LA ENSEÑANZA DE LA SIMETRÍA AXIAL A PARTIR DE LA COMPLEMENTARIEDAD DE ARTEFACTOS

YUDIS IBARGUEN BORJA

JENNIFER REALPE GONZÁLEZ

UNIVERSIDAD DEL VALLE
INSTITUTO DE EDUCACIÓN Y PEDAGOGÍA
ÁREA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA
SANTIAGO DE CALI
2012

LA ENSEÑANZA DE LA SIMETRÍA AXIAL A PARTIR DE LA COMPLEMENTARIEDAD DE ARTEFACTOS

YUDIS IBARGUEN BORJA (0743499)

JENNIFER REALPE GONZÁLEZ (0743503)

Trabajo de grado para optar el titulo

Licenciadas en Educación Básica con Énfasis en Matemáticas

Directora

Mg. María Fernanda Mejía Palomino

UNIVERSIDAD DEL VALLE
INSTITUTO DE EDUCACIÓN Y PEDAGOGÍA
ÁREA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA
SANTIAGO DE CALI

2012

AGRADECIMIENTOS

Primeramente agradecemos a Dios por darnos día a día la salud, el ánimo y las fuerzas para desarrollar esta investigación.

Por su gran colaboración y tiempo invertido al adoptar esta investigación como suya, queremos dar gracias a nuestra directora, la profesora *María Fernanda Mejía*; pues con sus conocimientos encaminó cada una de nuestras ideas.

Damos gracias a nuestras familias por su amor, comprensión y apoyo durante nuestra formación profesional; pues ellos hicieron más fácil este camino.

A nuestros amigos por estar presente en los buenos y en los malos momentos, haciendo de la vida universitaria una etapa inolvidable.

A la institución donde desarrollamos la implementación, a la docente *Rocío* y sus estudiantes de grado tercero, por brindarnos el espacio y el tiempo que requeríamos.

A los evaluadores, *Octavio Pabón* y *Gustavo Quintero*, por sus comentarios, sugerencias y cada uno de los aportes que hicieron para la escritura de este informe final.

A todos muchas gracias.

TABLA DE CONTENIDO

LISTA DE FIGURAS

LISTA DE TABLAS

RESUMEN

Este trabajo de grado se centra en la enseñanza y en el aprendizaje de la transformación de simetría axial, para lo cual se presenta la siguiente pregunta de investigación: ¿De qué manera la utilización de artefactos como el simetrizador y el software Cabri Geometry II Plus permite la conceptualización de las propiedades de la simetría axial en niños de tercero de básica primaria?; para responder a esta pregunta, se pretende determinar el papel de la ***complementariedad*** de diferentes artefactos (regla, lápiz y papel, Cabri Geometry II Plus y un simetrizador) en la conceptualización de las propiedades de la simetría axial.

De este modo, se contempla como hipótesis principal que *"la **complementariedad de artefactos** en un ambiente de aprendizaje favorece la conceptualización de las propiedades de la simetría axial"*; para esto se diseñó e implementó una secuencia didáctica basada en la Teoría de Situaciones Didácticas de Brousseau (2007) y desarrollada dentro del marco de la micro-ingeniería didáctica.

Palabras Clave: Simetría Axial, Complementariedad de Artefactos, Cabri Geometry II Plus, Simetrizador, Teoría de Situaciones Didácticas.

INTRODUCCIÓN

La sociedad sufre continuos cambios, influyendo en la educación, un caso en particular es la integración de TIC (*Tecnologías de la Información y la Comunicación*) en la enseñanza de la educación matemática. Esto lleva a que los docentes busquen estrategias que *medien* el aprendizaje de los estudiantes, proporcionándoles situaciones de enseñanza con las cuales puedan sacar el mayor provecho de los recursos que tiene a su alcance. Es el caso de los distintos artefactos tecnológicos y materiales físicos[1], que si se utilizan con un propósito pedagógico pueden ser de gran utilidad en el aprendizaje del conocimiento matemático.

Por esto, se realizó una investigación centrada en la transformación de simetría axial, donde se usan diferentes artefactos como el software Cabri Geometry II Plus, un simetrizador, regla, lápiz y papel que al *complementarse* pueden llevar a la conceptualización de las propiedades de dicha transformación isométrica.

Así, el presente trabajo está estructurado de la siguiente manera:

En el Capítulo I denominado *ASPECTOS GENERALES* se plantea la problemática que sustenta esta investigación, se resaltan estudios relacionados con las transformaciones isométricas y los objetivos que sirvieron de base para dar respuesta a la pregunta de esta investigación.

En el Capítulo II denominado *ANÁLISIS PRELIMINARES* se describe la micro-ingeniería como metodología de esta investigación, se desarrolla la dimensión epistemológica, la dimensión cognitiva y la dimensión didáctica, siendo transversal en cada una de ellas el papel de los artefactos en la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas.

---

[1] En este trabajo se entenderá material físico a aquellos objetos que pueden ser manipulados por un usuario, produciendo un nuevo estado que permanecerá estático hasta que el usuario decida hacer nuevos cambios, exceptuando las Tecnologías de Información y Comunicación (TIC).

En el capítulo III denominado *DISEÑO DE LAS SITUACIONES DIDÁCTICAS Y ANÁLISIS A PRIORI* se diseña y analiza una secuencia didáctica basada en la Teoría de Situaciones Didácticas, especificando los propósitos de cada situación, las posibles soluciones a cada tarea y actos de devolución del docente.

En el capítulo IV denominado *ANÁLISIS A POSTERIORI Y RESULTADOS* se examinan las producciones de los estudiantes, verificando si se cumplieron los planteamientos expuestos en el *análisis a priori.* Además, se describe el proceso de *institucionalización* llevado a cabo durante la experimentación de la secuencia didáctica y se confronta lo propuesto en el análisis *a priori* y *a posteriori*.

En el capítulo V denominado CONCLUSIONES se examinan los resultados presentados en el capítulo IV, a fin de validar o refutar las hipótesis, objetivos y pregunta problema que se tenían al inicio de la investigación.

En los ANEXOS se presentan los pasos para construir un simetrizador y para insertar una imagen en Cabri Geometry II Plus. Además, se muestran evidencias fotográficas y escritas que respaldan la realización de los análisis.

CAPÍTULO I

ASPECTOS GENERALES

1.1 Contextualización y Planteamiento del Problema

Las nuevas propuestas curriculares rescatan el valor de lo empírico y de lo intuitivo en los procesos de construcción del conocimiento matemático en la escuela. Así, para el desarrollo del pensamiento espacial, el enfoque de geometría activa se constituye en una herramienta potente para la exploración del espacio mediante la interacción del estudiante con el mundo. De esta forma, "se trata pues de 'hacer cosas', de moverse, dibujar, construir, producir y tomar de estos esquemas operatorios el material para la conceptualización o representación interna" (Ministerio de Educación Nacional [MEN], 1998, p. 57). En otras palabras, se pretende que el estudiante manipule y experimente con los objetos que le sirven de apoyo para promover un aprendizaje significativo, que se entiende como aquel aprendizaje que "puede incorporarse a las estructuras de conocimiento que posee el sujeto, es decir, cuando el nuevo material adquiere significado para el sujeto a partir de su relación con conocimientos anteriores" (Ausubel, 1978; citado por Pozo, 2006, p. 211).

De esta manera, la exploración activa del espacio, favorece el estudio de las transformaciones geométricas, las cuales se consideran parte esencial en el aprendizaje de la geometría, particularmente, "el estudio de las transformaciones de figuras geométricas ha ido progresivamente primando sobre la presentación formal de la geometría basada en teoremas y demostraciones deductivas" (Dickson, Brown & Gibson, 1991; citado por Godino & Ruiz, 2004, p. 325). Sin embargo, el aprendizaje de las transformaciones geométricas presenta dificultades que se han reflejado en diversas exploraciones aplicadas a los estudiantes, en las que se encuentra la de Williford (1972; citado por Thaqi, 2009), donde se evidencia que existen dificultades en el aprendizaje de estas transformaciones, pues los participantes de su investigación aprendieron a realizarlas de forma rutinaria, pero no aprendieron el concepto de transformación como cambio de un estado a otro.

Del mismo modo, Moyer (1974) y Schultz (1977) (citados por Jaime, 1993) analizan las dificultades del aprendizaje de las Isometrías del Plano, identificando que entre los factores que influyen en la dificultad para realizar correctamente el movimiento, se encuentra la dirección del movimiento (vertical, horizontal, inclinada), la distancia entre el objeto y su imagen y, para las simetrías, la posición del eje.

De otra parte, en Colombia **Las Pruebas Saber 5° y 9°**[2] evalúan las competencias que han desarrollado los estudiantes de primero a quinto de básica primaria y de sexto a noveno de básica secundaria. Según las características de la evaluación presentadas por el Instituto Colombiano para el Fomento de la Educación Superior (ICFES, 2012), el componente geométrico asume el 40% del total de los ítems establecidos para la prueba de quinto grado y el 35% para la prueba de noveno grado.

Dentro de los indicadores que se evalúan en quinto grado, se encuentra el hacer conjeturas y verificar los resultados de aplicar transformaciones a figuras en el plano e, identificar y justificar relaciones de semejanza y congruencia entre figuras.

En noveno grado se evalúa que el estudiante esté en capacidad de reconocer y aplicar transformaciones de figuras planas, y que pueda predecir y comparar los resultados de aplicar transformaciones rígidas (rotación, traslación y reflexión) sobre figuras bidimensionales en situaciones

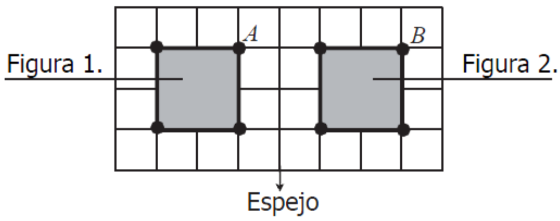
---

[2] **La prueba Saber 5° y 9°** es una evaluación que realiza el ICFES en Colombia cada tres años, en las áreas de Lenguaje, Matemáticas y Ciencias, con el fin de valorar la calidad de la educación de los establecimientos educativos.

matemáticas y en el arte; además, que tenga la capacidad de hacer conjeturas y verificar propiedades de congruencias y semejanza entre figuras bidimensionales.

Al observar los cuadernillos de la Prueba Saber del área de matemáticas aplicadas en el mes de octubre del año 2009, se evidencia que en el grado quinto sólo se evalúa la transformación de homotecia, mientras en la prueba realizada en mayo del mismo año, se evalúa la transformación de simetría axial, a través de la siguiente pregunta (ver Figura 1):

45. La figura 2 es imagen de la figura 1 en el espejo.



¿Cuál o cuáles de las siguientes afirmaciones es o son verdadera(s)?

I. Los perímetros de las dos figuras son iguales.
II. Las áreas de las dos figuras son iguales.
III. La imagen del punto A es el punto B.

A. I solamente.
B. II solamente.
C. I y II solamente.
D. II y III solamente.

Figura 1. Simetría axial en prueba Saber

Fuente: Ministerio de Educación Nacional (2009, p. 25).

En la aplicación de octubre para grado noveno, no se observa ninguna pregunta que evalúe la transformación de simetría axial, sino las relacionadas con la traslación y la homotecia.

Es importante decir, que los resultados presentados por el ICFES (2010) no especifican en cada componente, sino que expone resultados generales para el área de matemáticas. De este modo, al analizarse los resultados compilados por la Comisión Vallecaucana por la Educación (CVE, s.f.), se reconoce otra problemática a saber: que los puntajes obtenidos en los resultados de las pruebas Saber 2002/2003 y 2005/2006 oscilan entre 47 y 64,5 puntos, sobre cien (100)[3]; donde los menores desempeños son del área de matemáticas. Cabe anotar que, en la prueba del 2006 los resultados en esta área continuaron bajando con respecto al 2003; en el grado quinto el promedio bajó de 50,05 puntos en el 2003 a 47,75 en el 2006, y en el grado noveno la caída fue de 4 puntos, con un promedio de 51,75 puntos.

Ahora bien, la prueba Saber 2009 permite evidenciar que a pesar del trascurso del tiempo se continúan presentando falencias en el área de matemática, pues los resultados muestran que "los estudiantes de grados Quinto y Noveno del Valle del Cauca, en su mayor porcentaje, aún no superan el nivel Mínimo de aprendizaje para las áreas de matemáticas, lenguaje y ciencias naturales" (CVE, s.f. p.7). El comportamiento anterior se evidencia particularmente en los resultados obtenidos en el área de matemáticas en la institución educativa seleccionada en esta investigación, donde el 38% de los estudiantes de grado quinto que presentaron la prueba, siendo este el mayor porcentaje, se ubica en el nivel mínimo de aprendizaje.

Lo anterior revela el bajo desempeño que tienen los estudiantes en el área de matemáticas, particularmente en el estudio de las transformaciones geométricas, porque a pesar que los resultados no especifiquen explícitamente las competencias que han desarrollado los estudiantes en relación a la transformación de simetría; se considera que los estudiantes presentan un bajo nivel de desempeño con relación a esta transformación. En consecuencia, sucede en muchas ocasiones que "en el aula no se desarrollan actividades en torno a las transformaciones de figuras bidimensionales en las matemáticas y en el arte" (ICFES, 2011, p. 76),

---

[3] Para las pruebas del 2002/2003 y 2005/2006 los puntajes promedio se establecieron en escalas de 0 a 100 puntos, mientras que los puntajes promedio en la prueba de 2009 fueron establecidos en escalas de 100 a 500 puntos.

viéndose reflejado en las pocas preguntas relacionadas con las transformaciones isométricas, en especial a la simetría axial.

Con base a lo anterior, es importante realizar un estudio sobre las transformaciones geométricas, que permita disminuir las dificultades presentes tanto en la enseñanza como en el aprendizaje de éstas, donde se busquen e integren nuevas estrategias de enseñanza de las matemáticas, en la cual se incluya la geometría activa, pues de esta manera puede darse respuesta efectiva a todas las necesidades que presenta el aprendizaje de nociones como la de simetría axial. Por esto, se propone el estudio de las transformaciones isométricas a través del modelo teórico de la ***complementariedad***[4] ***de artefactos***[5], como son las Tecnologías de la Información y la Comunicación (TIC) y el material físico.

Buscando el mejoramiento de la calidad de la educación, el Ministerio de Educación Nacional (en adelante MEN) propone la *Incorporación de Nuevas Tecnologías al Currículo de Matemáticas de la Educación Media* de *Colombia*, puesto que éstas sirven de *mediadores* en el aprendizaje de los estudiantes, haciéndolos participantes activos en la construcción de su propio conocimiento. De esta manera, un software de geometría dinámica como Cabri Geometry II Plus, permite que el estudiante manipule representaciones de objetos geométricos, como es el caso de dos figuras geométricas, donde una es construida como imagen de la otra por una simetría axial y así, puedan explorar las propiedades de dicha transformación. Del mismo modo, los materiales físicos se constituyen en elementos importantes en el aprendizaje de la geometría, pues no sólo

[4] Si bien no aparece un investigador que explique este término, en la investigación de Hoyos (2006) se entiende por *función complementaria* a las características que posee cierto artefacto que le permiten mejorar las de otro o aquellas que tiene un grupo de artefactos que hace posible enriquecerse mutuamente, donde cada artefacto posibilita la construcción de un conocimiento diferente.

[5] Se entiende *artefacto* como “un objeto material o abstracto que emplea un usuario para realizar cierto tipo de actividad, puede ser un objeto sin significado a menos que el usuario lo haya utilizado antes o haya visto cómo lo usan otros” (Rabardel, 1995; citado por Cedillo, 2006, p. 133). En este trabajo se entiende **artefacto** como un objeto material.

permiten incentivar la creatividad y la participación activa de los estudiantes, sino que pueden ser utilizados para generar ideas y desarrollar el pensamiento espacial, pues como lo afirma Arquímedes (s.f.; citado por Moreno, 2002a) los experimentos matemáticos permiten entender algunos resultados que luego pueden ser demostrados geométricamente. Así, resulta más fácil demostrar una situación que ya se ha comprendido, que intentar demostrarla sin tener ningún conocimiento previo. De esta manera, se evidencia que desde los griegos se han implementado artefactos para la comprensión de la geometría.

Debido a que, cada uno de estos artefactos destaca más algunas propiedades de los objetos geométricos que el otro, ellos son útiles y, en cierto modo, necesarios para la conceptualización del objeto matemático en estudio; pues como lo afirman Burgos et al. (2005)

> Mientras más variados sean los medios para el aprendizaje que emplee el profesor, mayores serán las posibilidades para que cada estudiante logre desarrollar las competencias necesarias para la adquisición de un contenido; además el uso de variados recursos de aprendizaje ayuda también al desarrollo de la memoria de los niños y niñas. (p.3)
>
> Ahora bien, el aprendizaje de la geometría mediante la ***complementariedad de artefactos*** no se produce de manera inmediata sino que es a través de la *Mediación Instrumental* cómo se modifican conceptos y comportamientos cuando se interactúa con los artefactos, los cuales a través del proceso de *Génesis Instrumental*[6] se convierten en instrumentos desde el punto de vista cognitivo, cuando permiten al sujeto hacer dos procesos: el de *ampliación*, que consiste en una mejor visualización de las características o las

[6] La génesis instrumental comprende dos procesos: la *instrumentalización*, donde el sujeto al usar el artefacto se apropia de sus propiedades iniciales, adaptándolo a sus necesidades y limitado a sus potencialidades, y la *instrumentación*, donde el sujeto construye esquemas mientras realiza un tipo de tarea. (Verillon & Rabardel, 1995; Trouche, 2000; citado por Cedillo, 2006).

> propiedades del objeto de estudio; en el cual el artefacto complementa el pensamiento del estudiante más no lo modifica, y el de *reorganización*, mediante el cual la nueva información y las nuevas comprensiones sobre el objeto de estudio, consecuencia del uso frecuente del artefacto, afectan el pensamiento matemático del estudiante, ocasionando que se convierta en instrumento (Moreno, 2002a).

De esta manera:

> Los instrumentos tienen un doble uso en el seno de las actividades educativas. En los alumnos, influyen profundamente en la construcción del conocimiento y los procesos de conceptualización. Para los profesores, pueden considerarse como variables sobre las cuales se actúa para la concepción y el control de las situaciones pedagógicas. (Rabardel, 1995; citado por Del Castillo & Montiel, s.f., p. 1674)

Es en el proceso de la génesis instrumental, donde los estudiantes desarrollan diversos esquemas para la utilización de un artefacto, lo cual les permite construir conocimiento matemático. Trouche (2000; citado por Cedillo, 2006) considera "un esquema como una organización mental estable, que incluye técnicas y los conceptos que las apoyan para usar un artefacto en una clase específica de tareas" (p. 134).

Retomando la línea de exposición, en los trabajos de grado y tesis relacionados con Transformaciones Isométricas presentes en la base de datos de la Universidad del Valle[7], se evidencian estudios sobre transformaciones en el plano y/o espacio que involucran la traslación, rotación y reflexión; y otras centradas específicamente en la transformación de rotación. En las primeras se encuentra una tesis de Guarnizo (1992) titulada *Reflexiones, Traslaciones y Transformaciones en el Plano y en el*

[7] En el apartado *Estado del Arte* se hace una revisión de otros trabajos relacionados directamente con la enseñanza de la simetría.

Espacio, y otra de la línea de investigación de etnomatemática, titulada *Transformaciones isométricas en las esculturas de San Agustín y su implementación en el aula con el uso de Cabri*, de Urbano (2009).

En los estudios centrados en rotación se encuentran trabajos de grado y tesis enfocadas en la implementación de secuencias didácticas utilizando un Software de Geometría Dinámica (en adelante SGD), como son:

- *Una secuencia didáctica en quinto de primaria para explorar la transformación de rotación integrando Cabri al aula*, de López y Santacruz (2004)

- *La transformación de rotación en el espacio: una propuesta de aula que integra el ambiente de geometría dinámica Cabri 3D*, de Álvarez y Fernández (2009)

- *Una secuencia didáctica alrededor de la rotación en cuarto grado de educación básica*, de Córdoba, Hazzi y Pineda (2009)

- *Una secuencia de situaciones didácticas alrededor de la transformación de rotación en un ambiente de geometría dinámica*, de Cuene y Campo (2011)

- *Gestión didáctica del profesor y emergencia del arrastre exploratorio en un AGD: El caso de la rotación en educación primaria*, de Santacruz (2011)

Como se puede observar, los estudios realizados hasta este momento no se centran exclusivamente en la transformación de simetría axial, ya que si bien en algunas sólo se trabaja rotación, en otras se indagan varias transformaciones isométricas, por lo que su estudio no es tan profundo como puede ser un trabajo cuyo enfoque sea únicamente la simetría axial. De ahí la importancia de realizar un estudio centrado en esta transformación, diseñando una secuencia didáctica que permita tanto a docentes como a estudiantes disminuir las dificultades que se presentan en la enseñanza y en el aprendizaje de las transformaciones isométricas, relacionadas con la simetría axial. Así, adoptando la importancia que Verillon y Rabardel (1995) le dan a los artefactos en el desarrollo del conocimiento, se propone en la secuencia didáctica la utilización de diversos artefactos, tales como materiales físicos (simetrizador, regla, lápiz y papel) y un SGD[8], los cuales podrían contribuir significativamente en la conceptualización de las propiedades de la simetría axial, pues como afirma Hoyos (2006) "es probable que el *software* y los pantógrafos hayan satisfecho funciones complementarias en el desarrollo del aprendizaje y la comprensión de las propiedades de las transformaciones geométricas" (p. 40).

En este caso, se hace necesario identificar el rol que cumple cada artefacto en el aprendizaje de la simetría axial, donde los materiales físicos desempeñan un papel importante en el aprendizaje de las matemáticas, en la medida que "ayudan a los niños a comprender tanto el significado de las ideas matemáticas como las aplicaciones de estas ideas a situaciones del mundo real"[9] (Batanero, Font & Godino, 2004, p. 127). Así, como la simetría axial puede verse en distintos elementos de la naturaleza, por ejemplo en el cuerpo humano, las mariposas, algunas flores, entre otros; la concepción de simetría no puede verse aislada del mundo real sino que sus orígenes vienen dados desde los griegos, quienes la usaron con fines artísticos como en la construcción de sus monumentos, decorados y pinturas, puesto que era relacionada con la belleza; de manera que buscaban una proporción adecuada entre las partes y el todo.

De este modo, las formas simétricas han ido introduciéndose a distintas áreas de conocimiento como la arquitectura, la matemática, las bellas artes, las ciencias naturales, entre otras, donde es común encontrar

[8] En este trabajo se habla de Software de Geometría Dinámica (SGD) para dar cuenta del software Cabri Geometry II Plus como un artefacto.

[9] Esta afirmación es entendida desde los materiales manipulativos, en los que están contenidos los materiales físicos, como el geoplano, tangram, ábacos, material multibase, dados, fichas, etc.

sujetos que las utilizan teniendo una intuición de simetría más no una concepción de sus propiedades matemáticas.

Ahora bien, los recursos tecnológicos como los SGD permiten manipular objetos abstractos, como son las figuras geométricas, e incluso otras figuras. Además, mediante el arrastre se pueden comprobar propiedades matemáticas como las de simetría axial, lo que lleva a establecer la visualización como un elemento importante dentro de los SGD.

No obstante, es importante tener presente que estos artefactos por sí mismos no generan conocimiento matemático, por lo que deben estar inmersos dentro de situaciones, en la que se planteen tareas que movilicen el pensamiento del estudiante y así, puedan ser reconocidos como herramientas útiles que favorecen el aprendizaje de la simetría axial.

Cabe anotar que en los trabajos de grado y tesis mencionados anteriormente no se ha trabajado la ***complementariedad de artefactos*** centrándose en el estudio de la simetría axial, ni tampoco se ha usado una máquina articulada como el *simetrizador* para la enseñanza de esta transformación.

A partir de las consideraciones anteriores, se plantean las siguientes hipótesis de trabajo:

1. Las TIC pueden interactuar con otros artefactos en el aula de clase, determinando integraciones productivas para el aprendizaje de las matemáticas.

2. La ***complementariedad de artefactos*** en un ambiente de aprendizaje[10] favorece la conceptualización de las propiedades de la simetría axial.

---

[10] "Un ambiente de aprendizaje es el lugar en donde confluyen estudiantes y docentes para interactuar psicológicamente con relación a ciertos contenidos, utilizando para ello métodos y técnicas previamente establecidos con la intención de adquirir conocimientos, desarrollar habilidades, actitudes y en general, incrementar algún tipo de capacidad o competencia" (González, 2008, sección Ambientes virtuales de aprendizaje, párr. 1).

Se intentará dar respuesta a la siguiente pregunta:

¿De qué manera la utilización de artefactos como el simetrizador y el software Cabri Geometry II Plus permite la conceptualización de las propiedades de la simetría axial en niños de tercero de básica primaria?

Es importante decir que, en este trabajo se toma como referente principal la investigación de Hoyos (2006), quien realizó un estudio sobre homotecia e isometrías (excepto la rotación), mediante la incorporación de un *software* de geometría dinámica (*Cabri Geometry II*), y un conjunto de pantógrafos con configuraciones geométricas distintas. Esta investigación evidencia que es posible realizar un trabajo en relación a la ***complementariedad de artefactos*** para estudiar la simetría axial; de ahí que el presente trabajo se lleve a cabo mediante la utilización de un software de geometría dinámica como Cabri Geometry II Plus y materiales físicos como un simetrizador, una regla, lápiz y papel.

1.2 Estado del Arte

Se considera necesario separar *el estado del arte* de la *contextualización y planteamiento del problema*, pues a pesar de que en este último ya se había hecho mención a algunas investigaciones relacionadas con las transformaciones isométricas, es pertinente dar a conocer más detalladamente algunas de éstas, ya que están directamente relacionadas con el objetivo de esta investigación.

Las transformaciones isométricas han sido un referente de investigación en la educación matemática, no sólo en Colombia sino en varios países, debido a la importancia que estás tienen en el aprendizaje de la geometría, puesto que contribuyen al desarrollo del pensamiento espacial de los estudiantes.

Sin embargo, debido a las deficiencias que se presentan en la enseñanza de la geometría, los estudiantes tienen dificultades para realizar transformaciones isométricas, ya que si los profesores se basan en los libros de texto como principal fuente en la implementación del currículo, éstos tendrían la responsabilidad del conocimiento que adquieren los estudiantes, pero en algunos textos escolares como menciona Obando (2008), la tecnología asociada a las tareas está enfocada a la aplicación de la definición de las isometrías, lo que evidencia que la enseñanza de las transformaciones en algunos textos escolares se limita a la enseñanza y aplicación de una definición.

Por esto, las siguientes investigaciones buscan contribuir en la enseñanza de las transformaciones isométricas, mediante la propuesta de unidades de enseñanza o secuencias didácticas, que al implementarse en la clase de geometría permiten un dominio de las propiedades de las transformaciones isométricas. Así, durante la revisión de estas investigaciones, se pueden identificar tres categorías, dependiendo de los artefactos que utilizan:

- ***Primera categoría:*** las que hacen uso de TIC.
- ***Segunda categoría:*** las que hacen uso de material físico.
- ***Tercera categoría:*** las que hacen uso de TIC y material físico.

En la ***primera categoría***, se presentan investigaciones que proponen secuencias didácticas en un SGD; la primera enfocada en la adquisición del concepto de simetría axial y la segunda, además de la simetría axial, busca conceptualizar la transformación de traslación.

De este modo, Socorro (2005) en su tesis de Maestría en Educación, *“Simetria axial: uma seqüência didática para alunos da 6ª série com o uso de* *software de geometria dinámica"*, propone investigar los efectos de una secuencia didáctica en el aprendizaje del concepto de reflexión axial; basándose en la pregunta: ¿Cómo es la construcción del concepto de simetría axial por los alumnos de 6 º grado en la escuela primaria, cuando se utiliza una secuencia didáctica utilizando un software de geométrica dinámica?

Para responder a esta pregunta, la secuencia didáctica fue aplicada a trece (13) estudiantes de dicho grado con edades comprendidas entre once (11) y doce (12) años, matriculados en una escuela pública de Arcoverde, municipio en Pernambuco – Brasil[11]. Para su realización se basó en una adaptación del marco teórico de Artigue (1992; citado por Socorro, 2005) sobre la metodología de la *Ingeniería Didáctica*.

Antes de elaborar la secuencia didáctica, se analizaron libros de texto de 5º a 8º grado, comparando los de Brasil con los de Estados Unidos y Francia, al igual que sus Parámetros Curriculares Nacionales (PCN), con el objetivo de identificar las barreras que se presentan en el desarrollo del concepto de simetría axial.

La aplicación de la secuencia didáctica fue realizada en un SGD, como Cabri Geometry II Plus, el cual cuenta con dos características importantes, que sirvieron a ese estudio, como son la visualización de la que habla Laborde (1998; citado por Socorro, 2005) y el arrastre, visto desde Hölzl (1996; citado por Socorro, 2005). Además, para este estudio se utilizó los siguientes materiales: papel para la preparación de documentos relativos a las actividades de la pre-test y actividades de cada período de sesiones de la secuencia de enseñanza; kit con lápices y una regla para llevar a cabo actividades destinadas a pre test y post test; cámara de vídeo y grabadora con el fin de obtener datos sobre determinadas actividades de la secuencia didáctica y computadores equipados con software de Geometría Dinámica.

---

[11] La elección de esta institución pública se debe al hecho de que la escuela tiene un laboratorio de informática y que la investigadora tiene acceso a las escuelas públicas del municipio.

Por último, de esta investigación se pudo concluir que en los casos en que la figura era conexa, los alumnos construyeron la reflexión con facilidad, pero las construcciones que envolvían figuras conexas que cortaban el eje fueron caracterizadas como difíciles, por lo que resultaron un gran número de preguntas en blanco.

Además, se observó que hay mayor dificultad en la identificación del reflejo de un punto localizado en el eje de simetría y en el reconocimiento de la inexistencia de eje de figuras conexas.

En cuanto al desarrollo de los estudiantes en la secuencia de enseñanza se observó que evolucionaron en su caracterización de los puntos, figuras originales y sus reflexiones, el eje de simetría, las relaciones entre ellos, la identificación de las propiedades de la equidistancia, la congruencia entre los lados y los ángulos, la correspondencia ortogonal entre los puntos inicial y los reflejos. También se observó, que los efectos dinámicos de Cabri Geometry II Plus favorecen la identificación de las propiedades geométricas de la simetría axial, gracias a la posibilidad de arrastrar en la pantalla, permitiendo que se mantengan intactas las conexiones matemáticas y el control de dibujos por los alumnos.

Por otra parte, Monroy y Rueda (2009) en su trabajo de grado *"Conceptualización de la simetría axial y la traslación con la mediación del programa Cabri Geometry II"*, se proponen responder a la pregunta ¿Podemos lograr que los estudiantes de cuarto grado de primaria del Colegio Liceo Patria conceptualicen la simetría axial y la traslación mediante el uso del programa Cabri Geometry? Para ello, realizan una investigación siguiendo la metodología de la *ingeniería didáctica*, la cual es llevada a cabo con cuatro (4) alumnos del grado cuarto de primaria, divididos en dos grupos, donde cada uno disponía de un computador con el programa Cabri Geometry II. Se aplicaron trece (13) actividades, siete (7) correspondían al aprendizaje de la simetría axial y seis (6) al aprendizaje de la traslación.

Las actividades están guiadas bajo la Teoría de Situaciones Didácticas de Brousseau (1986; citado por Monroy & Rueda, 2009), por lo que se proponen situaciones de acción, de formulación y de demostración, donde los estudiantes deben formular estrategias de solución haciendo uso del programa Cabri Geometry II, el cual bajo esta teoría es considerado como el *medio* que devuelve los resultados de las *acciones* que realizan los estudiantes.

Con estas situaciones se busca que los estudiantes se acerquen al concepto y a las propiedades de la simetría axial y la traslación. Para esto, no es necesario que los estudiantes tengan conocimientos sobre el manejo del programa Cabri Geometry II, ya que las actividades se realizan mediante el arrastre, lo que permite identificar los fenómenos visuales que caracterizan las figuras simétricas y figuras trasladadas en la pantalla del computador.

Con esta investigación se pudo ver que con el programa Cabri Geometry II es posible llegar al concepto y a las propiedades de la simetría axial y la traslación, e incluso hacer comparaciones entre éstas; como producto de la asimilación de los fenómenos visuales asociados a las transformaciones, lo cual le permite a los estudiantes en la fase de institucionalización comprender los conceptos teóricos, ya que se han desarrollan en un contexto familiar a ellos; como los huevos, la flor y la corona.

Por otro lado, se evidenció que a los alumnos de cuarto grado de primaria se les dificulta pasar del lenguaje común al lenguaje formal correspondiente a la simetría axial y la traslación.

En la ***segunda categoría***, se presentan investigaciones que proponen una unidad de enseñanza donde se hace uso de materiales físicos. La primera se basa en la implementación de un modelo para la enseñanza de las isometrías del plano y, la segunda busca identificar los efectos de la simetría axial en la conceptualización de isometrías del plano.

Así, la tesis doctoral de Jaime (1993), "*Aportaciones a la interpretación y aplicación del modelo de Van Hiele: La enseñanza de las isometrías del plano. La evaluación del nivel de razonamiento*", alude a una experimentación realizada con estudiantes de los cursos 1º a 8º de E.G.B.[12], B.U.P.[13] y estudiantes de la Escuela de Magisterio; donde se aplica una propuesta, basada en el Modelo de Van Hiele[14], para mejorar la enseñanza de las Isometrías del Plano, en la educación primaria y secundaria. Este modelo abarca dos aspectos: uno *descriptivo*, en donde se identifican formas de razonamiento geométrico de los estudiantes y se valora su progreso; y uno *instructivo*, que orienta la labor del docente, para colaborar en el avance del nivel de razonamiento geométrico de los estudiantes.

Volviendo a la experimentación, se realizaron secciones que duraron entre cuarenta y cinco (45) y sesenta (60) minutos para los estudiantes de E.G.B y entre una (1) y tres (3) horas para las alumnas de Magisterio, las cuales se desarrollaron en el laboratorio del Departamento de Didáctica de la Matemática, por fuera de las horas de clase, y la recolección de los datos se obtuvieron a través de filmaciones, test (oral o escrito) de respuesta libre y

[12] La **Educación General Básica** (EGB) es el nombre que recibe el ciclo de estudios primarios obligatorios en varios países (Argentina, Chile y Costa Rica). En algunos, como España, se trata de un sistema educativo antiguo que ya ha sido sustituido por otros.
Según la Ley General de Educación de 1970, la Educación General Básica consistía en 8 cursos de escolarización obligatoria divididos en tres ciclos: *Ciclo inicial*: 1º y 2º de EGB, C*iclo medio*: 3º, 4º y 5º de EGB, *Ciclo superior*: 6º, 7º y 8º de EGB. No obstante, también se hablaba de dos etapas: *Primera etapa*: 1º, 2º,3º, 4º y 5º de EGB, *segunda etapa*: 6º, 7º y 8º de EGB.

[13] El **Bachillerato Unificado Polivalente** (**B.U.P.**) era una enseñanza en España perteneciente a la Ley General de Educación de 1970 y constaba de tres cursos: 1º de BUP, que corresponde al actual 3º de educación secundaria de la Ley Orgánica de Ordenación General del Sistema Educativo de España (LOGSE); 2º de BUP, que corresponde al actual 4º de educación secundaria LOGSE; 3º de BUP, que corresponde al actual 1º de bachillerato LOGSE.

[14] El Modelo de Van Hiele considera que los estudiantes aprenden geometría pasando por cinco *niveles de razonamiento* que deben ser secuenciales, donde los conceptos geométricos son interpretados, definidos y clasificados de diferentes maneras en cada nivel. Del mismo modo, considera cinco *fases de aprendizaje* que deben tener presente el profesor, para promover el razonamiento matemático de los estudiantes, a través de actividades y problemas específicos en cada fase.

actividades presentadas en hojas de papel, que posteriormente se analizaron. Para la realización de las actividades los estudiantes requerían: figuras de papel, hojas de papel, regla, escuadra, compás, transportador, un disco de plástico transparente de aproximadamente 15 cm de diámetro, un mira y un espejo, ambos de 10x15 cm, entre otros.

Uno de los principales aportes de esta investigación a la enseñanza de Geometría, fue el diseño de una unidad de enseñanza de las Isometrías del Plano, basada en el Modelo de Van Hiele, el cual permitió ver la relación entre las diferentes Isometrías durante su enseñanza, al mismo tiempo que brindó unas bases para construir y entender las estructuras algebraicas del conjunto de las Isometrías del Plano.

Por otra parte, la tesis doctoral de Bulf (2008), "E*tude des effets de la symetrie axiale sur la conceptualisation des isometries planes et sur la nature du travail geometrique au college"* es una investigación en torno a un estudio didáctico de los efectos de la simetría axial en la conceptualización de isometrías del plano; por lo que, su problemática se centra en el papel que desempeña la simetría axial en el aprendizaje de otras transformaciones del plano tales como la simetría central y la rotación.

Este estudio se basa en la teoría de campos conceptuales de Vergnaud (1991; citado por Bulf, 2008), para analizar el comportamiento del estudiante en una situación dada y también en la teoría de Espacios de Trabajo Geométrico (ETG) de Houdement y Kuzniak (2006; citado por Bulf, 2008), para describir el trabajo del estudiante, desde un punto de vista geométrico.

A través de este trabajo se busca responder a las preguntas: ¿La simetría axial controla la organización y las inferencias de otras transformaciones del plano en la construcción del ETG personal del estudiante? En caso afirmativo, ¿cómo?; ¿Cómo el ETG personal evoluciona con la enseñanza de otras transformaciones del plano?; ¿Cuáles ETG (adecuados) son desarrollados en clase? y ¿Cuál es la distancia entre estos ETG adecuados y los ETG personales que los estudiantes van a desarrollar con el tiempo?; ¿Cuál es el papel desempeñado por la simetría axial en el tratamiento de la figura, en la aplicación de la ETG personal del estudiante?

Para responder a estas preguntas, la investigación se desarrolla en cuatro momentos: primero, se realiza un cuestionario a albañiles y carpinteros, en su taller, en una situación de comunicación, reconocimiento y reconstrucción de patrones simétricos; segundo, se realiza una primera encuesta a diez estudiantes de grado tercero, que servirá para desarrollar un experimento más amplio dirigido a alumnos de 5° y 3°; tercero, se realiza una segunda encuesta a estudiantes de 5° y 3°, con el fin de estudiar su ETG personal cuando están en la misma situación; por último, se realizan una serie de observaciones, la simetría axial en 6°, la simetría central en 5° y la rotación en 3°; estas con el fin de explicar los resultados obtenidos en el segundo cuestionario.

Por último, este estudio permitió observar que distintas poblaciones, como estudiantes y artesanos, pueden adaptarse de formas comunes al concepto de simetría. De ahí que, se constituya la simetría axial como un concepto organizador de la conducción de la conducta de estas dos poblaciones, sin embargo, de manera muy distinta.

En algunos casos observados en 5°, evidencian que la simetría axial aparece como un obstáculo, porque se refiere a los esquemas cognitivos disponibles pero no válidos.

Por último, en la ***tercera categoría*** se presentan dos investigaciones que vinculan la utilización de tecnología computacional y materiales físicos. La primera es la tesis doctoral de Quintana (1996), "*Anàlisi del tractament de la geometria al currículum de l'educació primària. Una proposta didàctica i un estudi de cas sobre les transformacions geomètriques*"; ésta se originó por la preocupación de la enseñanza de la geometría en la educación primaria y en concreto, las transformaciones geométricas, puesto que el estudio de estas y de las invariantes que generan, puede convertirse en el eje principal del aprendizaje escolar de la geometría. Así, en este trabajo se sintetizan tanto investigaciones realizadas en grupos de clase de primaria, como las propias experiencias del autor, en formación del profesorado y en la elaboración de materiales curriculares.

Esta tesis se ha realizado con el objetivo de analizar la problemática de la enseñanza de las transformaciones isométricas en la etapa escolar, teniendo en cuenta la situación, los planteamientos, las tendencias y las investigaciones existentes sobre el tema, presentando una Unidad de Programación original para la enseñanza y el aprendizaje de las isometrías en el ciclo superior de la educación primaria, fundamentada en el modelo constructivista, que es a la vez una revisión crítica de los conocimientos previos informales y de las intuiciones personales del alumnado, una clausura de procesos escolares anteriores, y un paso más en su conocimiento, conceptualización y apropiación.

En ella, se ha concretado tanto la secuenciación de contenidos en el marco de la educación primaria, como los contenidos procedimentales, conceptuales y actitudinales, los objetivos didácticos y las actividades de la propia Unidad de Programación. Asimismo se han explicitado los *materiales estándares*, entre los cuales están: regla, escuadra, compás, papel vegetal, papel carbón, papel cuadriculado, tijeras, etc.; los *materiales propios*, como son la pieza cuadrada, la brújula solar, dieciocho polígonos recortables, diez figuras recortables, el juego *Transjoc*, con el tablero, las fichas y el dado; los *informáticos*, entre los que se han destacado el Logo y el Cabri Geometry como programas más idóneos para la visualización, la manipulación y la trasformación de figuras, y los *videográficos*, presentando el vídeo Alicia en el país de las trasformaciones geométricas.

Se concluye que las transformaciones geométricas se asocian a fenómenos de la naturaleza y a acciones cotidianas o extraordinarias, generalmente ligadas a los cambios de estado y al paso del tiempo. La adquisición de estos conceptos depende de la construcción de los conocimientos que los alumnos van realizando y del sentido y los significados que les dan; lo que pueden ir desarrollando mediante la utilización de materiales elaborados expresamente por el propio profesorado o provenientes de entornos cotidianos, así como el uso de videogramas y de software, que favorecen una actitud positiva para el aprendizaje.

Por otra parte, Hoyos (2006) en su tesis *Funciones complementarias de los artefactos en el aprendizaje de las transformaciones geométricas en la escuela secundaria*, busca contribuir en una línea de investigación que agrupa la utilización de nuevas tecnologías y la introducción de contextos históricos en la búsqueda de contextos escolares que sean significativos para el aprendizaje de las matemáticas. Para esto, realiza un estudio exploratorio con dieciocho (18) estudiantes del grado noveno, con edades entre catorce (14) y quince (15) años, en una escuela pública en México, a los cuales les aplicó varias secuencias de trabajo que se instrumentaron en diez sesiones de cincuenta (50) minutos, en torno al estudio de la homotecia y de las isometrías (excepto la rotación), mediante la incorporación de un *software* de geometría dinámica, como Cabri Geometry II, y un conjunto de pantógrafos con configuraciones geométricas distintas. Así, en las dos primeras sesiones se realizó una exploración general de los comandos básicos del *software* y se habló de las posibilidades de «arrastrar» (*drag*) o manipular directamente tales objetos; en la tercera y cuarta sesiones se abordó el estudio de la homotecia con Cabri Geometry II; en las sesiones quinta y sexta se abordaron la simetría, la reflexión y la traslación; en las sesiones séptima y octava se trabajó con los pantógrafos o máquinas articuladas; y por último, en la novena y la décima, se planteó a los estudiantes problemas tomados de un *Libro para el Maestro* de Alarcón, Bonilla, Nava, Rojano y Quintero (1994).

De este estudio exploratorio se observó que todos los participantes desarrollaron procesos de intuición en torno a las transformaciones geométricas por medio de la exploración de un *software* de geometría dinámica que en este caso fue Cabri Geometry II, y objetivación de las propiedades matemáticas en juego por medio del uso de máquinas articuladas o pantógrafos. Estos artefactos favorecieron el desarrollo del aprendizaje y la comprensión de las propiedades de las transformaciones geométricas.

Las investigaciones expuestas anteriormente revelan que existen diferentes artefactos que se pueden utilizar para la enseñanza de las transformaciones isométricas, las cuales se pueden agrupar en: *materiales físicos*, como lápiz, papel, mira[15], espejo, regla, compás, juego *Transjoc,* pantógrafo, entre otros y las *TIC*, como Cabri Geometry, Logo, el vídeo de Alicia en el país de las trasformaciones geométricas.

Justo es decir que en algunas de estas investigaciones se privilegia un *artefacto* pero en otras se hace uso de la *complementariedad* entre éstos para trabajar cierta transformación isométrica, encontrando que el uso de software y materiales físicos (cotidianos y elaborados por docentes), favorecen una actitud positiva para el aprendizaje y la comprensión de las propiedades de las transformaciones geométricas.

1.3 Objetivos

1.3.1 *Objetivo general*

Analizar el papel de la ***complementariedad*** de diferentes artefactos en la conceptualización de las propiedades de la simetría axial en niños de tercero de básica primaria.

[15] La mira es un rectángulo de plástico semitransparente, que actúa como un espejo pero al mismo tiempo permite ver a través de él.

1.3.2 *Objetivos específicos*

- Determinar algunos aspectos del desarrollo histórico-epistemológico de la simetría axial y algunos de los errores, obstáculos y dificultades implicados en su enseñanza y aprendizaje.

- Caracterizar el diseño de una secuencia didáctica que integre el software Cabri Geometry II Plus en ***complementariedad*** con otros artefactos.

- Gestionar la secuencia didáctica diseñada y estudiar el rol de la complementariedad en la comprensión y el reconocimiento de las propiedades de la simetría axial.

CAPÍTULO II

ANÁLISIS PRELIMINARES

En este capítulo se desarrolla la primera fase de la *ingeniería didáctica* denominada análisis preliminares, en la que se encuentra la dimensión histórica y epistemológica, la dimensión cognitiva y la dimensión didáctica, siendo transversal en cada una de ellas el papel de los artefactos en la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas.

En la *dimensión epistemológica* se tiene en cuenta el uso de artefactos en diferentes épocas de la historia, aplicados tanto en el arte como en la solución de problemas geométricos; lo cual permite reconocer que los artefactos han sido utilizados desde la antigüedad y se han ido incorporando en el aula de clase.

Además, esta aproximación histórica sobre el uso de algunos artefactos revela la existencia del simetrizador, una máquina articulada con la cual es posible estudiar la simetría axial.

En la *dimensión cognitiva* se reconoce la importancia de la utilización de artefactos en el aprendizaje de los estudiantes, como los artefactos influyen en el desarrollo cognitivo de los estudiantes, pasando de ser artefactos a convertirse en instrumentos.

En la *dimensión didáctica* se destaca la Teoría de Situaciones Didácticas (en adelante TSD), donde los artefactos actúan como componentes del *medio*, generando conocimiento en la interacción de éstos con el sujeto.

2.1 Ingeniería Didáctica

Para el desarrollo de este trabajo se utiliza la metodología de investigación de la *ingeniería didáctica*, la cual según Artigue (1995) se caracteriza por "un esquema experimental basado en las "realizaciones didácticas" en clase, es decir, sobre la concepción, realización, observación y análisis de secuencias de enseñanza" (p. 36). Cabe anotar que existen dos niveles de *ingeniería didáctica*: el de la *micro-ingeniería* y el de la *macro-ingeniería*, pero para esta investigación se utiliza la metodología a nivel micro, en la cual se tiene como objetivo el estudio de un determinado tema, en este caso el de las propiedades de la simetría axial, partiendo de las posibles dificultades que se presentan en el aula alrededor de él.

El proceso experimental de la *ingeniería didáctica* consta de cuatro fases:

- **Primera fase:** análisis preliminares.
- **Segunda fase:** concepción y análisis *a priori* de las situaciones didácticas.
- **Tercera fase:** experimentación.
- **Cuarta fase:** análisis *a posteriori* y evaluación.

En los *análisis preliminares* se examinan tres dimensiones: La *dimensión epistemológica*, en la cual se indaga la evolución de las transformaciones geométricas y la utilización de artefactos para resolver problemas geométricos a lo largo de la historia; la *dimensión cognitiva*, en la que se retoman investigaciones sobre los errores, obstáculos y dificultades que han presentado los estudiantes en la enseñanza y el aprendizaje de la simetría axial y la *dimensión didáctica*, en la que se indaga la TSD y el papel de la *complementariedad de artefactos* en el aprendizaje de los estudiantes.

En la c*oncepción y análisis a priori de las situaciones didácticas* se diseña la secuencia didáctica, especificando de qué tipo son las situaciones que se trabajan y cuál es el objetivo de cada una; se establece la forma como estará organizada cada situación que compone la secuencia. Del mismo modo, se analizan las posibles estrategias de solución que los estudiantes utilizaran para resolver las tareas y, los posibles *errores*, *dificultades* u *obstáculos* que se puedan presentar en el desarrollo de cada una. Además se hará explícito las posibles intervenciones del docente y actos de devolución durante el desarrollo de la secuencia didáctica.

En la *experimentación* se llevará a cabo la implementación de la secuencia didáctica a estudiantes de tercer grado de básica primaria, explicitando las condiciones de realización de la secuencia y estableciendo el contrato didáctico. Además se hará recolección de datos mediante registros fílmicos, fotografía y las hojas de trabajo de los estudiantes, que serán analizados en el análisis *a posteriori*.

En el *Análisis a posteriori y evaluación* se retoman los datos recogidos durante la experimentación y se analizan si ocurrieron los hechos previstos en el análisis *a priori* y otros que no fueron tomados en cuenta pero que pueden ser de utilidad para mejorar la secuencia didáctica. Además, se confrontan los planteamientos expuestos en el análisis *a priori* y en el análisis *a posteriori*, con el fin de validar o refutar las hipótesis que se plantearon al inicio de la investigación.

2.2 Dimensión Epistemológica

2.2.1 Aproximación *histórica de las transformaciones geométricas*

La geometría es una de las ciencias más antiguas que ha estado presente en diversos períodos de la historia, como se muestra en la Figura 2.

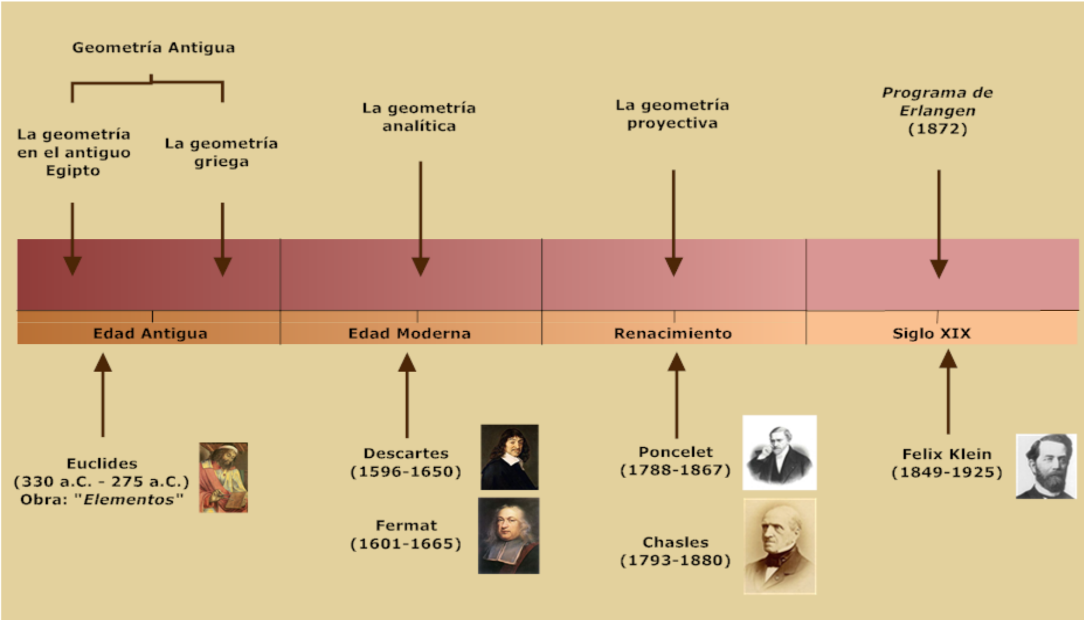


Figura 2. Algunos momentos históricos de las geometrías

La geometría tuvo su origen en Egipto, donde la consideraban una herramienta práctica para medir áreas cuando el rio Nilo era desbordado, causando la necesidad de trazar nuevamente los límites del terreno que era cultivado por los agricultores. En concordancia con esto, Proclo (s.f.; citado por Filloy, 1998) considera que:

> La Geometría fue primeramente descubierta en Egipto, teniendo su origen en la medición de áreas, ya que ésta era una necesidad para los egipcios, debido a que el Nilo, al desbordarse, barría con las señales que indicaban los límites en los terrenos de cada quien. (p. 1)

Del mismo modo, a la necesidad de medir se aumentó la necesidad de usar figuras para hacer construcciones, esculturas y representaciones gráficas; por lo que la geometría no solo se aplicaba para solucionar problemas de la vida diaria, sino que también era aplicada en creaciones artísticas (Alsina, Fortuny & Pérez, 1992).

De allí que, todas las creaciones artísticas de diferentes culturas sean un medio para plasmar, trasmitir sentimientos, costumbres y hasta conocimientos matemáticos.

En este sentido, Bishop (1999) menciona que existen seis actividades que se dan en todas las culturas, las cuales son: *contar*, *localizar*, *medir*, *diseñar*, *jugar* y *explicar*. Éstas estimulan diversos procesos cognitivos, lo que hace que sean importantes para el desarrollo de las ideas matemáticas en cualquier cultura.

Respecto a la actividad de "diseñar", Bishop (1999) indica que "se refieren a la tecnología, los artefactos y los objetos «manufacturados» que todas las culturas crean para su vida doméstica, para el comercio, como adorno, para la guerra, para jugar y con fines religiosos" (p. 60). El diseño es importante dentro de la educación matemática, ya que permite desarrollar la idea de plano, estructura, formas imaginadas, relaciones espaciales percibidas entre el objeto y el propósito, las formas abstractas y el proceso de abstracción; de manera general, "la *idea* de forma o figura se desarrolla con el diseño y la representación" (Bishop, 1999, p. 62).

El diseño está profundamente ligado a las creaciones artísticas de las diferentes culturas, un ejemplo en Colombia es la cultura de San Agustín[16], donde es posible observar que "la mayoría de sus esculturas obedecen a una diversidad de diseños que pretenden representar y abstraer diversos fenómenos de su entorno los cuales sufren variaciones al momento de representarlos tratando de magnificar los elementos que quieren resaltar en esta expresión" (Urbano, 2009, p. 25). De acuerdo con Urbano (2009), la mayoría de sus esculturas pertenecen a un ritual funerario realizado a sus dioses como el sol, la luna, el agua y animales de su entorno. En estas esculturas se destaca el uso de figuras geométricas como polígonos regulares, rectángulos, circunferencias; pero también se evidencia el manejo

[16] "El pueblo escultor, que hoy conocemos como cultura de San Agustín, estuvo ubicado en las estribaciones del macizo colombiano al sur del departamento del Huila Colombia, entre los siglos II a.C y VIII d.C." (Urbano, 2009, p. 26).

de transformaciones isométricas; tal es el caso de la escultura *dios de la agricultura bosque de las estatuas*[17] (ver Figura 3), donde se verifica el uso de simetría axial.

Figura 3. Escultura del dios de la agricultura
Fuente: Urbano (2009, p. 56).

Urbano (2009) lo expone de la siguiente manera:

> Siguiendo los parámetros se define S, T, M, se resaltan los detalles que forman la escultura los ojos U, las barras V, Y, las manos X y el contorno de la escultura W al aplicar simetrías axial a cada uno de estas superficies las imágenes se hacen corresponder de forma precisa con los elementos de la escultura quedando definida toda la escultura a través de la trasformación geométrica. (p. 57)

[17] Recibe este nombre por las herramientas que tiene en sus manos, que son las barras con las cuales plantaban las semillas en la tierra (Urbano, 2009, p. 56).

Pero ésta no es la única escultura del parque arqueológico de San Agustín donde se evidencia la transformación de simetría, según el estudio de Urbano (2009) en las veintitrés (23) esculturas investigadas estaba plasmada la transformación de simetría axial, "de forma general en 15 esculturas y parcialmente en 7, en las que se genera un nuevo eje de simetría que funciona para los detalles del rostro, mientras el eje general se aplica para el contorno de la escultura y las extremidades" (p. 67).

Ahora bien, la existencia de un patrón de medida y de elementos e instrumentos para la construcción de figuras geométricas permitió a los escultores de San Agustín diseñar y plasmar su conocimiento sobre figuras geométricas (circunferencias, elipses, triángulos equiláteros, hexágonos, etc.) y transformaciones isométricas (ejes de simetría, traslaciones y rotaciones), creando esculturas con proporción armónica y precisión en sus trazos (Urbano, 2009).

En cuanto a otras culturas, la matemática que se originó en Egipto fue heredada por los griegos al establecerse en Asia Menor, conocida como la Grecia moderna, y en otros territorios que favorecieron su contacto comercial y cultural con los egipcios, de manera que muchos viajaron a Egipto y allí aprendieron su geometría (Klein, 1992).

En Grecia, la geometría se estableció como una rama importante de la matemática, que fue creciendo en diferentes momentos, en donde se puede ver a Euclides (~ 325 a. C. - ~ 263 a. C.), Arquímedes (287 a. C. - 212 a. C.), Apolonio (262 a. C. - 190 a. C) y Pappus (350 a. C. – 290 a. C.) como grandes personajes que contribuyeron al desarrollo de la geometría en la antigüedad.

Así, Euclides realiza un aporte significativo por medio de su libro los *Elementos*[18], los cuales fueron "la primera axiomatización en la historia de las matemáticas" (Piaget & García, 1982, p. 89). Es importante resaltar que

[18] Los *Elementos* constan de trece libros, cuyos contenidos se distribuyen de la siguiente manera: los Libros I al IV tratan sobre geometría plana, los libros V al X tratan sobre razones y proporciones, los libros XI al XIII tratan sobre geometría de sólidos.

en los *Elementos* “se privilegian las transformaciones rígidas (que clasifican a las figuras por superposición) y se usa un lenguaje sintético al margen del cálculo efectivo aritmético” (Alsina, Fortuny & Pérez, 1992, p. 34). En este sentido, Euclides no maneja la noción de transformación, sino que implícitamente establece la relación de igualdad entre dos figuras mediante la *superposición* de las mismas. Esta superposición apoyada en la séptima noción común, donde se menciona: “Y las cosas que coinciden entre sí son iguales entre sí” (Euclides, 1991, p. 201), permite relacionar dos figuras mediante la igualdad; por lo tanto, se puede afirmar que estas figuras tienen la misma forma o los lados de igual longitud, lo cual es característico de figuras originadas mediante una simetría.

Euclides resuelve problemas utilizando representaciones gráficas realizadas con regla y compás; este último permitía “trazar una circunferencia dados un centro y un punto sobre la circunferencia, pero al levantarlo el compás «se cierra», es decir no permite transportar longitudes directamente” (“Geometría Euclídea Plana”, 2010, p. 2). Por otra parte,

> La regla tiene longitud infinita, no tiene marcas que permitan medir o trasladar distancias y tiene sólo un borde. Puede usarse solamente para trazar un segmento de recta entre dos puntos ya dados o para prolongar un segmento dado todo lo que queramos. (“Construcciones con regla y compás (I): Introducción y primeras construcciones”, 2007, sección Introducción, párr. 1)

En este sentido, en Grecia utilizaron distintos artefactos para construir las figuras que imaginaban, destacándose los mencionados anteriormente; de manera que, “una construcción se consideraba mucho más elegante si sólo necesitaba de [ellos] para su realización” (Pan, 2005, p. 30).

Es importante resaltar que la obra de Euclides tuvo trascendencia en las construcciones artísticas del Renacimiento, pues a partir de la definición 3 del libro VI de los Elementos[19] se estableció el número áureo[20].

La sección áurea fue utilizada en diferentes ocasiones (pintura, escultura, arquitectura) para lograr equilibrio y belleza. De este modo, Leonardo Da Vinci (1452- 1519) la emplea en su pintura *La última cena* (ver Figura 4) para dar proporción a cada uno de sus elementos, tal como las dimensiones de la mesa, la disposición de Cristo, la posición de los discípulos, las ventanas al fondo y las paredes.

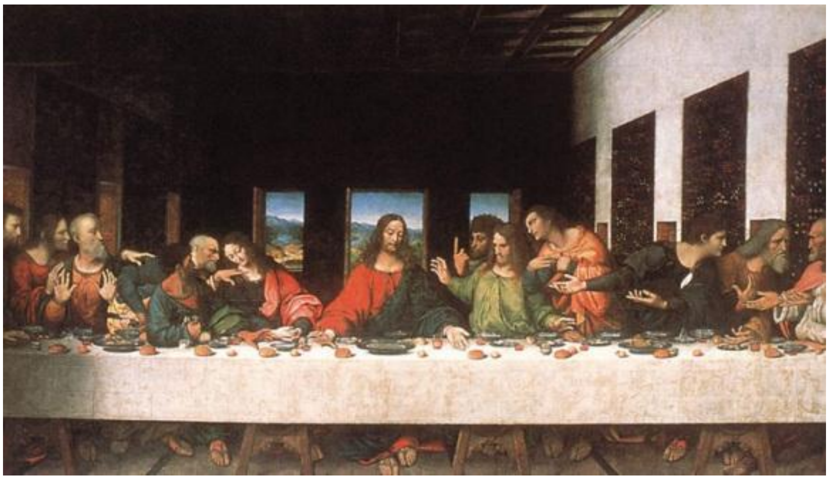


Figura 4. La última cena de Leonardo Da Vinci

Fuente: La última cena (2009).

Por otra parte, en 1525, Alberto Durero (1471-1528) publicó un libro sobre geometría titulado *Underweysung der Messung mid dem Zyrkel und Rychtscheyd* (Instrucción en la medida con regla y compás), en la que indica

[19] "Se dice que una recta ha sido cortada en extrema y media razón cuando la recta entera es al segmento mayor como el segmento mayor es al menor" (Euclides, 1994, p. 56).

[20] El **número áureo** es también llamado número de oro, número dorado, media áurea, proporción áurea y divina proporción. Se representa con la letra griega φ (fi). Es el número irracional:

$$\varphi = \frac{1+\sqrt{5}}{2} \approx 1{,}6180339887498948482045868343656 38\ldots$$ (El número áureo, s.f., p. 3).

el procedimiento para construir espirales (ver Figura 5) basadas en la sección áurea, utilizando regla y compás[21]. Según Kline (1972) esta obra ayudó a los artistas con la perspectiva.

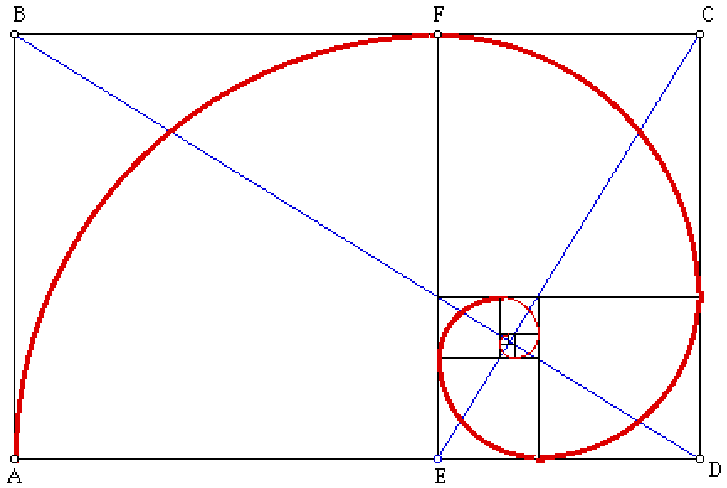


Figura 5. La Espiral de Durero

Fuente: Molinero (2009).

A Durero debemos la creación de uno de los primeros compases de proporción áurea, que es utilizado en su obra sobre la proporción del cuerpo humano (ver Figura 6), donde muestra la mitad de los tres extremos (cabeza - dedos - pie), que siempre dividen la distancia entre los dos bordes de acuerdo con las proporciones de la sección de oro. En consecuencia, si ponemos los dos brazos extendidos junto a las piernas de la figura y la parte superior de su cabeza, respectivamente, el punto medio suele estar en el ombligo de la persona (Darvas, 2007).

[21] En el renacimiento el compás que se utilizaba era un compás rígido, el cual era un instrumento que permitía trazar circunferencias de un único radio prefijado.

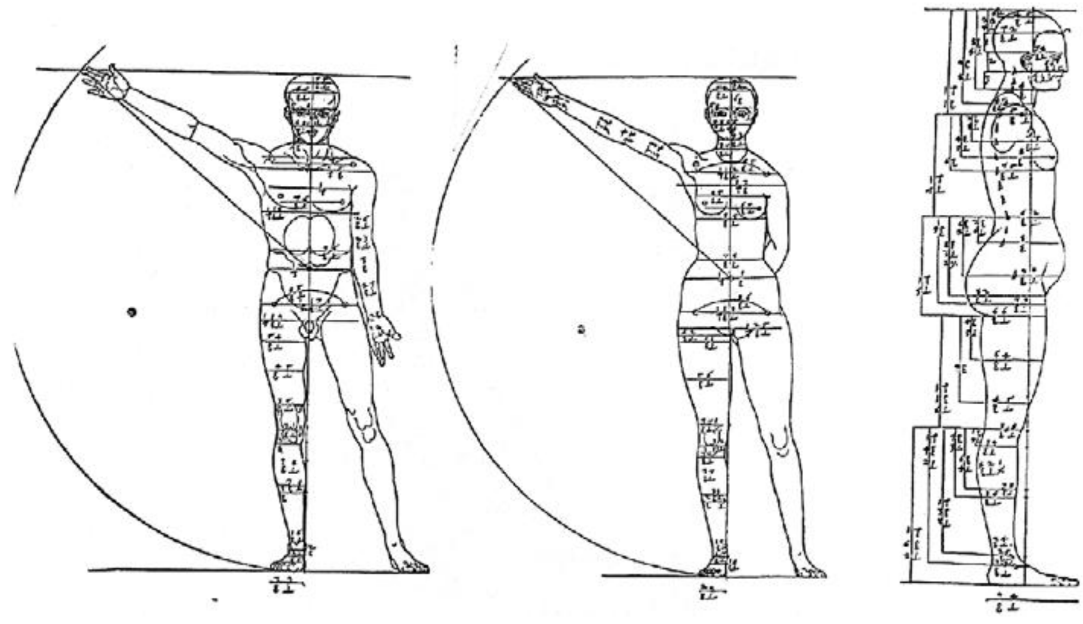


Figura 6. Proporción del cuerpo humano

Fuente: Darvas (2007).

De esta manera, se puede observar que en el Renacimiento algunos artistas utilizaban en sus obras el número áureo para darle proporción a sus creaciones artísticas, originando que algunas de éstas tuvieran simetría, como es el caso del cuerpo humano.

Posteriormente, en la Edad Moderna, Descartes (1596-1650) y Fermat (1601-1665) reducen la geometría al álgebra produciendo una geometría analítica, donde "[sustituyen] los puntos de un plano por pares de números, y las curvas por ecuaciones. De tal manera, el estudio de las propiedades de las curvas será remplazado por el estudio de las propiedades algebraicas de las ecuaciones correspondientes" (Piaget & García, 1982, p. 90). Más adelante, esta geometría se ve influenciada por el cálculo diferencial creado independientemente por Newton (1642-1727) y Leibniz (1646-1716), que lleva a Bernoulli (1700-1782), Euler (1707-1783) y Lagrange (1736-1813) a reducir la geometría al análisis.

Durante el Renacimiento surge la geometría proyectiva, defendida por Poncelet (1788-1867) y Chasles (1793-1880). Poncelet busca la manera "de aplicar el razonamiento implícito, haciendo abstracción de la figura" (Piaget & García, 1982, p. 92) utilizando métodos propios de la geometría, con el fin de que ésta tenga el mismo estatus que la geometría analítica. Del mismo modo, Chasles percibe que las ventajas que aporta el álgebra a la geometría se deben de algún modo a las *transformaciones*. De ahí que, estos autores incorporen los *sistemas de transformaciones* como método fundamental de la geometría. Cabe anotar que, el concepto de *transformación* en geometría tiene su origen con Poncelet y Chasles en la geometría proyectiva, puesto que anteriormente se *aplicaba* "sin tener conciencia ni de su significación, ni de su alcance" (Piaget & García, 1982, p. 103).

Sin embargo, esta geometría presentó limitaciones puesto que no permitió distinguir las propiedades métricas de las propiedades proyectivas; además, la idea de transformación tenía un origen intuitivo donde "cada vez que [era] aplicado un tipo de transformación, en cada caso particular, permitió estudiar las propiedades de las figuras con un grado de generalidad muy elevado, pero faltaban los medios para identificar y expresar la *estructura* del conjunto de estas transformaciones" (Piaget & García, 1982, p. 101). De ahí que, el trabajo de Klein (1849-1925) sea de gran importancia, puesto que encontró la manera de llevar las transformaciones proyectivas a las estructuras de grupo, originando la formulación del *Programa de Erlangen*[22], donde "a partir del momento en que se reconoce que el sistema de transformaciones que deja invariantes ciertas propiedades geométricas forma un grupo, se puede remplazar el análisis de las transformaciones mismas por el análisis de las relaciones internas del grupo" (Piaget & García, 1982, p. 102).

[22] Se conoce como *Programa de Erlangen* a una investigación publicada por Felix Klein en 1872, donde propone un estudio sistemático de las relaciones entre la geometría y la teoría de grupo, describiendo la geometría como el estudio de las propiedades de las figuras que permanecen invariantes bajo la acción de un grupo concreto de transformaciones.

2.2.2 *Aproximación histórica de la utilización de algunos artefactos en geometría*

La utilización de los artefactos es inherente a la evolución humana, sus orígenes se deben, en parte, a la necesidad de representar objetos de la realidad, sentimientos y emociones, para lo cual los seres humanos construyen artefactos que le permiten cumplir con este fin. Posteriormente, cuando se empiezan a desarrollar ideas matemáticas, nace la necesidad de construir artefactos con los cuales se puedan representar gráficamente los objetos matemáticos.

Euclides utiliza compás y regla no graduada para realizar construcciones, las cuales le sirven de apoyo para sus demostraciones; más adelante, este compás será modificado a un compás rígido, que permite transportar longitudes, pues conserva su apertura al levantarlo del papel.

Así como la regla y el compás fueron artefactos importante para los geómetras griegos en la resolución de problemas, también la brújula de Nicomedes (~ 280 a. C. - ~ 210 a. C.) fue de gran importancia, puesto que permitió por medio de su curva llamada *concoide* (ver Figura 7), resolver problemas donde no era posible encontrar solución a través de la regla y el compás de Euclides; por ejemplo, la duplicación del cubo y la trisección del ángulo.

Bartolini y Maschietto (2006) definen la *concoide* de la siguiente manera:

Se dan en el plano (ver Figura 7):

- una línea recta *r* (base);
- un punto O (extremos) que no pertenece a la base;
- un segmento m (módulo) = segmento PP'.

Sea M un punto variable sobre la línea recta *r* (punto director). OM está en la recta. Si se determinan dos puntos P y P' (los puntos de trayectoria, en los lados opuestos de la M) tal que: MP= MP'= m

El lugar geométrico de puntos P y P’ al variar M se llama *concoide* (ver Figura 7).

En el plano euclidiano, la *concoide* está definida y constituida de dos componentes, cada uno perteneciente a uno de los dos semiplanos de origen *r*. La línea recta *r* (base) es una asíntota. La línea recta perpendicular a la base *r* es un eje de simetría.

Se presentan tres ejemplos de los cuales corresponden a tres *concoides* diferentes (ver Figura 7):

d(O, r) < m: los puntos de trayectoria P y P’
d(O, r) = m: puntos de trayectoria R y R’
d(O, r) > m: puntos de trayectoria Q y Q’.

En uno de los dos semiplanos, los arcos tienen formas similares a la *concoide*. En la otra mitad del plano el comportamiento de los extremos es diferente:

d(O, r) < m puntos de trayectoria P y P’: el punto O es un nodo de tangentes distintas;
d(O, r) = m puntos de trayectoria R y R’: el punto O es una cúspide;
d(O, r) > m puntos de trayectoria son Q y Q’.

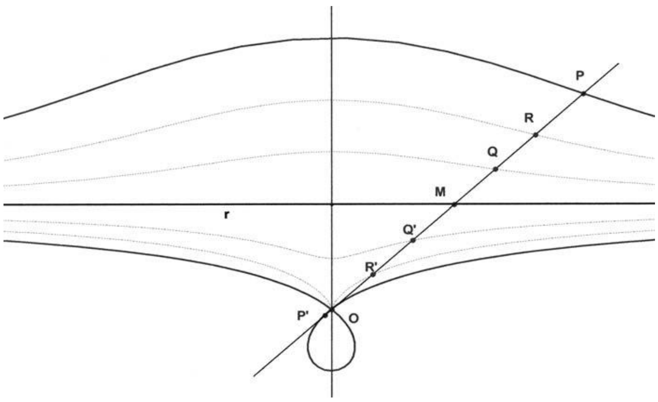


Figura 7. Concoide

Fuente: Bartolini y Maschietto (2006).

Descartes construye un artefacto que durante años permitió solucionar el problema de cómo incorporar un cierto número de medios proporcionales entre dos cadenas de una longitud, que más adelante fue utilizado con otro fin (ver Figura 8).

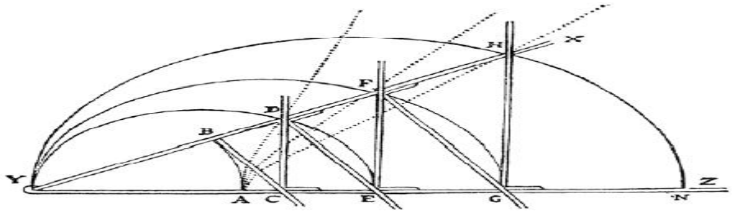


Figura 8. Diseño de Descartes para el número de medios proporcionales

Fuente: Bartolini y Maschietto (2006).

Como se ha mencionado anteriormente, la elaboración de artefactos ha estado desarrollada desde la antigüedad, pero desde la geometría de Descartes estos artefactos tienen un notable desarrollo, porque ésta geometría proporcionaba herramientas para resolver problemas, como es el caso del artefacto construido para elaborar cónicas. Con éste se construyeron tres tipos de cónicas; la Ortotome (ver Figura 9) que más adelante será conocida como la parábola, la Amblitome (ver Figura 10) más conocida como la hipérbola y la Oxitome (ver Figura 11) que más tarde será conocida con el nombre de elipse.

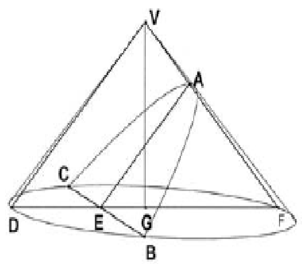


Figura 9. Ortotome

Fuente: Bartolini y Maschietto (2006).

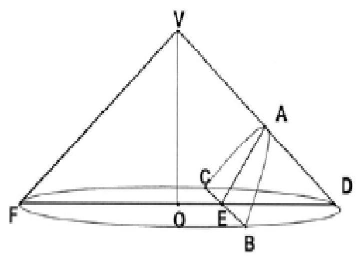


Figura 10. Amblitome

Fuente: Bartolini y Maschietto (2006).

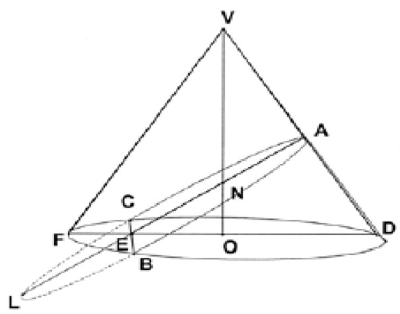


Figura 11. Oxitome
Fuente: Bartolini y Maschietto (2006).

Durante el siglo XIX se manifiesta el interés de trazar líneas rectas mediante la utilización de mecanismos articulados. Este interés es resuelto de una manera aproximada por James Watt (1736-1819), quien en su máquina de vapor utilizaba un mecanismo denominado *paralelogramo de Watt* (ver Figura 12), el cual buscaba que el extremo del pistón alcanzará un movimiento aproximadamente rectilíneo para que la máquina funcionara. Sin embargo, este mecanismo no generaba un movimiento exactamente rectilíneo. Esto llevó a que otros matemáticos como Chebishev (1821-1894) realizaran modificaciones al mecanismo de Watt, pero no encontraron ningún mecanismo articulado que originara una línea estrictamente recta.

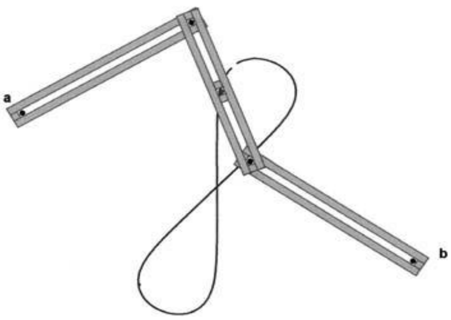


Figura 12. Mecanismo de Watt
Fuente: Bartolini y Maschietto (2006).

En 1864, Peaucellier (1832-1913) halló una posible solución a este problema, inventando un mecanismo inversor (ver Figura 13). Ugarte (s.f.) afirma que “este mecanismo se basa en el hecho de que la curva inversa de una circunferencia que pasa por el centro de inversión es una recta. Más aún, el mecanismo permite obtener una inversión de todo el plano” (p. 118).

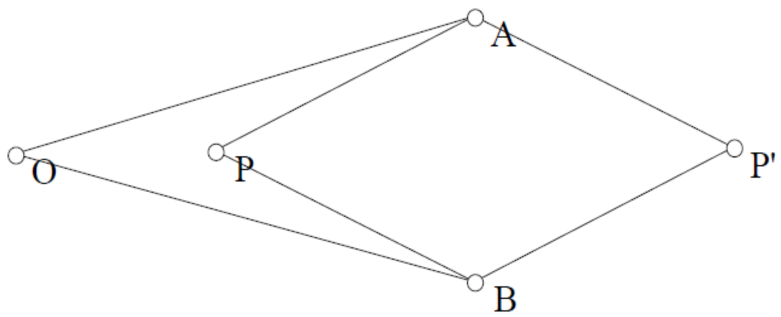


Figura 13. Inversor de Peaucellier

Fuente: Bartolini y Maschietto (2006).

En 1603, Scheiner (1575-1650), basándose en los principios de Descartes sobre los paralelogramos, idea un pantógrafo (ver Figura 14). Este es un mecanismo articulado que opera mediante unas varillas que se encuentran conectadas de manera que se puedan mover respecto de un punto fijo (*pivote*).

González (2010) al hablar sobre los procesos para transferir información de una superficie, considera que

> El pantógrafo, como instrumento de dibujo, permite copiar una figura o reproducirla a una escala distinta. Para conseguir dibujos a diferente escala se varía la distancia entre los puntos de articulación (rótulas), conservando siempre la condición de paralelismo entre las varillas, dos a dos. (p. 51)

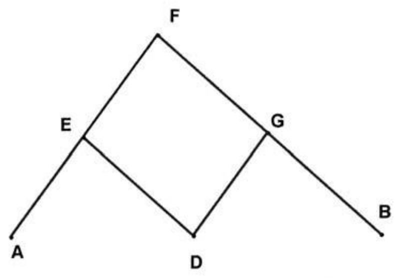


Figura 14. Pantógrafo de Scheiner

Fuente: Bartolini y Maschietto (2006).

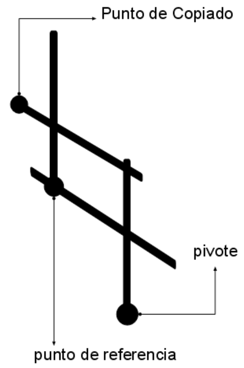


Figura 15. Pantógrafo

Fuente: González (2010).

Según González (2010), para dibujar con el pantógrafo (ver Figura 15), se debe fijar el pivote, y desplazar el punto de referencia sobre el dibujo original, de esta manera, un lapicero que está situado en el punto de copiado va a reproducir la imagen a una escala mayor, que viene establecida por la relación de distancias entre pivote-punto de referencia y pivote-punto de copiado.

Si se quiere reproducir la imagen a una escala menor, se debe cambiar el punto de referencia por el punto de copiado.

Cabe anotar que una homotecia de centro C y razón k = -1 corresponde a una simetría de centro C, o una rotación de 180° alrededor de C, como se observa en la Figura 16.

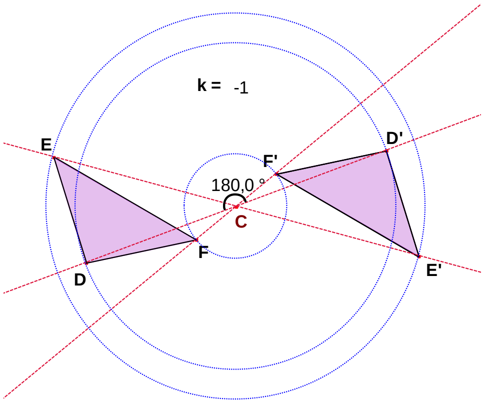


Figura 16. Homotecia con k = -1

Bartolini y Maschietto (2006) afirman que el Pantógrafo de Scheiner es parte de una familia de herramientas que hacen isometrías (traslación, rotación, simetría axial y central). Así, es posible encontrar mecanismos articulados que hacen posible realizar isometrías y son construidos por medio de paralelogramos:

Para la traslación existe un traslador (ver Figura 17) que consiste en dos paralelogramos articulados *ABCD y CDPQ* que tienen el lado *CD* en común*.* La máquina realiza una función del plano en el plano P → Q, originando una traslación con la dirección del vector AB.

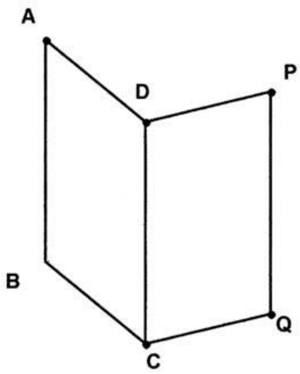


Figura 17. Traslador

Fuente: Bartolini y Maschietto (2006).

Esta traslación se produce como consecuencia inmediata de las propiedades de los paralelogramos:

PQ = DC = AB

PQ // DC // AB

Para la rotación existe un artefacto un poco "más complejo", cuya invención se debe a Sylvester James (1814-1897), quien toma el paralelogramo articulado OABC, cuyo vértice O se centra en el plano del modelo y, en los lados AB y CB se construyen dos triángulos isósceles con vértices en A y C.

La máquina realiza una función del plano en el plano P → Q (ver Figura 18).

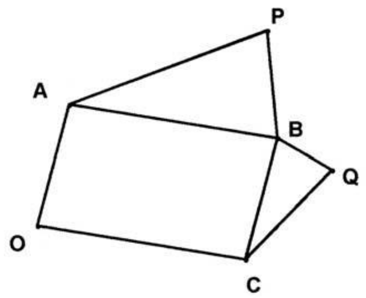


Figura 18. Pantógrafo de Sylvester

Fuente: Bartolini y Maschietto (2006).

Se trata de una rotación de centro O y amplitud α = $P\hat{A}B = Q\hat{C}B$.

La simetría central puede trabajarse mediante un artefacto constituido por un rombo articulado ABCP, en el que el punto medio O del lado AB permanece fijo. Por lo tanto, se trata de una simetría central con centro O (ver Figura 19).

La máquina realiza una función del plano en el plano P → Q.

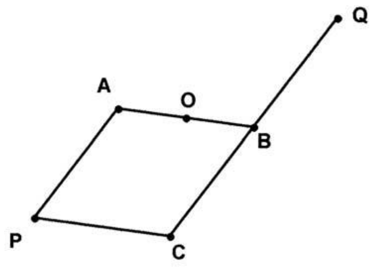


Figura 19. Sistema articulado para la simetría central
Fuente: Bartolini y Maschietto (2006).

Al igual que las otras transformaciones isométricas, existe un artefacto para la simetría axial constituido por un rombo articulado PBQC, cuyos vértices B y C se deslizan libremente por el riel s. De esta manera, al mover P se mueve Q de modo que la trayectoria de Q es justamente la reflexión de la trayectoria de P respecto a s (ver Figura 20). Esto ocurre porque los triángulos BCP y BCQ son congruentes independientemente de la posición de P.

La máquina realiza una función del plano en el plano P → Q.

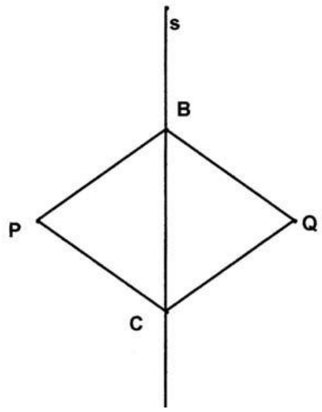


Figura 20. Sistema articulado para la simetría axial
Fuente: Bartolini y Maschietto (2006).

Se trata de una simetría axial con eje s.

La demostración es inmediata, dado que las diagonales de un rombo son ortogonales y lo dividen a la mitad indistintamente.

Este último es muy importante, pues como menciona Struck (2005) una de las propiedades interesantes de las isometrías es que todas ellas pueden ser generadas a través de las reflexiones. De este modo, "para hacer una máquina que traslade [ver Figura 21] o una que rote [ver Figura 22] basta hacer dos máquinas que reflejen y 'pegarlas' adecuadamente" (Struck, 2005, p. 109).

Cabe anotar, que el mencionado sistema articulado para la simetría axial, será reconocido dentro de esta investigación como el simetrizador.

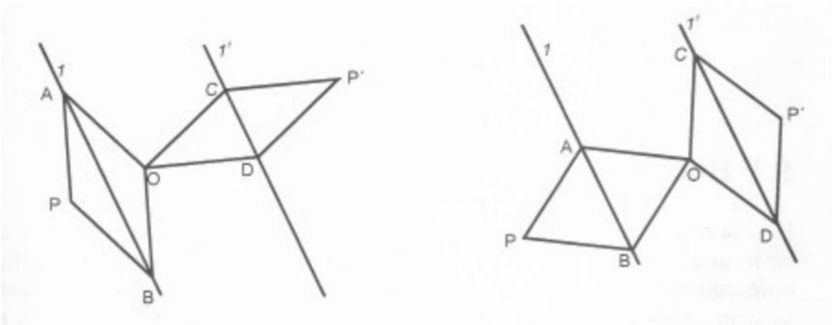


Figura 21. Máquina para trasladar

Fuente: Struck (2005).

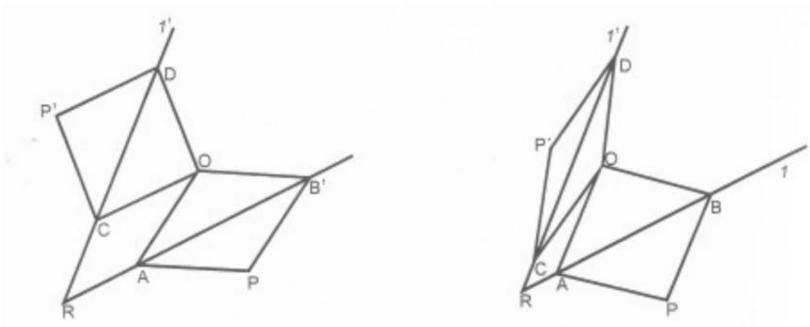


Figura 22. Máquina para rotar

Fuente: Struck (2005).

Siguiendo en esta línea, el hombre ante la necesidad de contar sus pertenencias inventó artefactos, que han ido evolucionando. De esta manera con la revolución industrial surge la evolución tecnológica, en la cual se han creado diversos artefactos tecnológicos que han cumplido con distintos fines; por lo que ya no solo es posible realizar cálculos con un ábaco o con una calculadora, sino que la creación de la computadora ha aportado a diversos campos, entre los cuales se encuentra el laboral, el comunicacional y el educativo.

En la educación la calculadora ha sido un artefacto de gran utilidad, pues fue diseñado para realizar cálculos de forma más rápida, disminuyendo los errores que pueden presentarse al resolverlos a mano. Este artefacto se ha incorporado en la educación como instrumento de apoyo para el aprendizaje de las matemáticas.

Ahora bien, si las computadoras se llevan al aula de clase deben cumplir un propósito pedagógico, por lo que la *transposición didáctica*, entendida como la conversión del saber científico al saber enseñado, debe extenderse a los contextos computacionales, originando una *transposición informática*[23] (Balacheff, 1994), donde los conocimientos matemáticos que poseen los estudiantes se relacionan con los de carácter informático, generando un nuevo conocimiento producto de la interacción entre usuario y sistema.

En la actualidad se han diseñado artefactos que permiten generar un ambiente de aprendizaje para la enseñanza de la geometría, como son los SGD. Éstos permiten generar un realismo matemático, donde es posible llegar a ver paso por paso la construcción de los objetos que graficamos en pantalla; los cuales obtienen vida, en la medida que pueden ser manipulables y modificables.

[23] Para Balacheff (1994) la *transposición informática* es el trabajo sobre el conocimiento que permite una representación simbólica y la puesta en práctica de esta representación por un dispositivo informático.

Los SGD son programas de computador que han sido creados para cumplir propósitos pedagógicos, puesto que buscan favorecer los procesos de enseñanza y aprendizaje de la geometría. Entre los SGD se encuentra Cabri Geometry II Plus, el cual puede considerarse un software educativo donde es posible “manipular directamente las figuras construidas en la pantalla mediante el *arrastre* (*drag*) de ciertas partes de ellas” (Moreno, 2002b, p. 90). Esto posibilita la adquisición de conocimientos, pues permite que los alumnos comparen las distintas soluciones a un mismo problema.

Dentro de la TSD, Cabri Geometry II Plus funciona como parte del *medio*[24] que brinda el docente para que los estudiantes en interacción con éste generen nuevos conocimientos.

En este sentido, el uso de la tecnología causa ciertos impactos cognitivos pues, estos recursos tecnológicos se convierten en un nuevo ambiente de aprendizaje para trabajar distintos objetos geométricos y sus propiedades. Como lo afirma Castiblanco (1999), estos recursos tecnológicos a diferencia de otros ambientes de aprendizaje:

> Proporcionan de manera inmediata, una retroalimentación de las acciones de un estudiante en el mismo sistema de representación en el que está trabajando permitiéndole su mirada como un fenómeno matemático, y facilitando de esta manera, una amplia y “directa” experiencia matemática. (p.29)

2.2.3 *Aspectos matemáticos de la simetría axial*

Para diseñar las situaciones didácticas es necesario conocer las características de una transformación isométrica, en especial las propiedades que posee la simetría axial.

[24] En la Dimensión Didáctica se hace explícito lo que se entiende como *medio* dentro de la TSD.

En este sentido, Guerrero (2006) define que un movimiento o una transformación del plano en el plano es una correspondencia que cambia de posición los puntos en el plano.

Ahora bien, existen movimientos rígidos en el plano, los cuales se consideran transformaciones que conservan la congruencia[25] de las figuras. Es decir, envían cada par de puntos *A* y *B* en puntos *A'*, *B'* en el mismo plano, de tal forma que $AB \equiv A'B'$. Estas transformaciones también se conocen como *isometrías*.

Según John Wiley & Sons (1971) "una *isometría* ("transformación congruente", o "congruencia") es una transformación que preserva la longitud, de manera que si (*P*, *P'*) y (*Q*, *Q'*) son dos pares de puntos correspondientes, determinarán los segmentos congruentes $PQ = P'Q'$ " (p. 54).

Entre los movimientos rígidos se encuentran las traslaciones[26], las rotaciones[27] y las reflexiones[28]. En este último el desplazamiento varía con respecto a los dos primeros, pues como menciona John Wiley & Sons (1971), la rotación y la traslación presentan un "movimiento" continuo, mientras que en la reflexión no puede considerarse así. De este modo, se presentan dos tipos de isometrías: directas y opuestas, que son descritas por John Wiley & Sons (1971) mientras habla de triángulos congruentes:

> Si *ABC* y *A'B'C'* son congruentes, se dice que la isometría con la que se relacionan es *directa* u *opuesta* según conserve o invierta el

---

[25] Dos figuras son congruentes si son iguales y tienen los elementos correspondientes dispuestos en el mismo orden.

[26] Una traslación es una correspondencia que asigna a cada punto *A del plano un punto* A' situado a una distancia fija de *A* en la dirección de una recta *u*.

[27] Una rotación con centro en un punto *O*, un ángulo Φ es una transformación que envía un punto *A* del plano en otro punto *A'* de tal forma que $OA \equiv OA'$ y $\angle AOA' = \Phi$.

[28] Según Alsina, Pérez y Ruiz (1993) la reflexión respecto de una recta, también se conoce con el nombre de simetría axial.

> sentido, es decir, de acuerdo con que *ABC* y *A'B'C'* tengan sentidos iguales o distintos. (p. 66)

Como es sabido, la simetría invierte la orientación de la figura; por lo tanto, es una isometría opuesta.

Guerrero (2006) define las figuras simétricas así:

> Una figura *F* es simétrica con otra figura *F'* en el mismo plano, respecto de un punto *O* o de una recta *u*, si todo punto *A* en *F* se puede relacionar con un punto *A'* en *F'*, de tal manera que las distancias de *A* y *A'* a *O* o la recta *u* satisfacen la igualdad, $d(AO) = d(A'O)$ o $d(A, u) = d(A', u)$. (p. 387)

En esta definición se puede observar que existen dos tipos de simetrías: la reflexión en un punto o simetría central y, la reflexión en una recta o simetría axial, la cual servirá de base para el presente trabajo.

Cuando los puntos del plano se reflejan en una recta para obtener una figura simétrica respecto a esa recta, se habla de reflexión en una recta y, puede definirse así:

> Una reflexión respecto a una recta *u* es una transformación que envía un punto *A* del plano en un punto *A'* de tal manera que la recta *u* es la mediatriz del segmento *AA'*. El punto *A'* se llama el simétrico del punto *A* respecto a la recta *u* y la recta *u* se llama el eje de simetría. (Guerrero, 2006, p. 392)

De esta definición se desprende que si *A'* es la reflexión de *A* en la recta *u*, entonces, $AA' \perp u$, *u* pasa por el punto medio del segmento *AA'* y todo punto en la recta *u* es equidistante de los puntos *A* y *A'*.

Del mismo modo, al igual que los autores mencionados anteriormente existen otros que han estudiado la simetría como es el caso de Arce, Blázquez, Ortega y Pecharromán (s.f.) quienes definen la simetría axial como un movimiento del plano determinado por una recta r del plano de tal manera que un punto P' del plano es la imagen de un punto P dado (el simétrico de P) si la recta r es la mediatriz del segmento PP'. A la recta r se le llama eje de simetría y todos los puntos de este eje son dobles (la imagen de cualquier punto de r es el mismo punto).

La imagen de cualquier punto se determina trazando la perpendicular por dicho punto al eje de simetría y llevando la distancia del punto al eje al otro lado del eje a partir de éste.

Las propiedades de la simetría axial son las siguientes:

- La simetría axial conserva la amplitud de los ángulos y la longitud de los segmentos (ver Figura 23).

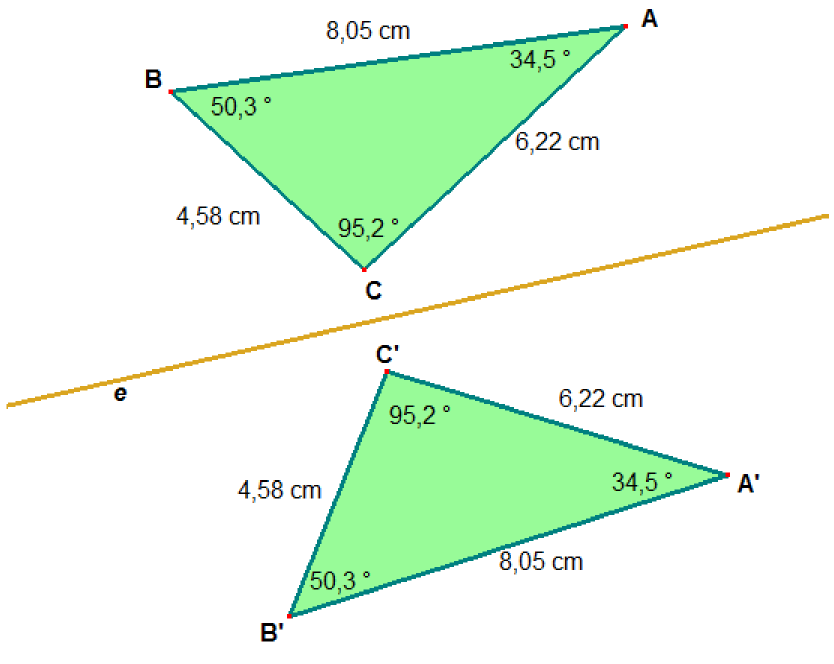


Figura 23. La simetría conserva ángulos y distancias

- La simetría axial es un movimiento que invierte el sentido de los ángulos, y por consiguiente, la orientación de las figuras (ver Figura 24).

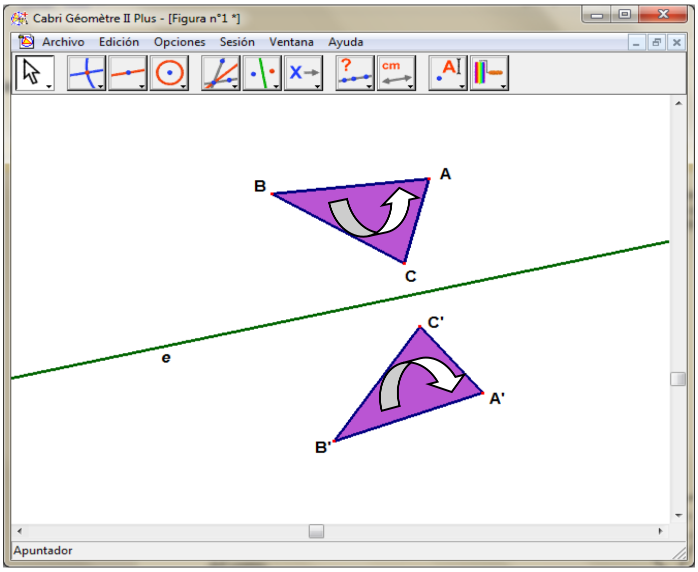


Figura 24. La simetría como movimiento inverso

- La transformada de una recta oblicua *l* forma con el eje de simetría *e* un ángulo igual al que forma con la recta dada y, por tanto, el eje de simetría *e* es la bisectriz del ángulo que forma una recta oblicua *l* con su transformada *l'* (ver Figura 25).

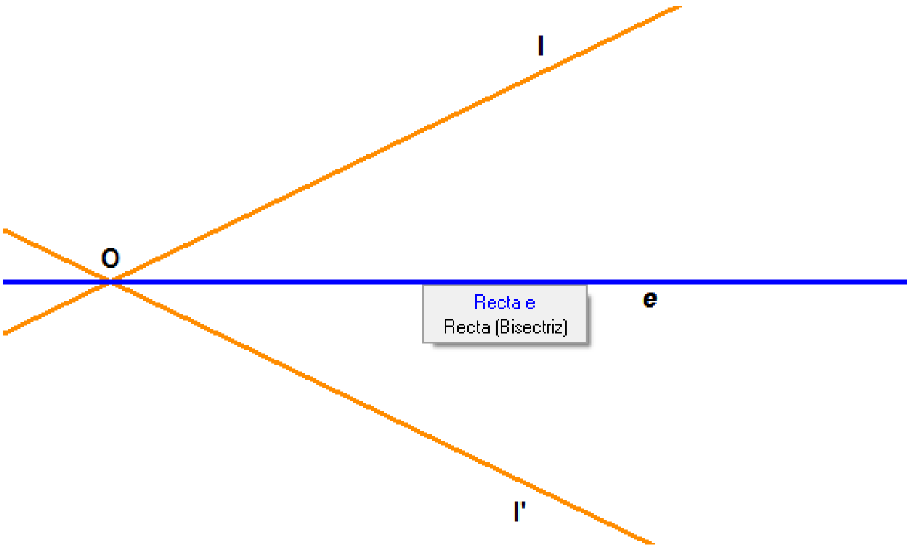


Figura 25. Simetría de una recta oblicua

- La simetría axial es un movimiento involutivo (la figura simétrica de la simétrica de una figura dada es la propia figura de partida) (ver Figura 26).

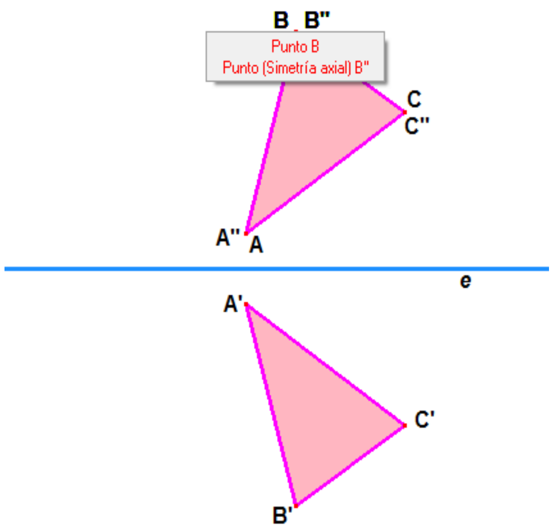


Figura 26. Movimiento Involutivo

Nota: La imagen simétrica del triángulo ABC, con respecto al eje *e*, es el triángulo A'B'C'; la imagen de éste con respecto al eje *e,* es el triángulo A''B''C'', que es el mismo triángulo ABC.

- La imagen de una recta *l* paralela al eje de simetría *e* es otra recta paralela *l'* (ver Figura 27).

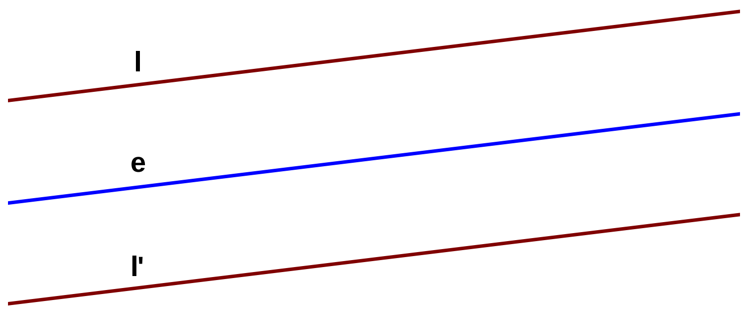


Figura 27. Simetría de una recta paralela

2.3 Dimensión Cognitiva

En la etapa escolar se presentan muchas dificultades en el aprendizaje de las matemáticas, las cuales pueden ser causadas por la forma en que el cerebro procesa la información, debido a que se introduce un nuevo lenguaje simbólico. En este sentido, esta dimensión es de gran importancia para este trabajo, puesto que revela la existencia de algunas *dificultades*, *obstáculos* y *errores* que pueden tener los estudiantes en el aprendizaje de las transformaciones isométricas y, de esta manera poder anticipar los posibles problemas (*dificultades*, *obstáculos* y *errores*) que presenten durante el desarrollo de las situaciones.

2.3.1 *Dificultades, obstáculos y errores*

Los docentes en ocasiones afirman que los estudiantes poseen dificultades en el aprendizaje de las matemáticas cuando éstos no son capaces de aplicar los conocimientos matemáticos como fueron explicados por ellos, pero los estudiantes en los contextos que se desenvuelven son eficientes a la hora de resolver situaciones problemáticas, por ejemplo en situaciones de ir a la tienda y comprar, ellos saben cuándo dinero les queda, pero no son capaces de hacer los pasos rigurosos enseñado por los docentes para realizar una suma o resta. En este caso el estudiante no posee dificultad, sino que se podría decir que el docente no ha utilizado la mejor manera para que el estudiante se apropie de los conocimientos matemáticos. Además se debe tener presente que la enseñanza de las matemáticas es un mundo nuevo en la etapa escolar y que se está enseñando objetos abstractos que no son fáciles de asimilar tanto para niños como para adultos.

En el aprendizaje de las matemáticas se presentan *dificultades*, *obstáculos* y *errores* en la adquisición del conocimiento matemático que son ocasionados por diferentes razones.

Las *dificultades* de un estudiante en el aprendizaje se manifiestan cuando éste muestra el grado de incapacidad al resolver una tarea o un tema específico, entonces se dice que el estudiante posee una dificultad alta o baja en una temática particular.

Las *dificultades* presentes en el aprendizaje de las matemáticas están asociadas por diferentes procesos; de la complejidad de los objetos o contenidos matemáticos, del pensamiento matemático o falta del dominio de los contenidos anteriores, de enseñanza desarrollados para el aprendizaje de las matemáticas o secuencia de actividades propuestas, del desarrollo cognitivo de los estudiantes y, a las actitudes afectivas, emocionales o motivación del estudiante hacia las matemáticas (Carrillo, 2009; Socas, 2000; Batanero, Font & Godino, 2003).

El concepto de *obstáculo epistemológico* introducido por Bacherlard (1938) como la justificación del surgimiento de los *errores* lo entiende de la siguiente manera:

> Hay que plantearse el problema del conocimiento científico en términos de obstáculos. Y no se trata de considerar obstáculos externos, como la complejidad y la fugacidad de los fenómenos, ni tampoco de culpar la debilidad de los sentidos y de la mente humana, pues es, precisamente, en el mismo acto de conocer, íntimamente, cuando surgen, como una necesidad funcional, torpezas de entendimiento y confusiones. Es ahí donde mostraremos causas de estancamiento e incluso de regresión, y donde descubriremos causas de inercia que llamaremos obstáculos epistemológicos. (Bacherlard, 1938; citado por Socas, 2000, p. 136)

Para Batanero, Font y Godino (2003) un *obstáculo*, es un *error* que no se origina por la ausencia de conocimiento, sino que surge cuando se emplea un conocimiento que es verdadero en algunas situaciones, pero no en otras y se aplica indebidamente.

Existen diversos autores que definen qué es un *error* en el aprendizaje de las matemáticas, entre ellos se encuentra Batanero, Font y Godino (2003) quienes afirman que un *error* se da “cuando el alumno realiza una práctica (acción, argumentación, etc.) que no es válida desde el punto de vista de la institución matemática escolar” (p. 69). Además, Rico (1998) considera que el *error* revela que el estudiante tiene un conocimiento deficiente e incompleto. Sin embargo, “el error es una posibilidad permanente en la adquisición y consolidación del conocimiento y puede llegar a formar parte del conocimiento científico que emplean las personas o los colectivos” (p. 70). Entonces, se puede decir que el *error* es una concepción inadecuada que poseen los estudiantes de algunos aspectos matemáticos. Por ejemplo cuando un estudiante da una respuesta incorrecta a un planteamiento matemático, se podrá afirmar que la respuesta dada es un error de acuerdo a los contenidos matemáticos.

La simetría constituye un elemento importante dentro del aprendizaje de la geometría, con la cual se pueden resolver diversos problemas geométricos; puesto que, muchas figuras geométricas poseen las propiedades de esta transformación y además, realizando movimientos simétricos en el plano es posible llegar a las soluciones de algunos problemas.

Sin embargo, los estudiantes pueden optar por figuras simétricas para resolver todo tipo de problema, al considerarlas más fáciles que las figuras asimétricas. Así, es posible encontrar que, en ocasiones, los estudiantes al resolver un problema geométrico no cumplen todas las condiciones que en éste se proponen, sino que recurriendo a figuras simétricas como un triángulo isósceles, tratan de dar solución a un problema que está planteado para cualquier triángulo. En este caso, se le atribuyen o quitan propiedades a la figura que no están dadas en el problema, creándose un conflicto para quien lo resuelve, pues va a considerar como ciertas, condiciones que no lo son, por ejemplo, que el triángulo en cuestión tiene dos ángulos iguales (Bohorquez, Boscán, Hernández, Morán & Salcedo, 2009).

Cabe anotar, que la preferencia de los estudiantes por las figuras simétricas puede constituirse un *obstáculo epistemológico* para el aprendizaje de la geometría, originando unos errores que, "además de ser un efecto de la ignorancia, de la inseguridad, del azar, [pueden] surgir como resultado de un conocimiento anterior, que tenía su interés, su éxito, pero que ahora se revela falso o simplemente inadaptado" (Brousseau, 1997; citado por Franchi & Hernández, 2004a, p. 66).

Estos *errores* se asemejan a los *errores gráficos*, donde los estudiantes al buscar la solución de un problema geométrico, dibujan figuras que no corresponden con el enunciado del problema planteado, lo cual evidencia una mala interpretación de éste, dando como resultado una solución errada. Además, también podría encontrarse un *error de tecnología*, cuando los estudiantes para resolver un problema geométrico utilizan un procedimiento inadecuado (Franchi & Hernández, 2004b); por ejemplo, utilizar la simetría para resolver un problema que debe solucionarse por otro tipo de transformación geométrica.

Por otra parte, en algunas investigaciones se analizan las *dificultades* que presentan los estudiantes en el aprendizaje de las isometrías del plano. Williford (1972; citado por Acuña & Martínez, s.f.) en su investigación estudia las habilidades espaciales que los estudiantes poseen en la enseñanza de las transformaciones, encontrando que les es posible aprender a realizar procedimientos manuales para producir la transformación de imágenes, pero les resulta difícil realizar la transformación de manera mental.

Schultz y Austín (1983; citado por Acuña & Martínez, s.f.), analizan cómo los distintos factores perceptivos influyen en la habilidad para realizar transformaciones, manipulando las figuras con las que se realiza el movimiento requerido, encontrando que el tipo de transformación y la dirección del movimiento afectaba la comprensión de dicha transformación, lo que era más frecuente cuando se utilizaba un eje diagonal para realizar una transformación.

Del mismo modo, Moyer (1974) y Schultz (1977) (citados por Jaime, 1993) en sus investigaciones encuentran que entre los factores que influyen en el aprendizaje de las isometrías del plano, se encuentra la *dificultad* para realizar correctamente el movimiento, dependiendo de la dirección de este (vertical, horizontal, inclinada), la distancia entre el objeto y su imagen y, para las simetrías, la posición del eje.

Kidder (1976; citado por Acuña & Martínez, s.f.) indagó la habilidad que tenían los niños para mantener invariante la longitud al realizar una transformación. Respecto a esto, afirma que:

> La evolución de los procedimientos de las relaciones espaciales se da a dos niveles uno a nivel perceptual, en donde la percepción es el conocimiento de los objetos resultante del contacto directo con ellos y otro al nivel de representación o imaginación que es la evocación del objeto en su ausencia. (Sección Marco teórico, párr. 3)

En esta investigación se encontró que uno de los *errores* más frecuentes de los estudiantes, era no conservar la dimensión de la longitud al realizar las transformaciones; es decir, no construían imágenes congruentes de la figura original. Además, los niños no pueden realizar transformaciones cuando se requiere incorporar factores que no son dados por la sola observación directa, puesto que unos permanecen constantes mientras otros varían.

2.3.2 *Visualización*

Como se ha mencionado, en la enseñanza y en el aprendizaje de la geometría se recurre a las representaciones gráficas para resolver problemas geométricos, lo que en ocasiones favorece el aprendizaje de los estudiantes o por el contrario lo obstaculiza. En geometría podemos hablar de dibujos y figuras geométricas.

Bravo, Del sol y Arteaga (2001) definen el dibujo y la figura geométrica de la siguiente manera: "La figura geométrica es un ente ideal, pero en la práctica se aplica siempre ese nombre a su representación gráfica o representación geométrica. El dibujo geométrico sirve para meditar, ejemplificar o representar conceptos y propiedades" (p.1). Entonces, el dibujo en geometría posee una doble intencionalidad, la de representar conceptos y propiedades y, la representación fiel y rigurosa de objetos geométricos.

Para Laborde (1997)

> El dibujo puede ser considerado como un significante de un referente teórico (objeto de una teoría geométrica como la de la geometría euclídea o la de la geometría proyectiva). La figura geométrica consiste en el emparejamiento de un referente dado con todos sus dibujos, queda entonces definida como el conjunto de pares formados por dos elementos, siendo el primer elemento el referente, el segundo uno de los dibujos que lo representa; el segundo elemento se toma del universo de todos los dibujos posibles del referente. (p. 33)

Torregrosa y Quesada (2007) consideran la *figura* como la imagen mental de un objeto físico y el *dibujo*, como la representación gráfica de una figura en sentido amplio, ya sea sobre un papel, el ordenador o un modelo físico.

Las representaciones gráficas de los objetos geométricos o dibujos construidos de acuerdo con las propiedades geométricas, permiten identificar las formas de los objetos, su ubicación en el espacio y, además algunas propiedades geométricas. Estas representaciones en geometría sirven como lenguaje para expresar y construir un conocimiento geométrico, de tal manera que cuando éste sea realizado apropiadamente puede inducir la idea de un concepto o proposición matemática (Bravo, Del sol & Arteaga, 2001.)

De este modo, la figura permite relacionar dibujo y objeto geométrico, al conectar las propiedades del objeto geométrico con su representación gráfica.

Por otra parte, cuando se observa un dibujo se crea una imagen mental de éste, del mismo modo, una imagen mental puede ser representada mediante un dibujo. Este proceso se denomina visualización, la cual se considera asociada al pensamiento espacial, de modo que está íntimamente ligada al tratamiento de las transformaciones en el plano.

Hit (1995; citado por Barrios, Muñoz & Zetién, 2008) considera que

> La visualización no es una actividad cognitiva trivial: visualizar no es lo mismo que ver. En nuestro contexto, visualizar es la habilidad para crear ricas imágenes mentales que el individuo pueda manipular en su mente, ensayando diferentes representaciones del concepto y, si es necesario, usar el papel o la tecnología para expresar la idea matemática en cuestión. (p. 17)

En este sentido, la visualización no sólo es parte fundamental para el desarrollo de la percepción espacial sino que conduce a la formación de conjeturas y a la comprensión de propiedades geométricas. Clements y Battista (1992; citado por MEN, 2004) sostienen que “la visualización integra los procesos por medio de los cuales se obtienen conclusiones, a partir de las representaciones de los objetos [bidimensionales] o tridimensionales y de las relaciones o transformaciones observadas en construcciones y manipulaciones” (p. 10).

Ciertos artefactos pueden generar procesos cognitivos de visualización, tal es el caso del software Cabri Geometry II Plus, el cual posee herramientas como el *arrastre (drag),* que facilitan al estudiante la realización de conjeturas e hipótesis al manipular la construcción en la pantalla. Así, el *arrastre* puede favorecer que el estudiante se aproxime a las propiedades de la simetría axial. Además de este artefacto, se considera que el simetrizador *mediará* los procesos de conceptualización de las propiedades de la simetría axial, pues cuando el estudiante realice una construcción observará que lo dibujado mediante el vértice C se refleja mediante el vértice D, pero en sentido contrario, utilizando a *e* como eje de simetría (ver Figura 28). En este caso, el estudiante después de utilizar el simetrizador en distintas ocasiones podrá deducir las propiedades geométricas que lo fundamentan y en consecuencia, las propiedades de la simetría axial.

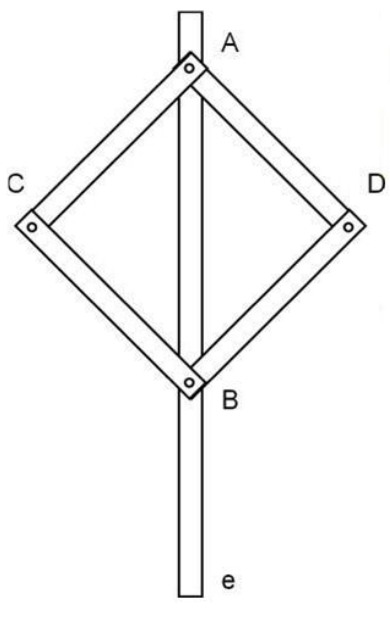


Figura 28. Simetrizador

Fuente: Cobo, Grau, Parés, Pérez & Pérez (s.f).

2.3.3 *Génesis Instrumental*

Cuando se llevan artefactos al aula de clase, se debe buscar que cumplan con el propósito deseado. En este sentido, al integrar las computadoras al aula de clase se origina una *transposición informática* que implica una contextualización del conocimiento creado, con posibles consecuencias para el proceso de aprendizaje (Trouche, 2005). De ahí que, los estudiantes deben apropiarse de los artefactos dispuestos en su contexto de aprendizaje, para poder sacar el mayor provecho de éstos; pues como lo plantea Rabardel (1995; citado por Cedillo, 2006): "un artefacto, por sí mismo, no es automáticamente un instrumento mediador" (p. 133). Es decir, es necesario que los estudiantes utilicen el artefacto, asignándole un papel específico dentro de cierta actividad, y de esta manera lo reconozcan como un instrumento útil que le aporta a su proceso de aprendizaje.

Verillon y Rabardel (1995; citado por Trouche, 2005) proponen una distinción entre artefacto e instrumento, donde el artefacto es un objeto material o abstracto, que es empleado por un sujeto para realizar cierto tipo de tarea; mientras que el instrumento es construido por el sujeto a partir del artefacto. Este proceso de construcción se denomina **génesis instrumental** e involucra dos componentes: la *instrumentalización* y la *instrumentación* (ver Figura 29).

La *instrumentalización* es un proceso dirigido hacia el artefacto, donde intervienen varias fases: una fase donde se descubren y seleccionan las herramientas o elementos pertinentes, una fase de personalización, donde se ajusta el artefacto dependiendo de las necesidades y una fase de transformación del artefacto; por ejemplo, la modificación de la barra de herramientas, la creación de atajos en el teclado, entre otros. En otras palabras, el sujeto al usar el artefacto se apropia de sus propiedades iniciales, adaptándolo a sus necesidades y limitado a sus potencialidades.

La *instrumentación* es un proceso dirigido hacia el sujeto, donde éste concibe las restricciones y potencialidades del artefacto, pasando a través de la emergencia y evolución de *esquemas*[29] mientras realiza un determinado tipo de tarea.

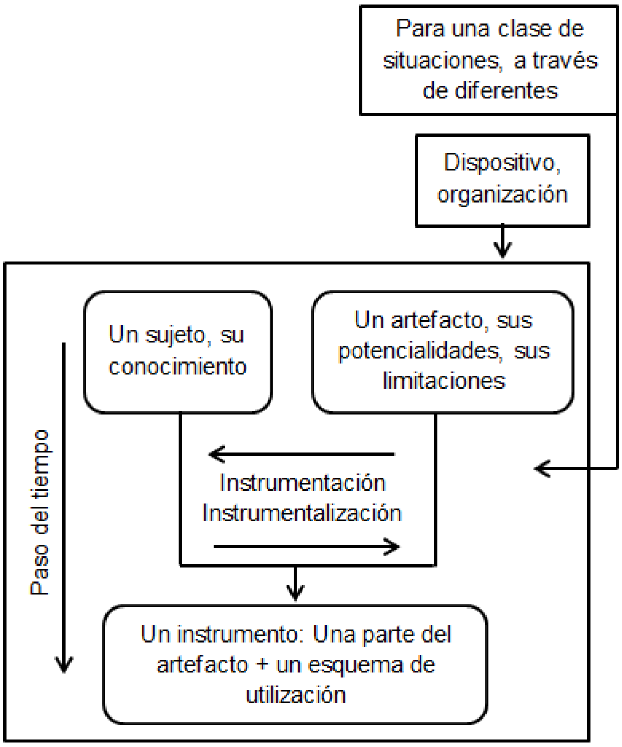


Figura 29. Explicación de la génesis instrumental

Fuente: Guin y Trouche (2002).

Durante este proceso el sujeto puede llevar al mejoramiento del artefacto o a su subutilización, este último se da cuando se utiliza un porcentaje mínimo de la tecnología que se dispone. De este modo, cuando se utiliza un artefacto para *amplificar* y no para generar conocimiento se está subutilizando.

Del mismo modo, en tanto el sujeto se apropia del artefacto, desarrolla *esquemas mentales* que en palabras de Vergnaud (1996; citado

[29] Según Vergnaud (1996; citado por Trouche, 2005) un **esquema** es una organización invariante del comportamiento para una determinada clase de situaciones.

por Cedillo, 2006) son “una acción deliberada para lograr una meta que contiene operaciones invariantes” (p. 134). Éstos le permiten al sujeto organizar la estrategia con la cual abordar un problema, los conceptos que establecen el fundamento de esa estrategia y los significados técnicos para usar el artefacto. En este sentido, Cedillo (2006) sostiene que “el artefacto se convierte en un instrumento sólo si se combina con el desarrollo de esquemas mentales” (p. 133).

Trouche (2000; citado por Cedillo, 2006) habla sobre esquemas de utilización, definiéndolos como “una organización mental estable, que incluye técnicas y los conceptos que las apoyan para usar un artefacto en una clase específica de tareas” (p. 134), distingue dos tipos: los *esquemas de uso* y los *esquemas de acción instrumentada*.

Cuando un sujeto desarrolla, genera o adapta *esquemas de uso* en relación a un artefacto, en un determinado momento utiliza algunas técnicas[30] asociadas a estos esquemas de uso, sin pensar en otras. Por ejemplo, un usuario con *esquemas de uso* puede hallar en Cabri Geometry II Plus el simétrico de cierta figura geométrica, utilizando el comando *simetría axial*, mientras que un principiante tiene que empezar por considerar los aspectos técnicos para usar el artefacto, por ejemplo, principiar por conocer las herramientas que posee el programa, que le permiten usar el ‘camino más corto’ para realizar una simetría axial. Del mismo modo, un sujeto que ha perfeccionado sus *esquemas de uso* puede llegar a comprender el lenguaje interno de la máquina para hacer cambios en él.

Durante el proceso de *instrumentación*, los *esquemas de acción instrumentada* le permiten al sujeto entender las potencialidades y restricciones del propio artefacto, constituyéndose en técnicas que hacen posible resolver eficazmente una tarea específica. En Cedillo (2006) se dice que los *esquemas de acción instrumentada* “corresponden a la realización de trasformaciones sobre los objetos en que se acerca la actividad, en

[30] En la Teoría Antropológica de lo Didáctico, Chevallard (1999) define la *técnica* como una “manera de hacer”, una manera de realizar tareas.

nuestro caso son objetos matemáticos, por ejemplo fórmulas, gráficas, etcétera” (p. 134).

Restrepo (2010) muestra algunos esquemas de uso y esquemas de acción instrumentada para la apropiación del arrastre en Cabri Geometry, como se muestra en la tabla 1:

Tabla 1.
Esquemas de utilización

Esquemas de Uso	Esquemas de acción instrumentada
Esquema de uso de “arrastre de un objeto”: • Arrastre de un objeto de dimensión superior o igual a 1 (segmento, triangulo, etc.). • Arrastre de un punto	Esquema de acción instrumentada de “identificación del objeto-trayectoria”.
	Esquema de acción instrumentada “verificar que la trayectoria pasa por un punto”.
Esquema de uso de “búsqueda de los puntos que se pueden mover”.	Esquema de acción instrumentada de “materialización de una trayectoria con una recta.”
Esquema de uso de “distinción de los diferentes tipos de puntos del programa”.	Esquema de acción instrumentada de “ajuste para satisfacer una condición”.
	Esquema de acción instrumentada “arrastrar un punto para verificar una construcción”.

Fuente: Restrepo (2010).

La génesis instrumental tiene aspectos individuales y sociales (Trouche, 2005), cuyo balance depende de:

- Factores materiales, los cuales ocasionan que se trabaje de forma grupal o individual dependiendo del tipo de artefacto; por ejemplo, la “intimidad” de la pantalla de la calculadora favorece el trabajo individual o en grupos pequeños.

- La disponibilidad de los artefactos, puesto que en ocasiones sólo están disponibles en la escuela, a veces se prestan durante todo el año escolar o, a veces son propiedad de los estudiantes. Respecto a esto, Chacon y Soto (1998; citado por Trouche, 2005) afirman que cuando las calculadoras o computadores sólo están de vez en cuando disponibles, los estudiantes a menudo desarrollan una actitud crítica hacia la tecnología. Esto los lleva a estar bastante confundidos, porque aprender en dos ambientes – informático y clásico- no es lo mismo, y en ocasiones frustrados, por no tener a su disposición las computadoras fuera del trabajo de laboratorio.

- La manera en que el maestro tiene en cuenta estos artefactos, pues si el maestro los utiliza frecuentemente en la clase, como *mediadores* del conocimiento, será más viable que se conviertan en instrumentos.

Por otra parte, en la aproximación histórica de los artefactos se muestra la existencia de un simetrizador o máquina articulada con la cual es posible realizar la transformación de simetría axial, ésta puede ser llevada al aula para la adquisición de nuevos conocimientos que se evidencian cuando el estudiante desarrolla *esquemas de utilización*.

El simetrizador puede constituirse en un artefacto valioso cuando se incorpora al aula de clase al iniciar el tema de la simetría axial; de esta manera, no se está utilizando como *amplificador* sino como *reorganizador* que permite generar nuevos conocimientos.

2.4 Dimensión Didáctica

Esta dimensión es de gran importancia para esta investigación puesto que exhibe la manera en que opera la TSD en la construcción de conocimiento, lo cual se refleja en el diseño de la secuencia didáctica y los análisis presentes en este estudio.

2.4.1 *Teoría de Situaciones Didácticas*

Sabiendo que el mundo está en constante evolución, es necesario que el sistema escolar vaya a la par de los cambios que se producen, introduciendo en la enseñanza las innovaciones que se crean con el fin de superar las barreras que no permiten avanzar en el aprendizaje de las matemáticas, como son el uso de la TIC, de material físico y la aplicación de la TSD.

El MEN propone la incorporación de la tecnología al currículo de matemáticas, donde la geometría puede ser enseñada a través de SGD, como Cabri Geometry II Plus, que se considera un micromundo geométrico que no tiene predeterminada una intención didáctica, sino que es el profesor, como responsable de la enseñanza, quien debe escoger las situaciones que considere pertinentes para la adquisición del conocimiento a enseñar. Hoyles (1993; citado por Balacheff & Kaput, 2001) considera que "el micromundo evoluciona en la medida en que crece el conocimiento del estudiante" (p. 4).

Del mismo modo, Balacheff y Kaput (2001), consideran que un micromundo consiste de las siguientes características esenciales interrelacionadas:

- Un conjunto de objetos primitivos, operaciones elementales sobre esos objetos, y reglas que expresan las formas en que las operaciones pueden ser realizadas y asociadas- lo cual es la estructura usual de un *sistema formal* en el sentido matemático.

- Un *dominio de la fenomenología* que relaciona objetos y acciones sobre los objetos fundamentales con los fenómenos en la "superficie de la pantalla". Este dominio de la fenomenología determina el tipo de realimentación que el micromundo produce como consecuencia de las acciones y decisiones del usuario (Balacheff & Sutherland, 1994). (p. 4)

En un SGD, como Cabri Geometry II Plus, es posible dibujar objetos geométricos, tales como puntos, rectas, segmentos, entre otros, y encontrar sus respectivas relaciones, como perpendicularidad, paralelismo, etc. e incluso, realizar construcciones geométricas que permiten la verificación de propiedades, cuando la figura no se deforma mediante el arrastre.

De esta manera, los SGD favorecen el desarrollo de habilidades en los estudiantes, mediante la resolución de problemas, como lo mencionan McLoughlin y Oliver (1999) y Fisher (1993), (citados por González, 2001): "los alumnos tienen la posibilidad de explorar, descubrir, reformular, conjeturar, validar o refutar, sistematizar; en definitiva, ejercer el papel de investigadores sobre cada contenido que se pretende adquirir" (p. 279).

Es importante anotar que artefactos como Cabri Geometry II Plus y el simetrizador, no generan conocimiento matemático por sí mismos, por lo que deben estar inmersos dentro de una situación didáctica que sea controlada por el profesor. En la TSD de Brousseau (2007) intervienen tres elementos: el estudiante, el profesor y el *medio*; donde el estudiante produce conocimiento como consecuencia de la interacción con el *medio*, sin intervención de un docente; en otras palabras, se produce un *aprendizaje por adaptación*, concepto heredado de la teoría de Piaget.

De manera amplia, Brousseau (1988; citado por Bort & Orús, 2000) define el *medio* como el "conjunto de condiciones exteriores en las cuales vive y se desarrolla un individuo humano, [además] juega un papel importante en la determinación de los conocimientos que el sujeto debe desarrollar para controlar una situación de acción" (p. 9).

Por otro lado, Acosta (2010) da una definición más reducida de *medio*: "el medio es aquello con lo que interactúa el alumno, sobre el cual puede realizar acciones y recibir retroacciones que le permitan la validación" (p. 135); estas retroacciones corresponden a las reacciones o respuestas del *medio* a las acciones del sujeto.

En otras palabras, el sujeto realiza una *acción* para alcanzar un objetivo o intención, que es recibida por el *medio*, quien responde a esa acción mediante una *retroacción* que debe ser interpretada por el sujeto, usando los conocimientos que tiene, y debe validar su acción; de tal manera que si la *acción* realizada responde a la intención que se buscaba, ésta se repetirá cuando quiera alcanzar el mismo objetivo, pero si la acción realizada no responde a su intención, deberá modificarse, iniciando nuevamente el proceso (ver Figura 30).

En la TSD se presentan dos situaciones: una *a-didáctica* y otra *didáctica*; Acosta (2010) menciona que:

> La TSD denomina *situación a-didáctica* a una actividad que produce un aprendizaje por adaptación, y la incluye dentro de una *situación didáctica*, que es una situación de clase. La TSD caracteriza la *situación didáctica* como una situación en la que intervienen tres elementos: *un saber* (a enseñar), *un profesor* (que desea enseñar ese saber) y *un alumno* (o más) (que desean aprender ese saber). (p. 133).

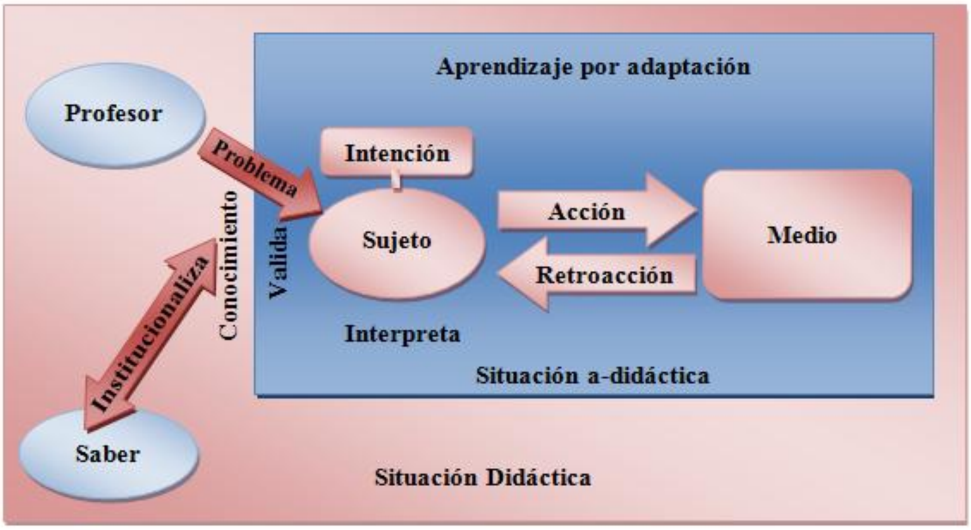


Figura 30. Situación didáctica y a-didáctica

Fuente: Acosta (2010).

Por otra parte, en la *situación a-didáctica* se distinguen tres tipos de situaciones: situación de acción, situación de formulación y situación de validación. En la *situación de acción* el sujeto actúa sobre el *medio*, organizando estrategias que le ayuden a tomar decisiones; por lo que el conocimiento está implícito en las *acciones* de los sujetos. En la *situación de formulación* los sujetos explicitan verbalmente su pensamiento y sus estrategias. En la *situación de validación* los sujetos utilizan el conocimiento para argumentar a favor o en contra de una afirmación.

Del mismo modo, en una situación didáctica, además de las situaciones anteriores se presenta una *situación de institucionalización*, donde el maestro debe exponer con claridad la intención didáctica de la actividad; es decir, los conocimientos que se movilizaron en la secuencia realizada. En este sentido “Tomar en cuenta "oficialmente" el objeto de conocimiento por parte del alumno y el aprendizaje del alumno por parte del docente es un fenómeno social muy importante y una fase esencial del proceso didáctico: este doble reconocimiento es el objeto de la institucionalización” (Brousseau, 2007, p. 98).

Ahora bien, como lo afirma Brousseau (2007), la institucionalización puede darse tanto en una situación de acción, al reconocer el valor de un procedimiento que va a convertirse en un medio de referencia, como en una formulación, donde algunas es necesario conservarse, y en las situaciones de validación, donde se requiere identificar de las propiedades que se encontraron, cuáles son las que se van a conservar.

Cabe anotar que el rol del docente dentro de la TSD es el de realizar una actividad con un fin, de manera que se otorgue al alumno la responsabilidad de resolverla y de apropiarse de ella. En palabras de Brousseau (1988; citado por Sadovsky, 2005):

> El trabajo del docente consiste, pues, en proponer al alumno una situación de aprendizaje para que produzca sus conocimientos como respuesta personal a una pregunta y los haga funcionar o los modifique como respuesta a las exigencias del medio y no a un deseo del maestro. (p. 42)

Dentro de la TSD Brousseau (1998; citado por Barrantes, 2006) desarrolla la noción de *obstáculo epistemológico*, afirmando que no necesariamente alude a conocimientos erróneos, sino a "tipos de conocimiento que están obstaculizando la adquisición (construcción) de uno nuevo" (p. 3). De este modo, Brousseau considera que un obstáculo se manifiesta a través de un *error*, el cual no sólo es efecto de la ignorancia y la incertidumbre, sino que es resultado de un conocimiento anterior, que aunque fue exitoso en algunas situaciones, en la actual se considera inapropiado.

Además de Brousseau, Margolinas (2009) aporta elementos a la TSD sobre la gestión del profesor, que permiten la organización de la implementación de la secuencia didáctica. En este sentido, Santacruz (2011) sostiene que la gestión del profesor aparece dividida por fases[31], tales como

[31] Margolinas (2009) entiende la "*fase"* como un *momento* del desarrollo de la interacción en clase.

la *gestión del contrato*, los *actos de devolución*, la *validación* y la *institucionalización*.

En la *fase de la gestión del contrato didáctico* el profesor explicita las consignas de la situación, las reglas de juego, la organización del trabajo y el tiempo que pueden utilizar los estudiantes para resolver cada situación.

La *fase de devolución* es de gran importancia dentro de la TSD, ya que durante el desarrollo de la secuencia didáctica el profesor mediante actos de devolución conduce al estudiante a reflexionar sobre sus *acciones*, *formulaciones* y *validaciones* de manera que pueda corregir posibles errores o encontrar alguna estrategia de solución. En este sentido, Brousseau (1987; citado por Margolinas, 2009) al precisar la devolución por parte del profesor afirma que

> No basta con "comunicar" un problema a un alumno para que el problema se convierta en su problema y que él se sienta el único responsable en resolverlo. No basta tampoco que el alumno acepte esta responsabilidad para que el problema que resuelve sea un problema "universal", libre de presupuestos subjetivos. Llamaremos "devolución" a la actividad por la cual el profesor trata de lograr esos dos resultados. (p. 42)

La *fase de validación* se da en un espacio colectivo, donde los estudiantes defienden sus posibles estrategias de solución. Para Brousseau (1978a; citado por Margolinas, 2009) las fases de validación son:

> Discusiones espontáneas sobre la validez de las estrategias. Aparecen aquí como medios de acción. Los alumnos las utilizan como un medio para convencer a su compañero de que realice la acción planeada. Los medios de lograr la convicción pueden ser muy variados (autoridad, retórica, pragmática, validez, lógica). (p. 93).

En la *fase de institucionalización* el docente recoge las ideas a las que han llegado los estudiantes y en común acuerdo las transforma en nociones matemáticas.

2.4.2 *Acciones y retroacciones de Cabri Geometry II Plus y del simetrizador.*

Dentro de las *situaciones a-didácticas* el *medio* se considera de gran importancia, pues es en la interacción de éste con el sujeto donde se produce conocimiento, como resultado de las *acciones* que realiza el sujeto y las respuestas o *retroacciones* del *medio*. Santillán (2002; citado por Sandoval, 2009) sostiene que

> El medio […] es la base material que hace posible las acciones del sujeto […] La meta o fin no cambia si utilizamos una u otra herramienta, pero el proceso para alcanzar la meta, según los medios que se utilicen, cambia y cambia la estrategia. (p. 11)

Cabri Geometry II Plus y el simetrizador son componentes del *medio* donde el estudiante puede realizar *acciones* y recibir *retroacciones*. Según Acosta (2010) en Cabri Geometry II Plus se pueden realizar dos tipos de *acciones* con sus respectivas *retroacciones*:

- La primera clase de *acción* es *construir* y su *retroacción* corresponde a un dibujo *estático* en la pantalla. Para construir, Cabri Geometry II Plus posee variadas herramientas que permiten la construcción de objetos geométricos (polígonos, rectas, puntos, segmentos, etc.) y las relaciones entre ellos (perpendicularidad, paralelismo, pertenencia, etc.). Por ejemplo, cuando la acción es construir un triángulo y su respectivo simétrico respecto a un eje de simetría, utilizando la herramienta simetría axial, Cabri Geometry II Plus construye la imagen simétrica del triángulo (*retroacción estática*).

- La segunda clase de *acción* es *arrastrar* y su *retroacción* corresponde a un fenómeno dinámico en la pantalla. La herramienta 'apuntador' permite coger los objetos construidos y moverlos en la pantalla, garantizando que las propiedades y relaciones geométricas construidas se conserven durante el desplazamiento. Por ejemplo, al modificar la posición del eje de simetría del ejemplo anterior, la figura inicial y su imagen conservan sus propiedades geométricas (*retroacción dinámica*).

Según Gutiérrez (2005) los estudiantes pueden realizar *acciones* de arrastre con distintas finalidades:

- El *arrastre de test* (test) se hace para verificar si la construcción realizada conserva las propiedades geométricas de una figura, es decir, para comprobar que la construcción es correcta.

- El *arrastre errático* (wandering) se hace sin un plan específico, de forma aleatoria, con el objetivo de modificar un dibujo pero sin que importe cómo es esa modificación. En otras palabras, los estudiantes exploran la figura buscando invariantes matemáticas sin tener idea de cuáles ni dónde o cómo encontrarlas.

- El *arrastre guiado* (guided) consiste en arrastrar un punto u otro objeto con el propósito de obtener un caso particular de la figura construida, ya sea por su forma, tamaño, posición, etc.

- El *arrastre sobre un lugar geométrico oculto* (dummy locus o lieu muet) se hace intentando que los sucesivos dibujos conserven cierta propiedad geométrica que no es válida para toda la figura construida. En este caso, generalmente hay un punto de la figura cuyo recorrido coincide con el lugar geométrico oculto, el cual suele llevar a la solución del problema. Para identificar el lugar geométrico oculto se puede utilizar el comando "traza" combinado con este tipo de arrastre.

Con el simetrizador se puede realizar la *acción de construir*, recibiendo como *retroacción* un dibujo estático en la hoja de papel. La construcción con el simetrizador se debe realizar sobre una hoja de papel, introduciendo dos lápices en los extremos que no están sobre el eje de simetría, de los cuales uno servirá para construir objetos geométricos y el otro reflejará su respectiva imagen simétrica.

Por otra parte, Cabri Geometry II Plus y el simetrizador permiten a los estudiantes validar e invalidar sus *acciones* al interpretar las *retroacciones* de dichos *medios*.

2.4.3 *Tipos de tareas en Cabri Geometry II Plus*

El conocimiento está presente en los artefactos quienes en conjunto con su modo de uso conforman el instrumento y el medio que usan los seres humanos para transformar sus condiciones de vida (Azinian, 2009). En este sentido, Salomón (1992; citado por Azinian, 2009) considera que el uso de las TIC puede pensarse como "acompañamiento" intelectual, donde "el alumno aprende "con" la herramienta, alumno y herramienta son socios intelectuales que comparten la carga cognitiva de realizar tareas" (p. 45).

Un software de geometría dinámica como Cabri Geometry II Plus "permite construir y manipular objetos con el fin de explorar las relaciones que existen entre los elementos de cada uno y entre ellos" (Azinian, 2009, p. 101), en otras palabras, posibilitan el manejo de objetos dinámicos, haciendo viable el pasaje de casos particulares a la visualización de situaciones generales.

En este sentido, Cabri Geometry II Plus brinda al estudiante la posibilidad de realizar dos tipos de tareas[32]: producción de Cabri-dibujos y demostración.

[32] Estas tareas son vistas en Laborde (1997) como dos tipos de problemas que pueden ser pedidos a los estudiantes.

La producción de Cabri-dibujos consiste en realizar en la pantalla dibujos que conserven las propiedades espaciales, al arrastrar uno de los puntos básicos del dibujo. Un Cabri-dibujo “es un dibujo [dinámico] cuyos elementos describen trayectorias, que o bien se reducen a un punto del plano o a un subconjunto de puntos del plano o al plano entero” (Laborde, 1997, p. 42).

Para realizar un Cabri-dibujo el estudiante debe utilizar las herramientas presentes en el artefacto y sus conocimientos geométricos.

Un Cabri-dibujo involucra tareas de *macro-construcciones* (en adelante macros), donde es posible automatizar construcciones, de modo que no sea necesario repetir todos los pasos de la construcción. Para realizar una macro o construcción automatizada, es necesario definir los *objetos iniciales*, es decir, *en lo*s que se basa la construcción y los *objetos finales*, el resultado final de la construcción (Acosta, 2002).

Según Acosta (2002), una producción pedagógica de las macros es la realización de *cajas negras*, “macros que producen un determinado resultado en la pantalla, que se debe analizar para descubrir y reconstruir el proceso de construcción de la macro, e identificar relaciones invariantes en la figura” (p. 15). Para Laborde (1997), la *caja negra* es una situación problema en la que los estudiantes tienen que reproducir un Cabri-dibujo dado en la pantalla de manera que el resultado sea un Cabri-dibujo que tenga un comportamiento idéntico con respecto al desplazamiento.

Para que el estudiante pueda realizar una *caja negra* debe identificar mediante el *arrastre* los elementos dependientes e independientes y las propiedades geométricas que permanecen invariantes.

Según Laborde (2006) las tareas de *cajas negras* requieren de dos operaciones:

- Explorar la figura desconocida y encontrar el comportamiento cuando se arrastra, hacer un análisis de las propiedades geométricas que permanecen invariantes bajo los efectos del arrastre, y en particular hacer la distinción entre lo que es eventual y lo que es necesario en la apariencia visual del Cabri-dibujo bajo el modo de arrastre.

- Verificar si las propiedades geométricas supuestas de la figura se satisfacen utilizando otros recursos del software. Por ejemplo, si tres puntos parecen estar alineados, los alumnos pueden trazar una recta que pasa por dos de ellos y verificar si esta recta pasa por el tercer punto cuando todo el dibujo es arrastrado. (p. 7)

Por otra parte, la demostración en Cabri Geometry II Plus puede utilizarse para explicar fenómenos visuales o incluso la imposibilidad de estos. De manera que se pueden explicar propiedades espaciales que no son las esperadas por los estudiantes. Además, la demostración puede ser útil para argumentar por qué un objeto geométrico satisface ciertas condiciones que lo hacen un caso particular resistente al desplazamiento (Laborde, 1997).

2.4.4 *El artefacto y la complementariedad de artefactos*

Como se expuso en la *dimensión epistemológica*, son muchos los artefactos que los seres humanos han creado para suplir diferentes necesidades. Vygotsky (s.f.; citado por Maschietto & Bartolini, 2009) señaló que en la esfera práctica los seres humanos utilizan los artefactos, para alcanzar logros que de otra manera habrían permanecido fuera del alcance.

En la actualidad, los artefactos se han incorporado en el aula de clase con propósitos pedagógicos; de esta manera, las instituciones escolares, junto con los profesores, deben idear un plan de acción para orientar o guiar las acciones instrumentadas de los estudiantes, a esto Guin y Trouche (2002) lo llaman *orquestación instrumental* y afirman que puede actuar en varios niveles:

- a nivel de un *artefacto*;

- a nivel de un instrumento o un conjunto de instrumentos;
- a nivel de la relación de un sujeto con un instrumento o un conjunto de instrumentos.

Según Wartofsky (1983; citado por Guin & Trouche, 2002) estos tres niveles corresponden a diferentes niveles del *artefacto*:

- los artefactos primarios corresponden al concepto de la herramienta como es utilizado normalmente;
- los artefactos del segundo nivel corresponden tanto a las representaciones como a los modos de acción utilizados en los artefactos primarios;
- los artefactos del tercer nivel se utilizan especialmente para capacitar personas en el desarrollo social y cognitivo a través de la simulación de situaciones y métodos de reflexión de actividades de auto-análisis, tanto individual como colectivo.

Por otra parte, el surgimiento de nuevos artefactos provoca cambios en la educación, que llevan al docente a realizar situaciones de aprendizaje que involucren tanto los ya conocidos como los nuevos artefactos que van surgiendo, de manera que se origine una retroalimentación entre las funciones que cumple cada artefacto; es decir, que se produzca una complementariedad entre estos. En este sentido, Assude y Gelis (2002) sostienen que el entrelazamiento de trabajar con viejos (lápiz y papel) y nuevos (Cabri Geometry II Plus) artefactos evidencia que hay vínculos que se establecen entre ellos: el antiguo alimenta al nuevo, el cual ilumina al antiguo, pero también el primero puede coexistir con el nuevo en una nueva red de relaciones.

De este modo, artefactos como el simetrizador, que se trabaja con lápiz y papel, y el software Cabri Geometry II Plus pueden complementarse, pues las características que posee uno le permiten mejorar las del otro, enriqueciéndose mutuamente. Así, Assude y Gelis (2002) afirman que Cabri

Geometry es una herramienta que puede proporcionar aspectos diferentes y complementarios a otras herramientas, en el tipo de actividades previstas.

Para Maschietto y Trouche (2010) el uso de herramientas, tanto tradicionales como tecnológicas, tiene un papel importante en la práctica docente, pues la construcción de significados está vinculada a los instrumentos utilizados en la realización de las actividades dadas y en la interacción entre los participantes durante la actividad. Así, el docente tiene la responsabilidad de proponer situaciones didácticas para la enseñanza de la geometría, que involucren el uso de instrumentos tradicionales, como el lápiz y papel y los que han ido surgiendo, tales como las TIC; buscando que el aprendizaje sea más enriquecedor. En este sentido, Douady (1992; citado por Assude & Gelis, 2002) afirma que las situaciones elegidas deben permitir a los estudiantes movilizar conocimientos antiguos, pero estos pueden no ser suficientes para la solución, así que el nuevo conocimiento puede ser el medio necesario para la resolución. De este modo, la dialéctica antigua y nueva emerge como un importante elemento de integración, según lo declarado por Lagrange (2001; citado por Assude & Gelis, 2002): La inclusión de técnicas tradicionales hace que sea posible medir con precisión el interés de integrar en la enseñanza las herramientas tecnológicas.

Assude y Gelis (2002) en su investigación *La dialectique ancien-nouveau dans l'intégration de cabri-géomètre à l'école primaire*, se centran en el problema de las condiciones y limitaciones de la integración de Cabri Geometry en la enseñanza de la geometría en las clases regulares de la escuela primaria y además, en la dialéctica antigua y nueva de la integración del estudio de los tipos de tareas y tipos de técnicas propuestas en el aula por los docentes. Encontrando que el entrelazamiento de las tareas y técnicas en Cabri Geometry y lápiz y papel permiten la profundización conceptual, incluso cuando se trabaja con dificultades instrumentales.

Por último, cabe resaltar el trabajo realizado por Hoyos (2006), cuya tesis principal sostiene que hay una función complementaria entre artefactos, como el software Cabri Geometry II, y un conjunto de pantógrafos con configuraciones geométricas distintas. En esta investigación se observó que los estudiantes desarrollaron procesos de intuición y objetivación en torno de algunas nociones matemáticas como son la proporcionalidad y la comparación entre magnitudes de diferente dimensión, llegando a concluir que "es probable que el *software* y los pantógrafos hayan satisfecho funciones complementarias en el desarrollo del aprendizaje y la comprensión de las propiedades de las transformaciones geométricas" (p. 40).

CAPITULO III

DISEÑO DE LAS SITUACIONES DIDÁCTICAS Y ANÁLISIS *A PRIORI*

En este capítulo se presenta el diseño de la secuencia didáctica con su respectivo análisis *a priori*. En el análisis *a priori*, las unidades de análisis se centran en las dimensiones que componen los análisis preliminares: la dimensión epistemológica, cognitiva y didáctica.

En el diseño de la secuencia didáctica se tienen en cuenta algunas ***variables didácticas***, que pueden provocar un cambio de estrategia en los estudiantes y así lograr la conceptualización de las propiedades de la simetría axial:

- El artefacto que es utilizado para realizar las situaciones, como el simetrizador y el software Cabri Geometry II Plus.
- El trazo global y puntual de una figura cuando se dibuja usando el simetrizador.
- El tamaño y la forma de las figuras simétricas.
- La dirección del eje, que puede ser vertical, horizontal u oblicuo y presentarse dentro o fuera de la figura.
- La construcción o no de la figura simétrica, puesto que con el simetrizador se construye la simétrica mientras que en Cabri Geometry II Plus se presenta tanto la figura inicial como su imagen.
- Posición de la figura inicial y la figura simétrica.

3.1 Análisis de la Secuencia Didáctica

En este análisis se examinan los elementos de una situación a-didáctica que intervienen en la secuencia didáctica: las *acciones* que realizan los estudiantes sobre el *medio*, las *retroacciones* que recibe de éste y cómo *valida* el estudiante, esto en relación a los posibles obstáculos, errores o dificultades que los estudiantes pueden presentar al resolver cada tarea; también se analizan las fases de la gestión didáctica del profesor durante el desarrollo de la secuencia didáctica, explicitando el contrato didáctico, los actos de devolución y en qué momento se dan las fases de validación y de institucionalización(ver Figura 31).

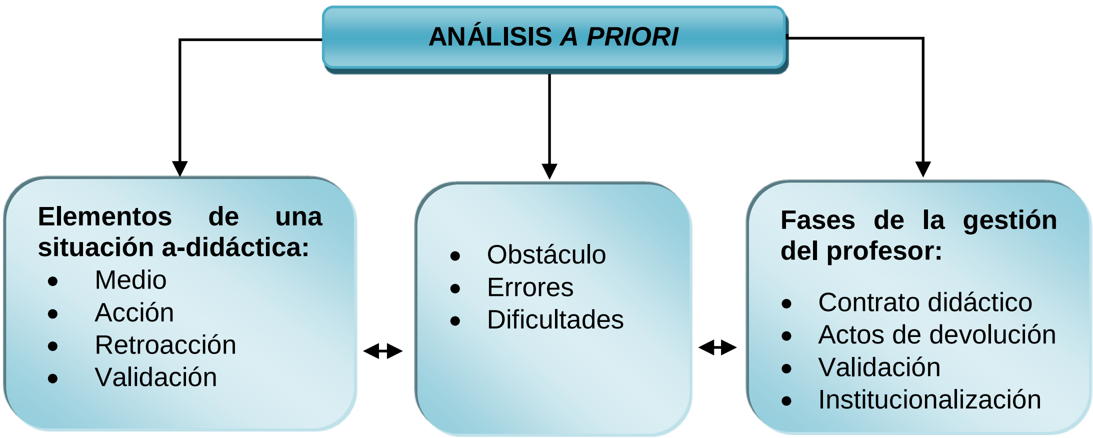


Figura 31. Estructura del análisis *a priori*

La secuencia didáctica se compone de cuatro (4) situaciones que se trabajan en parejas, en un tiempo aproximado de seis (6) horas y treinta (30) minutos. Estas situaciones se caracterizan por ser situaciones de acción que involucran en cada tarea espacios donde los estudiantes explicitan sus estrategias de solución (situación de formulación).

Al inicio de cada situación el docente[33] entregará a los estudiantes la respectiva hoja de trabajo; ésta consiste en una hoja de papel donde los estudiantes encuentran las preguntas de las tareas y dónde deben escribir las respuestas. Finalizados cada sesión se recoge la hoja de trabajo, la cual se retorna en la siguiente sesión cuando el tiempo no alcance para que la mayoría de los estudiantes finalicen. El docente establecerá dentro del *contrato didáctico* el tiempo que tienen para resolver la situación.

En la primera situación se les presenta a los estudiantes el simetrizador[34] como "el mecano", esto con el fin de no revelarles que las tareas que van a resolver tienen que ver con la simetría. Además, les indicará que el mecano tiene dos puntas, la punta C con la cual se subrayan las figuras y la punta D que contiene un lápiz, con el cual se dibuja la figura simétrica (ver Figura 32 y Anexo 1).

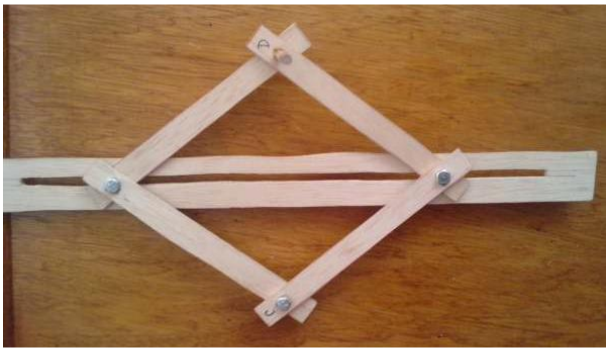


Figura 32. Simetrizador utilizado por el docente

Del mismo modo, antes de realizar las situaciones donde se utiliza Cabri Geometry II Plus, el docente les indicará que inicialmente abran el archivo INICIO y desde allí vayan abriendo cada tarea según corresponda.

[33] Las docentes encargadas durante el proceso de experimentación fueron las autoras de esta investigación, debido al manejo que tienen de la Teoría de Situaciones Didácticas.

[34] El simetrizador con el que se realiza la explicación en el tablero es de mayor tamaño que el que se da a los estudiantes para el desarrollo de la secuencia didáctica.

El archivo INICIO ha sido adecuado de manera que los estudiantes sólo puedan utilizar la herramienta “Apuntador”, con el fin de que sea ubicada fácilmente en el panel de comandos y evitar que usen otras comandos que pueden distorsionar el propósito de la tarea; sino más bien, que inviertan el tiempo en la búsqueda de estrategias para la solución de cada tarea haciendo uso de la herramienta “Apuntador”, ya que ésta es la única herramienta necesaria para la realización de las tareas.

Las tareas que se proponen en las situaciones que involucran Cabri Geometry II Plus incluyen la primera operación de tipo de tarea de *caja negra*, puesto que el estudiante explora las figuras presentadas en cada situación y encuentra el comportamiento común de estas figuras cuando son arrastradas, permitiéndole el acercamiento a las propiedades de la simetría axial.

El propósito de cada situación y el tiempo requerido para su desarrollo se muestra en la tabla 2:

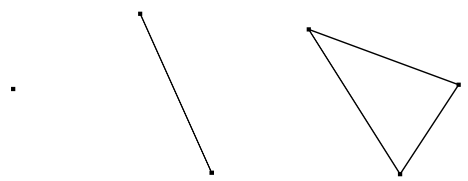
Tabla 2.
Estructura de la secuencia didáctica

SITUACIONES	PROPÓSITOS	TIEMPO
“Dibujando con un mecano”	Determinar las relaciones entre la figura dada y la obtenida con el simetrizador.	90 minutos
“Uniendo mitades”	Identificar la congruencia como una propiedad de las figuras simétricas.	45 minutos
“El automóvil”	Reconocer que en las figuras simétricas se invierte la orientación de las figuras.	45 minutos

SITUACIONES	PROPÓSITOS	TIEMPO
	Identificar la dependencia de la figura imagen en relación a la figura inicial.	
“Distintos lugares”	Reconocer las diferentes direcciones de los ejes de simetría: vertical, horizontal y oblicuo.	120 minutos

3.1.1 *Situación 1. “Dibujando con un mecano”*

Tarea 1. Con la punta C del mecano subraya las figuras:



1. ¿Qué dibujo se obtuvo en cada caso?
2. ¿Qué similitudes y diferencias encuentras entre las figuras subrayadas y las obtenidas con el mecano?

Para la realización de esta tarea el docente facilita a los estudiantes el *medio* con el que van a interactuar para resolver la tarea; en este caso, brinda algunos componentes del *medio*, como un simetrizador de menor tamaño que el presentado por el profesor en su explicación, y medio pliego de papel bond, donde se encuentran dibujados un punto, un segmento y un triángulo, en forma vertical. Los estudiantes deben tener a su disposición un lápiz.

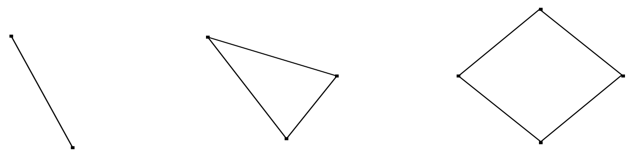
Para dar solución a esta tarea se requiere que los estudiantes movilicen saberes como el reconocimiento de las figuras geométricas. Por otra parte, esta tarea moviliza nuevos saberes como la identificación de que la imagen de una figura realizada por medio de un simetrizador es la misma que la inicial, pero en dirección opuesta.

Inicialmente, los estudiantes deben realizar la *acción* de subrayar las figuras indicadas, con la punta C del simetrizador, de manera que éste producirá como *retroacción* un dibujo estático, similar al subrayado. Como el estudiante no tiene práctica en su utilización el dibujo imagen no resulta tan exacto. De este modo, una de las *dificultades* que pueden presentar los estudiantes durante el desarrollo de esta tarea tiene que ver con el manejo técnico del simetrizador, puesto que al ser una máquina desconocida para ellos en un primer momento puede resultar difícil su uso, generando en los estudiantes un proceso de *instrumentalización*, donde desarrollan *esquemas de uso* que les permitirán descubrir el manejo de este *artefacto*: conocer cómo es el movimiento de los vértices, cómo debe ser colocado el simetrizador para poder subrayar la figura dada, e incluso identificar que la base (eje de simetría) por donde se deslizan los vértices A y B debe permanecer quieta durante su utilización, entre otros.

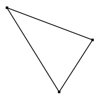
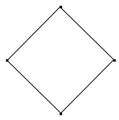
Durante esta tarea, como los estudiantes no han avanzado hacia el proceso de *instrumentación,* puede ocurrir que no obtengan la figura esperada. En este caso, el estudiante debe *validar* si la figura imagen es congruente a la figura subrayada, en caso contrario el docente realizará un *acto de devolución*, sugiriéndole que subraye nuevamente la figura, explicándole el procedimiento que utilizó; de modo que si el docente observa que el estudiante utiliza un procedimiento inadecuado le mostrará el error en su utilización.

En el desarrollo de la tarea se requiere que el docente les pregunte a cada grupo de trabajo el procedimiento usado, de modo que pueda hacer indicaciones al grupo de estudiantes.

Tarea 2. Con la punta C del mecano subraya por puntos cada figura y une con regla los puntos obtenidos por el mecano:



1. ¿Cuál crees que es el número mínimo de puntos que se necesitan para formar cada figura, tanto la subrayada con el mecano (figura inicial) como la obtenida por este (figura final)?

Figura	**Número mínimo de puntos de la figura inicial**	**Número mínimo de puntos de la figura final**
		
		
		

Para la realización de esta tarea el docente facilita a los estudiantes el *medio* con el que van a interactuar para resolver la tarea; en este caso, brinda algunos componentes del *medio*, como un simetrizador y medio pliego de papel bond, donde se encuentran dibujados un segmento, un triángulo y un rombo, en forma vertical. Además, los estudiantes deben tener a su disposición una regla y un lápiz.

Para resolver esta tarea se requiere que los estudiantes movilicen saberes como el reconocimiento de las figuras geométricas, para que al unir los puntos con ayuda de la regla, obtengan la imagen simétrica. Por otra parte, esta tarea moviliza nuevos saberes como la identificación del mínimo número de puntos que requiere una figura para ser dibujada, en otras palabras, se utiliza el teorema por dos puntos pasa una recta y solo una.

Con el fin de superar las posibles dificultades técnicas presentes en la tarea 1, se plantea en esta tarea que el subrayado de las figuras dadas se haga mediante puntos, con lo cual se busca que el dibujo imagen que obtienen los estudiantes sea congruente a cada figura subrayada, pues al unir los puntos con regla se garantiza que los lados de las figuras sean rectos, ya que al hacerlos con el simetrizador el resultado es similar que al realizarlos a mano alzada.

Los estudiantes deben realizar la *acción* de subrayar mediante puntos las figuras indicadas, con la punta C del simetrizador, de manera que éste producirá como *retroacción* un dibujo estático, constituido por puntos que deberá unir con ayuda de una regla, para obtener la imagen simétrica del dibujo subrayado.

Uno de los *errores* que pueden presentar los estudiantes durante el desarrollo de esta tarea tiene que ver con la unión de puntos mediante segmentos, pero de forma aleatoria, lo que ocasionaría que no se obtuviera la figura simétrica de la subrayada, en este caso el rombo, sino una figura diferente, como triángulos que comparten un lado en común. Si esto ocurriera, el docente mediante un *acto de devolución*, deberá buscar la manera de hacer reflexionar al estudiante sobre los casos anteriores (el segmento y el triángulo); por ejemplo, preguntarle ¿cuándo uniste los puntos que resultaron de subrayar el segmento y el triángulo qué figuras obtuviste? De esta manera, la intervención del docente provocará que el estudiante *valide* si sus *acciones* han sido las correctas, en caso contrario, deberá buscar otra manera de unir los puntos.

Del mismo modo, puede suceder que los estudiantes presenten *dificultades* para encontrar el mínimo número de puntos que se necesita para dibujar cada figura, tanto inicial como final. Si el estudiante responde un número de puntos superior al necesario, el docente realizará un acto devolución, sugiriéndole que vaya quitando de un punto y observe si sigue siendo la misma figura.

Tarea 3. Representa cómo quedaría una mano, media luna y la letra P si la dibujaras con el mecano.

Para la realización de esta tarea el docente facilita a los estudiantes un componente del *medio* con el que van a interactuar para resolver la tarea; en este caso medio pliego de papel bond y los estudiantes deben tener a su disposición un lápiz.

Para dar solución a esta tarea se requiere que los estudiantes movilicen saberes cotidianos como la forma que tiene una mano, media luna y la letra P. Por otra parte, esta tarea moviliza nuevos saberes como la identificación de que la imagen de una figura realizada por medio de un simetrizador es la misma que la inicial, pero en dirección opuesta, en otras palabras las figuras son congruentes.

Para resolver esta tarea los estudiantes podrían colocar una de sus manos sobre las hojas de trabajo delineando cada uno de sus dedos, para formar la figura que en las tareas anteriores han subrayado; es decir, la figura inicial. Para obtener la figura simétrica los estudiantes pueden hacer el mismo proceso pero utilizando la mano contraria. Del mismo modo los estudiantes deberán hallar una estrategia para representar la media luna y la letra P.

Puede presentarse que los estudiantes tengan *dificultades* para reconocer las características que tiene la figura simétrica realizada por un simetrizador. De ahí que, podría utilizar la misma mano para representar la figura inicial y la simétrica, dibujar la media luna y la letra P, en el mismo sentido, como si la figura hubiera sido *trasladada*. En estos casos, el docente deberá realizar *actos de devolución* retomando las tareas anteriores, en otras palabras, deberá hacer preguntas que lleven a los estudiantes a identificar la orientación que tiene la figura inicial y su imagen. Por ejemplo, podría preguntar: ¿hacia dónde se dirigía el segmento que subrayaste en la tarea 2 y hacía dónde la obtenida por el mecano?; si el estudiante responde que en la tarea 2 el segmento subrayado va hacia la izquierda y el obtenido va hacia la derecha, el docente preguntará ¿hacia dónde se dirigen cada pareja de figuras que dibujaste: la mano, la media luna y la letra P?; esto provocará que los estudiantes *validen* si la estrategia utilizada es la correcta y en caso contrario intenten con otra.

Tarea 4. Si con el mecano se pudiera realizar cualquier tipo de figura, ¿cuáles de estas figuras serían dibujadas por él? ¿Por qué?

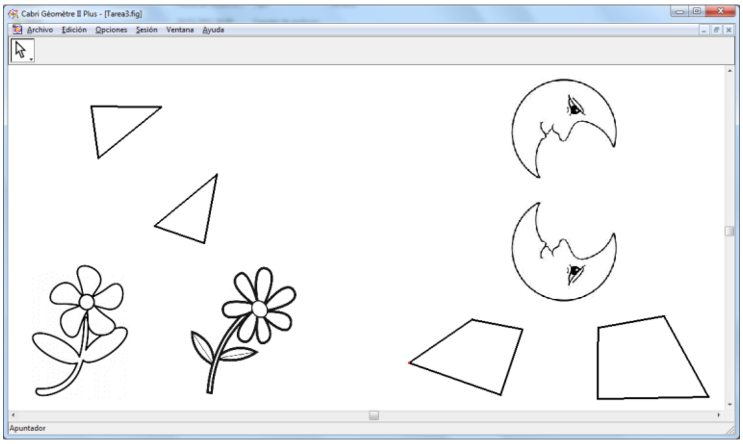


Figura 33. Situación 1_Tarea 4

Para la realización de esta tarea los estudiantes se ubicarán por parejas en un computador que tenga instalado Cabri Geometry II Plus, donde abrirán el archivo "Situación1_Tarea4" desde el archivo INICIO (ver Figura 33).

En esta tarea se requiere que los estudiantes movilicen los saberes adquiridos en las tareas anteriores. Por otra parte, esta tarea moviliza nuevos saberes como el reconocimiento de que en las figuras simétricas el movimiento de la figura final depende de la inicial y que éstas se alejan o se acercan entre ellas con respecto a un eje.

Para dar solución a esta tarea los estudiantes deberán tener presente que las figuras sean las mismas y que la orientación entre ellas sea opuesta. De no ser así, pueden tener *dificultad* para identificar figuras simétricas, lo que les llevaría a afirmar que todas las figuras son simétricas, obviando que las flores y los cuadriláteros no son simétricos entre sí, puesto que aunque las flores tienen una orientación opuesta, no tienen el mismo número de pétalos, ni el mismo tallo; de igual modo, no se puede decir que los cuadriláteros son simétricos, puesto que sus lados no tienen la misma longitud, es decir no son figuras congruentes.

En este caso, el docente a través de un *acto de devolución* les hará recordar mediante preguntas los resultados de las tareas anteriores. Lo cual los lleva a *validar* si la respuesta ha sido correcta y en caso contrario la corrijan.

3.1.2 *Situación 2. "Uniendo mitades"*

Tarea 1. Forma corazones.

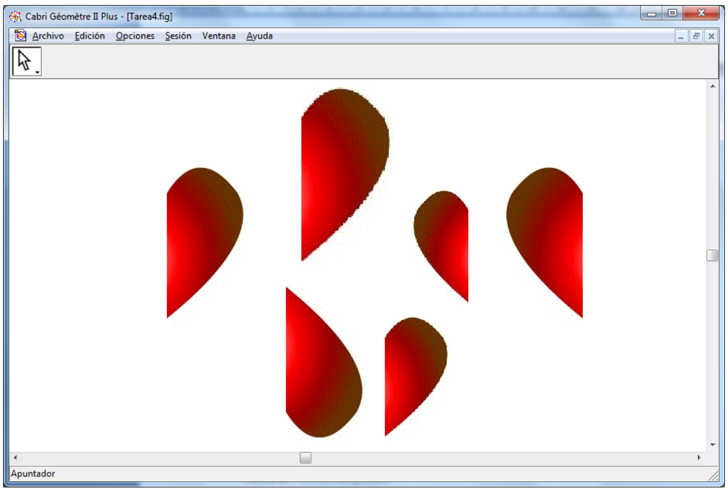


Figura 34. Situación 2_Tarea 1

1. ¿Cuántos corazones se pueden formar con las piezas? ¿Por qué?

2. Describan cómo hicieron para formar corazones.

Para la realización de esta tarea los estudiantes se ubicarán por parejas en un computador que tenga instalado Cabri Geometry II Plus, donde abrirán el archivo “Situación2_Tarea1” desde el archivo INICIO (ver Figura 34).

Durante la ejecución de esta tarea el estudiante pasa por un proceso de *instrumentalización* donde desarrolla *esquemas de uso* que le permitirán descubrir la manera de arrastrar un objeto en el software Cabri Geometry II Plus, en este caso, que las figuras se pueden arrastrar haciendo clic derecho sobre la figura deseada cuando aparece sobre ella una mano con el nombre “Este punto” (ver Figura 35 y Anexo 2).

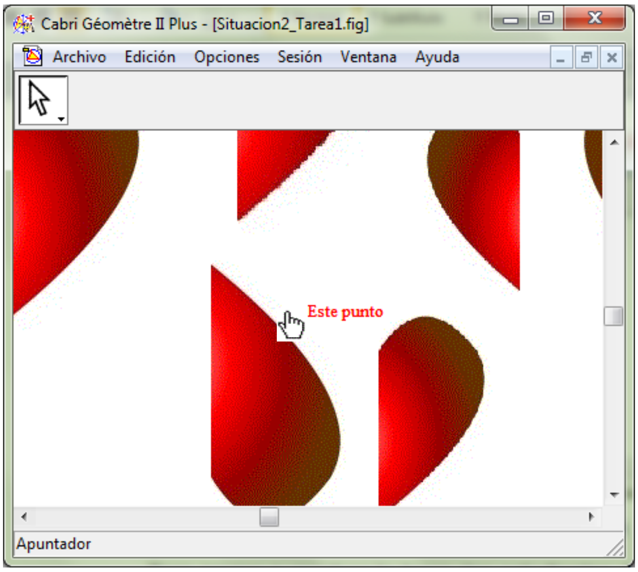


Figura 35. Arrastre de un corazón

Para dar solución a esta tarea se hace necesario que los estudiantes tengan conocimiento sobre la forma de un corazón. Por otra parte, esta tarea moviliza nuevos saberes como la existencia de figuras congruentes, cuya forma y tamaño son iguales; además revela la existencia de figuras cuyo movimiento depende de otro.

Inicialmente, los estudiantes deben realizar la *acción* de arrastrar cada mitad de un corazón hasta formar uno cuyas mitades tengan el mismo tamaño. Durante esta *acción* el estudiante obtiene como *retroacción* una figura estática (figura simétrica) y una dinámica (figura inicial) de la cual depende el movimiento de la simétrica. De este modo, si el estudiante reconoce las mitades que forman el corazón, al intentar mover la figura simétrica (una de las mitades) el *medio* producirá una *retroacción* que le indicará que ésta no se mueve, en este caso el estudiante al *validar* sus *acciones* deberá buscar una nueva estrategia para unir el corazón, hasta encontrar que la estrategia ganadora consiste en arrastrar la mitad izquierda del corazón.

Una de las *dificultades* que pueden presentar los estudiantes al resolver esta tarea, tiene que ver con afirmar que es posible formar más de un corazón con las piezas dadas, lo cual es considerado por Kidder (1976; citado por Acuña & Martínez, s.f.) como un *error* frecuente en los estudiantes, donde no construyen imágenes congruentes de la figura original (inicial). En este caso el docente realizará un *acto de devolución* donde mediante preguntas les hará caer en cuenta que cada mitad de un corazón tiene la misma forma y tamaño.

Tarea 2. Forma mariposas.

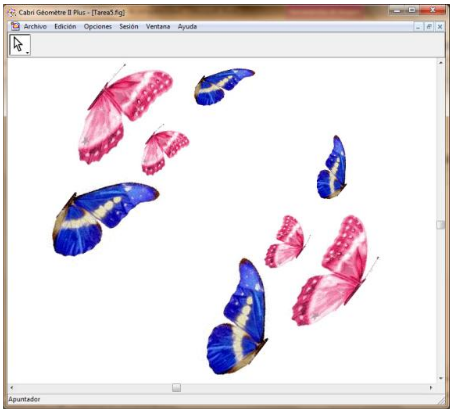


Figura 36. Situación 2_Tarea 2

1. ¿Cuántas mariposas se pueden formar con las piezas? ¿Por qué?
2. ¿Qué ocurre con la parte izquierda y derecha que conforman las mariposas?
3. Si en lugar de mariposas tuvieras piezas para formar balones, ¿qué crees que ocurriría con la parte izquierda y derecha que conforman el balón?

Para la realización de esta tarea los estudiantes se ubicarán por parejas en un computador que tenga instalado Cabri Geometry II Plus, donde abrirán el archivo “Situación2_Tarea2” desde el archivo INICIO (ver Figura 36).

A partir de esta tarea se espera que los estudiantes hayan pasado del proceso de *instrumentalización*, donde desarrollaron el *esquema de uso* del “arrastre de un objeto” de dimensión cero (0) y ahora puedan arrastrar un objeto de dimensión superior o igual a 1. Además, que se encuentren en un proceso de *instrumentación*, donde desarrollen *esquemas de acción instrumentada*, que les permitan manejar de forma más espontánea el arrastre de las figuras presentadas en la pantalla del computador, con la diferencia que en este archivo se arrastran las figuras cuando aparece sobre ella una mano con el nombre “Este triángulo” (ver Figura 37 y Anexo 2).

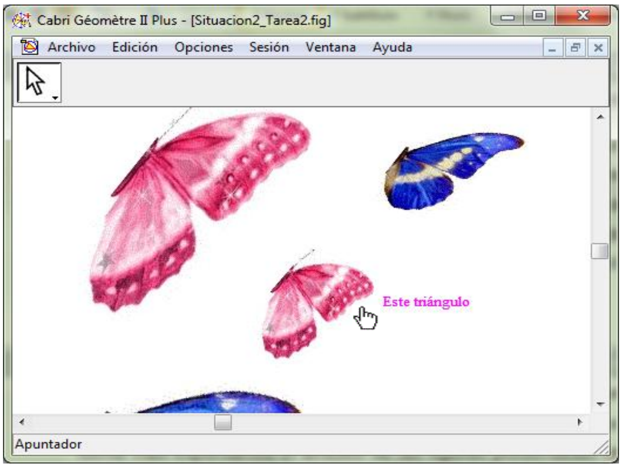


Figura 37. Arrastre de una mariposa

Para dar solución a esta tarea se hace necesario que los estudiantes tengan conocimiento sobre la forma de una mariposa y movilicen los saberes adquiridos en la tarea anterior. Por otra parte, esta tarea refuerza los saberes adquiridos en la tarea anterior como el reconocimiento de figuras congruentes y, la existencia de figuras cuyo movimiento depende de otro.

Para iniciar a resolver la tarea, los estudiantes deberán realizar la *acción* de arrastrar cada mitad de la mariposa hasta formar cuatro, donde las mitades de una mariposa tengan la misma forma, color y tamaño. Durante esta *acción* el estudiante obtiene como *retroacción* una figura estática (figura simétrica) y una dinámica (figura inicial) de la cual depende el movimiento de la simétrica. Como esta tarea al igual que la anterior implica la utilización del arrastre para formar figuras con las mitades presentadas en la pantalla, se espera que el estudiante no se quede tratando de mover una figura estática (figura simétrica) sino que haya descubierto que para formar una mariposa se necesita el movimiento de una de sus mitades, en este caso la que funciona como figura inicial. De ahí que, el estudiante debe argumentar que en cada mariposa hay una parte que se mueve, sea la derecha o la izquierda dependiendo de la mariposa, o en otras palabras, puede responder que la parte izquierda de las mariposas rosadas se mueven mientras la derecha permanece estática, y que en el caso de las mariposas azules el movimiento se da al contrario.

Del mismo modo, los estudiantes deberán anticipar el movimiento de las piezas que conforman un balón sin tenerlas en la pantalla; es decir, deberán prever que el movimiento de una de las mitades del balón depende del movimiento del otro. Sin embargo, puede presentarse como en la investigación de Williford (1972; citado por Acuña & Martínez, s.f.) que a los estudiantes les resulte *difícil* realizar la transformación de manera mental, lo cual no les permitirá anticipar el movimiento de las piezas; en este caso, el docente mediante un *acto de devolución* deberá indicar a los estudiantes que vuelvan arrastrar cada mitad de la mariposas, después le preguntará ¿es posible arrastrar cualquiera de las mitades de las mariposas?, si el estudiante responde que no, el docente puede decirle que imagine que no son mariposas sino balones y responda la pregunta.

3.1.3 *Situación 3. "El automóvil"*

Tarea 1. Felipe y Gustavo parquean sus carros al frente de Computiendas, luego de comprar una cámara, Gustavo desea continuar su recorrido, pero como el carro de Felipe se encuentra frente al suyo debe retroceder. Haz que el carro de Gustavo retroceda.

Figura 38. Situación 3_Tarea 1

1. ¿Se puede retroceder el carro de Gustavo?
2. ¿Cómo hago para que el carro de Gustavo retroceda?
3. Cuando el carro de Felipe va hacia la tienda qué ocurre con el carro de Gustavo.
4. Cuando el carro de Felipe retrocede qué ocurre con el carro de Gustavo.

Para la realización de esta tarea los estudiantes se ubicarán por parejas en un computador que tenga instalado Cabri Geometry II Plus, donde abrirán el archivo “Situación3_Tarea1” desde el archivo INICIO (ver Figura 38).

Para dar solución a esta tarea se hace necesario que los estudiantes movilicen los saberes adquiridos en las tareas anteriores y conozca qué significa que un carro retroceda. Por otra parte, esta tarea refuerza la existencia de figuras cuyo movimiento depende de otro y moviliza nuevos saberes como que en las figuras simétricas se invierte la orientación de las figuras.

Inicialmente, los estudiantes intentarán retroceder el carro de Gustavo realizando la *acción* de arrastrarlo, recibiendo como *retroacción* que no es posible retrocederlo; en este caso el estudiante al *validar* su *acción* deberá buscar otra estrategia que le permita retroceder el carro de Gustavo. Si el estudiante insiste en afirmar que no es posible moverlo, el docente le devolverá el problema sugiriéndole que intente mover otros elementos de la pantalla y observe que ocurre.

Cuando los estudiantes arrastren el carro de Felipe notarán que si éste se dirige hacia la tienda, el carro de Gustavo también lo hace y que si retrocede, afecta el movimiento del carro de Gustavo haciendo que éste haga lo mismo; en otras palabras, que el movimiento de uno de los carros depende del movimiento del otro. Del mismo modo, los estudiantes deberán concluir que los carros tienen una orientación opuesta, pues se acercan y se alejan de la tienda (eje de simetría) al mismo tiempo, pero uno a la izquierda y otro a la derecha de ésta.

3.1.4 *Situación 4. "Distintos lugares"*

Tarea 1. Un joven, un señor y una señora están buscando a sus hermanos gemelos.

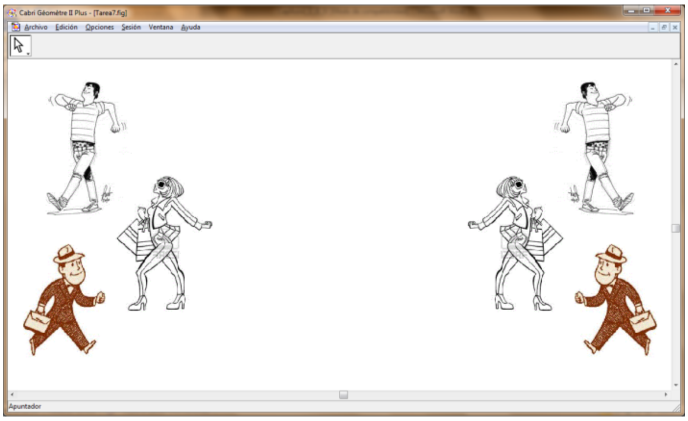


Figura 39. Situación 4_ Tarea 1

1. **1.** Dibuja el camino que debe recorrer la señora y su hermana gemela para que estén con sus manos juntas.
2. **2.** Dibuja el camino que debe recorrer el señor y su hermano gemelo para que estén con sus manos juntas.
3. **3.** Si hubieran más personas buscando a sus hermanos gemelos, cuál crees que sería el camino que deben recorrer para que estén con sus manos juntas.

Para la realización de esta tarea los estudiantes se ubicarán por parejas en un computador que tenga instalado Cabri Geometry II Plus, donde abrirán el archivo “Situación4_Tarea1” desde el archivo INICIO (ver Figura 39).

Para dar solución a esta tarea se hace necesario que los estudiantes movilicen los saberes adquiridos en las tareas anteriores. Por otra parte, esta tarea moviliza nuevos saberes como el reconocimiento de un eje de simetría, en este caso el eje vertical.

Inicialmente, el estudiante debe realizar la *acción* de intentar arrastrar a uno de los gemelos para unir sus manos con las de su hermano, recibiendo como *retroacción* que logró unir las manos de los gemelos o que no lo pudo hacer, dependiendo del gemelo que intentó arrastrar (figura inicial o figura simétrica), en este momento el estudiante debe *validar* si su *acción* fue la correcta y en caso contrario intentar una nueva.

Luego de unir las manos del señor(a) con su hermano(a) gemelo(a) realizará la *acción* de arrastrarlos por la pantalla del computador para observar cuál es el camino que deben recorren para que estén con sus manos juntas, recibiendo como *retroacción* que para que esto ocurra sólo pueden moverse de arriba hacia abajo y viceversa.

Los estudiantes deben predecir que si hubieran más personas buscando a sus hermanos gemelos, recorrerían el mismo camino que el señor(a) con su hermano(a) gemelo(a) para que estén con sus manos juntas. Se espera que el estudiante dibuje una línea vertical (eje de simetría), en su hoja de trabajo, como el camino que responde a las preguntas.

Puede presentarse como en la investigación de Kidder (1976; citado por Acuña & Martínez, s.f.) que los estudiantes no puedan realizar transformaciones cuando se requiera la imaginación; es decir, la evocación de un objeto en su ausencia; de ahí que, les resultará difícil predecir el camino que deben recorrer otros hermanos gemelos para que estén con sus manos juntas. En este caso, el docente realizará un *acto de devolución* donde le indique que imaginando que el joven es una de las otras personas buscando a sus hermanos gemelos, vuelva a realizar la actividad que hizo con el señor(a) y su hermano(a) gemelo(a) y luego responda la tercera pregunta.

Tarea 2.

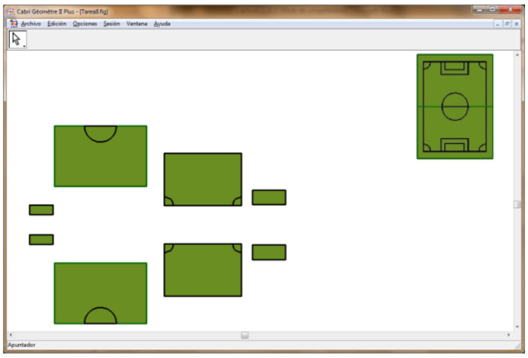


Figura 40. Situación 4_Tarea 2

1. A partir de las piezas que están a la izquierda construye una cancha de futbol como se muestra en la pantalla.
2. Intenta construir la cancha en otra parte de la pantalla. Comparándola con la posición de la cancha anterior, ¿dónde quedó ubicada la nueva cancha?

3. Si tuvieras que ubicar nuevamente la cancha en otra parte de la pantalla, distinta a las anteriores, ¿dónde crees que quedaría ubicada? Representa mediante un dibujo cómo quedaron ubicadas las tres canchas.

Para la realización de esta tarea los estudiantes se ubicarán por parejas en un computador que tenga instalado Cabri Geometry II Plus, donde abrirán el archivo "Situación4_Tarea2" desde el archivo INICIO (ver Figura 40).

Se espera que para esta tarea los estudiantes estén en un proceso de *instrumentación*, donde haya desarrollado *esquemas de acción instrumentada* que le permitan manejar de forma más espontánea el arrastre de las figuras presentadas en la pantalla del computador, con la diferencia que en este archivo se arrastran las figuras cuando aparece sobre ella una mano con el nombre "Este polígono" (ver Figura 41).

Figura 41. Arrastre de una pieza de la cancha

Para dar solución a esta tarea se hace necesario que los estudiantes movilicen los saberes adquiridos en las tareas anteriores. Por otra parte, esta tarea moviliza nuevos saberes como el reconocimiento del eje de simetría horizontal.

Inicialmente, los estudiantes deben realizar la *acción* de arrastrar cada una de las piezas tratando de construir la cancha de futbol que se muestra en la pantalla. Por cada una de sus *acciones* el *medio* le responderá con una *retroacción*, ya sea que la pieza quedó o no bien ubicada, o que ésta no puede moverse. El estudiante debe *validar* si estas *acciones* responden a la tarea planteada; de ahí que, si al analizar las respuestas del *medio* considera que una pieza quedó bien ubicada podrá continuar arrastrando las demás piezas hasta formar la cancha, pero si las respuesta del *medio* le muestra que la pieza no quedó bien ubicada o que ésta no puede moverse deberá buscar otra estrategia para mover la pieza o para ubicarla, de modo que quede igual a la que se muestra en la pantalla.

Si el estudiante logra construir la cancha igual a la mostrada en la pantalla, se espera que la pueda reconstruir en otro lado de ésta y responda que quedó ubicada al lado derecho o izquierdo de la anterior. De igual modo se espera que el estudiante pueda predecir la ubicación de la tercera cancha y representar mediante un dibujo cómo quedaron ubicadas las tres canchas, identificando que éstas están sobre una línea horizontal (eje de simetría).

Una *dificultad* que pueden presentar los estudiantes en el desarrollo de esta tarea es la de identificar la posición del eje de simetría (Moyer, 1974 & Schultz, 1977; citados por Jaime, 1993), esto puede verse reflejado cuando un estudiante tiene *dificultad* para predecir la ubicación de una nueva cancha, en este caso, el docente mediante un *acto de devolución* le indicará que intente construir nuevamente la cancha en otro lado de la pantalla e identifique donde quedó ubicada con respecto a las anteriores para que pueda representar la ubicación de las tres canchas.

Tarea 3. Cada pez se encuentra disgustando con su pareja (de la misma especie) para reconciliarse deben darse besos.

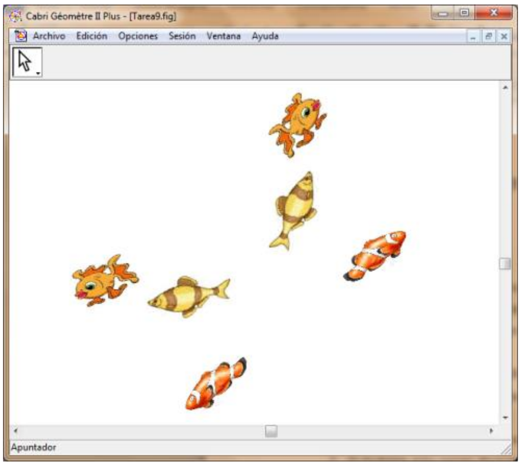


Figura 42. Situación 4_Tarea 3

1. Dibuja el camino que deben recorrer los peces para darse besos.
2. Si hubieran más peces disgustados con su pareja, ¿dónde crees que se reconciliarían? Dibuja el camino que forman las cuatro parejas de peces dándose besos.

Para la realización de esta tarea los estudiantes se ubicarán por parejas en un computador que tenga instalado Cabri Geometry II Plus, donde abrirán el archivo "Situación4_Tarea3" desde el archivo INICIO (ver Figura 42).

Para dar solución a esta tarea se hace necesario que los estudiantes movilicen los saberes adquiridos en las tareas anteriores. Por otra parte, esta tarea moviliza nuevos saberes como el reconocimiento del eje de simetría oblicuo.

Inicialmente, los estudiantes deben realizar la *acción* de arrastrar cada uno de los peces de modo que puedan reconciliarse con su pareja (de la misma especie) dándose besos, recibiendo como *retroacción* que logró unir la boca de los peces (de la misma especie) o que no lo pudo hacer, dependiendo del pez que intentó mover (figura inicial o figura simétrica), en este momento el estudiante debe *validar* si su *acción* fue la correcta y en caso contrario intentar una nueva.

Después de unir la boca de los peces (de la misma especie) los estudiantes realizarán la *acción* arrastrar cada pareja por la pantalla del computador para observar cuál es el camino que deben recorren los peces para darse besos, recibiendo como *retroacción* que para que esto ocurra sólo pueden moverse en dirección oblicua. Se espera que dibujen una línea oblicua como el camino que deben recorrer los peces para mantener sus bocas juntas.

Los estudiantes deben predecir que si hubiera más peces disgustados con su pareja se reconciliarían en cualquier posición dentro de la línea oblicua que recorren los otros peces.

Puede presentarse como en la investigación de Schultz y Austín (1983; citado por Acuña & Martínez, s.f.) que los estudiantes tengan dificultad en identificar la dirección del movimiento, más cuando se utiliza un eje oblicuo para realizar la transformación; por lo que les resultará difícil predecir dónde se ubicarían más peces para reconciliarse. En este caso, el docente realizará un *acto de devolución* sugiriéndole que imagine que una de las parejas de peces es otra pareja de peces disgustados y que trate de ubicarlos en una posición diferente a la actual donde se puedan dar besos, y luego responda la segunda pregunta.

Finalizada la secuencia didáctica, el docente en un espacio colectivo propondrá que cada pareja de estudiantes de a conocer la solución a sus tareas y defienda las estrategias que usaron (*fase de validación*).

Finalmente, en la *fase de institucionalización* el docente expondrá con claridad la intención didáctica de la actividad, recogiendo las ideas expuestas por los estudiantes en la *fase de validación* y transformándolas en nociones matemáticas, específicamente en las propiedades de la simetría axial, como la congruencia de las figuras simétricas, la orientación inversa de las figuras simétricas y el reconocimiento de ejes de simetría (horizontal, vertical, oblicuo).

CAPÍTULO IV

ANÁLISIS *A POSTERIORI* Y RESULTADOS

En este capítulo se analizan los datos recogidos durante la experimentación de la secuencia didáctica realizada al grado tercero, examinando si ocurrió lo planteado en el análisis *a priori* y los posibles sucesos que no fueron previstos, a fin de confrontar si son ciertas las hipótesis planteadas al inicio de esta investigación (ver página 14).

4.1 Marco contextual

Esta investigación fue implementada en una Institución Educativa de carácter público de la ciudad Santiago de Cali, a treinta y cuatro (34) estudiantes de grado tercero, cuyas edades oscilan entre siete (7) y nueve (9) años, durante el año lectivo 2012. Su jornada de estudio es matutina, de 7:00 a.m. a 12:00 p.m. de lunes a viernes.

Se seleccionó este grupo para realizar la experimentación, puesto que la maestra hace parte del grupo de docentes del área de matemáticas y su disposición a este tipo de experiencia fue positiva; tanto así, que al iniciar el desarrollo de la secuencia didáctica, quiso involucrarse explicándole a los estudiantes como era el manejo del simetrizador, de modo que fue necesario hacerle saber que dicha explicación no era pertinente, dado que la TSD determina una gestión del maestro.

Por petición de la docente se realizó una guía (ver Anexo 9) que retomaba aspectos del análisis *a priori* y daba cuenta de lo que se iba a trabajar con los estudiantes.

Por otra parte, la escogencia de esta institución se vio influenciada por el apoyo que ésta le ha brindado a este tipo de estudios, dando la oportunidad de implementar con los estudiantes nuevas estrategias de enseñanza, con el fin de mejorar la calidad de la educación matemática.

La experimentación de la secuencia didáctica fue llevada a cabo del 6 al 20 de marzo de 2012 (ver Tabla 3), tres (3) días en el salón de clase y tres (3) días en una sala del área de matemáticas que contaba con diez (10) computadores de puesto, los cuales tenían instalado el software Cabri Geometry II Plus.

Cabe anotar que se pensaba utilizar una sala que contaba con veinte (20) computadores (que usa bachillerato y primaria), para que el trabajo fuera realizado por parejas, sin embargo esta sala presentó un daño, de modo que se tuvo que utilizar otra que tenía menos computadores, obligando a trabajar en grupos de tres o cuatro estudiantes. Caso contrario ocurrió durante el desarrollo de las tareas que requirieron la utilización del simetrizador, pues los estudiantes se ubicaron por parejas (en el suelo), repartiéndose por todo el salón.

Además de las salas mencionadas anteriormente, los niños de primaria cuentan con una exclusiva para este nivel, pero la docente del grupo de niños sugirió utilizar otra porque en estos momentos los espacios eran demasiados reducidos, ya que la cantidad de grupos había aumentado debido a que las instalaciones de una de las sedes estaba en reparación.

Respecto a la recolección de datos para los análisis, en cada sesión se obtuvieron producciones de los estudiantes mediante las hojas de trabajo; se realizaron registros fotográficos, de audio y de video. De estos datos se tomaron los más relevantes para justificar las tareas, por esto durante el análisis de los datos, los estudiantes no se distinguen (se denotan con la letra ***E***), pues sólo interesa mirar algunas acciones que determinen la *complementariedad*.

En cuanto a los estudiantes, es importante mencionar que los niños no habían usado Cabri Geometry II Plus a pesar de que la institución cuenta con la licencia institucional de este programa.

4.2 Análisis *a posteriori*

En este análisis se presentan los sucesos ocurridos durante la experimentación, verificando si se cumplió lo propuesto en el análisis *a priori* y dando a conocer aquellos acontecimientos que no se tuvieron previstos.

Por otra parte, el tiempo que se planteó en el análisis *a priori* para la implementación de la secuencia didáctica fue el adecuado, pues no hubo necesidad de ampliarlo, sino que se utilizaron seis (6) horas repartidas en seis sesiones, de las cuales la última fue tomada para la *institucionalización* (ver Tabla 3).

Tabla 3.

Ejecución de la secuencia didáctica

FECHA	ACTIVIDAD REALIZADA	No. ESTUDIANTES	TIEMPO
6 de marzo	Situación 1 – Tarea 1	34 estudiantes	60 minutos
7 de marzo	Situación 1 – Tarea 2 y 3	33 estudiantes	80 minutos
12 de marzo	Situación 1 – Tarea 4	31 estudiantes	50 minutos

FECHA	ACTIVIDAD REALIZADA	No. ESTUDIANTES	TIEMPO
13 de marzo	Situación 2 y Situación 3	33 estudiantes	60 minutos (30 minutos cada situación)
14 de marzo	Situación 4	33 estudiantes	65 minutos
20 de marzo	Institucionalización	33 estudiantes	45 minutos

4.2.1 *Situación 1. “Dibujando con un mecano”*

Comparando el tiempo propuesto en el análisis *a priori* para el desarrollo de la situación 1 (ver Tabla 2) y el tiempo que realmente se utilizó durante la experimentación (ver Tabla 3), se puede inferir que el trabajo con el simetrizador tuvo un grado de dificultad mayor que el esperado, lo que originó que el tiempo utilizado durante la experimentación fuera mayor que el propuesto en el análisis *a priori*.

Un simetrizador, el software Cabri Geometry II Plus, regla, lápiz y papel bond hacen parte del *medio* que es utilizado para resolver esta situación.

Como fue planeado en el análisis *a priori*, el docente explica a los estudiantes las partes que componen el simetrizador, antes que inicien a resolver cada tarea.

Para dar solución a la **tarea 1**, los estudiantes inicialmente realizaron la *acción* de dibujar con la punta D del simetrizador la figura dada, lo cual no se había previsto en el análisis *a priori*, por lo que el docente vio la necesidad de realizar un *acto de devolución* preguntándole a los estudiantes (cada pareja) ¿cuál es la punta C del mecano? ¿con la punta C subrayaste la figura? Esto los llevó a validar que su *acción* no fue la correcta, intentando realizar otra *acción*: subrayar la figura con la punta C. Sin embargo, los dibujos obtenidos por el simetrizador eran rayones, por lo que los estudiantes afirmaban que no se obtenía nada. Esto se debía a que los estudiantes movían la base (eje de simetría) del simetrizador, pues todavía sus *esquemas de uso* no se habían desarrollado completamente; de modo que el docente intervino indicándoles que le mostraran como subrayaban la figura.

Mientras los estudiantes intentaban nuevamente subrayar la figura, decían:

E: Pero es que se mueve y no me sale nada.

D: ¿Cómo harías para que no se mueva?

E: Hay que cogerlo.

D: Entonces, intenta dibujarlo nuevamente.

Así, los estudiantes desarrollaron *esquemas de uso* que le permitieron descubrir cómo se movían los vértices del simetrizador, cómo debía ser colocado para poder subrayar la figura dada e identificaron que la base (eje de simetría) por donde se deslizaban los vértices A y B debía permanecer quieta durante su utilización. En la Figura 43 se observa el triángulo simétrico que obtuvo una pareja de estudiantes al utilizar el simetrizador.

En la **tarea 1** se esperaba que los estudiantes pudieran decir que en cada caso se obtenía la misma figura que fue subrayada, encontrando como similitudes que siempre se obtenía la misma figura, y como diferencia, que la figura obtenida por el mecano era la misma inicial pero invertida. Sin embargo, al examinar las hojas de trabajo de los estudiantes se evidencia que la mayoría de ellos lograron identificar que en cada caso se obtiene la misma figura (ver Figura 44) pero no lograron escribir como diferencia que la figura final tiene dirección opuesta a la inicial.

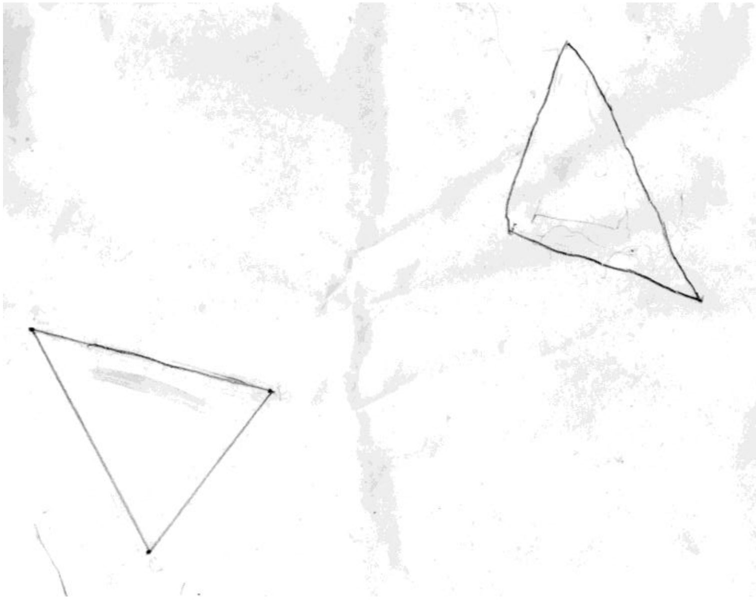


Figura 43. Triángulo obtenido con el simetrizador

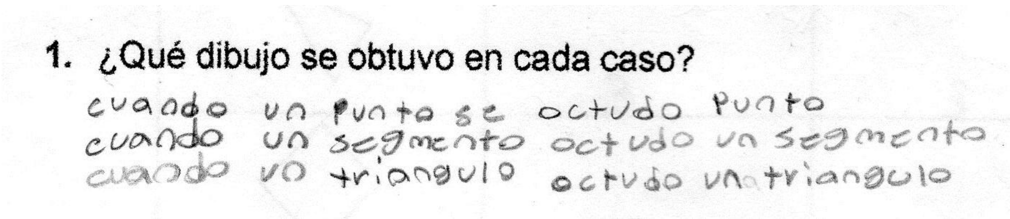


Figura 44. Respuesta a la Situación 1_Tarea 1

Al inicio de la situación 1 el proceso de instrumentalización del simetrizador se tornó un tanto difícil, pues en ocasiones los vértices A y B no se deslizaban por el eje de simetría, ocasionando que no se pudiera subrayar la figura inicial y por ende no se obtuviera ninguna figura; lo cual resultaba del estado de los simetrizadores, ya que no habían sido usados. Pero el entusiasmo y las ganas de los estudiantes de realizar las tareas ayudaron en el proceso de instrumentalización, de modo que en la **tarea 2** ya tenían un mejor manejo de este artefacto, pues ya sabían que el eje debía permanecer quieto, por lo que mientras un estudiante subrayaba la figura su compañero sostenía el eje (ver Figura 45 y Anexo 3).

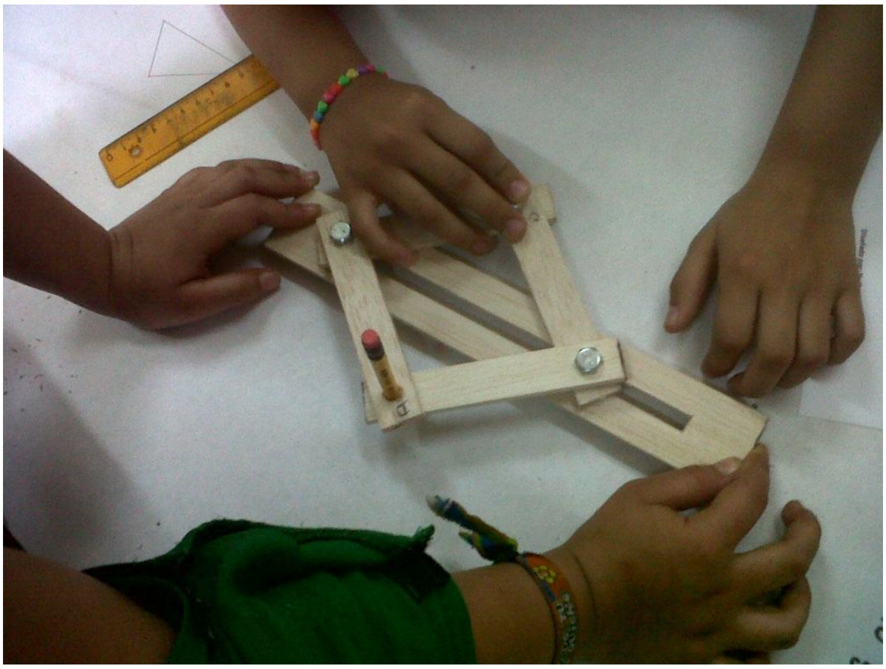


Figura 45. Estudiantes manejando el simetrizador

Como se había previsto en el análisis *a priori*, en la **tarea 2** los estudiantes realizaron la *acción* de subrayar por puntos cada figura dada, obteniendo como *retroacción* la misma cantidad de puntos que subrayaron con el simetrizador. Luego, unieron los puntos con una regla, lo cual les permitió construir figuras finales más parecidas a las iniciales; sin embargo, les resultó más complejo ubicar el simetrizador para subrayar el rombo que para subrayar el segmento y el triángulo.

En el momento de unir los puntos obtenidos por el simetrizador, con regla, ningún estudiante los unió de forma aleatoria como se supuso en el análisis *a priori,* sino que esta unión por puntos permitió que el estudiante identificara que las figuras eran opuestas (ver Figura 46).

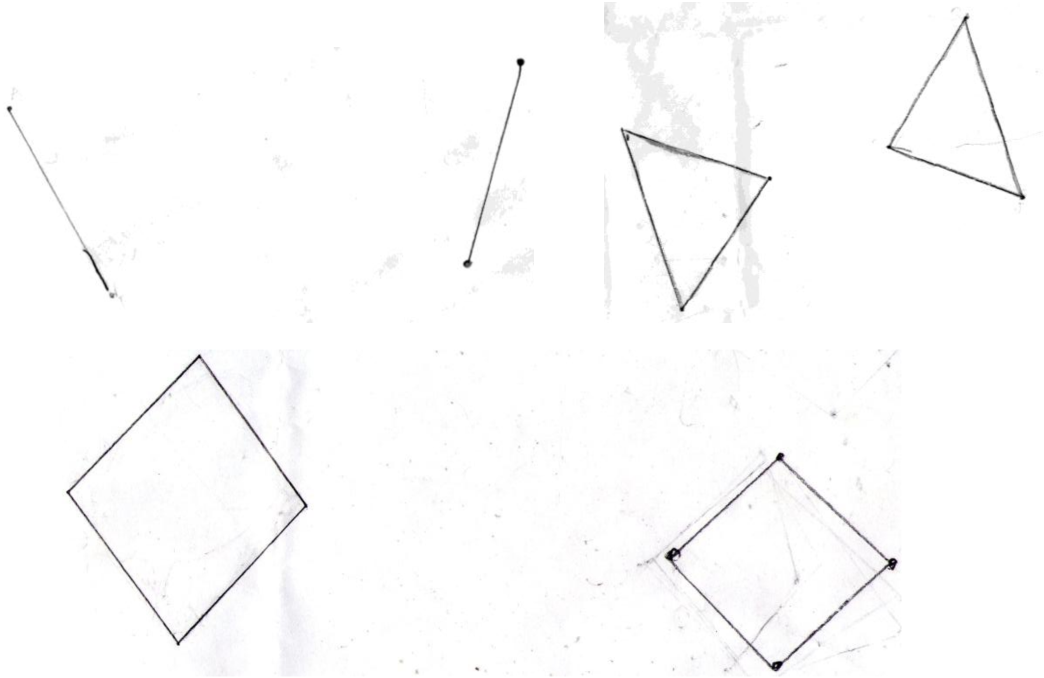


Figura 46. Figuras construidas por puntos con el simetrizador

Del mismo modo, los estudiantes no presentaron *dificultades* para encontrar el mínimo número de puntos que se necesitaban para dibujar la figura inicial y la final (ver Anexo 5).

Los dibujos realizados en la **tarea 3** reflejan que los estudiantes identificaron las características de las figuras dibujadas por el simetrizador; es decir, que el simetrizador dibuja figuras congruentes pero en dirección opuesta.

En el análisis *a priori* se esperaba que los estudiantes utilizaran sus manos como estrategia para representar la mano inicial y la dibujada por el simetrizador, sin embargo ningún estudiante utilizó esta opción sino que decidieron diseñar sus propias manos.

Para representar una mano, una media luna y la letra P como si fueran dibujadas por el mecano, los estudiantes inicialmente dibujaban solamente la figura inicial; por lo que el docente debió intervenir.

D: *¿Esta es la figura subrayada o la figura obtenida por el mecano?*
E: *Es la subrayada*
D: *Entonces ¿dónde está la obtenida por el mecano?*
E: *mmm...*

Los estudiantes recuerdan que hay una figura inicial que se subraya y una final que es obtenida por el simetrizador, de modo que ya no sólo dibujan la figura inicial sino también su imagen en sentido opuesto (ver Figura 47 y Anexo 5).

Figura 47. Figuras simétricas realizadas por los estudiantes

En la **tarea 4** se esperaba que los estudiantes identificaran cuáles de las figuras presentadas eran realizadas por el simetrizador, en otras palabras, cuáles de esas figuras eran simétricas. Esto se cumplió en la gran mayoría de los estudiantes, puesto que justificaban que el triángulo y la luna podían ser dibujados con el simetrizador, ya que eran la misma figura con dirección opuesta; mientras que las flores y el polígono no, puesto que no eran iguales, las flores aunque estaban en dirección opuesta tenían diferente número de pétalos y en los polígonos uno era más grande que el otro (ver Anexo 5).

D: *¿Cómo son las figuras cuándo son hechas con el mecano?*
E: *Quedan raras…quedan al otro lado*
D: *¿Cómo así?*
E: *Queda el mismo, pero… esta es la mano que subrayo con el mecano (muestra su mano izquierda) y entonces hago la otra mano con el mecano (muestra su mano derecha), queda la misma pero al otro lado.*
D: *Y entonces aquí, ¿cuáles de estas figuras serían dibujadas por él, con esto que tu acabas de decir?*
E: *La luna, la flor.*
D: *Muéstrame la flor, ¿por qué la flor?, ¿es la misma?*
E: *Es casi la misma pero del otro lado, tiene diferentes cosas, ésta tiene uno, dos, tres,…, siete (señalando los pétalos de una flor) y ésta cuatro (señalando los pétalos de la otra flor).*
D: *Entonces ¿ésta sería dibujada por el mecano?*
E: *No*
D: *Entonces ¿cuál de las otras figuras serían dibujadas?*
E: *Ésta no (señalando los polígonos), porque una está más grande que la otra.*
D: *¿Y cuál otra entonces?*
E: *Éstas son iguales (señalando los triángulos).*

Por otra parte, algunos estudiantes señalaron en su hoja de trabajo las figuras que podían ser realizadas por el simetrizador, estrategia que no fue tenida en cuenta en el análisis *a priori* (ver Figura 48). Además, ningún estudiante afirmó que todas las figuras podían ser dibujadas con el mecano, como consecuencia de no identificar las características de los dibujos producidos por él, como se tenía previsto en el análisis *a priori*.

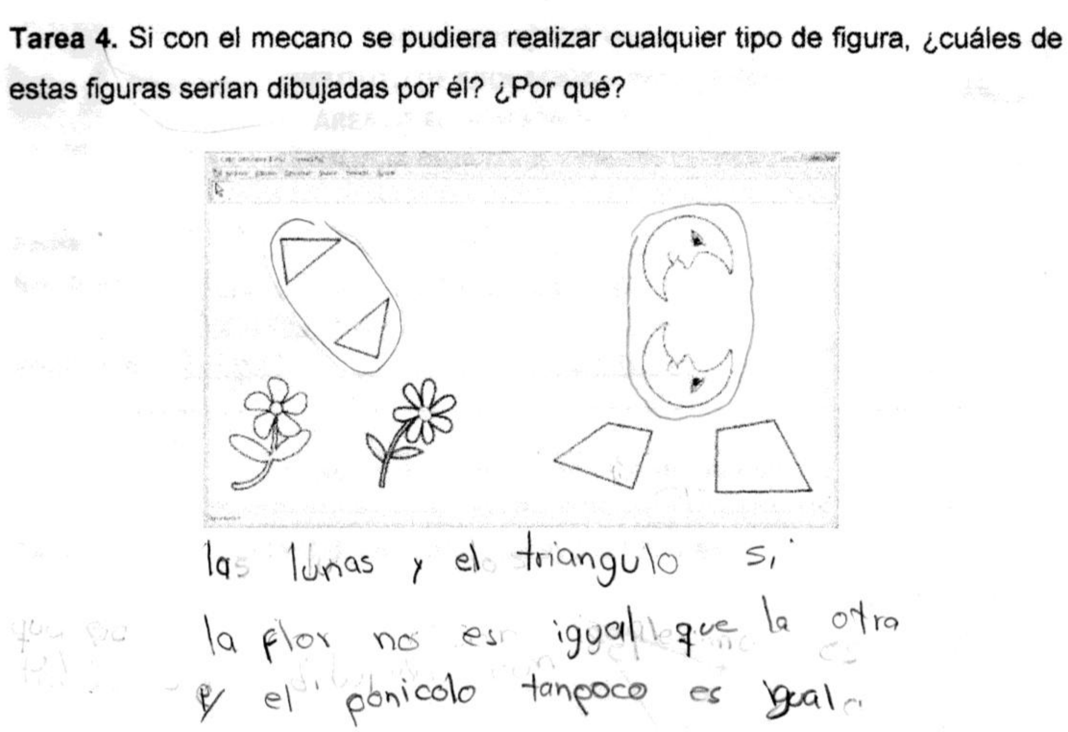


Figura 48. Respuesta a la Situación 1_Tarea 4

A modo de conclusión, se puede afirmar que el objetivo propuesto para esta situación se vio desarrollado en los conocimientos nuevos que adquirieron los estudiantes, llevándolos a identificar la relación entre la figura dada y la obtenida con el simetrizador; es decir, que éste construye figuras iguales a las dadas pero en dirección opuesta.

4.2.2 *Situación 2. "Uniendo mitades"*

Comparando el tiempo propuesto en el análisis *a priori* para el desarrollo de la situación 2 (ver Tabla 2) y el tiempo que realmente se utilizó durante la experimentación (ver Tabla 3), se puede inferir que el trabajo con el software Cabri Geometry II Plus no tuvo mayor dificultad, lo cual ocasionó que el tiempo utilizado durante la experimentación no sobrepasara el propuesto en el análisis *a priori*.

El software Cabri Geometry II Plus hace parte del *medio* utilizado durante esta situación.

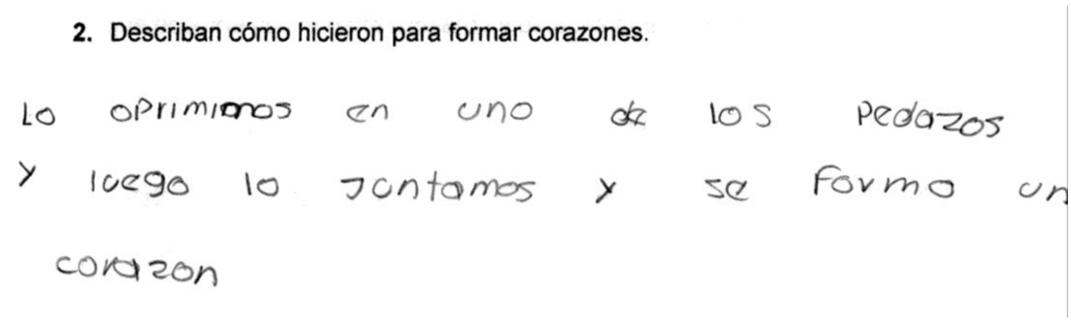
En esta situación el paso del proceso de *instrumentalización* al de *instrumentación* fue de forma más rápida que con el simetrizador, pues desarrollaron *esquemas de uso* rápidamente que les permitieron identificar cuándo mover las figuras para poder unir sus mitades, formando la figura deseada; es decir, descubrieron que las figuras en la pantalla se arrastraban cuando aparecía una manito con la frase "Este punto" o "Este triángulo".

Como se propuso en el análisis *a priori*, para responder a la **tarea 1** los estudiantes realizaron la *acción* de arrastrar cada mitad de un corazón hasta formar uno cuyas mitades tenían el mismo tamaño. Durante esta *acción* los estudiantes obtuvieron como *retroacción* que de todas las figuras sólo una no podía moverse.

En esta tarea no se presentó la dificultad de afirmar que es posible formar más de un corazón con las piezas dadas; por el contrario los estudiantes formaron sólo un corazón, puesto que las otras piezas no coincidían en tamaño. Esto se vio reflejado en las justificaciones presentadas por los estudiantes en las hojas de trabajo, donde mencionan que sólo se puede formar un corazón porque *"las otras partes son diferentes"*, *"las demás tienen diferentes medidas"*, *"porque las demás están muy grandes o muy chiquitas"*, *"como las demás no encajaban"*, *"tienen la* *misma forma”* (ver Anexo 6). Estos escritos respaldan la *primera hipótesis*[35] de esta investigación, pues se evidencian los conocimientos adquiridos en el software Cabri Geometry II Plus a través del lápiz y papel.

D: *¿Cuántos corazones pudieron formar?* ***E:*** *Uno* ***D:*** *Uno, ¿por qué?* ***E:*** *Porque son diferentes figuras, son diferentes formas de la mitad.* ***D:*** *¿Cuántos corazones pudieron formar?* ***E:*** *nada más pudimos formar uno, porque este está más grande y este más chiquito (señala mitades de corazones en la pantalla).*

Del mismo modo, se esperaba que los estudiantes en la descripción sobre cómo hicieron para formar el corazón mencionaran que al arrastrar la mitad izquierda del corazón, su parte derecha se movía hasta unir las dos mitades. No todos los estudiantes lograron mencionar que el movimiento de la mitad de un corazón dependía del movimiento del otro; sin embargo, algunos lograron hacer una aproximación describiendo que dieron clic en una de las mitades y arrastraron hasta juntarlas, formando un corazón (ver Figura 49 y Anexo 6).


2. Describan cómo hicieron para formar corazones.

Lo oprimimos en uno de los pedazos y luego lo juntamos y se formo un corazon

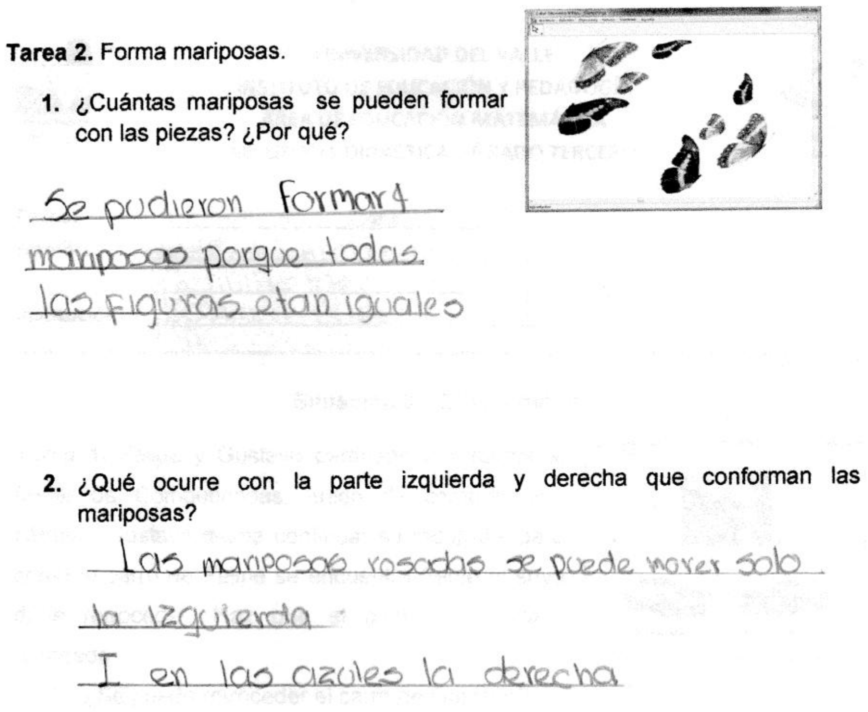
Figura 49. Descripción para formar corazones.

[35] En el capítulo I se presentó la primera hipótesis de la siguiente manera: Las TIC pueden interactuar con artefactos en el aula de clase, determinando integraciones productivas para el aprendizaje de las matemáticas.

En la **tarea 2** los estudiantes desarrollaron *esquemas de acción instrumentada*, que les permitieron manejar de forma más espontánea el arrastre de las figuras presentadas en la pantalla del computador. Además, estos esquemas favorecieron el desarrollo de las tareas, puesto que no insistían en mover una figura cuyo movimiento dependía de la otra. Es decir, descubrieron el concepto involucrado en el esquema de acción instrumentada, al reconocer la dependencia de movimiento de la figura final con respecto a la inicial.

Para resolver esta tarea los estudiantes realizaron la *acción* de arrastrar cada mitad, recibiendo como *retroacción* que unas podían moverse y otras no, en este caso los estudiantes inmediatamente se dirigían a arrastrar la otra mitad, teniendo como *retroacción* que ésta sí era posible moverse y que generaba el movimiento de la otra, formando la mariposa.

De este modo, los estudiantes fueron capaces de formar las cuatro mariposas (ver Anexo 4), tal como se esperaba en el análisis *a priori,* justificando que cada mitad de una mariposa tiene otra mitad que le corresponde en su forma y tamaño. Además, lograron identificar lo que ocurría con la parte izquierda y derecha que conforman las mariposas azules y rosadas, afirmando que en las mariposas rosadas solo se puede mover su parte izquierda y en las mariposas azules la parte derecha, lo que también fue previsto en el análisis *a priori* (ver Figura 50).



Tarea 2. Forma mariposas.

1. ¿Cuántas mariposas se pueden formar con las piezas? ¿Por qué?

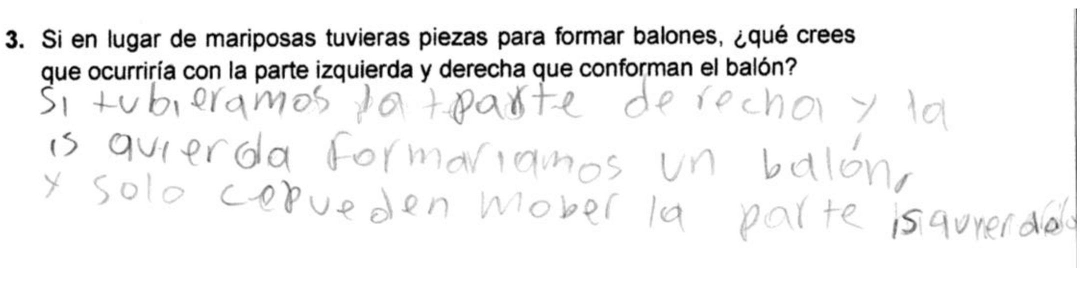
Se pudieron formar 4 mariposas porque todas las figuras etan iguales

2. ¿Qué ocurre con la parte izquierda y derecha que conforman las mariposas?

Las mariposas rosadas se puede mover solo la izquierda I en las azules la derecha

Figura 50. Formando mariposas

Por otra parte, la *dificultad* prevista en el análisis *a priori*, sobre anticipar el movimiento de las piezas que conformaban un balón no se vio presente en ninguno de los estudiantes, pues éstos fueron capaces de imaginar lo que ocurriría con la parte derecha e izquierda de un balón, afirmando que se movería una sola parte del balón (ver Figura 51 y Anexo 6).



3. Si en lugar de mariposas tuvieras piezas para formar balones, ¿qué crees que ocurriría con la parte izquierda y derecha que conforman el balón?

Si tubieramos la parte derecha y la isquierda formariamos un balón, y solo cepueden mober la parte isquierda

Figura 51. Imaginando balones

Finalmente, el propósito de esta situación se ve reflejado en las justificaciones de los estudiantes, cuando argumentan que sólo es posible formar un corazón y cuatro mariposas al apoyarse en la forma y el tamaño que estas poseen.

4.2.3 *Situación 3. “El automóvil”*

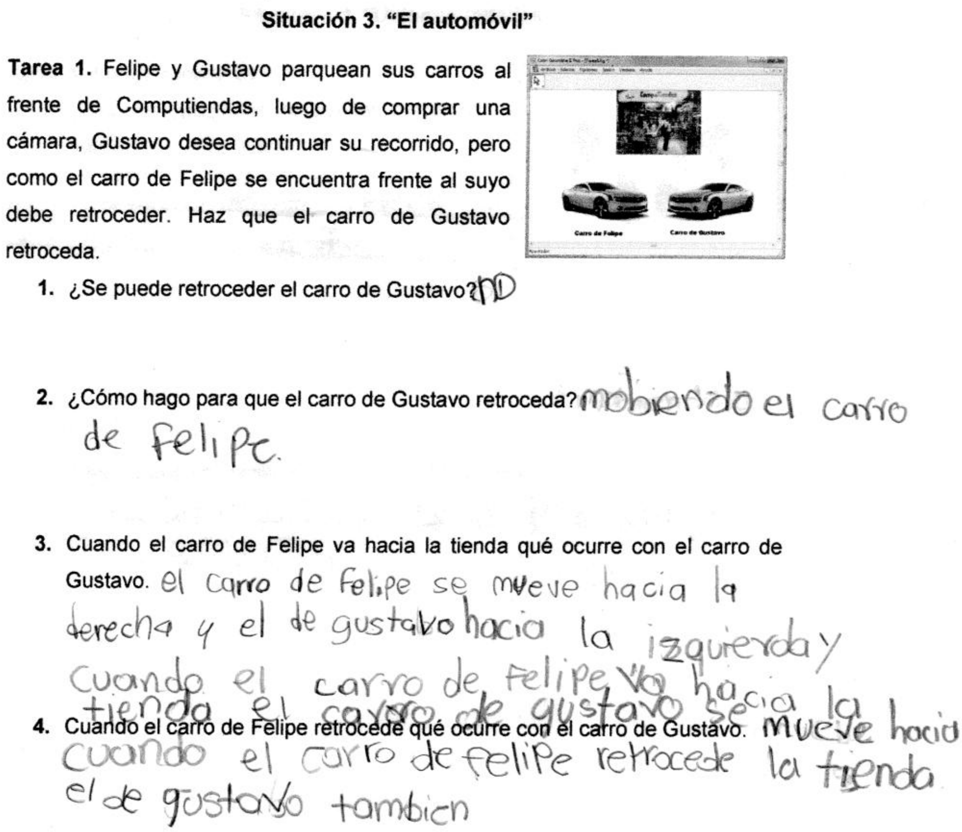
Comparando el tiempo propuesto en el análisis *a priori* para el desarrollo de la situación 3 (ver Tabla 2) y el tiempo que realmente se utilizó durante la experimentación (ver Tabla 3), se puede inferir que los estudiantes han adquirido conocimientos en las situaciones anteriores, los cuales les han permitido resolver con mayor agilidad esta situación, causando que el tiempo utilizado durante la experimentación fuera menor que el propuesto en el análisis *a priori*.

Cabri Geometry II Plus hace parte del *medio* utilizado durante esta situación.

En esta situación se esperaba que los estudiantes identificaran la dependencia en el movimiento de uno de los carros y la orientación que éstos tenían; es decir, que en las figuras simétricas se invierte la orientación de las figuras. Esto se evidenció en las respuestas que daban los estudiantes sobre el movimiento del carro de Gustavo y el de Felipe.

Como fue previsto en el análisis *a priori* los estudiantes inicialmente realizaron la *acción* de intentar arrastrar el carro de Gustavo, recibiendo como respuesta del *medio* que éste no podía moverse, por lo que probaron mover el carro de Felipe y observaron que mientras éste retrocedía o iba a la tienda, el de Gustavo realizaba el mismo movimiento pero en dirección opuesta; es decir, uno hacia la derecha y el otro hacia la izquierda (ver Figura 52 y Anexo 7).

Lo anterior muestra el logro de un aprendizaje que ha sido resultado de la interacción del estudiante con Cabri Geometry II Plus y plasmado mediante lápiz y papel, viéndose así evidenciada la *primera hipótesis* de esta investigación y el cumplimiento de los propósitos planteados para esta situación.



Situación 3. "El automóvil"

Tarea 1. Felipe y Gustavo parquean sus carros al frente de Computiendas, luego de comprar una cámara, Gustavo desea continuar su recorrido, pero como el carro de Felipe se encuentra frente al suyo debe retroceder. Haz que el carro de Gustavo retroceda.

1. ¿Se puede retroceder el carro de Gustavo? no
2. ¿Cómo hago para que el carro de Gustavo retroceda? mobiendo el carro de felipe.
3. Cuando el carro de Felipe va hacia la tienda qué ocurre con el carro de Gustavo. el carro de felipe se mueve hacia la derecha y el de gustavo hacia la izquierda y cuando el carro de felipe va hacia la tienda el carro de gustavo se mueve hacia la
4. Cuando el carro de Felipe retrocede qué ocurre con el carro de Gustavo. cuando el carro de felipe retrocede la tienda el de gustavo tambien

Figura 52. Dependencia del movimiento

4.2.4 *Situación 4. "Distintos lugares"*

Comparando el tiempo propuesto en el análisis *a priori* para el desarrollo de la situación 4 (ver Tabla 2) y el tiempo que realmente se utilizó durante la experimentación (ver Tabla 3), se puede inferir que los estudiantes han avanzado en los procesos de *instrumentalización* e *instrumentación*, lo que les permitió un mejor manejo del software, adquiriendo habilidades para la solución de las tareas. Además la aprehensión de los conocimientos trabajados en las situaciones anteriores les permitió resolver con mayor agilidad esta situación, causando que el tiempo utilizado durante la experimentación fuera menor que el propuesto en el análisis *a priori*.

Cabri Geometry II Plus hace parte del *medio* utilizado durante esta situación.

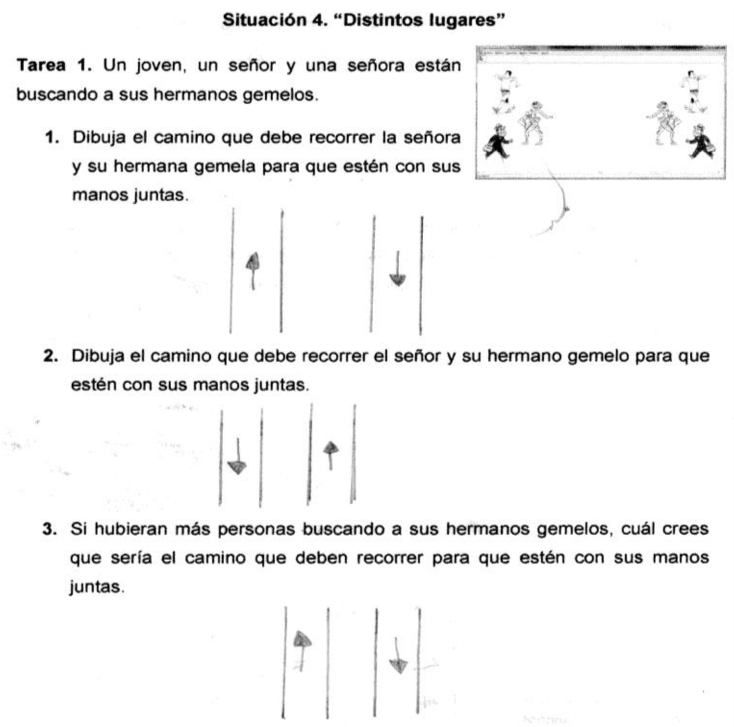
Para dar solución a la **tarea 1** los estudiantes actuaron como se tenía previsto en el análisis *a priori*, arrastrando a uno de los gemelos para unir sus manos con las de su hermano; sin embargo, para encontrar el camino que debían recorrer, movían los gemelos independientemente de que tuvieran sus manos juntas, lo cual no fue previsto en el análisis *a priori*; de modo que el docente tuvo que indicarles que movieran los gemelos pero sin que sus manos se separaran y observaran cuál es el camino que recorren. Así, los estudiantes buscaron otra forma de mover los hermanos gemelos, encontrando que si los movían hacia arriba o hacia abajo siempre tendrían sus manos juntas; lo cual explicitaron dibujando caminos verticales con flechas, flechas hacia arriba y hacia abajo, las cuales también fueron respuesta en el momento de predecir el camino que recorrerían otros hermanos gemelos con sus manos juntas (ver Figura 53 y Anexo 8).

D: *¿Cuál sería el camino?*

E: *Para arriba y para abajo.*

D: *Y si hubieran más personas buscando a sus hermanos gemelos,¿ cúal sería ese camino que deben recorrer con sus manos juntas?*

E: *Para arriba,…para abajo,… para arriba y para abajo.*


Situación 4. "Distintos lugares"

Tarea 1. Un joven, un señor y una señora están buscando a sus hermanos gemelos.

1. Dibuja el camino que debe recorrer la señora y su hermana gemela para que estén con sus manos juntas.
2. Dibuja el camino que debe recorrer el señor y su hermano gemelo para que estén con sus manos juntas.
3. Si hubieran más personas buscando a sus hermanos gemelos, cuál crees que sería el camino que deben recorrer para que estén con sus manos juntas.

Figura 53. Representación del eje vertical

Justo es decir que, la forma de representar los estudiantes el camino que recorren los hermanos gemelos para estar con sus manos juntas; es decir, caminos verticales con flechas, flechas hacia arriba y hacia abajo no fue prevista en el análisis *a priori*, pues sólo se esperaba que dibujaran una línea vertical. Por el contrario, dibujaron dos líneas verticales, en forma de carretera, pues el contexto les lleva asociar un camino, no con una recta, sino con dos rectas paralelas. Además, le dan dirección a las carreteras.

Para responder a la **tarea 2** los estudiantes inicialmente realizaron la *acción* de intentar arrastrar cada una de las piezas tratando de construir una cancha de futbol igual a la que se mostró en la pantalla, recibiendo como *retroacción* que unas piezas podían moverse y que otras no, en este caso, los estudiantes inmediatamente movían la pieza opuesta, logrando que ésta pudiera moverse, luego cada pieza fue ubicada hasta formar la cancha de futbol.

De esta manera, la construcción de la cancha no presentó problema (ver Figura 54), cuando construyeron nuevamente la cancha en otra parte de la pantalla respondían que la nueva cancha quedó ubicada al lado derecho o al lado izquierdo, dependiendo de la ubicación de la primera, lo cual se supuso en el análisis *a priori* (ver Anexo 8).

Figura 54. Construcción de la cancha de futbol

De igual modo, no se presentó la *dificultad* mencionada en el análisis *a priori* sobre predecir la ubicación de una nueva cancha, sino que los estudiantes lograron hacerlo y además, representaron las tres canchas: la construida por primera vez, la construida en otra parte de la pantalla y la anticipada (ver Figura 55).

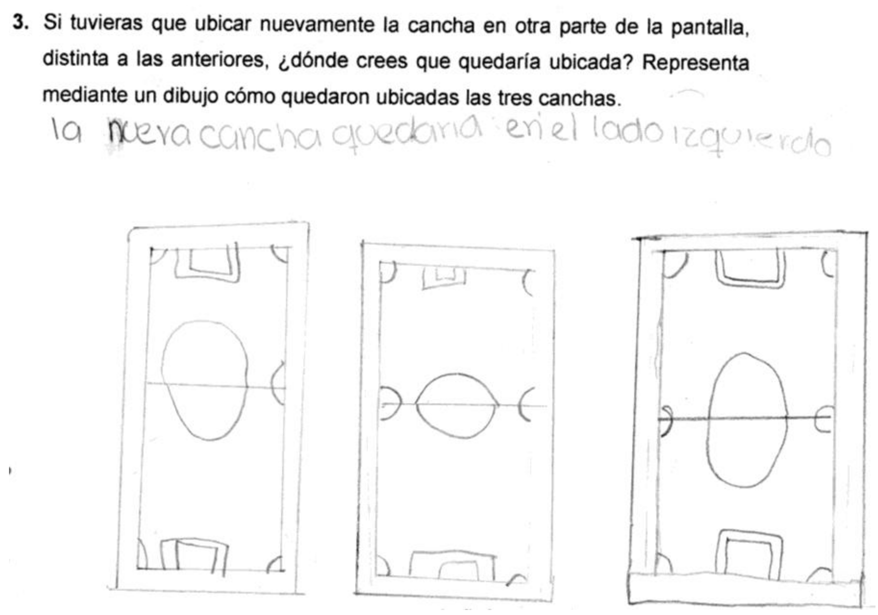


Figura 55. Representación del eje horizontal

Para resolver la **tarea 3** los estudiantes realizaron la *acción* de arrastrar cada uno de los peces, en su intento el *medio* les daba a conocer si su acción fue correcta o no, dependiendo si movían el pez inicial o el pez simétrico.

Después de unir la boca de los peces, les resultó fácil encontrar el camino que debían recorrer los peces para darse besos, puesto que era una tarea similar al de los hermanos gemelos (Situación 4_tarea 1); motivo por el cual a la hora de responder cuál era ese camino había una tendencia en decir que era hacia arriba y hacia abajo, como si el eje fuera vertical. No obstante, su representación gestual y en las hojas de trabajo indicaba que el camino era oblicuo, la cual era una palabra desconocida para ellos (ver Figura 56).

Por otra parte, los estudiantes no tuvieron dificultad en predecir cuál sería el camino que formarían las cuatro parejas dándose besos; pero no pudieron decir que otros peces se reconciliarían en el mismo camino de los peces iniciales, como se supuso en el análisis a priori (ver Figura 56).

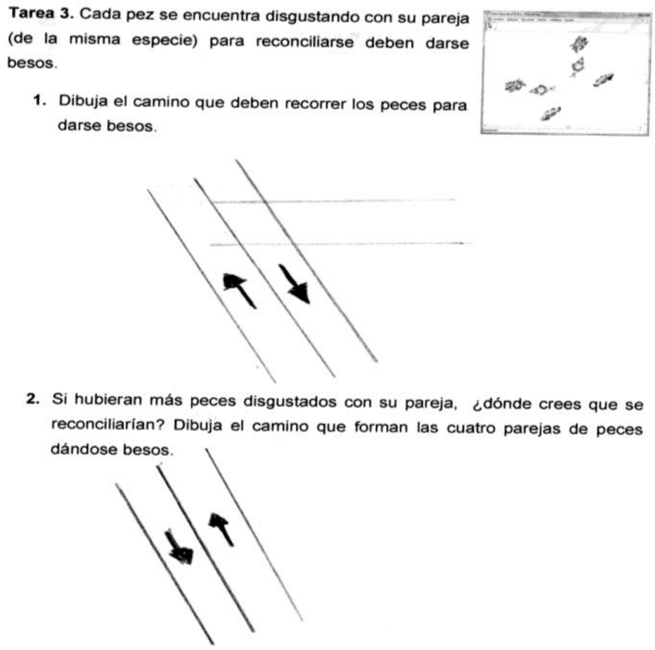


Figura 56. Representación del eje oblicuo

Para finalizar, el propósito planteado en esta situación se vio reflejado en las representaciones gráficas que realizaron los estudiantes para cada uno de los ejes de simetría: el vertical, el horizontal y el oblicuo.

4.3 Institucionalización

Después de haber terminado de resolver la secuencia didáctica se realizó una sesión en el salón de clase, donde los estudiantes socializaron las respuestas que dieron a las situaciones. Dichas respuestas eran retomadas por el docente relacionándolas con las propiedades de la simetría axial.

A continuación describiremos paso a paso el desarrollo de este importante proceso para la conceptualización de las propiedades de la simetría axial:

D: *Buenos días.*

E: *Buenos días (responden en coro).*

D: *Hoy vamos a socializar lo que hemos trabajado la semana pasada, que fueron unas figuras realizadas con el mecano y otras actividades en la sala de sistemas.*

Nosotros cuando trabajábamos con el mecano siempre había una figura que teníamos que subrayar con él, entonces siempre que subrayábamos una figura con el mecano ¿qué obteníamos?

E: *Una figura igual.*

D: *¿Cuándo subrayábamos un triángulo que obteníamos?*

E: *Otro triángulo.*

D: *¿Cómo era ese triángulo?*

E: *Torcido.*

D: *¿Cómo así torcido?*

E: *Cambiado, volteadito, raro.*

D: *¿Pero cómo raro?*

El docente dibuja un triángulo en el tablero y sugiere que un estudiante salga y dibuje el triángulo que obtenían con el simetrizador, el cual catalogaban como “cambiado”, “raro” o “torcido”.

Una estudiante dibuja en el tablero un triángulo en dirección opuesta al triángulo dibujado por el docente (ver Figura 57).

Figura 57. Triángulo obtenido por el mecano

D: *¿Aparecía así? (señalando el triángulo dibujado por la estudiante).*
E: *Siiiii (respondiendo en coro)*
D: *Entonces ¿qué siempre obteníamos?*
E: *Uno pa' ca y otro pa' ya…uno para la izquierda y otro para la derecha.*
D: *Entonces obteníamos la misma figura*
E: *Pero a diferente lado*

El docente escribe en el tablero las ideas que tienen los estudiantes: *"se obtienen la misma figura pero uno mira para la izquierda y otro para la derecha".* Esta afirmación de los estudiantes apoya la *segunda hipótesis*[36] de esta investigación.

[36] En el Capítulo I se presenta la segunda hipótesis de la siguiente manera: La ***complementariedad de artefactos*** en un ambiente de aprendizaje favorece la conceptualización de las propiedades de la simetría axial.

D: *¿Cuándo íbamos a hacer los corazones qué pasaba?, ¿cuántos corazones pudimos formar?*

E: *Uno (respondiendo en coro)*

D: *¿Por qué pudieron formar sólo uno?*

E: *Porque no encajaba con la pareja que iba, porque uno está más grande y otro más chiquito.*

D: *Y con las mariposas ¿cuántas pudimos formar?*

E: *Cuatro (respondiendo en coro).*

D: *¿Y por qué ahí sí pudimos formar cuatro?*

E: *Porque estaban completas las figuras.*

D: *Cada una tenía…*

E:*…su parte* (antes que el docente concluyera, los estudiantes irrumpen la frase, completándola).

Las justificaciones que dan los estudiantes del por qué formaron un corazón y cuatro (4) mariposas apoyan la *segunda hipótesis* de esta investigación.

El docente muestra impresas las figuras simétricas que se trabajaron en Cabri Geometry II Plus con el propósito de hacerles tener en cuenta que todas las figuras que se trabajaron en la secuencia didáctica se caracterizaban por tener dos figuras iguales en dirección opuesta y, de este modo, revelarles que "*a esas figuras que son iguales pero que una mira para un lado y la otra mira para el otro le vamos a llamar figuras simétricas*".

El docente para poder definir las figuras simétricas incorporando el eje de simetría coloca en el tablero líneas curvas, secantes y rectas para darse cuenta si los estudiantes saben cuáles son líneas rectas. Cómo los estudiantes identificaban las líneas horizontal, vertical y oblicua, aunque ésta última no fuera conocida con ese nombre, el docente les afirma que "*las* *figuras cuando se doblan en dos partes por una línea recta, ya sea horizontal, vertical u oblicua, si las dos partes son iguales, tienen la misma forma y tamaño son figuras simétricas".*

Para aclarar lo que acaba de decir, el docente dobla por la mitad una de las figuras impresas mostrando que las dos partes quedan iguales en su forma y tamaño, luego pasa a los estudiantes las demás figuras para que ellos las doblen por una línea recta (ver Figura 58), lo que más adelante sería nombrado como eje de simetría.

El docente toma las figuras dobladas por los estudiantes, preguntándole a todo el grupo si ha sido doblada correctamente y cuál es el nombre de esa línea (horizontal, vertical u oblicua). Cabe notar que todos la doblaron correctamente, por lo que el docente les dice que esas líneas por donde fueron dobladas las figuras se conocen como *eje de simetría*.

Figura 58. Estudiante doblando figura simétrica

Para concluir lo que los estudiantes han dicho hasta este momento, el docente menciona dos (2) de las propiedades de la simetría axial, utilizando términos matemáticos:

1. Las figuras simétricas son iguales porque tienen la misma forma y el mismo tamaño, esto también se conoce como congruencia.
2. En las figuras simétricas se invierte la orientación de las figuras, por eso queda mirando una para la derecha y la otra para la izquierda.

Para dar a conocer la propiedad que relaciona dos (2) figuras mediante un eje de simetría el docente retoma la *situación 4* de la secuencia didáctica, preguntando inicialmente ¿cuál es el camino de deben recorrer los hermanos gemelos para estar con sus manos juntas?, para responder a esta pregunta algunos estudiantes salen al tablero y dibujan tres (3) formas diferentes de representar dicho camino (ver Figura 59), luego el docente generaliza diciendo que esos caminos dibujados representan una línea vertical; es decir, que los hermanos gemelos se relacionan mediante un eje de simetría vertical.

D: *Cuándo la gemela se movía para acá (señalando el lado izquierdo) ¿su hermana hacia dónde se movía?*
E: *Hacia allá (señalando el lado derecho).*
D: *¿Y ellos se movían al mismo tiempo o primero se movía uno y luego el otro?*
E: *Al mismo tiempo (respondiendo en coro)*
D: *¿Y se movían con la misma velocidad o una se movía más despacio que la otra?*
E: *Con la misma velocidad.*
D: *Podemos concluir que si manejaban la misma velocidad y el mismo tiempo, entonces la distancia de la figura inicial, que es la hermana gemela, al eje de simetría era la misma distancia que recorría la figura final con respecto al eje de simetría.*

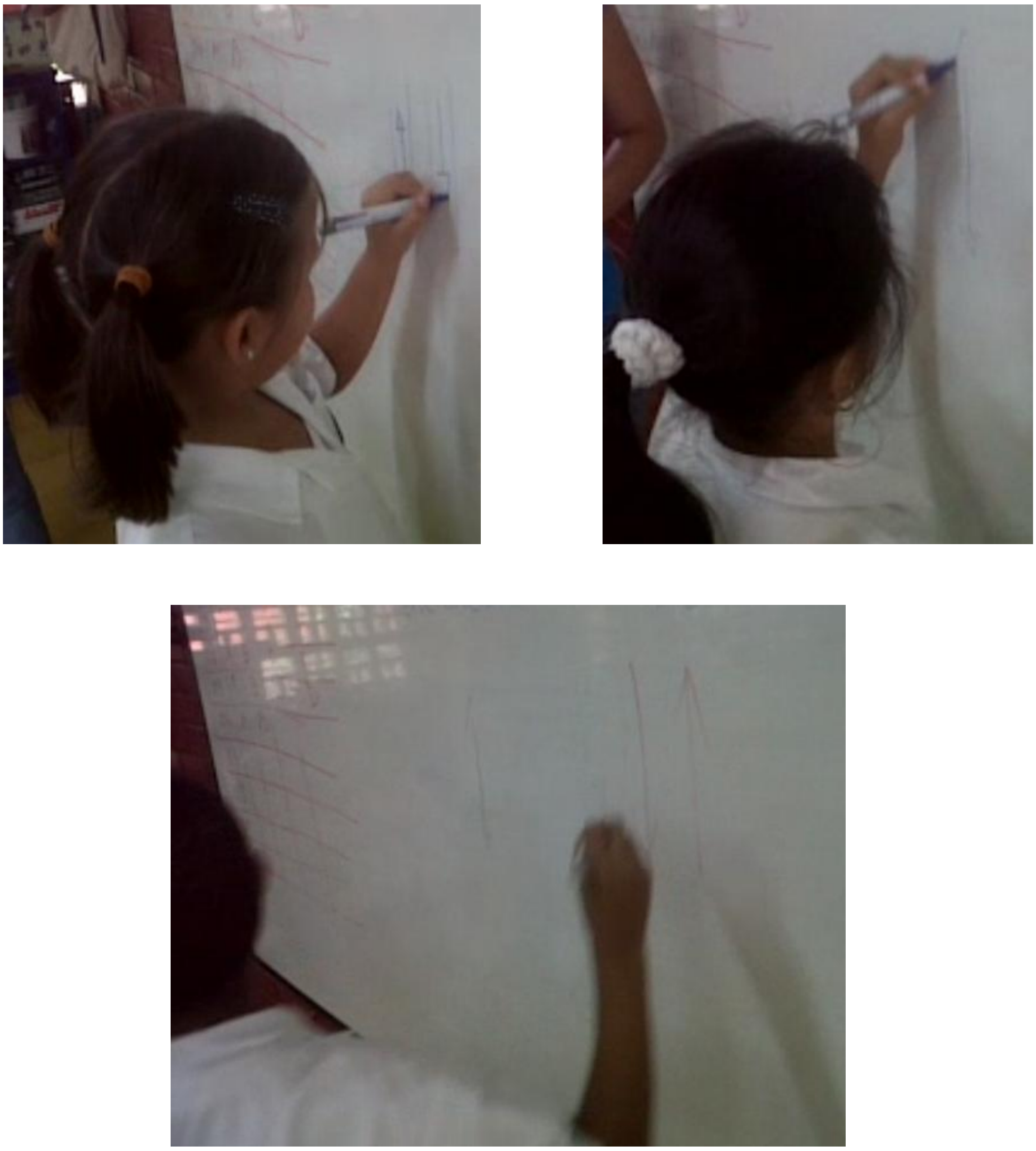


Figura 59. Camino recorrido por los hermanos gemelos

Para introducir el eje de simetría horizontal el docente pregunta ¿cómo quedaron ubicadas las tres canchas? Y pide a tres estudiantes que las dibujen en el tablero.

D: *¿Si vemos las tres canchas juntas podríamos decir que forman una línea que…?*

E: *recta,… horizontal*

D: *O sea que en estas figuras (refiriéndose a las canchas) el eje de simetría es una línea que…*

E: *Horizontal (respondiendo en coro).*

D: *Cierto, porque nosotros veíamos que las partes de la figura se movían de forma vertical.*

Luego, para introducir el eje de simetría oblicuo el docente pregunta ¿cómo era el camino que debían recorrer los peces para darse besos? Y pide a una estudiante que lo dibuje en el tablero.

La estudiante dibujó una línea inclinada hacia la izquierda, lo cual le permitió al docente mencionar que el eje de simetría que relaciona a los peces es oblicuo.

Por último, el docente da a conocer otra propiedad de las figuras simétricas, relacionando el camino que recorren los hermanos gemelos, los peces y la línea que formas las tres canchas, para decirles que toda figura simétrica tiene un eje de simetría, ya sea vertical, horizontal u oblicuo.

4.4 Resultados

Al confrontar los planteamientos expuestos en el análisis *a priori* y en el *a* posteriori, se puede decir que cada situación cumplió con el propósito planteado en el diseño de la secuencia didáctica, viéndose reflejado en las producciones escritas y verbales hechas por los estudiantes.

En primera instancia, las actividades que requerían el uso del simetrizador revelan que este artefacto utilizado dentro de una secuencia didáctica puede favorecer la conceptualización de las propiedades de la simetría axial, ya que para los estudiantes fue claro que todas las figuras construidas con el simetrizador son las mismas pero con orientación opuesta, como afirmaban ellos "*una queda mirando para un lado y la otra para el otro"*.

Cabe anotar que el uso simultáneo del simetrizador con artefactos tradicionales como regla, lápiz y papel, permitió a los estudiantes realizar producciones más exactas de la figura inicial, logrando reconocer que ésta y su imagen eran iguales, lo cual se evidenció en las respuestas de los estudiantes, al afirmar que la figura inicial y la final necesitaban el mismo número mínimo de puntos para ser formada.

Luego del trabajo con el simetrizador, las tareas que involucraban Cabri Geometry II Plus permitieron ver que además de las figuras geométricas existen otras figuras que pueden ser simétricas, como es el caso de la luna, los corazones, las mariposas, entre otros. El proceso de *instrumentalización* con este software se dio de manera espontánea, pues a pesar de no haberlo utilizado anteriormente, los estudiantes identificaron de forma rápida en qué momento podían mover las figuras.

El trabajo con Cabri Geometry II Plus permitió acercarse a la congruencia de figuras simétricas, pues con éste no sólo reconocían que las figuras eran iguales, sino que también debían tener el mismo tamaño. De esta manera, la *segunda hipótesis* de esta investigación se ve evidenciada, pues cada artefacto permitió la adquisición de diferentes propiedades de la simetría axial.

Por otra parte, se observó que el reconocimiento de los diferentes ejes de simetría (vertical, horizontal u oblicuo) no presentó dificultad, a pesar de no reconocer por su nombre las líneas oblicuas. Del mismo modo, en las tareas donde era necesario anticiparse a conjeturar sobre algunas regularidades de las figuras simétricas, como el eje de simetría o dependencia de movimiento, tampoco presentaron mayor dificultad.

Es importante resaltar que las *variables didácticas* inmersas en el diseño de la secuencia didáctica cumplieron un papel esencial, puesto que cada una permitió la construcción de un conocimiento diferente, que en conjunto proporcionaron las propiedades de la simetría axial.

CAPÍTULO V

CONCLUSIONES

El desarrollo de este trabajo se fundamenta en la metodología de investigación de la micro-ingeniería didáctica, lo cual permitió estudiar algunos aspectos del desarrollo histórico-epistemológico de la simetría axial y los artefactos, donde fue posible conocer que éstos han jugado un papel importante a lo largo de la historia; mientras la simetría ha estado presente en el arte y en la naturaleza, artefactos como regla, compás, traslador, pantógrafo, entre otros, han sido utilizados para representar figuras geométricas, con el fin de resolver algunos problemas matemáticos. Del mismo modo, al indagar la utilización de algunos artefactos se encontró que existía una máquina articulada para trabajar la simetría axial, la cual hace parte de un grupo de máquinas articuladas que generan transformaciones geométricas, pues sus diseños se basan en propiedades matemáticas. De esta manera, al utilizar alguno de estos mecanos; por ejemplo, el simetrizador, se evita la necesidad de emplear otros artefactos (como regla y compás) que permitan representar una simetría axial, pues este ya tiene inmersas las propiedades de dicha transformación.

De igual modo, esta metodología de investigación llevó a estudiar algunos de los errores, obstáculos y dificultades implicados en la enseñanza y el aprendizaje de la noción de simetría axial, lo cual mostró la necesidad de buscar nuevas estrategias para la enseñanza de dicha transformación. De ahí que, se diseñó una secuencia didáctica basada en la TSD que integra el software Cabri Geometry II Plus en ***complementariedad*** con otros artefactos como el simetrizador, la regla, lápiz y papel.

Llevando a cabo la experimentación de la secuencia didáctica se pudo observar que el simetrizador permitió reconocer que la figura dibujada por él era la misma que la dada pero en dirección opuesta, mientras que al trabajar con Cabri Geometry II Plus los estudiantes percibieron que la figura inicial y la final no sólo eran iguales en su forma sino también en su tamaño, lo cual manifiesta la ***complementariedad*** entre el simetrizador y el software Cabri Geometry II Plus; pues por cuestiones técnicas con el simetrizador se construyen figuras con la misma forma pero no necesariamente con el mismo tamaño, dado que la figura inicial es dibujada con regla y la figura final es trazada a mano alzada; mientras que en el software Cabri Geometry II Plus las figuras dadas tenían la misma forma y el mismo tamaño, pudiéndose concluir que las figuras simétricas son congruentes.

Siguiendo esta línea, la ***complementariedad*** entre el simetrizador y el software Cabri Geometry II Plus se manifiesta en los procesos de instrumentalización diferentes que se dan en cada artefacto, pues con el simetrizador los estudiantes construyen la figura final teniendo en cuenta su manejo técnico (el vértice con el que se subraya y la inmovilidad del eje de simetría), esto los lleva a concluir que las figuras obtenidas por éste son iguales; mientras que con Cabri Geometry II Plus como la figura final ya está dada, el proceso de instrumentalización se basa en saber cómo se puede arrastrar cada figura, obteniendo como conocimiento que sólo se puede arrastrar la figura inicial; en otras palabras, el movimiento de la figura final depende del movimiento de la inicial.

De esta manera, el *objetivo general* se puede ver evidenciado, pues el párrafo anterior refleja el papel de la complementariedad mostrando que si se utilizan varios artefactos dentro de un ambiente de aprendizaje, cada uno de estos va a proporcionar al estudiante un conocimiento diferente. En este caso, el simetrizador y el software Cabri Geometry II Plus dejan ver distintas propiedades de la simetría axial.

De todo lo anterior, se puede afirmar que la *segunda hipótesis* planteada al inicio de esta investigación se cumplió, pues la ***complementariedad*** entre el simetrizador y el software Cabri Geometry II

Plus dentro de un ambiente de aprendizaje favoreció la conceptualización de las propiedades de la simetría axial.

Justo es decir que, la *primera hipótesis* de esta investigación se vio reflejada en todas las tareas propuestas en Cabri Geometry II Plus, pues en ellas se utilizaron artefactos que al interactuar con dicho software le proporcionaron al estudiante conocimientos relativos a las propiedades de la simetría axial.

En cuanto a la pregunta de investigación, el diseño de la secuencia didáctica basada en la TSD permitió darle respuesta, pues para diseñar las situaciones fue necesario tener en cuenta las características que poseía cada artefacto y que le proporcionaran al estudiante un conocimiento diferente; de modo que al complementarse hicieran posible conceptualizar las propiedades de la simetría axial.

Es importante resaltar que durante la experimentación de la secuencia didáctica los estudiantes se mostraron motivados, participativos, animados y con ganas de realizar todas las tareas propuestas utilizando los dos tipos de artefactos ya mencionados. Esto lleva a pensar que los docentes deben implementar en sus aulas de clase actividades que involucren la utilización de diferentes instrumentos de mediación, provocando un aprendizaje significativo en los estudiantes.

Frente al diseño de la secuencia didáctica, se puede decir que cada situación fue pertinente, pues involucraban elementos que resultaban familiares para los estudiantes, como corazones, mariposas, carros, entre otros; los cuales provocaban satisfacción al momento de resolverlas. Del mismo modo, la ubicación de las tareas dentro de cada situación favoreció la adquisición de conocimientos que eran necesarios para desarrollar las tareas siguientes.

Durante la experimentación se pudo evidenciar que la TSD jugó un papel importante en la construcción de conocimiento por parte de los estudiantes, pues los obligaba a buscar por sí mismos estrategias que le permitieran resolver las tareas, dependiendo de las respuestas que daba el *medio* a sus *acciones*. De este modo, la exploración del espacio mediante la interacción, manipulación y experimentación de los estudiantes con los artefactos les permitió construir, dibujar y reconocer por sí solos figuras simétricas y ejes de simetría, lo que es característico de una *geometría activa*.

La riqueza y el potencial de la *complementariedad* de estos artefactos en el aprendizaje de los estudiantes, se evidencia cuando reconocen y exponen algunas características asociadas a las propiedades de la simetría axial aun cuando no se les han mencionado formalmente. En este sentido, no deben dejarse de lado los artefactos tradicionales, puesto que al trabajar en unión con viejos (simetrizador, lápiz y papel) y nuevos (Cabri Geometry II Plus) artefactos es posible construir conocimientos.

En esta investigación quedan los siguientes interrogantes:

- Como en esta investigación se estudia la complementariedad de artefactos para la enseñanza de la simetría axial, podría pensarse: ¿De qué manera la complementariedad de artefactos favorece el aprendizaje de otras transformaciones geométricas?

- Debido a que en esta investigación no se exploraron algunas de las propiedades de la simetría axial con el simetrizador, ¿Es posible estudiar todas las propiedades de la simetría axial con éste?

- Dado que este trabajo se centra en las producciones de los estudiantes y no en la labor del docente, ¿Cómo debe ser la gestión del docente al trabajar en complementariedad con artefactos?

- En este trabajo se presenta la *complementariedad* entre el software Cabri Geometry II Plus y el simetrizador, para la enseñanza de la simetría axial, entonces podría preguntarse: ¿Qué otro artefacto en complementariedad con el simetrizador puede favorecer la conceptualización de las propiedades de la simetría axial?

Finalmente, esta investigación enriquece las prácticas pedagógicas, en la medida en que muestra que es posible integrar en el aula de clase nuevos artefactos sin dejar de lado los tradicionales, sino que al trabajarlos conjuntamente, en complementariedad, favorecen la adquisición de conocimientos matemáticos.

Del mismo modo, al mostrar en esta investigación la existencia de artefactos como el simetrizador, una máquina articulada que poco se conoce, pero que sirve para estudiar la simetría axial, se evidencia que existen artefactos para trabajar conocimientos matemáticos, los cuales deben ser indagados por el docente y llevados al aula de clase, con el fin de crear ambientes más ricos para el aprendizaje, proponiendo situaciones que generalmente no circulan en el aula de clase.

BIBLIOGRAFÍA

Acuña, C. & Martínez, A. (s.f.). *El aprendizaje de la reflexión en geometría entre estudiantes de primaria.* Recuperado el 20 de agosto de 2011, de http://cimm.ucr.ac.cr/ciaem/index.php?option=com_content&view=article&id=125&Itemid=158

Acosta, M. (2002). Macro construcciones y cajas negras en el programa de geometría. En Ministerio de Educación Nacional (Ed.), *Proyecto de Incorporación de Nuevas Tecnologías al Currículo de Matemáticas de la Educación Media de Colombia. Memorias de seminario Nacional* (pp. 13-16). Bogotá, Colombia: Enlace Editores.

Acosta, M. (2010). *Enseñando Transformaciones Geométricas Con Software De Geometría Dinámica*. Recuperado el 7 de abril de 2011, de http://funes.uniandes.edu.co/1169/1/132_ENSEANDO_TRANSFORMACIONES_GEOMTRICAS_CON_SOFTWARE_DE_GEOMETRA_DINMICA_Asocolme2010.pdf

Alarcón, J., Bonilla, E., Nava, R., Rojano, T. & Quintero, R. (1994). *Libro para el maestro: educación secundaria. Matemáticas.* Méjico: SEP.

Alsina, C., Pérez, R. & Ruiz, C. (1993). *Simetría dinámica*. Madrid, España: Editorial Síntesis.

Álvarez, Z. V. & Fernández, D. A. (2009). *La transformación de rotación en el espacio: una propuesta de aula que integra el ambiente de geometría dinámica Cabri 3D*. Tesis de grado no publicada. Universidad del Valle, Cali, Colombia.

Arce, M., Blázquez, S., Ortega, T. & Pecharromán, C. (s.f.). *Transformaciones en el plano*. Recuperado el 18 de septiembre de 2011 de http://roble.pntic.mec.es/~sblm0001/archivos/tema8_geometria.pdf

Artigue, M. (1995). Ingeniería Didáctica. En R. Douady, L. Moreno & P. Gómez (Eds.), *Ingeniería didáctica en educación matemática. Un esquema para la investigación y la innovación en la enseñanza y el* *aprendizaje de las matemáticas* (pp. 33-60). Bogotá, Colombia: Grupo Editorial Iberoamericana S.A de C.V.

Assude, T. & Gelis, J. (2002). La dialectique ancien-nouveau dans l'intégration de cabri-géomètre à l'école primaire. *Educational Studies in Mathematics*, *50*(3), 259-287.

Azinian, H. (2009). *Las tecnologías de información y la comunicación en las prácticas pedagógicas: manual para organizar proyectos* (1ra Ed.). Buenos Aires, México: Novedades Educativas.

Balacheff, N. (1994). Didactique et Intelligence Artificielle, *Recherches en Didactique des Mathématiques*, *14*(172), 9 - 42.

Balacheff, N. & Kaput, J. (2001). *Ambientes de aprendizaje de las matemáticas basados en el computador*. (R. Salas & M. Palacios, Trads.). Cali, Colombia: Universidad del Valle. (Trabajo original publicado en 1996).

Bartolini, M. & Maschietto, M. (2006). Gli strumenti meccanici: le macchine per tracciare curve e realizzare trasformazioni. En M. Bartolini & M. Maschietto (Eds.), *Macchine matematiche: dalla storia alla scuola* (pp. 1-32). Italia: Springer.

Barrantes, H. (2006). Los obstáculos epistemológicos. *Cuadernos de investigación y formación en educación matemática*, *(2).* Recuperado el 11 de octubre de 2011, de http://cimm.ucr.ac.cr/ojs/index.php/CIFEM/article/viewFile/11/16

Barrios, E., Muñoz, G. & Zetién, I. (2008). *El proceso cognitivo de la visualización por estudiantes de nivel superior mediante el uso de software dinámico (Cabri) en la resolución de problemas geométricos*. Tesis de Maestría no publicada. Universidad del Norte, Barranquilla, Colombia.

Batanero, C., Font, V. & Godino, J. (2003). Enseñanza y aprendizaje de las matemáticas. En J. D. Godino (Dir.), *Fundamentos de la enseñanza y el aprendizaje de las matemática para maestros*. (pp. 53-76). Granada: Universidad de Granada.

Batanero, C., Font V. & Godino J. (2004). Recursos para el estudio de las matemáticas. En J. D. Godino (Dir.), *Didáctica de las matemáticas para maestros*. (pp. 15-153). Granada: Universidad de Granada.

Bishop, A. (1999). *Enculturación matemática: la educación matemática desde una perspectiva cultural*. (G. Sánchez, Trad.). Barcelona, España: Paidós. (Trabajo original publicado en 1991).

Bohorquez, H., Boscán, L., Hernández, A. Salcedo, S. & Morán, R. (2009). La concepción de la simetría en estudiantes como un obstáculo epistemológico para el aprendizaje de la geometría. *EDUCERE*. Maracaibo, Venezuela, (45), 477-489.

Bort, T. & Orús, P. (2000). *El "medio" en la Teoría de Situaciones, como instrumento de análisis didáctico del artículo "El peso de un recipiente"*. Recuperado el 11 de julio de 2012, de http://www.ugr.es/~jgodino/siidm/cangas/POrus.rtf

Bravo, M., Del sol, J. & Arteaga, E. (2001). Dibujo geométrico en la resolución de problemas: *Revista electrónica de didáctica de las matemáticas, Xixim*, (1), 10-13.

Brousseau, G. (2007). *Iniciación al estudio de la Teoría de Situaciones Didácticas*. (D. Fregona, Trad.). Buenos Aires, Argentina: Libros del Zorzal. (Trabajo original publicado en 1986).

Bulf, C. (2008). E*tude des effets de la symetrie axiale sur la conceptualisation des isometries planes et sur la nature du travail geometrique au college.* Tesis Doctoral no publicada. Université Paris Diderot, Paris, Francia.

Burgos, V., Fica, D., Navarro, L., Paredes, D., Paredes, M. & Rebolledo, D. (2005). *Juegos educativos y materiales manipulativos: un aporte a la disposición para el aprendizaje de las Matemáticas*. Tesis de grado no publicada. Universidad Católica de Temuco, Telemuco, Chile.

Carrillo, B. (2009, marzo). Dificultades en el aprendizaje matemático. *Revista Digital Innovación y Experiencias Educativas*, (16), 1-10.

Castiblanco, A. (1999). Marco conceptual y perspectivas. *Nuevas tecnologías y currículo de matemáticas.* (pp.21-31). Bogotá, Colombia.

Cedillo, T. E. (2006, enero-marzo). La enseñanza de las matemáticas en la escuela secundaria. Los sistemas algebraicos computarizados. *Revista Mexicana de Investigación Educativa*, *11*(28), 129-153.

Cobo, P., Grau, V., Parés, P., Pérez, E. & Pérez, J. (s.f). *Simetrizador axial ortogonal de* barras. Recuperado el 14 de mayo de 2011, de http://www.iespfq.cat/dep/mates/apartados/arxius_pdf_cas/Simetrizador%20axial%20ortogonal%20de%20barras.pdf

Comisión Vallecaucana por la Educación -CVE- (s.f.). *Compilación evolución de resultados pruebas Saber 5, 9 Y 11 Valle del Cauca y Santiago de Cali***.** Recuperado el 12 de julio de 2011, de http://www.cve.org.co/Documentos/2.%20Actividades/II%20PLENARIA/COMPILACI%C3%93N%20EVOLUCI%C3%93N%20DE%20RESULTADOS%20SABER.pdf

Construcciones con regla y compás (I): Introducción y primeras construcciones*. (2007). Recuperado el 1 de septiembre de 2011, de http://gaussianos.com/construcciones-con-regla-y-compas-i-introduccion-y-primeras-construcciones/*

Córdoba, A. L., Hazzi, D. M. & Pineda A. P. (2009). *Una secuencia didáctica alrededor de la rotación en cuarto grado de educación básica.* Tesis de grado no publicada. Universidad del Valle, Cali, Colombia.

Cuene, Y. & Campo, W. (2011). *Una secuencia de situaciones didácticas alrededor de la transformación de rotación en un ambiente de geometría dinámica.* Tesis de grado no publicada. Universidad del Valle, Cali, Colombia.

Chevallard, Y. (1999). El análisis de las prácticas docentes en la teoría antropológica de lo didáctico. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, *19*(2), 221-266.

Darvas, G. (2007). *Symmetry: Cultural-historical and Ontological Aspects of Science-Arts Relations; the Natural and Man-made World in an Interdisciplinary Approach.* (D. Robert, Trad.). Basel, Boston: Birkhäuser.

Del Castillo, A. & Montiel, G. (s.f.). *Desarrollo del Pensamiento Covariacional en un Ambiente Gráfico Dinámico. Hacia una Génesis Instrumental*. Recuperado el 12 de julio de 2011 de http://www.matedu.cicata.ipn.mx/archivos/(ADelCastillo-GMontiel2009b)-ALME22-.pdf

El número áureo. (s.f.). Recuperado el 2 de septiembre de 2011, de http://www.revistaeducativa.es/data_library/numero-aureo-619-03022010171745.pdf

Euclides. (1991), *Elementos. Libros I – IV*. (M. Puertas, Trad.). Madrid, España: Gredos.

Euclides. (1994). *Elementos. Libros V – IX*. (M. Puertas, Trad.). Madrid, España: Gredos.

Franchi, L. & Hernández, A. (2004a). *Tipología* de errores en el área de la geometría plana. *EDUCERE. Mérida, Venezuela, 8*(24), 63-71.

Franchi, L. & y Hernández, A. (2004b). Tipología de errores en el área de la geometría plana. Parte II. *EDUCERE. Mérida, Venezuela, 8*(25), 196-204.

Filloy, E. (1998). Los orígenes de la geometría. En N. Grepe (Ed.), *Didáctica e historia de la geometría euclidiana* (pp. 1-21). México, D.F.: Grupo Editorial Iberoamérica, S.A. de C.V.

Geometría Euclídea Plana. (2010). Recuperado el 1 de septiembre de 2011, de http://www.santafe-conicet.gov.ar/~aguilera/apuntes/geometria2010/construcciones.pdf

Godino, J. & Ruiz (2004). Geometría. En J. D. Godino (Dir.), *Didáctica de las matemáticas para maestros*. (pp. 291-353). Granada: Universidad de Granada.

González, M. J. (2001). La gestión de la clase de geometría utilizando Sistemas de Geometría Dinámica. En P. Gómez y L. Rico (eds.). *Iniciación a la investigación en didáctica de la matemática. Homenaje al profesor Mauricio Castro.* Granada: Universidad de Granada. 277-290

González, M. A. (2008). *Ambientes virtuales de aprendizaje*. Recuperado el 14 de julio de 2011 de http://horizonteshumanos.blogspot.com/2008/11/ambientes-virtuales-de-aprendizaje.html

González, M. (2010). *Nuevos procesos de transferencia mediante tóner y su aplicación al grabado calcográfico*. Tesis Doctoral no publicada. Universidad Complutense de Madrid, Madrid, España.

Guarnizo, J. C. (1992). *Reflexiones, traslaciones y transformaciones en el plano y en el espacio*. Tesis de grado no publicada. Universidad del Valle, Cali, Colombia.

Guerrero, A. (2006). Movimientos en el plano. En A. Gutiérrez (Coord.), *Geometría: Desarrollo Axiomático* (pp. 265 - 403). Bogotá, Colombia: Ecoe Ediciones.

Guin, D. & Trouche, L. (2002). Mastering by the teacher of the instrumental genesis in CAS environments: necessity of intrumental orchestrations. *ZDM. The International Journal on Mathematics Education*, *34*(5), 204-211.

Gutiérrez, Á. (2005). *Aspectos de la investigación sobre aprendizaje de la demostración mediante exploración con software de geometría dinámica.* En A. Maz, B. Gómez & M. Torralbo (Eds.), *Noveno Simposio de la Sociedad Española de Educación Matemática SEIEM* (pp. 27-44). Córdoba: Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática, SEIEM.

Hoyos, V. (2006). Funciones complementarias de los artefactos en el aprendizaje de las transformaciones geométricas en la escuela secundaria. *Enseñanza de las Ciencias: Revista De Investigación y Experiencias Didácticas*, *24*(1), 31–42.

ICFES. (2010). *Saber 5° y 9° 2009. Resultados Nacionales. Resumen ejecutivo.* Recuperado el 10 de septiembre de 2011, de http://www.icfes.gov.co/saber59/images/pdf/INFORME_SABER.pdf

ICFES. (2011). *Saber 5° y 9° 2009. Resultados de las encuestas curriculares*. Recuperado el 10 de septiembre de 2011, de http://www.icfes.gov.co/saber59/images/pdf/encuesta_curricular_saber5y9_2009.pdf

ICFES. (2012). *Características de la evaluación*. Recuperado el 10 de septiembre de 2011, de http://www.icfes.gov.co/saber59/index.php?option=com_content&view=article&id=5#_1._Metodolog%C3%ADa_para

Jaime, A. (1993). *Aportaciones a la interpretación y aplicación del Modelo de Van Hiele: La enseñanza de las isometrías del plano. La evaluación del nivel de razonamiento.* Tesis Doctoral no publicada. Universidad de Valencia, Valencia, España.

John Wiley & Sons (1971). *Fundamentos* de geometría. (R. Vinós, Trad.). Buenos Aires, México: Lemusa – Wiley. (Trabajo original publicado en 1961, 1969)

Klein, M. (1992). *El pensamiento matemático de la Antigüedad a nuestros días, I.* (M. Martínez, J. Tarrés & A. Casal, Trads.). Madrid, España: Alianza Universidad. (Trabajo original publicado en 1972).

La última cena (2009). Recuperado el 14 de septiembre de 2011, de http://arte.observatorio.info/2009/05/la-ultima-cena-leonardo-da-vinci-1495-1497/

Laborde, C. (1997). Cabri-geómetra o una nueva relación con la geometría. En L. Puig (Ed.), *Investigar y Enseñar. Variedades de la Educación Matemáticas* (pp. 33- 48). Bogotá, Colombia: Una Empresa Docente.

Laborde, C. (2006). *Los fenómenos visuales en la enseñanza−aprendizaje de la geometría en un ambiente basado en computador*. (E. Fernández, Trad.). Cali, Colombia: Universidad del Valle. (Trabajo original publicado en 1998).

López, L. & Santacruz, M. (2004). *Una secuencia didáctica en quinto de primaria para explorar la transformación de rotación integrando Cabri al aula.* Tesis de grado no publicada. Universidad del Valle, Cali, Colombia.

Margolinas, C. (2009). *La importancia de lo verdadero y lo falso en la clase de matemáticas.* (M. Acosta & J. Fiallo, Trads.). Bucaramanga, Colombia: Ediciones Universidad Industrial de Santander.

Maschietto, M. & Bartolini, M. (2009). Working with artefacts: gestures, drawings and speech in the construction of the mathematical meaning of the visual pyramid. *Educational Studies in Mathematics*, *70*(*2*), 143-157.

Maschietto, M. & Trouche, L. (2010). Mathematics learning and tools from theoretical, historical and practical points of view: the productive notion of mathematics laboratories. *ZDM. The International Journal on Mathematics Education*, *42*(1), 33-47.

Ministerio de Educación Nacional (1998). *Lineamientos Curriculares para el área de Matemáticas.* Serie Lineamientos. Bogotá, Colombia: Cooperativa Editorial Magisterio.

Ministerio de Educación Nacional (2004). *Pensamiento Geométrico y Tecnologías Computacionales. Proyecto incorporación de nuevas tecnologías al currículo de matemáticas de la educación básica secundaria y media de Colombia* (1ra Ed.). Bogotá, Colombia: Enlace Editores.

Ministerio de Educación Nacional (2009) *Saber 5° y 9°. Aplicación mayo 2009. Matemática 1, grado 5°.* Bogotá, Colombia: Icfes, mejor saber.

Molinero, A. (2009). *Espirales, las curvas metafóricas*. Recuperado el 14 de septiembre de 2011, de http://yomenosquenadie.blogspot.com/2009/11/espirales-las-curvas-metaforicas.html

Monroy, L. & Rueda, K. (2009). *Conceptualización de la simetría axial y la traslación con la mediación del programa Cabri Geometry II*. Tesis de grado no publicada. Universidad Industrial de Santander, Bucaramanga, Colombia.

Moreno, L. (2002a). Instrumentos matemáticos computacionales. En Ministerio de Educación Nacional (Ed.), *Proyecto de Incorporación de Nuevas Tecnologías al Currículo de Matemáticas de la Educación Media de Colombia. Memorias de seminario Nacional* (pp. 81-86). Bogotá, Colombia: Enlace Editores.

Moreno, L. (2002b). Cognición y computación: el caso de la geometría y la visualización. En Ministerio de Educación Nacional (Ed.), *Proyecto de Incorporación de Nuevas Tecnologías al Currículo de Matemáticas de la Educación Media de Colombia. Memorias de seminario Nacional* (pp. 87-92). Bogotá, Colombia: Enlace Editores.

Obando, F. (2008). *Análisis del Tratamiento de las Transformaciones Geométricas en los Textos Escolares de los grados 6º Y 7º*. Tesis de Grado. Universidad del Valle, Cali, Colombia.

Pan, A. (2005). Construcciones con regla y compás. *Acta de Mathematica Vulgata*, 1, 29-36. Recuperado el 1 de septiembre de 2011, de http://www2.uca.es/matematicas/RDM/Volumen-2005-1/Regla_y_compas.pdf

Piaget, J. & García, R. (1982). El desarrollo histórico de la geometría. En J. Piaget & R. García (Eds.), *Psicogénesis e Historia de la Ciencia* (pp. 88-107). México, D.F.: Siglo Veintiuno Editores, S.A.

Pozo, J. (2006). *Teorías cognitivas del aprendizaje*. (9na Ed.). Madrid: Ediciones Morata, S.L.

Quintana, J. (1996). *Anàlisi del tractament de la geometria al currículum de l'educació primària. Una proposta didàctica i un estudi de cas sobre les transformacions geomètriques*. Tesis Doctoral no publicada. Universitat de Barcelona, Barcelona, España.

Restrepo, A. (2010). *Diferentes Usos y Dificultades de apropiación del "Arrastre" en Cabri-geometry.* Comunicación presentada en II Congreso de Formación y Modelación en Ciencias Básicas. Recuperado el 27 de octubre de 2011, de http://funes.uniandes.edu.co/650/2/Restrepo-Usos%26dificultadesarrastre.pdf

Rico, L (1998). Errores y dificultades en el aprendizaje de las matemáticas En J. Kilpatrick, L. Rico & P. Gómez (Eds.), *Educación Matemática. Errores y dificultades de los estudiantes. Resolución de problemas. Evaluación. Historia* (pp. 69-108). Bogotá, Colombia: Una empresa docente.

Sadovsky, P. (2005). La teoría de situaciones didácticas: un marco para pensar y actuar la enseñanza de la matemática. En H. Alagia, A. Bressan & P. Sadovsky (Eds.), *Reflexiones teóricas para la educación matemática*. (pp. 13-68). Buenos Aires, Argentina: Libros del Zorzal.

Sandoval, I. (2009, abril). La geometría dinámica como una herramienta de mediación entre el conocimiento perceptivo y el geométrico. *Educación Matemática*, *21*(1), 5-27.

Santacruz, M. (2011). *Gestión didáctica del profesor y emergencia del arrastre exploratorio en un AGD: El caso de la rotación en educación primaria*. Tesis de maestría no publicada. Universidad del Valle, Cali, Colombia.

Socas, M. (2000). Dificultades, Obstáculos y Errores en el aprendizaje de las matemáticas en la educación secundaria. En L. Rico (Coord.), *La educación matemática en la enseñanza secundaria* (pp. 125-154). Barcelona: Editorial Horsori.

Socorro, D. (2005). *Simetria axial: uma seqüência didática para alunos da 6ª série com o uso de software de geometria dinámica*. Tesis de Postgrado no publicado. Universidad Federal De Pernambuco, Pernambuco, Brasil.

Struck, F. (2005) Transformaciones geométricas y máquinas articuladas. En M. Falconi & V. Hoyos (Comp.), *Instrumentos y matemáticas. Historia, fundamentos y perspectivas educativas* (pp. 105-120). México D.F.: Universidad Pedagógica Nacional.

Thaqi, X. (2009). *Aprender a enseñar transformaciones geométricas en primaria desde una perspectiva cultural*. Tesis Doctoral no publicada. Universitat de Barcelona, Barcelona, España.

Torregrosa, G. & Quesada, H. (2007). Coordinación de procesos cognitivos en geometría. *Revista Latinoamericana de Investigación en Matemática Educativa*, *10*(2), 275-300.

Trouche, L. (2005). An instrumental approach to mathematics learning in symbolic calculator environments. En D. Guin, K. Ruthven & L. Trouche, *The Didactical Challenge of Symbolic Calculators* (pp. 137- 162). New York, NY: Springer.

Ugarte, L. (s.f.). *Geometría Inversiva*. Recuperado el 8 de septiembre de 2011, de http://www.megaupload.com/?d=7JJRFRZ3

Urbano, R. (2009). *Transformaciones Isométricas en las Esculturas de San Agustín y su implementación en el aula con el uso de Cabri*. Tesis de grado no publicada. Universidad del Valle, Cali, Colombia.

Vasco, C. E. (2006). Sistemas Geométricos. En C. Vasco (Ed.), *Didáctica de las matemáticas. Artículos selectos* (pp. 25-96). Bogotá, Colombia: Universidad Pedagógica Nacional.

Verillon, P. y Rabardel, P. (1995). Cognition and Artifacts: A Contribution to the Study of Thought in Relation to Instrumented Activity. *European Journal of Psychology of Education, 10*(1), 77-101.

ANEXOS

Anexo 1. Pasos para construir un simetrizador

1. Tener a disposición una tabla de balso[37].

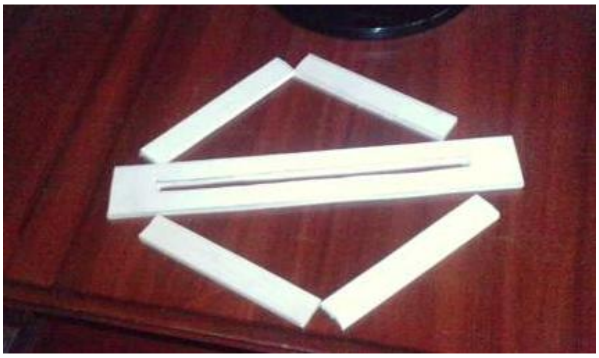
2. Señalar en el balso las partes que van a conformar el simetrizador:

    - El eje de simetría es de 26 cm de largo y 4 cm de ancho. En el centro del eje se dibuja una abertura de 20 cm de largo y 0.8 cm de ancho, por donde se deslizarán los vértices C y D.
    - Los cuatro lados del rombo que conforman el simetrizador se dibujan de 12 cm de largo y 2 cm de ancho.

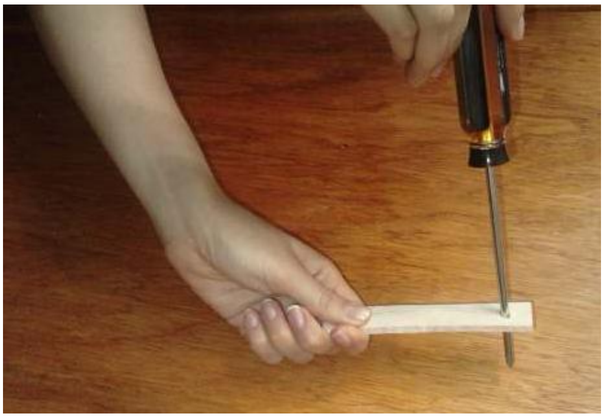
3. Con bisturí se recorta cada parte dibujada en el paso anterior.

[37] Los simetrizadores empleados en la experimentación de la secuencia didáctica fueron elaborados en balso, ya que en este material resulta fácil realizar cortes. Sin embargo, si se quieren utilizar varias veces se debe recurrir a otro tipo de madera, mucho más resistente.

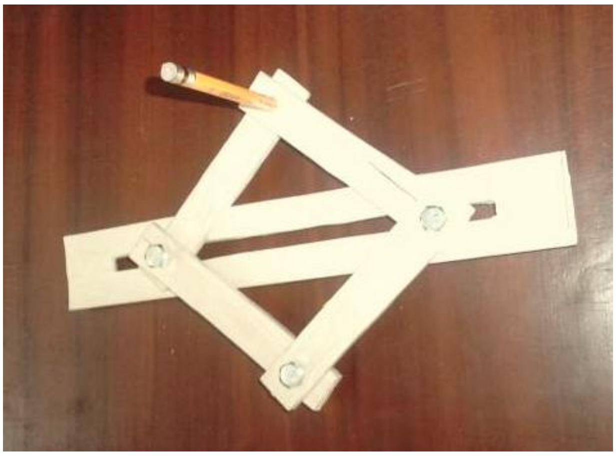
4. Así quedan recortadas las partes del simetrizador.



5. Con un destornillador u otra herramienta que permita realizar huecos, se hace una abertura en la parte superior e inferior de cada uno de los lados que conforman el rombo.

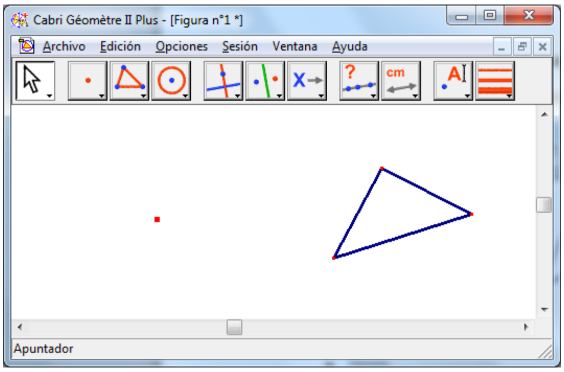


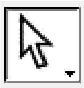
6. Ubicando dos vértices opuestos del rombo sobre el eje de simetría se atornillan sin que queden ajustados; en uno de los otros dos vértices se ubica un lápiz y en su opuesto un tornillos.

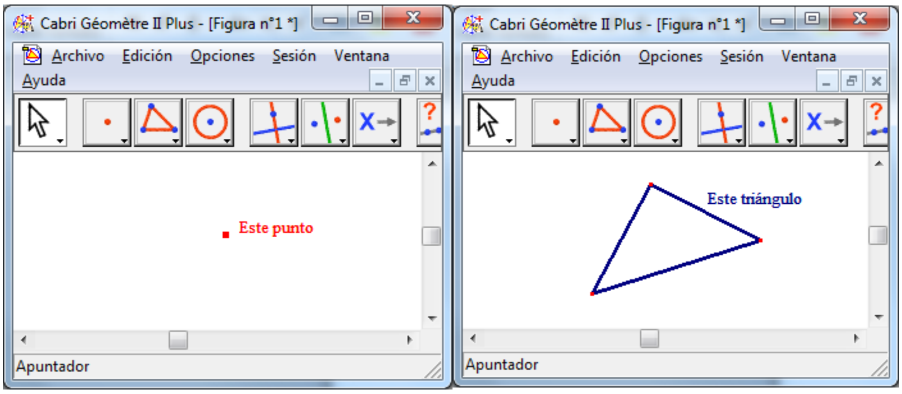


Anexo 2. Pasos para insertar una imagen en Cabri Geometry II Plus

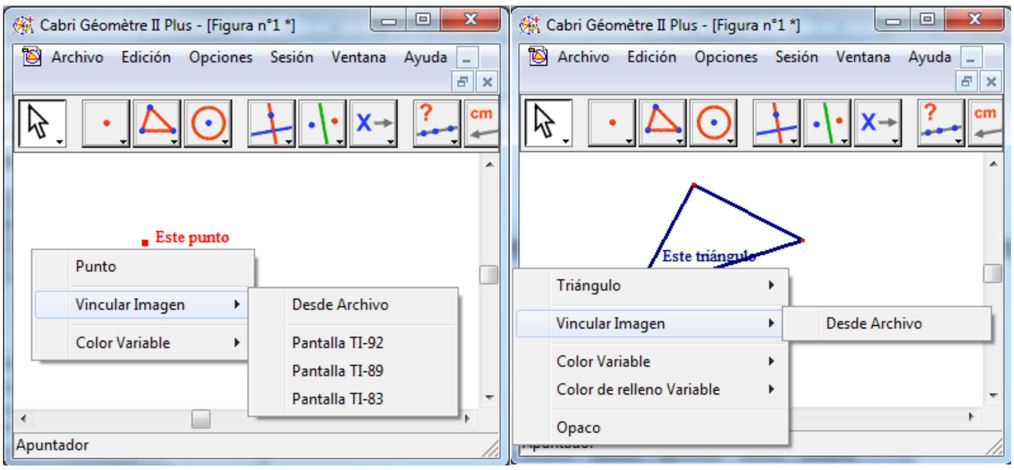
1. Se inserta un punto o un triángulo.



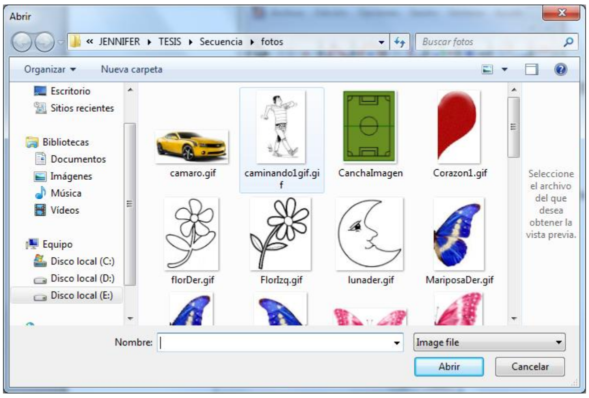
2. Se selecciona el apuntador  , señalando el punto o el triángulo, según sea el caso, hasta que aparezca "Este punto" o "Este triángulo".



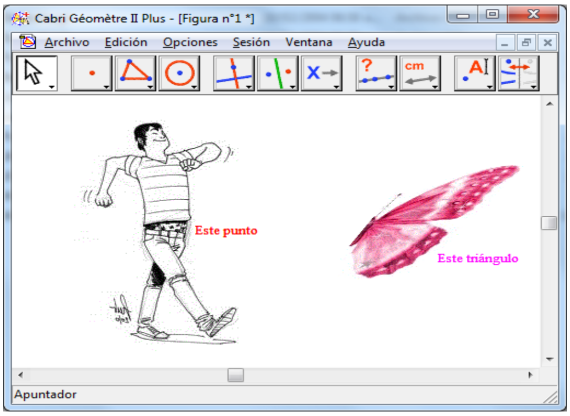
3. Se da clic derecho en el mouse y se selecciona la opción "Vincular Imagen / Desde Archivo".



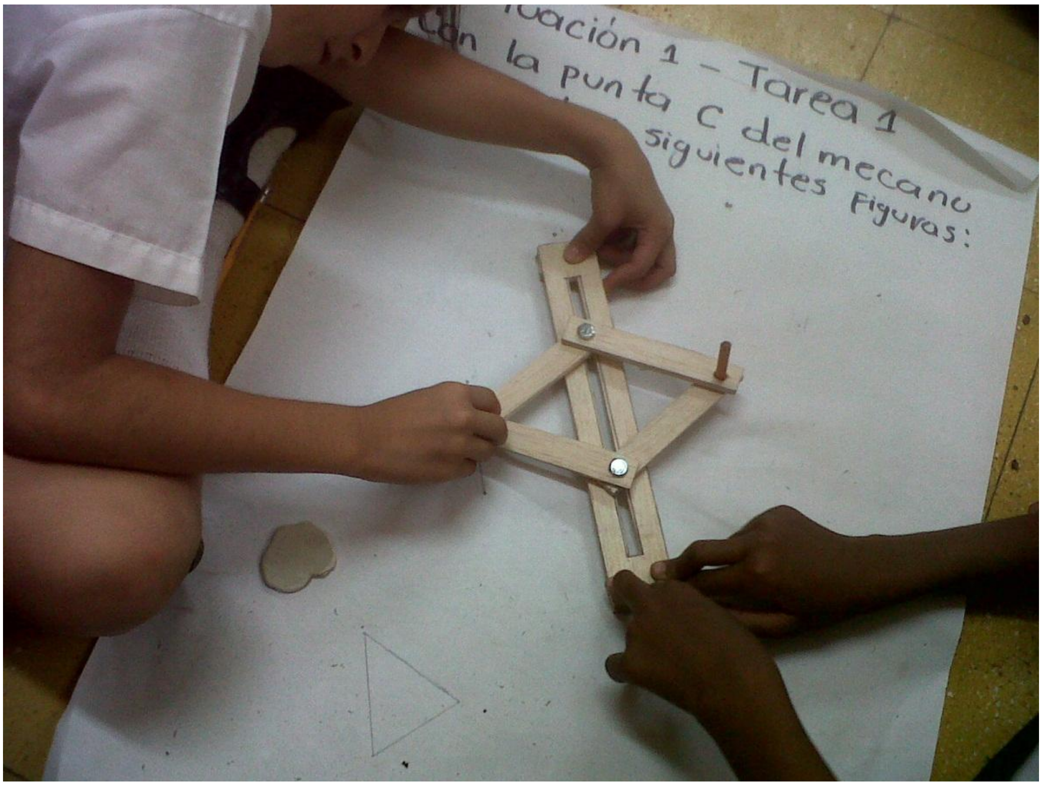
4. Se escoge desde el archivo la imagen guardada en el computador que se desea utilizar.

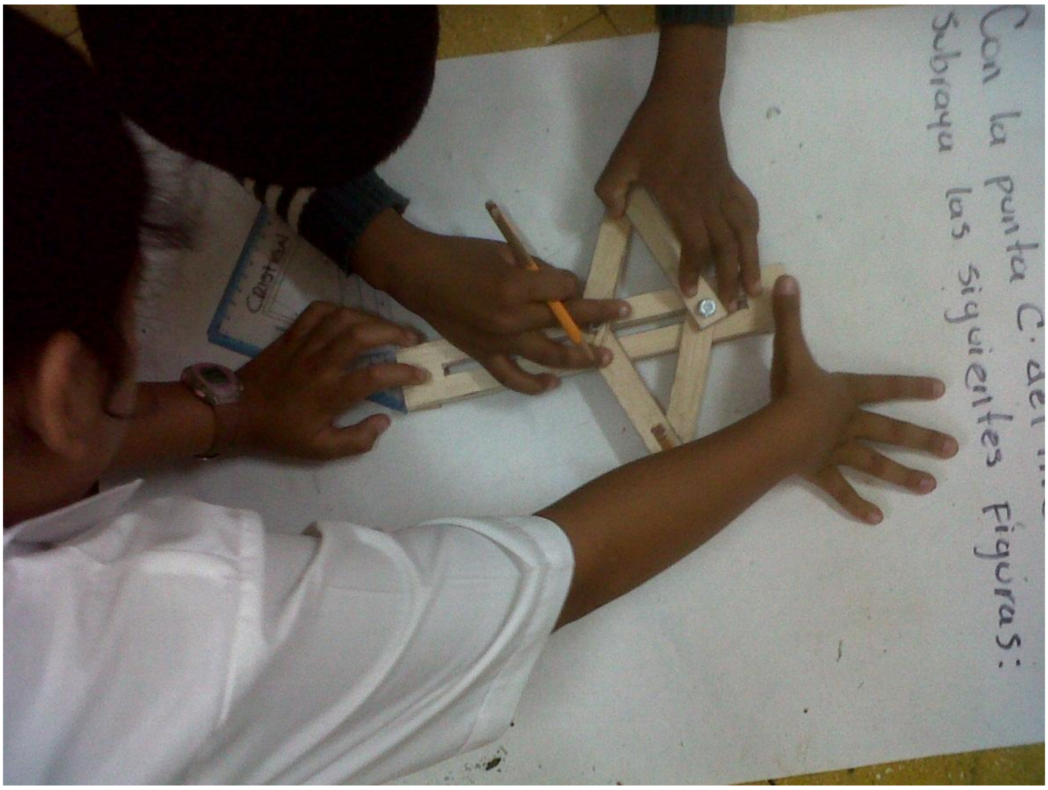


5. Finalmente, la imagen escogida queda vinculada al punto o al triángulo.

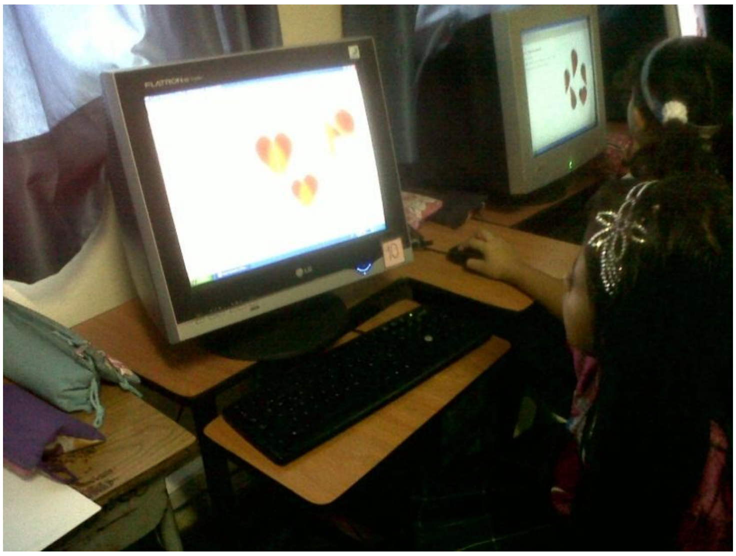


Anexo 3. Registro fotográfico de la instrumentalización del simetrizador


Tarea 1
Con la punta C del mecano
siguientes Figuras:

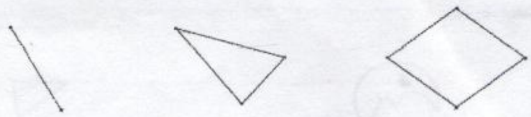

Con la punta C. del
Subraya las siguientes Figuras:

Anexo 4. Registro fotográfico de la instrumentalización de Cabri Geometry II Plus



Anexo 5. Producciones de los estudiantes – Situación 1

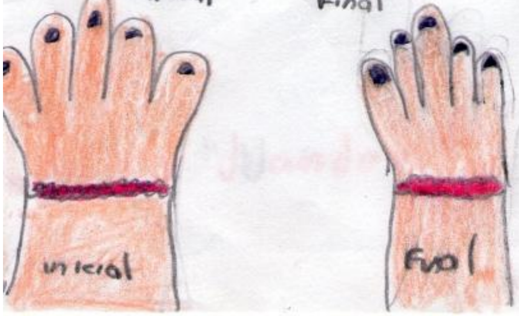
Tarea 2. Con la punta C del mecano subraya por puntos cada figura y une con regla los puntos obtenidos por el mecano:



1. ¿Cuál crees que es el número mínimo de puntos que se necesitan para formar cada figura, tanto la subrayada con el mecano (figura inicial) como la obtenida por este (figura final)?

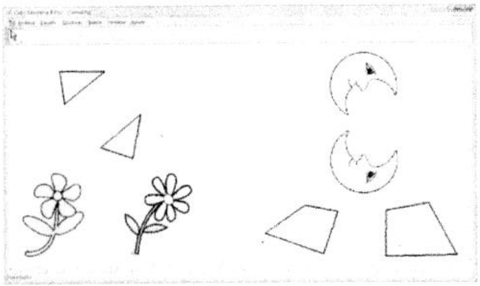
Figura	Número mínimo de puntos de la figura inicial	Número mínimo de puntos de la figura final
	2	2
	3	3
	4	4

Tarea 3. Representa como quedaría una mano, media luna y la letra P si la dibujaras con el mecano.



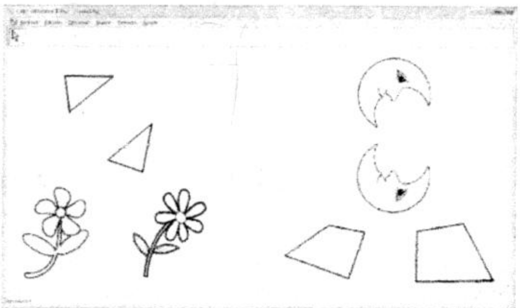
Diseñado por: Yudis Ibarguen Borja
Jennifer Realpe González

Tarea 4. Si con el mecano se pudiera realizar cualquier tipo de figura, ¿cuáles de estas figuras serían dibujadas por él? ¿Por qué?



Los triangulos y las lunas
las flores no porque no son iguales y tampoco los boligonos

Tarea 4. Si con el mecano se pudiera realizar cualquier tipo de figura, ¿cuáles de estas figuras serían dibujadas por él? ¿Por qué?



Los trianguLOS y luna se pueden dibujar con el mecano porque el mecano puede hacer figuras iguales y de muchas formas.
y las figuras que no se puede hacer con el mecano son las flores y el poligono.

Anexo 6. Producciones de los estudiantes – Situación 2

UNIVERSIDAD DEL VALLE
INSTITUTO DE EDUCACIÓN Y PEDAGOGÍA
ÁREA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA
SECUENCIA DIDÁCTICA – GRADO TERCERO

Universidad del Valle

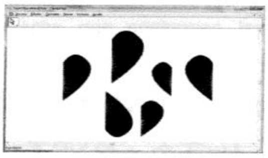
instituto de educación y pedagogía

Fecha: Marzo 13 2012
Nombres:

Institución:

Situación 2. "Uniendo mitades"

Tarea 1. Forma corazones



1. ¿Cuántos corazones se pueden formar con las piezas? ¿Por qué?

1 Por que tiene lamisma forma

2. Describan cómo hicieron para formar corazones.

uniendo la mitad del corazon

UNIVERSIDAD DEL VALLE
INSTITUTO DE EDUCACIÓN Y PEDAGOGÍA
ÁREA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA
SECUENCIA DIDÁCTICA – GRADO TERCERO

Universidad del Valle

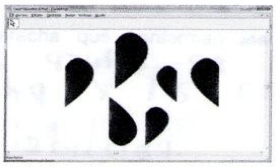
instituto de educación y pedagogía

Fecha: Marzo 13-2012.
Nombres:

Institución:

Situación 2. "Uniendo mitades"

Tarea 1. Forma corazones



1. ¿Cuántos corazones se pueden formar con las piezas? ¿Por qué? 1 Por que los de mas tienen diferentes medidas

2. Describan cómo hicieron para formar corazones.

agarramos una Parte de un corazon y lo juntamos con la otra Parte.

UNIVERSIDAD DEL VALLE
INSTITUTO DE EDUCACIÓN Y PEDAGOGÍA
ÁREA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA
SECUENCIA DIDÁCTICA – GRADO TERCERO

Universidad del Valle

Instituto de educación y pedagogía

Fecha: Marzo 13 2012

Nombres:

Institución:

....

Situación 2. "Uniendo mitades"

Tarea 1. Forma corazones

1. ¿Cuántos corazones se pueden formar con las piezas? ¿Por qué?

Solo se Puede Formar 1 corazon porque las demas Figuras son diferentes

2. Describan cómo hicieron para formar corazones.

los juntamos las dos piesas y quedo el corazon

UNIVERSIDAD DEL VALLE
INSTITUTO DE EDUCACIÓN Y PEDAGOGÍA
ÁREA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA
SECUENCIA DIDÁCTICA – GRADO TERCERO

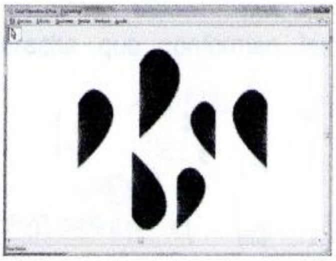
Fecha: Marzo 13 2022
Nombres:

Institución: ______________________

....

Situación 2. "Uniendo mitades"

Tarea 1. Forma corazones



1. ¿Cuántos corazones se pueden formar con las piezas? ¿Por qué?

uno porque los demas estan muy grande o muy chiquitos

2. Describan cómo hicieron para formar corazones.

utilizamos el maus y buscamos laforn

Tarea 2. Forma mariposas.

1. ¿Cuántas mariposas se pueden formar con las piezas? ¿Por qué?

Se pudieron formar 4 mariposas porque todas las figuras etan iguales

2. ¿Qué ocurre con la parte izquierda y derecha que conforman las mariposas?

Las mariposas rosadas se puede mover solo la izquierda

I en las azules la derecha

3. Si en lugar de mariposas tuvieras piezas para formar balones, ¿qué crees que ocurriría con la parte izquierda y derecha que conforman el balón?

Se moverian una sola Parte del balon

Tarea 2. Forma mariposas.

1. ¿Cuántas mariposas se pueden formar con las piezas? ¿Por qué? todas por que conrespondeasu pareja.

2. ¿Qué ocurre con la parte izquierda y derecha que conforman las mariposas? que las mariposas azules se mueben con la derecha y las rosadas se mueben con la izquierda.

3. Si en lugar de mariposas tuvieras piezas para formar balones, ¿qué crees que ocurriría con la parte izquierda y derecha que conforman el balón? por ejel los balones azules se mueben con la derecha y los balones rosados se mueben con la izquierda.

Anexo 7. Producciones de los estudiantes – Situación 3

UNIVERSIDAD DEL VALLE
INSTITUTO DE EDUCACIÓN Y PEDAGOGÍA
ÁREA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA
SECUENCIA DIDÁCTICA – GRADO TERCERO

Fecha: Marzo 13-2012.
Nombres:

Institución:

Situación 3. "El automóvil"

Tarea 1. Felipe y Gustavo parquean sus carros al frente de Computiendas, luego de comprar una cámara, Gustavo desea continuar su recorrido, pero como el carro de Felipe se encuentra frente al suyo debe retroceder. Haz que el carro de Gustavo retroceda.

1. ¿Se puede retroceder el carro de Gustavo? no

2. ¿Cómo hago para que el carro de Gustavo retroceda? mobiendo el carro de Felibe.

3. Cuando el carro de Felipe va hacia la tienda qué ocurre con el carro de Gustavo. se ba el de Gustavo. asiala tienda y el de Felife mira asiala derecha y el de Gustavo mira asiala izquierda.

4. Cuando el carro de Felipe retrocede qué ocurre con el carro de Gustavo. los dos se ban para a tras

Anexo 8. Producciones de los estudiantes – Situación 4

Universidad del Valle

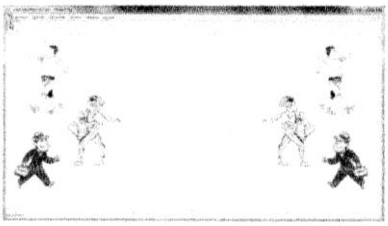
UNIVERSIDAD DEL VALLE
INSTITUTO DE EDUCACIÓN Y PEDAGOGÍA
ÁREA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA
SECUENCIA DIDÁCTICA – GRADO TERCERO

instituto de educación y pedagogía

Fecha: Marzo 14 2012
Nombres:

Institución:

Situación 4. "Distintos lugares"



Tarea 1. Un joven, un señor y una señora están buscando a sus hermanos gemelos.

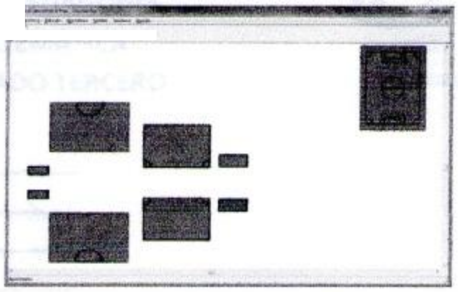
1. Dibuja el camino que debe recorrer la señora y su hermana gemela para que estén con sus manos juntas.

2. Dibuja el camino que debe recorrer el señor y su hermano gemelo para que estén con sus manos juntas.

3. Si hubieran más personas buscando a sus hermanos gemelos, cuál crees que sería el camino que deben recorrer para que estén con sus manos juntas. asia arriba y abajo

Tarea 2.

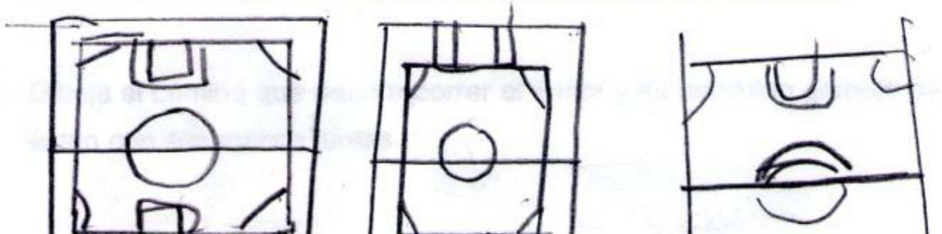
1. A partir de las piezas que están a la izquierda construye una cancha de futbol como se muestra en la pantalla.



2. Intenta construir la cancha en otra parte de la pantalla. Comparándola con la posición de la cancha anterior, ¿dónde quedó ubicada la nueva cancha?

Quedo al lado isquierdo

3. Si tuvieras que ubicar nuevamente la cancha en otra parte de la pantalla, distinta a las anteriores, ¿dónde crees que quedaría ubicada? Representa mediante un dibujo cómo quedaron ubicadas las tres canchas.



Y qurdo al lado derecho

Anexo 9. Guía para la docente de grado tercero

UNIVERSIDAD DEL VALLE
INSTITUTO DE EDUCACIÓN Y PEDAGOGÍA
AREA DE EDUCACION MATEMATICA
SECUENCIA DIDÁCTICA – GRADO TERCERO

Jennifer Realpe González - Cel. 311 7499905
Yudis Ibarguen Borja – Cel. 316 7053754
Estudiantes de la Licenciatura en Educación Básica con Enfasis en Matemáticas

LA ENSEÑANZA DE LA SIMETRÍA AXIAL A PARTIR DE LA COMPLEMENTARIEDAD DE ARTEFACTOS

Presentación

Se propone una secuencia didáctica para grado tercero con la que busca el acercamiento de los estudiantes a las propiedades de la simetría axial, a través de la complementariedad de artefactos, como un simetrizador, el software Cabri Geometry II Plus y herramientas tradicionales como regla, lápiz y papel.

El diseño de la secuencia didáctica se basa en la Teoría de Situaciones Didácticas[1] de Brousseau (2007), por lo que se pretende que el estudiante se sienta responsable de resolver sin ayuda del docente cada tarea. De manera que, de la interacción con el *medio*[2], en este caso los artefactos mencionados anteriormente, produzca el conocimiento de las propiedades de la simetría axial.

La secuencia didáctica está diseñada para grado tercero, puesto que los Estándares Básicos de Competencias en Matemáticas establecen que al terminar este grado los estudiantes deben reconocer y valorar simetrías en distintos aspectos del arte y el diseño.

[1] A través de la Teoría de Situaciones Didácticas se pueden diseñar situaciones didácticas alrededor de un saber matemático, que le permita al estudiante la adquisición de nuevos conocimientos mientras interactúa con un *medio*, sin intervención del docente.

[2] El medio es aquello con lo que interactúa el estudiante, sobre el cual puede realizar acciones y recibir respuestas a estas acciones, que le permitan decidir si fueron las correctas o en caso contrario buscar otra solución.

La secuencia didáctica se compone de cuatro situaciones que se trabajan en parejas, en un tiempo aproximado de seis horas. Al inicio de cada situación se entregará a los estudiantes la respectiva hoja de trabajo; ésta consiste en una hoja de papel donde los estudiantes encuentran las preguntas de las tareas y dónde deben escribir las respuestas. Finalizados cada sesión se recoge la hoja de trabajo, la cual se retorna en la siguiente sesión cuando el tiempo no alcance para que la mayoría de los estudiantes finalicen.

En la primera situación se les presenta a los estudiantes el simetrizador como "el mecano", esto con el fin de no revelarles que las tareas que van a resolver tienen que ver con la simetría axial. Además, les indicará que el mecano tiene dos puntas, la punta C con la cual se subrayan las figuras y la punta D que contiene un lápiz, con el cual se dibuja la figura simétrica (ver Figura 1).

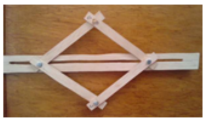


Figura 1. Simetrizador

Para dar solución a la secuencia didáctica se requiere que los estudiantes movilicen saberes como:

- El reconocimiento de algunas figuras geométricas (punto, segmento, triángulo, rombo)
- La forma de algunas figuras cotidiana (mano, corazón, mariposa, balón, media luna y la letra P).

Por otra parte, la secuencia didáctica moviliza nuevos saberes como:

- Identificar que la imagen de una figura realizada por medio de un simetrizador es la misma que la inicial, pero en dirección opuesta, en otras palabras las figuras son congruentes.
- Identificar el mínimo número de puntos que requiere una figura para ser dibujada, en otras palabras, se utiliza el teorema por dos puntos pasa una recta y solo una.
- Reconocer que cuando se trabaja con el software Cabri Geometry II Plus, en las figuras simétricas el movimiento de la figura final depende de la inicial y que éstas se alejan o se acercan entre ellas con respecto a un eje.
- Identificar que en las figuras simétricas se invierte la orientación de las figuras.
- Reconocer los diferentes ejes de simetría, el eje vertical, el eje horizontal y el eje oblicuo.

Materiales:

- Simetrizador, hojas de trabajo y papel bond (Llevado por las investigadoras).
- Sala de computadores con Cabri Geometry II Plus instalado (Dado por la institución).
- Regla, borrador y lápiz. (Llevado por los estudiantes).

PRIMERA SESIÓN

Propósito: Determinar las relaciones entre la figura dada y la obtenida con el simetrizador.
Tiempo: 2 horas (8-10 a.m)

Situación 1. "Dibujando con un mecano"

Tarea 1. Con la punta C del mecano subraya las figuras:

1. ¿Qué dibujo se obtuvo en cada caso?
2. ¿Qué similitudes y diferencias encuentras entre las figuras subrayadas y las obtenidas con el mecano?

Tarea 2. Con la punta C del mecano subraya por puntos cada figura y une con regla los puntos obtenidos por el mecano:

1. ¿Cuál crees que es el número mínimo de puntos que se necesitan para formar cada figura, tanto la subrayada con el mecano (figura inicial) como la obtenida por este (figura final)?

Figura	Número mínimo de puntos de la figura inicial	Número mínimo de puntos de la figura final

Tarea 3. Representa como quedaría una mano, media luna y la letra P si la dibujaras con el mecano.

Tarea 4. Si con el mecano se pudiera realizar cualquier tipo de figura, ¿cuáles de estas figuras serían dibujadas por él? ¿Por qué?

SEGUNDA SESIÓN

Propósito:

- La segunda situación tiene como propósito identificar la congruencia como una propiedad de las figuras simétricas.
- La tercera situación tiene como propósitos reconocer que en las figuras simétricas se invierte la orientación de las figuras e identificar la dependencia de la figura imagen en relación a la figura inicial.

Tiempo: 2 horas (8-10 a.m)

Situación 2. "Uniendo mitades"

Tarea 1. Forma corazones

1. ¿Cuántos corazones se pueden formar con las piezas? ¿Por qué?
2. Describan cómo hicieron para formar corazones.

Tarea 2. Forma mariposas.

1. ¿Cuántas mariposas se pueden formar con las piezas? ¿Por qué?
2. ¿Qué ocurre con la parte izquierda y derecha que conforman las mariposas?
3. Si en lugar de mariposas tuvieras piezas para formar balones, ¿qué crees que ocurriría con la parte izquierda y derecha que conforman el balón?

Situación 3. "El automóvil"

Tarea 1. Felipe y Gustavo parquean sus carros al frente de Computiendas, luego de comprar una cámara, Gustavo desea continuar su recorrido, pero como el carro de Felipe se encuentra frente al suyo debe retroceder. Haz que el carro de Gustavo retroceda.

1. ¿Se puede retroceder el carro de Gustavo?
2. ¿Cómo hago para que el carro de Gustavo retroceda?
3. Cuando el carro de Felipe va hacia la tienda qué ocurre con el carro de Gustavo.
4. Cuando el carro de Felipe retrocede qué ocurre con el carro de Gustavo.

TERCERA SESIÓN

Propósito: Reconocer las diferentes direcciones de los ejes de simetría: vertical, horizontal y oblicuo.

Tiempo: 2 horas (8-10 a.m)

Situación 4. "Distintos lugares"

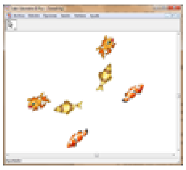
Tarea 1. Un joven, un señor y una señora están buscando a sus hermanos gemelos.

1. Dibuja el camino que debe recorrer la señora y su hermana gemela para que estén con sus manos juntas.
2. Dibuja el camino que debe recorrer el señor y su hermano gemelo para que estén con sus manos juntas.
3. Si hubieran más personas buscando a sus hermanos gemelos, cuál crees que sería el camino que deben recorrer para que estén con sus manos juntas.

Tarea 2.

1. A partir de las piezas que están a la izquierda construye una cancha de futbol como se muestra en la pantalla.
2. Intenta construir la cancha en otra parte de la pantalla. Comparándola con la posición de la cancha anterior, ¿dónde quedó ubicada la nueva cancha?
3. Si tuvieras que ubicar nuevamente la cancha en otra parte de la pantalla, distinta a las anteriores, ¿dónde crees que quedaría ubicada? Representa mediante un dibujo cómo quedaron ubicadas las tres canchas.

Tarea 3. Cada pez se encuentra disgustando con su pareja (de la misma especie) para reconciliarse deben darse besos.



1. Dibuja el camino que deben recorrer los peces para darse besos.
2. Si hubieran más peces disgustados con su pareja, ¿dónde crees que se reconciliarían? Dibuja el camino que forman las cuatro parejas de peces dándose besos.

BIBLIOGRAFÍA

Brousseau, G. (2007). *Iniciación al estudio de la Teoría de Situaciones Didácticas.* (D. Fregona, Trad.). Buenos Aires, Argentina: Libros del Zorzal. (Trabajo original publicado en 1986).