: se puede encontrar para cada ocasión un x suficientemente cerca de a tal que el valor de f(x) sea tan próximo a L como se desee (E4)*
- *Formalización como una manifestación de ser consciente de la existencia del límite L de la función f(x) en el punto a, escribiendo lím f(x) = L (E3)*

Figura 1. Elementos matemáticos considerados en el esquema límite de una función

A partir de los resultados de este primer enfoque revisamos el cuestionario e incorporamos nuevas tareas con la finalidad de obtener mayor información sobre el papel que desempeñan los diferentes modos de representación en la comprensión de los estudiantes de la idea de aproximación. Este segundo cuestionario constaba de 8 tareas con un total de 30 ítems. Las tareas se presentaron en tres modos de representación: numérico (N), gráfico (G), y algebraico-numérico (AN).

A continuación, describimos dos de las tareas (Figura 2). La Tarea 1 procede de la investigación de Engler y otros (2007) y se presenta en modo N. La Tarea 8, creada para esta investigación, se presenta en modo AN. Ambas tienen como objetivo poner de manifiesto cómo los estudiantes comprenden las ideas de: (i) "aproximación a un número" (E1), (ii) "coordinación de las aproximaciones en el dominio y en el rango de la tabla" (E2) y (iii) "manifestar formalmente la existencia del límite" (E3).

Tarea 1

A partir de la tabla, responde:

x	2.9	2.99	2.999	2.9999	...	3.0001	3.001	3.01	3.1
f(x)	14.21	14.9201	14.992001	14.99920001	...	15.00080001	15.0080001	15.0801	15.81

a. ¿A qué número a se aproxima x?

b. ¿A qué número se aproxima la función, f(x)?

c. Describe el comportamiento de la función, f(x), con relación al comportamiento de la variable x

d. Di, si es posible, cuál es el límite de la función en x = 3

Tarea 8

Siendo

$$f(x) = \begin{cases} 2x+1 & x<0 \\ -2x-3 & x \geq 0 \end{cases}$$

x	- 0.1	- 0.01	- 0.001	- 0.0001	...	0.0001	0.001	0.01	0.1
f(x)									

a. Completa la tabla

b. ¿A qué número a se aproxima x?

c. ¿A qué número se aproxima la función f(x)?

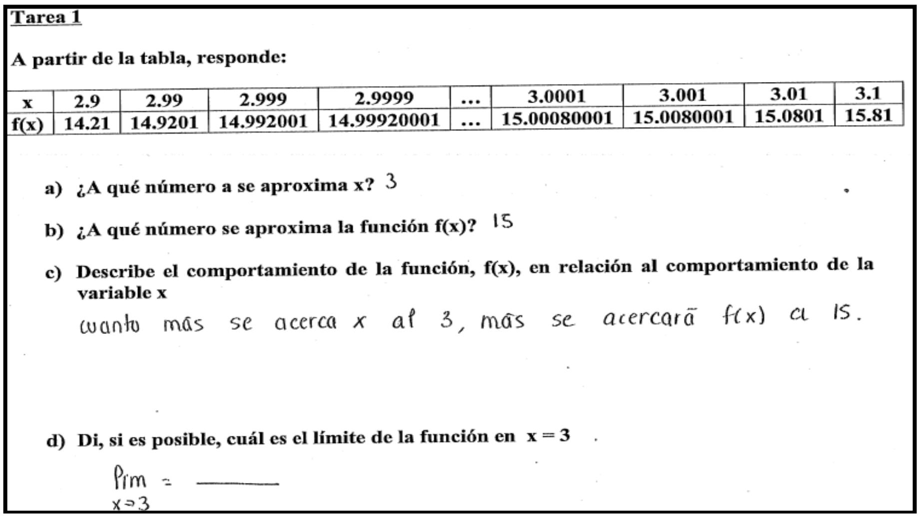
d. Describe el comportamiento de la función, f(x), con relación al comportamiento de la variable x.

e. Di, si es posible, cuál es el límite de la función en x = 0

Figura 2. Tareas 1 y 8

Análisis

En primer lugar, tres investigadores realizaron una lectura conjunta de las respuestas a cada uno de los ítems con el objetivo de generar criterios y unificar la codificación dicotómica, (1 respuesta correcta, 0 incorrecta). A continuación, ejemplificamos este proceso a partir de las respuestas dadas por una estudiante a la tarea 1. En la Tarea 1 (Figura 2) el ítem 1a y el 1b reflejan la aproximación a un número en el dominio y el rango, respectivamente, el ítem 1c la coordinación de las aproximaciones en el dominio y en el rango, y el ítem 1d la formalización. La respuesta a la Tarea 1 de la estudiante EST 74 (Figura 3) fue codificada como (1,1,1,0) al responder de forma correcta a los ítems 1a, 1b, y 1c al asociar la aproximación a un número en el dominio a un número natural (*x = 3*), la aproximación en el rango a un número natural (*f(x) = 15*), y al coordinar las aproximaciones en el dominio y el rango (*Cuando más se acerca x al 3, más se acercará f(x) al 15*). Finalmente, el ítem 1d se codifico 0 al no haber sido contestado.



Tarea 1

A partir de la tabla, responde:

x	2.9	2.99	2.999	2.9999	...	3.0001	3.001	3.01	3.1
f(x)	14.21	14.9201	14.992001	14.99920001	...	15.00080001	15.0080001	15.0801	15.81

a) **¿A qué número a se aproxima x?** 3

b) **¿A qué número se aproxima la función f(x)?** 15

c) **Describe el comportamiento de la función, f(x), en relación al comportamiento de la variable x**

cuanto más se acerca x al 3, más se acercará f(x) a 15.

d) **Di, si es posible, cuál es el límite de la función en x = 3**

$\lim_{x \to 3} =$ ______

Figura 3. Respuesta de EST74 a la Tarea 1

En segundo lugar, se llevó a cabo un análisis estadístico implicativo (Gras et al., 2008) con el objetivo de dar respuesta a las preguntas de investigación planteadas. Trigueros y Escandon (2008) señalan que, en la estadística implicativa, dada una población E, los estudiantes, y un conjunto de variables, los ítems del cuestionario, "*se busca dar sentido estadístico a una implicación no estricta a* $\Rightarrow$ *b*" (pág. 66). En esta metodología, "*la implicación a* $\Rightarrow$ *b será admisible en una experiencia si el número de individuos de E que la contradicen es muy pequeño, en términos probabilísticos, en relación con el número de individuos esperado bajo la hipótesis de ausencia de relación. Si esto ocurre, se puede decir que A, conjunto de observaciones que satisfacen la característica a, está "casi" contenido en B, conjunto de observaciones que satisfacen la característica b"* (pág. 67).

Para realizar el análisis estadístico implicativo se usó el software CHIC (Classification Hiérarchique Implicative et Cohésitive) (Gras et al., 2008). Este análisis traduce gráficamente el conjunto de las relaciones cuasi-implicativas entre las variables en distintos niveles de significación. Para realizar este análisis se configuraron un total de 30 variables a partir de los elementos matemáticos del esquema del límite de una función vinculados a cada ítem y al modo de representación usado en la redacción de cada problema. Las variables fueron simbolizadas mediante un código. En dicho código, la letra Ei (i = 0, 1, 2, 3, 4) indica el elemento matemático que se pone de manifiesto en el ítem, la letra que le sigue hace referencia a la inicial del modo de representación usado en la presentación del problema (G, N, AN) y, por último, el número y la letra en minúscula hacen referencia, respectivamente, a la tarea y al ítem al referenciado. Por ejemplo, el ítem

¿A qué número se aproxima x?

fue codificado como "E1N1a" indicando: el elemento "aproximación a un número" E1, en modo numérico (N), en la tarea 1, y en el ítem *a*. Las respuestas de los 129 estudiantes fueron organizadas en una tabla de doble entrada, 30x129.

El análisis implicativo realizado al 99% de significación estadística muestra diferentes ideas, a través de implicaciones señaladas por las flechas de la figura 4, que indican de qué manera se articula la comprensión de la idea de aproximación en el dominio y en el rango para construir el significado de la idea de límite y su formalización, así como la manera en qué intervienen los diferentes modos de representación en este proceso. Además, usamos una de las posibilidades del programa

CHIC "suprimir o centrarse" solamente en determinadas variables (Gras y Kuntz, 2009). En los gráficos implicativos generados, las respuestas de los estudiantes a los ítems que inician las ramas conllevan que esos estudiantes respondan acertadamente a la mayoría de los ítems que aparecen en la parte inferior del gráfico.

Resultados

Los resultados están organizados en dos secciones. En la primera sección se describen las relaciones implicativas considerando los distintos modos de representación y el acceso a la idea de aproximación a un número. En la segunda sección describimos la relación entre la aproximación a un número y la comprensión dinámica de límite.

Acceso a la idea de aproximación a un número. El papel de los modos de representación.

En el diagrama implicativo al 99% de significación (Figura 4) hemos seleccionado las variables que hacen referencia a los elementos matemáticos E0 y E1. Este gráfico muestra dos ideas relevantes relativas al papel de los modos de representación y el acceso a la idea de aproximación a un número (Figura 5a y b, extraídas de la figura 4).

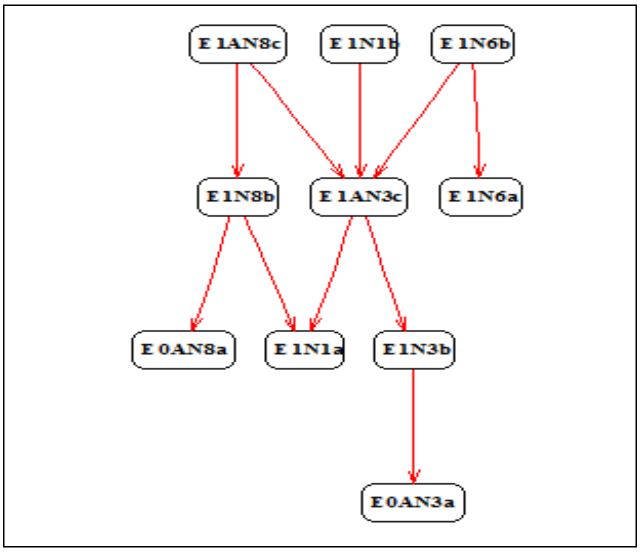


Figura 4. Relaciones implicativas al 99% de las variables relativas a los elementos E0 y E1

Las figuras 5a-b se pueden interpretar indicando que si los estudiantes comprenden:

a. en modo numérico, la aproximación a un número cuando las aproximaciones laterales coinciden, son capaces de identificar esta misma aproximación en modo algebraico-numérico (E1N1b$\Rightarrow$E1AN3c). La misma relación se da cuando las aproximaciones laterales en modo numérico no coinciden (E1N6b$\Rightarrow$E1AN3c).

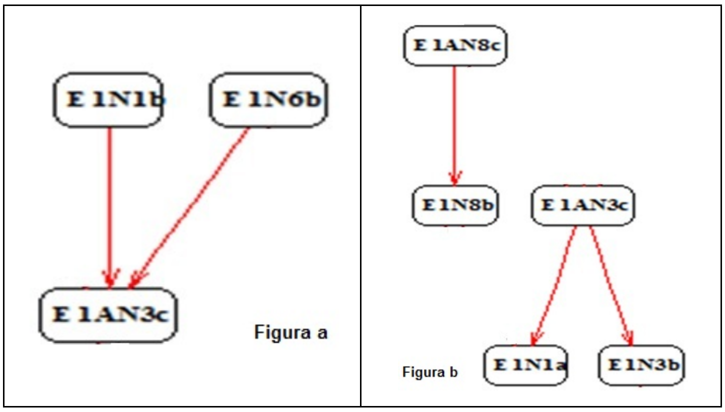


Figura 5a-b. Relaciones al 99% de variables en modos N y AN relativas al elemento E1

b. en modo algebraico-numérico, la aproximación a un número cuando las aproximaciones laterales coinciden, son capaces de identificar esta misma aproximación en modo numérico (E1AN3c$\Rightarrow$E1N1a y E1AN3c$\Rightarrow$E1N3b). La misma relación se da cuando las aproximaciones laterales en modo algebraico-numérico no coinciden (E1AN8c$\Rightarrow$E1N8b).

Estas dos ideas indican que los estudiantes utilizan indistintamente los modos de representación numérico y algebraico-numérico para acceder a la idea de aproximación a un número.

La idea de aproximación a un número y la comprensión dinámica de límite

En la figura 6a (extraída de la figura 4) se puede interpretar que comprender la aproximación a un número en el dominio está vinculado al cálculo de los valores de la función en un punto (E1N8b$\Rightarrow$E0AN8a, y E1N3b$\Rightarrow$E0AN3a), necesario para la construcción de la sucesión de números que muestran la aproximación en el rango. Estas dos implicaciones deben ser entendidas en el contexto del tipo de ítems que constituían el cuestionario presentado a los estudiantes.

Por otra parte, las cuatro variables que hacen referencia a la idea de aproximación en el rango (Figura 6b, extraída figura 4) dan lugar a dos relaciones implicativas: E1AN8c$\Rightarrow$E1AN3c, y E1N6b$\Rightarrow$E1AN3c indicando que: (i) la comprensión de la aproximación a un número en el rango se inicia en modo algebraico-numérico y se consolida en este mismo modo, y en él numérico, y (ii) la comprensión de la aproximación a un número en el rango cuando las aproximaciones laterales no coinciden (E1AN8c, y E1N6b), se apoya en la comprensión de la aproximación a un número en el rango cuando las aproximaciones laterales coinciden (E1AN3c).

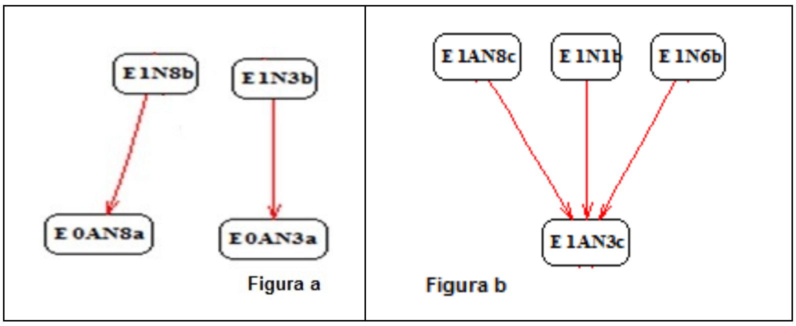


Figura 6a-b. Relaciones al 99% entre las variables "idea de aproximación numérica", en el rango (E1)

Si analizamos la subestructura de la Figura 6b, en función del resto de variables y relaciones de la Figura 4, podemos inferir que: (a) la comprensión de la aproximación a un número en el rango (cuando las aproximaciones laterales coinciden, y cuando no) está vinculado a la comprensión de la aproximación a un número en el dominio (en modo numérico), y que (b) la aproximación a un número en el dominio no implica necesariamente la comprensión de la aproximación a un número en el rango. Este hecho establece una diferencia cognitiva entre los procesos de aproximación en el dominio y en el rango.

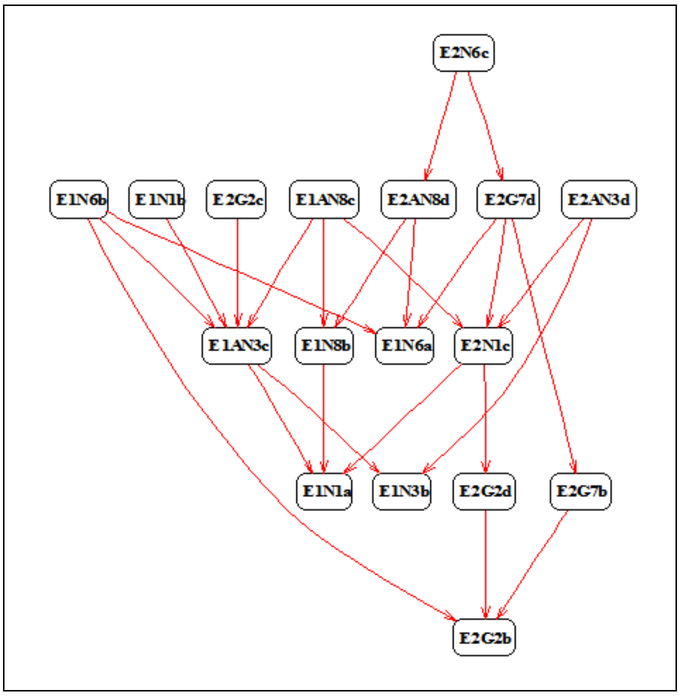


Figura 7. Relaciones al 99% entre las variables relativas a los elementos E1 y E2

Del diagrama implicativo al 99% (Figura 7) en el que hemos seleccionado todas las variables que hacen referencia a los elementos matemáticos “aproximación a un número” (E1) y “coordinación de los procesos de aproximación en el dominio y en el rango” (E2), hemos extraído relaciones en las que toma parte la idea de aproximación a un número en el rango cuando las aproximaciones laterales no coinciden (Figura 8). Su análisis permite identificar dos ideas relevantes relativas al papel que desempeña la idea de aproximación a un número en la comprensión dinámica de límite.

La figura 8 se puede interpretar como que si los estudiantes comprenden la aproximación a un número en el rango cuando las aproximaciones laterales no coinciden:

a) en modo algebraico-numérico, son capaces de identificar: (i) la aproximación en el dominio, en modo numérico (E1AN8c$\Rightarrow$E1N8b); (ii) la aproximación en el rango cuando las aproximaciones laterales coinciden, en modo algebraico-numérico (E1AN8c$\Rightarrow$E1AN3c); y (iii) la coordinación de las aproximaciones en el dominio y en el rango cuando las aproximaciones laterales coinciden, en modo numérico (E1AN8c $\Rightarrow$E2N1c).

b) en modo numérico, son capaces de identificar: (i) la aproximación en el dominio, en modo numérico (E1N6b$\Rightarrow$E1N6a); (ii) la aproximación en el rango cuando las aproximaciones laterales coinciden, en modo algebraico-numérico (E1N6b$\Rightarrow$

E1AN3c); y (iii) la coordinación por la izquierda las aproximaciones en el dominio y en el rango cuando estas coinciden, en modo gráfico (E1N6b $\Rightarrow$ E2G2b).

Estos datos indican que comprender la aproximación a un número cuando las aproximaciones laterales no coinciden implica ser capaz de coordinar las aproximaciones en el dominio y en el rango cuando las aproximaciones laterales coinciden. Es decir, la no coincidencia de las aproximaciones laterales a un número en el rango "incide" en la generación de relaciones implicativas.

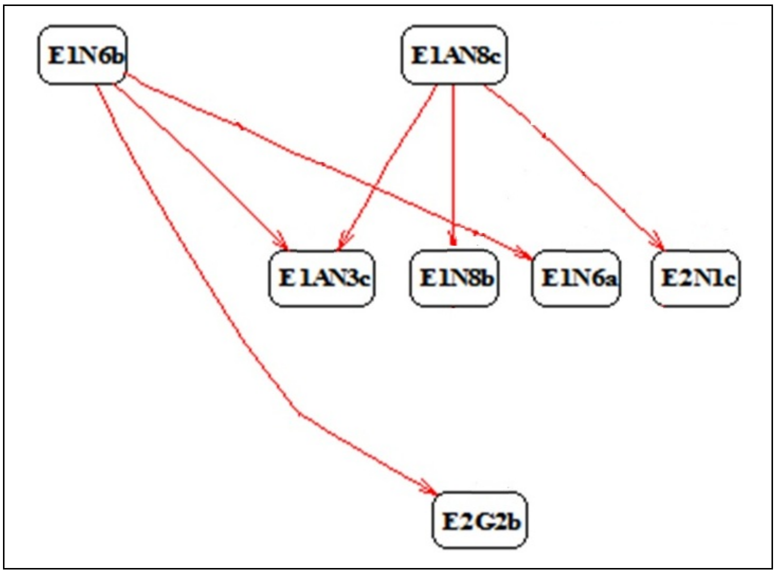


Figura 8. Relaciones al 99% entre variables relativas a los elementos E1 y E2

Conclusión

El objetivo de esta comunicación ha sido aportar información sobre cómo los estudiantes de primero y segundo de bachillerato construyen, en este nivel, el significado para el concepto de límite de una función en un punto a partir de la aproximación a un número, y qué papel desempeñan los modos de representación. Los resultados indican que la comprensión de la coincidencia o no coincidencia de las aproximaciones laterales en el rango es un elemento importante en el proceso de construcción del significado de límite de una función en un punto. Además, indican que la construcción de la concepción dinámica del límite se realiza de forma paulatina.

En un primer momento, la idea de aproximación a un número en el dominio se apoya en el cálculo de valores de la función dada en modo algebraico y que la idea de aproximación en el rango se apoya en la idea de aproximación en el dominio. Además, la idea de aproximación en el rango se inicia en modo algebraico-numérico y se consolida en los modos numérico y algebraico-numérico. Nuestros resultados indican que los modos numérico o algebraico-numérico desempeñan un papel relevante en el desarrollo de la comprensión de la concepción dinámica de límite.

Además, la idea de aproximación a un número en el rango, cuando las aproximaciones laterales no coinciden, en los modos numérico y algebraico-numérico, se apoya en la coordinación de las aproximaciones en el dominio y en el rango, cuando las aproximaciones laterales coinciden. Es decir, que la construcción paulatina de la concepción dinámica del límite se realiza mediante los procesos de aproximación diferenciando por una parte los que se realizan en el dominio, de los que se realizan en el rango, y dentro de estos últimos aquellos en los que las aproximaciones laterales coinciden de aquellos en las que no coinciden. Sin embargo, un hecho importante puesto de manifiesto por nuestros resultados es que la comprensión de la idea de aproximación en el rango, cuando las aproximaciones laterales no coinciden, implica la coordinación de las aproximaciones en el dominio y en el rango, cuando las aproximaciones laterales coinciden, pero no implica necesariamente ser capaz de establecer esta coordinación cuando las aproximaciones laterales no coinciden. La importancia de este hecho radica en que podría señalar la diferencia cognitiva que para el estudiante resulta tener que en la aproximación a un número en rango, coincidan o no las aproximaciones laterales (Valls et al., 2011; Pons et al., 2011)

Referencias

Bergsten, C. (2006). Trying to Reach the Limit – The Role of Algebra in Mathematical Reasoning. *Proceedings of the 30nd Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, 2, 2, 153 – 160.

Blázquez, S. y Ortega, T. (2001). Los sistemas de representación en la enseñanza del límite. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa, 4*(3), 219- 236.

Blázquez, S. y Ortega, T. (2002). Nueva definición de límite funcional. *UNO*, 30, 67 – 83.

Cornu, B. (1991). Limits. En D. Tall (Ed), *Advanced Mathematical Thinking* (pp. 153-166). Dordrecht: Kluver.

Cottrill, J., Dubinsky, E., Nichols, D., Schwingendorf, K., Thomas, K. y Vidakovic, D. (1996). Understanding the Limit Concept: Beginning whit a Coordinated Process Scheme. *Journal of Mathematical Behavior, 15*, 167 – 192.

Engler, A., Vrancken, S., Hecklein, D., Müller, D. y Gregorini, M.I. (2007). Análisis de una propuesta didáctica para la enseñanza de límite finito de variable finita. *UNIÓN, 11*, 113 – 132.

Gras, R., Suzuki, E., Guillet, F. y Spagnolo, F. (Eds.) (2008). *Statistical Implicative analysis. Theory and Applications*. London: Springer.

Gras, R. y Knutz, P. (2009). El análisis estadístico implicativo (ASI) en respuesta a problemas que le dieron origen. En P. Orús, L. Zamora, P. Gregori (ed), *Teoría y aplicaciones del Análisis Estadístico Implicativo* (pp. 3-49). Castellón, España: Innovacio Digital Castello.

Kidron, I. (2011). Constructing knowledge about the notion of limit in the definition of the horizontal asymptote. *International Journal of Science and Mathematics Education*, 9(6), 695-717

Oehrtman, M. (2009). Collapsing Dimensions, Physical Limitation, and Other Students Metaphors for Limit Concepts. *Journal for Research in Mathematics Education*, 40 (4), 396 – 426.

Pons, J., Valls, J., y Llinares, S. (2011). Coordination of Approximations in Secondary School Students' Understanding of Limit Concept. *Proceedings of the 35nd Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*, 4, 3, 393 – 400.

Przenioslo, M. (2004). Images of the Limit of a Function in the Course of Mathematical Studies at the University. *Educational Studies Mathematics*, 55, 103 – 132.

Roh, K. H. (2008). Students' Images and their Understanding of Definitions of the Limit of a Sequence. *Educational Studies Mathematics*, 69, 217 – 233.

Tall, D. (1991). The Psychology of Advanced Mathematical Thinking. En D.Tall (Ed.). *Advanced mathematical thinking* (pp. 3 – 21). Dordrecht: Kluwer Academic Publisher.

Tall, D. (1992). The Transition to Advanced Mathematical Thinking: Functions, Limits, Infinity, and Proof. En Grows J. (ed) *Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning.* MacMillan Publishing, Reston. pp. 495 – 511.

Trigueros, M. y Escandon, C. (2008). Los conceptos relevantes en el aprendizaje de la graficación. *Revista Mexicana de Investigación Educativa*, 13 (36), 59 – 85.

Valls, J., Pons, J., y Llinares, S. (2011). Coordinación de los procesos de aproximación en la comprensión del límite de una función. *Enseñanza de las Ciencias*, 29(3), 325 – 338.