ALBERTO DURERO: RELACIÓN GEOMETRÍA Y EXPERIENCIA

Johanna Jennifer Mora Olarte

UNIVERSIDAD DEL VALLE

INSTITUTO DE EDUCACIÓN Y PEDAGOGÍA

ÁREA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA

SANTIAGO DE CALI

2011

ALBERTO DURERO: RELACIÓN GEOMETRÍA Y EXPERIENCIA

Johanna Jennifer Mora Olarte

UNIVERSIDAD DEL VALLE
INSTITUTO DE EDUCACIÓN Y PEDAGOGÍA
ÁREA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA
SANTIAGO DE CALI
2011

ALBERTO DURERO: RELACIÓN GEOMETRÍA Y EXPERIENCIA

Johanna Jennifer Mora Olarte

Cód. 0439638

Requisito parcial para optar por el título de

Licenciado en Educación Básica con Énfasis en Matemáticas

Directora

Gabriela Arbeláez

UNIVERSIDAD DEL VALLE

INSTITUTO DE EDUCACIÓN Y PEDAGOGÍA

ÁREA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA

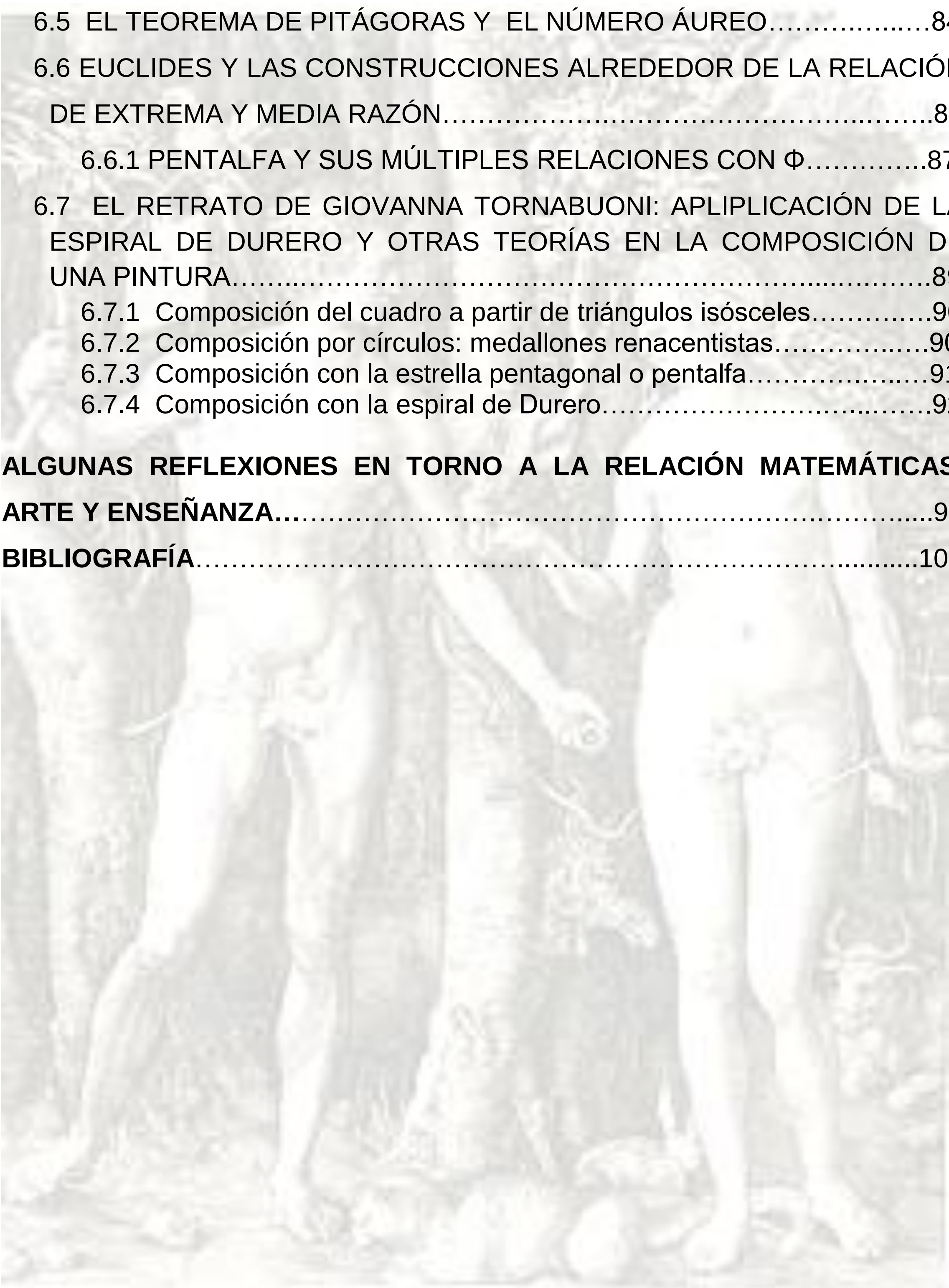
SANTIAGO DE CALI

2011

CONTENIDO

Pág.

Pág.



LISTA DE IMÁGENES

Pág.

LISTA DE FIGURAS

Pág.

Este escrito va dedicado a mi amigo Jonathan Har Duque,
Por su entrega total a la academia,
Por su ejemplo y su ausencia que siempre nos recuerda,
Que cada cosa debe hacerse con total pasión.

AGRADECIMIENTOS

El autor expresa su agradecimiento:

A mi madre Ross Olarte, mis hermanos Luis y Eugenia y a Marcos Mauricio por su amor, sus palabras de apoyo y su paciencia, por dejar que todo lo hiciera en mi tiempo e hiciera lo que más quisiera.

Al profesor Fernando Gálvez por siempre darme la esperanza y el apoyo en todo momento, por enfrentar terrenos desconocidos y sin embargo tener la gallardía de enfrentarlos conmigo.

A la profesora Gabriela Arbeláez por acoger esta idea y hacerla suya, por guiarme y darme la oportunidad junto a ella de ver realizado uno de mis tantos logros.

A mis amigos Carlos Melán, Diana Lourido, Evelyn Mesías Andrea Quiñones y la profesora Myriam Belisa Vega, que durante estos últimos cuatro años me han demostrado su más leal respeto por mis ideas.

A los evaluadores, el profesor Luis Cornelio Recalde y Omar Díaz, quienes dieron las últimas pinceladas para la culminación de dicha obra.

Y a todos los que en este largo proceso de aprendizaje dieron forma a lo que hoy en día soy como profesional, mil gracias Instituto de Educación y pedagogía de la Universidad del Valle.

RESUMEN

En este trabajo se aborda una de las más significativas relaciones entre la matemática y el arte, surgida en una época de cambio frente a la perspectiva del universo. El Renacimiento es el escenario de donde surge esta relación, mas precisamente en Nuremberg, Alemania en donde nace un artista quien con su inventiva y ánimo por llevar el arte a un nivel mucho más alto, construye una relación entre la pintura y la geometría.

Alberto Durero (1471-1528) es un artista que utiliza la geometría en aras de teorizar bajo la certeza de la ciencia todas las prácticas del pintor, teniendo en cuenta diferentes estudios preliminares de artistas italianos, textos matemáticos como *Los Elementos* de Euclides y ayuda de filósofos, humanistas y amigos que vivieron de cerca la construcción de su tratado de pintura.

A lo largo de su tratado, Durero abarca diferentes nociones matemáticas que servirán al artista en la realización de su trabajo, dándole cierta materialidad a los objetos matemáticos, de los cuales mostraremos el trabajo realizado con las espirales, los problemas irresolubles con regla y compás (trisección de un ángulo, duplicación del cubo), el concepto de infinito en acto y potencia y la espiral de Durero o espiral logarítmica en relación con diferentes teorías matemáticas.

En este trabajo también se muestra la composición pictórica del retrato de Giovanna Tornabuoni (1490) realizado por Domenico Ghirlandaio y por último las conclusiones respectivas en torno al trabajo del artista, el matemático y el docente en matemáticas.

Palabras y términos claves: Alberto Durero, Renacimiento, teorización, práctica, espiral de Arquímedes, espiral de Durero, aplicación, problemas irresolubles, líneas acompasables, infinito en potencia y acto, el número de oro, relación en extrema y media razón, rectángulo áureo y pentalfa.

INTRODUCCIÓN

La geometría (del latín *geometrĭa*, que proviene del idioma griego γεωμετρία, *geo* tierra y *metria* medida), es una rama de la matemática que se ocupa del estudio de las propiedades de las figuras geométricas en el plano o el espacio. Siendo una de las más antiguas ciencias, la geometría ha permitido cimentar otras disciplinas, fortalecer prácticas y dar explicación a sucesos naturales, entre otros.

Como rama de la matemática, la geometría va mas allá de la percepción, de lo que se puede intuir a través de los sentidos, requiriendo una estructura organizada y un método que permita, bajo la certeza matemática, seguir un procedimiento bien fundamentado, utilizando una gramática formal, la cual permita modelar diferentes propósitos, conocido como sistema axiomático.

El primer sistema axiomático lo establece Euclides con su obra *Los Elementos;* tratado matemático que se compone de trece libros. Escrito hacia el 300 AC, su sistema axiomático compuesto por definiciones, nociones comunes, postulados y proposiciones presenta de manera formal un estudio de las propiedades de líneas y planos, círculos y esferas, triángulos y conos, etc.

En esta obra, Euclides expone un compendio organizado de demostraciones geométricas las cuales ya se habían trabajado antes de él; sin embargo, no es precisamente estas demostraciones las que ponen en un nivel relevante los *Elementos*. Más bien es el poder recoger todo ese bagaje matemático que ya se tenía y organizarlo de manera formal, siendo él el artífice del orden deductivo con que aborda cada una de ellas.

La geometría de Euclides, además de ser el primer sistema axiomático en la matemática, ha sido útil en muchos campos del conocimiento, como en el caso de la física, la astronomía, la química, diversas ingenieras y el arte.

La relación entre la geometría y el arte no sólo es un tema importante en aquella época porque se trata de encontrar la relación de esta rama de las matemáticas con otras disciplinas, sino que es búsqueda desde las entrañas de la práctica del artista tratando de encontrar los cimientos formales que permitan edificar las prácticas de taller y sus experiencias en torno al arte.

Esta búsqueda de los artistas se da en las postrimerías de la época llamada Medioevo; época en donde se empieza a vivir un nuevo despertar del conocimiento antiguo permeando las nuevas actividades y puntos de vista frente a la vida y el saber. Muchos pintores emprendieron la búsqueda de formalización en la práctica de taller, como *Filippo Brunelleschi* (1377-1446), quien formula las primeras leyes de la perspectiva central, *Leon Battista Alberti* (1404-1472) creador del primer tratado sobre perspectiva en base a sus investigaciones y a lo investigado por Brunelleschi, etc.

Pero fue el artista alemán Alberto Durero (1471-1528), quien se nutre no sólo del trabajo que con anterioridad artistas italianos empezaron a desarrollar alrededor de la pintura, sino que también indaga en el conocimiento matemático las bases teóricas para poder crear un tratado para los artistas bajo la certeza matemática. Las principales fuentes para establecer su tratado de la pintura son: *Las espirales*, de Arquímedes, *el tratado de las construcciones geométricas* de Abu'l-Wafâ y *Los Elementos* de Euclides.

Para poder apreciar una parte del trabajo desarrollado por Alberto Durero, esta monografía aborda el tratado de Durero a la luz del texto *De la Medida* de Jeanne Peiffer y el texto de Carlos Alberto Cardona Suárez, *La geometría de Alberto Durero: estudio y modelación de sus construcciones.*

En el primer capítulo se trata de ubicar al lector en el contexto que nutrió al pintor en la búsqueda de la teorización de su experiencia como artista, Alberto Durero es uno de los tantos personajes que enmarca un periodo en donde se deja de lado el papel del hombre como admirador de la belleza de la naturaleza, para empezar a ser aquel ser creativo que tiene también el poder de construir su propio mundo.

En el siguiente capítulo se aborda la vida y obra del artista alemán, su ciudad natal Nuremberg como una de las puertas hacia el enriquecimiento intelectual, el proceso, que como teórico del arte, tuvo que afrontar y la ayuda que en reiteradas ocasiones recibiría de su más allegado amigo. Así mismo, la descripción de su tratado y los conocimientos matemáticos que aborda, dejando claro que su tratado no es un compendio de demostraciones matemáticas, sino que es la relación que con las matemáticas puede llegar a tener el arte, específicamente la pintura.

En el capítulo III, se aborda la relación y diferencias entre la naturaleza de los objetos matemáticos para Durero y lo que en el libro I de los *Elementos* de Euclides se afirma, enfatizando el artista en el carácter práctico de los objetos matemáticos, que para él es lo que se necesita en la práctica de su oficio; sin embargo, deja claro, desde un comienzo, al lector la importancia de no olvidar el carácter abstracto de dichos objetos.
De igual forma, se mostrará las primeras construcciones de espirales que Durero trazó, basándose en el *Tratado de las espirales* de Arquímedes y las respectivas aplicaciones a la pintura como son la espiral con hojas, el báculo episcopal y la línea para labores de follaje.

Durero también trabaja en torno a los tres problemas irresolubles con regla y compás, mostrando la construcción aproximada al problema de trisecar un ángulo y a partir de esta solución, traspasar esta división a un segmento de recta donde se construirá una espiral. Este traspaso de medidas entre un arco y un segmento, Durero las llama líneas acompasables y también sirven en la aplicación de dicha teoría a la pintura, como la construcción de una escalera en forma de caracol teniendo la planta y el alzado de dicha espiral.

Así mismo, en el capítulo IV se muestra la solución de otro de los problemas irresolubles, la duplicación del cubo escrita por Eutocio de Ascalón (480 - 540). A partir de esta construcción Durero enseña como se puede doblar o reducir un cubo con su doble.

Una de las diferencias más marcadas entre la teoría de Durero y la de Euclides, se remonta a uno de los debates más suscitados a lo largo de la historia, la noción de infinito en potencia y acto. En el quinto capítulo se relaciona la idea de infinito para Euclides a la luz del pensamiento aristotélico y su diferencia con el pensamiento que tal vez llegó a tener Durero desde el punto de vista de Giordano Bruno.

A partir de esta apreciación surge una construcción que *grosso* modo trabaja Durero, pero que lo diferenciará de los demás artistas de su época, la que se conoce actualmente como la espiral de Durero o la aproximación a la espiral logarítmica. En este capítulo se recreará paso por paso la construcción de dicha espiral y se evidenciaran las diferencias con la espiral arquimédica.

En el último capítulo se muestra la relación de la espiral de Durero como parte de todo un bagaje histórico relacionado con el número de oro o razón áurea. Desde Pitágoras, pasando por Euclides con la definición de media y extrema razón, la sucesión de Fibonacci por Leonardo de Pisa y las construcciones anónimas como la del rectángulo áureo, la espiral logarítmica hacen parte de las múltiples manifestaciones de dicho número en las matemáticas, la naturaleza y las artes. Como ejemplo de esta manifestación se muestra la pintura de Giovanna degli Albizzi Tornabuoni creada por Domenico Ghirlandaio (1449-1494) a la luz de un estudio compositivo en donde se utiliza la espiral de Durero y la estrella pitagórica.

Por último se arriesgan algunas reflexiones frente a la relación matemática y arte y su repercusión en el aula de clase, exponiendo unas propuestas las cuales permitirán en la medida de lo posible ampliar la mirada del estudiante sobre las matemáticas y sus múltiples relaciones con las expresiones humanas.

CAPÍTULO I

ALGUNAS IDEAS QUE CARACTERIZAN LA ÉPOCA LLAMADA EL RENACIMIENTO

Imagen 1. San Jerónimo en su gabinete. Grabado del pintor alemán Alberto Durero (Albrecht Dürer). Realizado en 1514.[1]

1.1 INTRODUCCIÓN

Cuando se habla de Renacimiento se puede entender como un nuevo comienzo en torno a algo o alguien, una nueva forma de ver las cosas o de entenderlas, esto es precisamente lo que pasó en un lapso de tiempo en Occidente. Tanto la forma de vida como el pensamiento propio de esa época tuvieron transformaciones, contradicciones y todo un marco de sucesos, los cuales dieron nombre de El Renacimiento a este momento histórico. ¿Por qué es importante conocer esta época histórica llamada el Renacimiento? ¿Cuáles son las características más importantes de ésta época?

[1] Sobre la firma de Durero en este grabado ha surgido una teoría según la cual esta obra sería un homenaje de Durero a Leonardo da Vinci. 1514 + 1 (valor numérico de A) + 4 (valor numérico de D) señala 1519, año de la muerte de Leonardo da Vinci. Más aún, Jerónimo se parece a un autorretrato de da Vinci. http://www.esacademic.com/dic.nsf/eswiki/1054475

Más que conocer lo que aconteció en este momento, en este capítulo se trata de comprender lo que dio forma a este “renacer histórico”, explorar esa idea que paulatinamente tomó forma en una sociedad.

1.2 RENACIMIENTO: ORIGEN E IDEAS DE UNA ÉPOCA

Esta nueva manera de pensar tiene su expresión mas clara en el siglo XVIII y es lo que se conoce como *pensamiento moderno*[2].

Los orígenes de éste pensamiento se dan en el mismo periodo llamado Medioevo, en donde se da la disolución entre la idea medieval por una nueva idea, dando inicio a la época llamada Renacimiento.

Es entre los siglos XVI y XVII donde se empieza a tener “el primer germen”[3], de una concepción distinta del hombre y del mundo, teniendo como contexto principal algunas ciudades de Italia “este germen no es universal todavía”, para después extenderse por los países Bajos y repercutir a lo largo del tiempo.

Para poder entender éste pensamiento, se parte de “una idea regulativa, o de ciertas ideas básicas”[4], las cuales surgen del pensamiento actual, Villoro afirma:

“Habremos de partir de una idea previa de lo que tenemos que buscar, y esta solo puede provenir de la conciencia de nuestra época (VILLORO, 1992, p. 11)”.

Estas ideas pueden ser aparentes o ciertas, sin embargo, permitirán esclarecer la realidad de una época y tener una dirección hacia la caracterización del pensamiento de la misma, “las ideas básicas que caracterizan a una época

[2] Se podría hablar de los orígenes del Renacimiento desde el siglo XIII con hombres que en su trabajo individual, tuvieron ideas renovadoras las cuales permiten en muchos otros trabajos respecto a la época, pensar en un rango de tiempo mucho mas amplio respecto al surgimiento del pensamiento moderno, lo que denota este periodo como el momento donde empezó una nueva visión del mundo y de sí mismo, es que fueron “ideas compartidas por un grupo de personas: humanistas, artistas, hombres de empresa que tuvieron que enfrentar el pensamiento antiguo” (VILLORO, 1992, p. 10).

[3] Ibíd., p. 9.

[4] Ibíd., p. 8.

señalan la manera como el mundo entero se configura ante el hombre”[5], teniendo en cuenta esa mentalidad[6] se puede reconocer características del hombre y el mundo que en su momento le rodeaba, permitiendo esclarecer de forma paulatina el pasado.

1.2.1 El mundo sublunar y celeste: no todo cabe en la muñeca rusa.

La idea que originó un cambio en el pensamiento del hombre moderno es la idea del universo, esta idea cambió totalmente la concepción que se tenía del espacio, Villoro muestra mediante un ejemplo, como se concebía la idea del universo finito antes del Renacimiento:

> Es como una cajita, como una de estas muñecas rusas o polacas en las cuales, al abrir cada una, se encuentra otra exactamente igual, al abrir ésta, otra más y así sucesivamente hasta llegar a una muy pequeña que es, por así decirlo, el centro o núcleo de toda la muñeca (VILLORO, 1992, p. 14).

Cada muñeca, una dentro de otra, es un cuerpo celeste, por fuera de ellas está la presencia de dios, “el mundo físico tiene pues un límite preciso”[7]. La primera muñeca contiene todas las estrellas fijas que se ven desde la tierra.

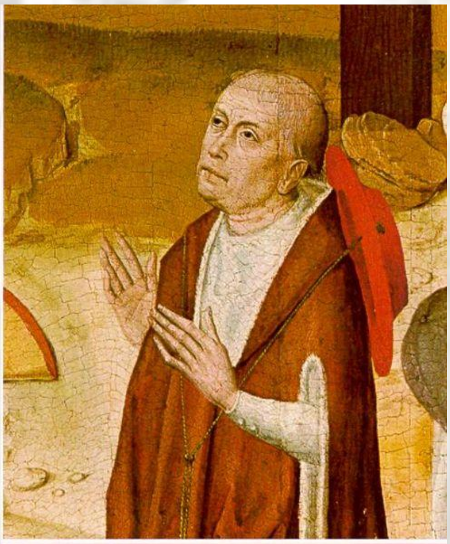
Poco a poco cada muñeca que se va abriendo, son los cinco planetas descubiertos hasta el momento los cuales “contienen materia sutil y transparente”, abriendo luego la muñeca que representa al sol y la penúltima muñeca que sería la luna, al final la última muñeca, el centro de todo, la tierra.

Imagen 2. Matriuska o muñeca rusa.

[5] Ibíd., p. 8.
[6] El autor aclara que no se trata de un sistema de pensamiento sino de una mentalidad. No se quiere hacer referencia a un sistema de enunciados precisos, se quiere saber la relación del hombre con el mundo a partir de ciertos valores y estilos generales de razonar implícitos en varios sistemas. (VILLORO, 1992, p. 8).
[7] Ibíd., p. 13.

Este orden finito donde el centro de todo es la tierra, “cada cosa tiene asignado un sitio”[8], es lo que el hombre medieval también relaciona no solo con un orden celeste, sino con su modo de vida, este orden es trasladado a su relación con el medio, “la sociedad se ordena respecto de un centro político y uno espiritual: la doble potestad de la corona y la tiara”[9], todos ocupan un lugar determinado dentro de la misma y de esta forma todo es equilibrado, “la sociedad humana, de modo semejante, es una sociedad jerarquizada en donde cada estamento ocupa su lugar”[10].

Imagen 3. Retrato de Nicolás de cusa por el Meister des Marienlebens



Ahora bien, en el Renacimiento se dio una ruptura a este mundo ordenado según un centro. Las leyes que rigen tanto las cosas del mundo sublunar o terrestre como las del mundo celeste en el Medioevo son totalmente distintas, en el Renacimiento se empieza a suponer que “estas leyes son las mismas para ambos mundos, de modo que las mismas propiedades de la Tierra las comparte la esfera de las estrellas fijas”[11].

Uno de los primeros precursores de esta idea que diferencia el pensamiento del hombre del Medioevo con un pensamiento moderno desde mediados del siglo XV es *Nicolás de Cusa*[12] (1401-1464), filósofo de la época renacentista, quien define el universo de acuerdo a la definición hermética de Dios: “Una esfera cuyo centro está en todas partes y la circunferencia en ninguna”, la

[8] Ibíd., p. 14.
[9] Ibíd., p. 16.
[10] Ibíd., p. 15.
[11] Ibíd., p. 16.
[12] Nicolás de Cusa (Cusa, Tréveris, 1401 -†Todo, Umbría, 11 de agosto de 1464). Su nombre era Nicolaus Krebs o Chrypffs, pero fue conocido por Nicolás de Cusa por la ciudad en que nació, Kues. Hijo del naviero Johan Cryfts y de Catherina Roemer. Teólogo y filósofo, es considerado el padre de la filosofía alemana y, como personaje clave en la transición del pensamiento medieval al del Renacimiento, uno de los primeros filósofos de la modernidad.

imagen del universo sería “la de una esfera de radio infinito, donde la circunferencia y el radio se confunden, ambos son igualmente infinitos”[13], concluyendo que no se podría hablar de un único centro cuando cualquier punto puede considerarse como centro, la tierra empieza a dejar ser para algunos pensadores esa última muñeca rusa la cual es centro de todo, para tomar su lugar mas adelante el sol, permitiendo romper con la idea de que cada planeta es un cascaron vacío, tomando forma de cuerpos que vagan en el vacío alrededor de esta estrella.

1.2.2 En el Medioevo todo tiene su lugar, en el Renacimiento todo tiene su función.

Teniendo en cuenta la importancia del orden en el Medioevo, puesto que cada cuerpo tenía un lugar en el universo, al pensar por un momento que “la tierra deja de tener un centro geográfico” (VILLORO, 1992, p. 19), se empieza una época de descubrimientos en donde “cualquier parte puede ser centro”[14], no se tiene un orden establecido, todo depende de las relaciones que se tengan entre distintos cuerpos, eso era en el momento lo que el universo en sí mostraba y en cierta forma lo que en ese contexto se manifestaba, Villoro afirma:

> No interesa conocer el lugar natural que corresponde a cada cuerpo, sino las relaciones que tiene con otros, las funciones en que se encuentra el movimiento de un cuerpo respecto a los movimientos de otros (VILLORO, 1992, p. 19).

Empieza la busqueda del hombre por cualquier nuevo lugar, cualquier punto de referencia en la esfera terrestre, ampliando la visión de lo que se daba por único y certero, transformando la visión del mundo y el hombre.

A partir de la navegación se empiezan a conocer otras culturas, otras religiones, se empieza a pensar que “todas las religiones son válidas como caminos a Dios y todas tienen semejantes derechos a considerarse ordenadas por él” (VILLORO, 1992, p. 20).

[13] Ibíd., p. 17.
[14] Ibíd., p. 18.

El comercio se expande teniendo como principales centros las ciudades marítimas del norte de Italia y países bajos, formándose en estas ciudades grupos de empresarios que empezaron a formar empresa, todo esto permite al hombre del Renacimiento “constituir un nuevo poder que ya no está ligado al nacimiento ni al puesto ocupado en la jerarquía social sino a su propia capacidad de empresa”[15], de esta forma el lugar que se ocupaba ya no interesaba sino lo que se podría hacer para poder tener lo que se quisiese, “es la virtud personal y no la condición social la que importa en estos casos”[16]

1.2.3 “El hombre es un todo”

Esta afirmación hecha por Nicolás de Cusa podría enmarcar lo que el hombre empezaba a sentir por sí mismo, poder llegar a ser un todo porque él “tiene la potencia de llegar a ser cualquier cosa”[17], el ser humano tiene el libre albedrío de escoger que quiere ser, es el único ser que tiene *el poder de elección.*

No solamente se trata de poder *poseer* todas las propiedades que el hombre desea, se trata también de la capacidad de *poder ser* lo que quiera, Villoro, rremontándose a la física aristotélica, señala que “cada cosa tiene su propia *ousía,* su propia esencia, y cada una sigue las finalidades que le son determinadas por su *entelequia*” (VILLORO, 1992, p. 28).

Todas las cosas tienen un rumbo determinado, el hombre no; él tiene la posibilidad de elegir qué hacer con su vida, no tiene una *ousia* por lo tanto es visto “como acción que se da a sí mismo una esencia” (VILLORO, 1992, p. 32), es libre de escoger que hacer con su vida.

A partir de ver al ser humano como aquel que puede hacer lo que quiera, tiene de entrada todo un marco de posibilidades, “lo que caracteriza al hombre entre los demás entes es el estar abierto a un conjunto indeterminado de

---

[15] Ibíd., p. 20.
[16] Ibíd., p. 21.
[17] Ibíd., p. 24.

posibilidades"[18] lo cual lo deja en medio de inseguridades respecto a lo que sucederá, "está constantemente sujeto al riesgo, a la inseguridad de la libertad"[19], al perder el centro, el lugar que le corresponde como todo lo natural tiene su lugar, el hombre del Renacimiento puede llegar hacer todo lo que quiera, teniendo todas las posibilidades lo cual genera en él un futuro incierto gracias a la libertad única dada a los seres humanos de poder escoger.

1.2.4 El mundo creado por el hombre: la cultura

El hombre, al tener toda una elección de posibilidades es entonces trascendencia (VILLORO, 1992, p. 34), no se trata de trascender a otro nivel distinto al del mundo que nos rodea sino de poder pasar del orden de la naturaleza al de la posibilidad. ¿De qué forma trascenderá el hombre si en el mundo natural que habita todo tiene un comienzo y un fin? El hombre al poder escoger, tiene la posibilidad de crear un mundo en donde su estadía trascienda los límites del tiempo, se hace necesario "trascender de la naturaleza a la cultura"[20], el mundo que él crea de acuerdo a sus necesidades es el que le permite ser prevaleciente en un mundo natural de vida corto, como es el caso de la vida humana.

El hombre puede crear, y en su actividad crea un "nuevo mundo el cual está por encima de la naturaleza"[21], puesto que este mundo es "producto del trabajo del hombre"[22], de ahí su diferencia con el mundo natural, el cual es creado por Dios. Manetti (1396-1459)[23], describe cómo lo que Dios crea es material para la creación del hombre:

> Toda la naturaleza fue creada para el hombre, como señala el Génesis. Él la moldea, la usa como materia prima para formar sus propias obras. El mundo propio del hombre no es la naturaleza, aparece ya al crear el lenguaje; luego, desde que

---

[18] Ibíd., p. 32.
[19] Ibíd., p. 33.
[20] Ibíd., p. 34.
[21] Ibíd., p. 36.
[22] Ibíd., p. 37.
[23] Giannozzo Manetti (nacido en Florencia el 5 de junio de 1396 y fallecido en Nápoles en 1459) fue un humanista italiano dedicado especialmente a la filología. Además desarrolló encargos como político y diplomático de Florencia. Gran orador y conocedor de las lenguas clásicas y del hebreo.

aprende a hacer fuego hasta que inventa la magia y el arte, transforma el entorno a su imagen (VILLORO, 1992, p. 37).

¿Qué le permite al hombre poder crear a su imagen todo lo que se imagine gracias a los materiales dados por dios? La naturaleza es la materia prima entonces, ¿Cuáles serían las herramientas del hombre del Renacimiento en la elaboración de ese nuevo mundo?

La capacidad cognitiva permite imaginar, vislumbrar lo que podemos transformar a nuestro alrededor, pero de nada sirve tener una visión de lo que se quiere cambiar sino se trabaja en ello, "el conocimiento está ligado a la práctica y esta carece de sentido si no está guiada por el conocimiento"[24], haciendo una alegoría del conocimiento y la práctica, el autor señala "el ojo ordena a la mano cambiar el mundo que él contempla"[25], el hombre crea este mundo gracias a su capacidad de conocer y a la práctica de eso que él conoce.

1.2.5 El arte y la ciencia, maneras de ordenar el conocimiento y la práctica.

Villoro afirma que las dos maneras de ordenar el conocimiento y la práctica es a partir de "la ciencia y el arte y estas dos van tan ligadas como caras de una moneda" (VILLORO, 1992, p. 38).

El arte no tiene como fin el imitar la naturaleza, al ser parte de la creación del hombre, del nuevo mundo construído a partir de lo que la naturaleza le brinda, el arte es pues también una nueva creación, la cual persigue sus propios ideales, "el arte es una creación de un ámbito humano que no coincide con el espacio natural"[26], por el arte se empiezan a crear espacios nuevos, inventando las reglas de la perspectiva, y el claroscuro[27] permitiendo representar espacios

[24] Ibíd., p. 38.
[25] Leonardo da Vinci (1452-1519) da una idea acerca de la acción transformadora del hombre, simbolizando esta acción en dos órganos: el ojo, símbolo de la contemplación intelectual, y la mano, instrumento del trabajo, argumentando en su tratado de pintura ¿Hay algo que no se haya hecho con él el ojo? –El mueve a los hombres de oriente a occidente, para ello ha inventado la navegación y supera a la naturaleza en esto: los elementos naturales son finitos y las obras que el ojo ordena a la mano, son infinitas, como demuestra el pintor en las ficciones de animales y hierbas, plantas y lugares. Citado en (VILLORO, 1992, p. 37-38).
[26] Ibíd., p. 38.
[27] *Claroscuro* consistente en el uso de contrastes fuertes entre volúmenes, unos iluminados y otros ensombrecidos, para destacar más efectivamente algunos elementos. Desarrollada

imaginarios con reglas totalmente distintas a las naturales, “son reglas que rigen los objetos tal como solo el ojo los contempla”[28].

La ciencia está totalmente ligada a la práctica, al igual que en las artes, el autor afirma que primero se estudia una ciencia o el arte para luego ordenar a las manos ejecutar su obra, se remonta el conocimiento “al ojo” para luego, llevar éste conocimiento a la práctica “las manos”.

El hombre construye esta segunda naturaleza, la cultura, “la cual está hecha a su imagen ideal”[29], el arte es aquella herramienta que permite construir este nuevo mundo, la ciencia permite nutrir el arte, que no tendría sentido sin esta:

> “gracias al arte, este nuevo mundo está formado por espacios y objetos bellos, y la ciencia, está constituída por objetos racionales, dóciles a su voluntad, útiles a sus fines (VILLORO, 1992, p. 40)”.

El hombre renacentista admira lo creado por Dios y de igual forma, admira lo que su nuevo mundo le brinda gracias a su capacidad de creación, pero no es precisamente esto lo que permite distinguir una ruptura en cuanto al pensamiento del hombre en la antigüedad y el pensamiento del hombre moderno, sino también el saber que se puede crear y hacerlo, poder recrear una naturaleza donde se garantice una trascendencia de sus ideas, de lo que construye y transforma, durante mucho tiempo el ser humano admiraba lo que alrededor suyo estaba, era tiempo de empezar a crear y este momento histórico es precisamente en donde el hombre empezaba a tomar papel como creador activo, el autor enmarca con dos palabras el pensamiento del hombre de esta época: *pòiesis* acción creadora y *tejné* arte y técnica.

inicialmente por los pintores flamencos e italianos del *cinquecento*, la técnica alcanzaría su madurez en el barroco.

[28] Ibíd., p. 38.

[29] Ibíd., p. 41.

CAPÍTULO II

ALBERTO DURERO: UN ARTISTA ALEMÁN QUE SE APROPIA DE UN LEGADO ITALIANO

Imagen 4. Autorretrato 1498 del pintor Alberto Durero. Óleo sobre madera 52 x 49 cm[30].

2.1 INTRODUCCIÓN

En este capítulo se muestra de manera general la vida y obra del pintor Alberto Durero, quien reside en una de las más afluentes ciudades del norte de Europa, teniendo la oportunidad de acceder desde temprana edad a todo el conocimiento artístico y científico del momento.

De igual forma se describe la obra de su autoría, realizada en 1525, y de la cual se desprenderá el resto de los capítulos de la monografía así como las nociones matemáticas empleadas en el tratado.

[30] La realización de este Autorretrato se ubica tras su primer viaje a Italia (1494-1495). Según se ha supuesto, debió ejecutarlo en los meses de abril y mayo de 1498, al inicio del deshielo, como lo sugiere la ola en el lago del paisaje del fondo, que evoca las aguadas ejecutadas por Durero en el viaje de vuelta de Venecia a Nuremberg en 1495.

2.2 VIDA Y OBRA DE ALBERTO DURERO

Alberto Durero Nace el 21 de mayo de 1471, en Nuremberg, Alemania. Este artista alemán, hijo de un orfebre emigrante de Hungría, es el tercero de un total de 18 hermanos. Empieza como aprendiz en el taller de su padre y éste mismo lo retira de la escuela para entrar a los 15 años, en 1486, como alumno en el taller del pintor Michael Wolgemut, donde inicia técnicas de pintura y grabado en madera. En 1490 parte a un viaje de aprendizaje durante cuatro años como artesano oficial a Basilea, Colmar y Estrasburgo para completar su aprendizaje.

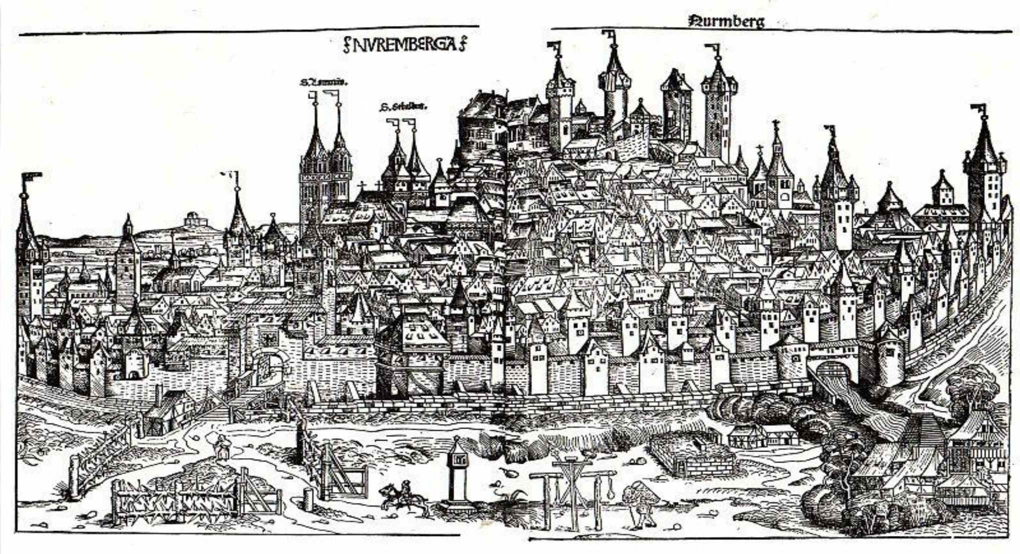


Imagen 5. Ciudad de Nuremberg en 1493.

“Nuremberg, ciudad natal de Alberto Durero, junto con Augsburgo y Ulm fueron en tiempos del Renacimiento uno de los centros del humanismo en Alemania” (Peiffer, 2000, p. 17), puesto que al ser esta ciudad una de las mas pobladas de la época (50.000 habitantes en 1500), tenía grandes intercambios comerciales con Italia del norte, en especial con Venecia, dando origen a la divulgación del humanismo italiano y el neoplatonismo florentino, temas de gran interés para Durero.

Imagen 6. Firma de Alberto Durero.

Interesado por ir mas allá de lo que normalmente en los talleres se estudiaba y motivado por aquel espíritu renacentista, surgido en Italia, su principal labor fue remontarse a las bases del conocimiento dadas por antecesores como Platón, Aristóteles, Euclides, entre otros, para la construcción teórica de su trabajo como artesano. Este artista se nutrió del saber impartido por los italianos y tenía como objetivo fundamentar el arte de la pintura sobre la certeza matemática, "fundamentar su arte sobre las reglas exactas de la geometría" (VILLORO, 1992, p. 23).

Su versatilidad en cuanto al latín es poca, lo cual le impide en un comienzo acceder a libros como *los Elementos,* tratando de enriquecerse en las discusiones que se iniciaban en grupos pequeños de trabajo.

Los análisis de Durero alrededor de los textos en latín y griego fueron apadrinados por su gran amigo interlocutor y consejero Pirckheimer[31], quien lo inició en estudios como letras antiguas, geometría griega y cánones de arquitectura de Vitruvio. Siendo Pirckheimer consejero municipal vástago del patriciado más antiguo de Nuremberg, sus lazos afectivos con Durero se incrementan cuando el artista llega de Venecia con un espíritu inquietante de conocimiento teórico de su arte, ayudándolo a traducir distintos textos de su interés.

[31] Willibald Pirckheimer (Eichstätt, Baviera, 5 de diciembre de 1470 – Nuremberg, 22 de diciembre de 1530) fue un abogado alemán renacentista, autor y humanista, fue una importante figura en Nuremberg en el siglo XVI, y miembro del gobierno de la ciudad durante dos períodos. Fue amigo íntimo del artista Alberto Durero, el cual lo pintó en numerosos retratos, también amigo del gran humanista y teólogo Erasmus.

Imagen 7. Dibujo al carboncillo elaborado por Durero de Willibald Pirckheimer (1470 – 1530).

Pero no solo Pirckheimer es su único quía intelectual, Durero trata de nutrirse de todo lo que Nuremberg pueda ofrecerle, estableciendo contacto con la elite social, artística e intelectual del momento, quienes pronto llegarían a ser sus mecenas o maestros en el proceso de comprensión de conocimiento matemático en torno a su labor, no sólo nutriéndose de lo que su ciudad natal le pueda brindar. En sus dos viajes a Italia, Durero tiene encuentros con matemáticos y artistas, quienes personalmente le atendieron o llegó a tener acceso a escritos realizados por varios artistas italianos (PEIFFER, 2000, p. 91).

Es este artista quien desarrolla a lo largo de su vida todo un trasegar investigativo en pro de la labor del artista, no supeditándose en la práctica empírica del taller, sino cargando todas estas prácticas de un contenido teórico válido para todo tipo de representación, en donde el fin era precisamente representar, no a partir de la representación particular que se tenía del objeto, sino de lo que intrínsecamente lo regía.

2.2.1 Hacia la teorización de la práctica del pintor

Durero redacta en 1525 su tratado de Geometría *Underweysung der messung / mit dem Zirckel und Richtscheyt / in Linien ebnen unnd gantzen corporen / durch Albrecht Dúrer zu samen getzogen / und zu nutz aller kunstliebhabenden mit zu gehörigen figuren / in truck gebracht / im jar M.D.XXV… (Instrucción para la medida con el compás y la regla de líneas, planos y todo tipo de cuerpos, reunida por Alberto Durero en provecho de todos los aficionados al arte, con las correspondientes figuras, impreso en el año 1525)* “es catalogado el primer documento literario en que un problema estrictamente representacional recibe un tratamiento estrictamente científico de manos de un artista.

Las características góticas utilizadas para la impresión del volumen fueron diseñadas por Johann Neuörfer y después grabadas por Hyeronimus Andreae

(PEIFFER, 2000, p. 41). El volumen comprende 16 cuadernos (A a Q), 89 folios o 178 páginas no numeradas.

El Underweysung se divide en cuatro libros: el primero dedicado a las líneas, el segundo a las superficies y los dos últimos dedicados a los volúmenes.

Durero recoge a su manera, toda la tradición antigua, aproximándose de manera personal a las tradiciones sabias para poder tener unas herramientas pertinentes alrededor de la labor del artesano que apenas empieza ésta labor y quiere nutrirse de los conocimientos que él, como artesano, también conoce y sabe que se necesitan para poder ejecutar un trabajo de forma coherente y precisa, “su intención era mas pedagógica que polémica o dogmática”[32].

Peiffer señala que “Durero va de lo abstracto a lo concreto”[33]; en su tratado, Durero parte de las definiciones de los objetos matemáticos para pasar a construcciones concretas determinadas por un cierto número de procedimientos, estos objetos matemáticos tratados en el Underweysung son:

- Curvas estudiadas en la antigüedad como hélices y espirales
- Secciones cónicas
- Concoide con su instrumento trazador
- Teoría de las proporciones
- Transformación isométrica de las áreas
- Teorema de Pitágoras
- Construcción de medias proporcionales
- Construcción de polígonos regulares: Pentágono según el método ptolemaico. Los poliedros platónicos
- Tres problemas clásicos de la antigüedad: cuadratura del círculo, trisección del triángulo, duplicación del cubo.
- Construcciones euclidianas elementales: Determinar el punto medio de un segmento, el centro de un arco dado, hacer pasar un círculo por tres

[32] Ibíd., p. 25.
[33] Ibíd., p. 59.

puntos dados, bajar una perpendicular sobre un segmento de recta dado.

Otras se utilizan sin estar presentes o descritas en el libro como:

- Por un punto dado, trazar la recta paralela a otra dada.
- Construir un cuadrado sobre un segmento dado.

Euclides está muy presente en el libro I de su tratado. En este texto empieza con un homenaje al geómetra griego; sin embargo, Durero incorpora la esencia de lo geométrico a una cierta materialidad, lo imaginado a lo fabricado, el artesano trata de crear una representación coherente de la realidad que se percibe, necesitando de herramientas que permitan representar esta realidad.

El estilo del texto de Durero, “no es muy distinto a los tratados medievales, tienen la misma forma prescriptiva” (PEIFFER, 2000, p. 52), describe de manera repetitiva diferentes pasos de una construcción, así mismo, no son demostraciones matemáticas, según (Shelby citado en PEIFFER, 2000, p. 52), “los pasos que Durero indica en las construcciones con ayuda de regla y compás, no es una geometría demostrativa”, solo se puede encontrar una demostración en su tratado y tiene que ver con la duplicación del cubo, demostración que no es propiamente de Durero.

CAPÍTULO III

APROXIMACIÓN A LA TEORÍA DE LAS ESPIRALES DE ARQUÍMEDES: DURERO Y EL MANEJO DE LOS OBJETOS MATEMÁTICOS

Imagen 8. Estudio de manos, 1508 - Alberto Durero

3.1 INTRODUCCIÓN

En este capítulo se analiza una parte del libro I del tratado de Durero, el artista empieza caracterizando los objetos matemáticos que se van a utilizar en su tratado, evidenciándose una estrecha relación con el libro I de los *Elementos* de Euclides.

La atención se centra en torno a la aproximación que Durero realiza de las espirales de Arquímedes, resaltando procedimientos que para el pintor son omitidos por estar implícitos dentro de sus construcciones, como la división de un segmento en partes iguales, dividir una circunferencia en partes iguales desarrollada por Euclides en el libro IV, prop. 15.

Por último se muestran las aplicaciones de las espirales a la pintura, se encuentra la espiral con hojas, el báculo episcopal y la línea para labores de follaje. Todas estas se generan a partir de diferentes variantes de la espiral arquimédica.

3.2 HACIA LA CONSTRUCCIÓN DE LAS ESPIRALES

Imagen 9. Logotipo de pagina web formación en espiral[34]

Alberto Durero trata de mostrar a los artistas, la utilidad que tiene todo lo que en su tratado construye, afirmando al comienzo de su tratado que *todas estas cosas deben y pueden usarse en las obras en función de su utilidad; cuando esto no es así, uno se rompe la cabeza en vano* (PEIFFER, 2000, *p. 135), e*ste artista-pintor alemán, fue el primero en unir práctica con reflexión teórica, *incluso teorizó sobre la relación existente entre práctica (Brauch) y teoría (Kunst).* Panofsky, citado en PEIFFER, 2000, p. 35, señala también la incorporación de cierta materialidad del sustrato geométrico:

> Su andadura va de lo abstracto a lo concreto, fijando las definiciones abstractas de objetos matemáticos (como las espirales de Arquímedes) en operaciones concretas de construcción gráfica, efectuadas en un número determinado de pasos, (PEIFFER, 2000 p. 59).

Es por eso que todo lo que este artista plantea en su tratado, empezando por las definiciones de punto, línea, superficie y cuerpo solido, podría caracterizarse como euclidianas, pero no del todo. Peiffer señala una doble aproximación que este artista hace a los objetos matemáticos, una relación *entre lo imaginado y lo ya hecho* (PEIFFER, 2000 p. 60), donde el artista sustituye la naturaleza por la fabricación, puesto que se necesita lo que se puede percibir, lo que tiene una posición y una dimensión espacial, esto es lo que le interesa a Durero, lo que tiene sentido en la práctica del pintor, Peiffer afirma:

[34] Esta página web enseña las diferentes espirales construidas por matemáticos y artistas al igual que la evidencia de estas formas en las plantas, animales, etc. De igual manera, este logotipo permite ser la representación de la primera espiral con origen en el punto f construida por Alberto Durero e ilustrada más adelante en el texto. Véase http://www.ite.educacion.es/formacion/enred/web_espiral/principal.php

> Se trata de poner a disposición del pintor los conocimientos matemáticos necesarios para el ejercicio de su arte. Y no es como matemático sino en tanto que pintor como trata la geometría. Las propiedades abstractas de las figuras no le interesan más que en la medida en que pueden incorporarse en los objetos realizados por el artesano, (PEIFFER, 2000, p. 62).

Cuando habla en su primer capitulo de la espiral o línea serpentina, También llamada por el artista como "línea de caracol", Alberto Durero descarta emplear la terminología clásica (latina), inventando su propia prosa científica alemana, bien sea por obviar las dificultades que tenía con esa lengua o para poder relacionar a los artistas con un conocimiento matemático a partir de los términos conocidos en las prácticas de taller, "palabras sugestivas que evocan la figura" (PEIFFER, 2000, p. 44). Esta línea la clasifica como una de las tres líneas que se pueden construir si se continúa desde su inicio a otro extremo: línea recta, línea circular y línea serpentina.

Estas líneas al momento de dibujarlas o combinarlas, permiten tener una gran cantidad de posibilidades en la representación pictórica, se pueden hacer en cualquier dirección o longitud tratándose de una línea recta; pueden dibujarse grandes o pequeñas en el caso de la línea circular al igual que toda la línea o parte de ella, y en el caso de la espiral, Durero señala que es a partir de la línea circular que surge la línea serpentina, la prolongación de la línea circular en cualquier dirección permite tener esta última línea[35], al respecto él afirma:

> Esta línea circular se puede hacer grande o pequeña. Pero si se prolonga hacia arriba o hacia abajo, se obtiene una línea serpentina. La línea serpentina se puede variar sin fin y hacer con ella cosas maravillosas, ya sea en longitud, anchura, altura o profundidad, (PEIFFER, 2000, p. 134).

Alberto Durero, al introducir la idea de paralelas, no solo muestra paralelismo entre líneas rectas, sino que también existen líneas paralelas[36] para curvas

---

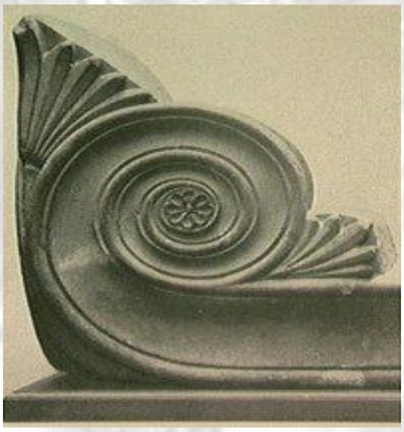
[35] Alberto Durero pretendía hacer una aproximación con regla y compás de la definición de espiral difundida por Arquímedes.

[36] "Las paralelas son, en su terminología, líneas pareadas, *parr o bar Lini o Paralell Lini*, es decir, líneas dispuestas por pares. La idea de equidistancia está presente cuando habla de líneas que progresan paralelamente juntas, *gleych miteynam der lauffen*, o que avanzan

planas como circulares y serpentinas, definiéndolas como "las que siempre están a la misma distancia una de otra, sea su trazado sencillo, serpentino o circular"[37].

3.3 CONSTRUCCIÓN DE UNA ESPIRAL

Imagen 10. Voluta[38]



Para empezar a construir la espiral, Durero aclara que lo primero que se utilizará, ya sea una línea o un cuerpo, será el plano en latín *planum* y en alemán *ebne.* Alberto Durero lo define como longitud que tiene una anchura al igual que en la def. 5 Libro I de los *Elementos* de Euclides, en donde se afirma que el plano es una superficie que solo tiene longitud y anchura.

Durero habla *del plano que no tiene fin en ninguno de sus lados* (PEIFFER, 2000, p. 135*)*, al igual que la línea y el punto que carecen de partes, sin embargo, aclara que en su tratado no hablará de estos objetos, o al menos no hablará de su infinitud, Durero solo hablará de *los que tienen principio y* fin y se pueden delimitar con líneas, adquiriendo así, una forma[39], mostrando en su texto con la punta de una pluma el punto, haciendo con un trazo de la pluma la línea y mostrando siete planos utiles para el pintor: plano cuadrado completamente liso, plano circular, plano esférico, plano concavo y plano abollado[40].

conservando siempre la misma distancia entre sí…" Véase glosario De La Medida, Peiffer 2006, p. 351.

[37] De igual forma, Alberto Durero señala las líneas que no son paralelas, pero, para la vista humana parece que lo fueran, son líneas que a lo lejos se unen y forman ángulo agudo. Se podría decir que hace referencia a las líneas que en el dibujo se encuentran en un punto de fuga y sirven para crear un espacio tridimensional en el plano.

[38] Adorno en forma de espiral o caracol que se coloca en los capiteles de los órdenes jónico y corintio.

[39] Ibíd., 135.

[40] Ibíd., 136.

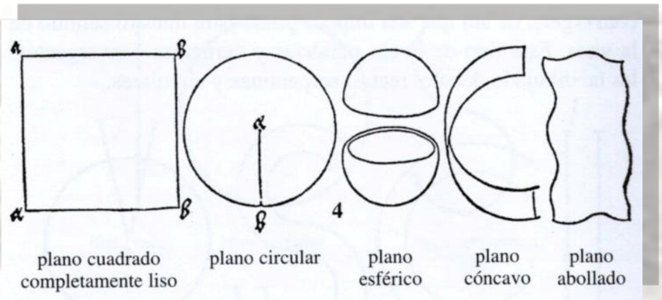


Imagen 11. Representación gráfica de Alberto Durero sobre los distintos planos existentes (PEIFFER, 2000, p. 136).

A partir de un plano cuadrado el cual construye trazando una línea horizontal *ab* y llevándola hacia abajo hasta una distancia igual que su longitud, Durero construye la siguiente espiral suponiendo ya conocido el teorema de Tales en donde se divide un segmento en n partes iguales. A continuación se muestra esta última construcción:

Se hace una línea vertical, a arriba y b abajo, y la divido con tres puntos c, d y e en cuatro partes iguales, Durero tiene en cuenta el teorema de tales el cual permite dividir en n partes un segmento dado, tomando como patrón de medida los radios de una circunferencia:

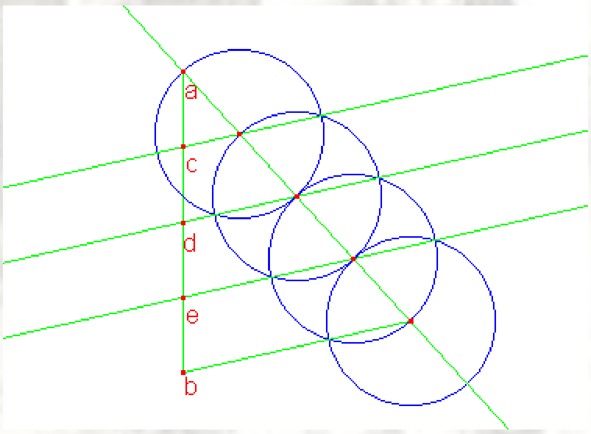


Figura 1. Teorema de Tales, división de un segmento en 4 partes iguales.

Luego se divide de con un punto f en dos partes iguales, a partir de la construcción del punto medio del segmento de, teniendo como radio la longitud del segmento y cambiando de centro primero por d y luego por e, para después en la intersección de los arcos trazar un segmento que cruza de indicando la ubicación de f (donde se origina la espiral) y luego pongo una g a la derecha de la línea y una h a la izquierda, permitiendo una mejor orientación al trazar los arcos de la espiral. Alberto Durero empieza a construir los arcos de la espiral:

> Luego cojo un compás y pongo uno de sus brazos en el punto *d* y el otro en el punto *a,* y, girando hacia *h*, trazo una línea curva hasta el punto *b*. Luego cojo el compás y pongo uno de sus brazos en el punto *f* y el otro en el punto *c*, y, girando hacia *g*, trazo una línea curva hasta el punto *b*. Cojo el compás, pongo uno de sus brazos en el punto *d* y, girando hacia el lado *h*, trazo con el otro brazo una línea curva desde el punto *c* hasta el punto *e*. Luego pongo uno de los brazos del compás en el punto *f* y el otro en el punto *d*, y, girando hacia *g*, trazo una línea curva hasta el punto *e*. Luego pongo uno de los brazos del compás en la línea *ab*, en medio de *d* y *f*, y el otro brazo lo pongo en el punto *d*, y, girando hacia *h*, trazo una línea curva hasta el punto *f* (PEIFFER, 2000, p. 137).

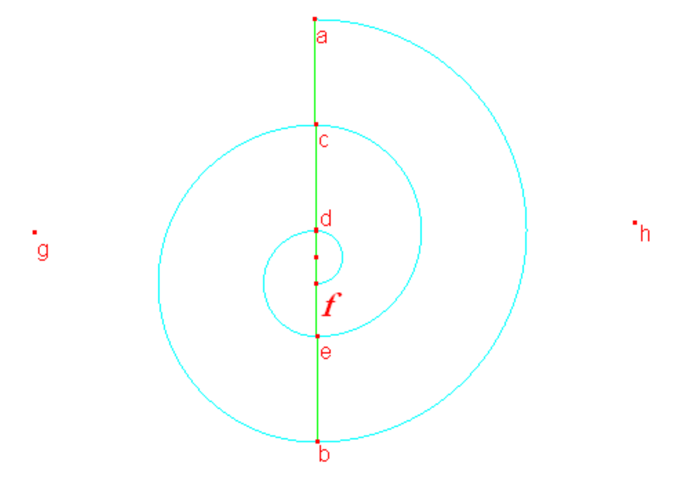


Figura 2. Espiral construida por Durero trazada con el compás.

3.3.1 Inscripción de polígonos, división en partes iguales de una circunferencia para la construcción de espirales.

En las siguientes construcciones de espirales, Durero inscribe éstas dentro de una circunferencia, la cual, dependiendo de sus espiras, divide la circunferencia en tantas partes iguales. La división a la que recurre, en la mayoría de los casos, es la de dividir la circunferencia en doce partes iguales. Durero inicia con la construcción de un hexágono equilátero y equiángulo en un círculo dado, método de Euclides indicado en el libro IV proposición 15 de los *Elementos*:

Sea ΑΒΓΔΕΖ el círculo dado.

Así pues, hay que inscribir un hexágono equilátero y equiángulo en el circulo ΑΒΓΔΕΖ. Trácese el diámetro ΑΔ del circulo ΑΒΓΔΕΖ, y tómese el centro H del circulo, y con el centro Δ y la distancia ΔH descríbase el circulo ΕΗΓΘ, y una vez trazadas ΕΗ, ΓΗ llévense hasta los puntos B, Z, y trácense ΑΒ, ΒΓ, ΓΔ, ΔΕ, ΕΖ, ΖΑ.

Digo que el hexágono ΑΒΓΔΕΖ es equilátero y equiángulo.
Pues como el punto H es el centro del circulo ΑΒΓΔΕΖ, HE es igual a HΔ. Como el punto Δ es a su vez el centro del circulo ΗΓΘ, ΔΕ es igual a ΔΗ.

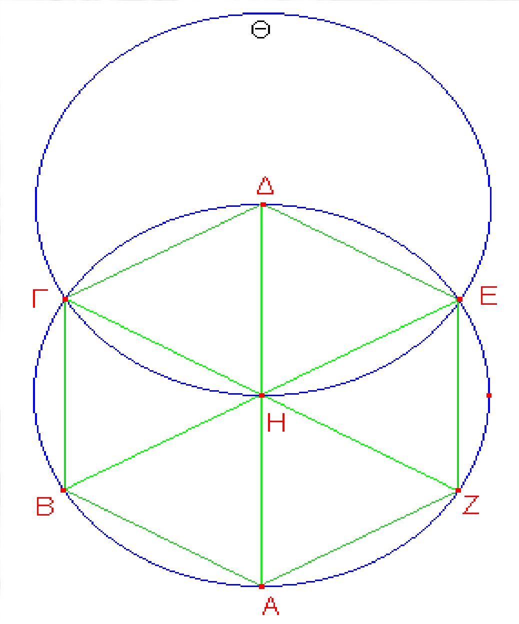


Figura 3. Construcción de la división en 12 partes iguales de una circunferencia.

Pero se ha demostrado que HE es igual a HΔ; por tanto, HE es también igual a EΔ; luego el triangulo EHΔ es equilátero; entonces sus tres ángulos EHΔ, HΔE, ΔEH son iguales entre si, porque los ángulos de la base de los triángulos isósceles son iguales entre si [I, 5]; y los tres ángulos de un triangulo son iguales a dos rectos [I, 32]; por tanto, el ángulo EHΔ es la tercera parte de dos rectos.

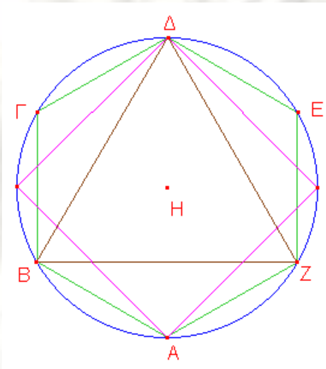
De manera semejante se demostraría que también el ángulo ΔHΓ es la tercera parte de dos rectos. Y como la recta ΓH levantada sobre EB hace los ángulos los adyacentes EHΓ, ΓHB iguales a dos rectos, entonces el (ángulo) restante ΓHB es también la tercera parte de dos rectos; por tanto, los ángulos EHΔ, ΔHΓ, ΓHB son iguales entre si; de modo que los ángulos BHA, AHZ, ZHE correspondientes a sus vértices son iguales [I, 15].

Luego los seis ángulos EHΔ, ΔHΓ, ΓHB, BHA, AHZ, ZHE son iguales entre si. Pero los ángulos iguales están sobre circunferencias iguales [III, 26]; por tanto, las seis circunferencias AB, BΓ, ΓΔ, ΔE, EZ, ZA son iguales entre si. Pero a las circunferencias iguales las subtienden rectas iguales [III, 29]. Por tanto, las seis rectas son iguales entre si; luego el hexágono ΑΒΓΔΕΖ es equilátero.

Digo, además, que es también equiángulo.

Pues como la circunferencia ΖΑ es igual a la circunferencia ΕΔ añádase a ambos la circunferencia ΑΒΓΔ; entonces la (circunferencia) entera ΖΑΒΓΔ es igual a la (circunferencia) entera ΕΔΓΒΑ; y el ángulo ΖΕΔ sobre la circunferencia ΖΑΒΓΔ, y el ángulo ΑΖΕ sobre la circunferencia ΕΔΓΒΑ; por tanto, el ángulo ΑΖΕ es igual al (ángulo) ΔΕΖ [III, 27]. De manera semejante se demostraría que también los ángulos restantes del hexágono ΑΒΓΔΕΖ son cada uno igual a uno de los ángulos ΑΖΕ, ΖΕΔ; por tanto, el hexágono ΑΒΓΔΕΖ es equiángulo. Pero se ha demostrado que es también equilátero; y ha sido inscrito en el circulo ΑΒΓΔΕΖ.
Por consiguiente, se ha inscrito un hexágono equilátero y equiángulo en el círculo dado. Q. E. F (VEGA, 1991, p. 362 - 363).

Figura 4. Inscripción de algunos polígonos dentro de una circunferencia



Esta construcción es el inicio hacia la división en partes iguales de una circunferencia, puesto que al inscribir un polígono regular en la circunferencia sus vértices dividen en partes iguales la misma. Durero afirma que a partir del hexágono ΑΒΓΔΕΖ se puede construir también un triángulo ΒΔΖ y, así mismo, con la horizontal que pasa por el centro H y divide los segmentos ΒΓ y ΕΖ en partes iguales puedo construir el cuadrado ΒΓΔΕΖ, permitiendo dividir la circunferencia en tres, cuatro y seis partes iguales. Alberto Durero construye otros polígonos como el pentágono y el heptágono teniendo en cuenta otros métodos de construcción ya conocidos como en el caso del pentágono:

En la época de Durero ya se conocían tres construcciones (del pentágono): la de Euclides (*Elementos IV, prop. 11*), la de Ptolomeo (*Almagesto I, cap. IX*), ambas exactas, y una construcción aproximada que se remontaba, sin duda, a los matemáticos del Islam, incluida en *la Geometría deutsch. Durer*o optó por presentar las dos últimas (PEIFFER, 2000, p. 194).

El heptágono se construía teniendo como base el triángulo derivado de la construcción del hexágono, pero su construcción difería de las otras por la forma como se tomaba la medida de los lados; "El método, que consiste en igualar el lado del heptágono regular al semilado del triángulo equilátero es antiguo. Era conocido por los árabes, como prueba *el tratado de las construcciones geométricas de ABU'L-WAFÂ"*[41], en donde el segmento ΔZ se divide en dos partes y esa longitud Δb se lleva con un arco a la circunferencia siete veces alrededor, uniendo los vértices para obtener el polígono.

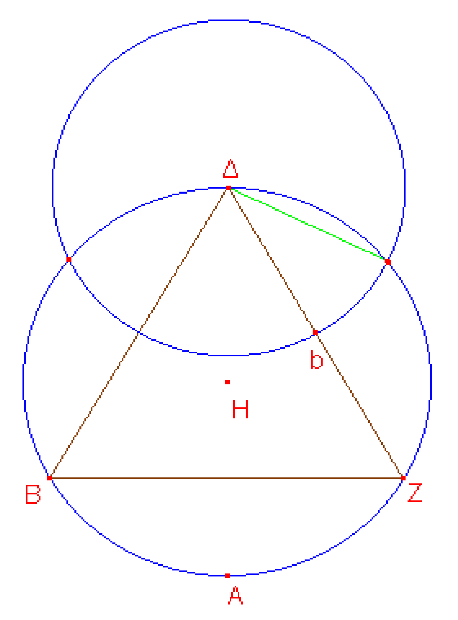


Figura 5. Construcción de un heptágono tomando como patrón el segmento Δb.

3.4 APROXIMACIÓN A LA ESPIRAL ARQUIMÉDICA[42]

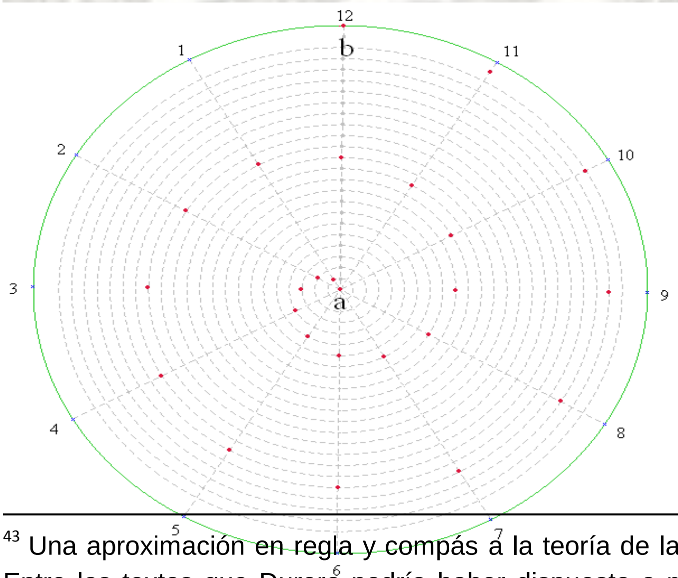
Esta segunda espiral podría reemplazar, según Durero, la espiral construida anteriormente, sirviendo también en la práctica de los artistas, dicha espiral *se ajusta a la regla de construcción de una espiral de Arquímedes*[43] y es esta misma construcción la que evoca una aproximación de la definición arquimédica de la espiral: *es el lugar de los*

[41] Ibíd., p. 192.

[42] Llamada por Cardona como la espiral de Arquímedes-Durero debido a su aproximación (CARDONA, 2006, p. 27).

puntos que recorren un radio de círculo con una velocidad constante, mientras que el radio gira sobre si mismo con una velocidad angular constante" (PEIFFER, 2000, p. 63)[44].

Comienza la construcción de la espiral en el centro *a*, de donde se puede construir la espiral tan larga como se quiera, teniendo en cuenta que *el espacio existente entre las espiras será siempre el mismo, salvo en la primera* (PEIFFER, 2000, p. 137)[45]. A partir del punto *a*, traza una circunferencia tan grande como se quiera la espiral y ésta se divide en doce partes iguales.



Para la construcción de la espiral, Durero trabaja con la división de la circunferencia en doce partes, para lo cual utiliza la construcción de la inscripción del hexágono para luego dividir todos sus lados por el punto medio siendo sus

[43] Una aproximación en regla y compás a la teoría de las espirales realizada por Arquímedes. Entre los textos que Durero podría haber dispuesto a menudo en forma manuscrita "entre el siglo XV y el XVI, Clagett cita la traducción del griego de Guillermo de Moerbeke, 1269, *Liber Archimedis de quam pluribus theorematibus* [*de figuris elicis*], el *Quadripartitum numerorum de Juan de Murs,* Lib. IV, Tract. 1, cap. 31 «*Motu elyco qui valet ad quadraturam circuli*», y el De arte mensurandi del mismo autor, que incluye un extracto procedente, en lo sustancial, de la traducción de Moerbeke del tratado de las espirales de Arquímedes. En el mismo momento (h. 1450) en que Jacobus Cremonensis realiza su nueva traducción del corpus arquimédico, Nicolás de Cusa formula bien conocida crítica de la utilización de las espirales por Arquímedes para demostrar la existencia de una línea recta igual a la circunferencia de un círculo. El humanista italiano Giorgio Valla hace referencia a la espiral en este mismo contexto de la cuadratura del círculo, y también Leonardo da Vinci se interesa por las espirales" (Peiffer, 2000, p. 65).

[44] La definición textual de espiral que da Arquímedes es: si permaneciendo fijo uno de los extremos de una recta, esta gira en un plano con velocidad uniforme hasta volver a la posición inicial y un punto, también con velocidad uniforme, recorre al mismo tiempo la recta que gira a partir del extremo fijo, este punto describirá una espiral, (ARQUÍMEDES, p. 163).

[45] Peiffer señala que esta propiedad es una vaga reminiscencia de la proposición 27 del tratado de las espirales de Arquímedes, en donde las espirales evolucionan paralelamente p. 138, *Entre las áreas comprendidas por las espirales y las rectas iniciales de la evolución, la tercera es doble de la segunda; la cuarta, triple; la quinta, cuádruple, y así sucesivamente, siendo la primera área la sexta parte de la segunda* (ARQUÍMEDES, p. 178).

vértices puntos los cuales indican la división en partes iguales de la circunferencia.

Figura 6. Espiral de Arquímedes-Durero (CARDONA, 2006, p 27).

Una vez divida la circunferencia en doce partes iguales, desde el punto *a* hasta la parte superior de la circunferencia, trazo una línea recta cuyo extremo será *b* y desde este mismo punto y en contra de las manecillas del reloj, empieza a enumerar los puntos que dividieron la circunferencia empezando con 12 en el punto *b*.

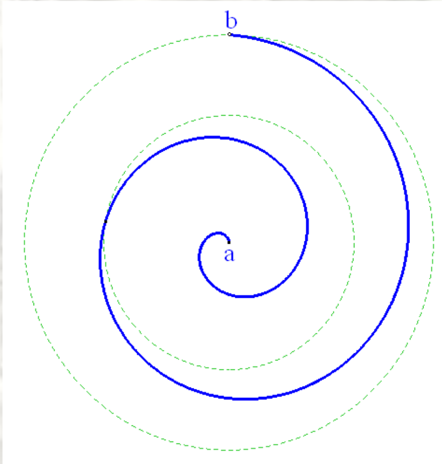


Figura 7. Espiral de Arquímedes-Durero (CARDONA, 2006, p. 28).

La línea *ab* se divide con 23 puntos en 24 partes iguales aplicando el teorema de Tales de Mileto, empezando de forma ascendente a enumerar de *a* -1, 2, 3, etc. Toma luego una regla y pasa la escala que está en la recta *ab*, y sin moverse un extremo de la regla del punto *a*, empieza a girarla y a ubicar los puntos de la regla colineales a los puntos que están sobre la circunferencia. *Si te fijas bien en los números no te puedes equivocar* (PEIFFER, 2000, p. 138)[46], estos números permiten tener un orden dependiendo de las espiras que se quieran agregar a la espiral, teniendo en cuenta que se puede aumentar el número de puntos a la regla sin cambiar los de la circunferencia.

[46] Esta construcción pone en práctica la definición misma de la espiral de Arquímedes, de la que se construyen 12 puntos. En un estado anterior, publicado en Rupprich 3, pp. 319-320 [= Londres 5229 f° 80], se encuentra ya el mismo principio de construcción, pero sin que el número de puntos esté fijado y sin que éstos estén numerados. El hecho de numerar los puntos de la circunferencia y de la regla da, efectivamente, mas claridad a la construcción (PEIFFER, 2000, p. 138).

La circunferencia que se traza para realizar la espiral, dependiendo de su tamaño será la amplitud de la espiral, “el radio del círculo determina el tamaño que se desea dar a la espiral” (PEIFFER, 2000, p. 138), de igual forma Cardona señala que *si se quiere aumentar las curvas de la espiral, se deben aumentar también las divisiones de los radios y los radios a su vez, conservando la relación 1:2* p. 27, mostrada en la construcción anterior en donde tenemos 12 radios de la circunferencia cada uno dividido en 24 partes iguales, al respecto Peiffer 2000 afirma:

> Cuando se quiere tener varias espirales el número de subdivisiones de la regla debe ser un múltiplo del de la circunferencia (PEIFFER, 2000, p. 63).

En este caso la regla a la cual hace referencia el autor es la que en la construcción de Durero permite ir trazando la espiral puesto que es esta la que permite poner los puntos del radio dividido (los 24 puntos) en los radios señalados por las 12 divisiones que se hacen en la circunferencia.

3.5 LA ESPIRAL ARQUIMÉDICA Y SUS APLICACIONES

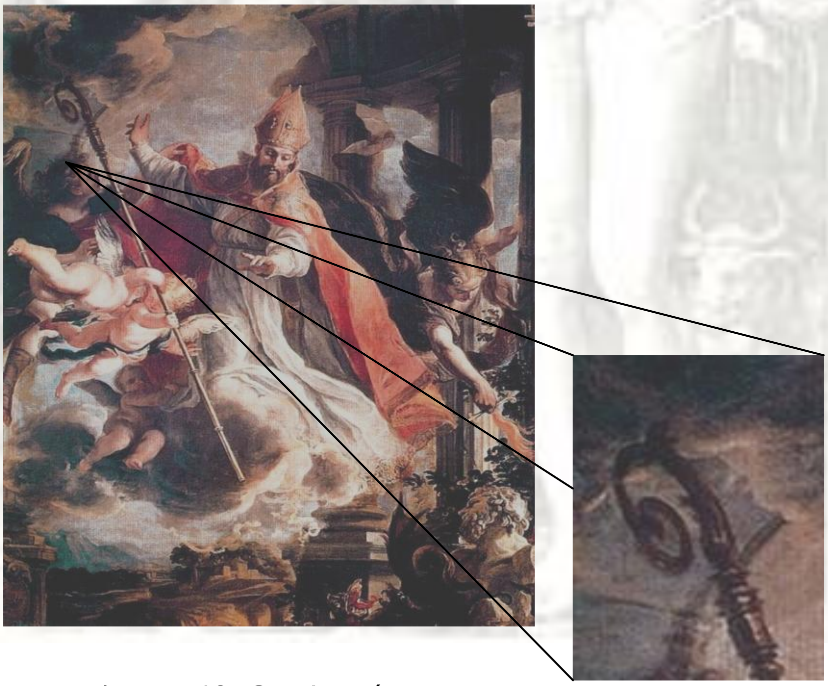


Imagen 12. San Agustín

Alberto Durero muestra varias construcciones en las aplicaciones que se pueden tener con la espiral en la representación pictórica. Construyendo primero una espiral con hojas de la cual surge la construcción del perfil de un báculo episcopal[47] (PEIFFER, 2000, p. 143), al igual que una linea para labores de follaje[48].

Empieza con la espiral construida anteriormente, mostrando líneas rectas en medio de cada uno de los puntos en donde se forma la espiral, teniendo como línea que divide en partes iguales cada arco, estas líneas convergentes[49] a cada arco, se construyen a partir del punto de intersección de los arcos de dos puntos colineales a la circunferencia y el radio *a* de la misma. Para poder "encontrar la longitud de cada una de las líneas rectas" (PEIFFER, 2000, p. 142), se debe hacer lo siguiente:

---

[47]Según algunos historiadores, es un heredero cayado que llevaban los augures romanos; originalmente fue de madera y bastante corto, como una especie de bastón de mando, pero al confeccionarse de materiales y metales pesados fue preciso alargarlo para poderlo descansar en el suelo. Es uno de los primeros símbolos externos que la Iglesia prescribe a sus ministros, y San Agustín, obispo muy a pesar suyo, que accedió al episcopado en circunstancias poco comunes, famoso por su fe, por su autoridad episcopal en la Iglesia occidental, se le representa valiéndose de este cayado de pastor de almas; es el emblema de su jurisdicción pastoral en los obispos, símbolo de una autoridad de origen celeste, cuya forma representa la vibración superior dirigida hacia la tierra, la comunicación de los bienes divinos, la columna vertebral como canal de energías sutiles que ascienden por los diversos chakras-rueda señalados en el báculo mediante los diversos nudos y que acaba en la voluta. Tomado de http://www.campillodealtobuey.com/baculo.htm

[48] Ibíd. P. 145.

[49] Alberto Durero llama a estas líneas, verticales convergentes, líneas que parecen perpendiculares a la vista del ojo pero que en algún momento se cruzan en un único punto o *centro de la tierra* y forman ángulos agudos, Joachim Camerarius (1500 a 1574), alemán estudioso de los clásicos, nacido en Bamberg, Baviera, traduce líneas convergentes por perpendiculares (PEIFFER, 2000, p. 135).

Coge un compás, pon uno de sus brazos en el punto 12 y el otro en el punto 1 y traza desde aquí una línea curva en sentido ascendente. A continuación pon un brazo del compás en el punto 1 y el otro en el punto 12; traza desde aquí otra línea curva ascendente. Donde se cortan las dos líneas curvas, pon un punto c.

Haz así con todos los puntos de la espiral -1 y 2, 2 y 3, etc.-, y designa el lugar donde se cortan las líneas curvas de forma consecutiva con todas las letras del abecedario *–d, e, f, g,* etc.-, hasta donde alcance. Si unes con líneas rectas *cd* y *de* y *fg,* etc., es decir, todas las letras alrededor, te cortarán las líneas trazadas desde los puntos 1, 2, 3, 4, etc., y así por todos los demás números.

Mas si quieres dividir convenientemente con una mediana las hojas formadas por las líneas curvas, traza desde el punto c, y luego desde los puntos *d, e, f, g*, etc., líneas rectas hacia el centro a hasta llegar a la espiral[50].

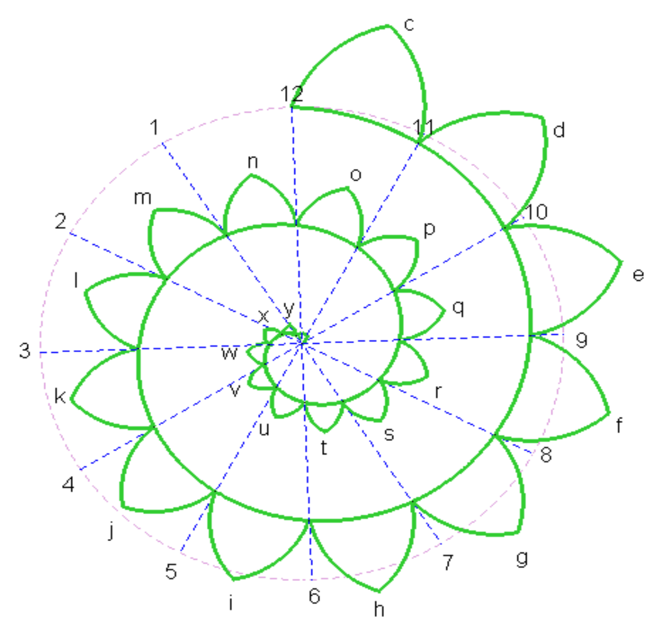


Figura 8. Espiral con hojas (CARDONA, 2006 p. 29).

La variación en la construcción de dichas líneas rectas, de donde surgen las hojas de la espiral, genera otro estilo de espiral, denominada por Durero como *báculo episcopal*, en donde la cantidad de vueltas que da la espiral se restringe solo a una vuelta, es decir, doce veces se divide la circunferencia que contiene la espiral y doce veces se divide el radio central de la circunferencia que, al trasladar esta medida a la regla e ir girando dejando inmóvil el extremo de la misma con el centro a, cada punto de la circunferencia con cada punto de la regla, indica los puntos que forman la espiral. Durero muestra como a partir de

[50] Ibíd., p. 142.

esta espiral se construyen las líneas convergentes que determinaran la nueva aplicación de la espiral:

Primeramente traza una circunferencia desde el centro *a* y márcala con puntos y números como antes. La línea vertical *ab*, con la que vas girando, divídela con 11 puntos en 12 partes iguales. Vuelve a moverla como se te ha dicho antes, y marca con puntos la espiral hasta llegar al centro *a*. Así queda hecha esta línea, que es útil para muchas cosas; se puede usar en especial para un báculo episcopal, para el que hay que hacer lo siguiente.

Dibuja desde el punto 6 de la circunferencia una línea recta hacia abajo. Utiliza la espiral y la mitad de la circunferencia con los números más altos. La otra mitad de la circunferencia, con los números más bajos, déjala a un lado. A continuación coge un compás, pon uno de sus brazos en el punto 9 de la circunferencia y el otro brazo en el punto 7, y traza desde aquí un arco de círculo hacia afuera.

A continuación pon uno de los brazos en el punto 7 y con el otro traza desde el punto 9 una línea curva hacia fuera. Donde se corten las dos curvas pon un punto *c*, y desde el punto 8 de la circunferencia traza una línea recta al punto *c*. Has lo mismo entre los dos puntos 9 y 11, y en la unión de las curvas pon una *d*.

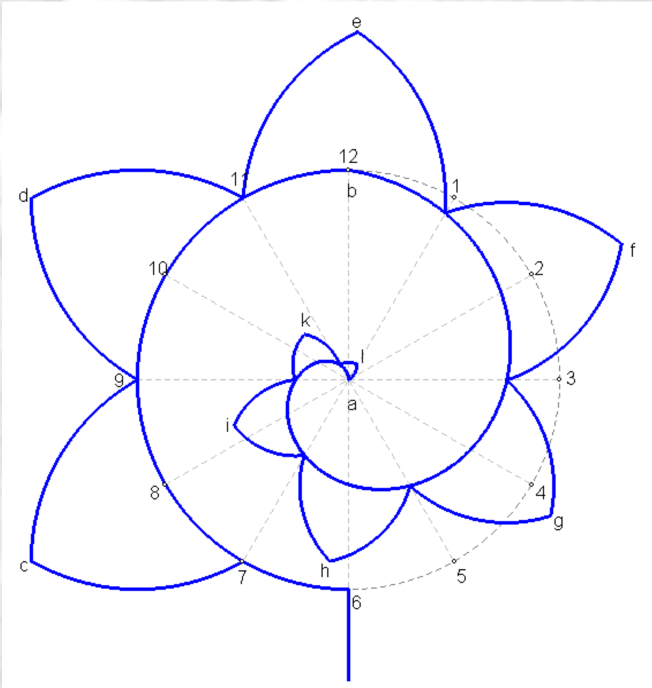


Figura 9. Báculo episcopal (CARDONA, 2006, p. 30).

A continuación pon uno de los brazos del compás en el punto 11 de la circunferencia y el otro brazo en el punto 1 de la espiral, y traza desde aquí una línea curva hacia fuera. Luego con uno de los brazos en el susodicho punto 1 y el otro en el punto 11, y traza desde aquí una línea curva hacia fuera. Donde las líneas curvas se corten, pon una *e*. Has esto mismo en la espiral entre los puntos 1-3 a la 2-5 y 3-5 y 7-9 y 9-11, y marca correlativamente con *f, g, h, i, k*, sus puntos de unión. Luego traza en las hojas, sobre la línea espiral, las rectas *e*12, *f*2, *g*4, *h*6, *i*8, *k*10. Aun quedará un espacio entre 11 y el centro *a*; únelo también con el compas y el punto de unión será *l* (PEIFFER, 2000, 143).

3.5.1 Líneas para labores de follaje

Esta es otra aplicación de la espiral de Durero, surge de la anterior construcción del báculo episcopal, teniendo una variante la cual no se especifica en el tratado de este artista, quien solo muestra la representación gráfica de esta línea.

Cardona explica la variante de dicha línea para labores de follaje generándola a partir de Cabri[51], ajustando el trazo libre realizado por Durero a un ambiente de geometría dinámica:

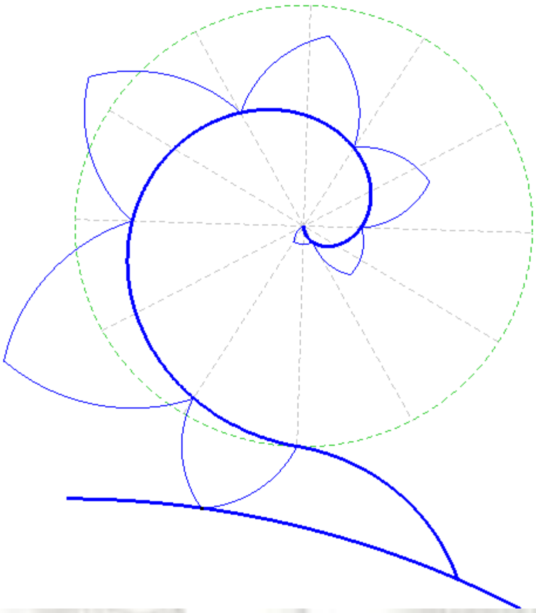


Figura 10. Línea para labores de follaje (CARDONA, 2006, p. 30).

> Se replica el procedimiento anterior pero se dejan de construir las tres últimas hojas que caen sobre la circunferencia y se sustituyen por una más pequeña hecha entre los dos últimos puntos de intersección, entre los diámetros y la espiral (PEIFFER, 2000, p. 142).

---

[51] El programa Cabri-géomètre es un programa desarrollado por Ives Baulac, Franck Bellemain y Jean-Marie Laborde del laboratorio de estructuras discretas y de didáctica del IMAG (Instituto de Informática y Matemáticas Aplicadas de Grenoble, Francia). Es un programa netamente didáctico geométrico, es decir un programa que ayuda a aprender cómo se hace geometría o mejor, a estudiar las propiedades geométricas de las figuras y sus múltiples componentes para luego entender mejor la rigurosidad matemática de las demostraciones. Tomado de http://miguelp.lacoctelera.net/post/2009/03/18/que-es-cabri-geometre

CAPÍTULO IV
CONSTRUCCIONES EN TORNO A ALGUNOS PROBLEMAS IRRESOLUBLES CON REGLA Y COMPÁS

Imagen 13. Ala de una carraca. Acuarela y aguada sobre pergamino. 19,7 × 20 cm. Alberto Durero[52].

4.1 INTRODUCCIÓN

Este cuarto capítulo analiza la última aplicación de la espiral de Arquímedes teniendo como variable de construcción la división del segmento inicial a partir de *líneas acompasables*.

Es a partir de estas líneas que surge uno de los problemas irresolubles con regla y compas, la trisección del triángulo. En este capítulo se muestra brevemente de que tratan dichos problemas y la imposibilidad de resolverse

[52] Este grabado resulta sorprendente por su precisión y minuciosidad. Es un estudio parcial de un ala multicolor en el que podemos apreciar la realidad de una forma tan fidedigna que podría ser utilizado como apoyo para explicaciones de biología.

con regla y compás así mismo, como aborda Durero este problema y la solución aproximada que realiza de la misma.

Teniendo la espiral construida a partir de las líneas acompasables, se da inicio a la última aplicación de la espiral arquimédica, realizar una escalera en forma de caracol. Para esta construcción se necesita tener la espiral en planta y alzado, definiciones propias de la arquitectura de la época y una vez Durero indique como se construyen estas perspectivas de la espiral, el dibujo puede ser utilizado en la composición de un cuadro.

Durero trabaja otro de los problemas irresolubles con regla y compás, la duplicación del cubo. En el libro IV de su tratado Durero muestra la solución aproximada realizada por Eutocio y a partir de esta, construye una forma particular para duplicar o reducir dos cubos, a partir de uno dado y su doble.

4.2 CONSTRUCCIÓN DE LAS LÍNEAS ACOMPASABLES: RELACIÓN CON LA TRISECCIÓN DE UN ÁNGULO CON REGLA Y COMPÁS.

La variante que Durero incorpora a esta nueva construcción de la espiral y de la cual surge la última aplicación señalada en su tratado, tiene que ver con el radio central de la circunferencia en donde se inscribe la espiral. En las construcciones anteriores, este radio se divide en tantas partes se quiera, teniendo en cuenta que todas las partes son iguales.

En esta construcción, Durero divide de otra forma el radio central, teniendo en cuenta dos líneas (un arco y una línea recta), la primera se divide en n partes para luego, esta división, ser traspuesta a la línea recta y con esta medida, trazar la nueva espiral identificada por Durero.

¿Qué hace distinta a esta nueva espiral? Cuando se afirma que un ángulo se puede dividir en tres partes iguales, se está afirmando que se encontró una solución a uno de los tres problemas irresolubles con regla y compás en matemáticas: trisecar un ángulo.

Esta nueva construcción junto con la cuadratura del círculo y la duplicación del cubo, hacen parte de los tres problemas clásicos de las matemáticas de la antigua Grecia. La trisección del ángulo data de la isla de Delos centro de reunión del mundo griego perteneciente a las islas Cícladas, situadas al este de la península del Peloponeso. Por ser esta isla punto de encuentro de las celebraciones (Delias) a las divinidades Apolo y Artemisa se aprovechaban dichas reuniones para el comercio, el intercambio no solo de mercancía, sino de ideas de tipo matemático, siendo una de estas ideas los conocidos problemas irresolubles con regla y compás.

La cuadratura del círculo la cual relaciona el radio de la circunferencia con el área del círculo o la longitud de la circunferencia, es decir por determinarπ. En el contexto griego se trataba de construir un cuadrado equivalente a un círculo dado, usando los cinco postulados de la geometría euclidiana[53]. Los antiguos egipcios hicieron una aproximación de pi en el segundo milenio antes de nuestra era, calculando el área de una circunferencia, como se puede constatar en el papiro de Rhind.

Otro de los problemas tiene que ver con **la duplicación del cubo**, originándose con la leyenda del oráculo de Delos:

---

[53] Los postulados de Euclides aparecen en el libro I de *los Elementos* estos son: 1. Dados dos puntos se puede trazar una y solo una recta que los une. 2. Cualquier segmento puede prolongarse de manera continua en cualquier sentido. 3. Se puede trazar una circunferencia con centro en cualquier punto y de cualquier radio. 4. Todos los ángulos rectos son congruentes. 5. Si una recta, al cortar a otras dos, forma ángulos internos menores a dos ángulos rectos, esas dos rectas prolongadas indefinidamente se cortan del lado en el que están los ángulos menores que dos rectos (VEGA, 1991, p. 35).

…una epidemia de peste que apareció en Atenas hacia el 428 a.C. atemorizó tanto a los ciudadanos que los dirigentes atenienses tuvieron que recurrir a pedir ayuda al dios Apolo para que les ayudara a acabar con la epidemia. Se consulta al oráculo de Delos para saber que se podría hacer para acabar con dicho mal. El oráculo de Apolo en Delos les dijo que para terminar con la peste tendrían que construir un altar de volumen doble que el que tenía Apolo en el templo. La peste no acabó, pero los supervivientes trataron de construir un altar con un volumen doble del que tenía Apolo.

Por último aparece el problema de **la trisección de un ángulo**, el cual consistía en dividir un ángulo cualquiera en tres partes iguales con el uso de la regla y el compás.

Desde esta época, hasta nuestros días, se han intentado muchas aproximaciones a estos problemas; pero sólo hasta épocas relativamente recientes se pudo demostrar que la cuadratura del círculo es irresoluble. Para el caso de la trisección del ángulo y la duplicación del cubo fue René Descartes, en 1630, quien mostró la imposibilidad de dar solución a estos problemas con los postulados de la geometría euclidiana y los resolvió con geometría analítica. En términos modernos los tres problemas: la cuadratura del círculo, la trisección del ángulo y la duplicación del cubo, se pueden expresar respectivamente mediante el lenguaje de las ecuaciones así:

$$x^2 = \pi; \ \text{radio del círculo r} = 1$$
$$x^3 = 3x - q; \text{cuerda del arco dado del círculo de radio r} = 1$$
$$x^3 = 2l^3; l: \text{lado del cubo}$$

Para las dos últimas ecuaciones de grado cúbico, Descartes demostró que no se pueden resolver con intersecciones de rectas y círculos, sino con intersecciones de parábolas y rectas. Para el caso de la primera ecuación sólo hasta el siglo XIX se demostró que π es un número irracional trascendente y por tanto no construible con regla y compás.

La geometría griega carecía de herramientas que pudiesen dar solución a dichos problemas, las aproximaciones en torno a la solución de los dos últimos problemas matemáticos sin regla y compás fueron muchos, la cuadratura del círculo fue un poco más difícil de generar aproximaciones, Durero trata, con estas herramientas, de dar solución aproximada al problema de la trisección del ángulo, argumentando que todo segmento circular que se pueda imaginar, lo puede dividir en tres partes iguales.

Durero presenta en su tratado los tres problemas irresolubles con regla y compás, sin embargo, "cada uno de ellos se encuentran tratados de manera muy diferente" (PEIFFER, 2000, p. 75), Peiffer señala:

> Si la solución aproximada de la trisección del ángulo parece difícil de relacionar con una fuente conocida, la cuadratura del círculo se efectua de manera bastante tosca según su metodo que parece haber gozado de amplia difusión en la Edad Media. Por el contrario, en lo que respecta al problema de la duplicación del cubo, Durero propone procedimientos mecánicos de los antiguos descritos y comentados por Eutocio (PEIFFER, 2000, p. 75).

4.3 SOLUCIÓN APROXIMADA A LA TRISECCIÓN DE UN ÁNGULO

Los extremos del arco del círculo *ab* están unidos con una línea recta. Divide (figura 11) la recta *ab* con dos puntos *c* y *d* en tres partes iguales, por el teorema de Tales (figura 12).

> A continuación pongo un brazo de un compás en el punto *a* y con el otro trazo desde el punto *c* una línea [circunferencia] que corte el arco, y, donde lo haga, pongo una *e*. A continuación pongo un brazo del compás en el punto *b* y con el otro trazo desde el punto *d* una línea que corte el arco, y, donde lo haga, pongo una *f*. A continuación trazo dos líneas verticales desde *c* y *d* al arco, poniendo *g* y *h*. Así las tres longitudes *ae, gh* y *fb* serán iguales entre sí, quedando dos pequeños espacios *eg* y *hf* (PEIFFER, 2000, p. 197).

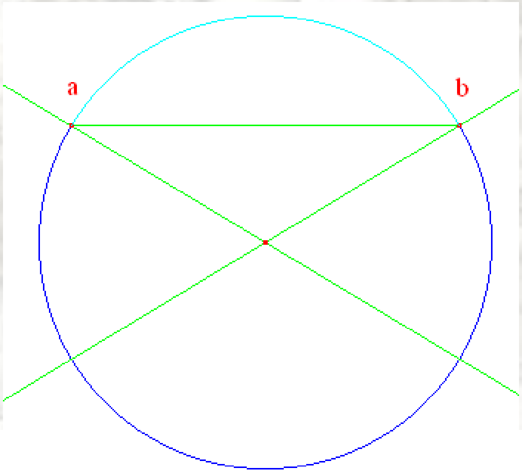


Figura 11. Arco *ab* el cual se va a dividir en tres partes iguales aproximadamente.

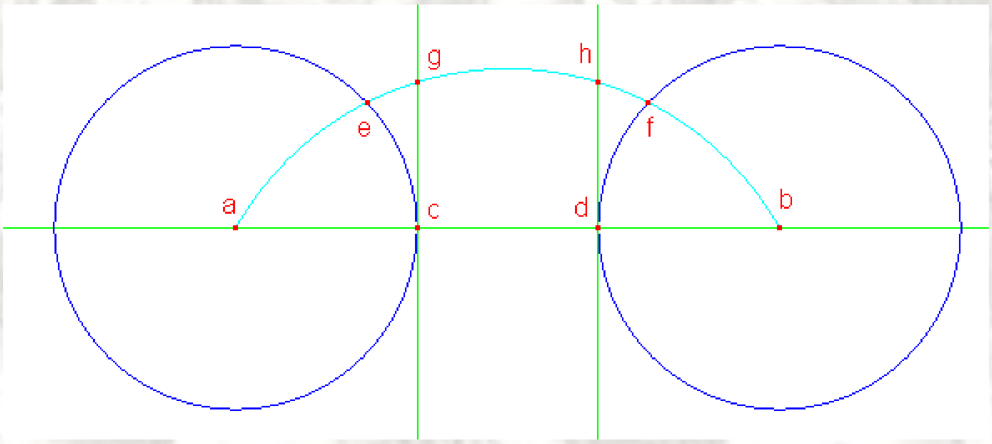


Figura 12. Construcción trisección de un arco I parte.

Durero trata de mostrar que un segmento al ser unido en sus extremos por un arco, estas dos líneas tienen una longitud aproximada, por lo tanto, se podría hablar de una misma medida. Así que tanto *ac* como *ae*, radios de una misma circunferencia, comparten una relación de igualdad con el arco *ae*. De igual forma *fb* y *db*, al ser radios de una misma circunferencia, el arco *fb* también es igual. A partir de dos líneas verticales traslada el segmento *cd* hacia arriba del arco formando el segmento *gh*, siendo iguales por lo tanto también el arco *gh* es igual. Todos estos segmentos al surgir de la división igual del segmento *ab*, son radios iguales, por lo tanto los arcos *ae, gh* y *fb* también lo son.

En la construcción quedan los arcos eg y hf, los cuales Durero deberá dividir en partes equitativas para poder dividir el arco en tres partes iguales, el artista argumenta:

A continuación cojo un compás, pongo un brazo en el punto *a* y el otro en el punto g, y desde aquí trazo un arco hasta la recta ab, y pongo una *i*. Luego, pongo un brazo del compás en el punto *b* y desde el punto *h* trazo con el otro un arco hasta la línea *ab* y pongo una *k*. A continuación divido *ci* y *kd* con dos puntos en tres partes, como he enseñado antes. Pongo un brazo del compás en el punto *a* y el otro en el punto más cercano a *i.* trazo una línea hasta el arco de círculo y pongo allí una *l.* A continuación pongo un brazo del compás en *b* y el otro en el punto más cercano a *k*, y trazo una línea desde aquí al arco de círculo, y pongo una *m*. Así, el arco de círculo *ab* queda dividido con los puntos *l* y *m* en tres partes (PEIFFER, 2000, 197).

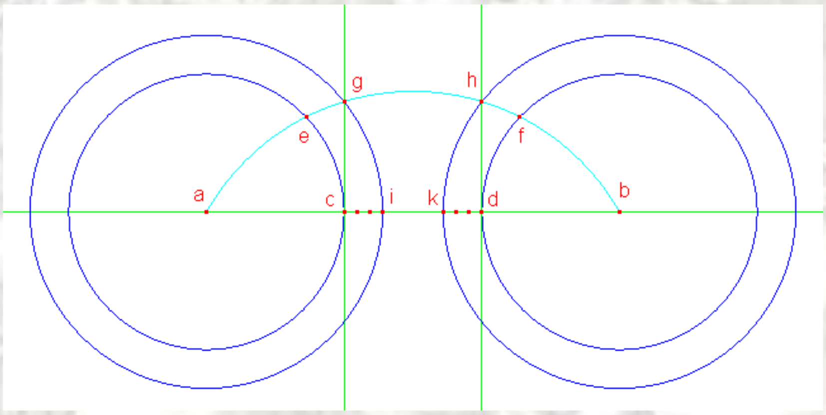
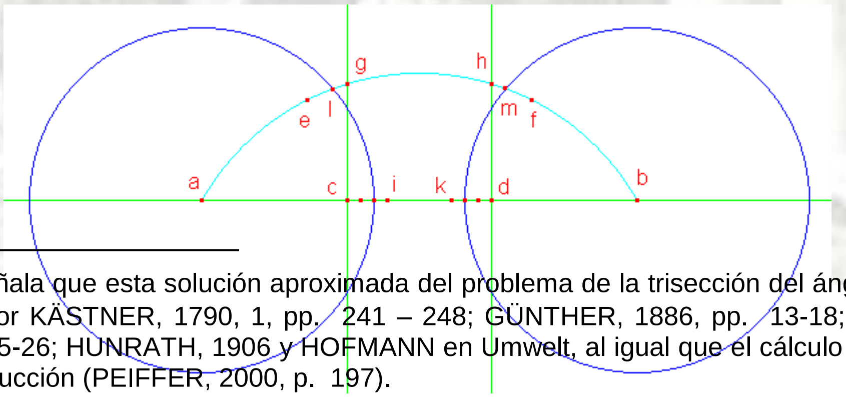


Figura 13. Relación entre la medida del arco *eg* y el segmento *ci.*

Durero traslada la medida del arco *eg* al segmento *ab,* formando el nuevo segmento *ci,* el cual al ser dividido otra vez en tres partes y trasladar estas divisiones a los dos arcos restantes se reparte de la siguiente forma: dos partes para el arco *ae*; una parte *lg* se suma al arco *gh* y al lado derecho se realiza el mismo procedimiento para sumar a *gh* otro pequeño arco y por último se suman dos partes al arco *fb.* Durero ha dividido aproximadamente un arco en tres partes iguales[54], concluyendo que *Quien desee una mayor precisión, que la busque por vía demostrativa* (PEIFFER, 2000, p. 197).



[54] Peiffer señala que esta solución aproximada del problema de la trisección del ángulo ha sido estudiada por KÄSTNER, 1790, 1, pp. 241 – 248; GÜNTHER, 1886, pp. 13-18; Staigmüller 1891, pp. 25-26; HUNRATH, 1906 y HOFMANN en Umwelt, al igual que el cálculo del error de dicha construcción (PEIFFER, 2000, p. 197).

Figura 14. División de los arcos *eg* y *hf* en tres partes iguales.

En geometría dinámica se aprecia la aproximación que hace Durero teniendo en cuenta la relación entre segmentos y arcos aproximadamente iguales. Durero construye la trisección de un ángulo con regla y compás teniendo errores mínimos, que van mostrando la imposibilidad de resolver este problema con las herramientas griegas.

Existen algunos ángulos que se pueden trisecar con regla y compás, pero no todos son posibles, aquí algunos ejemplos mostrando la medida de los segmentos y su relación de igualdad con los arcos que comprenden el ángulo trisecado:

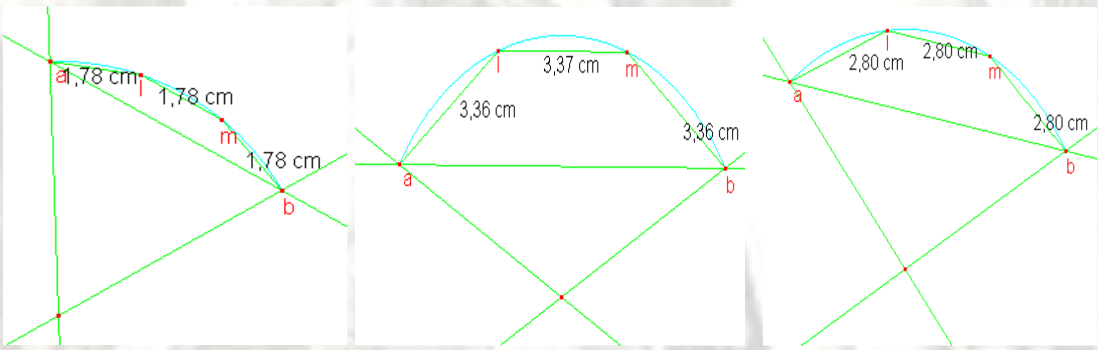


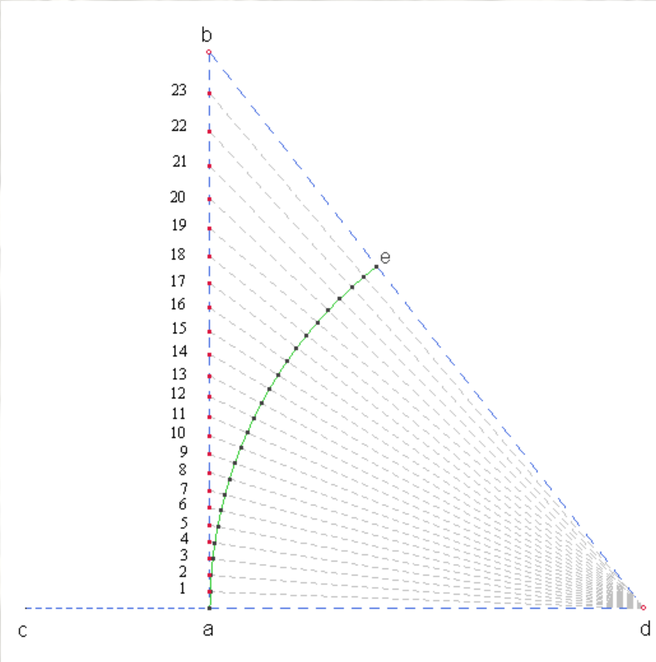
Figura 15. Construcción de trisección de un arco en *al, lm y mb* partes aproximadamente iguales.

Con esta particular aproximación de la división de un arco en partes iguales a partir de un segmento dado, Durero realiza la construcción de su nueva espiral a partir de líneas acompasables.

4.4 CONSTRUCCIÓN DE UNA ESPIRAL A PARTIR DE LA DIVISIÓN EN n PARTES DE UN ARCO

El segmento que Durero quiere dividir, teniendo en cuenta la división de un arco determinado, y de este modo, construir una nueva espiral, la desarrolla de la siguiente manera:

Trazo una línea vertical del largo de la regla con la que voy a hacer la espiral; sea *a* su extremo inferior y *b* el superior. Luego trazo una línea horizontal *cd* que forma ángulos iguales con el punto a de la línea vertical.



Luego trazo una línea oblicua *db,* cojo un compás y pongo uno de sus brazos en el punto *d* y el otro en el punto *a*.

Desde aquí trazo una línea curva hacia arriba hasta la oblicua *db*, y, donde la toque, pongo el punto *e*. A continuación divido esta línea curva *ae* con 23 puntos en 24 partes iguales, y desde el punto d trazo líneas rectas por todos los puntos de *ae* hasta la línea *ab* (PEIFFER, 2000, p. 139 - 140).

Figura 16. División de un segmento a partir de la división de un arco (CARDONA, 2006, p. 140).

En esta primera parte de la construcción, Alberto Durero afirma que divide el arco en 24 partes iguales, por lo tanto divide también en 24 partes iguales el segmento *ba*, luego, contradiciéndose en lo anteriormente dicho, concluye que dependiendo de cómo se trace *ba* los 24 espacios de este segmento pueden ser mas angostos en su base que en el otro extremo y viceversa.

Si el segmento *ba* forma ángulo recto con *cd*, los espacios superiores serán mas amplios que los espacios inferiores, pero si el segmento *ba* tiende mas hacia el punto *c*, se vuelve a trazar la oblicua *bd* y se tendría menos espacio entre cada punto de la parte superior y mas espacio entre cada punto en la parte inferior. Teniendo en cuenta que la línea *ba* debe ser radio de una circunferencia y el segmento *cd* sería diámetro del mismo, dando como resultado una espiral en donde sus espiras no se desarrollan en paralelo, Durero explica lo anterior al final de la construcción:

> Mas si quieres que el espacio entre las espiras sea mas amplio hacia fuera y mas estrecho hacia dentro, inclina la línea vertical ab acercando el extremo b al punto c, y traza de nuevo la línea oblicua db. La línea curva ae será así más corta. A continuación vuelve a dividirlo todo como antes. Obtendrás un gran cambio en el trabajo (PEIFFER, 2000, p. 140).

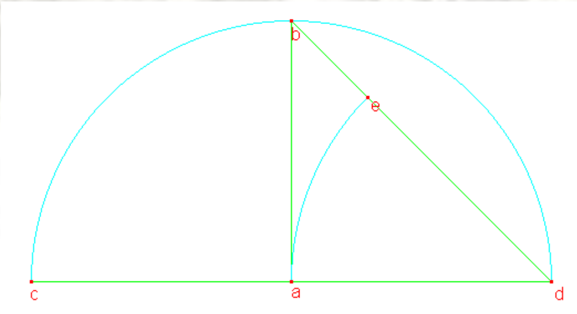


Figura 17. Line ab perpendicular a cd, el arco que se divide para después pasar estas medidas al segmento es mas amplio y los espacios en ba serán mas amplios en la parte superior y mas cortos en la parte inferior.

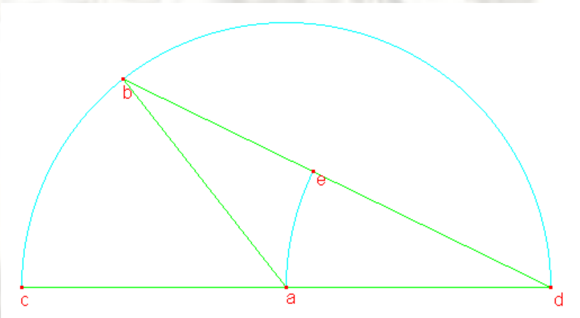


Figura 18. Línea ab tiende al extremo c, el arco que se divide para después pasar estas medidas al segmento es mas amplio y los espacios en ba serán mas cortos en la parte superior y mas amplios en la parte inferior.

Una vez se tenga el segmento dividido, con este se traza una circunferencia la cual se divide en doce partes iguales, a partir de la división del segmento se empieza a trazar circunferencias de centro a y radio a1, a2, a3, etc. Por las divisiones de la circunferencia se trazan rectas las cuales se encuentran en el mismo punto a, la intersección entre estas rectas y las circunferencias dan como resultado la espiral construida a partir de líneas acompasables.

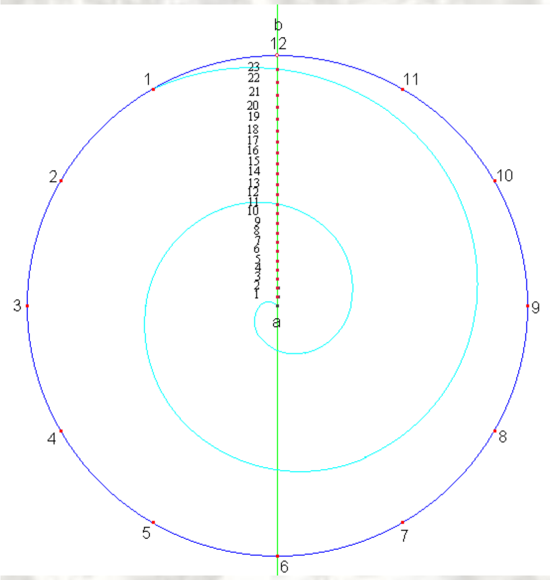
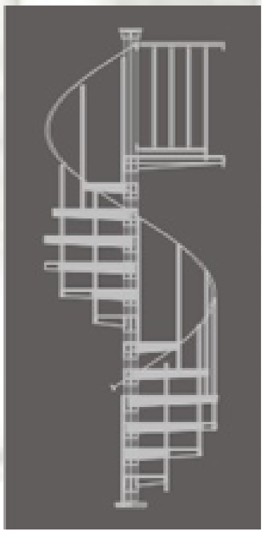


Figura 19. Construcción de una espiral a partir de las líneas acompasables.

4.5 CONSTRUCCIÓN DE UNA ESCALERA EN FORMA DE CARACOL: ESPIRAL EN PLANTA Y ALZADO A PARTIR DE LAS LÍNEAS ACOMPASABLES



Durero construye, a partir de la aproximación a la teoría de las espirales de Arquímedes y las líneas acompasables, una espiral la cual permite representar otro tipo de objeto dentro de una representación pictórica, una escalera de caracol: proyección *vertical de la espiral en planta*[55] (CARDONA, 2006, p. 31), en el tratado de Durero es la última aplicación de dicha espiral arquimédica.

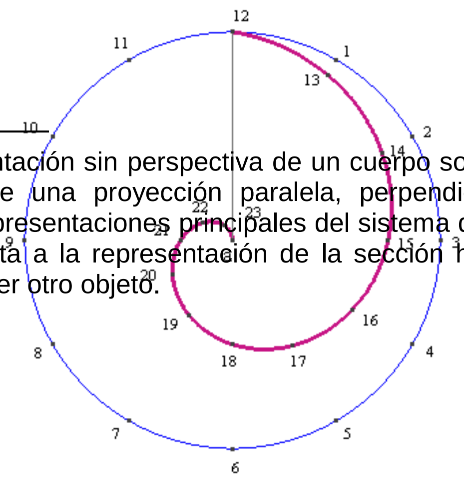
Imagen 14. Escalera de caracol

En este caso, la proyección vertical también conocida por los pintores y arquitectos de la época como *alzado*, es la representación plana de un objeto o figura vistos de frente, en el caso de dibujar un edificio en alzado se dibujaría la fachada del mismo, sin tener en cuenta la profundidad del objeto conservando todas sus proporciones.

Hasta el momento, Durero había construido solo la imagen vista desde arriba de una espiral, también conocida como *planta* o sección horizontal. Era momento de mostrar como se alza la espiral respecto de su planta, para poder dar forma a otra utilidad de la línea serpentina en la pintura, Durero señala:

> Así se traza una espiral en un plano regular; a continuación quiero enseñar a trazarla de abajo hacia arriba. Hay que señalar que, cuando se quiere hacer algo, lo primero que se debe establecer, sea un edificio o cualquier otra cosa, es su planta. Por eso la espiral no se puede proyectar bien en vertical, si antes no se ha hecho lo propio con la planta en un plano (PEIFFER, 2000, p. 145).

Lo primero que se debe hacer entonces es trazar la planta de la espiral que anteriormente y por las líneas acompasables se ha construido solo que se dividirá el segmento en doce partes. La variante de esta espiral es que al llegar al punto 11 de la división de la circunferencia se sigue la secuencia numérica dentro de los puntos que conforman la espiral, empezando con el ultimo punto que la conforma que sería el 12, el penúltimo punto sería el 13 y así sucesivamente hasta llevar al origen de la espiral con el número 24.

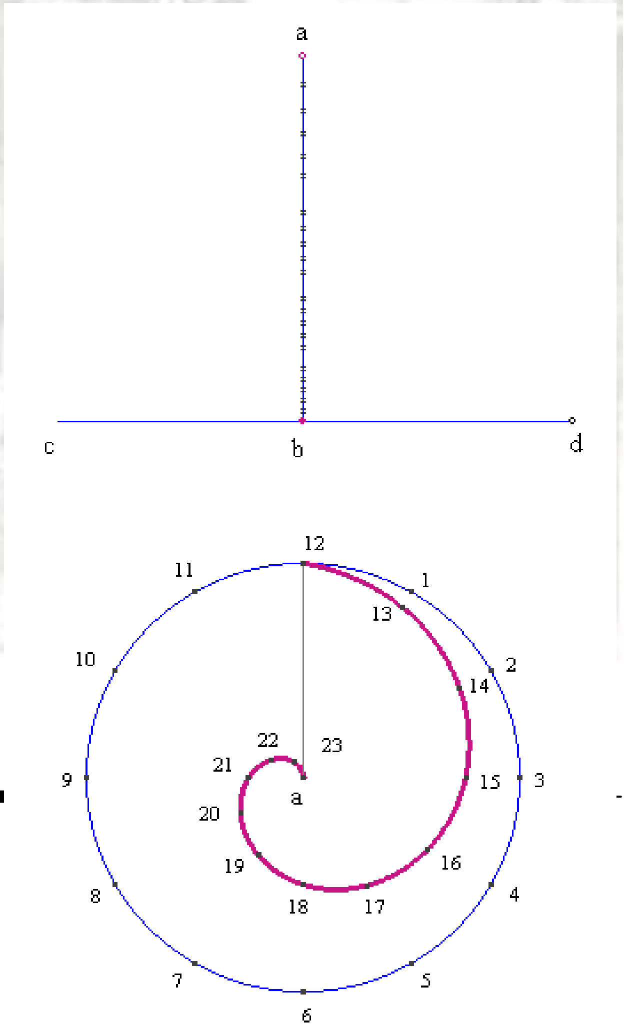


[55] Una planta es la representación sin perspectiva de un cuerpo sobre un plano horizontal. La planta se obtiene mediante una proyección paralela, perpendicular al plano proyectante horizontal. Es una de las representaciones principales del sistema diédrico, junto con el alzado. También se denomina planta a la representación de la sección horizontal de un edificio, un mueble, una pieza o cualquier otro objeto.

Figura 20. Planta de la espiral (CARDONA, 2006, p. 32).

> Luego de dibujar la planta, traza una línea recta vertical desde el punto 6 hacia arriba pasando por el centro *a* y el punto 12, tan alta como la necesites, y en su extremo superior pon una *a*, pues este punto está encima del centro *a*. A continuación corta esta linea vertical a en su parte inferior con una horizontal *cd*; ese punto será el *b*. Divide esta linea *ab* con 23 puntos en 24 partes iguales. Quiero disponer en vertical en el orden que se ha indicado anteriormente, por lo que vuelvo a seguir el mismo camino, solo que invierto las dos letras, poniendo la *a* arriba y la *b* debajo (PEIFFER, 2000, p. 146).

En la afirmación *divide esta linea ab con 23 puntos en 24 partes iguales* (PEIFFER, 2000, p. 146), la cual aclara que invierte las letras de la imagen 26, está en contradicción con la construcción que realiza después, puesto que esta línea *ab* es igualmente dividida por las lineas acompasables como en el caso del radio central *ba*.



Esta nueva construcción que está sobre la espiral, no tiene la misma dependencia en el segmento *ab* que la construcción de la espiral en el segmento *ba*, el segmento ab se puede hacer tan largo como se quiera y los segmentos *cb*, *ab* y *bd*, no son radios de una misma circunferencia, caso contrario de la espiral puesto que por tener origen en el centro de la circunferencia *cb*, *ba* y *bd* son iguales por ser radios de la misma circunferencia.

Figura 21. Proyección vertical de la espiral de Arquímedes – Durero I parte (CARDONA, 2006, p. 32).

Durero construye de la siguiente forma, la división del segmento *ab* y el primer punto del alzado de la espiral como sigue:

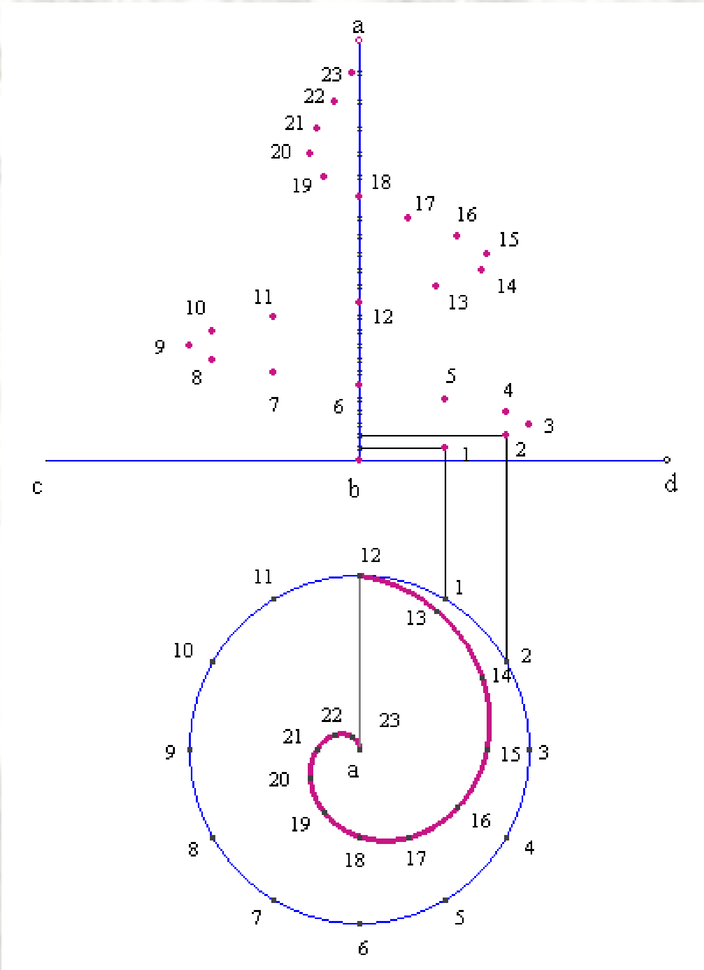


Figura 22. Proyección vertical de la espiral de Arquímedes-Durero (CARDONA, 2006, 32).

> Comienzo asimismo a numerar de abajo hacia arriba 1, 2, 3, etc. Cuando esta linea en vertical se eleve dividida con sus puntos y números en mitad de la planta, llevo hacia arriba con una vertical, atravesando la horizontal cd, el punto 1 de la planta. A continuación llevo desde el punto 1 de la linea ab una horizontal hacia la vertical trazada desde el punto 1 de la planta, y donde estas dos líneas se crucen formando angulo, pongo un punto 1. Éste es el primer punto de la proyección vertical de la espiral (PEIFFER, 2000, p. 146).

El mismo procedimiento se repite para todos los puntos que definen la espiral, trazando líneas paralelas las cuales se encuentran en único punto, y estas como coordenadas, indican el trazo a seguir para poder realizar el alzado de la espiral.

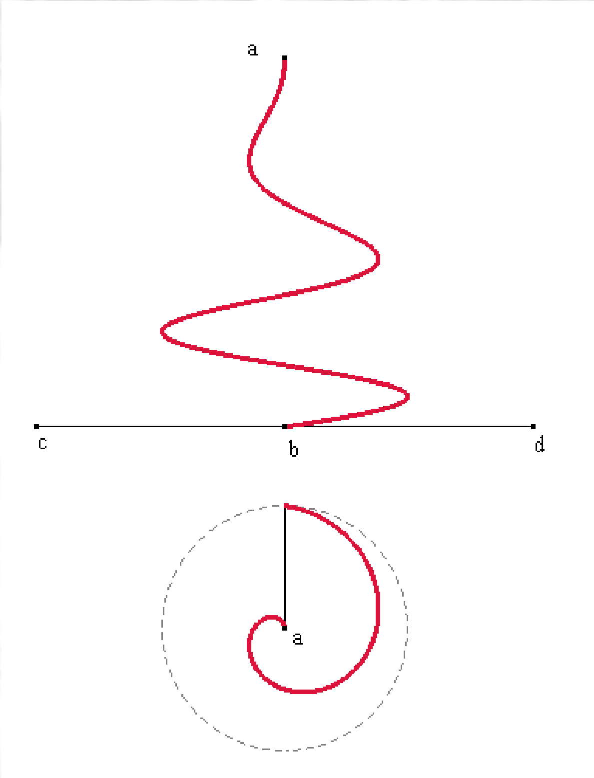


Figura 23. Proyección vertical de la construcción continua de la espiral (CARDONA, 2006, p. 34).

4.6 CONSTRUCCIONES EN TORNO AL PROBLEMA DE LA DUPLICACIÓN DEL CUBO CON REGLA Y COMPÁS

Alberto Durero en el capítulo IV, dedicado a los cuerpos regulares y a los principios de la perspectiva, muestra varias construcciones de la duplicación de un cubo con regla y compás. Durero parte contextualizando en su tratado, la historia que originó dicho problema matemático, en donde el pueblo de Atenas debe de duplicar el altar de Apolo para poder dar fin a la peste que los aqueja, sin poder encontrar solución alguna recurren a Platón quien les responde que no duplicaron el altar sino que habían hecho el altar bastante mayor del doble[56].

Durero al igual que Platón en su momento, mostrará la utilidad que tiene esta construcción no solo para resolver aproximadamente dicho problema, sino también para el ejercicio continuo del pintor, quien gracias a esta construcción perfecciona la labor que realiza:

> Como este arte ocultado y tenido en gran secreto por los sabios, es muy útil y sirve a todos los trabajadores, quiero sacarlo a la luz y enseñarlo, pues con él se pueden fundir bombardas y campanas, duplicándolas y aumentándolas como se quiera, siempre con correcta proporción y manteniendo su peso. Con él se pueden asimismo, agrandar toneles, arcas, medidas, ruedas, habitaciones, cuadros y lo que se quiera[57].

4.6.1 Duplicación de un cubo: solución transmitida por Eutocio

> Primero junta dos cubos iguales abc. Pon esta misma longitud *ac* en vertical sobre una horizontal *de* formando ángulo recto, y desde el centro *c* traza un semicírculo *dae.* A continuación traza una línea recta desde *e* hasta la circunferencia pasando por *b*; pon una *f* (PEIFFER, 2000, p. 304).

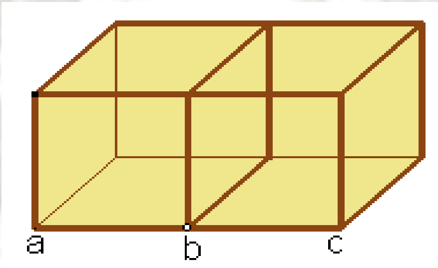


Imagen 15. Cubos iguales los cuales comparten una misma longitud *ac*.

> Toma luego una regla estrecha, marca en ella un punto central y gradúala a ambos lados con números, y pon los números tanto en un lado como en el otro, de modo que a cada lado del centro el primer número sea uno. Moviendo la regla tienes que encontrar la primera línea con la que se debe hallar la del cubo doble. A continuación pon uno de los extremos de la regla que acabamos de hacer en el punto *d* y déjalo siempre allí, ya se desplace hacia arriba o hacia abajo. Si mueves la otra parte de la regla, deja siempre la regla con su centro en la línea *abc*, y muévela hasta que encuentres un punto central entre la línea *ef* y la circunferencia; donde la regla móvil corte la línea *ef*, pon una *g*, y donde corte la línea *abc*, pon una *h*, y donde la susodicha regla toque la circunferencia, pon una *i*.
>
> Con *gh* y *hi* se obtienen, de este modo, dos longitudes iguales. *hc* es la primera línea encontrada, con la que se hallará el lado del cubo doble. A continuación haz una línea horizontal con *hc* y el lado *ab* del cubo simple, obteniendo *ahc*. Pon el

[56]En la historia narrada por Durero, Platón responde que no duplicaron el altar al poner una piedra del mismo tamaño, sino que habían hecho el altar bastante mayor del doble, Peiffer señala que esta afirmación es falsa puesto que el altar obtenido superponiendo dos piedras idénticas a las que constituye el primer altar es doble del primero, pero ya no es un cubo (PEIFFER, 2000, p. 304).
[57] Ibíd., p. 304.

brazo de un compás en el centro de *ac* y traza un semicírculo *ac*. Desde *h* dibuja una vertical hasta la circunferencia, y pon allí una *k*. Esta línea *kh* te proporciona un lado del cubo doble, como lo he dibujado a continuación., Siguiendo el mismo proceso de la construcción anterior, Durero muestra como se puede triplicar o cuadriplicar un cubo (PEIFFER, 2000, p. 304-305).

Cardona construye el lado doble a partir de las indicaciones de Durero:

1. Se trazan dos rectas perpendiculares, una horizontal y la otra vertical. En la vertical se marcan los extremos AC (C en el cruce de las rectas) de un segmento de longitud igual al doble del lado del cubo inicial.
2. Con centro en c, y radio AC se construye un semicírculo que corta la recta horizontal en dos puntos D y E.
3. Se traza una semirrecta de origen E, que pasa por el punto medio B del segmento AC.

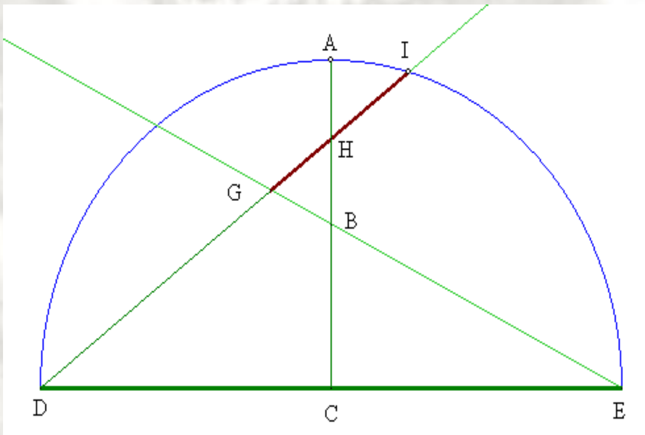


Figura 24. Construcción lado del cubo doble (CARDONA, 2006, p. 87).

4. Se dibuja una semirrecta con el origen en D tal que, al cortar la vertical AC en el punto H, lo hace de tal modo que la distancia de ese punto a la intersección I de esta recta con la circunferencia sea igual a la distancia desde H hasta la intersección G de las dos semirrectas.
5. Los segmentos BC y CH se trasladan sobre otra recta de tal manera que uno quede a continuación del otro. Se traza la circunferencia con centro en el punto medio M del segmento BH y con radio MH. Se levanta una perpendicular a la recta en el punto C y nombramos con la letra K el punto de corte de esta recta con la circunferencia. De tal modo se obtiene el segmento CK, que es el lado del cubo cuyo volumen es el doble del volumen del cubo inicial, de lado BC (CARDONA, 2006, p. 87).

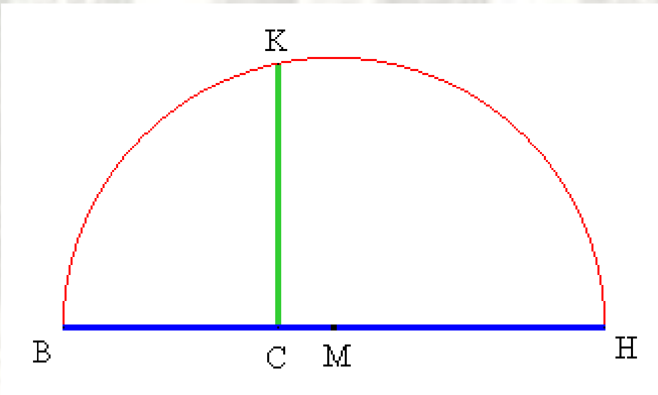


Figura 25. Construcción del segmento *ck* el cual es el lado del cubo doble (CARDONA, 2006, p. 87).

Con esta construcción Durero está construyendo dos medias proporcionales entre $\boldsymbol{a}$ y $\mathbf{2}\boldsymbol{a}$, si denominamos $\boldsymbol{a}$ al lado del cubo. Veamos:

Sea *z=CH y x=CK y dado que GH=HI* se pueden establecer las proporciones:

$$\frac{a}{x} = \frac{x}{z} = \frac{z}{2a}$$

Expresión que lleva a las siguientes ecuaciones:

$$x^2 = az \text{ y } z^2 = 2ax$$

de las que se puede derivar:

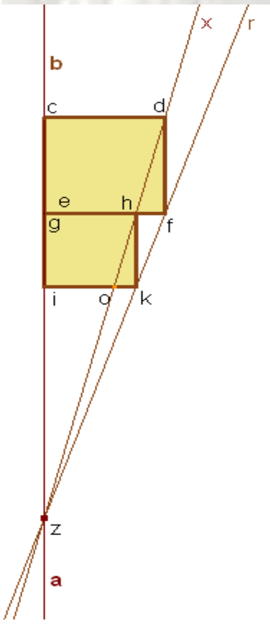
$$x^3 = 2a^3,$$

Ecuación que resuelve la duplicación del cubo.

Sin embargo esta ecuación no se puede resolver con los postulados de la geometría euclidiana pues la construcción del punto H en la figura 24 no se puede hacer con regla y compás. O dicho de otra manera, si bien se puede construir con regla y compás la media proporcional entre dos segmentos, no se puede construir con esos instrumentos dos medias proporcionales entre dos segmentos.

4.6.2 Método de Durero para doblar o reducir a la mitad un cubo

Para esta construcción Durero parte de un cubo y su doble para duplicar o reducir a la mitad cada uno de ellos.



Pon una línea vertical ab. Apoya en ella los lados de los dos cubos susodichos, de manera que estén en contacto, el mayor encima y el más pequeño debajo. Los dos vértices de la izquierda del cubo superior, que están en la línea *ab,* serán *c* y *e*, y los dos de la derecha *d* y *f*. Los dos vértices de la izquierda del cubo inferior más pequeño, en la línea *ab*, desígnalos con *gi*, y los dos exteriores con *hk*. Une los dos vértices *f* y k con una línea recta; prolóngala hacia arriba tanto como quieras y pon una *r*, y luego hacia abajo hasta la línea *ab* y pon una *z*, cortarás las caras inferiores de los dos cubos.

Figura 26. Cubo doble y el inicial sobre una recta.

Si prolongas esta línea oblicua hasta el extremo *x*, tendrás la forma de agrandar el cubo, y, si lo haces hacia abajo, de disminuirlo. Hazlo de la siguiente manera.

Primero prolonga la línea horizontal superior del cubo *cd* hasta la línea oblicua *zr*, y pon allí una l. Lleva luego una vertical desde l hasta la línea *zx*; pon una *m*. A continuación forma un cubo *clmn*, cuyo volumen es dos veces mayor que el del cubo *cdef*. Cada vez que subas, se duplicará, y lo harás con certeza y corrección. Mas hacia abajo, prácticamente hasta la punta *z*, el cubo siempre es la mitad más pequeño. Y esto se hace bajando de la misma manera que subiendo. Para ello haz lo siguiente.

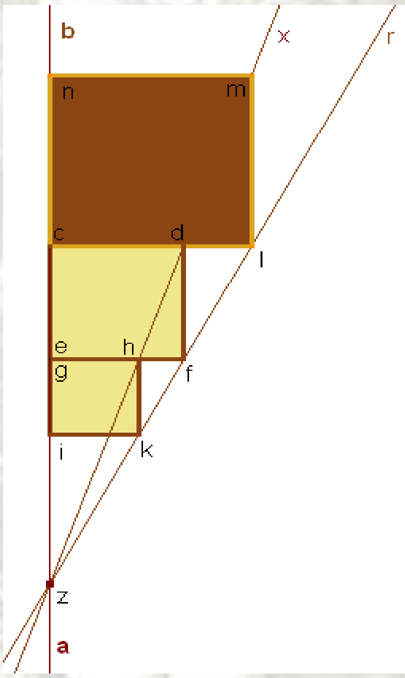
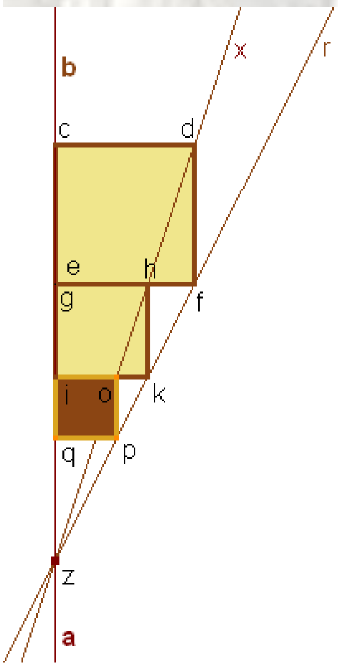


Figura 27. Duplicación del cubo cdef.



Donde la línea *xz* corte el lado inferior del cubo *ik*, pon una *o*; traza desde aquí una vertical hacia abajo hasta la oblicua *zr* y pon una *p*. Desde aquí, formando ángulo recto, lleva una horizontal hasta la vertical *ab*; pon una *q*. Este cubo *ioqp* tiene la mitad de volumen que el cubo superior *ghik*. Puedes continuar haciéndolo hasta el punto *b*.

Figura 28. Reducción del cubo ghki.

CAPÍTULO V

DURERO Y EL RECONOCIMIENTO DEL INFINITO EN POTENCIA Y ACTO

Imagen 16. Melancolía I. Grabado – 1514. 31cm x 16 cm[58].

5.1 INTRODUCCIÓN

En este capítulo se aborda la discusión que al parecer también Durero no desconocía sobre el infinito en acto y potencia, de donde parte una de las diferencias señaladas por Peiffer entre el artista y Euclides.

[58] En el grabado hay muchos elementos relacionados con la geometría, la aritmética y la medida del tiempo. Sobre el muro hay una esfera de madera torneada, un poliedro truncado de cristal de alunita formado por pentágonos irregulares y triángulos (en que se puede apreciar un rostro humano difuminado), una regla, un reloj de arena, una balanza y un cuadrado de 4x4. También hay una campanilla y una escalera de siete peldaños, que asciende hasta una torre o edificio que no se vislumbra su final. En la torre se encuentra un cuadrado mágico el cual tiene la fecha 1514, año en que realizó el grabado.

Estos diferentes puntos de vista de Euclides y Durero son abordados a partir de las ideas de Aristóteles y Giordano Bruno, quienes parecen coincidir en sus respectivas ideas sobre el infinito: la obra los elementos obedece en sus principios filosóficos al pensamiento aristotélico y esto se puede ver claramente en la noción de infinito subyacente a ella. Veremos que el pensamiento de Durero en cuanto al infinito encajará mejor en la del filósofo Giordano Bruno, posterior a él, en este sentido se puede decir que se adelantó desde lo artístico a la idea revolucionaria de Bruno sobre la existencia del infinito en acto.

De igual forma se muestra la construcción de la espiral de Durero, aproximación a la espiral logarítmica, evidenciando las diferencias entre ésta y la espiral arquimédica.

5.2 DURERO Y LA NOCIÓN DE INFINITO

Al comienzo del libro I de su tratado, Durero deja claro al artista el conocimiento sobre la naturaleza de los objetos matemáticos, su intangibilidad y la necesidad de sus representaciones para poder moverse dentro del conocimiento matemático y a partir de éste, desarrollar mejores técnicas que permitan al pintor fundamentar su trabajo.

Durero está familiarizado con la geometría de Euclides, muchas de sus definiciones coinciden con las mencionadas en el libro de los *Elementos,* sin embargo, existen algunos aspectos en los que difieren de ambos autores, en particular la idea de infinito que se percibe en ambos casos, Peiffer señala:

Las definiciones elementales que aquí da Durero no siempre son puramente euclidianas. Parece recoger una herencia muy vasta y variada (PEIFFER, 2000, p. 133).

Peiffer hace referencia a todo lo que le proporcionaba Nuremberg como encrucijada de las grandes rutas comerciales de la época y la relación de su familia con los miembros mas influyentes de toda la ciudad, permitiendole tener acceso al conocimiento que requería para enriquecer la labor del artesano:

> …geómetra autodidacta (Durero), busca la información allá donde pueda encontrarla. Discute en banquetes mundanos, con sabios que están de paso. Se basa en los conocimientos lingüísticos de sus amigos para apropiarse, en sesiones de trabajo colectivo…de las obras clásicas. Gracias a su buena inserción en la élite intelectual, puede rebuscar en las bibliotecas de los humanistas y satisfacer en ellas su curiosidad (PEIFFER, 2000, p. 31).

¿Qué es en lo que difiere la noción del infinito de Euclides con la definición del infinito en Durero?

Durero afirma que existen objetos matemáticos los cuales solo pueden ser aprehensibles por medio del conocimiento, “sin duda, Durero está planteando, a su manera obviamente, las viejas discusiones a propósito del infinito real[59] y el infinito potencial (CARDONA, 2006, p. 38)”, discusión que tiene como uno de sus primeros representantes a Aristóteles (325 a.c – 265 a.c), quien defiende la postura del infinito existente en potencia al igual que Euclides y la postura de Giordano Bruno (1548 - 1600) quien refutaría la existencia del infinito en potencia para adoptar el infinito como sustancia realmente existente en acto, postura que tal vez adoptaría años antes el propio pintor.

5.2.1 El infinito aprehensible por los sentidos

“El infinito para Aristóteles tiene que ver con una imposibilidad del sujeto” (APONTE, 2008, p. 23) sea bien por lo que es imposible recorrer (la voz), lo que se puede recorrer pero sin llegar a un determinado fin (la esfera) o la dificultad de lo que se está recorriendo (laberinto), Aristóteles señala:

> Por una parte se aplica a aquello que no se puede recorrer, porque está en su naturaleza el no ser recorrido (Aristóteles citado en APONTE, 2008, p. 23).

[59] Cardona distingue el infinito real como el infinito actual.

> …lo que se puede recorrer, pero sin llegar a un término o, a) lo que difícilmente puede ser recorrido, o b) lo que naturalmente admite ser recorrido, pero no puede ser recorrido o no tiene un límite[60].

Aristóteles plantea su estudio del infinito a partir de lo físicamente aprehensible, "parte del estudio del infinito a partir de la naturaleza de la magnitud, para luego argumentar la naturaleza del movimiento y el tiempo" (APONTE, 2008, p. 24).

Para Aristóteles el infinito no puede ser substancia puesto que "si el infinito fuera substancia toda parte del infinito será infinita",[61] y si el infinito fuera substancia entonces, "el todo es mayor que la parte",[62] concluyendo que hay infinitos mas grandes que otros pues el todo es infinito al igual que las partes.

No se puede, entonces, suponer la existencia de un cuerpo infinito, puesto que la misma definición de cuerpo precisa de límites para definirlo, "si en el infinito se rechazan los límites, entonces se estaría rechazando, al mismo tiempo, la existencia del cuerpo (APONTE, 2008, p. 24)".

5.2.2 Del infinito en potencia al infinito en acto: percepción por medio del intelecto

Giordano Bruno aborda la discusión del infinito en oposición a la adoptada por Aristóteles, partiendo de las nuevas posturas teóricas sobre el centro del universo y movimiento de la tierra y demás astros, rechazando la postura que desde tiempos antiguos se tenía entorno al infinito:

> "De esta manera, apoyándose en el heliocentrismo de Copérnico sustenta que todo el sistema aristotélico era falso. Lo anterior produce una ruptura respecto a la concepción griega, según la cual es finito y limitado"[63].

[60] Ibíd., 23.
[61] Ibíd., p. 24.
[62] Ibíd., p. 24.
[63] Ibíd., p. 30.

Lo que distingue la apreciación de Aristóteles con la de Bruno es que este último afirma que el infinito no puede ser aprehensible con los sentidos, al contrario de Aristóteles quien reafirma su postura partiendo de la pregunta ¿Es posible que exista una magnitud sensible que sea infinita?, Bruno afirma:

> -Ningún sentido ve el infinito; a ningún sentido se le puede exigir esa conclusión, porque el infinito no puede ser objeto del sentido. Por eso quien pide conocerlo por medio del sentido se parece a quien pretendiera ver la sustancia y la esencia con los ojos y quien negara la cosa porque no es sensible o visible vendría a negar la propia sustancia y el propio ser… (Bruno citado en APONTE, 2008, p. 31).

Bruno, en contraposición a lo afirmado por Aristóteles, parte de la misma premisa de su antecesor para demostrar su invalidez:

> …si el mundo es finito y fuera del mundo no hay nada, surge entonces el interrogante ¿Dónde está el mundo? O ¿qué lo contiene? A esto, Aristóteles responde que estaría en sí mismo [Ari98, pp. 93-94]. No obstante, esta respuesta no es satisfactoria desde un punto de vista lógico y abre la posibilidad de plantear el siguiente problema: si se piensa que fuera del mundo no hay nada, eso sería el vacio. Un vacio que no tendría límite ni término alguno y solo estaría limitado en su interior. Por lo tanto, Bruno afirma que es más difícil de imaginar algo así, a imaginar que el universo es infinito [Bru93, p. 105], (APONTE, 2008, p. 31).

Para entender la noción de infinito, es necesario según Bruno, movilizarse en el plano de la razón o el intelecto, así mismo, como se imaginan muchas cosas sin poder llegar a un fin, el infinito así mismo se puede construir:

> …así como nuestra imaginación es capaz de avanzar infinitamente, imaginando siempre una extensión más allá de la extensión y un número más allá del número, según una determinada sucesión y –como suele

decirse- en potencia, debemos entender igualmente que Dios entiende en acto una dimensión infinita y un número infinito. Y de este entender se sigue la posibilidad junto con la conveniencia y oportunidad que decimos existe, pues así como la potencia activa es infinita, también es infinito por consecuencia necesaria el objeto de esa potencia… (Bruno citado en APONTE, 2008, p. 32).

Durero manifiesta la naturaleza abstracta de la noción de infinito entendida solo por medio del intelecto o la razón, aunque aclara, no es el tipo de naturaleza que requiere para poder realizar la labor como pintor, debe valerse de las representaciones de dichos objetos los cuales le permiten trazar, dibujar, representar en un determinado plano lo que desee, sin embargo aclara al lector la importancia de los objetos con los que se trabaja, ya sean objetos matemáticos los cuales estan por fuera del contexto del artista, del taller donde se ejecuta dicha actividad.

Duero no espera elaborar un tratado para eruditos en donde se pensaran custiones de tipo matemático abstracto. Para Durero el principal objetivo era fundamentar la práctica del artista a través del método matemático, evitando procesos complejos que terminen por confundir más al artista.

> Su mismo manual de geometría, el *Underweysung der messung* (1525), escrito en lengua vernácula para uso de artistas y artesanos, no es ni una geometría práctica, una de esas recopilaciones de recetas estereotipadas que florecían en la Alemania del siglo XVI, ni un tratado erudito, una geometría deductiva demostrativa, sino una obra singular, fuertemente marcada por la riqueza imaginativa y creadora de Durero (PEIFFER, 2000, p. 7).

5.3 CONSTRUCCIÓN DE LA ESPIRAL DE DURERO: APROXIMACIÓN A LA ESPIRAL LOGARÍTMICA

Hay una construcción en particular que muestra *grosso* modo Alberto Durero en su primer capítulo y llegaría a ser una de las construcciones que lo caracterizaría, ha sido llamada como *la espiral de Durero*. Peiffer señala que es tal vez la primera aparición semejante en matemáticas de una curva que evoca la espiral logarítmica[64] (PEIFFER, 2000, p. 159), *una curva novedosa que desafortunadamente (Alberto Durero), no explora más allá de su formulación inicial* (CARDONA, 2006, p. 38).

Alberto Durero tiene conocimiento de la naturaleza de los objetos matemáticos y enfatiza la dificultad en la práctica del artista de manejar dichos objetos carentes de partes y posición, siendo claro que es necesario utilizar el punto que se pone, la línea que se traza y el plano que limita; de ese mismo modo, la espiral al ser trazada por la línea, también tiene una naturaleza intangible, inconmensurable, infinita. En el siguiente párrafo describe esta espiral sin fin, tal ves de ahí la razón de no ahondar mucho en su respectivo análisis:

> Se puede imaginar una línea eterna que, en continuo desarrollo en torno a un centro y describiendo con su otro extremo espiras cada vez más amplias, nunca tenga fin. Esta línea no se puede hacer a mano por lo infinito de sus magnitudes grandes y pequeñas. Su principio y su final no existen, ni se pueden encontrar, salvo en el entendimiento. No obstante, quiero mostrarla en la medida de lo posible con un principio y un final. Comienzo en un punto *a* y trazo esta línea con arcos de

[64] Una espiral logarítmica, espiral equiangular o espiral de crecimiento es una clase de curva espiral que aparece frecuentemente en la naturaleza. Su nombre proviene de la expresión de una de sus ecuaciones: $\theta = \log_b(r/a)$ El término espiral logarítmica se debe a Pierre Varignon (1654-1722). La espiral logarítmica fue estudiado por Descartes y Torricelli, pero la persona que le dedicó un libro fue Jakob Bernoulli, que la llamó *Spira mirabilis* «la espiral maravillosa». Tomado de http://es.wikipedia.org/wiki/Espiral_logar%C3%ADtmica.

círculo hacia dentro, como si transcurriera hacia un centro, y cuando mas gira en este sentido, acorto en la mitad la separación de la línea. Lo mismo hago al llevar la línea desde a hacia afuera. Cada vez que doy una vuelta, aumento en la mitad la separación de la línea. Así que esta línea, cuanto mas larga es hacia dentro, más se comprime, y cuando más larga hacia fuera, mas se dilata, y nunca tiene fin, ni hacia dentro ni hacia fuera (PEIFFER, 2000, p. 159).

Durero tiene en cuenta la prolongación de la espiral no solo externamente sino también dentro de la misma, no tiene un comienzo o punto de partida, “un centro que le resulta por completo inaprehensible” (Cardona, 2006, p. 38), *la nueva espiral abraza con mayor celeridad las dificultades que encierra el infinito*[65], Cardona muestra detenidamente cual es el proceso de construcción de dicha espiral:

5.3.1 La espiral de Durero: diferencia con la espiral arquimédica

1) A partir de un punto O se traza un cuarto de círculo que empieza en A. Se dibujan los dos radios extremos OA y OC. Hemos decidido restringir el arco de círculo a un cuarto de circunferencia antes de recortar las dimensiones del radio. Lo hacemos libremente para llenar la laguna que deja Durero, pues él no especifica qué tanto hay que dejar girar el arco inicial antes de reducir a la mitad la distancia desde este a su centro transitorio.

2) Se toma la mitad de la medida del radio OC y desde allí se traza un cuarto de círculo que empalme con el arco anterior.

3) Se dibuja el radio que limita el nuevo arco, y se sigue el proceso acortando siempre a la mitad el radio con el que se dibuja el cuarto de círculo. Se hace esto de modo que el nuevo arco empalme con el anterior. Así se puede obtener la curva que se aproxima a un centro indeterminado sin alcanzarlo de ninguna manera, pues en todo momento habrá un segmento (el radio) que se puede bisecar (Cardona, 2006, p. 39).

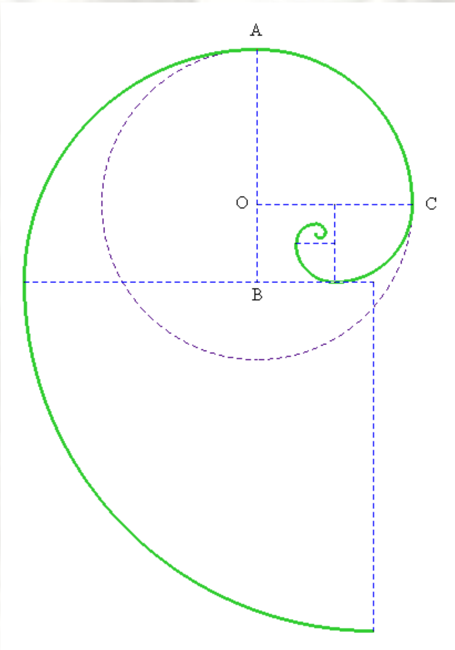


Figura 29. Espiral de Durero (CARDONA, 2006, p. 40).

[65] Ibíd., p. 38.

En este último punto de la construcción, se puede reconocer las dificultades de la misma en las *aporías de Zenón de Elea*[66], filósofo griego nacido en Elea perteneciente a la escuela eleática (¿490-430 a. C.?), quien para apoyar la doctrina de Parménides de que las sensaciones que obtenemos del mundo son ilusorias, y concretamente, no existe el movimiento (física), quiso mostrar que el movimiento encerraba en sí una imposibilidad lógica, en palabras de Cardona señala:

> …no podríamos efectivamente desplazarnos desde un punto A hasta otro punto arbitrario B, pues tendríamos que recorrer inicialmente la mitad del trayecto entre A y B, después la mitad de la mitad de dicho trayecto, a continuación la mitad de la mitad de la mitad del trayecto y así indefinidamente, hasta que tendríamos que reconocer que nunca alcanzaríamos la meta deseada[67].

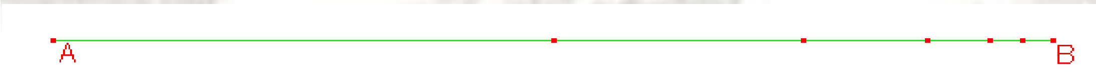


Figura 30. Representación de la aporía de Zenón

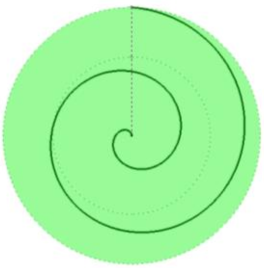
Al afirmar en su construcción que *cuando mas gira en este sentido, acorto en la mitad la separación de la línea*[68], afirma que la línea de donde surge un arco de la espiral es la mitad del segmento de donde surge el anterior arco, y observando por fuera el trazo de los arcos, éstos son el doble del segmento donde surgió el arco anterior, repitiéndose este proceso infinitas veces, como en el caso de la aporía de Zenón se tiene como resultado el trazo infinito de la espiral que se construye a partir de la bisección infinita de un segmento.

¿Por qué Alberto Durero no se detuvo a construir detalladamente esta aproximación de la espiral como anteriormente lo hizo con la aproximación a la espiral de Arquímedes? ¿Qué tiene de particular la formulación de esta espiral?

[66] Ibíd., p. 38.
[67] Ibíd., p. 38.
[68] Ibíd., p. 39.

La diferencia entre la espiral llamada espiral de Durero y las demás espirales construidas por el artista radica en la teoría que evoca a las mismas, puesto que la primera surge de la aproximación a la teoría de media y extrema razón o también conocida como *razón áurea o número de oro* y la segunda se genera a partir de las aproximaciones realizadas por el autor a la teoría de las espirales dada por Arquímedes.

Figura 31. Espiral Arquimédica.



Al comienzo de su tratado, las espirales están inscritas dentro de una circunferencia y el espacio entre cada espira era igual, a excepción del primer arco donde se origina, variando detalles de la espiral como la cantidad de vueltas que se quiera de la misma, los adornos en ella, etc. Durero muestra esta nueva espiral la cual *crece y decrece en progresión geométrica* (Cardona, 2006, p. 38), es decir, cada arco con el que se va construyendo parte de un patrón semejante más no congruente en todos los casos, variando el tamaño de los arcos y el espacio entre cada uno de ellos, no solo extendiéndose hacia fuera como en las aproximaciones anteriores de la espiral, sino también internamente, *La diferencia reside en su ritmo de expansión* (CARDONA, 2006, p. 38).

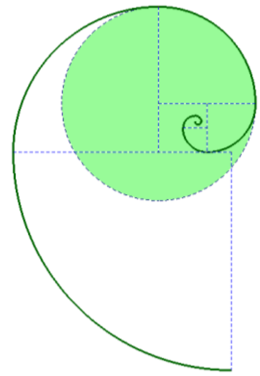


Figura 32. Espiral de Durero

CAPÍTULO VI

LA ESPIRAL DE DURERO: RELACIÓN CON DIFERENTES TEORÍAS.

Imagen 17. Cabeza de Jesús a los 12 años. 1506, 27,5 x 21,1 cm. Dibujo[69].

6.1 INTRODUCCIÓN

La relación entre la espiral de Durero y otras teorías del arte y la matemática radica en una proporción numérica implícita en la naturaleza, utilizada en la construcción del Partenón, utilizada en el símbolo característico de los

[69] Alberto Durero desafió a todos los pintores de Venecia con su Fiesta del Rosario, un perfectísimo óleo que según él mismo terminó en cinco meses. Pero el desafío fue mayor cuando presentó a Jesús entre los doctores, óleo que según él terminó en cinco días, un magistral ejemplo de gestualidad y psicología. Pese a lo que Durero dice, el cuadro contó con estudios previos, que añadidos a los supuestos cinco días de la pintura, alargan un tanto el tiempo de incubación de la obra. Entre los estudios previos tenemos esta hermosa cabeza adolescente, que es el rostro de Jesús con 12 años, en la posición definitiva que tendrá en el cuadro. Tomado de http://www.artehistoria.jcyl.es/genios/cuadros/3986.htm.

pitagóricos y desarrollada a lo largo de los libros de *Los Elementos* de Euclides, entre otros, esta es conocida como la razón áurea o divina proporción.

En este capítulo se muestra la relación intrínseca en todas estas teorías así como el uso de La espiral de Durero para poder componer a partir de una divina proporción una representación pictórica, tomando como ejemplo el retrato de Giovanna Tornabuoni de 1490.

6.2 EL NÚMERO DE ORO[70] EN LA ESPIRAL DE DURERO

Alberto Durero muestra una espiral la cual crece tanto interna como externamente prolongándose hacia el infinito en ambas direcciones; la condición para su construcción radica en que cada arco de la espiral que esté internamente después del punto a de origen, es la mitad del arco anterior, así mismo, para los arcos externos al punto inicial a, éstos son el doble del arco anteriormente construido, Durero no hace explícita algún tipo de relación entre la construcción de dicha espiral y la relación entre segmentos ya explorada por los griegos conocida como razón áurea, sin embargo, son muchas las relaciones que actualmente se pueden tener de dichas construcciones. ¿En qué consiste este método y qué relación tiene la construcción de la espiral de Durero con dicha técnica?

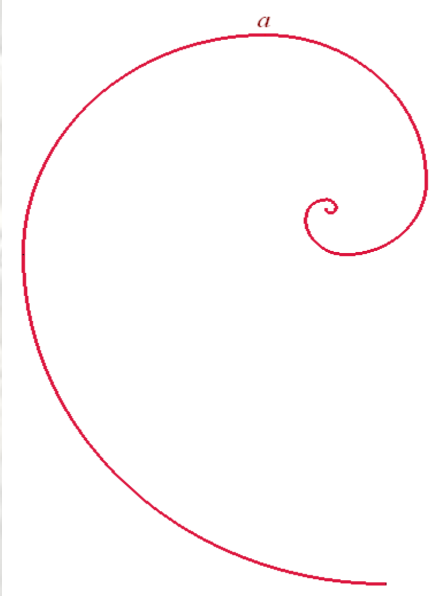
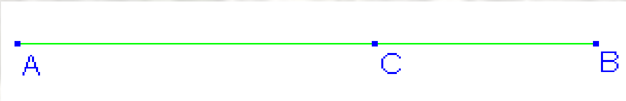


Figura 33. Espiral de Durero, realizada por el artista.

[70] El numero áureo o de oro (también llamado numero plateado, razón extrema y media razón áurea, razón dorada, media áurea, proporción áurea y divina proporción representado por la letra griega φ (fi) (en minúscula) o Φ (fi) (en mayúscula), es un número irracional. Se trata de un número algebraico irracional (decimal infinito no periódico) que posee muchas propiedades interesantes y que fue descubierto en la antigüedad, no como "unidad" sino como relación o proporción entre segmentos de rectas. Tomado de http://es.wikipedia.org/wiki/N%C3%BAmero_%C3%A1ureo.

Euclides define esta relación en el libro VI de Los Elementos:

> Se dice que una recta ha sido cortada en extrema y media razón cuando la recta entera es al segmento mayor como el (segmento) mayor es al menor (VEGA, L. 1991, 56).



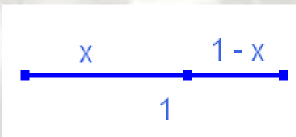
$$\frac{AB}{AC} = \frac{AC}{CB}$$

Al cortar un segmento en un determinado punto C, en donde se halle una relación tanto del segmento con su parte mayor y esta ultima parte con la parte menor, se tiene como resultado la división en extrema y media razón del segmento. ¿Qué medida debe tener dicho segmento? ¿Por qué hay una parte mayor y otra menor? ¿Por qué no se puede hablar del punto medio del segmento o de partes iguales? ¿Qué tipo de relación se encuentra en esta particular división y cual es su relación con la espiral de Durero?

6.3 DIVISIÓN DE UN SEGMENTO EN EXTREMA Y MEDIA RAZÓN

Euclides demuestra la relación existente entre dicho segmento y sus partes, partiendo de un segmento unitario:

Se toma un segmento de longitud uno para dividirlo en extrema y media razón, la parte mayor que resultó de dicha división se distingue con la letra x, puesto que no se conoce su longitud y la parte menor es el segmento 1 – x puesto que es la diferencia del segmento con la parte mayor:



La relación en extrema y media razón del segmento unitario sería:

$$\frac{1}{x} = \frac{x}{1-x}$$

Resolviendo la igualdad se llega a la ecuación cuadrática:

$$\frac{1}{x} = \frac{x}{1-x} \rightarrow 1 - x = x^2 \rightarrow x^2 + x - 1 = 0$$

Al tomar la solución positiva de la ecuación puesto que la relación es entre magnitudes tenemos que $x = \frac{-1+\sqrt{5}}{2}$ y al reemplazar en la relación de dichas partes con el segmento unitario, se tiene que:

$$\frac{1}{x} = \frac{1}{\frac{-1+\sqrt{5}}{2}} = \frac{2}{-1+\sqrt{5}} = \frac{2}{(-1+\sqrt{5})}\frac{(-1-\sqrt{5})}{(-1-\sqrt{5})} = \frac{-2-2\sqrt{5}}{-4} = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$$

$$= 1.618\ldots = \varphi$$

$$\frac{x}{1-x} = \frac{\frac{-1+\sqrt{5}}{2}}{1-\left(\frac{-1+\sqrt{5}}{2}\right)} = \frac{(-1+\sqrt{5})}{(3-\sqrt{5})}\frac{(3+\sqrt{5})}{(3+\sqrt{5})} = \frac{-3-\sqrt{5}+3\sqrt{5}+5}{9-5} = \frac{2+2\sqrt{5}}{4}$$

$$= \frac{1+\sqrt{5}}{2} = 1.618\ldots = \varphi$$

Dando como resultado en ambas relaciones; el segmento con su parte mayor y la parte mayor con la parte menor, el número de oro o razón áurea.

$$x = \frac{1+\sqrt{5}}{2} = 1.618\ldots = \varphi$$

6.4 EL RECTÁNGULO ÁUREO

La razón áurea tiene sus orígenes en la antigua Grecia, tomando como ejemplo el trabajo de Fidias (Atenas, hacia 490 AC. – Olimpia, h. 431 AC.), escultor, pintor y arquitecto de la antigua Grecia, quien utilizó los principios de esta razón en la construcción del Partenón:

Imagen 18. El Partenón y la razón áurea.

El Partenón está inscrito en un rectángulo el cual se divide en media y extrema razón, la base de este rectángulo es el segmento al cual se le ha dividido teniendo en cuenta esta proporcionalidad. La construcción de dicho rectángulo áureo se puede realizar de la siguiente manera:

Se tiene sobre una recta el segmento AB y se construye sobre él, un cuadrado ABCD. Se halla el punto medio del segmento AB y tomando como centro este punto y con amplitud hasta D, trazo un arco que cruce la recta que pasa por el segmento AB, este es el punto H, vértice del rectángulo áureo. Trazando una perpendicular por H y otra por D, obtenemos un punto de intersección E el cual forma el rectángulo áureo CAHE.

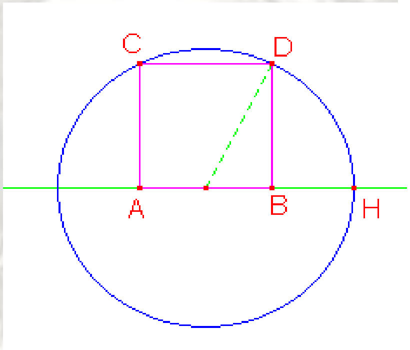


Figura 34. Construcción de un rectángulo áureo a partir del segmento AB.

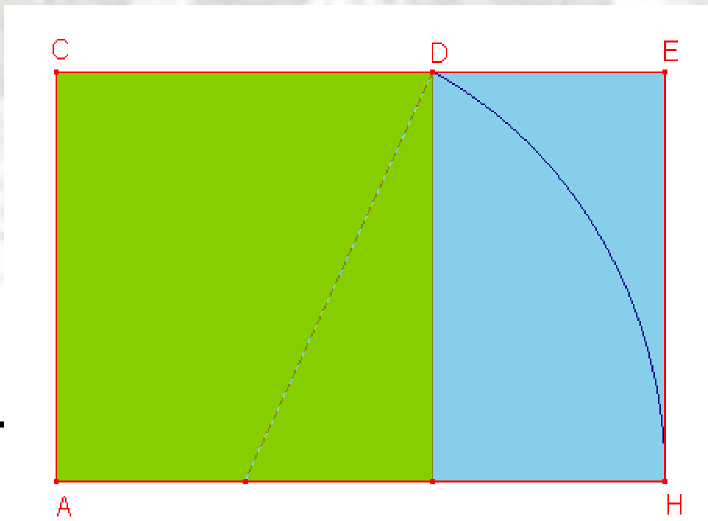
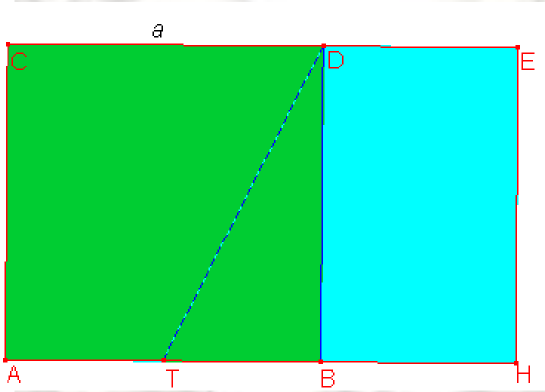


Figura 35. Construcción de un rectángulo áureo

La demostración del por qué el rectángulo ACEH es áureo a continuación:



$$DT^2 = DB^2 + \left(\frac{1}{2}a\right)^2$$

$$TH^2 = a^2 + \left(\frac{1}{2}a\right)^2 = \frac{5}{4}a^2$$

$$TH = \frac{\sqrt{5}}{2}a$$

$$AH = \frac{\sqrt{5}}{2}a + \frac{1}{2}a = a\left(\frac{\sqrt{5}+1}{2}\right)$$

$$HE = a$$

$$\frac{AH}{HE} = \frac{a\left(\frac{\sqrt{5}+1}{2}\right)}{a}$$

$$\frac{AH}{HE} = \frac{\sqrt{5}+1}{2}$$

6.5 EL TEOREMA DE PITÁGORAS Y EL NÚMERO ÁUREO

Muchas son las formas como se puede dividir un segmento cualquiera teniendo en cuenta esta condición, para un primer ejemplo se necesita regla, compás y *la aplicación del teorema de Pitágoras*.

Se tiene el segmento AC desde el cual se traza una perpendicular DC la cual es igual a la mitad de AC, se unen con un segmento los puntos AD. Luego, se traza un arco DC que cruce el segmento AD en el punto B', y con abertura AB' se traza un arco que cruce AC en el punto B, el cual muestra la división del segmento AC en extrema y media razón, cumpliéndose que:

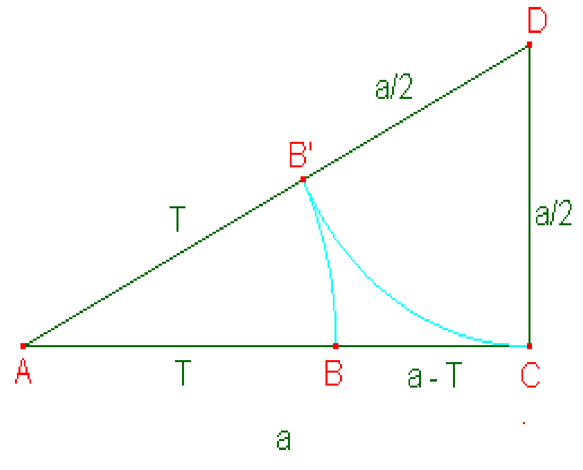


Figura 36. Relación entre teorema de Pitágoras y número áureo

Por el teorema de Pitágoras se hallará la hipotenusa quien es a su vez los segmentos T y a/2:

$$h^2 = c^2 + c^2$$

$$h^2 = \left(\frac{a}{2}\right)^2 + a^2$$

$$h^2 = \frac{a^2}{4} + a^2$$

$$h^2 = \frac{5a^2}{4}$$

$$h = \frac{\sqrt{5}}{2}a$$

$T + \frac{a}{2} = \frac{\sqrt{5}}{2}a$ Despejando T se tiene:

$$T + \frac{a}{2} = \frac{\sqrt{5}}{2}a$$

$$T = \frac{\sqrt{5}}{2}a - \frac{a}{2}$$

$$T = \frac{a}{2}\left((\sqrt{5}) - 1\right)$$

El segmento a puede tomar cualquier valor y a partir de este se puede hallar el valor de a/2 y T, permitiendo verificar la relación de dichos segmentos:

$$a = 1$$

$$T = \frac{\sqrt{5} - 1}{2}$$

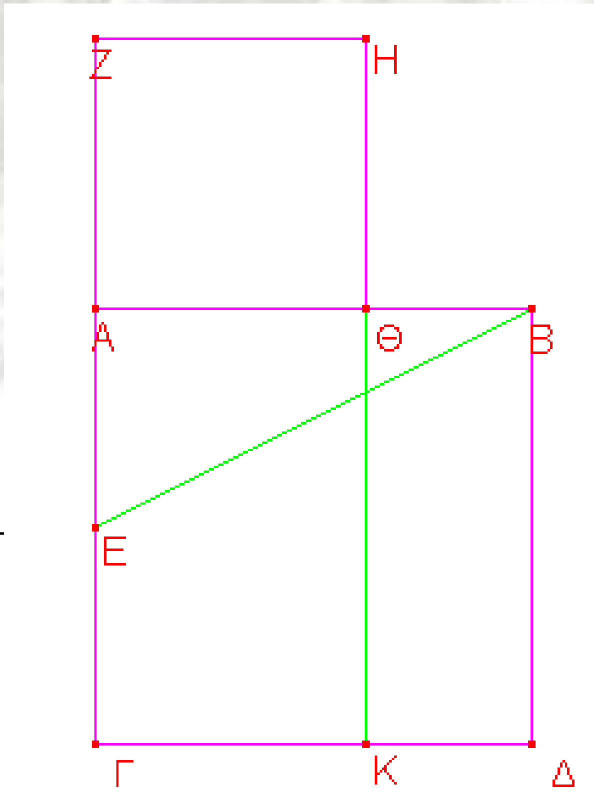
Para comprobar con lo anteriormente demostrado (pág. 80), tenemos el segmento unitario y la parte mayor igual a la solución cuadrática positiva, se tiene que la relación que guarda el segmento a, con el segmento mayor AB, es la misma razón que la que tiene el segmento mayor con el segmento menor BC, dando como relación el numero áureo Φ.

$$\frac{AC}{AB} = \frac{AB}{BC} = \frac{\sqrt{5} + 1}{2} = 1.68 \ldots = \varphi$$

6.6 EUCLIDES Y LAS CONSTRUCCIONES ALREDEDOR DE LA RELACIÓN DE EXTREMA Y MEDIA RAZÓN

A lo largo del libro los *Elementos* de Euclides se trabaja también con esta relación, iniciando con la proposición 11 del libro II: *Dividir una recta dada de manera que el rectángulo comprendido por la (recta) entera y uno de los segmentos sea igual al cuadrado del segmento restante* (VEGA, L. 1991, p. 108):

> Sea AB la recta dada.
> Así pues, hay que dividir AB de modo que el rectángulo comprendido por la (recta) entera y uno de los segmentos sea igual al cuadrado del segmento restante.



> Pues constrúyase a partir de AB [I, 46] y divídase en dos AΓ por el punto E y trácese BE y prolónguese ΓA hasta Z, y hágase EZ igual a BE, y constrúyase a partir de AZ el cuadrado ZΘ, y prolónguese HΘ hasta K.
>
> Digo que AB ha sido cortada en Θ, de modo que hace el rectángulo comprendido por AB, BΘ igual al cuadrado AΘ.
> Pues como la recta A ha sido dividida en dos por el (punto) E y se le ha añadido ZA, entonces el

rectángulo comprendido por ΓZ, ZA junto con el cuadrado de AE es igual al cuadrado de EZ [II, 6]. Pero EZ es igual a EB; por lo tanto, el (rectángulo comprendido) por ΓZ, ZA junto con el (cuadrado) de AE es igual al cuadrado de EB. Pero los (cuadrados) de BA, AE son iguales al (cuadrado) de EB, porque el ángulo correspondiente a A es recto [I, 47]; por tanto, el (rectángulo comprendido) por ΓZ, ZA junto con el (cuadrado) de AE es igual a los cuadrados de BA, AE.

Figura 37. Construcción de la división de un segmento en extrema y media razón.

Quítese de ambos el (cuadrado) de AE; entonces el rectángulo restante comprendido por ΓZ, ZA es igual al (cuadrado) de AB. Ahora bien, el (rectángulo comprendido) por ΓZ, ZA, es ZK: PORQUE AZ es igual a ZH; pero el cuadrado de AB es AΔ; por lo tanto, ZK es igual a AΔ. Quítese de ambos AK; entonces el (cuadrado) restante ZΘ es igual a ΘΔ. Y ΘΔ es el (rectángulo comprendido) por AB, BΘ: porque AB es igual a BΔ; pero ZΘ es el cuadrado de AΘ; por tanto, el rectángulo, el rectángulo comprendido por AB, BΘ es igual al cuadrado de ΘA.

Por consiguiente, la recta dada AB ha sido dividida en Θ de modo que hace el rectángulo comprendido por AB, BΘ igual al cuadrado de ΘA. Q. E. F. (VEGA, L. 1991, p. 108-109).

6.6.1 PENTALFA Y SUS MÚLTIPLES RELACIONES CON Φ

A lo largo del libro XIII Euclides construye a partir de la división del segmento en extrema y media razón diferentes proposiciones que enmarcan la teoría de dicha proporción, mostrando en la proposición 8 la construcción de dicha relación en una figura reconocida como *el pentágono estrellado o pentalfa*, símbolo de la escuela pitagórica y por medio del cual se reconocían entre sí los miembros de dicha escuela.

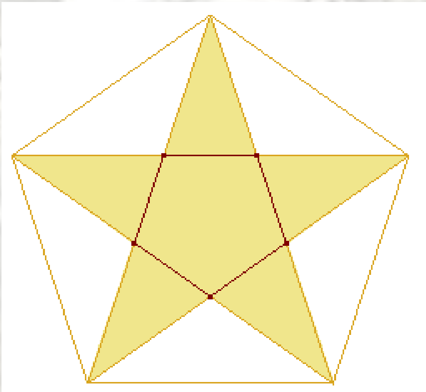


Imagen 19. Pentágono estrellado.

Cada línea que compone la estrella da como resultado la razón áurea, siendo un claro ejemplo de una de los tantos símbolos que tanto para matemáticos como artistas, estaba permeado por dicha relación, no solo era un conocimiento a la luz de los matemáticos, es un orden inherente a la naturaleza y a la estructura de las cosas, queriendo el artista y propio matemático nutrir su arte con dicha armonía expuesta en todas las cosas, retomando diferentes investigaciones para el manejo y perfeccionamiento de diferentes técnicas, como en el caso de Durero y su espiral.

Si en un pentágono equilátero y equiangular, unas rectas subtienden dos ángulos sucesivos, se cortan entre sí en extrema y media razón y sus segmentos mayores son iguales al lado del pentágono.

Digo que cada una de ellas queda cortada en extrema y media razón por el punto Θ, y que sus segmentos mayores son iguales al lado del pentágono.
Circunscríbase, pues, en torno al pentágono ΑΒΓΔΕ, el circulo ΑΒΓΔΕ. Y como las dos rectas ΕΑ, ΑΒ son iguales a las dos (rectas) ΑΒ, ΒΓ y comprenden ángulos iguales, entonces, la base ΒΕ es igual a la base ΑΓ, y el triángulo ΑΒΕ es igual al triangulo ΑΒΓ y los ángulos restantes, aquellos a los que subtienden los lados iguales, serán también iguales respectivamente [I 4].

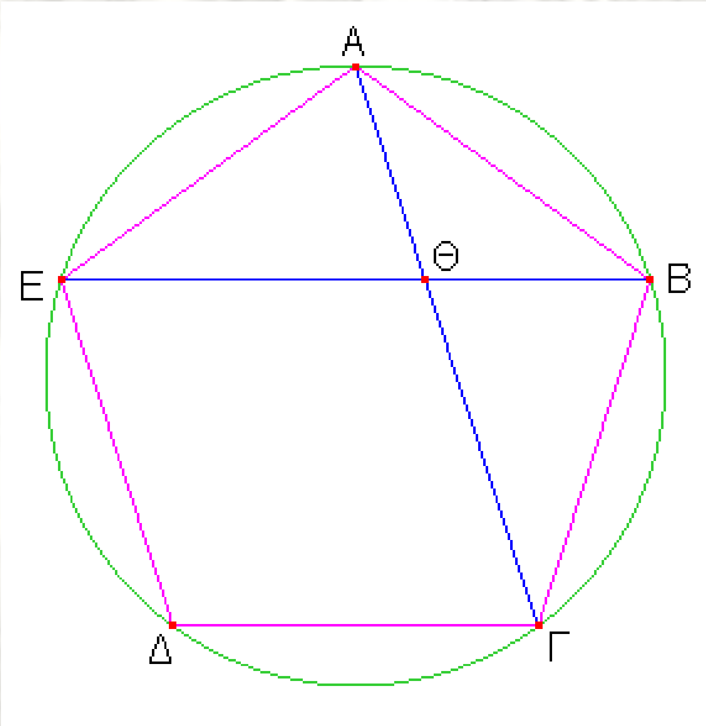


Figura 38. Demostración de la relación de extrema y media razón del pentalfa.

Entonces el ángulo ΒΑΓ es igual al ángulo ΑΒΕ; luego el (ángulo) ΑΘΕ es el doble del (ángulo) ΒΑΓ, porque la circunferencia ΕΔΓ es también el doble de la (circunferencia) ΓΒ [III 28, VI 33]; entonces el ángulo ΘΑΕ es igual al (ángulo) ΑΘΕ; de modo que también la recta ΘΕ es igual a la (recta) ΕΑ, es decir, es igual a la recta ΑΒ [I 6]. Y como la recta ΒΑ es igual a la recta ΑΕ, también el ángulo ΑΒΕ es igual al (ángulo) ΑΕΒ [I 5].

Pero se ha demostrado que el ángulo ΑΒΕ es igual al ángulo ΒΑΘ. Luego el ángulo ΒΕΑ también es igual al ángulo ΒΑΘ. Y el ángulo ΑΒΕ es común a los dos triángulos ΑΒΕ y ΑΒΘ; entonces el ángulo restante ΒΑΕ es igual al (ángulo) restante ΑΘΒ [I 32]; luego el triangulo ΑΒΕ tiene sus ángulos iguales a los del (triángulo) ABΘ; por tanto, proporcionalmente, como EB es a BA, así AB a BΘ [VI 4].

Pero BA es igual a EΘ; entonces, como BE es a EΘ, así EΘ a ΘB. Pero BE es mayor que EΘ; luego EΘ es mayor que ΘB [V 14]. Por tanto, BE queda cortada en extrema y media razón por el punto Θ, y su segmento mayor ΘE es igual al lado del pentágono. De manera semejante demostraríamos que AΓ también queda cortada en extrema y media razón por el punto Θ, y que su segmento mayor ΓΘ es igual al lado del pentágono. Q. E. D (VEGA, L. 1991, p. 325).

6.7 EL RETRATO DE GIOVANNA TORNABUONI: APLICACIÓN DE LA ESPIRAL DE DURERO Y OTRAS TÉCNICAS EN LA COMPOSICIÓN DE UNA PINTURA.

Giovanna, nacida del 18 de diciembre de 1468, era la octava hija de Maso di Luca degli Albizzi y de Caterina Soderini. Recibió el tipo de educación que se consideraba propio de una joven de su categoría social. El acontecimiento más importante de su vida fue su matrimonio con Lorenzo Tornabuoni (1468-1497), heredero de una influyente familia vinculada a los Médicis. El 11 de octubre de 1487 nació Giovannino, primer hijo de la joven pareja pero, desgraciadamente, Giovanna murió al año siguiente, cuando contaba diecinueve años de edad, de resultas de su segundo embarazo. La enterraron en la iglesia de Santa Maria Novella el 7 de octubre de 1488.

Imagen 20. Retrato de Giovanna Tornabuoni. Óleo sobre madera 1490

Giovanna pervivió para la posteridad gracias a Domenico Ghirlandaio, a quien hacia 1489 le encargaron que realizara un retrato póstumo destinado a ser colocado en un lugar de honor en el Palazzo Tornabuoni. Ghirlandaio subrayó tres aspectos de la personalidad de la modelo —su belleza, su papel como esposa de Lorenzo y su virtud y devoción (THYSSEN-BORNEMISZA, 2010).

Este artista tuvo en cuenta para la realización de la pintura métodos con los cuales ya estaban familiarizados los artistas del Renacimiento y desde la antigüedad, permitiendo componer con medidas exactas las figuras o formas dentro del cuadro. El primero de los métodos utilizados por Doménico Ghirlandaio es la razón áurea o divina proporción, el retrato de Giovanna es muestra fiel de que dichos métodos casan perfectamente en la figura, situando cada elemento del espacio pictórico en un determinado orden.

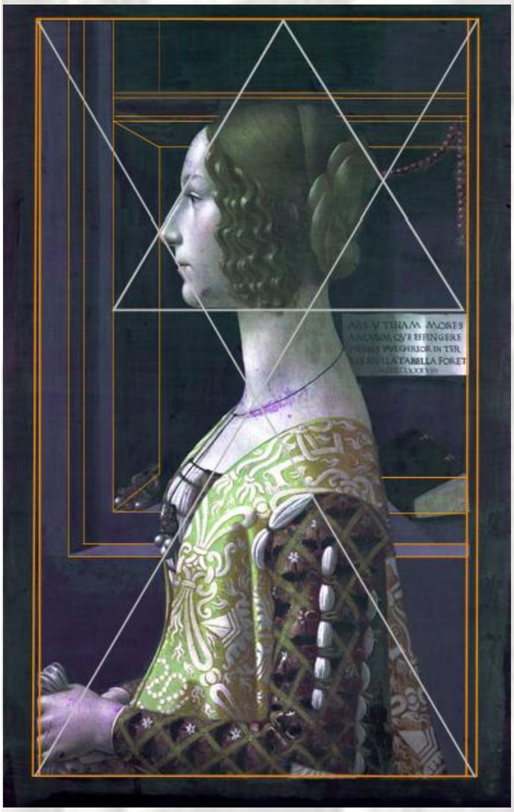


Imagen 21. Retrato Giovanna Tornabuoni, composición triangular.

6.7.1 Composición del cuadro a partir de triángulos isósceles.

Ghirlandaio distribuye el espacio con figuras geométricas estableciendo relación entre armonía y proporción matemática (THYSSEN-BORNEMISZA, 2010).

Para ello, mediante incisiones perimetrales, delimita la extensión con respecto al soporte y poder trabajar así con el espacio que va a utilizar para la composición[71]. De estas incisiones parten dos diagonales que se cruzan en aspa y que centran la figura definiendo perfectamente la posición de la cabeza y del busto. Nuevas líneas incisas sitúan la hornacina y de ellas parten tres ejes que forman un triángulo equilátero en el que Ghirlandaio sitúa el movimiento de la cabeza: la inclinación de la nariz respecto del ojo.

Ghirlandaio sitúa espacialmente la figura trazando ejes geométricos que definen el movimiento y el perfil de la silueta. La imagen de Giovanna la ubica en un triángulo isósceles que parte de la zona superior de la pintura. Uno de sus lados determina el límite de la manga y el perfil del pecho. El otro lado del triángulo define la posición erguida de la figura. Previamente ejecuta una primera línea que va desde el nacimiento del cabello hasta la manga del vestido y que pasa por el perfil del busto que realizó en el dibujo preliminar que luego rectificó. La hornacina del fondo está definida mediante incisiones que marcan los límites y sirven como referencia para la

[71] En este caso son las líneas rojas que se muestran en el cuadro.

disposición de los elementos decorativos. Mediante la sucesión de líneas y de elementos geométricos logra una perfección en las formas y una composición equilibrada (THYSSEN-BORNEMISZA, 2010).

6.7.2 Composición por círculos: medallones renacentistas.

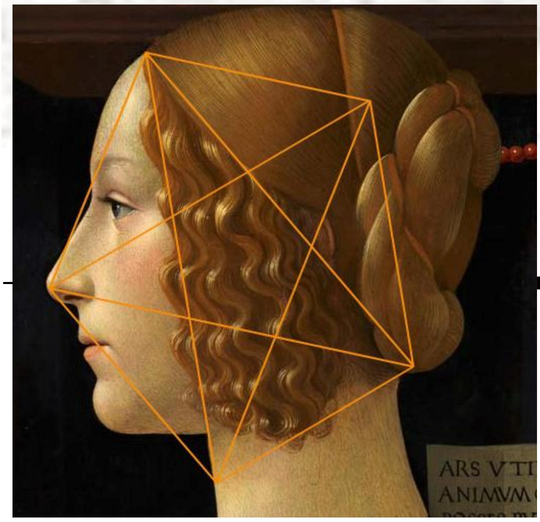
En esta composición se encuentra relación con el retrato de la mujer y los medallones renacentistas, basando el pintor en el medallón del busto de Giovanna realizado en conmemoración de sus esponsales con Lorenzo Tornabuoni.

El primer circulo parte de las cintas del corpiño de la figura. Este círculo muestra la relación de la pintura con la moneda y hace referencia a su diseño pero en una posición invertida. El resto de los círculos tiene como punto de referencia la cinta del peinado de la figura y están conectados entre sí en perfecto equilibrio con la composición (THYSSEN-BORNEMISZA, 2010).

Imagen 22. Retrato de Giovanna Tornabuoni, composición circular.

6.7.3 Composición con la estrella pentagonal o pentalfa

En el retrato de Giovanna, su rostro está relacionado con la proporción numérica o razón áurea. Esta relación descubierta desde los pitagóricos e inmersa en la naturaleza, crea una conexión entre lo elaborado por el hombre-el cuadro, y lo elaborado por dios, lo divino-la naturaleza, era sumamente especial

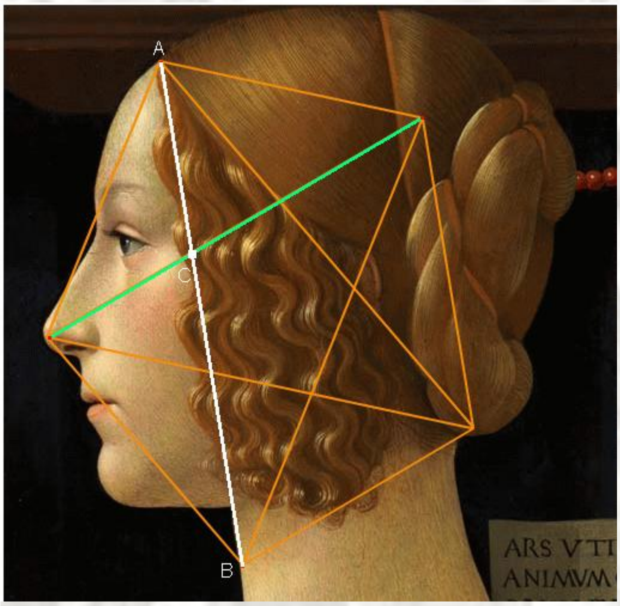


poder elaborar una pieza pictórica con las proporciones de dicha relación:

Imagen 23. Rostro Giovanna Tornabuoni, composición a partir del pentágono pitagórico.

> Aplicando el número aúreo en el rostro de Giovanna se observa cómo encaja perfectamente en la simetría pentagonal. Los puntos de unión de los segmentos son geométricamente proporcionales (THYSSEN-BORNEMISZA, 2010).

La línea que une el cuello con el nacimiento del cabello en la frente está dividida por dos líneas que terminan en la nariz, estas líneas dividen el primer segmento en extrema y media razón, esto quiere decir que la relación con la totalidad del segmento y las partes mayor y menor del mismo es igual a φ, o a la razón divina.



$$\frac{AB}{BC} = \frac{BC}{AC} = \varphi$$

Imagen 24. Razón de extrema y media razón en el retrato de Giovanna Tornabuoni.

6.7.4 Composición con la espiral de Durero

La construcción de la espiral de Durero tiene como característica que sus arcos o espiras parten y culminan en los extremos opuestos de un cuadrado, siendo la base de este cuadrado la parte mayor del segmento dividido en extrema y media razón.

Todo parte de un cuadrado cualquiera y un punto medio m de su base CB, teniendo como centro este punto y uno de los vértices superiores como extremo, se traza una circunferencia la cual intersecta la base prolongada en el punto A. El segmento AB, es un segmento dividido en extrema y media razón por el punto C quien anteriormente era un vértice del cuadrado.

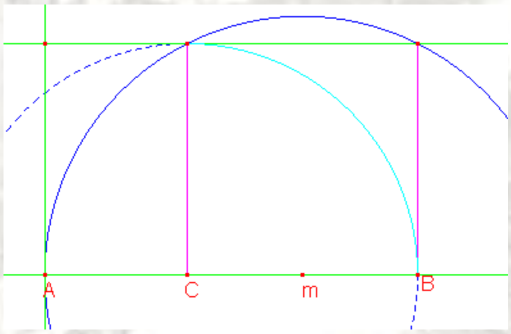
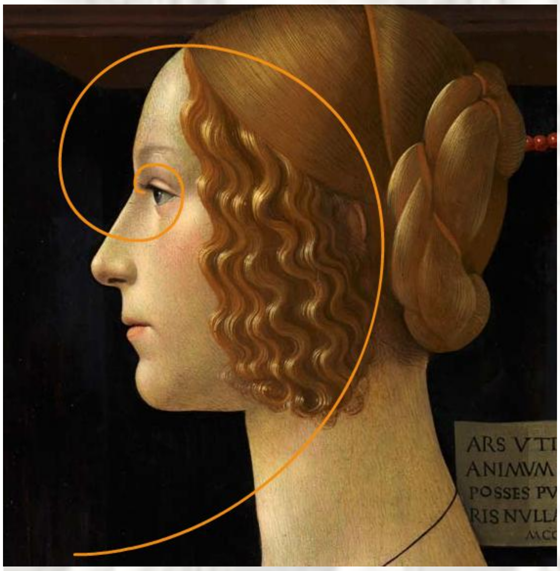


Figura 39. Construcción rectángulo áureo.



Se señala una relación entre la espiral de Durero y el retrato de Giovanna puesto que al tener una relación con la razón de oro, la espiral de Durero al ser construida bajo esta relación, de igual forma tiene cabida dentro de esta imagen.

Imagen 25. Composición a partir de la espiral de Durero del rostro de Giovanna Tornabuoni

Las relaciones giran en torno al rostro de la mujer, como en el ejemplo anterior, el ojo es el punto desde donde parte esta proporción numérica, para luego distribuirse de buena forma por todo el rostro de Giovanna.

Para la obtención de la espiral logarítmica se desarrollan una sucesión de rectángulos áureos unidos mediante un arco. Aplicando el patrón de la espiral a la obra de Ghirlandaio se observa cómo se distribuye la figura en el espacio. Ordena los elementos en función de un eje y los distribuye de manera ordenada. Todas las multiplicaciones geométricas están recogidas en un todo unitario que es la obra (THYSSEN-BORNEMISZA, 2010).

Ordena el rostro del retrato de tal forma que la parte inferior de su rostro se encuentre en el cuadrado más grande, siguiendo con su cabello y en el próximo cuadrado se ubica su frente, para luego seguir con el tabique y terminar con sus ojos, su mirada hacia el infinito como un mensaje implícito que transmite la espiral de Durero.

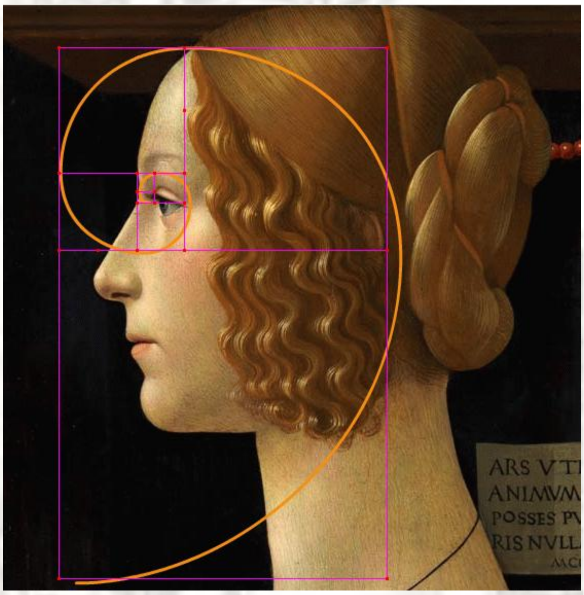


Imagen 26. Composición a partir de la espiral de Durero y los rectángulos áureos del rostro de Giovanna Tornabuoni.

ALGUNAS REFLEXIONES EN TORNO A LA RELACIÓN MATEMÁTICAS, ARTE Y ENSEÑANZA

1. Alberto Durero crea un tratado en donde manifiesta según él, los aspectos que como artista se deben tener en cuenta en la práctica de sus oficios, pero ¿Qué distingue el tratado de Durero puesto que su geometría no es demostrativa ni deductiva? Peiffer señala:

> En efecto, la geometría de Durero no es demostrativa, su estructura no es deductiva y el orden de exposición no siempre parece coherente a los ojos de un matemático. Pero tampoco es una simple compilación, ni una geometría práctica, aunque por su forma prescriptiva tenga algo que ver con ello. Mientras que los manuales prácticos redactados en alemán se centran en los problemas de medidas y mediciones, Durero busca, como ha dicho Marshall Clagett de Leonardo da Vinci, «soluciones gráficas a problemas de construcción geométrica», problemas provenientes de las artes y los oficios (PEIFFER, 2000, p. 113).

Durero no solo se conformó con mostrar unos procesos que debía seguir el artista o las herramientas a utilizar para poder ejecutar bien su labor. Su geometría trata de ser exacta en la medida en que persigue la fidelidad en las formas que lo rodean, aún de los artefactos matemáticos, su trabajo es el de poder crear, elaborar un mundo el cual no se diferencie mucho de la realidad, puesto que al contrastar estas dos representaciones, la exactitud en su oficio radica en poseer mínimos detalles diferentes del mundo natural que le rodea.

No solo busca esa exactitud frente al trabajo del pintor a través de la geometría, de igual forma, estimula al artista a indagar en el trabajo desarrollado en su tratado "como el buen pedagogo que es, incita a sus lectores a intervenir, a llevar más lejos sus investigaciones y a variar las formas discretas"[72].

2. La relación que como artista trata de mostrar entre la matemática y el arte tiene que ver con el nivel al que quiere llevar su práctica de taller y cómo, a partir de esta disciplina, la pintura va nutriendo y consolidando una estructura teórica propia. El ideal de Durero es poder vislumbrar la pintura como un arte liberal gracias a una de las artes del *quadrivium* como lo es la geometría. Peiffer señala:

> Pocos satisfechos con su status social, artistas como Durero, o Leonardo en Italia, intentan hacer que se reconozca la pintura como arte liberal. Fundamentar su arte sobre las reglas exactas de la geometría les parece el medio mas seguro para llevar a cabo la transformación de la pintura, considerada como un trabajo manual en arte del quadrivium (PEIFFER, 2000, p. 23).

El interés del artista era poder dar estatus a las prácticas de taller al igual que el estatus del cual gozaban prácticas como la arquitectura o la música, quien por su relación con la matemática les permitía tener un reconocimiento no solo en el medio de los artistas sino en todo aquel contexto en que se movieran sus representantes.

3. Michel Emmer distingue las diferentes disciplinas como facetas las cuales permiten diferenciar todo tipo de conocimiento. Estas facetas son

[72] Ibíd., p. 113.

necesarias mas no deben ser barreras que impidan el poder relacionar diferentes áreas del conocimiento unas con otras, Emmer afirma:

> Facetas que debemos distinguir porque la naturaleza humana, el lenguaje humano necesita, para ser claro y no ambiguo, fijar cada vez ciertas referencias locales y especializadas. Pero, al mismo tiempo, no debemos encerrarnos en la especialización, encerrarnos en la matemática, encerrarnos incluso en una rama de la matemática si no queremos esterilizar nuestra creatividad (EMMER, 2005, p. 3).

Durero como artista, recurre a la geometría, la cual le permite enriquecer su labor dentro del contexto de las artes, él es consciente del carácter abstracto de las matemáticas, sin embargo, recurre a ellas en busca del sustrato concreto, de esa representación de los objetos matemáticos para aplicarlo a su oficio, "su andadura va de lo abstracto a lo concreto, fijando las definiciones abstractas de objetos matemáticos en operaciones concretas de construcción gráfica, efectuadas en un número determinado de pasos, (PEIFFER, 2000 p. 59)". Para Durero el arte y la matemática son tipos de conocimiento en donde se pueden encontrar múltiples relaciones beneficiándose de dicha relación en la construcción de la teoría en la pintura, Emmer señala:

> …si la matemática es creadora de belleza y es la destilación más pura del pensamiento exacto, pretenda aportar los instrumentos, además de a las demás disciplinas científicas, también a las artes; y que, en consecuencia, sea posible mediante la matemática elaborar una teoría científica de las artes que tenga sus mismas características de exactitud y universalidad (EMMER 2005, p. 3).

4. La relación entre la matemática y el arte no solo se evidencia en la época llamada El Renacimiento, más si fue una de las época en donde esta relación empezó a ser más evidente en todo trabajo tanto de artistas como de matemáticos:

> Como se ha visto, la presencia de posibles correlaciones entre matemática y arte no es un fenómeno limitado sólo al Renacimiento (EMMER, 2005, p. 5).

Hay momentos en que los lazos de esta relación se debilitan y muchas veces no se pueden apreciar, Emmer afirma que esto se debe a que los artistas desconocen en absoluto las matemáticas y solo se remontan a momentos como la antigua grecia y el arte renacentista. Si para los artistas y matemáticos, esta ciencia no se compone de un proceso que de igual forma es también creativo, no se puede observar una relación entre dichos conocimientos, que permiten la retroalimentación de cada oficio.

> «Como en las artes, cada detalle de la obra final no se descubre sino que se compone. El proceso creativo debe, obviamente, producir una obra que posea diseño, armonía y belleza. Estas cualidades también están presentes en la creación matemática (Kline citado en EMMER, 2005, p. 2).»

5. De igual forma la matemática se enriquece de dicha relación con las artes, Mandelbrojt señala:

> «La intuición inicial del matemático o del artista es libre, libre de la presión de lo real que pesa sobre las ciencias experimentales. La matemática, aparte de la evolución relacionada con la física, se desarrolla siguiendo una lógica propia, y, de hecho, no está ligada a la realidad. El matemático practica la matemática por introspección, como haría un artista (Mandelbrojt citado en EMMER, 2005, p. 3).»

Las artes al igual que las matemáticas, son aquellas expresiones las cuales pueden liberarse de la presión del mundo natural, la matemática posee su propia lógica y el arte al ser una expresión de la cultura y ésta última ser el mundo creado por el hombre, tiene el mismo derecho de pensarse por fuera de las restricciones de lo real. Concluyendo en ambas su amplio poder creativo, que al momento de relacionarse se puede tener como resultado un marco mucho más amplio de conocimiento tanto para las matemáticas como para las artes.

6. Pensar por un momento en que el trabajo del docente de matemáticas no se puede relacionar con las artes, es dejar a un lado el carácter creativo que dicha disciplina trae inherentemente:

> …se plantea la cuestión fundamental de por qué muchas personas consideran que la inclusión de la matemática entre las artes es injustificada. Una de las objeciones más recurrentes es que la matemática no provoca emoción alguna. Morris Kline[73] apunta que la matemática provoca indudables sentimientos de aversión y de

[73] **Morris Kline** (1 mayo 1908-10 junio 1992) fue un profesor de Matemáticas, un escritor en la historia, la filosofía y la enseñanza de las matemáticas, y también un divulgador de temas matemáticos.

reacción y por otra parte genera gran felicidad en los investigadores cuando consiguen dar una formulación precisa a sus ideas y obtener demostraciones hábiles y geniales (Kline citado en EMMER, 2005, p. 3).

Solo se genera gusto por las matemáticas cuando se tiene un acercamiento de tipo práctico con ella y dado su carácter abstracto no siempre permite una fácil aprehensión de sus conceptos en el aula de clase, creando desinterés, desgano y no despierta en el estudiante ningún tipo de emoción o sentimiento.

Durero en su tratado permite tener un acercamiento de tipo práctico con las matemáticas. Él dota a los objetos matemáticos un carácter de utilidad, como es el caso de la espiral y sus múltiples variantes, útiles para representar báculos, volutas o escaleras en forma de caracol y para la duplicación del cubo se puede utilizar dicha aproximación para reducir o ampliar un objeto dependiendo de su ubicación en el plano pictórico.

Como educadores debemos tratar de relacionar con otras facetas del conocimiento dichos conceptos matemáticos inmersos en un mundo intangible y de difícil acceso para el estudiante. En el caso particular de la pintura el artista Renacentista empezaba a crear este tipo de relación ya sea por fines propios o por llevar a otro nivel la profesión del artista, en el caso de la educación matemática también podría haber una retroalimentación de dicha relación, bien sea por mejorar dicha educación y el paulatino resquebrajamiento de la idea de las matemáticas como disciplina rígida y sin posibles emociones.

7. Durero a lo largo de su tratado enriqueció su escrito con una variada muestra de dibujos los cuales permiten tener una idea de la construcción geométrica a tratar y de sus aplicaciones a la pintura. Hoy en día se tienen instrumentos dentro de las aulas de clase llamadas *Tecnologías Dinámicas*, las cuales, permiten tener una aproximación más detallada respecto a construcciones geométricas como las tratadas por Durero, como la aporías de Zenón, división de una circunferencia, las líneas acompasables, división en partes iguales de un segmento, aproximación a los tres problemas irresolubles con regla y compás, etc.

No solo mostrar las diferentes construcciones respecto a un problema geométrico, estas tecnologías permiten variar características respecto a su construcción, permitiendo al estudiante crear nuevas conjeturas, mirar distintas alternativas acerca de a una determinada construcción y explorar en estos ambientes otras construcciones o problemas matemáticos.

> No se trata simplemente, como se podría pensar, de *hacer visibles*, visualizar fenómenos bien conocidos mediante instrumentos gráficos, sino más bien de utilizar instrumentos visuales para conseguir hacerse una idea de problemas aún abiertos, sin resolver, en la investigación matemática (EMMER, 2005, p. 7).

A lo largo de este documento se ha trabajado con el *software Cabri II plus* para poder construir visualmente distintos problemas o procesos geométricos que a lo largo del texto de Durero se hacen explícitos y otros no tanto, permitiendo relacionar construcciones de tipo matemático con la elaboración de objetos que se necesitan en el desarrollo de una pintura todo dentro de un contexto dinámico de geometría dentro del aula.

BIBLIOGRAFÍA

- APONTE, M. M. (2008). El paso del infinito como universo cerrado al infinito como universo abierto: la crítica de Giordano Bruno a la noción de infinito de Aristóteles. Tesis trabajo de pregrado, Santiago de Cali, Universidad del Valle.
- ARQUÍMEDES. (1912). The Works of Archimedes. Dorer, EE.UU.
- BOULEAU, C. (1996). TRAMAS La geometría secreta de los pintores. Akal ediciones, Madrid.
- CARDONA, S. C. (2006). La geometría de alberto durero. estudio y modelación de sus construcciones. Universidad Jorge Tadeo Lozano, Bogotá.
- DESCARTES, R. (1991). La Géométrie. Jacques Gabay, París.
- EFLAND, A. (2004). Arte y cognición. La integración de las artes visuales en el currículum. Octaedro, S.L., EE.UU.
- EMMER, M. (Julio de 2005). La perfección visible: matemática y arte. Recuperado el 20 de 4 de 2011, de Universidad abierta de Cataluña: http://artnodes.uoc.edu/art/emmer0505.pdf

- EUCLIDES, (1991). Los Elementos. Gredos, Madrid.
- PANOFSKY, E. (1955). Vida y arte Alberto Durero. Alianza Forma, EE.UU.
- PANOFSKY, E. (1991). La perspectiva como forma simbólica, Tusquets editores. Barcelona.
- PEIFFER, J. (2000). De la Medida. Akal ediciones, Madrid.
- THYSSEN-BORNEMISZA, M. (24 de julio de 2010). . . Lostonsite's Weblog. Recuperado el 13 de junio de 2011, de . . Lostonsite's Weblog: http://lostonsite.wordpress.com/2010/07/24/cuando-pervive-la-belleza-pasada/
- TOMAN, R. (1994). El Arte en la Italia del Renacimiento. Könemann, Madrid.
- VILLORO, L. (1992). El pensamiento moderno. Filosofía del Renacimiento. Fondo de Cultura Económico, México.