REVISTA EMA
2001, VOL. 6, Nº 2, 95-140

EQUILIBRAR ALGO DESEQUILIBRADO: LOS *ESTÁNDARES DEL NCTM* A LA LUZ DE LAS TEORÍAS DEL APRENDIZAJE DE LAS MATEMÁTICAS

ANNA SFARD

Este artículo[1] es respuesta a la pregunta formulada por Jeremy Kilpatrick, "¿Qué dicen la investigación y la teoría acerca de la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas que se plasman en los documentos de los Estándares [del NCTM] y en varias de las críticas hechas a ellos?" (Kilpatrick, 1997). Me centro aquí en aquellas necesidades de los alumnos, que según las teorías disponibles, son la fuerza conductora que subyace al aprendizaje humano y debe ser lograda si se quiere que éste tenga éxito. En este artículo se identifican diez de tales necesidades. Mi análisis se basa en el supuesto de que todas ellas son universales aunque se puedan expresar de modos diferentes en diferentes individuos y en diferentes edades. Para cada una de las diez necesidades se consideran cuatro preguntas: ¿qué sabemos acerca de esta necesidad?, ¿cómo enfrentan esta necesidad los Estándares del NCTM?, ¿qué puede resultar mal al implementar las recomendaciones de los Estándares?, ¿qué se puede hacer para prevenir esto? A lo largo del artículo, señalo ciertos dilemas inherentes al proyecto de enseñar matemáticas y sostengo que aunque algunos de los problemas no parezcan solubles, quizás su impacto se pueda reducir considerablemente con sólo mantenernos conscientes de su existencia. Este artículo se ha dividido en dos partes para su presentación en la Revista. Aquí se incluye lo referente a las cinco primeras necesidades identificadas; en el siguiente número se expondrá lo relativo a las otras necesidades.

1. El original de este artículo "Balancing the unbalanceable: the NCTM *Standards* in the light of theories of learning mathematics" fue preparado para la conferencia "Research foundations of NCTM *Standards*", de marzo de 1998 en Atlanta, USA. Aunque la nueva versión de los *Estándares,* que circula desde abril de 2000, es bien diferente en varios aspectos a la versión de 1989, preserva los principios básicos de ésta. Puesto que el presente artículo se refiere a los peligros de exagerar o interpretar ligeramente tales principios, es tan relevante para el actual esfuerzo de reforma como para el anterior.
   Este artículo fue traducido por Patricia Inés Perry, investigadora de "una empresa docente", y Hernando Alfonso, con la autorización del *National Council of Teachers of Mathematics* (NCTM). Una versión editada del original aparecerá en el libro *A research companion to principles and standards for school mathematics* del NCTM, que está en preparación.

CUÁL ES EL PROBLEMA Y CÓMO PUEDEN AYUDAR LAS TEORÍAS

El problema

Las matemáticas son difíciles. Ciertamente están entre los esfuerzos más complejos del intelecto humano. Como materia escolar, con frecuencia es inmanejable. A lo largo de los años se ha pensado mucho acerca de cómo se puede enseñar exitosamente a pesar de la dificultad. Los educadores y los matemáticos que han tratado de trabajar con el problema, a menudo se han encontrado oscilando entre soluciones extremas.[2] Vacilaron entre programas tales como las famosas matemáticas modernas, resultado de la preocupación acerca del tipo de matemáticas que debían aprender los niños, y proyectos que, como reacción a la debilidad didáctica que representaba un enfoque demasiado riguroso, se centraron en las necesidades y capacidades del estudiante.

Los *Estándares del NCTM* son el resultado de un intento serio y amplio de enseñar "matemáticas con una cara humana". Esto significa tener gran consideración hacia las matemáticas y hacia el estudiante. Lo que se está enseñando son "las matemáticas en el hacer" en vez de un cuerpo estático de conocimientos. En este proceso, las necesidades del niño que aprende nunca desaparecen de los ojos de quienes llevan a cabo las reformas. Sólo hasta hace poco estas necesidades se convirtieron en materia de un estudio disciplinado, y por tanto puede ser la primera vez en la historia que podemos apoyar un proyecto educativo de dimensiones tan impresionantes con un conocimiento pedagógico sistemático. Difícilmente puede haber una controversia acerca de los valores humanísticos inmanentes en los principios curriculares que supuestamente guían el cambio actual en la enseñanza de las matemáticas. Incluso los críticos más extremos están de acuerdo en que "la reforma tiene sus méritos" (Wu, 1997, p. 946), y aun los más escépticos aplauden el hecho de que

> ha reemplazado algo del aprendizaje memorístico en el currículo tradicional, al proporcionar motivación y argumentos heurísticos. Ha hecho conscientes a los estudiantes del proceso normal de hacer matemáticas, tal como hacer conjeturas y buscar contraejemplos. También ha hecho las matemáticas más relevantes al estudiante promedio al promover el uso de aplicaciones reales en el currículo. (p. 946)

2. Cf. Kilpatrick (1992).

Este aplauso es poco sorprendente. Los *Estándares del NCTM* proporcionan esperanza en relación con la clase de cambio en el que todos hemos estado soñando durante largo tiempo. Desde que se convirtieron en una parte obligatoria de los currículos escolares, las matemáticas se han conocido como el terror escolar —una materia en la que se trata al estudiante como una máquina programable y no como a un ser humano creativo. Aquí, por lo menos, las necesidades intelectuales y emocionales del niño se han tenido en cuenta. La reforma, por tanto, representa una posibilidad razonable de ser buena tanto para la mente del estudiante como para su alma: al lado del entusiasmo intelectual, la reforma devuelve a los estudiantes de matemáticas su autoestima perdida hace tiempo. La importancia educativa de tal cambio va más allá de la clase misma.

Sin embargo, a pesar de lo que parece ser un consenso sobre el espíritu general de los *Estándares del NCTM,* se pueden escuchar también voces de insatisfacción de quienes aprueban sus metas. Ultimamente estas voces han llegado a hacerse muy fuertes. Si no son las metas, entonces, ¿qué es lo que se cuestiona?

Que el péndulo de la reforma se niegue a llegar al estado de equilibrio no debe sorprender. Como estoy tratando de mostrarlo en este artículo, las necesidades de las matemáticas y las de los niños que se supone deben aprenderlas, no necesariamente concuerdan. Cualquier cosa que se haga teniendo en cuenta solamente las matemáticas parece ir en detrimento del niño; y cualquier cosa que se haga a favor del niño invariablemente compromete algunos contenidos y habilidades de índole matemática. Cualquier movimiento de reforma que trate de arreglar las deficiencias de métodos anteriores de enseñanza parece estar ligado a desplazar el péndulo al polo opuesto. Cada vez que se vislumbra que está en peligro el equilibrio de cada quien, se pone en camino un viraje de reforma.

De acuerdo con las críticas, son las matemáticas que se supone debe aprender el estudiante las que han salido afectadas por el actual movimiento de reforma. Hay poca duda de que esto es opuesto a lo que los autores de los *Estándares del NCTM* tenían en mente cuando escribieron sus propuestas. La preocupación acerca de las matemáticas ha sido genuina, en tanto que la intención era comprometer a los estudiantes en lo que debe contar como una actividad auténtica de matematización y no en aprender hechos matemáticos terminados. Sin embargo, el éxito de las ideas educativas nunca es una simple función de las ideas en sí mismas. No hay ruta directa alguna que vaya de los principios curriculares generales a la instrucción exitosa. Mientras se escuchan las voces críticas es fácil advertir que, en efecto, la verdadera razón de la presente controversia no reside tanto en los *Estándares* como tales, sino en las formas como algunas veces se traducen en la práctica. Un cierto sesgamiento en esta traducción puede ser la principal causa. Como intentaré mostrarlo, cuando se trata de implementar ideas promisorias, nuestro entusiasmo nos hace incurrir en el error del rey Midas: profundamente convencidos de que nuestras ideas son de oro, estamos predispuestos a ver que todo se convierte en oro. Cuando ello ocurre quedamos sin varios elementos vitales. En efecto, las prácticas educativas se conocen por su fuerte propensión hacia alternativas y soluciones definitivas. También con mucha frecuencia, se adopta una nueva idea promisoria y se excluyen totalmente las posibles alternativas. De esa manera, lo que se pretendía que fuera sólo un ingrediente llega a ser toda la comida; lo que se suponía que debía ser una técnica opcional para quienes la encontraran útil y agradable, gradualmente se convierte en la única forma legítima de hacer las cosas. Tal exclusividad es una prescripción efectiva para el fracaso.

Mi propósito en este artículo es tratar de sustentar las afirmaciones anteriores al responder la pregunta "¿qué dicen la investigación y la teoría acerca de la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas que se plasman en los documentos de los *Estándares* y en varias de las críticas hechas a ellos?" (Kilpatrick, 1997). Aunque me centre en el estudiante, también trataré de ver cómo las necesidades del niño y las de las matemáticas algunas veces se mueven en direcciones que difieren. Eventualmente, se hará un intento para encontrar las formas de balancear esas necesidades divergentes. Todo esto, sin embargo, no se hará antes de pensar en las formas en las que las teorías del aprendizaje pueden apoyar la práctica educativa. Al mostrar la fuerza y las limitaciones del argumento teórico, espero poder dar el mejor uso a las teorías, y a la vez, protegerlas de ser interpretadas en el sentido de que digan más de lo que posiblemente dicen.

Qué se puede hacer con las teorías

Los proponentes de los *Estándares* tienen un arma poderosa para luchar contra la crítica reciente. Sus ideas curriculares innovadoras no son resultado de creencias arbitrarias —varias de ellas se pueden ver como derivadas de teorías de enseñanza y aprendizaje. Las teorías mismas, resultado de muchas décadas de un desarrollo impresionante, se fundamentan en mucha experiencia y en investigación empírica que ha mostrado la inefectividad de los métodos antiguos y ha indicado el potencial de las nuevas direcciones. Parece, por tanto, que quienes proponen las nuevas ideas y los que solicitan la expulsión de los enfoques tradicionales tienen buenas razones para hacerlo: tienen a su favor teorías de enseñanza y aprendizaje. Sin embargo, al usar esta clase de argumento, sólo haremos nuestro trabajo de manera convincente si nos mantenemos realistas acerca del poder de las teorías.

Para estar seguros, las teorías y la investigación son las mejores herramientas que tenemos para mejorar la práctica y tomar decisiones pedagógicas sensatas. Esto no significa, sin embargo, que su poder sea irrestricto. La afirmación que se ha hecho antes en el contexto de los principios curriculares y sus implementaciones en el salón de clase, se repetirá ahora con respecto a las teorías y a sus interpretaciones: cuando se traduce de lo general a lo concreto y de lo teórico a lo práctico, hay siempre varias maneras de proceder. Al estar arraigadas en metáforas y analogías (Bruner, 1986; Scheffler, 1991; Sfard, 1998), las teorías de enseñanza y aprendizaje no proporcionan respuestas únicas a preguntas prácticas. Una teoría, si está bien concebida, puede prestar apoyo a una variedad de prácticas educativas sin privilegiar a ninguna de ellas. Es decir, la teoría sólo puede sugerir, no dictar; los principios curriculares y los enfoques instruccionales concretos deben ser *implicados* o *sustentados* por la teoría, pero ciertamente no son *necesitados* por argumentos teóricos. De manera similar, el éxito y el fracaso educativo se pueden *comprender* y *explicar* con la ayuda de un argumento teórico, pero difícilmente puede ser *predicho* o *controlado* teóricamente.

Hay algunos otros aspectos de la discusión que sigue que deben ser explicados antes de emprender la tarea misma. El lector advertirá pronto que mi análisis es algo ecléctico. No sólo promuevo múltiples interpretaciones de ideas generales, sino que también busco inspiración y apoyo en varias teorías diferentes. Puesto que algunos de los marcos conceptuales que voy a usar, se consideran algunas veces mutuamente excluyentes, estoy corriendo el riesgo de ser acusada de volubilidad, si no de incoherencia. Por tanto, permítaseme declarar que estoy haciendo todo esto de manera deliberada, guiada por la misma creencia que fue presentada antes en un contexto un poco diferente: la exclusividad es enemiga del éxito. Las teorías educativas, igual que las soluciones prácticas, responden mal cuando se les deja actuar solas. Ellas pueden tener éxito en la compañía de otras teorías. Aunque somos libres en la elección de metáforas, una vez hecha la elección comenzamos a estar restringidos en nuestro pensamiento y decisiones posteriores. Las metáforas y las teorías resultantes sólo pueden llevarnos tan lejos como sus implicaciones nos lo permitan. En la medida en que la metáfora en la que pensamos no sea desafiada por una metáfora alternativa, sus implicaciones parecen naturales, autoevidentes, e incuestionables. Sólo ante la presencia de otra metáfora y otra teoría podemos llegar a ser críticos hacia lo aparentemente obvio; sólo cuando una teoría alternativa nos hace conscientes de las raíces metafóricas de nuestras creencias actuales estamos en capacidad de abrirnos a nuevas posibilidades que no se podían considerar antes. Esta pluralidad de perspectivas es en extremo importante porque, para ponerlo en palabras de Freudenthal (1978), “la educación es un campo tan vasto que incluso lo que concierne a una actitud científica es demasiado amplio para apreciarlo con sólo un par de ojos" (p. 78).

También quiero explicar por qué no temo ser incoherente cuando cambio la mirada atenta de una teoría a otra, e incluso más peligrosamente, de un marco epistemológico a otro. La multiplicidad de perspectivas teóricas no implica necesariamente una contradicción. Las controversias teóricas son muy a menudo (si no siempre) un resultado de diferencias entre metáforas subyacentes. Si esto es así, las teorías mismas sólo raras veces son verdaderamente incompatibles; la mayoría de las veces, más bien, deben ser vistas como *complementarias*, es decir, que conciernen a diferentes aspectos de los mismos fenómenos, o, *inconmensurables*, es decir, que hablan diferentes lenguajes en vez de entrar en conflicto una con otra. En este último caso, simplemente no hay un conjunto de criterios comunes que ayuden a resolver racionalmente la controversia aparente (Kuhn, 1962; Rorty, 1979). Junto con Bruner (1996), me gustaría afirmar que incluso las perspectivas piagetiana y vygotskiana, ampliamente reconocidas como incompatibles, de hecho, pueden ser tratadas como inconmensurables en lugar de mutuamente excluyentes. Todo esto habla a la fuerza en favor del pluralismo teórico. El uso de perspectivas teóricas múltiples se evidencia no sólo como posible sino también como deseable. Una combinación de perspectivas teóricas puede tener un efecto sinergético.[3]

Finalmente, unas palabras acerca de las teorías específicas a las que me referiré en este artículo. A lo largo de las últimas centurias se han propuesto muchos enfoques al desarrollo cognitivo del ser humano. La mayor parte del tiempo, el estudio del pensamiento ha esta guiado por la metáfora del aprendizaje como adquisición: se ha dicho que una persona que aprende algo nuevo *adquiere* un concepto o procedimiento nuevo. Estas nuevas entidades cognitivas se pueden retener entonces en la memoria gracias a que se incorporan en ciertos esquemas mentales. Posteriormente, hemos sido testigos de

3. No es imposible pensar en incluir teorías inconmensurables en un marco conceptual más extenso. La aceptación de las geometrías no euclidianas es una buena evidencia de tal posibilidad, y la física actual con el principio complementario de Bohr es otra evidencia. Visto desde la perspectiva "más alta" del sistema común, los conceptos básicos y las tendencias de las varias teorías adquieren, por supuesto, un significado ligeramente diferente. Así por ejemplo, después de la aceptación de la geometría no euclidiana, la noción de axioma ya no se entiende más como "una verdad evidente en sí misma", sino como una proposición que se elige como un elemento atómico de la teoría. Cuando se integran a un marco común, las ideas de Piaget y de Vygotsky también están limitadas en cuanto deben ser entendidas de manera algo diferente a lo que se entiende en el contexto original de las teorías respectivas. A propósito, este proceso de ascender a sistemas conceptuales globales más altos que, en ciertas coyunturas especiales, deben aportar una reconceptualización de lo que se sabía antes, es totalmente consistente con lo que Piaget y Vygotsky dicen acerca de cómo se desarrolla el conocimiento humano.

la emergencia de una nueva perspectiva. Se ha propuesto que el aprendizaje debe considerarse como “participación periférica” (Lave y Wenger, 1991) en un cierto tipo de práctica. De acuerdo con este nuevo enfoque, el estudiante de matemáticas es una persona que gradualmente se convierte en miembro de una comunidad matematizante y la teoría, por tanto, se enfoca en los ligámenes de la evolución entre el individuo y el grupo de profesionales.[4]

En el siguiente análisis, sustentaré mis argumentos con ambos tipos de teorías.[5] En vista de la tendencia existente a considerar que es difícil reconciliar los enfoques adquisicionista y participacionista, permítaseme enfatizar una vez más que, confiando en el principio del pluralismo teórico, no trataré de elegir una metáfora como generalmente “mejor” que la otra, y no le concederé a una de ellas la calidad de proveedora exclusiva de criterios para la evaluación de los *Estándares del NCTM*. Como espero haberlo podido mostrar, cada uno de los dos marcos generales tiene algo que ofrecer. Más aun, algunas veces las dos perspectivas se refuerzan mutuamente proporcionando perspectivas complementarias sobre las mismas necesidades básicas de quien aprende. Es por tanto bastante obvio que ciertas ideas importantes acerca del aprendizaje se perderían si decidiéramos dar la espalda a cualquiera de las dos epistemologías.

Qué se hará

En lo que sigue, examinaré los marcos teóricos disponibles mirando las necesidades de los estudiantes que, de acuerdo con las teorías, son la fuerza

4. Podemos por consiguiente hablar informalmente de dos super-marcos conceptuales que dividen todas las teorías en dos categorías. El grupo “adquisicionista” consta de todos los enfoques cognitivistas tradicionales que explican el aprendizaje y el conocimiento en términos de entidades mentales tales como esquemas cognitivos, modelos tácitos, conceptos-imágenes, o concepciones erróneas. El marco “participacionista” abarca todas las teorías relativamente recientes que prefieren ver el aprendizaje como una reorganización de la actividad que acompaña la integración de un individuo que aprende con una comunidad de práctica. En el lenguaje de la psicología discursiva, este último marco sigue el proceso a través del cual quien aprende se convierte en un participante diestro de un discurso dado (e.g., el matemático). Sobra decir que las dos metáforas no pueden estar completamente separadas y ambas usualmente están presentes en cada teoría. No obstante, en cada teoría, una metáfora es usualmente más prominente que la otra. Por tanto, la división de todos los marcos conceptuales en los dos grupos se puede hacer de acuerdo con su ingrediente dominante. (Para una discusión más extensa, ver Sfard, 1998).
5. Ante todo, haré referencia a Piaget y a Vygotsky. Ciertamente, Piaget se puede considerar como un representante paradigmático del marco adquisicionista. La teoría de Vygotsky se ha usado como inspiración para el marco participacionista, pero el lenguaje de “internalizar” y construcción de conceptos que usa el mismo Vygotsky, lo califica al menos parcialmente como perteneciente al marco adquisicionista.

conductora subyacente al aprendizaje humano y deben ser satisfechas si se pretende que este aprendizaje sea exitoso. Se identificarán diez de tales necesidades. El supuesto que subyace a mi análisis es que todas ellas son completamente universales, aunque se puedan expresar de maneras diferentes en diferentes individuos y en diferentes edades. Para cada una de las diez necesidades, se dirigirá la atención hacia las cuatro preguntas que se proponen a continuación.

a. *¿Qué sabemos acerca de esta necesidad?* Se resumirá el conocimiento teórico que explica la naturaleza y las maneras posibles de satisfacer la necesidad en cuestión, y se citarán algunos hallazgos empíricos relevantes cuando estén disponibles.

b. *¿Cómo enfrentan esta necesidad los Estándares del NCTM?* Aquí se discutirán los principios relevantes que se presentan en los *Estándares*.

c. *¿Qué puede resultar mal?* En esta sección me guiará la pregunta de si hay algo en la manera en que se han enfrentado las diferentes necesidades que pueda dar cuenta de algunas de las críticas escuchadas últimamente.

d. *¿Qué se puede hacer?* Esta parte aportará reflexiones sobre formas posibles de asegurar que los principios relevantes, que ya existen o que aún se requieren, sean traducidos en procedimientos instruccionales realmente efectivos que respondan a la necesidad en cuestión sin limitar nuestra habilidad para considerar otras necesidades.

A lo largo de todo el camino, apuntaré hacia ciertos dilemas inherentes al proyecto de enseñar matemáticas. Afirmaré que aunque algunos de los problemas no parezcan solubles, quizás se pueda reducir considerablemente su impacto con sólo mantenernos conscientes de su existencia.

1. LA NECESIDAD DE SIGNIFICADO

a. ¿Qué sabemos acerca de esta necesidad?

"La cultura y la búsqueda de significado dentro de la cultura son causas propias de la acción humana" afirma Bruner (1990, p. 20). Hoy, pocos de nosotros estaríamos en desacuerdo con esta concepción de la naturaleza humana. La necesidad de significado, culturalmente matizada pero en esencia universal, y la necesidad de entendernos a nosotros mismos y al mundo que nos rodea, llegó a ser reconocida ampliamente como la fuerza conductora básica que subyace a todas nuestras actividades intelectuales. Diferentes pensadores tratan de dar cuenta, de diferentes maneras, de esta tendencia humana fundamental. Para Piaget quien construyó su teoría alrededor de la metáfora de la evolución darwiniana y del crecimiento biológico, la búsqueda de conocimiento y de significado es parte integrante de nuestro esfuerzo por sobrevivir.

Vygotsky considera el dar significado como la única actividad humana que origina la necesidad de comunicar nuestras experiencias a otros seres humanos. El reconocimiento general de cuán central es la búsqueda de comprensión hace que los filósofos, psicólogos, antropólogos y lingüistas contemporáneos estén preocupados de manera casi obsesiva con la pregunta acerca de qué es el significado y dónde se encuentra (ver, e.g., Eco, Santambrogio y Violi, 1988).

Si la necesidad de significado es lo que pone en movimiento todas nuestras actividades intelectuales, también debe ser lo que motiva y guía nuestro aprendizaje. En efecto, la búsqueda de conocimiento es nada menos que el intento por enriquecer nuestra comprensión del mundo. Quienes aprenden, por tanto, pueden considerarse como criaturas que dan sentido y que buscan orden, lógica y dependencias causales detrás de las cosas, eventos y experiencias. Las matemáticas son una de nuestras herramientas más importantes en este esfuerzo. Con su ayuda, con frecuencia nos las arreglamos para ver relaciones significativas entre fenómenos aparentemente no relacionados. También es importante notar que una vez creadas, las matemáticas se convierten en una parte integral de nuestro mundo y que como tal, llegan a ser un nuevo objeto de nuestros esfuerzos por dar sentido. En este artículo, el foco estará en la necesidad de entender las matemáticas en su doble papel de herramienta y objeto (Douady, 1985). Se verá esta necesidad como primaria y todas las otras necesidades se presentarán como derivadas de ella. Antes de profundizar en este asunto, sin embargo, haré dos consideraciones más acerca de la noción de significado.

En primer lugar, es importante mencionar que en este siglo se ha escrito mucho acerca de la insostenibilidad de la concepción largamente aceptada del significado como algo independiente de la mente humana y que reside en los símbolos. Los filósofos, psicólogos, lingüistas y semiólogos de hoy, están de acuerdo en que el significado de las ideas se construye de nuevo cada vez que alguien aprende estas ideas (Reddy, 1979; Piaget, 1970; Johnson, 1987; Rorty, 1979; von Glasersfeld, 1993; Cobb, Wood y Yackel, 1991, 1993). Esto conlleva un rechazo de la posición empírica tradicional, según la cual quien aprende no es más que una *tabula rasa* que absorbe de manera pasiva las experiencias que se generan externamente. También significa un repudio de la idea apriorística de una mente humana como un producto prediseñado de la naturaleza que sólo puede desplegar aquellas habilidades que han sido programadas en ella previamente. Hoy, al estudiante se le da el papel mucho más estimulante y responsable de un constructor[6] autónomo de significado.

Mi segunda observación le sale al paso a una duda con respecto a la cual la afirmación radical sobre el 'hambre' de significado por parte de quien aprende puede ser acogida en ciertos círculos. Algunos profesores pueden sentir que considerar al estudiante como alguien que está determinado a dar significado es algo utópico y que contradice su experiencia. Sólo que con mucha frecuencia oímos quejas acerca de que el pensamiento de los estudiantes está lleno de 'concepciones erróneas', y acerca de estudiantes que prefieren simplemente aprender 'de memoria', considerando el manejo de las técnicas como el camino más corto al éxito en los exámenes finales. Es fácil mostrar, sin embargo, que ninguna de estas quejas, por justificada que sea, debilita realmente el supuesto acerca de la necesidad humana básica de significado y comprensión.

Primero trataré el asunto de las 'concepciones erróneas'. Esta expresión se refiere a un fenómeno bien conocido tanto por los profesores como por los investigadores: mientras se aprenden las matemáticas, los niños con frecuencia tienden a "*crear sus propios significados* —significados no apropiados" (Davis, 1988, p. 9). La expresión "no apropiados" no se refiere tanto a la coherencia interna del pensamiento del estudiante como a las posibles disparidades entre las concepciones de los estudiantes y las versiones públicas de las mismas ideas. Así, por ejemplo, los estudios han mostrado repetidamente que una mayoría abrumadora de estudiantes de grados superiores tiende a pensar que cualquier función debe tener un algoritmo subyacente; más aun, esta convicción persiste a pesar del hecho de que la definición, que la mayoría de los estudiantes puede repetir sin dificultad, no requiere de ninguna clase de 'regularidad' (Malik, 1980; Markovits, Eylon y Bruckheimer, 1986; Sfard, 1992; Vinner y Dreyfus, 1989). De manera similar, se sabe que los niños pequeños creen que la operación de multiplicación debe incrementar el número multiplicado, mientras que la división debe hacerlo más pequeño (Fischbein, 1987, 1989; Fischbein, Deri, Nello y Marino, 1985; Harel, Behr, Post y Lesh, 1989). Vale la pena enfatizar que las nociones idiosincráticas de los niños tienden a ser consistentes entre sí y por eso, a veces, son muy difíciles de cambiar. Todo esto ha sido ampliamente documentado

6. Como fue explicado en general, primero por Piaget (ver e.g., Piaget, 1952; Piaget e Inhelder, 1969), y luego por Van Hiele (1985) en términos específicos al pensamiento geométrico, los medios de los niños para comprender y la construcción de significado cambian cualitativamente con la edad; así que los procesos de dar sentido y sus productos pueden ser bastante diferentes en diferentes edades, incluso para el mismo niño y los mismos conceptos.

en la investigación sobre 'concepciones erróneas', probablemente el tipo de investigación más desarrollado en Educación Matemática (ver Smith, diSessa y Rochelle, 1993; Confrey, 1990; ver también estudios acerca de ideas relacionadas, e.g., *conceptos imágenes* como en Tall y Vinner, 1981; Vinner, 1983; o *modelos tácitos* como en Fischbein, 1989). En la actualidad, nuestro conocimiento sobre las maneras en que los niños piensan acerca de los números, las funciones, las pruebas, etc. es impresionantemente rico. Este conocimiento ciertamente puede ser de gran ayuda para quienes desean apoyar a los niños en su esfuerzo de construcción de significado. El punto principal al que quiero aludir, sin embargo, es que la aparición de las 'concepciones erróneas' no contradice la visión de los estudiantes como constructores de sentido. En efecto, no es *a pesar de* la necesidad de significado sino más bien *a causa de* ella que los niños tienden a construir sus propias ideas. Es precisamente *por razón de* su necesidad de acomodar nuevos conceptos a su conocimiento previo que sus comprensiones algunas veces discrepan de las definiciones oficiales[7].

Para resumir, la idiosincracia de las concepciones de los estudiantes no puede contar como evidencia de 'falta de pensamiento', sino por el contrario, debe ser considerada como sustento de la tesis de la presencia permanente de la necesidad de coherencia y significado. Declaro ahora que esta tesis también es resistente ante la preferencia aparente de algunos estudiantes por el aprendizaje de memoria. Es importante entender que el estudiante de matemáticas puede en algunas ocasiones abstenerse de comprender, de la misma manera que una persona sujeta a una dieta puede abstenerse de comida. En ambos casos, la persona puede vivir temporalmente con la privación parcial y en ciertas situaciones puede incluso privarse totalmente de manera deliberada. Sin embargo, la preferencia sostenida del aprendizaje de memoria, como los casos extremos de dieta que resultan en anorexia, debe considerarse como una excepción más que como una regla. Es más posible

7. Esto se evidencia en el hecho, aparentemente sorprendente, de que lo que tendemos a ver hoy como comprensión 'errónea' de un concepto por parte del estudiante es con frecuencia casi idéntico con lo que se puede hallar en fuentes históricas (Sfard, 1992, 1994, 1995; Sfard y Linchevsky, 1994). Lo mismo que los estudiantes de hoy, los matemáticos que por primera vez hablaron sobre un nuevo concepto y pudieron solamente pensarlo en términos de su conocimiento previo no llegaron de manera inmediata a la versión que sobrevive en nuestra época. Sus conceptualizaciones iniciales imperfectas, sin embargo, con frecuencia resultaron ser bases aceptables para la innovación. En el mismo sentido, las concepciones erróneas de los estudiantes se deben ver como escalones hacia un desarrollo posterior más que como obstáculos para el aprendizaje. Esta es la razón por la cual la expresión 'concepciones erróneas' con sus matices peyorativos puede ser malinterpretada en cierta forma y por ello aparece entre comillas simples en este texto. Para una crítica más extensa de la teoría de concepciones erróneas, ver Driver y Easley (1978); Nesher (1987); Smith, diSessa y Rochelle (1993).

que ocurran situaciones de abstención voluntaria cuando el ambiente parece favorecer la supresión de la necesidad a través de su sistema de recompensa. Así que si se tiene la impresión de que la mayor parte de los estudiantes de matemáticas tienden a quedar satisfechos con la destreza técnica y nunca muestran un interés genuino en la estructura conceptual subyacente, esto debe interpretarse como evidencia de ciertas fallas básicas en el ambiente de aprendizaje más que como evidencia de la 'natural' falta de pensamiento de esos estudiantes.

b. ¿Cómo enfrentan esta necesidad los *Estándares*?

Una ojeada a los *Estándares* es suficiente para darse cuenta de que las nuevas ideas curriculares están imbuidas por el espíritu de dar significado. De hecho, si a uno lo pusieran contra la pared para decir cuál es la esencia de la reforma, lo mejor que podría decirse es que promueve la visión de que el estudiante es un constructor de sentido. De los cinco cambios principales requeridos por los *Estándares*, cuatro apuntan hacia un aprendizaje más significativo; estos son los cambios:

> 1 hacia la evidencia lógica y matemática —alejándose del profesor como la única autoridad para determinar cuáles son las respuestas correctas;
>
> 2 hacia el razonamiento matemático —alejándose de la simple memorización de procedimientos;
>
> 3 hacia la formulación de conjeturas, la invención y la resolución de problemas —alejándose de un énfasis en la búsqueda mecánica de respuestas;
>
> 4 hacia la conexión de las matemáticas, sus ideas y sus aplicaciones —alejándose del tratamiento de las matemáticas como un cuerpo de conceptos y procedimientos aislados. (NCTM, 1991, p. 3)

Este énfasis explícito en la construcción de significado es probablemente la innovación más importante de los *Estándares*, y su contribución más importante. Durante mucho tiempo se ignoró en las clases de matemáticas la necesidad humana básica del significado. Ahora que ella ha sido reconocida explícitamente parece que tenemos una mayor posibilidad de mejorar la enseñanza. Puesto que esta necesidad es la que nos hace aprender, se puede esperar que la instrucción que se enfoca en el significado sea más efectiva que aquella que lo soslaya. Actualmente comienza a irrumpir la evidencia que parece respaldar esta afirmación (ver, e.g., Cobb, Wood y Yackel, 1991, 1993; Cobb, Boufi, McClain y Whitenack, 1997; Hiebert y Wearne, 1992, 1996; Yerushalmy, 1997). Más aun, al deslegitimar el aprendizaje memorísitico, los *Estándares* proporcionan un mensaje refrescante sobre la identidad del estudiante. Muy a largo plazo, el estudiante de matemáticas se perfila como un ser humano autónomo cuyo derecho al pensamiento independiente debe ser respetado por todos, incluyendo a los profesores. El mensaje educativo proporcionado por este principio es tan importante en la clase de matemáticas como fuera de ella.

c. ¿Qué puede resultar mal?

A continuación formularé un asunto importante aunque elusivo de lo que puede suceder si el llamado de los *Estándares* para el aprendizaje con comprensión se interpreta de una manera no apropiada. Precisamente debido a la importancia educativa y a la belleza, implícitas en los *Estándares*, del nuevo modo de perfilar las mentes en desarrollo, este llamado puede conducir fácilmente a un extremo peligroso. Si no se explica, este principio se puede malinterpretar en el sentido de una exclusión total de la instrucción que no proporcione de manera inmediata una comprensión como recompensa. Quienes implementan los *Estándares* pueden concluir falsamente que de ellos se espera que, a toda costa, protejan al estudiante de la molesta experiencia de la comprensión insuficiente. Tal interpretación extrema podría llegar a ser antiproductiva. Las matemáticas significativas sin esfuerzo sólo pueden ser triviales y carentes de inspiración y el currículo construido alrededor de este "principio" está condenado a diluirse (Jackson, 1997, p. 695). Sin embargo, por encima de todo, el miedo de profesores y estudiantes a las fallas en la comprensión puede engendrar actitudes derrotistas que son dañosas tanto para la enseñanza como para el aprendizaje.

Quienes creen en la posibilidad de un aprendizaje completo, uniformemente significativo, ignoran el hecho de que la búsqueda del significado, especialmente en matemáticas, es una empresa inherentemente difícil. Si bien en la época de los *Estándares del NCTM,* "la meta de muchos esfuerzos de investigación e implementación en Educación Matemática ha sido promover el aprendizaje con comprensión," cada vez más gente admite que "lograr esta meta ha sido como la búsqueda del Santo Grial" (Hiebert y Carpenter, 1992, p. 65). Una de las explicaciones para esta molesta dificultad es que el camino hacia la comprensión es, por su propia naturaleza, retorcido y en cierto sentido, circular. Para decirlo sin rodeos, contiene una contradicción intrínseca inevitable. Voy a dedicar algunas líneas a sustentar esta afirmación.

Muchos pensadores como Piaget y Vygotsky han enfatizado de manera reiterada que la comprensión de un concepto puede lograrse solamente a través de una actividad del sujeto con este concepto. La famosa declaración de Wittgenstein (1953) según la cual el significado de una palabra equivale a su uso en el lenguaje, implica que uno no puede "capturar" (o construir) el significado antes de familiarizarse con sus usos. La situación parece ser relativamente simple cuando la idea nueva que se está tratando de aprender se refiere a un objeto físico perceptualmente accesible. En efecto, afirma Wittgenstein, aun cuando el objeto en cuestión se pueda *mostrar,* hay mucha mayor complejidad en el proceso de dar significado que en lo que ven los ojos. Piaget, quien argumentaba que lo que realmente aprendemos cuando tratamos con objetos son nuestras propias acciones (reales o mentales) sobre estos objetos y no nuestras impresiones pasivas de ellos, ciertamente estaría de acuerdo con esto. Puede haber pocas dudas de que también era así para Vygotsky, quien consideraba que la actividad total de dar significado tiene raíces en la comunicación humana más que en el encuentro directo con la naturaleza.

Suficiente o no, la impresión perceptual ciertamente puede ayudar. Por consiguiente cuando se trata de las matemáticas, donde no hay objetos matemáticos prefabricados a los cuales señalar, el problema de la comprensión se vuelve particularmente crítico. Se puede argumentar que las definiciones matemáticas reemplazan apropiadamente las "definiciones ostensivas" (definiciones por señalamiento): aunque los números, las funciones y los conjuntos se pueden *representar* sólo simbólicamente y no se pueden mostrar realmente, podemos comprender palabras y símbolos gracias a la descripción matemática precisa de su significado. Sin embargo, ¿puede alguien decir que un niño comprende una idea matemática, digamos, un número negativo o una función con sólo la fuerza de una definición antes de que sea capaz de trabajar con el concepto? ¿Declararía el estudiante tener un buen sentido de la idea de número negativo antes de poder manipular símbolos como -2 y -0.5, de las maneras que caracterizan a los números? ¿Estaríamos de acuerdo en que el estudiante realmente "captó la idea" de función antes de que pueda aprovechar las relaciones entre los diferentes símbolos que se usan como "representaciones diferentes" de funciones? No es extraño entonces que la investigación empírica haya mostrado una y otra vez que las concepciones matemáticas desarrolladas en realidad por los niños puedan no tener mucho que ver con las definiciones que han aprendido (Tall y Vinner, 1981).

Todo esto implica que en la búsqueda de la comprensión uno no puede escapar a la contradicción: si el significado es una función de uso, entonces hay que manipular un concepto para entenderlo; por otra parte, ¿cómo puede uno usar el concepto antes de haberlo comprendido? Para ponerlo en términos discursivos, todos los discursos y en particular, el matemático, sufren de una circularidad inherente: los significados se pueden construir solamente a través de actividad discursiva con significadores, mientras que la existencia de los significados es un requisito para el uso exitoso de los significadores. O, para decirlo de manera más simple, la falta de significado puede surgir solamente de usar un concepto pero al mismo tiempo es un requisito para el uso exitoso de este concepto. Es importante entender, sin embargo, que esta circularidad parece ser una trampa seria para quienes aprenden matemáticas; es, en efecto, la fuerza conductora que está detrás del crecimiento incesante del conocimiento. Esto es lo que alimenta el proceso de aprendizaje en el que nuestra comprensión y nuestra habilidad para aplicar conceptos matemáticos impulsan el desarrollo de los demás conceptos. En este proceso, el sentido de la comprensión de un concepto y la habilidad para aplicarlo son como dos piernas que hacen posible moverse hacia adelante gracias al hecho de que nunca están exactamente en el mismo lugar. Es característica relevante del aprendizaje matemático que en cualquier momento dado, una de estas dos habilidades esté adelante de la otra[8].

d. ¿Qué se puede hacer?

La discusión anterior nos deja con un dilema que debe resolverse si se quiere llegar a una solución práctica. No pretendemos que tal solución sea fácil de hallar. Tampoco debemos engañarnos pensando que el dilema básico pueda desaparecer. Más bien, tenemos que aprender a vivir con la dificultad mientras hacemos lo mejor posible para hallar un camino razonable entre necesidades conflictivas: la necesidad de comprender y la necesidad de actuar aun antes de que se haya dado la comprensión. Pospondré para las siguientes secciones, algunas sugerencias concretas sobre cómo podría hallarse tal camino. Aquí me contentaré con una observación sobre la importancia de las expectativas reales y las actitudes constructivas.

La importancia de ser honesto con los estudiantes con respecto a la dificultad de las matemáticas, difícilmente puede sobreestimarse. Desde un punto de vista pedagógico, la idea utópica del aprendizaje significativo y sin dificultades es simplemente perjudicial. Como lo ha demostrado la investigación, el estudiante que no está preparado para esperar fallas en su comprensión y por consiguiente no considera que ellas ocurren como un fenómeno natural, no está dispuesto a hacer un esfuerzo real para superar una dificultad cuando ella aparezca (Schoenfeld, 1985, 1989). La consciencia de lo inevitable de esta dificultad inherente es necesaria para desarrollar la paciencia y la persistencia necesarias para enfrentarla. Si los estudiantes no pueden posponer la gratificación de su necesidad de significado, si mues-

8. Para un tratamiento más exhaustivo de estas circularidades véase Sfard (1991, en prensa). Para una discusión de lo que se conoce como *paradoja del aprendizaje* y su relevancia para los presentes dilemas, véase Bereiter (1985) y Petrie y Oshlag (1993).

tran intolerancia hacia cualquier falta de claridad, entonces las instancias de comprensión insuficiente tienden a interpretarse como una señal para retirarse más que como un reto motivante y una fuente potencial de satisfacción futura. En esta situación el aprendizaje simplemente no tendría lugar.

Alguien puede objetar diciendo que el estar abierto a las dificultades puede ser dañino para la creencia del estudiante en la posibilidad de aprender matemáticas. La respuesta a esto podría ser, una vez más, que todo es cuestión de medida. Una discusión apropiada de la naturaleza exigente de la empresa solamente hará que el aprendizaje de las matemáticas sea más retador y atractivo a los ojos de quienes aprenden. Desde luego, el énfasis en esta afirmación está en la palabra *apropiada*: no puede esperarse el efecto deseado con simplemente enunciar que las matemáticas son difíciles. También es importante cultivar la creencia del estudiante en su propia habilidad para enfrentar las dificultades. Esto ciertamente está a tono con el espíritu general de los *Estándares del NCTM* que están "basados en la hipótesis de que todos los estudiantes son capaces de aprender matemáticas" (NCTM 1995, p. 1). Los estudiantes pueden tranquilizarse de muchas maneras diferentes con respecto a que las dificultades a las que se enfrentan no son insuperables. Se puede traer a cuento la historia completa de la humanidad y de sus impresionantes logros matemáticos para mostrar que la naturaleza inherentemente paradójica de la construcción de significado es una fuente de progreso y no un obstáculo.

Volvamos a la larga lista de otras necesidades, todas las cuales conllevan la necesidad primaria de significado y comprensión.

2. La necesidad de estructura

a. ¿Qué sabemos acerca de esta necesidad?

En diferentes épocas, quienes trataron de capturar la naturaleza elusiva del significado propusieron una amplia variedad de definiciones. El tema del significado como un asunto de relaciones entre conceptos más que sólo conceptos como tales, y el de la comprensión como habilidad para ver la estructura que emerge de estas relaciones, se repiten de una manera u otra en la mayoría de estas propuestas. Ciertamente se encuentran en la idea piagetiana de aprendizaje significativo como construcción y reorganización de esquemas mentales. También están presentes en el énfasis que hace Vygotsky en la naturaleza sistémica de lo que llama conceptos "científicos" y en sus observaciones sobre la artificialidad de aquellas nociones que no se desarrollan en un sistema bien definido de otros conceptos ya conocidos.

La definición rigurosa de Vygotsky (1962, 1987) de conceptos científicos implica también que el sistema debe desplegar una organización jerárquica.

La idea de que la comprensión es casi equivalente a ver relaciones fue traída al contexto de la Educación Matemática hace más de sesenta años por Brownell (1935), pero llegó a ser prominente gracias al trabajo seminal de Skemp (1976) quien, inspirado por Mellin-Olsen, sugirió la distinción ahora bien conocida entre comprensión instrumental y relacional.[9] Desde entonces se ha dicho mucho sobre las ventajas del aprendizaje asistido siempre por la consciencia de ligámenes altamente cohesivos y bien organizados, lo que hace de las matemáticas una construcción impresionantemente ordenada (ver, e.g., Hiebert y Carpenter, 1992). Si bien ver la estructura es útil en cualquier dominio del conocimiento, en matemáticas puede ser la esencia misma del aprendizaje. Después de todo, las matemáticas pueden considerarse como una ciencia de estructura, como "el estudio de construcciones ideales (aplicable con frecuencia a problemas reales), y el descubrimiento consiguiente de relaciones entre las partes de estas construcciones, antes desconocidas" (Charles Peirce, en Moritz, 1942, p. 8)[10]. La búsqueda de estructura se refleja en la propia forma bien organizada y jerárquica de las matemáticas. Es decir, aprender matemáticas implica ver estructuras en varios niveles diferentes: primero, las estructuras que se pueden extraer directamente de cosas concretas y acciones y que constituyen los conceptos matemáticos básicos (e.g., los números naturales, formas geométricas simples), luego las estructuras obtenidas a través de investigación de relaciones entre estas estructuras matemáticas fundamentales, y así sucesivamente. Este proceso no tiene que terminar, ya que ni siquiera el cielo es el límite para la nunca estática jerarquía de los conceptos matemáticos. Sin embargo, lo que determina la calidad del aprendizaje es la visibilidad de la lógica interna de este cuerpo especial de conocimiento. Si comprender significa ver estructura, entonces es importante que las conexiones bien organizadas entre conceptos ya aprendidos y aquellos que los estudiantes hasta ahora van a aprender nunca desaparezcan de su vista.

Aquí debe añadirse una observación dirigida a aquellos pensadores que, convencidos de que el aprendizaje es esencialmente situado, oponen la idea

9. La comprensión relacional, de acuerdo con Skemp, es "tanto saber qué hacer, como por qué", mientras que la comprensión instrumental equivale a "conocer reglas sin razones". Para explicar su idea, Skemp sugiere al lector que imagine a una persona que trata de aprender a moverse en una ciudad no conocida. Básicamente hay dos maneras en que se puede realizar la tarea: se puede aprender 'un número creciente de planos fijos [caminos]', o se puede tratar de 'construir en la mente un mapa cognitivo de la ciudad' (Skemp, 1976, p. 25).

10. La descripción de las matemáticas como la "ciencia de ver regularidades" está relacionada con esto (National Research Council, 1989; Schoenfeld, 1992).

de abstracción *in extenso* a la idea de los matemáticos de abstraer estructuras a partir de cosas en particular (ver e.g., Lave y Wenger, 1991). Tal abstracción, pueden protestar algunos, no se puede aprender "como tal". En la mente de quien aprende, un concepto siempre permanecerá inmerso en el contexto dentro del cual se aprendió; por tanto, debemos renunciar a esperar que quien aprende pueda trabajar con la estructura matemática "pura" o sea capaz de transferirla a una situación diferente. Sin embargo, se puede mostrar que esta posición extrema es resultado de una cierta confusión conceptual. Este no es el lugar para tratar de presentar el argumento en detalle,[11] así que diré algo muy breve. El razonamiento de quienes se oponen a la abstracción y la transferencia se origina en un marco participacionista. Puesto que desde un punto de vista puramente analítico, las nociones de abstracción y transferencia son parte integral de la metáfora del aprendizaje como adquisición, su mensaje metafórico simplemente no encaja en marcos participacionistas. Cuando se escoge conceptualizar el aprendizaje en términos de participación y no de estructuras cognitivas, entonces uno se excluye del discurso adquisicionista en vez de decir que las afirmaciones engendradas por tal enfoque son falsas (o verdaderas, para el caso). Infortunadamente, los proponentes de los dos marcos no siempre son conscientes de la inconmensurabilidad básica de sus posiciones y eso genera discusiones entre ellos. Sin embargo, las aseveraciones adquisicionistas acerca de la abstracción y de la transferencia no pueden ser probadas o refutadas por un participacionista, lo mismo que los teoremas de la geometría de Lobachevski no se pueden probar o refutar con los axiomas de la geometría euclidiana. Y si esta explicación analítica un tanto intrincada no es suficiente, entonces permítaseme traer un argumento más inmediato: el poderoso cuerpo de conocimiento matemático construido a través de las épocas por generaciones de matemáticos y exitosamente aprendido una y otra vez por mucha gente joven, parece una evidencia poderosa para la posibilidad de pensar en estructuras abstractas.

b. ¿Cómo enfrentan esta necesidad los *Estándares*?

Los *Estándares* se refieren extensamente a "extraer" estructuras matemáticas a partir de una variedad de situaciones. A través de todos ellos, se promueve la idea de que las "concepciones matemáticas se crean a partir de objetos, eventos y relaciones" (NCTM, 1989, p. 11). También se presta bastante atención a la necesidad de apreciar la estructura general de las matemáticas. El cuarto estándar en cada nivel se titula "Conexiones matemáticas" y los autores del documento explican el fundamento lógico:

11. Para conocer detalles, ver Sfard (1998).

> Este título enfatiza nuestra creencia de que […] las matemáticas se deben enfocar como un todo. Conceptos, procedimientos y procesos intelectuales están interrelacionados. En el sentido significativo, "el todo es más grande que la suma de las partes." Es decir, el currículo debe incluir intentos deliberados, a través de actividades instruccionales específicas, de conectar ideas y procedimientos tanto entre diferentes tópicos matemáticos como con otras áreas de contenido. (p. 11)

Este llamado originó mucha literatura acerca de las maneras en que los diferentes tópicos matemáticos enseñados en la escuela se pueden 'conectar' con otros (y también con el mundo 'externo', pero este es otro tópico que se discutirá en secciones posteriores de este artículo; ver e.g., House, 1995; y consultar las revistas *Arithmetic Teacher* (febrero de 1993), *Mathematics Teacher* (noviembre de 1993), *Mathematics Teaching in the Middle School* (marzo-abril de 1996)).

c. ¿Qué puede resultar mal?

Algunas veces, diferentes ideas curriculares que atienden a diferentes necesidades del estudiante pueden entrar en conflicto entre ellas. Este parece ser el caso del énfasis en la estructura, por un lado, y del principio del aprendizaje principalmente a través de la resolución de problemas de la vida real, por el otro. Sin embargo, este último principio de aprendizaje debe ser discutido y justificado. Por ahora voy a mostrar las razones por las que los dos requerimientos curriculares pueden entrar en conflicto.

En primer lugar, lo que los *Estándares* afirman puede ser muy fácilmente traducido en la creencia de que los estudiantes pueden hacer por sí mismos todo el trabajo de construir estructuras. Esta creencia tiene poco fundamento. Obviamente tiene raíces en la convicción de que la estructura es independiente del símbolo y es objetiva, y está justamente esperando ser "descubierta". Esta convicción, sin embargo, es casi tan inaceptable como la modesta afirmación de Miguel Angel Buonarotti de que en su trabajo como escultor su único papel fue exponer las formas que "ya" estaban "allí" en la piedra. Lo mismo que esculpir, "extraer la estructura" es, de hecho, un trabajo creativo. Es invención más que descubrimiento. Creer que el estudiante puede, por su propia cuenta, extraer las matemáticas de las situaciones de la vida real es como creer que cualquier persona habría podido producir el arte de Miguel Angel. Hacer las famosas estatuas del David o el Moisés requiere el don de la creatividad del artista; inventar los números, las funciones y las derivadas requiere el ingenio de los matemáticos.

A partir de las críticas hechas a los *Estándares* se percibe la preocupación acerca de *lo cerrado* de las matemáticas, acompañada por la preocupación de que los estudiantes no parecen llegar a ella por cuenta propia. Algunas de las críticas (e.g., Wu, 1997) enfatizan la importancia de hacer explícita la abstracción matemática y de ayudar a los estudiantes a ver cómo el resultado puede transferirse de un contexto a otro. El "énfasis exagerado en la relevancia y las 'aplicaciones del mundo real'", afirma Wu, va en detrimento de la estructura.

Por la misma razón, algunas personas expresan preocupación acerca de la efectividad del llamado a "conectar" las matemáticas. Este llamado parece implicar que los hechos matemáticos deben primero aprenderse y sólo después deben conectarse. Esta forma de proceder quizás no sea la mejor. El estudiante puede tener gran dificultad al tratar de construir la estructura organizadora general a partir de pequeños fragmentos de matemáticas diseminados en diferentes problemas y contextos. La tarea puede ser tan difícil como juntar piezas de un rompecabezas sin saber cuál debe ser la figura final. Mientras que hay casi tantas formas de organizar el conocimiento como estatuas potenciales se pueden sacar de un pedazo de piedra, sólo ciertos tipos de resultado final parecen verdaderamente deseables. En realidad, queremos que nuestros estudiantes sean capaces de ver la totalidad de las matemáticas como un cuerpo de conocimiento cohesivo y jerárquico. Si se les deja solos, ellos pueden permanecer convencidos de que las matemáticas son una red amorfa de vínculos accidentales. Mientras que el disgusto de los matemáticos con este resultado es dictado principalmente por la preocupación con respecto a la imagen de las matemáticas ("un estudiante proveniente de un currículo hecho bajo la perspectiva de la reforma podría no comprender por qué la reciente prueba del último teorema de Fermat es una piedra angular en la cultura humana," afirma Wu, p. 956), la preocupación de los educadores matemáticos debería provenir del cuidado con respecto al estudiante: tal como se sustentó, la apreciación insuficiente de la estructura significa comprensión insuficiente (cf. Tietze, 1994).

Finalmente, quiero agregar que aprender exclusivamente de la "vida real" puede dejar al estudiante en el nivel de aquellos conceptos matemáticos primarios que sólo son el comienzo de lo que son las matemáticas. Tal aprendizaje no le permite al estudiante despegar hacia los estratos de la jerarquía matemática en donde uno comienza a actuar de maneras verdaderamente matemáticas. Esta puede ser otra razón por la que algunos críticos se lamentan acerca de una "disolución" del currículo.

d. ¿Qué se puede hacer?

Puesto que la estructura de las cosas reside en los ojos del espectador más que en las cosas mismas, y puesto que el proceso de construir la estructura no puede controlarse totalmente "desde fuera", no sería razonable pedir que sólo se le "muestre" al estudiante. Sin embargo, se puede hacer mucho para ayudar a los estudiantes a que la vean por sí mismos. En primer lugar y principalmente, se puede pedir a los estudiantes que sean mucho más explícitos acerca de la organización de las matemáticas como un todo, lo mismo que acerca de aquellas estructuras matemáticas específicas que nos gustaría que "extrajeran" de la situación de la vida real. En segundo lugar, podemos mantener el contexto de aprendizaje de la vida real dentro de unos límites razonables y extender la parte de las matemáticas abstractas en el currículo. Detallaré esta posibilidad más adelante.

Otra forma de ayudar al estudiante es tratar de organizar al menos algunas partes del aprendizaje de maneras que reflejen las conexiones matemáticas que se quiere que los estudiantes vean. Esto puede significar que haya que guiar al estudiante a través de la jerarquía de conceptos matemáticos de una manera tan sistemática como sea posible sin poner en peligro otros principios básicos del currículo. Usando la metáfora de Skemp, podemos imaginar a los estudiantes de matemáticas como turistas en una ciudad extranjera, tratando de comprender cómo está construida. ¿Qué parece más plausible: que ellos prefieran que se les muestren barrios aislados de una manera accidental, o que se les permita explorar la ciudad de manera sistemática, guiados por un mapa de la ciudad? Es importante que los estudiantes tengan la posibilidad de referirse a algo como un "mapa" mientras trabajan con problemas específicos, conceptos y procedimientos. En una sección posterior daré ejemplos concretos que muestren cómo se pueden construir tales estructuras organizadoras. Aquí sólo agregaré que en tal marco general, en el que varias de las conexiones importantes entre diferentes elementos son fácilmente visibles, la mayoría de las ideas no tienen que ser recordadas — ellas se pueden reconstruir fácilmente siempre que sea necesario. En presencia de la estructura general, la comprensión se puede construir simultáneamente en ambas direcciones, de lo particular a lo general y de lo general a lo particular, por lo cual los dos intentos se encuentran en algún punto intermedio.[12]

12. Naturalmente, cada niño puede tener sus propias maneras de proceder, pero esto sólo significa que entre más diversidad de elecciones haya, es más probable que cada niño encuentre algo por sí mismo. La presencia de "un mapa" no obliga al niño a usarlo, pero abre tal posibilidad.

3. La necesidad de acción (repetitiva)

a. ¿Qué sabemos acerca de esta necesidad?

Una recapitulación: de acuerdo con los teóricos, la principal necesidad que hay detrás del deseo humano de aprender es la necesidad de comprender, y comprender, a su vez, se puede interpretar como ser capaz de ver orden y estructura. Cuando se trata de las matemáticas, la pregunta que ahora debe hacerse, es: ¿estructura de qué? ¿Cuál es la "disposición" primaria de las estructuras que constituyen nuestro conocimiento matemático y cuál es el mecanismo a través del cual somos capaces de (re-) construirlas por nuestra cuenta? En esta sección, sustentaré que las estructuras que aprendemos a ver mientras hacemos matemáticas son *estructuras de nuestras acciones.*

En realidad, esta no es una nueva afirmación y no se refiere sólo a las matemáticas. Como se pudo mostrar antes, ambos Piaget y Vygotsky son los precursores de la idea: ambos enfatizaron la importancia fundamental de nuestras acciones en el aprendizaje y la comprensión. Como ya fue mencionado, la afirmación central de Piaget fue que nuestro conocimiento tiene sus raíces no tanto en los objetos estáticos como en nuestras acciones sobre tales objetos. Un mensaje similar fue el de Vygotsky cuando dijo, como Kozulin (1990) lo parafraseó, que "a través de la actividad se crea una función mental más elevada, es una objetivación de la acción" (pp. 113-114). Los seguidores de Vygotsky, los proponentes de lo que se ha denominado la Teoría de la Actividad, enfocan su estudio en lo que se describe como la "internalización de las acciones". No es de extrañar entonces, que Bruner (1990), quien define acción como "una contraparte de comportamiento con base intencional" (p. 19) la declare como la noción focal de la psicología.

Ciertamente, en matemáticas todas estas afirmaciones tienen fuerza, pero reciben un significado especial. Al igual que el aprendizaje sobre el mundo físico, el aprendizaje de las matemáticas acerca de la "realidad virtual" implica el estudio de acciones, mientras que en el caso de la "realidad de hecho", no. Sin embargo, la mayoría de estas acciones se realizan sobre objetos matemáticos intangibles tales como números, funciones y conjuntos. Será difícil de entender el asunto de la comprensión de las matemáticas sin tratar de responder la pregunta acerca de qué son esos objetos matemáticos.[13]

Una forma de explicar la idea de "objeto matemático", como en efecto lo han hecho algunos investigadores (e.g., Greeno, 1983; Thompson, 1985; Dubinsky, 1991; Sfard, 1987, 1991; Harel y Kaput, 1991), es afirmar que es

13. Naturalmente, aquí se hace esta pregunta desde un punto de vista psicológico y no desde uno filosófico.

una construcción mental creada al "extraer" estructura de las acciones. En otras palabras, declarar que uno "ha aprendido a ver" un objeto matemático es afirmar que tal persona es consciente de una estructura constante, repetitiva de ciertas acciones, y que puede verla tan bien que es capaz de "reificarla"[14]. La relación entre nuestras acciones y nuestra habilidad para "ver objetos matemáticos" (es decir, estructura) es, por tanto, reflexiva: las acciones se realizan sobre ciertos objetos, pero extraer la estructura de esas acciones significa construir nuevos objetos, y en consecuencia, nuevas acciones sobre estos nuevos objetos, y así sucesivamente.[15]

Esta interdependencia esencial de las acciones matemáticas y los objetos, es decir, de las acciones y la comprensión, se expresa en la dualidad proceso-objeto de los conceptos matemáticos. Símbolos tales como 5, $2/3$, -3, $\sqrt{-1}$, o la función $3x-2$, aunque claramente se refieran a *objetos*, también se pueden ver como apuntando a ciertos *procesos* matemáticos: el conteo de cinco objetos, la división de un objeto en tres partes iguales y la toma de dos de ellas, la sustracción de 5 a partir de 2, la extracción de la raíz cuadrada de -1, y un procedimiento computacional (la multiplicación de un número por 3 y la sustracción de 2 al resultado), respectivamente. Esta dualidad es la fuente tanto de la potencia como de la dificultad de las matemáticas.[16] Permítaseme construir el resto del argumento alrededor del testimonio de un matemático:

> Las matemáticas son sorprendentemente condensables: uno se puede esforzar mucho tiempo, paso a paso, en trabajar a través de un

14. Reificar significa ser capaz de pensar y hablar acerca del proceso, de las mismas maneras en que pensamos y hablamos de los objetos: como si fuera una entidad permanente, la estructura interna que no tiene que ser recordada cada vez que se trata con ello.
15. Es importante entender que la idea de "objeto matemático" es tan sólo una metáfora y que la expresión "objeto matemático" realmente no se usa sola. Ella sólo puede venir dentro de una oración tal como "una persona ha construido un objeto matemático (número, función, conjunto)" o "el estudiante usa la noción de función de una manera mediada por el objeto". La última expresión se refiere a una manera muy especial de participar en el discurso matemático. Este tipo de discurso puede llamarse "mediado por un objeto" puesto que está construido sobre la imagen de un discurso acerca de objetos tangibles (físicos), tales como mesas o árboles. En efecto, el discurso matemático (como cualquier otro, para lo que interesa aquí) se crea claramente reciclando formas lingüísticas que son tomadas del discurso sobre la realidad accesible perceptualmente (es decir, aquí estamos hablando acerca del mecanismo de la metáfora). Si se transfieren las formas en que hablamos acerca de, digamos, mesas y árboles, a un contexto más abstracto, terminamos construyendo el mundo virtual de las matemáticas sobre la imagen del mundo físico. Más aun, con frecuencia hacemos esto tan bien que eventualmente los objetos supuestamente virtuales de las matemáticas se convierten en experiencialmente reales para nosotros. Cuando eso ocurre, comenzamos a creer en su existencia independiente.
16. Ver también la idea de procepto en Gray y Tall (1994).

> proceso o una idea desde diversos enfoques. Pero, una vez que realmente se comprende eso y se tiene la perspectiva mental para verlo como un todo, hay una tremenda compresión mental. Se puede archivarlo, evocarlo rápida y totalmente cada vez que se necesite, y usarlo justamente como un paso en algún otro proceso mental. La idea brillante que acompaña a esta compresión es uno de los placeres reales de las matemáticas. (Thurston, 1990, p. 847)

Si la "compresión" se construye como un acto de reificación —como una transición de la visión operacional (orientada por el proceso) a la visión estructural (objetal) de un concepto,[17] este corto paso pone de relieve los aspectos más importantes de este intrincado proceso. Primero, muestra que debemos estar bien familiarizados con un proceso matemático para ser capaces de llegar a su concepción estructural. Segundo, implica que la reificación hace mucho bien a nuestra comprensión de conceptos y a nuestra habilidad para trabajar con ellos. Tercero, dice que la reificación a menudo sólo viene después de un largo esfuerzo. Estudios en Educación Matemática y en historia de las matemáticas (e.g., Breidenbach, Dubinsky, Hawks y Nichols, 1992; Sfard, 1992; Sfard y Linchevski, 1994) confirman esta última aseveración: sugieren que ya sea que se esté hablando acerca de funciones, números, espacios lineales, o conjuntos, es difícil alcanzar la reificación. La fuente principal de esta dificultad inherente es, una vez más, la naturaleza circular de nuestra comprensión (que, en el caso específico de las matemáticas, lo llamé alguna vez "el círculo vicioso de la reificación"): por un lado, uno no puede realizar acciones (digamos, operaciones aritméticas) sobre objetos matemáticos (digamos, números racionales), antes de construir estos objetos; por el otro lado, uno no puede construir los objetos antes de operar sobre ellos.

La última línea de todo esto es que la estructura de acciones es el principal objeto de la indagación matemática tal como la estructura del cuerpo humano es el objeto de investigación en anatomía. Más aun, puesto que la estructura significa un cierto patrón repetitivo, podemos decir que no hay matemáticas sin acciones bien definidas que se repitan. Finalmente, aunque la única "evidencia empírica" que ofrecí fue el testimonio de un matemático, todo esto también es verdadero para las matemáticas básicas: cierta clase de reificación —de ver estructura en acción— es necesaria incluso en las etapas tempranas del aprendizaje (cf. Nesher, 1986). En efecto, ¡la transición desde los procedimientos de conteo a la noción de número natural, es incluso un acto de reificación!

17. No tiene que ser construido de esta forma, pero tal interpretación es consonante con lo que se dijo antes acerca de las concepciones estructurales.

b. ¿Cómo enfrentan esta necesidad los *Estándares*?

Parece que los autores de los *Estándares* se han aproximado al reconocimiento de la importancia de la acción y de la reflexión en la acción cuando afirman que "'saber' matemáticas es 'hacer' matemáticas" y que "una persona reúne, descubre, o crea conocimiento en el curso de alguna actividad al tener un propósito" (NCTM, 1989, p. 7). Sin embargo, mientras que esta aseveración se puede interpretar de muchas maneras, la interpretación dada por los escritores de los *Estándares* parece generar prácticas que no están de acuerdo con lo que se ha dicho antes. En el resto de esta sección, quiero enfocarme en un aspecto específico del tópico que, en el debate actual de la reforma, es claramente objeto de la más acalorada controversia. En lo que sigue trataré el asunto de las destrezas básicas que, al ser un dominio de acciones matemáticas bien estructuradas, parecen tener estrecha relación con las necesidades explicadas antes.

Desde el punto de vista del público general, quizás el cambio más obvio que trajo la reforma es la remoción de las destrezas básicas del lugar central que ocupaban en el currículo. El nuevo proceso de aprendizaje "es diferente del dominio de conceptos y procedimientos", dicen los autores de los *Estándares*. Lo demás está dicho en una serie de enunciados negativos en lugar de afirmaciones directas: "No afirmamos que el conocimiento de información no tenga valor, sólo que su valor reside en la medida en que sea útil en el curso de alguna actividad que tenga un propósito" (NCTM, 1989, p. 7) y "que la disponibilidad de calculadoras no elimina la necesidad de los estudiantes de aprender algoritmos, pero tal conocimiento debe provenir de las situaciones problemas que han originado tales algoritmos" (p. 8). Si se lee cuidadosamente, ninguno de estos enunciados expresa que se deban abandonar por completo las destrezas básicas; más bien, requieren que se desarrollen las destrezas de maneras nuevas, más "naturales". Sin embargo, puesto que las cosas se enuncian de forma negativa, es muy posible que se considere que los *Estándares* presentan un mensaje mucho más radical.

c. ¿Qué puede resultar mal?

A juzgar por lo que han dicho los críticos, tal es la manera en que se han interpretado los *Estándares*. La mayoría de la gente tiende a interpretar los *Estándares* como si ellos negaran cualquier importancia real a las destrezas. Esta inclinación es entendible a la luz de ciertas tendencias generales, que son bastante independientes de los *Estándares* mismos. Como lo explicó Keith Devlin (1997), el editor de *Focus*, en su reciente editorial:

> Necesitamos reducir drásticamente el tiempo gastado en la enseñanza de las destrezas básicas en las clases de matemáticas de la escuela

> media y superior… *El propósito de la enseñanza de las matemáticas debería ser producir un ciudadano educado, no una imitación pobre de una calculadora de 30 dólares.*

Pero esta no es ni la única ni la más importante razón por la que la gente habla contra la enseñanza de destrezas básicas. Estas, vistas como algo que sólo se puede adquirir a través de una práctica aburrida, sin significado, ha tenido una mala prensa por mucho tiempo. Nuestro reciente énfasis en la comprensión ha traído intolerancia hacia cualquier cosa que no parezca conducir a un aprendizaje significativo. Por esto, las destrezas básicas fueron consideradas un ejemplo paradigmático. Como consecuencia, la ejecución de algoritmos ha llegado a verse como antinomia del aprendizaje con comprensión.

Todas estas afirmaciones y creencias parecen más bien exageradas. Cuando se trata de enjuiciar las destrezas básicas, el argumento de la falta de aplicabilidad a la vida real, como el que utilizó Devlin, es en efecto verdadero y convincente siempre que estemos de acuerdo en que la única razón posible para aprender cualquier cosa en las matemáticas es su utilidad por fuera de las matemáticas mismas. Sin embargo, algunos tipos de conocimiento pueden ser necesarios no porque tengan aplicaciones prácticas sino por su importancia al interior de las matemáticas —por ser un elemento indispensable en el proceso de construir el conocimiento matemático. Las destrezas básicas pueden pertenecer a esta categoría. Así parezca paradójico, sostendré ahora que un nivel razonable de manejo diestro de los algoritmos básicos puede, de hecho, ser necesario para nuestra comprensión de las matemáticas.

La idea que quiero promover es simple. A la luz de lo que se ha dicho antes, alguna proficiencia en los procedimientos matemáticos básicos puede ser necesaria si se quiere que el proceso de aprendizaje sea posible. En primer lugar, hay estudios empíricos que parecen apuntar en esa dirección (Fuson y Kwon, 1992; Stevenson y Stigler, 1992; Fuson y Briars, 1990; Hiebert y Wearne, 1996). En segundo lugar, aunque esta no es la única interpretación posible de la información empírica, llega a ser más plausible dada la fuerza del argumento teórico que es como sigue. Si las matemáticas son un resultado de reflexión acerca de nuestras propias acciones, primero físicas y luego mentales, entonces el estudio de las acciones es la esencia de la matematización. Para poder reflexionar sobre los procesos que realizamos, primero tenemos que adquirir un cierto dominio de estos procesos, algunas veces quizás incluso al grado de la automatización; o, como lo plantea Vygotsky (1962), “Para sujetar la función al control intelectual, primero debemos poseerla” (p. 90). Los niños que no tienen una habilidad razonable para realizar algoritmos básicos no van a tener nada sobre lo cual construir posteriormente las matemáticas. Es decir, por ejemplo, un niño que no tenga una experiencia razonable con operaciones tales como $3 - 5$ o $8(1-4)$ posiblemente no sea capaz de reflexionar sobre tales operaciones y reificar $3 - 5$ o $1 - 4$ en objetos matemáticos. Este niño estará privado, por consiguiente, de una comprensión de los números negativos, y su progreso ulterior será bloqueado. Podemos ahora resumir y decir que, paradójicamente, el énfasis sobre la comprensión podría haber sacado de los niños algo para comprender. La afirmación acerca de la posibilidad de aprender matemáticas significativamente sin algún dominio de procedimientos básicos puede ser comparada con la afirmación acerca de la posibilidad de ser exitoso en la construcción de una casa sin tener ladrillos.

d. ¿Qué se puede hacer?

Los autores de los *Estándares* enfatizan la actividad *intencionada* como una situación apropiada para el aprendizaje. En efecto, tener una intención, un propósito, es la mejor motivación para aprender. El que se pueda considerar la adquisición de destrezas como una "actividad intencionada", es cuestión de lo que se entiende por *propósito*. A partir de lo que dicen los *Estándares*, es muy claro que sus autores no consideran que el deseo de dominar procedimientos matemáticos merezca la denominación de "propósito". Sin embargo, un trabajo cuidadosamente planeado acerca de procedimientos matemáticos, en donde la búsqueda de significado va de la mano con el crecimiento de la destreza técnica (¡lo que puede involucrar el uso de calculadoras!) tiene una buena posibilidad de ser recibido por los niños como una actividad intencionada y significativa.[18] Realizar procedimientos matemáticos acompañados por un incesante esfuerzo[19] para dar significado ya no se volverá a ver como memorización. En cambio, tomará la forma de un proceso dialéctico de crecimiento sincronizado en proficiencia y comprensión, en el que el dominio de una acción conduce a la reflexión sobre el

18. Desde mi experiencia como profesora, a muchos estudiantes les gusta practicar porque el llegar a ser ágiles en la técnica les da una sensación de éxito y la seguridad necesaria para proseguir.
19. Naturalmente, puesto que no todos los estudiantes aprenden de la misma manera, la cantidad relativa de lo que hacen y reflexionan puede cambiar de uno a otro estudiante. Hoy, el "dar significado" puede hacerse con la ayuda de los computadores. Así por ejemplo, resolver ecuaciones se puede hacer aplicando simultáneamente métodos algebraicos y gráficos. Como se ha mostrado en varios estudios (Kieran y Sfard, 1999; Schwartz y Yerushalmy, 1995) esta técnica instruccional puede, ciertamente, tener un efecto benéfico en la comprensión de los estudiantes acerca de los algoritmos. Resultados similares pueden provenir de actividades de programación que requieren un buen sentido de los procedimientos (Breidenbach, Dubinsky, Hawks y Nichols, 1992; Sfard, 1992).

significado de esta acción, y el incremento en la comprensión conduce a nuevas acciones más complejas.

No estoy tratando de afirmar que implementar esta sugerencia vaya a ser fácil, o que habrá un movimiento directo para traer de vuelta las destrezas a los colegios. Todo esto puede ser difícil, aun si lo que tenemos para ofrecer es una nueva manera de aprender destrezas, una que se pueda llamar *práctica reflexiva*. Que esto sea posible depende en gran medida de nuestra habilidad para cambiar el clima —convencer a todos los interesados, de que el dominio de destrezas, especialmente cuando éste se hace a través de la "práctica reflexiva", no significa ignorar la necesidad básica de comprender que tiene el niño, sino por el contrario, es una condición para la comprensión. Esto requerirá, entre otras cosas, que saquemos a la luz algunas falsas creencias acerca de la comprensión matemática. Primero, tendremos que clarificar que tratar la comprensión y el hacer repetitivo (práctica) como si fueran dos cosas separadas, y como si una fuera posible sin la otra, es un error fundamental. Segundo, debemos explicar que el hacer persistente en situaciones de comprensión parcial es la condición para progresar.

Es natural terminar esta sección con la observación hecha ya hace algunos años por Jim Hiebert y Tom Carpenter y que parece dar en el blanco de esta discusión:

> Uno de los eternos debates en la Educación Matemática tiene que ver con la relativa importancia de la comprensión versus la destreza…. Con frecuencia, el debate se llevó a cabo en el contexto de proponer un programa instruccional que enfatizara un tipo de conocimiento sobre el otro. La visión prevalente ha oscilado, reforzada por la capacidad de persuasión del vocero en cada posición particular. Aunque los argumentos puedan haber sido convincentes a veces dentro de la comunidad de Educación Matemática, no hemos progresado mucho en nuestra comprensión del asunto. (Hiebert y Carpenter, 1992, p. 77)[20]

En vista de la intrincada interdependencia entre el hacer y el comprender, y por razón de la circularidad inherente al proceso de su desarrollo, estos enfoques instruccionales zigzagueantes no son sorprendentes. Quizás sea tiempo, sin embargo, de reconocer el hecho de que la pregunta de la importancia relativa está mal propuesta, puesto que la comprensión y el hacer pueden ser simplemente dos caras de la misma moneda.

20. Ver también Hiebert y Lefevre (1986).

4. LA NECESIDAD DE DIFICULTAD

a. ¿Qué sabemos acerca de esta necesidad?

Como se dijo antes, de muchas maneras diferentes, el verdadero aprendizaje implica enfrentar dificultades. Puesto que la gente le teme a la dificultad e instintivamente trata de escapar de ella, es importante enfatizar que cuando se trata del aprendizaje, la dificultad es de hecho una buena cosa, previsto que básicamente se pueda manejar. Se puede decir que la dificultad es al aprendizaje lo que el rozamiento es al movimiento: es la condición de su existencia. Sin dificultad no hay aprendizaje, de la misma manera que no hay movimiento sin rozamiento. De otra parte, por supuesto, una dificultad muy grande haría imposible cualquier aprendizaje, lo mismo que un gran rozamiento detendría cualquier movimiento. Para hacer el argumento más "científico", permítaseme pasar ahora a la autoridad de Piaget y Vygotsky, y a su controversia acerca de la relación entre el desarrollo y el aprendizaje.

En su discusión, el término *desarrollo* se refiere al proceso de maduración natural. Inspirado por la metáfora del crecimiento biológico, Piaget creía que nuestras funciones mentales se desarrollan de manera natural, lo mismo que nuestro cuerpo. Sin embargo, el desarrollo natural no es la única causa posible de un cambio en los procesos cognitivos. Estos procesos también se pueden moldear a través del *aprendizaje*; es decir, a través de un intento deliberado de enriquecer y reorganizar nuestros esquemas cognitivos. Por tanto, el aprendizaje nos puede impulsar hacia metas que no parecen poderse alcanzar espontáneamente. Piaget también tenía una clara concepción acerca de la relación entre el aprendizaje y el desarrollo. Guiado, como siempre, por la metáfora del crecimiento biológico, él creía que básicamente el aprendizaje está subordinado al desarrollo, y por tanto, tiene límites bien definidos. Lo mismo que un neonato no puede aprender a manejar bicicleta, tampoco un niño puede aprender cosas que requieren una maduración intelectual que aún no posee.

Vygotsky adoptó la terminología de Piaget y, como su predecesor, distinguió entre desarrollo y aprendizaje. Sin embargo, criticó a Piaget en lo que tiene que ver con la precedencia del desarrollo sobre el aprendizaje. Más específicamente, Vygotsky estuvo en desacuerdo con la afirmación extrema de Piaget según la cual el desarrollo no puede ser influido por el aprendizaje. Su famosa idea de *zona de desarrollo próximo* (ZDP) condensa la creencia de que el desarrollo intelectual del niño se puede acelerar mediante un aprendizaje planeado cuidadosamente. Puesto que el propósito del aprendizaje debe ser llevar al niño a través de la ZDP —es decir, impulsarlo a partir de las habilidades que posee ahora hacia las que, aunque no se hayan desarrollado todavía, están ya en el proceso de hacerlo— la mejor manera de enseñar es asignar al estudiante tareas que vayan más allá de su actual nivel de desarrollo. Claro que estas tareas, aunque exigentes, no pueden ser demasiado avanzadas: tienen que ajustarse a la ZDP, que también tiene sus límites. Sin embargo, hay algo claro en esta propuesta: *el aprendizaje verdaderamente sustancial sólo puede ocurrir cuando el niño experimenta una cierta dificultad*. Por tanto, se puede interpretar que Vygotsky enfatiza el papel de la dificultad, mientras que Piaget, aunque no fuera su intención, ha sido interpretado como si exigiera que el niño esté a salvo del reto frustrante de tareas que superen sus habilidades actuales. Independientemente de la posición que uno tenga con respecto al asunto original de la relación entre aprendizaje y desarrollo, una persona que reconozca la necesidad de la dificultad encontrará más atractiva la concepción de Vygotsky.

b. ¿Cómo enfrentan esta necesidad los *Estándares*?

El papel de la dificultad para echar a andar el proceso de aprendizaje se reconoce en algunos de los principios que promueven los *Estándares*, pero sobre todo, se reconoce en la insistencia hecha en torno a la resolución de problemas "ya sea como medio o como fin de la instrucción" (NCTM, 1989, p. 129). Es obvio que esta sugerencia tiene que ver con el deseo de crear el "rozamiento" necesario para que el estudiante se mueva hacia adelante a partir del modo en que se ha definido el "problema genuino". De acuerdo con los *Estándares*, "es una situación en la que para el individuo o el grupo, tienen que ser desarrolladas una o más soluciones apropiadas" (p. 10). La ausencia de la solución es la dificultad que, combinada con la necesidad natural que el estudiante tiene de comprender, es una fuerza motivacional poderosa. Con respecto al grado de dificultad, los autores de los *Estándares* piden que "la situación debe ser suficientemente compleja como para ofrecer un reto, pero no tan compleja que sea insoluble" (p. 10). Esto es ciertamente razonable y está de acuerdo con lo dicho antes.

c. ¿Qué puede resultar mal?

Hay al menos dos áreas en las que las buenas intenciones de los autores de los *Estándares* pueden conducir a interpretaciones poco útiles. En primer lugar, a pesar de la insistencia en la resolución de problemas, los intérpretes del documento pueden atenuar el papel didáctico de la dificultad y no sólo por el popular sueño acerca del "aprendizaje sin rozamiento" tratado antes, sino también por una posible malinterpretación acerca de ciertas afirmaciones específicas de los *Estándares*. Los *Estándares* afirman, entre otras cosas, que "las situaciones problema deben mantenerse de acuerdo con la madurez —tanto matemática como cultural— y con la experiencia de los estudiantes.” (NCTM, 1989, p. 10). Aunque este enunciado suena muy razonable, sin una explicación apropiada se puede interpretar que está de acuerdo con la exhortación de Piaget de proteger al niño de tareas que parezcan estar por encima del nivel de su desarrollo actual, pero que justamente por eso, serían consideradas por Vygotsky como perfectamente apropiadas para “atraer” al estudiante a su ZDP.

En segundo lugar, mucho depende de la comprensión que el implementador tiene de la idea de situación problemática, del tipo de problemas que se usan para crear tales situaciones, y sobre todo, de qué tan relacionadas entre sí están las diferentes situaciones problema, y de la dirección general del aprendizaje (¡si es que hay alguna!).[21] De manera muy fácil la exhortación de “problematizar” puede terminar en “cursos difusos, llenos de actividades agradables pero matemáticamente carentes de sentido” (Jackson, 1997, p. 695). Esto significa que aprender de esa manera dura, tiene algún sentido. Como lo sustenté en secciones anteriores, esta situación viola la necesidad básica de estructura que tienen los estudiantes.

Quienes han sido acusados de introducir tales implementaciones no estructuradas pueden tener buenos argumentos para dar cuenta de su enfoque. Encontrar “problemas genuinos” que también deban ser buenos para el aprendizaje se convierte en algo en extremo difícil, y encontrar las maneras para interconectar estos problemas de suerte que también conduzcan a ideas matemáticas verdaderamente importantes es incluso más difícil. Para que un problema matemático sea efectivo debe confrontar al estudiante con una dificultad auténtica pero manejable. Esto significa que la pregunta en sí misma debe ser bien entendida y además parecer significativa (en la siguiente sección se trata el concepto de significación), pero la solución debe ser desconocida. Si a esto se agrega la exigencia de que el problema esté inmerso en un contexto de la vida real (como en efecto puede ser el caso con los *Estándares* —véase la siguiente sección), que esté en estrecha conexión con alguna idea matemática verdaderamente importante y con otros problemas significativos, y finalmente, que el problema le permita a uno satisfacer un espectro amplio de preferencias y habilidades de los estudiantes, se tiene que conceder que la misión del desarrollador de currículo es en extremo difícil, si no totalmente imposible. No debe extrañar entonces que la pregunta acerca de qué debe contar como un “buen problema” se convierta en tópico de un acalorado debate (ver e.g., Yerushalmy, Chazan y Gordon, 1990; Nemirovsky, 1996[22]).

---

21. Se ha sostenido recientemente una importante discusión de la idea de “problematizar la materia” en la revista *Educational Researcher* entre Hiebert, Carpenter, Fennema, Fuson, Human, Murray, Olivier y Wearne (1996); Smith (1997); Prawat (1997).

d. ¿Qué se puede hacer?

Lo primero que viene a la mente en respuesta a los dilemas esbozados antes, es que en lugar de tratar de eliminar una dificultad del currículo, debemos simplemente ser más cuidadosos acerca de la elección de "situaciones problemáticas". Como ya lo expresé, esto es más fácil de decir que de hacer. Se debe prestar mucha atención al asunto si se quiere encontrar alguna implementación que funcione, de una idea que es ciertamente atractiva, pero inherentemente difícil. Tengo toda la intención de dar un paso en esa dirección. Sin embargo, como la dificultad de un problema asignado a un estudiante, no se puede considerar así no más un verdadero reto y como para convertirse en una poderosa fuerza conductora para el aprendizaje debe percibirse como un obstáculo para el logro de alguna meta significativa, voy a analizar la noción de *significación* antes de proponer cualquier otra solución más concreta a los dilemas esbozados antes.

5. La necesidad de significación (y relevancia)

a. ¿Qué sabemos acerca de esta necesidad?

Cuando se trata de motivar el aprendizaje de los estudiantes explotando su hambre de significado, la significación es un complemento necesario de la dificultad. En este artículo, la significación será concebida como una habilidad para comprender y apreciar el lugar y la importancia de lo que debe ser aprendido dentro del sistema de conceptos que ya han sido bien comprendidos. En otras palabras, se le construirá como una consciencia de la forma en que el conocimiento existente genera un problema que está a la mano y necesita solución. Con esta interpretación, se puede ver el *sentido de la significación* como un tipo de comprensión que tiene que ver con las relaciones interconceptuales, como opuesta (y complementaria) a la que se enfoca en la estructura interna de los conceptos.

La necesidad de esta clase de comprensión ya es obvia a partir de la discusión que está teniendo lugar, pero también se puede reforzar con el enunciado teórico de acuerdo con el cual, el conocimiento nuevo sólo puede crecer a partir de conocimiento existente. Esta verdad casi autoevidente ha sido traducida por Piaget en una definición de aprendizaje como enriquecimiento y reorganización de esquemas mentales existentes. Se imparte el mismo mensaje en el constante énfasis que Vygotsky hace sobre la naturaleza en "espiral" del conocimiento más que en la naturaleza netamente acu-

22. Un tópico relacionado es el de los criterios para la evaluación de problemas construidos por estudiantes; ver e.g., Silver y Cai (1996).

mulativa del mismo. De acuerdo con Vygotsky, el conocimiento se desarrolla gracias a nuestra constante insatisfacción e incesante “volver a trabajar” sobre lo que ya sabemos. Puesto que significación quiere decir vincular lo nuevo a lo viejo, esta afirmación teórica se debe interpretar como una aserción sobre la necesidad que los estudiantes tienen del sentido de la significación. Los ya mencionados conceptos *artificiales* —una noción acuñada por Vygotsky— son los únicos que, cayendo desde arriba como paracaídas sobre el estudiante, en lugar de ser generados por un problema genuino bien entendido, están condenados a permanecer desprovistos de cualquier significación a sus ojos. Con mucha frecuencia, esta es la imagen de los números negativos, las operaciones algebraicas y las funciones, con la que salen los estudiantes del colegio.

b. ¿Cómo enfrentan esta necesidad los *Estándares*?

El énfasis en la significación, entendida como se describió antes, se transmite mediante enunciados tales como “[los niños] aceptarán las nuevas ideas sólo si sus ideas antiguas no les funcionan o les son insuficientes” (NCTM, 1989, p. 10). También surgen de la ya mencionada insistencia en el cambio “hacia establecer conexiones en las matemáticas, sus ideas y sus aplicaciones” (NCTM, 1991, p. 3). En esta ocasión, las aplicaciones se convierten en el asunto central. Una vez más, los *Estándares* urgen a profesores y a estudiantes para que relacionen las matemáticas con otros dominios y para que persigan la idea de que las matemáticas deben “crecer” a través de situaciones conocidas, preferiblemente de la vida real. Para terminar, la ya citada afirmación de que “una persona recoge, descubre o crea conocimiento en el curso de alguna actividad intencionada” (NCTM, 1989, p. 7), se debe interpretar en términos de la significación, dado que la palabra “intencionada” se refiera a una situación en la que los estudiantes tengan un impulso genuino para enfrentarse y estén bien conscientes de las razones de sus acciones. Tal impulso sólo puede surgir de la necesidad de encontrar una respuesta a una pregunta bien entendida que se considera verdaderamente importante.

c. ¿Qué puede resultar mal?

Como en todos los casos anteriores, en esta ocasión el peligro también reside en una interpretación extrema y única de lo que básicamente es una idea muy promisoria. Puede ocurrir que debido al énfasis que los *Estándares* hacen sobre las aplicaciones, con frecuencia la significación se confunda con la relevancia de la vida real. Ciertamente, la necesidad natural de significado y de significación puede ser la fuerza conductora más importante subyacente al aprendizaje; y por supuesto, el nuevo conocimiento sólo puede crecer a partir del ya existente. Más aun, aunque los críticos tienden a admitir la importancia de la relevancia diaria, Wu (1997, p. 956) dice que “La necesidad de las aplicaciones en el currículo de las matemáticas escolares está más allá del debate”. Sin embargo, ¿quién dice que el “viejo conocimiento” del cual se supone debe surgir el nuevo, sólo puede ser el conocimiento de lo concreto y lo real? Esto, en efecto, es una forma más bien limitada de interpretar la significación, que como ya se enfatizó, también puede provenir de las matemáticas mismas.[23] No obstante, esta última interpretación con frecuencia se pasa por alto o se rechaza activamente. La tendencia a equiparar la significación con la significación de la vida real, fue recientemente impulsada por una mole de investigación que apunta al hecho de que la gente tiende a hacerlo significativamente mejor cuando aplica las matemáticas a los problemas de la vida real que en sus intentos de trabajar con el mismo contenido matemático en el contexto de problemas escolares típicos (Lave, 1988; Walkerdine, 1988; Nunes, Schlieman y Carraher, 1993; Saxe, 1991; Rogoff y Lave, 1984; Schlieman y Carraher, 1996). A todo lo anterior, agrego una vez más nuestra tendencia dominante a tallar la solución educativa, y aquí estamos, totalmente preocupados por encontrar un contexto realista para todos los conceptos matemáticos y abiertamente hostiles hacia cualquier cosa que no sea enseñada de esta manera. Al erradicar del currículo lo abstracto y proponer que las matemáticas sólo se pueden aprender a través de los problemas de la vida real, quizás estemos cometiendo simultáneamente varios errores consecuenciales.

En primer lugar, existe un argumento teórico enraizado en la idea de Vygotsky de los *conceptos científicos* (como opuestos a los *conceptos del diario vivir*) y presentado en detalle por Davydov, quien habla en contra de un “enfoque empírico” en la enseñanza de las matemáticas en oposición a la naturaleza de estos conceptos. No repetiré aquí la línea de razonamiento de Davydov, sino que sólo citaré su descripción de actividades consideradas por él como más apropiadas para el aprendizaje:

> Tal actividad debe guiar a los estudiantes *desde lo abstracto hasta lo concreto*, es decir, a partir de la relación característica más general

23. Los miembros del proyecto “Realistic Mathematics Education” (Gravemeijer, 1994; Streefland, 1991; Treffers, 1987) desarrollan este punto con particular claridad al insistir en que los problemas con los que se espera que los estudiantes trabajen sean experiencialmente reales, y al enfatizar que este término “significa sólo que los puntos de inicio deben ser vividos como reales por los estudiantes dada su participación anterior en las prácticas dentro y fuera de la escuela, y no que deban necesariamente involucrarse en las llamadas situaciones del mundo real.” (Cobb, 1998, p. 189).

> de la materia educativa hasta sus manifestaciones empíricas concretas. (Kozulin, 1990, p. 259; he añadido el énfasis)

En segundo lugar, si estamos muy ávidos en nuestros intentos para mostrar la aplicabilidad de las matemáticas para motivar a los estudiantes, podemos terminar con un efecto opuesto. Como ya se dijo, las matemáticas más avanzadas —las que se enseñan en el nivel secundario— pueden no ser suficientemente necesarias en la vida de todos para emplear la utilidad como un argumento único para su aprendizaje. Por tanto, nuestra insistencia en enseñar sólo lo que responde a algunas necesidades de la vida real no convence al estudiante de que las matemáticas son realmente útiles; en cambio, parece hacerle creer que lo que tiene poca importancia práctica no tiene que ser aprendido.

En tercer lugar, puede mostrarse que la ecuación “significación = relevancia en la vida real”, a menudo atribuida a quienes adhieren a la perspectiva ‘participacionista’, realmente no se sigue de las afirmaciones acerca del carácter esencialmente situado del aprendizaje. Como se explicará con más detalle en una de las siguientes secciones, lo que hace ‘real’ a un problema y accesible a los ojos de quien lo resuelve no es sólo su contenido sino también, y de manera no menos importante, el contexto dentro del cual se origina y se resuelve. Es la razón y el propósito de la vida real que tiene la tarea lo que motiva al resolutor, le da sentido a esta tarea particular y proporciona claves con respecto a la forma como se puede lograr mejor la meta. En otras palabras, la fuerza de un problema de la vida real está en su inmersión en el contexto de la vida real, es decir, el estar atado orgánicamente a necesidades auténticas y a los instintos de quien lo resuelve. Traerlo a la escuela es un medio de despojarlo de lo que le da su fuerza especial.

Finalmente, volvemos a lo que ya había dicho antes: la petición de enseñar sólo lo que puede ser enseñado a través de aplicaciones de las matemáticas a la vida real, está ligada a conducir a una segmentación y empobrecimiento de la materia. Es poco probable que de los pequeños fragmentos de las, a menudo, matemáticas insignificantes que se pueden abstraer de los problemas reales, pueda eventualmente emerger un dibujo completo y bien organizado. Los efectos adversos de este estado de cosas en la comprensión de los estudiantes fueron ya discutidos en la sección dedicada a la necesidad de estructura. Donde aparece el asunto de la significación, tomamos una perspectiva adicional del mismo problema[24].

---

24. Cf. Schlieman (1995).

d. ¿Qué se puede hacer?

Dos tipos de acción pueden ser útiles para prevenir que la buena idea de conectar las matemáticas a la vida, degenere en la "hegemonía de lo aplicable". Primero, debemos tratar de rehabilitar el principio del conocimiento y la comprensión por su propio bien. Ampliaré este tópico más adelante. Aquí me gustaría referirme principalmente a otra forma de corregir la situación, una que involucra ser más abierto acerca del asunto de la significación. Podríamos tratar de aclarar que la significación puede provenir menos de problemas aislados de la vida real que se pueden producir relativamente rápido pero con soluciones más bien locales (y para las cuales el nombre "acertijo" puede ser más apropiado), que de problemas que, aunque más abstractos, son partes de un sistema dirigido a una meta general importante.

Lo voy a decir de manera ligeramente diferente. Los *Estándares* promueven la idea de "situación problemática" en la que la actividad de los estudiantes debe tener un propósito; sin embargo, los autores no explican el significado exacto de las palabras. Ahora ellos quieren añadir que se debe entender que el adjetivo "problemática" se refiere a una situación en la que los estudiantes son ayudados a ver que su conocimiento actual es insuficiente para satisfacer ciertas necesidades genuinas o para responder preguntas que emergen de lo que ya se sabe. Un reto real es resultado de un problema comprensible, cuya solución requiere un esfuerzo prolongado y mucho trabajo. En esta clase de problema, la inversión necesaria puede ser considerable, pero la recompensa que se espera al final del camino, y es codiciada a lo largo del mismo, estarían en consonancia. En verdad, preguntas que parecen conducir a ideas matemáticas importantes requieren mayor atención que los pasatiempos que se pueden solucionar durante uno o dos períodos de clase.[25] También con sistemas comprensibles de problemas interrelacionados, los estudiantes parecen no encontrar su camino hacia sus propias soluciones; después de todo, los matemáticos con frecuencia trabajaron en este tipo de problema durante varios siglos. Por tanto, en esta clase de instrucción las demandas para el profesor son muchas y difíciles. Mantener la atención de los estudiantes, sostener el sentido de reto, y preservar la consciencia de los estudiantes de una dirección global durante los períodos en que se están solucionando problemas locales, no es una tarea fácil. Ciertamente hay clases en las que una tal "navegación general" del aprendizaje puede parecer casi imposible. Pero como el sentido de dirección es casi equivalente al sentido de la significación y puesto que no es posible ningún movimiento ni hacia adelante ni hacia atrás sin el sentido de la dirección, sostenerlo merece

25. Los *Estándares* piden extender la atención ("los estudiantes necesitan trabajar sobre problemas que les puedan tomar horas, días e incluso semanas para resolverlos" NCTM, 1989, p. 6), pero esto evidentemente ha sido subestimado por muchos implementadores.

el esfuerzo necesario. Y, como lo ha mostrado la experiencia previa, con un poco de planeación cuidadosa se puede llevar a cabo esta difícil tarea. A continuación menciono sólo dos ejemplos.

Primero voy a referirme al curso de cálculo de nivel secundario, desarrollado en Israel hace algunos años.[26] La idea general era comenzar el estudio ayudando a los estudiantes a crear un marco conceptual para todo el curso. Con tal marco, los conceptos y métodos del cálculo sólo aparecerían cuando ya se hubieran anticipado. Esto significa, entre otras cosas, que la necesidad de una herramienta que más tarde se llamaría la derivada, la forma como debía ser construida y sus usos futuros, se podían percibir y comprender por adelantado. El bosquejo de tal marco se presenta en la Figura Nº 1. Se debían destinar al menos veinte horas a actividades a través de las cuales las preguntas y las observaciones que constituían este marco podían ser desarrolladas. Recientemente, se implementó un marco similar con actividades de computador ingeniosas y retadoras (Schwartz y Yerushalmy, 1995).

Meta general:	Ganar confianza con familias de funciones.
Problema:	Los métodos conocidos para investigar funciones (construir una tabla, dibujar una gráfica) parecen no servir para funciones más complejas (¡ni siquiera con computadores!).
Submeta:	Encontrar una nueva herramienta analítica, más confiable para investigar funciones.
Un fenómeno promisorio:	La mayoría de las gráficas casi siempre resultan lineales cuando se miran "de cerca" (una pequeña vecindad de un punto se aumenta mucho) —la existencia de una *aproximación lineal.*
Las preguntas que se deben responder ahora:	1. ¿Es el fenómeno anterior suficientemente común para llamar la atención? 2. Si así es, ¿cómo encontrar aproximaciones lineales? 3. Cuando sepamos cómo hallar aproximaciones lineales, ¿cómo usarlas para investigar funciones?

Figura Nº 1. El marco para el cálculo introductorio

Mi segundo ejemplo proviene de un estudio realizado por Carolyn Kieran y por mí (Kieran, 1994; Kieran y Sfard, 1999) hace algunos años en Montreal.

26. El sistema educativo de Israel es centralizado y existe un currículo nacional del que las matemáticas son parte central. El programa en cuestión, el de los grados 10-12, fue producto de un trabajo en equipo del que tomó parte la autora de este artículo.

En el experimento, en el que el álgebra introductoria se enseñó a niños de doce años de edad, el marco conceptual de guía (Figura Nº 2) fue creado muy al comienzo presentando gráficas como objetos que requerían estudio. Se transmitió de manera natural un mensaje acerca de la importancia de las gráficas y su investigación por el hecho de que ellas se construyeron para modelar situaciones que eran significativas a los ojos de los estudiantes (y esto no quiere decir necesariamente que estas situaciones fueran todas reales). Desde el comienzo se reconoció el propósito del curso: la tarea de los estudiantes era construir formas de investigar las gráficas. Esto los condujo a la "invención" y uso de expresiones algebraicas. Más aun, no sólo llegaron a algunas de las equivalencias algebraicas básicas por su propia cuenta, sino que también comenzaron a resolver ecuaciones e inecuaciones antes de tener algún método algebraico para hacerlo. El desafío que estaban enfrentando ahora era encontrar un método de solución que fuera más rápido, más efectivo, más preciso, y totalmente confiable. Este ejemplo muestra, entre otras cosas, que con la ayuda de los computadores, la cuestión de mantener un sentido de la significación conservando una dirección claramente definida puede no ser una tarea tan difícil después de todo.

Lista de contenidos

1. Introducción de gráficas cartesianas
   1.1 Gráficas discretas, sin regla
   1.2 Gráficas continuas, sin regla
   1.3 Gráficas basadas en historias, con una regla
   1.4 Gráficas abstractas, con una regla
2. Expresiones algebraicas y noción de función
   2.1 Expresión algebraica como representación simbólica de una regla
   2.2 Interacción entre historia, tabla, expresión y gráfica
   2.3 El concepto de función—una introducción
3. Exploración de funciones
   3.1 Investigación de funciones con expresión, tabla y gráfica
   3.2 Correspondencia de gráficas con expresiones
   3.3 Funciones lineales
4. Operaciones sobre funciones: equivalencia de expresiones
   4.1 Operaciones sobre gráficas: adición y multiplicación por un número

Figura Nº 2. El marco para el álgebra introductoria (adoptado de Kieran y Sfard, 1999)

Lista de contenidos	
4.2	Expresiones equivalentes
4.3	Adición de expresiones lineales y multiplicación de una expresión por un número
5.	Comparación de funciones—Ecuaciones e inecuaciones
5.1	Comparación de valores de dos funciones usando gráficas
5.2	Solución de ecuaciones lineales con gráficas
5.3	Solución de inecuaciones lineales con gráficas

Figura Nº 2. El marco para el álgebra introductoria (adoptado de Kieran y Sfard, 1999)

REFERENCIAS

Bereiter, C. (1985). Towards the solution of the learning paradox. *Review of Educational Research, 55,* 201-226.

Breidenbach, D., Dubinsky, E., Hawks, J., y Nichols, D. (1992). Development of the process conception of function. *Educational Studies in Mathematics, 23,* 247-285.

Brownell, W.A. (1935). Psychological considerations in the learning and teaching of arithmetic. En *The teaching of arithmetic: Tenth yearbook of NCTM*. New York: Columbia University Press.

Bruner, J. (1986). *Actual minds, possible worlds*. Cambridge, MAS: Harvard University Press.

Bruner, J. (1990). *Acts of meaning*. Cambridge, MAS: Harvard University Press.

Bruner, J. (1996). Celebrating divergence: Piaget and Vygotsky. A keynote address delivered in Geneva at a joint meeting of the "Growing Mind Conference" in honor of the centennial of Jean Piaget's birth, and the "Vygotsky-Piaget Conference" of the 2nd Congress of Socio-Cultural Research, honoring both Lev Vygotsky's and Piaget's centennial.

Cobb, P. (1998). Learning from distributed theories of intelligence. *Mind, Culture, and Activity, 5* (3), 187-204.

Cobb, P., Boufi, A., McClain, K. y Whitenack, J. (1997). Reflective discourse and discursive reflection. *Journal for Research in Mathematics Education, 28* (3), 258-277.

Cobb, P., Wood, T. y Yackel, E. (1991). A constructivist approach to second grade mathematics. En E. von Glasersfeld (Ed.), *Radical constructivism in mathematics education* (pp. 157-176). Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.

Cobb, P., Wood, T. y Yackel, E. (1993). Discourse, mathematical thinking, and classroom practice. En *E. Forman, N. Minick y A. Stone* (Eds.), *Contexts for learning: Sociocultural dynamics in children's development* (pp. 91-119). New York: Oxford University Press.

Confrey, J (1990). A review of research on student misconceptions in mathematics, science, and programming. En C. Cazden (Ed.), *Review of research in education* (vol. 16, pp. 3-56). Washington D.C.: American Education Research Association.

Davis, R. (1988). The interplay of algebra, geometry, and logic. *Journal of Mathematical Behavior, 7*, 9-28.

Devlin, K. (1997). Editorial: Reduce skills teaching in math class. *Focus, 17* (6), 2-3.

Douady, R. (1985). The interplay between different settings: Tool-object dialectic in the extension of mathematical ability. Examples from elementary school teaching. En L. Streefland (Ed.), *Proceedings of the ninth International Conference for the Psychology of Mathematics Education* (vol. 2, pp. 33-52). Utrecht, The Netherlands: State University of Utrecht.

Driver, R. y Easley, J. (1978). Pupils and paradigms: a review of literature related to concept development in adolescent science students. *Studies in Science Education, 5*, 61-84.

Dubinsky, E. (1991). Reflective abstraction in advanced mathematical thinking. En D. Tall (Ed.), *Advanced mathematical thinking* (pp. 95-123). Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.

Eco, U., Santambrogio, M., y Violi, P. (1988). *Meaning and mental representations*. Bloomington and Indianapolis: Bloomington University Press.

Fischbein, E. (1987). *Intuition in science and mathematics*. Dordrecht: Reidel.

Fischbein, E. (1989). Tacit models and mathematical reasoning. *For the learning of mathematics, 9* (2), 9-14.

Fischbein, E., Deri, M., Nello, M.S. y Marino, M.S. (1985). The role of implicit models in solving verbal problems in multiplication and division. *Journal for Research in Mathematics Education, 16*, 3-17.

Freudenthal, H. (1978). *Weeding and sowing: Preface to a science of mathematics education*. Dordrecht: Reidel.

Fuson, K.C. y Briars, D. (1990). Using a base-ten blocks learning/teaching approach for first- and second-grade place-value and multidigit addition and subtraction. *Journal for Research in Mathematics Education, 21*, 180-206.

Fuson, K.C. y Kwon, Y. (1992). Korean children's understanding of multidigit addition and subtraction. *Child Development, 63*, 491-506.

Gravemeijer, K.E.P. (1994). *Developing realistic mathematics education*. Utrecht, The Netherlands: CD-Beta Press.

Gray, E.M. y Tall, D.O. (1994). Duality, ambiguity, and flexibility: A “proceptual” view of simple arithmetic. *Journal for Research in Mathematics Education, 25* (2), 116-140.

Greeno, J. (1983). Conceptual entities. En A. Stevens y D. Gentner (Eds.), *Mental models*. Hillsdale, NJ: Erlbaum.

Harel, G., Behr, M., Post, T. y Lesh, R. (1989). Fischbein's theory: A further consideration. En G. Vergnaud, J. Rogalski y M. Artigue (Eds.), *Proceedings of the Thirteenth International Conference for the Psychology of Mathematics Education*, (vol. 2, pp. 52-59).

Harel, G. y Kaput, J. (1991). The role of conceptual entities in building advanced mathematical concepts and their symbols. En D. Tall (Ed.), *Advanced mathematical thinking* (pp. 82-94). Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.

Hiebert, J. y Carpenter, T.P. (1992). Learning and teaching with understanding. En D.A. Grouws (Ed.), *The handbook of research on mathematics teaching and learning* (pp. 65-100). New York: MacMillan Publishing Company.

Hiebert, J., Carpenter, T.P., Fennema, E., Fuson, K., Human, P., Murray, H., Olivier, A. y Wearne, D. (1996). Problem solving as a basis for reform in curriculum and instruction: The case of mathematics. *Educational Researcher, 25* (4), 12-21.

Hiebert, J. y Lefevre, P. (1986). Conceptual and procedural knowledge in mathematics: An introductory analysis. En J. Hiebert (Ed.), *Conceptual and procedural knowledge: The case of mathematics*. Hillsdale, NJ: Erlbaum.

Hiebert, J. y Wearne, D. (1992). Links between teaching and learning place value with understanding in the first grade. *Journal for Research in Mathematics Education, 23*, 98-122.

Hiebert, J. y Wearne, D. (1996). Instruction, understanding, and skill in multidigit addition and subtraction. *Cognition and Instruction, 14*, 251-284.

House, P. A. (1995). *Connecting mathematics across the curriculum*. 1995 Yearbook. Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.

Jackson, A. (1997). The math wars: California battles it out over mathematics education reform. *Notices of The American Mathematics Association*, 695-702, 817-823.

Johnson, M. (1987). *The body in the mind: The bodily basis of meaning, imagination, and reason*. Chicago: The University of Chicago Press.

Kieran, C. (1994). A functional approach to the introduction of algebra: some pros and cons. En J.P. da Ponte y J.F. Matos (Eds.), *Proceedings of the Eighteenth International Conference for the Psychology of Mathematics Education* (vol. 1, pp. 157-175). Lisbon: University of Lisbon.

Kieran, C. y Sfard, A. (1999). Seeing through symbols: The case of equivalent equations. *Focus on Learning Mathematics, 21* (1), 1-17.

Kilpatrick, J. (1992). A history of research in mathematics education. En D. Grouws (Ed.), *Handbook of research on mathematics teaching and learning* (pp. 3-38). New York: MacMillan Publishing Company.

Kilpatrick, J. (1997). Foundations for school mathematics. (Propuesta presentada a la National Science Foundation).

Kozulin, A. (1990). *Vygotsky's psychology: A biography of ideas*. New York: Harvester Wheatsheaf.

Kuhn, T. (1962). *The Structure of Scientific Revolutions*. Chicago: Chicago University Press.

Lave, J. (1988). *Cognition in practice*. Cambridge: Cambridge University Press.

Lave, J. y Wenger, E. (1991). *Situated Learning: Legitimate Peripheral Participation*. Cambridge: Cambridge University Press.

Malik, M.A. (1980). Historical and pedagogical aspects of definition of function. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology, 1* (4), 489-492.

Markovits, Z., Eylon, B. y Bruckheimer, M. (1986). Functions today and yesterday. *For the Learning of Mathematics, 6* (2), 18-24.

Moritz, R.E. (1942). *Memorabilia Mathematica*. Washington: MAA Spectrum.

National Research Council (1989). *Everybody counts: A report to the nation on the future of mathematics education*. Washington, DC: National Academy Press.

NCTM (1989). *Curriculum and evaluation standards for school mathematics*. Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.

NCTM (1991). *Professional standards for teaching mathematics*. Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.

NCTM (1995). *Assessment Standards for School Mathematics*. Reston, VA.: National Council of Teachers of Mathematics.

Nemirovsky, R. (1996). A functional approach to algebra: Two issues that emerge. En N. Bednarz, C. Kieran y L. Lee (Eds.), *Approaches to algebra: Perspectives for research and teaching* (pp. 295-313). Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.

Nesher, P. (1986). Are mathematical understanding and algorithmic performance related? *For the Learning of Mathematics, 6* (3), 2-9.

Nesher, P. (1987). Toward and instructional theory: The role of student's misconceptions. *For the Learning of Mathematics, 7* (3), 33-40.

Nunes, T., Schlieman, A.D. y Carraher, D.W. (1993). *Street mathematics and school mathematics*. Cambridge: Cambridge University Press.

Petrie, H.G. y Oshlag, R.S. (1993). Metaphor in learning. En A. Ortony (Ed), *Metaphor and thought* (segunda edición, pp. 579-609). Cambridge: Cambridge University Press.

Piaget, J. (1952). *The origins of intelligence of the child*. London: Routledge and Kegan Paul.

Piaget, J. (1970). *Genetic epistemology.* New York: Columbia University Press.

Piaget, J. e Inhelder, B. (1969). *The psychology of the child*. New York: Basic Books.

Prawat, R.S. (1997). Problematizing Dewey's views of problem solving: A reply to Hiebert et al. *Educational Researcher, 26* (2), 19-21.

Reddy, M. (1979). The conduit metaphor: A case of frame conflict in our language about language. *Metaphor and Thought* (segunda edición, pp. 164-201). Cambridge: Cambridge University Press.

Rogoff, B. y Lave, J., (Eds.) (1984). *Everyday cognition: Its development in social context*. Cambridge, MAS: Harvard University Press.

Rorty, R. (1979). *Philosophy and the mirror of nature*. Princeton, NJ: Princeton University Press.

Saxe, G.B. (1991). *Culture and cognitive development: Studies in mathematical understanding*. Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.

Scheffler, I. (1991). *In praise of cognitive emotions*. New York: Routledge.

Schlieman, A.D. (1995). Some concerns about bringing everyday mathematics to mathematics education. En L. Meira y D. Carraher (Eds.), *Proceedings of the Nineteenth International Conference for the Psychology of Mathematics Education* (vol. 1, pp. 45-60). Recife: Universidade Federal de Pernambuco.

Schlieman, A.D. y Carraher, D.W. (1996). Negotiating mathematical meanings in and out of school. En L.P. Steffe, P. Nesher, P. Cobb, G.A. Goldin y B. Greer (Eds.), *Theories of mathematical learning* (pp. 77-84). Mahwah, NJ: Kluwer Academic Publishers.

Schoenfeld, A. (1985). *Mathematical problem solving*. New York: Academic Press.

Schoenfeld, A. H. (1989). Explorations of Students' Mathematical Beliefs and Behavior. *Journal for Research in Mathematics Education, 20*, (4), 338-355.

Schoenfeld, A. (1992). Learning to think mathematically: Problem solving, metacognition, and sense making in mathematics. En D.A. Grouws (Ed.), *Handbook of research on mathematics teaching and learning* (pp. 334-370). New York: MacMillan Publishing Company.

Schwartz, J.L. y Yerushalmy, M. (1995). On the need for a bridging language for mathematical modeling. *For the Learning of Mathematics, 15*, 29-35.

Sfard, A. (1987). Two conceptions of mathematical notions: operational and structural. En J.C. Bergeron, N. Herscovics y C. Kieran (Eds.), *Proceedings of the Eleventh International Conference for the Psychology of Mathematics Education*, (pp. 61-169). Montreal.

Sfard, A. (1991). On the dual nature of mathematical conceptions: reflections on processes and objects as different sides of the same coin. *Educational Studies in Mathematics, 22*, 1-36.

Sfard, A. (1992). Operational origins of mathematical objects and the quandary of reification - the case of function. En E. Dubinsky y G. Harel (Eds.), *The Concept of Function: Aspects of epistemology and pedagogy.* Mathematical Association of America Notes 25 (pp. 59-84). Mathematical Association of America.

Sfard, A. (1994). Mathematical practices, anomalies, and classroom communication problems. En P. Ernest (Ed.), *Constructing mathematical knowledge* (pp. 248-273). London: The Falmer Press.

Sfard, A. (1995). The development of algebra: Confronting historical and psychological perspectives. *Journal of Mathematical Behavior, 14*, 15-39.

Sfard, A. (1998). Two metaphors for learning mathematics: Acquisition metaphor and Participation Metaphor. *Educational Researcher, 27* (2), 4-13.

Sfard, A. (en prensa). Symbolizing mathematical reality into being: How mathematical discourse and mathematical objects create each other. En P. Cobb, K.E. Yackel y K. McClain (Eds.), *Symbolizing and communicating: perspectives on mathematical discourse, tools, and instructional design*. Mahwah, NJ: Erlbaum.

Sfard, A. y Linchevski, L. (1994). The gains and the pitfalls of reification - the case of algebra. *Educational Studies in Mathematics, 26*, 191-228.

Silver, E.A. y Cai, J. (1996). An analysis of arithmetic problem posing by middle school students. *Journal for Research in Mathematics Education, 27* (5), 521-539.

Skemp, R. (1976). Relational understanding and instrumental understanding. *Mathematics Teaching, 77*, 44-49.

Smith, J.P. (1997). Problems with problematizing mathematics: A reply to Hiebert et al. *Educational Researcher, 26* (2). 22-24.

Smith, J.P., diSessa, A.A. y Rochelle, J. (1993). Misconceptions reconceived: A constructivist analysis of knowledge in transition. *The Journal of the Learning Sciences, 3* (2), 115-163.

Stevenson, H.W. y Stigler, J.W. (1992). *The learning gap: Why our schools are failing and what we can learn from Japanese and Chinese education*. New York: Summit Books.

Streefland, L. (1991). Fractions in realistic mathematics education: A paradigm of developmental research. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.

Tall, D. y Vinner, S. (1981). Concept image and concept definition in mathematics with particular reference to limits and continuity. *Educational Studies in Mathematics*, *12*, 151-169.

Thompson, P. (1985). Experience, problem solving, and learning mathematics: Considerations in developing mathematics curricula. En E. Silver (Ed.), *Teaching and learning mathematical problem solving: Multiple perspectives* (pp. 189-243). Hillsdale, NJ: Erlbaum.

Thurston, W.P. (1990). Mathematical education. *Notices of the American Mathematical Society, 37*, 844-850.

Tietze, U.P. (1994). Mathematical curricula and underlying goals. En R. Biehler, R.W. Scholz, R. Strasser y B. Winkelman (Eds.), *Didactics of mathematics as scientific discipline* (pp. 41-53). Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.

Treffers, A. (1987). *Three dimensions: A model of goal and theory description in mathematics instruction – The Wiskobas Project*. Dordrecht: Reidel.

Van Hiele, P.M. (1985). The child's thought and geometry. En D. Fuys, D. Geddes, y R. Tischler (Eds.), *English translation of selected writings of Dina Van Hiele-Geldof and Pierre M. Van Hiele* (pp. 243-252). Brooklyn, NY: Brooklyn College, School of Education.

Vinner, S. (1983). Concept definition, concept image and the notion of function. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology, 14*, 293-305.

Vinner, S. y Dreyfus, T. (1989). Images and definitions for the concept of function. *Journal for Research in Mathematics Education, 20* (4), 356-366.

von Glasersfeld, E. (1993). *Radical Constructivism: A way of knowing and learning*. London: The Falmer Press.

Vygotsky, L.S. (1962). *Thought and language*. Cambridge, MAS: MIT Press.

Vygotsky, L.S. (1987). Thinking and speech. En R.W. Rieber y A.C. Carton (Eds.), *The Collected Works of L. S. Vygotsky* (vol. 1, pp. 39-285). New York: Plenum Press.

Walkerdine, V. (1988). *The mastery of reason*. London: Routledge.

Wittgenstein, L. (1953). *Philosophical investigations*. Oxford: Blackwell.

Wu, H. (1997). The mathematics education reform: Why you should be concerned and what you can do. *American mathematical monthly. 103*, 954-962.

Yerushalmy, M. (1997). Designing representations: Reasoning about functions of two variables. *Journal for Research in Mathematics Education, 28,* 431-466.

Yerushalmy, M., Chazan, D. y Gordon, M. (1990). Mathematical problem posing: Implications for facilitating student inquiry in classrooms. *Instructional Science*, *19*, 219-245.

Anna Sfard
University of Haifa
Israel
E-mail: sfard@netvision.net.il