UN ANÁLISIS DE LAS OBRAS MATEMÁTICAS PROPUESTAS EN LA ENSEÑANZA DE LOS NÚMEROS ENTEROS DESDE LA PERSPECTIVA DE LA TEORÍA ANTROPOLÓGICA DE LO DIDÁCTICO (TAD)

LEYDI YOHANA ORDÓÑEZ CRUZ
0646412
MAYERLINE CHAVARRO MARÍN
0533238

UNIVERSIDAD DEL VALLE
INSTITUTO DE EDUCACIÓN Y PEDAGOGÍA
ÁREA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA
LÍNEA DE DIDÁCTICA DE LAS MATEMÁTICAS
SANTIAGO DE CALI, 7 DE SEPTIEMBRE DE 2012

UN ANÁLISIS DE LAS OBRAS MATEMÁTICAS PROPUESTAS EN LA ENSEÑANZA DE LOS NÚMEROS ENTEROS DESDE LA PERSPECTIVA DE LA TEORÍA ANTROPOLÓGICA DE LO DIDÁCTICO (TAD)

LEYDI YOHANA ORDÓÑEZ CRUZ

0646412

MAYERLINE CHAVARRO MARÍN

0533238

Trabajo de grado presentado como requisito para acceder al título de LICENCIATURA EN EDUCACIÓN BÁSICA CON ÉNFASIS EN MATEMÁTICA

WILDEBRANDO MIRANDA VARGAS

Tutor

UNIVERSIDAD DEL VALLE

INSTITUTO DE EDUCACIÓN Y PEDAGOGÍA

ÁREA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA

LÍNEA DE DIDÁCTICA DE LAS MATEMÁTICAS

SANTIAGO DE CALI, 7 DE SEPTIEMBRE DE 2012

Evaluador 1.

Evaluador 2.

Director.

Agradecimientos

En primera instancia, agradecemos a Dios, por permitirnos culminar este trabajo de grado, al darnos paciencia, fortaleza y perseverancia para conseguir éste título como profesionales.

También agradecemos a la Universidad del Valle, que nos acogió en el seno del alma mater y nos transformó en Licenciadas en educación Básica con énfasis en Matemáticas.

A su vez queremos manifestar una enorme gratitud a nuestros familiares, entre ellos, padres, hermanos, abuelos, tíos, esposos e hijos, los cuales nos brindaron su apoyo total en todo momento y formaron parte de este gran sueño.

De la misma manera agradecemos a nuestros amigos por darnos el ánimo cuando creíamos desfallecer.

Y por último como no agradecer a nuestro tutor Wildebrando Miranda Vargas quien con sus conocimientos, transformó los nuestros, orientando nuestro trabajo con paciencia y dedicación; gracias a él y a sus sugerencias hoy llegamos a la meta.

TABLA DE CONTENIDO

Página

INDICE DE TABLAS

ÍNDICE DE ILUSTRACIONES

RESUMEN

Este trabajo, de carácter exploratorio, se sitúa en la perspectiva de la Teoría Antropológica de lo Didáctico (TAD) y el interés que representó fué el de abordar la enseñanza de los números enteros de manera integrada teniendo en cuenta los sistemas numéricos. De esta manera se pone en cuestión la propuesta que plantea Bruno (perspectiva unitaria) la cual brinda pistas acerca de la construcción de los sistemas numéricos.

Nuestro interés principal es el de poder determinar ¿Cuáles son las potencialidades y limitaciones de las obras matemáticas propuestas en una institución escolar de la ciudad de Cali, teniendo en cuenta lo que la obra matemática plantea para la construcción del concepto de número entero?

Para realizar el presente trabajo, se hizo una revisión al currículo propuesto en una institución escolar ubicada en la ciudad de Cali la cual la denotaremos con (IE), a través de la descripción y análisis de: plan de área de matemáticas y textos escolares de matemáticas, Código matemáticas 6 y Código matemáticas 7 de editorial SM, con ellos se realizó un contraste teniendo en cuenta los referentes teóricos en los que se enmarca este trabajo tales como la TAD y la Perspectiva Unitaria propuesta por Bruno (1997).

En este sentido, la propuesta metodológica tuvo en cuenta: análisis de documentos oficiales (Lineamientos y Estándares) y textos escolares de matemáticas de 6º y 7º de la educación básica y el plan de área de matemáticas de la (IE).

Durante la realización de este trabajo se pudo evidenciar que en los textos escolares hay una gran ausencia de elementos claves para la construcción de $\mathbb{Z}$: igualmente es importante mencionar que el tratamiento de las nociones, propiedades y conceptos de los números enteros, está en cierta medida expuestos en el texto escolar como una manera algorítmica de hacer, olvidándose un poco de la estructura misma de los objetos.

Palabras clave: TAD (Teoría Antropológica de lo Didáctico), OM (Obra Matemática), OMr (Obra matemáticas de referencia), Números enteros.

INTRODUCCIÓN

Este trabajo de grado tiene como fin, hacer un análisis de las obras matemáticas propuestas[1] en una institución escolar bajo la perspectiva de la TAD, específicamente en las OM que durante la transición de $\mathbb{N}$ a $\mathbb{Z}$ se propone en los textos escolares, teniendo en cuenta algunas investigaciones que se han realizado sobre la enseñanza y la construcción de los números enteros en una institución escolar.

Es así como partiremos enunciando los aspectos relevantes que dieron origen a la construcción de $\mathbb{Z}$ y aquellas herramientas que se han puesto de manifiesto en algunas investigaciones, para que nuestro análisis se fundamente en la esencia matemática de los sistemas numéricos.

Ahora bien, se reconoce que la complejidad del aprendizaje de las matemáticas esta mediado por los diferentes instrumentos y herramientas usadas en la escuela para hacer alguna conceptualización formal, en este caso el fuerte de este trabajo son las tareas que se proponen en las obras matemáticas analizadas; reconocemos la importancia de que las matemáticas no son en sí mismas mero conocimiento sino que hacen parte de un sistema concreto de actividades que la humanidad pone de manifiesto al momento de hacer matemáticas en la medida que las relaciona con su entorno.

Por esta razón nuestro interés principal es realizar un análisis en términos de las limitaciones y potencialidades observadas en las OM propuestas (textos escolares,

[1] Retomamos el término currículo propuesto para designar uno de los 3 niveles en que se puede interpretar el currículo. En efecto, las pruebas TIMSS (1997) realizan su propuesta evaluativa en 3 niveles: El currículo propuesto, el currículo desarrollado y el currículo logrado. Para nuestro caso sólo nos interesa el currículo propuesto que lo materializamos a través del análisis de los textos escolares, el plan de área de matemáticas y dos documentos legales que son referente para el trabajo en matemáticas en Colombia: Los Lineamientos Curriculares de Matemáticas (1998) y Los Estándares Básicos de Competencias en Matemáticas (2006). El concepto de currículo propuesto lo relacionamos con el de Obra Matemática Propuesta, que se enmarca dentro de la perspectiva de la TAD en la cual se desarrolla este trabajo.

plan de área de matemáticas, y documentos oficiales como Lineamientos Curriculares de Matemáticas (1998) y Estándares Básicos de Competencias (2006)) partiendo de una obra matemática de referencia que da pautas para la construcción de $\mathbb{Z}$. Para ello, las tareas juegan un papel importante en tanto permiten a los estudiantes hacer una manipulación del objeto de estudio y a partir de ello ir haciendo una construcción apropiada del objeto manipulado, es decir, nos interesa saber ante la propuesta realizada en los textos escolares, cómo éstas ponen de manifiesto la integración de los sistemas numéricos y cómo las tareas propuestas permiten construir una OM que permita a desarrollar la *praxis* y el *logos.*

En el primer capítulo, el trabajo busca hacer una contextualización del problema en donde se menciona las dificultades presentes de introducir $\mathbb{Z}$ en la escuela con relación a lo concreto y lo formal según algunos autores (Bruno, 1997; González, Ortiz, Alfonso., Sanz, Ortiz, Alfonso., 1990; Cid y Bolea, 2002), para el que se plantea la importancia de introducir los números enteros en un entorno algebraico.

De esta manera los elementos van a ir respondiendo a nuestra hipótesis de trabajo que plantea que las OM propuestas en la institución escolar carecen (o al menos son limitadas) de una perspectiva integrada (Bruno, 1997) lo que puede llegar a limitar una mejor construcción de $\mathbb{Z}$ en la institución escolar.

En el capítulo dos, se abordan algunos elementos de la TAD, en donde se mencionan dos fenómenos presentes en la enseñanza de las matemáticas llamados *autismo escolar y atomización de la enseñanza* (Gascón, 1998), también se menciona el concepto de OM que brinda pautas en nuestro análisis de la relación que deben tener las tareas con la razón de ser de estas, en nuestro caso con la introducción de $\mathbb{Z}$.

Para ello mencionamos los aportes que Bruno (1997) realiza con relación a las dimensiones en la enseñanza de los sistemas numéricos desde una visión unitaria, en la cual encontramos cierta familiaridad con la propuesta de enseñanza de Cid y Bolea (2007) y algunas cuestiones que se plantean desde la TAD.

Desde lo curricular nuestro análisis está basado en lo que desde el Ministerio de Educación Nacional plantean Los Lineamientos Curriculares de Matemáticas (1998) y los Estándares Básicos de Competencias en Matemáticas (2006), con relación a los sistemas numéricos, en donde se proponen la integración de los procesos, contextos y conocimientos para hacer una enseñanza y aprendizaje genuino, en la cual argüimos que poco se especifica del cómo se pueden llegar a abordar estas propuestas en el aula de clase dejando demasiada libertad de interpretación al docente de matemáticas, y entendiendo eso sí, que la naturaleza de dichos documentos está en brindar unas pautas justificadas para abordar la difícil tarea de la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas en nuestras escuelas colombianas.

En el referente matemático se retoma la propuesta de introducir $\mathbb{Z}$ en un entorno algebraico (Cid & Bolea, 2001) a través de la construcción de una OMr que tiene en cuenta algunas cuestiones generatrices de dónde puede llegar a emerger $\mathbb{Z}$.

En el capítulo tres, se expone la metodología realizada para nuestro análisis, que tuvo en cuenta en 3 fases: En la primera fase ampliamos el marco teórico y seleccionamos las obras matemáticas propuestas a analizar. (Textos escolares, plan de área). En la segunda fase se construyó la obra matemática de referencia, con la cual encontramos las potencialidades y limitaciones de introducir $\mathbb{Z}$ en un entorno algebraico. En la fase tres se realizaron los análisis de las obras matemáticas propuestas que responderá o no a nuestra hipótesis de trabajo.

Por último en el capítulo cuatro, menciona el análisis realizado en (IE), a través de los documentos propios del área de matemáticas como lo son: plan de área de matemáticas y los textos escolares de matemáticas usados en (IE); con estos elementos se realiza el análisis teniendo en cuenta los referentes teóricos del capítulo dos y la problemática planteada en el capítulo uno, para encontrar las posibles limitaciones y potencialidades de la construcción de los números enteros según la OM que emerge del currículo propuesto.

De esta manera se realiza un contraste de los análisis con la obra matemática de referencia mencionada en el capítulo dos y con ello las conclusiones que responden a nuestra hipótesis de trabajo en el capítulo 5.

CAPÍTULO 1

PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA.
OBJETIVO GENERAL.
OBJETIVOS ESPECÍFICOS
JUSTIFICACIÓN.

1.1 PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA.

Distintos planteamientos de investigación (Bruno, 1997; Bruno, 2001; Bruno, 2003; Cid & Bolea, 2007; González et al. 1990) manifiestan que existen diversas dificultades en la enseñanza de los números enteros tales como: Introducir los números enteros en un entorno aritmético, enseñarlos basándose en modelos concretos (haciendo referencia a situaciones de la vida real), los números enteros como extensión de los naturales pues contribuye a asociarlos con las características de $\mathbb{N}$ tales como el cardinal.

Es importante mencionar que en Colombia la enseñanza de los números enteros ($\mathbb{Z}$) comienza alrededor de los grados 6º o 7º de básica secundaria. Sin embargo, algunas de las dificultades vienen desde los primeros años de escolaridad; en estos años se construyen ideas tales como, “la operación de adición siempre aumenta”, “la sustracción siempre disminuye”, estas son, según algunos autores, unas de las concepciones más difíciles de ser modificadas.

En primer lugar, un elemento fundamental en la introducción de los números enteros es identificar su estructura y con ello poder enseñarla a partir de una estrategia que ayude a desarrollar los procedimientos correctos, para que cuando el estudiante afronte cálculos con números enteros los pueda resolver de manera exitosa, reconociendo las limitaciones de $\mathbb{N}$ y el porqué de la necesidad de estudiar $\mathbb{Z}$, haciendo una reflexión adecuada de lo que permite este nuevo sistema numérico.

Para algunos investigadores, lo importante es que las conceptualizaciones correctas estén ligadas a una situación en la que las operaciones tengan una interpretación válida en donde se pueda reconocer y comprender las propiedades y reglas matemáticas que hacen válido dicho objeto de estudio. “Restar un negativo es equivalente a sumar un positivo” es una de esas reglas; adquiere significación en situaciones habituales de temperatura y dinero y hace referencia a números efectivos, y no meramente a símbolos, como se menciona a continuación:

> Cabe la alternativa, entendiendo el número en su versión lógica de generalizar todas las situaciones anteriores, en que aparece el negativo como opuesto del positivo (González, et al., 1990, p. 131).

Según estos autores, dichas consideraciones siempre tienen que estar presentes en las situaciones de enseñanza, en las instituciones educativas, aunque no se apoyan en estudios rigurosos al respecto.

Pero autores como Cid & Bolea (2007) arguyen que afirmaciones como la siguiente pueden contribuir a concepciones erróneas para las construcciones posteriores que se realizan en las instituciones[2], sobre los sistemas numéricos.

> La aritmética nos refiere que toda operación correctamente planteada puede efectuarse (p.4).

Es aquí donde se hacen presentes ciertas restricciones bajo la operación de sustracción; estas restricciones admiten tener en cuenta las propiedades de los números naturales para así, reconocer y comprender el dominio de ellas, es decir, $9 - 12$ es una operación bien planteada pero que con la aritmética de los naturales no se puede realizar.

González, et al. (1990) sustentan que muchos autores se empeñan en justificar la existencia de $\mathbb{Z}$ a través de su introducción mediante situaciones concretas:

> La interpretación de las cantidades negativas como aquellas que están orientadas en sentido opuesto a las positivas, (…) los autores se fuerzan en presentar interpretaciones concretas de los números enteros y de sus

[2] Es importante aclarar que desde la TAD el concepto de institución no se limita a Institución escolar sino que abarca todos aquellos lugares físicos o simbólicos donde se haga cualquier tipo de manipulación social de los objetos matemáticos.

> operaciones a fin de que el estudiante aprecie que ese estudio es razonable y justificado (p. 124-125).

Pero es bien sabido, que uno de los objetivos principales del conocimiento de las matemáticas son los conceptos, que vienen asociados a una acción y sus múltiples relaciones; los cálculos, los signos, los procedimientos y su inspiración: los problemas, son la representación de los conceptos que deben permitir una comprensión plena de su forma y su estructura.

Sin embargo, actualmente para introducir el concepto de números en los primeros años de enseñanza se acude a los sistemas concretos (situaciones de la vida real) para realizar cualquier tipo de representación numérica. Bruno (2001) intenta explicar esta situación de la siguiente manera:

> Una de las principales razones de estos hechos se encuentra en la necesidad que tenían los matemáticos de asignar significados concretos a los números y a las operaciones con ellos: ¿puede existir algo menor que la nada?, ¿por qué menos por menos es más? (p. 415).

Sin embargo, quedarse en los sistemas concretos también puede llegar a perjudicar la construcción de $\mathbb{Z}$, dado que existen situaciones que no se pueden representar en el plano de lo concreto, como por ejemplo, deducir las propiedades de los enteros a partir de las tareas propuestas es una situación que difícilmente los estudiantes puedan prever de una actividad de la vida real. (Cid & Bolea, 2007).

En la TAD las pautas están orientadas a que a partir de las tareas, los estudiantes hagan dicha construcción y comprendan la existencia y necesidad de los objetos estudiados; de esta manera el sentido de lo que se estudia, permite que los temas se conecten y pueda existir una continuidad (que funciona como una narración) durante el aprendizaje. (Gascón, 1998).

La comprensión de los enteros sugiere un alto nivel de abstracción y es aquí donde es importante que el estudiante comprenda de manera genuina las limitaciones de los naturales y la relevancia que los enteros tienen, para poder ampliar el campo numérico y algorítmico dado que en $\mathbb{N}$ algunas operaciones son restringidas.

En tales exploraciones hay ciertas tareas que son más complejas que otras, debido a que requieren un mayor nivel de abstracción y en un nivel puramente concreto es difícil llegar a tal nivel de abstracción.

Es por eso que algunos autores afirman que:

> La enseñanza del número entero no admite ser enteramente tratada de forma creíble en el plano concreto (González, et al., 1990, p. 150).

Así mismo, es importante mencionar que la enseñanza de los enteros desde el campo de acción axiomático, también puede causar errores que en ocasiones pueden generar dificultades contundentes en la comprensión y coherencia de los sistemas numéricos llevándolos a un formalismo vano.

> Ubicarlos sólo en el plano de lo formal también tiene el peligro de reducirlos a un formalismo vacío presto a ser olvidado a causar errores y confusiones (González, et al., 1990, p.150).

Lo anterior indicaría la importancia de vincular o por lo menos ser críticos frente a las dos formas: lo concreto haciendo referencia a situaciones de la vida real y lo formal ubicándolos en el plano de lo axiomático), es decir, introducir y enseñar los enteros sin darle más jerarquía a una que a otra, sino que en dicho proceso se debe tener en cuenta de dónde y cómo partimos para hablar de los enteros y a dónde y cómo vamos a formalizar la estructura de éste sistema numérico.

Dado que el tratamiento usado en la enseñanza de los enteros en los ámbitos escolares son introducidos como el resultado de una medida (situaciones de temperatura y nivel del mar) y al momento de llevarlos a cálculos de lápiz y papel se omite términos básicos que conforman éste sistema numérico (la unidad relativa u opuesta), se deja entrever una ausencia de realizar las representaciones inicialmente usadas y esa es una de las posibles razones que podrían explicar el por qué se da la desconexión que evoca una comprensión superficial de la estructura de $\mathbb{Z}$. En efecto, Cid & Bolea (2007) manifiestan que:

> La familiaridad de los alumnos con los modelos concretos no parece ser tal, por lo que su presentación puede resultar una dificultad añadida, antes que una ayuda para el aprendizaje de los números negativos (p.5).

Esta última apreciación nos permite reconocer que la aritmética carece de elementos claros para ser campo de acción de los números enteros, dado que la justificación y/o aparición de ellos van más allá de lo operatorio, de la cantidad y de una medida. Es decir, los números enteros representan cantidades desconocidas que se atribuyen al campo de algebraico en donde los elementos manipulados o que hacen parte de una expresión son números y también letras, esto exige reconocer las propiedades de $\mathbb{Z}$ y no meramente definir las operaciones limitándolos a sumandos y sustraendos; la comprensión genuina de $\mathbb{Z}$ debe estar dada en todos los elementos que se representan, las operaciones que implican y las propiedades y definiciones que hacen parte de dichas expresiones. (Cid & Bolea, 2007).

La opción de enseñar los números enteros en el campo de la aritmética, supone la comprensión de ellos que intuitivamente se ha abordado en la escuela (Los números para contar, ordenar, medir o etiquetar) y se aleja de lleno del concepto de número entero y su campo de acción.

> La resolución aritmética de un problema se caracteriza por ser un procedimiento fuertemente contextualizado y en el que todas las operaciones que se proponen son efectuables. (Cid & Bolea, 2007, p. 4).

En la escuela no se ve la necesidad de hacer uso de los negativos puesto que en él -4, el significado que tiene el signo negativo es de la sustracción, como una cantidad que está disminuyendo, dejando de lado que es el opuesto aditivo de 4, como propiedad inherente de los $\mathbb{Z}^{+}$

Es decir, existen razones que indican la importancia de enseñar los números enteros en campo de acción de lo algebraico pues históricamente la justificación de $\mathbb{Z}$era inherente a la naturaleza y precisamente esto provocó que pasaran muchos años antes de ser reconocidos; dicho reconocimiento cuestionó, incluso en los matemáticos de la época la comprensión y la relación entre lo formal y lo real (González, et al., 1990).

Algunos autores mencionan que la aritmética no debe ser el ámbito en los que se aborden la enseñanza de los números enteros, dado que puede llevarlos a una concepción errónea y se pierde la razón de ser de estos objetos matemáticos porque los sistemas concretos carecen de elementos para realizar representaciones tales como $-(-6)$ y $7 \times -4 = -28$. (Cid & Bolea, 2007).

Por lo tanto, al introducirlos de manera temprana en la escuela se impulsa a que los enteros sean vistos como resultado de una medida y este es un obstáculo[3] que ya

---

[3] El concepto de obstáculo es retomado del trabajo de Bachelard(1938):

> Es en términos de obstáculos que se debe plantear el problema del conocimiento científico. No se trata de considerar los obstáculos externos, como la complejidad y la fugacidad de los fenómenos ni de incriminar la debilidad de los sentidos y del espíritu humano: es en el acto mismo de conocer, íntimamente, que aparecen, por una clase de necesidad funcional, son lentos y son problema. Es aquí que se encuentran las causas del estancamiento y aún de la regresión, es aquí que hay que encontrar las causas de la inercia que es eso que llamamos obstáculo. (p. 15).

Es decir, el concepto de obstáculo se miran en función de aquellos conocimientos que son funcionales fue salvado y discutido por los matemáticos de la historia, en donde lo realmente importante es que se reconocieran los números enteros teniendo en cuenta su estructura y campo de acción. (Cid & Bolea, 2007).

El inicio de la enseñanza de los números negativos debería permitir que los estudiantes comprendan las limitaciones que presentan los Naturales y el pro qué de la necesidad de los negativos, de esta manera se trabaja en soluciones en planteamiento y solución de diferentes expresiones asociadas a los sistemas numéricos; es por ello que es fundamental que se construyan en clase los sistemas numéricos de forma unificada cuando de expresiones algebraicas se trata comprendiendo a cabalidad su campo de acción (el algebraico). A esta manera unificada de plantear la enseñanza de los números enteros se le conoce como perspectiva Unitaria (Bruno, 1997).

Es en este sentido y según lo expuesto anteriormente, que este trabajo intenta explicitar como son las obras matemáticas propuestas en una institución escolar con respecto a la enseñanza de los números $\mathbb{Z}$, teniendo en cuenta la forma en como son introducidos. De esta manera, se plantea el siguiente interrogante:

¿Cuáles son las potencialidades y limitaciones de las obras matemáticas propuestas en una institución escolar desde la mirada de la TAD, con relación a la construcción del concepto de número entero ?

en un contexto pero que en otros contextos pueden llegar a impedir construir un nuevo conocimiento. Se presentan resistentes al cambio y suelen ser fuente de errores en el sujeto.

1.2 OBJETIVOS

1.2.1 Objetivo general.

Analizar las obras matemáticas propuestas en una institución escolar, a la luz de la TAD, con relación a la introducción del concepto de número entero.

1.2.2 Objetivos específicos.

1.2.2.1 Identificar las OM en el currículo propuesto en el libro de texto de 6º y 7º y plan de área de matemáticas, con relación a la introducción del concepto de número enteros en una institución escolar.

1.2.2.2 Contrastar en términos de potencialidades y limitaciones, las OM propuestas (Textos escolares y plan de área), teniendo en cuenta la obra matemáticas de referencia para $\mathbb{Z}$ propuesta por Cid y Bolea (2007) y la perspectiva unitaria propuesta por Bruno (1998).

1.3 JUSTIFICACIÓN

Como ya se ha dicho, la intención de este trabajo es hacer una exploración al currículo propuesto en una IE con relación a la enseñanza de los números enteros para contrastarlo con lo propuesto en la TAD, con relación a una OMr.

Una de las razones que explica el porque de la importancia de este trabajo tiene que ver con un fenómeno llamado "atomización del proceso de enseñanza de las matemáticas" que desde la TAD se menciona como la desestructuración en la enseñanza que lleva a los estudiantes una cantidad de temas de manera aislada sin que ellos realicen una reflexión clara frente a la actividad matemática. (Gascón, 1998).

Otro fenómeno a referir por la importancia que subyace en las cuestiones matemáticas es el "autismo escolar" que se manifiesta por la poca relevancia y conexión que se hace entre lo que se enseña y la razón de ser de lo que se enseña; es así como, algunos autores mencionan que en las instituciones escolares y con ellas en los currículos actuales hay una tendencia a que los conceptos matemáticos se vean de manera aislada sin hacer una reflexión profunda del porqué se estudian ciertos objetos matemáticos en la escuela.

Si a los fenómenos anteriormente mencionados, se suma los planteamientos de Cid y Bolea (2007) que desde la TAD, plantean la necesidad de una reflexión profunda sobre el uso de los modelos concretos en la enseñanza de los números enteros y la necesidad de pensarse un abordaje de $\mathbb{Z}$ desde el campo algebraico, se tiene que resulta útil realizar un análisis de cómo se hace dicho abordaje en nuestro medio colombiano, específicamente en una institución escolar.

Igualmente, es importante mencionar que los dos documentos del MEN, Lineamientos Curriculares de Matemáticas (1998) y Estándares Básicos de Competencias en Matemáticas (2006), brindan una orientación para la enseñanza de las matemáticas y son una guía para establecer el currículo en Colombia. En los

Lineamientos Curriculares de Matemáticas (1998), se expone la enseñanza de los sistemas numéricos y apoyado en los Estándares Básicos de Competencias en Matemáticas (2006), donde se plantea la pertinencia de que los conocimientos, los procesos y contextos trabajados en matemáticas, sean cada vez más integrados, para evitar caer en algunos fenómenos en la enseñanza y aprendizaje, en nuestro caso: la atomización de la enseñanza y el autismo escolar.

Otro dato que sustenta la realización de este trabajo, está fundamentado en los resultados de las pruebas TIMSS, realizadas en nuestro país en 2007, en donde se observa un bajo desempeño de los estudiantes al aplicar, establecer y usar, propiedades y cálculos en la ejecución de los diversos sistemas numéricos en contexto (TIMSS, 2007).

Es decir, se nota que la problemática generalizada no es sólo en los números enteros, sino de los sistemas numéricos como tal; si bien los enunciados de las situaciones planteadas en TIMSS integran los sistemas numéricos y sus operaciones, los aciertos por parte de los estudiantes colombianos no supera el 2% en las respuestas válidas con relación a la población que realizó la prueba.

De otro lado, se considera importante el análisis de las OM en el currículo propuesto, en tanto que, brindan pautas en la enseñanza de las matemáticas, las cuales deben permitir una reflexión del trabajo en procesos integrados en la escuela, que actualmente están segmentados, dado que en ellas, se menciona que el aprendizaje de los sistemas numéricos que se da en las instituciones debe tener en cuenta sus distintas representaciones y su poder descriptivo, que debe evolucionar constantemente (MEN, 1998).

Se trata entonces, de promover la enseñanza de los sistemas numéricos de manera integrada de modo que se aborden con éxito la estructura de los números enteros en nuestro caso, con el nivel de abstracción necesario y así, ir accediendo a la construcción de los diferentes sistemas numéricos de manera formal, encontrando las conexiones que se han abordado desde los primeros grados de escolaridad. Es así como se afirma que:

> Se hace necesario utilizar situaciones numéricas, representaciones gráficas, modelos, propiedades numéricas etc., que permitan a los alumnos establecer las conexiones entre las distintas clases de números (Bruno, 1997, p. 122).

Observando la coherencia vertical y la coherencia horizontal propuesta por el MEN (2006) y la forma orientadora de la enseñanza de las matemáticas, en donde se propone una vinculación entre los procesos, conocimientos y contextos, se hace necesario trabajar en una posible integración de los componentes del saber, de modo que se puedan analizar las potencialidades y limitaciones de proponer una enseñanza integrada de los sistemas numéricos.

Por lo tanto se puede observar que este análisis recobra importancia en la medida que cuestiona de manera constructiva el sentido, la forma y razón de ser de enseñar a partir de las tareas que se sugieren abordar desde el currículo propuesto.

En la medida que si se identifica el por qué enseñamos lo que enseñamos, podríamos permitirle al estudiante llegar más allá de una simple manera de hacer como simples reglas algorítmicas, dándole las pautas necesarias para querer explorar más las matemáticas llevándolos de ser posible, a un pensamiento continuo, formal y científico que tenga impacto en la vida social.

CAPÍTULO 2

REFERENTES TEÓRICOS
Desde la propuesta de Bruno.
Desde la TAD.
Desde lo curricular.
Desde las Matemáticas.

2.1 REFERENTES TEÓRICOS

A lo largo de esta sección se presentan los elementos teóricos en los que se fundamenta el análisis de este trabajo, los cuales, hacen referencia a lo que se plantea en el proceso de enseñanza de los sistemas numéricos, en especial el de la enseñanza de $\mathbb{Z}$; de esta manera se expondrán los referentes teóricos que desde la TAD fundamentan el siguiente trabajo y aquellos referentes que están enmarcados dentro del currículo propuesto que se han considerado como centrales en la construcción de nuestro análisis. A continuación se mencionan uno a uno como síntesis y su orden de aparición dentro de esta sección.

- La perspectiva unitaria de Bruno.
- Teoría Antropológica de lo Didáctico. (TAD)
- Perspectiva curricular.
- Los enteros desde una perspectiva matemática.

En éste orden de ideas los referentes que a continuación se mencionarán, son centrales en la construcción de nuestro análisis que comprende el plan de área de una institución y los textos escolares que se utiliza en los grados 6º y 7º, de educación básica secundaria.

2.1.1 Desde la Propuesta unitaria de Bruno.

Bruno (1997) realiza aportes a una investigación que está situada desde el pensamiento numérico y propone que partiendo de la experiencia que tienen los estudiantes sobre los números, sea aprovechada para que se realice una comprensión efectiva de los sistemas numéricos teniendo en cuenta sus representaciones, estructuras y el campo de aplicación. Para ello esta investigación reconoce la necesidad de currículos integrados para que los estudiantes puedan hacer las conexiones pertinentes.

Durante el proceso escolar de los estudiantes en el estudio de los números y sus propiedades es conveniente tener en cuenta la visión unitaria de los números, de la siguiente manera:

Es importante que el conocimiento sobre los números que los estudiantes adquieren sea parte de un proceso continuo en donde se puedan realizar las conexiones pertinentes entre las limitaciones y potencialidades de cada sistema numérico, para que de esta manera se puedan observar la adjunción de los sistemas numéricos de modo tal que los conocimientos previos se integren a los nuevos y los nuevos conocimientos a los previos con la potencialidad que tienen. (Bruno, 2001).

Algunos autores plantean que durante la escolaridad se realiza un trabajo fuerte con las operaciones en los diferentes sistemas numéricos y los estudiantes dan cuenta de estas maneras de operar en cada uno de ellos (los sistemas numéricos), sin embargo no existe una visión unitaria que contribuya a establecer las correctas relaciones que existen entre los sistemas numéricos y es aquí en donde el proceso tiene una ruptura dado que las propiedades intrínsecas de cada sistema numérico las desconoce, así den cuenta por separado de su parte operatoria. (Bruno, 2001).

El conocimiento numérico abarca diversos aspectos relativos a los números, las operaciones, las propiedades y la forma en que se representan cada uno de ellos. Estos aspectos adquieren relevancia en la forma como sean tratados en la escuela. Bruno (2001), plantea tres dimensiones para hacer tal desarrollo, que propicia la conexión de los diferentes sistemas numéricos, las dimensiones abstracta, de recta y contextual favorece la enseñanza en tanto se realice una transferencia adecuada entre cada una de ellas.

En la *dimensión abstracta* se sitúan los conocimientos referidos a los sistemas numéricos como estructuras matemáticas y las formas de escritura con los números. La *dimensión de recta* hace referencia a la representación de los números sobre una recta, puntos y vectores. La *dimensión contextual* hace referencia a la utilidad de los números y su uso. (Bruno, 1997).

El conocimiento numérico no se limita al conocimiento de las tres dimensiones, sino también abarca las transferencias entre ellas, es decir, la expresión de una dimensión de un conocimiento dado en otra.

2.1.1.1 Las transferencias entre las dimensiones:

La transferencia entre las dimensiones permite una visión unificada de los sistemas numéricos y de los procesos que con ellos se trabajen, para que haya una construcción adecuada y no se promueva el aprendizaje como núcleos aislados.

El esfuerzo en la enseñanza debe encaminarse en que en las tareas que se planifiquen deben predominar las trasferencias. Dado que éstas (las dimensiones) permiten pasar por los diferentes procesos de aprendizaje y reconocer la estructura de lo que se estudia y así los estudiantes puedan encontrar en la parte operatoria, en la de redactar y resolver tareas con las técnicas adecuadas o no, de desarrollo permitiendo un reconocimiento genuino de las limitaciones que tienen los conocimientos anteriores y las potencialidades del nuevo conocimiento.

A continuación se representa como se dan las transferencias mediante la ilustración, que simboliza la manera de ver un triángulo en el que las flechas uniendo los vértices indican las transferencias de una dimensión a otra.

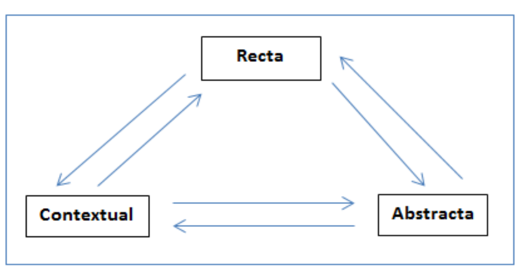


Ilustración 1: Transferencia de las dimensiones (Bruno, 1997. p. 7)

2.1.1.2 Los números negativos desde la Visión Unitaria

La visión unitaria descrita por Bruno (1997), la concretamos para el caso de los números negativos, en donde se propone una enseñanza de los números negativos que considere las tres dimensiones y que siga una secuencia de extensiones que avance hacia los números reales.

Es decir, la Perspectiva Unitaria de Bruno (1997) pone de manifiesto una enseñanza unificada que parte de los números enteros y tiene en cuenta los fenómenos didácticos presentes en cada subconjunto de $\mathbb{R}$. Plantear una enseñanza dada por secuencias de extensión permite una comprensión unificada en la construcción de los números y tiene en cuenta lo aspectos particulares que intervienen en los distintos sistemas numéricos.

Dado que la enseñanza de los sistemas numérico se da por extensión es decir, se introduce $\mathbb{N}$, luego $\mathbb{Z}^+$ continúa con $\mathbb{Z}^{(-)}$ y se van construyendo con $\mathbb{Q}^+$ e $\mathbb{I}$, hasta llegar a "$\mathbb{R}$" y la construcción por extensión va reconociendo las limitantes de los primeros conjuntos numéricos, una vinculación oportuna de los sistemas numéricos implica tener en cuenta que la unicidad debe permitir el uso de los sistemas numéricos en cualquier contexto, basados en las dimensiones como lo menciona Bruno (1997).

Bruno (1997), menciona la importancia de enseñar los sistemas numéricos desde una perspectiva unitaria reconociendo las limitaciones de Naturales y potencialidades de los enteros, de esta manera los estudiantes pueden reconocer que los sistema numéricos van surgiendo en la medida que van respondiendo a inquietudes que con los naturales eran limitadas.

2.1.*2* Desde la Teoría Antropológica de los Didáctico (TAD).

En este apartado se retomarán algunos de los planteamientos de la TAD, que servirán para el posterior análisis del currículo propuesto, en tanto que en la TAD se menciona de manera precisa qué deben permitir las tareas, las cuales deben estar presentes en la escuela cuando de construir un concepto matemático se trata**.**

La TAD surge como una necesidad que se observaba presente en la teoría de situaciones didácticas, en ella son explícitos los objetos de estudio que relacionaban de manera puntual el contrato didáctico, mencionando brevemente que la enseñanza y aprendizaje se daba a partir del *saber, el profesor y el alumno* y mencionaba que las problemáticas se asociaban estrictamente al ámbito escolar.

La TAD por el contrario generaliza el objeto de estudio de la teoría de situaciones, pues nos remite a nuevos problemas que antes eran exclusivos del ámbito escolar, el carácter de esta teoría es eminentemente social en cuanto amplia el campo de investigación dado que se centra en el sujeto haciendo matemáticas y tiene en cuenta los diferentes contextos, que dan lugar a la manipulación de objetos matemáticos, estos lugares son llamados por Gascón (1998) instituciones.

El punto crucial al respecto, es que la TAD sitúa la actividad *matemática*, y en consecuencia la actividad del *estudio* en matemáticas, *en el conjunto de actividades humanas y de instituciones sociales.* De esta manera esta teoría se centra en el estudio de todos los tipos de manipulación institucional de las matemáticas asumiendo nuevos retos científicos de investigación. (Gascón, 1998).

Ella menciona varios fenómenos en la enseñanza de las matemáticas, de los cuales nos centraremos en dos, el primero "la atomización de la enseñanza" la cual refiere que en la escuela se encuentra arraigada la segmentación de los contenidos o enseñanza de los mismos sin conexión alguna, de ahí que las conceptualizaciones que realizan los estudiantes carezca de utilidad y significado.

El segundo fenómeno a mencionar es el "autismo temático" relacionado con el anterior y que se puede sintetizar como una especie de encierro en los temas, lo cual tiene como consecuencia más inmediata el olvido de las razones de aprender determinado objeto matemático; de esta manera los estudiantes no tienen acceso a la importancia de establecer conexiones entre lo que se aprende y el porqué de lo que se aprende (Gascón, 1998).

La intervención que se realice en la enseñanza de las matemáticas debe salvar este tipo de fenómenos que hacen que el aprendizaje se realice de manera desconectada, a partir de eventos que propician la ejecución de tareas que en los diferentes momentos permiten construir de manera operatoria, conceptual y teórica los modelos matemáticos estudiados. Gascón (1998) propone que algunos aspectos que intervienen en la enseñanza de las matemáticas tales como: las tareas, las técnicas, tecnologías y teorías, deben evidenciar el proceso que debe alcanzar los estudiantes cuando demuestra dominio de los objetos matemáticos de estudio.

Estos procesos adquieren significado en tanto se puedan generalizar y servir como herramienta para la construcción de un concepto, de esta manera la estructura de Z se sitúa en el campo algebraico dado que brinda las pautas generatrices en su construcción, dado que en lo aritmético refiere a los números mientras que el álgebra vista como una herramienta no solo generaliza lo que se hace en aritmética sino que es capaz de hacer justificables las razones de ser del comportamiento de todos aquellos objetos que surgen en las matemáticas.

2.1.2 Concepto de Obra Matemática (OM).

En el enfoque antropológico se hace referencia a un elemento llamado obra matemáticas que si bien no está definido como tal, se propone un modelo que describe su estructura y sus características.

> Se postula que una obra matemática, como toda obra humana, surge siempre como respuesta a un conjunto de cuestiones y como medio para llevar a cabo, en el seno de cierta institución, determinadas tareas problemáticas (Gascón, 1998, p. 11).

La OM que desde la TAD se propone, debe permitir si bien no resolver si trabajar en algunos cuestionamientos en cualquier institución establecida, esta busca que una forma en particular y no única pero si necesaria en la enseñanza de las matemáticas y presenta la siguiente forma: Cómo se construye, cómo se llega, cómo obtener, cómo alcanzar etc. Para poder llegar a un acercamiento dentro de esta cuestión que se pone de manifiesto (OM), es necesario conocer los mecanismos que intervienen en las praxeologías (OM); es así como hay que tener en cuenta qué tipos de problemas son los que contribuyen a ello. (Gascón, 1998).

A continuación se muestra una ilustración en donde se pone en evidencia los diferentes elementos que componen una obra matemática.

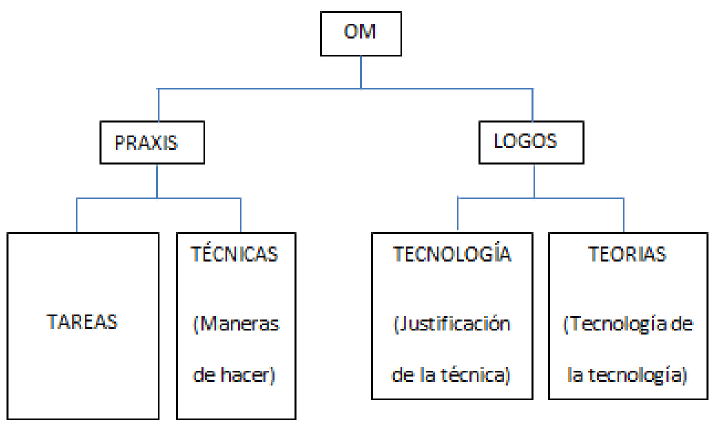


Ilustración 2: Estructura de obra matemática.

La ilustración 2 expone como una OM u organización matemática surge como respuesta a un conjunto de cuestiones que interesa resolver a una comunidad o grupo (que en esta teoría se llamará instituciones) de estudio. Es así como se abordan diferentes tareas que bien son llamadas Tipos de problemas o Tareas problemáticas[4].

[4] Para evitar la confusión entre términos nosotros simplemente hablaremos de tareas, sin hacer una clasificación exhaustiva entre los distintos tipos de tareas que puedan llegar a existir. En este sentido, se entenderá como tarea a todo aquello que interesa y se proponga para ser abordado en el seno de una institución y que se materializa

De esta manera las diferentes actividades que intervienen para la elaboración y construcción de una respuesta a una cuestión planteada conforman los Tipos de problemas siempre y cuando exista una Técnica matemática capaz de abordarlos y de generar muchos más problemas del mismo tipo. (Gascón, 1998).

Las Técnicas definidas inicialmente como "una manera de hacer" hacen su aparición demostrando que están allí con una determinada forma, pues al exponerla, esta debe ser comprensible y justificada, de manera que al aplicarla tenga validez y su discurso argumente aquellas cuestiones que dan origen a los tipos de problemas. (Gascón, 1998).

Igual que la Tecnología justifica las Técnicas que establece sus limitaciones y alcances, es necesario disponer de un discurso lo suficientemente amplio que justifique las Tecnologías. A este discurso se le conoce con el nombre de Teoría o Tecnología de la Tecnología. Se establece en este sentido que la teoría es transparente e incuestionable dado que permite y justifica de manera formal todo lo que aparentemente es obvio. (Chevallard, Bosch, Gascón, 1997).

El concepto de OM representa uno de los conceptos más importantes para este trabajo ya que al tratar de explicitar la integración de los sistemas numéricos en el proceso de estudio de los números enteros en principio, tal explicitación actuará sobre las Obras Matemáticas Propuestas (OMp).

> Las obras matemáticas son así el resultado final de una actividad matemática que, como toda actividad humana, presenta dos aspectos inseparables: la práctica matemática que consta de tareas (materializadas en tipos de problemas) y técnicas útiles para llevar a cabo dichas tareas, y el discurso razonado sobre dicha práctica que está constituido por dos niveles, el de las tecnologías y el de las teorías (Gascón, 1998, p.13).

---

mediante preguntas, ejercicios y demás actividades propuestas para ser realizadas por los sujetos pertenecientes a dicha institución.

Igualmente se habla de que la actividad presenta una complejidad creciente, lo cual permite hablar de diferentes tipos de OM. Es así como hay OM con determinada características que se hacen explicitan en las instituciones ellas son las obras matemáticas puntuales, locales y regionales que se enunciaran a continuación:

> Las obras matemáticas cuyas praxeología son **puntuales** hacen referencia a una manera de hacer de terminada tarea usando un pequeño conjunto de técnicas para solucionarlas. Cuando los temas que estructuran la enseñanza se articulan en torno a un discurso tecnológico común, se habla de una praxeología **local**. Y por último si las praxeología locales se estructuran en base a una teoría conforman praxeología **regionales** (Gascón, 2009, p. 92)

Es importante mencionar que las praxeología bien sean puntuales, locales o regionales, no son únicas en todas las instituciones, son relativas a ellas pues éstas hacen parte de un currículo determinado y se categorizaran según su estructura. (Gascón, 2009).

Lo anterior da cuenta de la estructura de las OM, en donde se mencionan brevemente algunos de los elementos que la componen y que son pertinentes para este trabajo.

2.1.4 Desde lo curricular.

En este apartado se muestra que no existe en los documentos oficiales (Lineamientos Curriculares de Matemáticas (1998) y Estándares Básicos de Competencias en Matemáticas (2006)) un planteamiento específico que haga referencia a los diferentes sistemas numéricos por separado, si no que se realizan planteamientos que dejan ver la enseñanza de los números de una manera integrada en el pensamiento numérico. En efecto el MEN (1998) plantea que:

> Una de las situaciones que involucran el desarrollo del pensamiento numérico hace referencia a la comprensión del significado de los números, a sus diferentes representaciones, a la utilización de su poder descriptivo (p. 26).

En la cita anterior se observa que la integración en la enseñanza de los sistemas numéricos, es una propuesta para llevar a cabo una comprensión cercana de la estructura de los números, como lo plantea Bruno (1997), cuando menciona las transferencias de las dimensiones en tanto permiten unificar el conocimiento de los sistemas numéricos, y tiene en cuenta cada una de las posibles representaciones existentes que se deben abordar en las instituciones escolares que supone plantear el campo de acción y estructura que los compone.

Se observa que los Lineamientos Básicos de Competencias en Matemáticas (1998) son una guía que orientan de manera general el currículo en las instituciones, no lo hace de manera puntual, pues carece de planteamientos que permitan determinar cómo es el trabajo a seguir en cada sistema numérico de modo tal que se vea una conexión clara entre los procesos, conocimientos y contextos.

La propuesta y la estructura curricular de cada institución debe buscar un trabajo integrado de los distintos pensamientos para ello se planteó la coherencia horizontal que entre en ellos se encuentra. Es decir, la relación que tiene un estándar especifico con los estándares de los demás pensamientos. De igual manera se explicitó la coherencia vertical que expone la relación entre estándares del mismo pensamiento en los diferentes conjuntos de grados. Lo anterior haciendo referencia al concepto de número entero ($\mathbb{Z}$) en los grados 6° y 7°. (MEN, 2006).

Coherencia horizontal	Pensamiento numérico y sistemas numéricos	Pensamiento espacial y sistemas geométricos	Pensamiento métrico y sistemas de medidas	Pensamiento aleatorio y sistemas de datos	Pensamiento variacional y sistemas algebraicos y analíticos
Sexto a séptimo	Resuelvo y formulo problemas utilizando propiedades básicas de la teoría de números, como las de igualdad, las de las distintas formas de desigualdad y las de la adición, sustracción, multiplicación, división y potenciación.	Predigo y comparo los resultados de aplicar transformaciones rígidas (traslaciones, rotaciones, reflexiones) y homotecias (ampliaciones y reducciones) sobre fi guras Bidimensionales en situaciones matemáticas y en el arte. Identifico características de localización de objetos en sistemas de representación cartesiana y geográfica.	Resuelvo y formulo problemas que requieren técnicas de estimación.	Resuelvo y formulo problemas a partir de un conjunto de datos presentados en tablas, diagramas de barras, diagramas circulares.	Analizo las propiedades de correlación positiva y negativa entre variables, de variación lineal o de proporcionalidad directa y de proporcionalidad inversa en contextos aritméticos y geométricos.

Tabla 1: Coherencia horizontal. (MEN, 2006)

En la tabla anterior se exponen los estándares del conjunto de grados 6º y séptimo asociados a los sistemas numéricos, podemos observar que nuestro eje articulador es el pensamiento numérico dado que hace referencia a las operaciones con números, en este mismo sentido los estándares mencionados en el pensamiento geométrico se articulan con el pensamiento numérico en tanto se puede ver el uso de los números como segmentos orientados al aplicarlos en transformaciones geométricas o representaciones cartesianas. De igual manera los sistemas numéricos se vinculan de manera directa con el pensamiento aleatorio dado que este sistema permite ver los problemas en diferentes sistemas de representación y el variacional permite verlo desde conceptos más generales como el concepto de Función, es decir, se trata de ver las funciones numéricas como dependencia entre magnitudes que contienen a $\mathbb{Z}$ en tanto manejo de cantidades positivas y negativas.

Por lo tanto, en la elaboración de la tabla se buscó mostrar la conexión existente entre cada pensamiento teniendo en cuenta el estándar que hace referencia a los sistemas numéricos en general, pues no se explicitan estándares para un sistema numérico en particular.

Se puede observar que en los diferentes pensamientos, existe una relación en cuanto a la solución de los problemas de los diferentes conceptos a trabajar, pero que de igual manera no especifica el trabajo con los números enteros en sí. Lo que en primer momento deja notar que puede llegar a existir una intención de proponer la enseñanza de los sistemas numéricos de manera integrada.

Por otro lado, retomando las transferencias que plantea Bruno (2001) y aplicándolo a los estándares escritos en la tabla anterior, se puede decir que entre ellos (los estándares), existe una transferencia entre las tres dimensiones que deja ver la integración de los sistemas numéricos en general, sin embargo, es difícil hacerse a una idea de cuál es la OM que se pretende enseñar o que se propone para ser abordada desde un punto de vista más riguroso que pueda generar OM de tipo local y global.

También es importante mencionar que los estándares carecen de un discurso más potente que articule lo formal y lo concreto, aunque tanto los Estándares (2006) como los Lineamientos (2006) plantean que la idea del contexto debe ubicarse tanto en las propias matemáticas, como en la vida cotidiana y en otras disciplinas, no existe una razón de ser explicita de esas retóricas, es decir, la idea de los contextos no ha sido trabajado de manera exhaustiva y esto permite que el docente piense que esos modelos representen el saber, por ello si no se hace una reflexión más exhaustiva, los contextos puede limitar un poco las construcciones matemáticas que podrían ser objeto de estudio en las instituciones escolares y de esta manera, los mismos estándares estarían dejando demasiadas interpretaciones al lector.

En cuanto a la coherencia vertical, se pudo extraer los siguientes ítems:

Coherencia vertical	**Pensamiento Numérico**	**Pensamiento Variacional**
De 1° a 3°	Identifico regularidades y propiedades de los números utilizando diferentes instrumentos de cálculo.	Reconozco y describo equivalencias entre expresiones numéricas y describo como cambian los símbolos aunque el valor siga igual.
De 4° a 5°	Justifico regularidades y propiedades de los números, sus relaciones y operaciones.	Construyo igualdades y desigualdades numéricas como representación de relaciones entre distintos datos.
De 6° a 7°	Establezco conjeturas sobre propiedades y relaciones de los números, utilizando calculadoras o computadores.	Analizo las propiedades de correlación positiva y negativa, entre variables, de variación lineal o de proporcionalidad directa y de proporcionalidad inversa en contextos aritméticos y geométricos.
De 8° a 9°	Resuelvo problemas y simplifico cálculos usando propiedades y relaciones de los números reales y de las relaciones y operaciones entre ellos.	Identifico diferentes métodos para solucionar sistemas de ecuaciones lineales.
De 10° a 11°	Establezco relaciones y diferencias entre diferentes notaciones de números reales para decidir sobre su uso en una situación dada.	Analizo las relaciones y propiedades entre las expresiones algebraicas y las gráficas de funciones polinómica y racionales y sus derivadas.

Tabla 2 Coherencia vertical. MEN (2006).

En lo anterior se expone que hay un nivel de complejidad en este concepto, que refiere a los números en general (sistemas numéricos), en los diferentes conjuntos de grados, y con bastante énfasis tanto en el pensamiento numérico como en el pensamiento variacional pasando de identificar, justificar, establecer conjeturas, por resolver problemas, establecer relaciones y diferencias en correspondencia con los números, sus relaciones y operaciones, sin hacer una distinción clara de los sistemas numéricos, que para el caso de este trabajo, se enfoca en los números enteros.

De esta manera, el planteamiento de coherencia vertical del MEN (2006), orienta los currículos de modo que se establezcan las diferentes relaciones entre los conocimientos, procesos y contextos, sin embargo carece de las pautas puntuales de cómo hacerlo o por lo menos de una orientación de cuáles puedan ser aquellas posibles OM en las cuáles hay que prestar mayor atención.

se observa por lo tanto, que se mencionan relaciones entre estándares de manera muy general sin hacer una reflexión de la forma de llevar estas cuestiones a aula, es así como carece de elementos que explique la transferencia en el sentido de Bruno (2001) que se da entre los pensamientos, los contextos y los procesos.

La coherencia vertical propuesta busca integrar pero sin elementos de cómo se realiza dichas cuestiones en las instituciones. A pesar de que en el documento Nº. 9 MEN (2008), denominado Estándares en el aula, intenta acercarse al cómo pueden llegarse a realizar dichas construcciones, se olvidan las razones de ser de los objetos matemáticos que se estudian en la escuela, con lo cual, en lugar de propiciar ambientes aptos para un aprendizaje cada vez más formal se puede llegar a terminar en muchas ocasiones, reduciendo el estudio de cuestiones matemáticas a situaciones de la vida real con el objetivo de que sean más cercanas al estudiante pero que muchas veces distan de los conceptos que se van a construir. Sin decir por ello que dichas cuestiones de la vida real no sean importantes.

El gran problema a nuestro modo de ver radica en que al no existir un análisis en la enseñanza de lo que pueden limitar o potenciar realmente dichos modelos de la vida real, se puede agudizar la visión de la transparencia de los objetos matemáticos como si su justificación y explicitación no fuesen necesarios y se justificasen sólo por el hecho de estar en un contexto de la vida cotidiana o de otras disciplinas. E incluso, el contexto matemático como tal parece que fuese auto justificado, salvo en aquellos apartados en donde se hace una reflexión de lo que se puede hacer en el aula.

Por ejemplo, los estándares mencionan los sistemas numéricos, sin embargo no se ve de manera explícita como se hace la transferencia, de los diferentes conjuntos numéricos. El modelo de conceptos, procesos y contextos pueden llegar a tal generalidad que no permita una discusión sobre los propios objetos matemáticos que se debe enseñar. Se pueden relacionar la propuesta de los estándares con el fenómeno de enseñanza llamado “autismo” mencionado por Gascón (1998), dado que hay ausencia de las razones de ser de dicha orientación, del por qué se proponen de esta forma, de cuáles son las desventajas de dicha orientación y de las dificultades que se pueden presentar, para que el docente las tenga presente y no incurra en ellas y de hacerlo, tenga conocimiento de cómo guiar el trabajo en clase.

Es cierto que el aspecto de coherencia vertical y horizontal rescata la idea de integrar las competencias trabajadas en las aulas de clase por los estudiantes y podemos decir que es un planteamiento potente que va en contra de los fenómenos de la atomización y autismo en la enseñanza, sin embargo, con la propuesta presente en dichos documentos, no se ve de manera explícita las conexiones que se deben hacer entre las competencias que enuncia cada uno de los conocimientos, los procesos y los contextos.

2.1.5 Desde las Matemáticas.

A continuación se realizarán algunas reflexiones de tipo epistemológico que intentan sustentar la idea de que los números enteros necesitan llevarse al campo de lo algebraico para sus aspectos estructurales $(\mathbb{Z}, *, \leq)$ puedan estudiarse de una manera justificada. Se retoma la propuesta de Cid & Bolea (2007) para la construcción de una Obra Matemática de Referencia (OMr) que ilustra algunos elementos que deberían hacer parte en la enseñanza de los números enteros así como los elementos justificativos (logos) que pueden llegar a permitir construir el anillo Z totalmente ordenado.

La aparición de los números negativos fue temprana aunque su reconocimiento con el estatus de número no corrió con la misma suerte, pues tuvo que pasar mucho tiempo para dotarlos de un cimiento teórico.

Durante el proceso de reconocimiento de los números enteros, surgieron inquietudes en donde se fortalecía la hipótesis de dejar lo concreto a un lado y ubicarlos en un campo formal, dado que esto permitía justificaciones netamente axiomáticas que defendían las conexiones existentes de los sistemas numéricos (González, et al., 1990).

Los números enteros son objetos matemáticos y ayudan a pensar en un campo conceptual y formal más amplio en tanto era evidente aceptarlos por la representación que de ellos se hacían en espacios vectoriales, estructuras algebraicas o funciones, esta concepción de ellos no es parcial sino posible dado que en muchas ecuaciones en principio aparecían como soluciones inéditas.

> La creación no es arbitraria, sino que involucra actividades con objetos matemáticos ya existentes y tiene que ver en muchos casos con necesidades de las ciencias y de la vida diaria (González, et al. 1990, p. 61).

De esta manera tenía que haber una forma que pudiese explicar y justificar los números negativos que en cierta medida se contraponían a las nociones primitivas que se tenían de los $\mathbb{N}$, es por ello que su aparición es retomada desde el entorno algebraico dado que este aparece en las diferentes ramas de las matemáticas y por ello creando el principio de permanencia pues este le daba un resultado coherente, formalmente valido y totalmente satisfactorio.

> Así se ampliaba el campo formalmente numérico, construyéndose un nuevo conjunto $\mathbb{Z}$ a partir de $\mathbb{N}$, de tal manera que se pudiera establecer un isomorfismo entre $\mathbb{N}$ y una parte de $\mathbb{Z}$, que se suele llamar $\mathbb{Z}^+$ o conjunto de los enteros positivos" . (González, et al., p. 63).

Por lo tanto, este nuevo sistema numérico y la estructura previamente establecida ampliaba las respuestas a ecuaciones con solución negativa y en cuanto a las operaciones de sustracción se podían realizar así el primer término fuera menor que el segundo, quedaba revocada la restricción que en $\mathbb{N}$ estaba presente.

Es importante mencionar que la enseñanza actual, propone contextos, conocimientos y procesos que deben ser llevado a la escuela en tanto estos integrados permiten un mejor aprendizaje por parte de los estudiantes, esto implica que muchos de los elementos históricos de $\mathbb{Z}$ sean saltados u omitidos, es por eso que la propuesta que se lleva al aula de clase debe tener en cuenta conceptualizaciones que con anterioridad fueron estudiados para encontrar las conexiones pertinentes que hacen de los números enteros un objeto de enseñanza importante en la escuela.

Para ello, dentro del currículo deben existir obras matemáticas que permitan hacer dichas construcciones de tipo epistemológico para encontrar la razón de ser de estos objetos y el porqué de la necesidad de un estudiar un nuevo sistema numérico con mayor apertura que $\mathbb{N}$ que salva las restricciones del anterior sistema numérico.

Por lo anterior, es pertinente construir una OMr, que sirva de modelo para analizar las posibles limitaciones y potencialidades de introducir a $\mathbb{Z}$ en un entorno algebraico basándose en una perspectiva integrada según Bruno (1997). Básicamente en este apartado presentamos algunos elementos reflexivos de tipo matemático que servirán para la construcción de dicha OMr.

Ecuaciones tales como $x + a = b$, tiene solución en los naturales de manera limitada, pues solo su solución es válida y pertenece a los naturales cuando $x > a$. Este tipo de limitaciones de los naturales requieren de la creación de otro sistema numérico en donde las soluciones no generen discusiones que ya antes se habían establecido, y es así como surgen los números negativos. (González, et al., p. 92).

En los números Naturales se pueden determinar y realizar operaciones de manera limitada, dado que existen ecuaciones lineales que carecen de solución en $\mathbb{N}$. Una de las potencialidades de $\mathbb{Z}$ es que amplía la solución de algunas ecuaciones lineales que al tener solución negativa carecían de sentido, dado que cuenta con el cero como referencia y comprende los sentidos negativo y positivo.

Actualmente, existen situaciones en las que surge la necesidad de disponer de cantidades negativas, tales como la temperatura bajo cero en lugares con climas extremadamente fríos, un buzo cuando está en plena acción en el mar, algunas pérdidas o ganancias, entre otras situaciones que surgen en la vida cotidiana y que las personas comúnmente empiezan a tener una manipulación sobre ellas. Sin embargo, esta perspectiva presenta limitaciones como lo menciona Cid & Bolea (2007):

> Los modelos concretos pueden contribuir a que los alumnos adquieran creencias erróneas sobre los números negativos y sus operaciones porque enfatizan las estructuras de espacio vectorial y espacio afín, en lugar de la estructura de cuerpo totalmente ordenado (o anillo totalmente ordenado) p.16.

Las concepciones creadas bajo los modelos concretos han sido fuente de discusiones anteriormente y que en principio presentaron un obstáculo, cuando se veía a los números negativos como medida de magnitudes opuestas o relativas, de allí viene que el campo de acción algebraico es necesario para que los enteros y sus representaciones, sean vistos como un nuevo conjunto numérico que tiene potencialidades más amplias que los naturales. (Cid & Bolea, 2007)

Existen situaciones en la escuela que ponen de manifiesto la restricción de algunas operaciones bajo la concepción de los números naturales, operaciones como la mencionada anteriormente pero bajo la condición que $a > x$, no pueden efectuarse, es así como es relevante hablar de un sistema numérico que permita realizar las distintas operaciones que en los Naturales tenían alguna restricción.

Una de las cuestiones que se abordan con el reconocimiento y legitimación de $\mathbb{Z}$, es las posibles soluciones para expresiones como $x + b = a$, que en $\mathbb{N}$ tenía ciertas limitaciones y cuyas soluciones debían tener en cuenta las siguientes condiciones.

Que $a > b$, en cuyo caso x es un número natural.

Que $a < b$, y entonces x carece de sentido.

Si bien existen algunas similitudes entre los *naturales* y los enteros*,* ubicarlos en entorno algebraico implica tener en cuenta que el segundo sistema numérico es la continuación del primer sistema numérico, que sus objetivos y técnicas son similares (Cid & Bolea, 2007).

Algunos autores mencionan que la necesidad de justificar los enteros radica en encontrar la familiaridad que tiene con los naturales y ser muy claro con las diferencias que los subyacen, dado que éste amplía las operaciones y propiedades, permitiendo una mayor ejecución al momento de operarlos y utilizarlos.

> Lo que caracteriza al cálculo algebraico es que la simetrización aditiva y multiplicativa de N permite reducir las cuatro operaciones aritméticas a dos: la suma y el producto, cuyos signos se omiten. En consecuencia, los signos "+" y "–" que en aritmética son signos operativos binarios, en álgebra pasan a ser signos predicativos o signos operativos unarios. (Cid & Bolea, 2007, p. 7).

Comprender estas diferencias son claves para establecer el cálculo algebraico, pues la construcción que se realice permite encontrar las relaciones que existen entre cada uno de los sistemas numéricos y en éstas intervienen las letras como términos desconocidos cuyos cálculos nunca pierden los objetivos y permite reconoce las propiedades que interviene como medio para encontrar información sobre el sistema y se convierte en objeto de estudio en sí mismo (Cid & Bolea, 2007).

Situaciones como éstas son las que permiten recurrir al sistema numérico de $\mathbb{Z}$, de la siguiente manera, mencionaremos aquellas definiciones, propiedades, teoremas y demás que permiten la construcción de un sistema numérico que potencializa las operaciones aditivas con los números naturales bien llamados extensión de $\mathbb{N}$. (Muñoz, 2002).

Antes de ser mencionadas las cuestiones netamente formales que componen la estructura de $\mathbb{Z}$ es importante nombrar algunas cuestiones que se deben llevar a la escuela y que de hacerlo permitirían hacer una construcción más apropiada de los enteros. Existen algunas preguntas que se deben llevar a los estudiantes de modo que los cuestione y los invite a pensar en su aprendizaje, esas preguntas se mencionan continuación:

- ¿Qué diferencia hay entre los naturales y los enteros?
- ¿Qué operaciones se pueden realizar en $\mathbb{Z}$ que no se pueden realizar en los Naturales?
- ¿Cuáles son las limitaciones y potencialidades de $\mathbb{Z}$ si las hay, en relación a los Naturales?
- ¿Es posible construir expresiones algebraicas que hagan ver el carácter unario de los símbolos "+" y "-" ?

Cuestiones como las mencionadas anteriormente, pueden contribuir a que los estudiantes empiecen a tener nociones acertadas de los naturales con relación a los enteros; también pueden cuestionarse la utilidad del nuevo conjunto numérico en tanto que amplía los conceptos y objetos trabajados anteriormente, haciendo así una unificación de los sistemas numéricos como lo menciona Bruno (1997).

De esta mima manera se plantean que encontrar las diferencias entre lo aritmético y lo algebraico, tiene en cuenta las propiedades de los elementos que los conforman y así, estos elementos son tenidos en cuenta para el estudio de ellos mismos. Cid & Bolea (2007)

La propuesta de Cid & Bolea (2007), de enseñar los números negativos teniendo en cuenta el entorno algebraico, implica tener unas cuestiones de manera global que se circunscriben y amplían las preguntas mencionadas anteriormente y se convierten en cuestiones globales que de tenerse en cuenta se justificaría de manera directa la necesidad de introducir $\mathbb{Z}$ en un entorno algebraico, dado que los modelos concretos presentan limitaciones que poco se salvan en la escuela.

Es así como Cid & Bolea (2007), explicita algunas cuestiones que son generatrices y de hacerlo permiten que emerja $\mathbb{Z}$.

¿Cómo encontrar la expresión algebraica canónica que soluciona un problema verbal aritmético cuando alguno de los datos que intervienen en su resolución es desconocido? (Cid & Bolea, 2007, p.10).

Estas cuestiones de carácter global responden a necesidades intrínsecas de las matemáticas que en ocasiones se trabajan en el campo aritmético y sin embargo, algunas veces no permiten que surja $\mathbb{Z}$ porque se trabajan desde los naturales y esto último evita que se vean o se encuentren las potencialidades de los enteros para encontrar dicho dato desconocido que ahora está precedido por un signo negativo, con el cual se debe asumir la "+" y "-", como operación unaria y no binaria.(Cid & Bolea, 2007).

Cid & Bolea (2007) resumen en los siguientes puntos, las razones que existen para la elección de un entorno algebraico donde se pueda trabajar $\mathbb{Z}$ justificadamente:

a) Debido a la constante contextualización en el campo de la aritmética que hay que hacer de $\mathbb{Z}$, resulta inadecuado introducir los números negativos en la aritmética.
b) La mayoría de instituciones escolares fomentan la idea de que el número sólo puede entenderse como resultado de una medida.
c) Lo modelos concretos en donde suelen introducirse los números enteros promueven la idea de estructura de espacio vectorial y espacio afín, en lugar de su estructura de anillo totalmente ordenado, lo que puede alejar aún más las miradas hacia su campo algebraico.

Para poder justificar las propiedades fundamentales que caracterizan a $\mathbb{Z}$, e intentando solucionar las anteriores problemáticas, Cid & Bolea (2007) plantean la necesidad de iniciar el estudio de los números negativos junto con el estudio del álgebra escolar. De esta manera proponen la enunciación de preguntas generatrices que permitan estudiar a $\mathbb{Z}$ desde un entorno algebraico. Y es así que a la cuestión inicial ¿Cómo encontrar la expresión algebraica canónica que soluciona un problema verbal aritmético cuando alguno de los datos que intervienen en su resolución es desconocido?, agregan:

> En aquellos problemas en los que la solución viene dada por expresiones algebraicas diferentes según los valores como sumandos o sustraendos que pueden tomar ciertos parámetros del sistema, ¿cómo encontrar una expresión algebraica única que dé solución al problema en todos los casos?
>
> ¿Qué consecuencias tiene considerar los sumandos y sustraendos como nuevos números y en qué modifica esa decisión las propiedades que cumplen “ todos” los números? (Cid & Bolea, 2007, p. 10).

Las cuestiones anteriores pueden llegar a poner de manifiesto la necesidad de un logos que permita observar y reconocer los elementos estructurales en la construcción de $\mathbb{Z}$. Pero eso sólo es posible si se toma el estudio de $\mathbb{Z}$ en un entorno algebraico, porque las propiedades que enunciamos a continuación y que inicialmente relacionan a $\mathbb{Z}^+$ con $\mathbb{N}$, no pueden hacerse creíbles en un plano puramente aritmético:

$\boldsymbol{Definición\ 1}$. $Sea\ A = N \times N.$ Definamos las siguientes operaciones en A.

$(m, n) \oplus (p, q) = (m + p, n + q)$

$(m, n) \odot (p, q) = (mp + nq, mq + np).$

La razón de ellas radica en que $(m, n) \oplus (p, q)$ representa

$(m - n) + (p - q)\ o\ sea\ (m + p) - (n + q)$ y análogamente $(m, n) \odot (p, q)$sería

$(m - n)(p - q) = (mp + nq) - (mq + np).$

Proposición 1. $Las\ operaciones\ acabadas\ de\ definir\ son\ conmutativas\ en\ A.$

$(m, n) \oplus (p, q) = (m + p, n + q) = (p + m, q + n) = (p, q) \oplus (m, n)$

(La conmutatividad en **N** hace válida la segunda igualdad).

Proposición 2. $La\ relación\ acabada\ de\ definir\ es\ de\ equivalencia.$

Teorema 1. $La\ relación\ de\ equivalencia\ anterior\ es\ compatible\ con\ las\ operaciones$

$\oplus\ y \odot\ definidas\ en\ A.$

Los enunciados anteriores expresados de manera axiomática y que hacen parte del *logos* indican la relación existente entre los naturales o enteros positivos ($\mathbb{Z}^{+}$), de ahí que son isomorfos pues las operaciones previamente definidas al realizarlas permiten encontrar la solución según el sistema numérico que se trabaje. A continuación se muestran las propiedades que permiten reducir las 4 operaciones de la aritmética a 2 en el campo algebraico y que permiten ir ampliando la construcción de Z a partir de su estructura algebraica y de orden:

Teorema 2.

Sean *m*, *n, p y q* elementos que perteneces a $\mathbb{Z}$, entonces:

$Las\ operaciones + y\ \cdot (entre\ clases)\ definidas\ en\ Z\ gozan\ de\ las\ siguientes$

$propiedades.$

i. $Las\ dos\ son\ asociativas\ y\ conmutativas.$
ii. $[(m,n)]es\ el\ módulo\ de\ " + "(cualquiera\ sea\ m \in \mathrm{N}).$
iii. $[(1,0)]es\ el\ módulo\ de\ la\ multiplicación.$
iv. $[(n,m)]es\ el\ inverso\ aditivo\ de\ [(m,n)].$
v. $\cdot\ es\ distributiva\ con\ respecto\ a\ la +.$

Proposición 3.

$Dado\ un\ entero\ [(p,q)], existe\ un\ único\ natural\ n\ tal\ que\ ó[(p,q)] = ó\ bien\ [(p,q)] = [(0,n)].$

Finalmente, cuando $p < q$ existe un n no nulo único tal

que $p + q = q\ y\ [(p,q)] = [(p,p+n)] = [(0,n)]$

Es así como se denomina $\mathbb{Z}^{+}$ al conjunto de los enteros positivos o $\mathbb{N}$ y por $\mathbb{Z}^{(-)}$ al conjunto de los enteros negativos o inverso de $\mathbb{Z}^{+}$.

Estas condiciones establecen las soluciones existentes en los enteros dado que ($\mathbb{Z}$,+) es un grupo. Es importante aclarar que existen ecuaciones de la forma $ax = b$, que a pesar de ser lineal la solución no pertenece a $\mathbb{Z}$, dado que ($\mathbb{Z}$,·) no es un grupo, de la única manera que existe una solución de esta ecuación es cuando *b es múltiplo de a.* sin embargo esa idea que ($\mathbb{Z}$ ·) no es un grupo, permitiría inclusive ver e introducir otros sistemas numéricos como los racionales, dado que ($\mathbb{Q}$ **·)** si es un grupo, esto fortalecerá la idea de la enseñanza de los sistemas numéricos de manera unificada.

La definición que de $\mathbb{N}$ se da bajo la operación sustracción tiene la siguiente forma $p + q = n \leftrightarrow p = n + q,$ si no existe el natural c tal que $p = n + q$ no existe la diferencia es decir p no es mayor que q.

Para dar solución a expresiones como la anterior debemos recurrir al sistema numérico de $\mathbb{Z}$. A continuación se explicitan algunas definiciones y propiedades que hacen parte de una obra matemática de referencia. Es importante mencionar cómo se da el orden en $\mathbb{Z}$: definamos $m < n$ como $(m - n) \in (\mathrm{N} *) y\ m \leq n$ como $(m - n) \in \mathrm{N}$.

Proposición 4. $La\ relación \leq acabada\ de\ definir\ es\ de\ orden\ total\ en\ Z.$

De esta manera los números enteros se definen de la siguiente forma conjuntista.

$Z = Z^{+} \cup Z^{-} \cup \{0\}$. Y que $Z^{+} \cap Z^{-} = \{\ \}$

Además en la estructura de orden se destaca la no presencia de una cota inferior, ni superior, determinando las condiciones bajo las cuales $\mathbb{Z}$ es completamente ordenado.

La anterior reconstrucción permitirá, además de tener una OMr, acercarse a las limitaciones y potencialidades de las obras matemáticas propuestas según el objeto de estudio de este trabajo. Tal reconstrucción pone de manifiesto las limitaciones impuestas en el sistema numérico de los Naturales para a su vez, ir construyendo el sistema numérico de los enteros, que constituyen con las operaciones de adición y multiplicación, un anillo conmutativo y unitario.

CAPÍTULO 3

METODOLOGÍA

3.1 METODOLOGÍA

La Teoría Antropológica de lo Didáctico (TAD) basa la mayoría de sus análisis en el contraste entre las Obras Matemática (OM) que circulan en las diferentes instituciones, con relación a las Obras Matemáticas de Referencia (OMr), es así como, al realizar este trabajo tomamos como referencia algunos trabajos relacionados con los análisis que aquí se desarrollaron. En la realización de cada uno de los elementos que conforman este trabajo se particularizaron los momentos de la ejecución distribuidos por fases, los cuales permitieron recoger la información que da cuenta de su desarrollo. Las siguientes son las fases que se llevaron a cabo:

Fase I: Esta fase se desarrolló en un tiempo de tres meses, la ampliación del marco teórico del presente trabajo, al igual que la selección de los textos escolares *"código matemáticas 6 y código matemáticas 7, Editorial SM",* y los elementos del currículo propuesto (Estándares Básicos de Competencias en Matemáticas, Lineamientos Curriculares en Matemáticas y plan de área de la institución de la ciudad de Cali.

Fase II: Esta etapa del trabajo se ejecutó en un tiempo de tres meses, durante este tiempo se llevó a cabo la construcción de una OMr la cual sirvió como base de análisis de las posibles limitaciones y potencialidades de introducir a *Z* en un entorno algebraico, a la luz de Eva Cid & Pilar Bolea (2007) y desde la perspectiva unitaria propuesta por Bruno (1997).

Fase III: Esta etapa del trabajo se llevó a cabo en un tiempo de tres meses, durante el cual se realizó el análisis de las OM propuestas (Textos escolares, Estándares Básicos de Competencias en Matemáticas, Lineamientos Curriculares de Matemáticas y Plan de Área de una institución escolar) en relación a lo que plantea Eva Cid y Pilar Bolea (2007) y la perspectiva Unitaria propuesta por Bruno (1997) lo cual permitió llegar a la conclusión de si se logró o no, el objeto inicial en el que se intentaba determinar algunas limitaciones y potencialidades en la enseñanza de los sistemas numéricos de manera integrada en el currículo propuesto.

Por otro lado se presenta las respectivas caratulas de los textos escolares que son una de las fuentes principales de análisis en este trabajo, aclarando que ambos textos son de la misma Editorial SM.

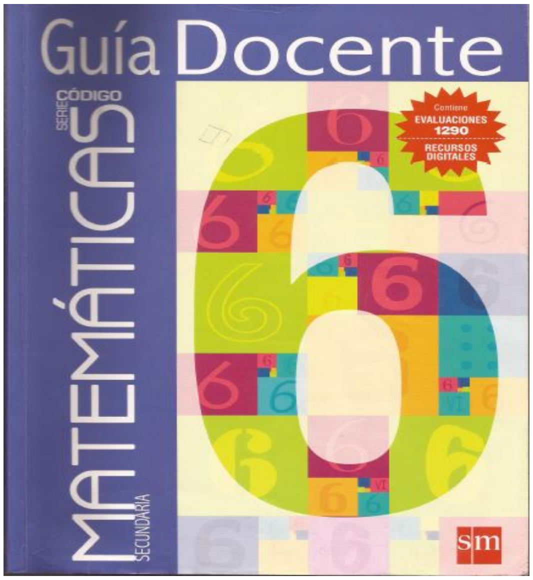


Ilustración 3: Texto escolar, Código matemáticas 6, editorial SM.

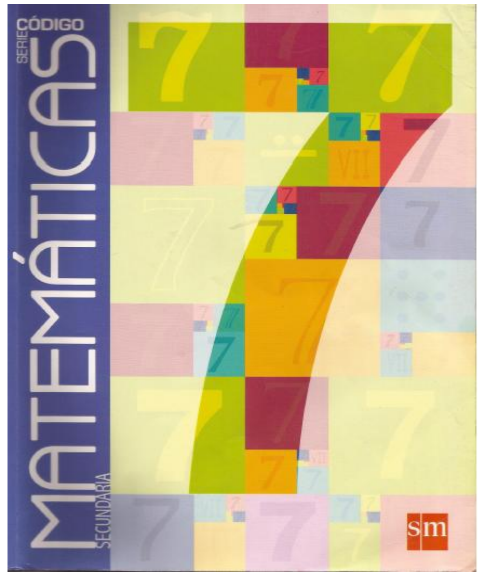


Ilustración 4: Texto escolar, Código matemáticas 7, editorial SM.

Para la realización de nuestro análisis usamos cuatro preguntas que consideramos son claves, abarcan los elementos teóricos abordados y que nos `brindan las pautas de estudio, que a su vez son trasversales a las diferentes OM analizadas y contienen al currículo, los números enteros y las tareas.

1. ¿Cuáles son los conceptos matemáticos encontrados en las OM analizadas en relación a los números enteros?
2. ¿Las OM propuestas analizadas se encuentran dentro del currículo vigente?
3. ¿cómo se relaciona la propuesta de las OM con la perspectiva unitaria de Bruno (1997)?
4. ¿Qué tipo de tareas se encuentran inmersas y cual es el apoyo teórico que las justifica desde la praxis y el logos?

CAPÍTULO 4

ANÁLISIS DEL PLAN DE ÁREA.
ANÁLISIS DE LOS TEXTOS ESCOLARES.

4.1 ANÁLISIS DEL PLAN DE ÁREA.

Con el fin de tener una visión general de la organización del plan de área de la institución en la cual se llevó a cabo el análisis del presente trabajo, se plantea a continuación un mapa conceptual que deja ver la estructura que tiene el plan de área de matemáticas, la cual es objeto de análisis en el presente trabajo. Estructura del plan de área (Mapa conceptual).

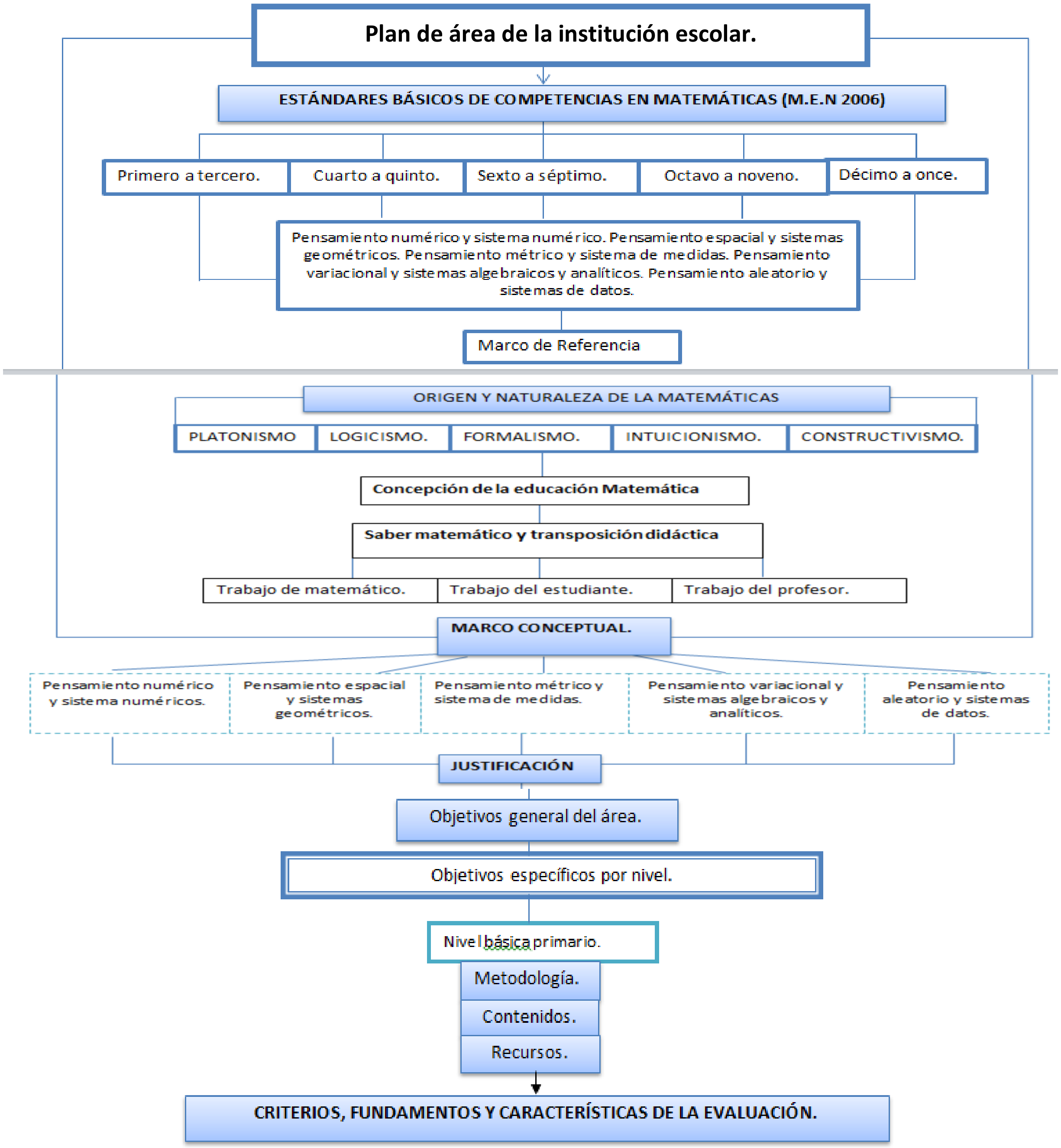


Ilustración 5: Estructura del plan de área de la Institución Escolar.

El plan de área de la institución escolar en la cual se llevó a cabo el análisis del presente trabajo, plantea en un inicio todos los estándares básicos de competencias en matemáticas en los diferentes pensamientos para los diferentes ciclos de educación básica primaria y básica secundaria, en el plan de asignatura hace una especificación por cada grado de los estándares que se desarrollan, los contenidos, los logros, indicadores de logros y las competencias. De igual manera se proponen unos objetivos generales del área y unos objetivos específicos por nivel (pre-escolar, básica primaria, básica secundaria y media vocacional).

En esta parte es relevante mencionar cuáles son esos objetivos que dicho plan de área plantea para el nivel de básica secundaria y media vocacional, dado que es aquí donde se propone la temática de los números enteros.

Objetivos específicos para el nivel de básica secundaria y media vocacional:

- Identificar los diferentes sistemas numéricos y las relaciones y operaciones que se dan en ellos.
- Explorar y descubrir propiedades y regularidades de los números, utilizando habitual y críticamente materiales y medios para verificar predicciones, realizar y comprobar cálculos y resolver problemas.
- Desarrollar capacidades para el razonamiento lógico, mediante el dominio de los sistemas numéricos, geométricos, métricos, analíticos, lógicos, de conjuntos de operaciones y relaciones, así como su utilización para la interpretación y solución de los problemas de la ciencia, la tecnología y la vida cotidiana.
- Comprender la dimensión práctica de los saberes matemáticos teóricos, así como la dimensión teórica de los conocimientos prácticos y la capacidad para desarrollar competencias.
- Utilizar el sentido crítico de los distintos contenidos y formas de información y la búsqueda de nuevos conocimientos con su propio esfuerzo.
- Avanzar en la construcción activa de herramientas básicas para diferentes tipos de cálculo.

- Reconocer la geometría como herramienta de exploración y representación del espacio.

Dentro de los objetivos que plantea el plan de área, se visualizan varios que hacen referencia a los sistemas numéricos haciendo énfasis en la identificación de cada uno de ellos y sus relaciones, más no se propone el por qué ni el para qué se deben alcanzar dichos objetivos, este parece ser un común denominador en el plan de área de las diferentes instituciones, pues no hay en ellos una justificación clara y explícita que valide la importancia de la enseñanza de los contenidos temáticos.

En el plan de área de la IE no hay argumento fuerte que demuestre por qué y para qué de enseñar determinado contenido, lo que hace que los temas carezcan de una razón de ser de su enseñanza en ésta institución, en lo que se observa presente el fenómeno de enseñanza llamado "autismo temático".

> Puede observarse como el currículo oficial que proponen las sucesivas reformas, los documentos de las administraciones educativas y los libros de texto aprobados por éstas, consideran implícitamente que, más allá del nivel de organización de los temas, todo es transparente e incuestionable. (Gascón, 2003, p.3)

Por lo anterior, se puede decir que incluso en el plan de área de la IE analizada, se observa en la propuesta de enseñanza que presenta falencias integradoras de los sistemas numéricos. Dado que en la organización se observa que es rigurosa en cuanto a la estructura, sin embargo no se clarifica el cómo se conectan la enseñanza de los contenidos propuestos.

Por consiguiente estamos de acuerdo con que es importante que en la enseñanza, de los sistemas numéricos, hay cuestiones que se deben tener en cuenta para que el estudiante haga una construcción adecuada, que le permita encontrar la relación entre los sistemas numéricos identificando así, las limitaciones que se encontraban en los naturales y lo que hace necesario la aparición de los enteros.

Es así como se observa que el plan de área de matemáticas de dicha IE, carece de elementos que indiquen las razones por las cuales la estructura se presenta de esa forma, sin dejar ver de manera clara las cuestiones propias del saber, más allá de una organización superflua que no determina razones netamente intrínsecas a las propias matemáticas.

Ejemplo de alguna de estas cuestiones son.

a. La OM que plantea el plan de área intenta articular, las diferentes propuestas u orientaciones de los Estándares de competencias en matemáticas, sin embargo se queda mucho en la teoría y se olvida de las cuestiones que se deben enseñar, generalizando lo que hay que hacer en el aula, pero no puntualizando del cómo se lleva a cabo la enseñanza y para qué se hace, esto lo podemos relacionar con el fenómeno denominado por Gascón como “Segmentación de la enseñanza” en tanto se proponen contenidos aislados sin especificar la relación existente entre ellos o las transferencias que se pueden realizar..

b. El plan de área carece de elementos en donde se puedan identificar las OM que trabaja, dado que deja al que lo lee interpretaciones de forma y metodología; pues las OM a las que hace referencia están direccionadas en cuanto a contenidos puntuales y estándares, pero no se establecen de manera clara las relaciones entre éstas para la enseñanza de $\mathbb{Z}$, aunque si deja ver por los contenidos que el campo de acción en el que se abordan los números enteros sigue siendo aritmético por las operaciones asociadas que se encuentran, dado que las ecuaciones están en otro tiempo distinto al inicio de la introducción de los enteros.

c. Si bien es cierto que el plan de área de una institución debe ser una guía en el proceso de enseñanza y aprendizaje, éste, en muchas ocasiones presenta limitaciones al momento de proponer una estrategia de cómo llegar a ella. Como ejemplo particular, en el plan de área que es objeto de nuestro análisis, se propone que el alumno, debe actuar, formular, probar, construir modelos, construir lenguajes, conceptos, teorías, pero que para ser posible todo lo anterior, el profesor debe proponer a los estudiantes situaciones que ellos puedan vivir, en donde los conocimientos adquiridos estarán como solución adecuada a las tareas que se les plantean. De acuerdo a ello se puede observar que allí se proponen los contextos cotidianos como competencia primordial en el aprendizaje del estudiante, pero dejan de lado los contextos matemáticos que son también parte fundamental de este proceso.

d. Por último la perspectiva unitaria de Bruno (1997), propone la enseñanza de los sistemas numéricos reconociendo las limitaciones del conjunto numérico trabajado anteriormente, es así como, las tareas deben estar encaminadas a que los estudiantes realicen distintas relaciones entre los que se aprende, la forma y su razón de hacer, actividad que las dimensiones abordan y que pueden permitir en los estudiantes competencias de interpretación, argumentación y razonamiento en la medida que los formulan.

Por lo tanto se ve como en la propuesta de Cid & Bolea (2007) este plan de área presentaría importantes limitaciones con una OM de este tipo, porque carece de cuestiones generatrices que deben responder a las razones de ser de lo que se enseña, las cuales serían una orientación clara y puntual para los docentes que deben adoptarlas en sus clases y se enmarcaría en el fenómeno de enseñanza llamado autismo temático, dado que no se explicitan las relaciones del saber sabio y el saber enseñado.

4.2 ANÁLISIS DE LOS TEXTOS ESCOLARES.

Existe una praxeología asociada a las tareas que permiten usar diferentes técnicas, tecnologías o teorías para solucionar las situaciones presentadas en una institución. Estas soluciones se relacionan con cuestiones matemáticas que potencializa la búsqueda de una respuesta válida o no, a determinada situación. (Gascón, 2001).

Sin embargo estas cuestiones deben ser transformadas y adaptadas a la situación para que se lleve a cabo un estudio adecuado de las tareas planteada. En esta ocasión para el análisis que se llevó a cabo de los textos escolares, presentaremos, una serie de niveles de dificultad para cada tarea propuesta en ellos, a los cuales les asignamos una caracterización, dado que el libro nos las plantea. Dichos niveles se identifican con color verde, rojo y amarillo, dependiendo del nivel de dificultad que tenga cada una de las tareas:

- **Nivel de dificultad básico (NB):** En este nivel de dificultad, el texto escolar ubica todas aquellas tareas cuya solución requiere de la parte algorítmica, es decir son aquellas tareas que como su nombre lo indica, tienen un nivel de complejidad básico, en donde las solución evalúa la comprensión de la definición o concepto de aquello que se está trabajando, en nuestro caso, los números enteros.

Para contextualizar un poco lo anterior, se expone a continuación la ejemplificación de las tareas que se encuentran en este nivel de dificultad:

- Ordena de mayor a menor los siguientes números enteros negativos:
  -5 -1 -2 -25
- Representa en una recta todos los números enteros cuyo valor absoluto sea mayor que 2 y menor que 7

Como se puede observar, las tareas que en este nivel se proponen, plantean enunciados donde se le pide al estudiante: expresar, representar, hallar, efectuar, ordenar, describir, enumerar, en determinadas situaciones matemáticas. Estas expresiones requieren de un saber llevar a cabo cierto algoritmo para la solución.

- **Nivel de dificultad medio (NM):** En este nivel de dificultad, el texto propone aquellas tareas que requieren de un grado de dificultad un poco mayor que el anterior, pues aquí se requiere averiguar, comprobar, calcular, realizar, completar, sustituir, resolver problemas, donde no solo se necesita de la parte algorítmica, sino de la claridad en los conceptos y propiedades que se utilizan para la solución de determinada tarea, por ejemplo:

- Expresa cada uno de los siguientes números como producto de un entero negativo por una diferencia de enteros
  a. -16 b. -4 c. -30

- Iván y Paola gastan en el supermercado $57000. Compran tres cajas de leche y, además, un lote de productos de la pescadería por un valor de $15000 ¿Cuánto costo cada caja de leche?

- **Nivel avanzado (NA):** En este nivel de dificultad, el texto ubica todas aquellas tareas que requieren la solución de expresiones polinómicas, resolución de problemas con una incógnita, efectuar cálculos, argumentar la falsedad o veracidad de un enunciado, las cuales son tareas en donde el estudiante debe tener los elementos técnicos-tecnológicos del sistema numérico que se está trabajando. Por ejemplo:

- El producto de un número por el doble de su opuesto es uno de los cuatro números siguientes. Señálalo y halla el valor del número de partida: a. 25 b. 18 c. -72 d. 32

- Escribe verdadero (v) o falso (f), según corresponda.
  a. La suma de dos números enteros positivos es un entero positivo ( ).
  b. La diferencia de dos números enteros de diferente signo siempre es positiva ( )

Lo anterior, deja ver un poco la intencionalidad del texto al categorizar de alguna manera las tareas propuestas, de acuerdo a los niveles de dificultad que ellas presenten.

Ahora bien, en el análisis de los textos escolares seleccionados, presentaremos un esquema de preguntas, que se usan en determinada institución por medio de una OMr explicada en el marco teórico, y aplicada en este caso, al texto escolar “serie código matemáticas 6 y serie código matemáticas 7”, en donde nos centraremos en el tipo de actividad que propone y en la praxeología que se puede desarrollar para validar los enunciados propuestos por el texto guía.

Partiremos por enunciar los aspectos relevantes que tiene el texto escolar como las OM en uso en la IE, que será uno de los puntos de referencia de nuestro análisis.

Nombre de texto	**Serie Código Matemáticas 6 y Serie Código Matemáticas 7.**
Editorial	SM
Año de publicación	2008
Dirección editorial	César Camilo Ramírez Sepúlveda.
Autores	José Ramón Vizmanos, Máximo Anzola, María Paz Bujanda, Serafín Mansilla, Manuel Bellon (“Resolución de problemas”), Ignacio Fernández Bayo (“Mural de Matemáticas”), José Luis Urquiza, Mauricio Villegas Rodríguez.
Editorial SM.	*Cr 85 K46 A66 of. 502.* *Bogotá, D.C.* *ISBN de la obra: 987-958-705-254-1.*

Tabla 3: Identificación de los textos escolares "serie códigos matemáticas 6 y serie código matemáticas 7".

Nos proponemos como primer ejercicio enunciar los contenidos explícitos en los textos escolares, anteriormente mencionados que darán origen a nuestra hipótesis de trabajo. Esto nos permitirá realizar un análisis integrado de los dos textos, que posteriormente nos proporcionarán las pautas de análisis del cómo se amarran los contenidos enunciados con las tareas (la praxis) y el tipo de conceptualización o definición (el logos) usado por el texto escolar, para identificar la técnica para la resolución de las tareas planteados desde las pautas que nos brinda la TAD teniendo en cuenta la OMr mencionada en el capítulo 2.

C O N T E N I D O	CÓDIGO MATEMÁTICAS 6 EDITORIAL SM	Estándares	CÓDIGO MATEMÁTICAS 7 EDITORIAL SM	Estándares
	Posiciones relativas. De los números naturales a los números enteros. Números enteros en la recta numérica. Valor absoluto. Adición de números enteros. Opuesto de un número entero. Sustracción de números enteros. Multiplicación de números enteros. División de números enteros. Propiedad distributiva. Operaciones combinadas con números enteros. Resolución de problemas. Actividades.	Justifico procedimientos aritméticos utilizando las relaciones y propiedades de las operaciones. Formulo y resuelvo problemas en situaciones aditivas en diferentes contextos y dominios numéricos.	Números enteros. Valor absoluto Relación de orden entre los números enteros. Adición de números enteros. Sustracción de números enteros. Resolución de problemas Organiza tus ideas. Actividades.	Justifico procedimientos aritméticos utilizando las relaciones y propiedades de las operaciones. Formulo y resuelvo problemas en situaciones aditivas en diferentes contextos y dominios numéricos.

Tabla 4: Contenidos y estándares referidos en los textos escolares "Serie código matemáticas 6 y serie código matemáticas 7"

De esta manera en nuestro análisis y observando la propuesta que los textos escolares, particularizando específicamente en la tareas (ejemplos, actividades, ejercicios a resolver, resolución de problemas), buscamos evaluar qué tanto permiten teniendo como referente principal lo que menciona la TAD al respecto, dado que existen cuestiones que para ser resueltas requieren de una estructura que los determine.

Así mismo, consideramos importante explicitar que gran parte de las cuestiones matemáticas asociadas al saber hacer, inmersas en las instituciones, se encuentran previamente estructuradas en un nivel temático y nominalmente organizadas; pero para afirmar esto, es pertinente conocer la estructura que compone en nuestro caso los textos escolares. (Gascón, 2002).

A continuación se muestra un mapa conceptual del texto escolar “serie código matemáticas 6” en donde se hacen explícitos los contenidos abordados en los textos escolares con relación a los números naturales. A partir de esta estructura se puede decir que el texto escolar hace un breve repaso por el sistema de numeración decimal en donde el estudiante debe tener en cuenta el dominio y manejo de las cuatro operaciones básicas.

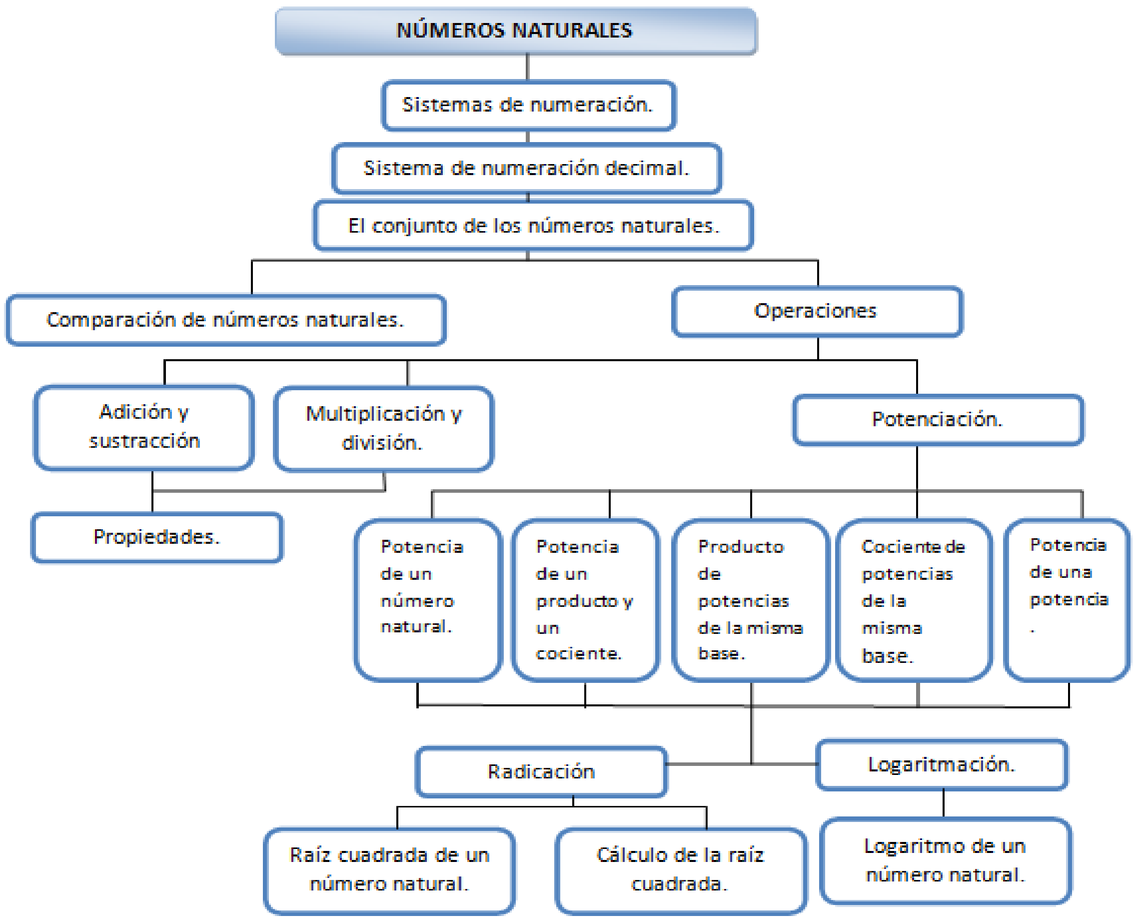


Ilustración 6: Mapa conceptual, números naturales del texto escolar "serie código matemáticas 6".

Observando el mapa conceptual anterior propuesto por el texto escolar, podemos decir que es completo con relación a las temáticas a abordar en la enseñanza de los números naturales, pues hace referencia a su estructura, los elementos que la contiene y operaciones, sin embargo, este mapa se presenta como la propuesta que hace el texto escolar “Serie código matemáticas 6”, que en nuestro análisis realizaremos más a fondo en el apartado que tiene que ver con las tareas que propone (praxis) y los enunciados matemáticos(Logos) a los que hace referencia.

A continuación explicitaremos el mapa conceptual del texto escolar en donde se enuncia la organización en la propuesta de enseñanza de los números enteros.

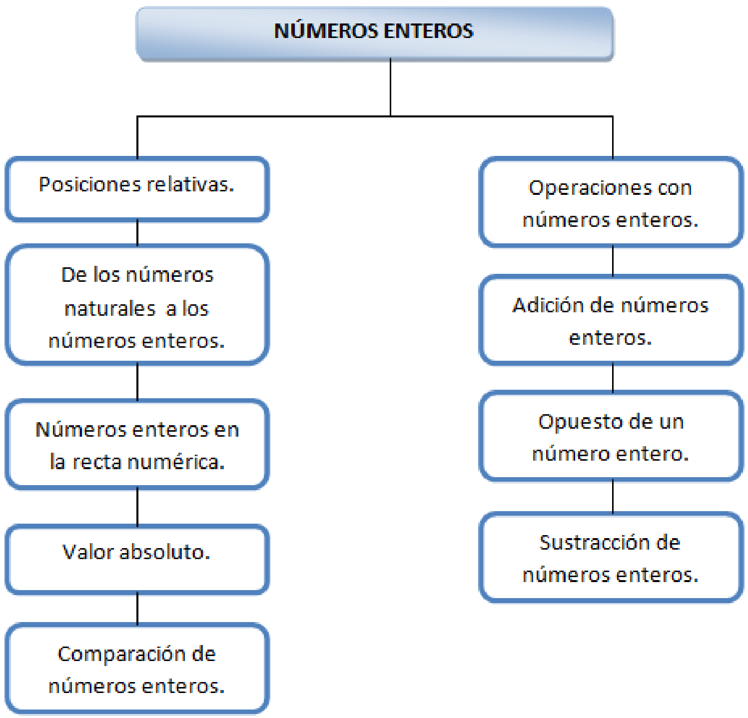


Ilustración 7: Mapa conceptual, números enteros. "Serie código matemáticas 6".

En la ilustración 7 se puede observar que contiene elementos claves de los enteros y con ellas, la transición de los naturales a los enteros, movilizando contenidos precisos sobre las propiedades y elementos, las operaciones de multiplicación y división se presentan en la siguiente unidad.

En la TAD, se definen unas técnicas, tecnologías y teorías que deben haber presentes determinadas tareas. La propuesta que hace el texto escolar “Serie Código Matemáticas 6 y serie código matemáticas 7”, deja ver la relación entre las praxeología o formas de hacer de determinada tarea, ubicando cada una de ellas en un nivel de dificultad determinado, de acuerdo a lo que se requiera que el estudiante realice.

4.2.1 Análisis de la praxis (tareas y técnicas).

Caracterización de los textos escolares teniendo en cuenta la forma como introducen los números enteros.

Algunos procesos matemáticos asociados a las matemáticas experimentales han adquirido relevancia en el ámbito educativo de la institución en donde se encuentran inmersos los textos escolares de este estudio, para ello se realizó una tabla que describe de manera particular los dos textos y que contiene los datos en donde se encuentra el objeto de estudio a analizar en cuanto a la secuencia que se da desde el inicio con el concepto de número entero.

	CÓDIGO MATEMÁTICAS 6 EDITORIAL SM.	**CÓDIGO MATEMÁTICAS 7 EDITORIAL SM**
¿Cómo se introduce el concepto de número entero?	El texto inicia con una contextualización sobre la temperatura 0°C que indica punto de congelación del agua. Continúa con una tira cómica que describe como se origina el cero. Plantea una breve historia de cómo eran llamados anteriormente los números enteros "números absurdos".	El texto inicia con un contexto acerca de los alimentos, en especial aquellos que necesitan una temperatura determinada para que se conserve en buen estado. Continua con una tira cómica que plantea la necesidad de conocer y operar con los números enteros para hacer un buen negocio. Hay una pequeña reseña histórica sobre la aparición de los números enteros por primera vez y el sistema de numeración chino que involucraba a los números enteros dado que utilizaban dos colores para distinguir los números positivos de los números negativos.
Estructura de la presentación del tema de los números enteros.	Posiciones relativas. De los números naturales a los números enteros. Números enteros en la recta numérica. Valor absoluto. Comparación de números enteros. Adición de números enteros. Opuesto de un número entero. Sustracción de números enteros. Multiplicación de números enteros. División de números enteros. Propiedad distributiva. Sacar factor común. Operaciones combinadas con números enteros. Operaciones con paréntesis. Resolución de problemas. Organiza tus ideas. Actividades.	Números enteros. Valor absoluto Relación de orden entre los números enteros. Adición de números enteros. Sustracción de números enteros. Resolución de problemas Organiza tus ideas. Actividades.

Tabla 5: Contextualización de los números enteros en los textos escolares analizados.

Existen también datos de orden histórico, que ubica a los números enteros como fuente de discusión, es así como el texto escolar menciona en breve algunos de los momentos álgidos en el reconocimiento de los enteros con su estatus de número; en él se hace una pequeña reseña, sobre la aparición de los números enteros y el sistema de numeración chino, en donde se utilizaban dos colores para distinguir los números positivos de los números negativos.

Muestra de tareas.

A continuación se mencionan 26 tareas propuestas por los textos escolares, de las cuales se escogió una muestra la cual llamaremos $T_{1,}$ $T_{2,}$ T_{3},...T_{n} a las que les daremos una posible solución y clasificamos según el criterio para desarrollar la técnica

1. Expresa con números enteros las siguientes informaciones:
    a) El avión está volando a 9500 m de altura
    b) La temperatura mínima de ayer fue de 3°C bajo cero.
    c) El garaje está en el segundo sótano.
    d) El buceador está nadando a 20 m de profundidad.
2. Indica el significado de los números -2, 0 y +4 en las siguientes situaciones:
    a) En un ascensor.
    b) En una cuenta bancaria.
    c) En un termómetro.
    d) En el mar.
3. Representa en la recta numérica:
    a) Los números enteros mayores que 7 pero menores que 13.
    b) Los números enteros comprendidos entre -5 y 1.
    c) Los números enteros comprendidos entre -11 y -3.
    d) Los números enteros positivos menores que 10.
4. Ordena de mayor a menor los siguientes números enteros positivos:
5. Calcula el valor absoluto de estos números:
    a) |-9|

b) |+5|
c) |-3|
d) |+7|
e) |0|
f) |-8|

6. Halla el número que tiene por valor absoluto 7 y está situado entre -8 y -6.
7. Escribe los números enteros que tengan por valor absoluto cada uno de los siguientes números.
   a) 3
   b) 7
   c) 12
   d) 435
   e) 0
8. Hallar el opuesto de cada uno de los siguientes números:
   a) -4
   b) +8
   c) +15
   d) -301
9. Copia en tu cuaderno y completa con el signo < o el signo > estas expresiones.
   a) +4 ___ +1
   b) -1 ___ -6
   c) 0 ___ +3
   d) -8 ___ +2

Calcula el resultado en el siguiente caso:

   a) ¿Cuánto hay que sumarle a -6 para obtener -4?

10. En una resta de dos números enteros, uno de ellos es +15, y la diferencia es -2 ¿Cuál es el otro?
11. Ayer a las 2:00, el termómetro marcaba 2°C. a las 00:00 la temperatura descendió 5°C. ¿Qué temperatura marcaba el termómetro a las 00:00?
12. Natalia gana 18 créditos cada vez que avanza un nivel en un videojuego. ¿Cuántos créditos gana si avanza cuatro niveles?

13. Efectúa estas operaciones.
    a) (+9) + (+3)
    b) (-10) + (+15)
14. Comprueba si se cumplen estas igualdades:
    a) -[(+4) + (+3)] = -(+4) + -(+3)
15. Averigua los números que faltan en estas igualdades.
    a) (-5) – (-6) = (-5) + ___ = ___
    b) (-12) - ___ = (-12) + (+6) = ___
16. Calcula el resultado de estas multiplicaciones.
    a) (+8) x (+3)
    b) (-3) x (-1)
17. Averigua los números que faltan en estas igualdades:
    a) (-30) / ___ = +5
    b) ___ / (-8) = +4
18. Obtén el resultado utilizando la propiedad distributiva:
    a) (-9) x [8 + (-9)]
19. Los dos miembros de estas igualdades se diferencian en unos paréntesis. Indica cuales son correctas y cuáles no.
    a) 21 - (12 - 8) = 21 - 12 - 8
    b) [(-13) + 9] -5 = (-13) + 9 - 5
20. Escribe (v) o (f) según corresponda.
    a) La suma de dos números enteros positivos es siempre un número positivo.
    b) La suma de dos números enteros con diferente signo es positiva, si el número entero del mayor valor absoluto es negativo.
    c) La diferencia de dos números enteros de diferente signo siempre es positiva.
21. Escribe cada uno de estos números como el cociente de otros dos.
    a) -5
    b) +8
    c) -100

d) -2

22. Expresa cada número como suma de un entero negativo y un cociente de enteros.
    a) 14
    b) -16
    c) -43
    d) 54
23. Escribe -28 como producto de -4 por una suma de dos sumandos.
24. Saca factor común en cada una de estas operaciones y obtén el resultado.
    a) (-5) x 7 + (-5) x (-12)
    b) (-9) x (-12) + (-9) x 13
25. Expresa estas operaciones como producto de dos números enteros, sacando factor común.
    a) 2+8
    b) 3 + (-9)
26. El producto de un número por el doble de su opuesto es uno de los cuatro números siguientes. Señala y halla el valor del número de partida.
    a) 25
    b) 18
    c) -72
    d) 32

A continuación se mencionan las técnicas empleadas en la solución de las tareas propuestas en los textos escolares, en ellas se hace una descripción breve de las herramientas conceptuales y algorítmicas que debe tener el estudiante para solucionar las tareas.

Para realizar esta parte vamos a proponer algunas categorías de análisis para la solución de las tareas propuestas en los textos escolares Serie Código Matemáticas 6 y Serie Código Matemáticas 7, donde lo que se pretende es categorizar las tareas planteadas según algunos aspectos en común que presentan y que de acuerdo a ello, se puede dar solución mediante determinado criterio, por ello se presenta a manera de aclaración a lo que hace referencia cada uno de ellos.

Criterios para desarrollar la Técnica:

Para realizar esta parte vamos a proponer algunas categorías de análisis según lo encontrado en los textos y que responden a Técnicas en su mayoría independientes que permiten solucionar la mayor parte de las tareas propuestas:

1. **Posiciones relativas**: al plantear ésta como una estrategia de solución el estudiante debe tener en cuenta el valor relativo de los números, de esta manera reconoce la posición de ellos y la distancia que existe entre el número propuesto y el cero (0); de esta manera el estudiante ha de reconocer el valor relativo de los números, la posición que ocupa, la distancia de él al origen cero (0) y ubicarlo según el contexto en el que la tarea se enuncie.

2. **Relación de orden.** En esta técnica el estudiante debe reconocer el valor relativo de los números y la posición de ellos, que es mínimo y máximo, menor y mayor, reconociendo la dirección del número y valor numérico o circunstancial que éste toma.

3. **Planteamiento de ecuación:** esta técnica hace referencia a la propuesta que debe hacer el estudiante en la solución de un problema que se le presenta, donde lo que debe es hallar valores a aquello que no se conoce en el problema y para lo cual debe tener claras determinadas propiedades que le permiten la solución de dicha ecuación que ha planteado, como por ejemplo el inverso multiplicativo y el inverso aditivo.

4. **Criterio algorítmico:** esta técnica hace referencia a todos esos modos de hacer o de resolver determinada tarea, en los cuales se deben claridad en la solución

de las cuatro operaciones básicas (suma, resta, multiplicación y división) y las propiedades de cada una de ellas.

4.2.2 Análisis de las obras matemáticas (Bloque tecnológico teórico).

Los textos escolares código matemáticas 6 y código matemáticas 7, introducen de manera contextualizada los números enteros, de esta forma permiten reconocer la necesidad intrínseca de estudiarlos de esta manera, dado que hacen parte de la vida cotidiana.

A continuación se hace un desarrollo de algunas formar de hacer y aplicar la técnica para la solución de las tareas propuestas por el texto escolar.

T_1: Expresa con números enteros las siguientes informaciones:

a. El avión está volando a 9500 m de altura
b. La temperatura mínima de ayer fue de 3°C bajo cero.
c. El garaje está en el segundo sótano.
d. El buceador está nadando a 20 m de profundidad.

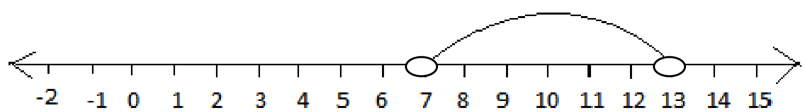
Solución: para resolver estos enunciados se debe tener en cuenta que si partimos del cero hacia arriba nos ubicamos en los números enteros positivos, y que del cero hacia abajo nos estaremos ubicando en los números enteros negativos. Igual sucede cuando partimos del cero hacia la izquierda o derecha respectivamente. Por lo tanto en el punto a, tendremos que 9500 mt me representa un número entero positivo, dado que se ubica arriba del cero, en el b, cuando nos menciona la temperatura bajo cero, nos indica un número entero negativo (-3°C), en el c, se tiene en cuenta que el sótano esta debajo del primer piso, por lo tanto el segundo sótano me representa (-2), y el d, me representa de igual manera un número entero negativo, pues la profundidad me representa un número entero negativo, por lo tanto seria (-20 m).

T_2: Representa en la recta numérica:

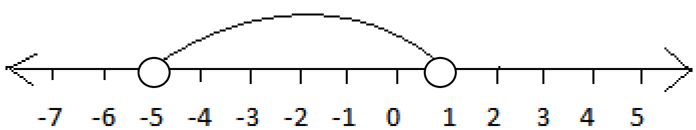
a. Los números enteros mayores que 7 pero menores que 13.
b. Los números enteros comprendidos entre -5 y 1.
c. Los números enteros comprendidos entre -11 y -3.
d. Los números enteros positivos menores que 10.

Solución: Para representar los intervalos mencionados es necesario conocer la recta numérica y tener claro que según la definición del texto los números positivos se encuentran a la derecha del cero y los números negativos se ubican a la izquierda del cero. Por lo tanto en el punto a, la respuesta seria

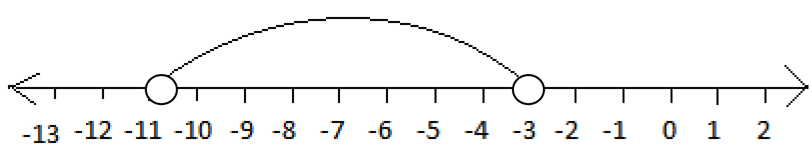
a.



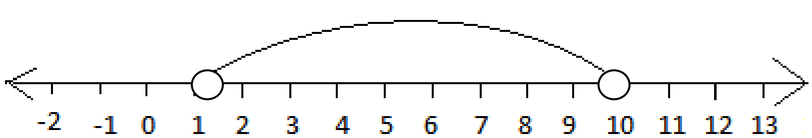
b.



c.



d.



T_3: Calcula el valor absoluto de estos números:
a. |-9| b. |+5| c.|-3| d.|+7| e.|0| f.|-8|

Solución: Para dar solución a esta situación es necesario tener en cuenta que el valor absoluto de un número entero es la distancia entre el número $(n \in Z)$ y cero (0), y que siempre el valor absoluto será una cantidad positiva porque indica básicamente una distancia. Por lo tanto las respuestas serian:

a. |-9| = 9 b. |+5| = 5 c.|-3| = 3 d.|+7| = 7 e.|0| = 0 f.|-8| = 8

T_4. Efectúa estas operaciones.

a. (+9) + (+3)
b. (-10) + (+15)

Solución: Para desarrollar los siguientes tareas tenemos que tener en cuenta cómo se desarrollan los signos de agrupación en un polinomio aritmético, es así como en la primera expresión debemos multiplicar los signos para deshacer los signos de agrupación y después de ello resolver las operaciones con los signos que quedan planteados. Aplicado lo anterior tenemos que la solución de a, es 12 y la solución de b, es +5

$T_{5.}$ Hallar el opuesto de cada uno de los siguientes números:

a) -4 b)+8 c)+15 d) -301

Solución: Para dar solución a este ejercicio es necesario tener claro que el opuesto de un número entero es otro número entero con el mismo valor absoluto y distinto signo. Por lo tanto la solución sería:

a. -4 = +4 b. +8 = -8 c. +15 = -15 d. -301 = +301

T_6. En una resta de dos números enteros, uno de ellos es +15, y la diferencia es -2 ¿Cuál es el otro?

Solución: la solución de esta operación se podría realizar mediante una ecuación donde se plantee una resta con una incógnita que sería el minuendo o el sustraendo de la operación. En este caso:

$x-(+15)=-2, \mathit{Ecuación\ inicial.}$

$x-15=-2\ , \mathit{por\ definición\ de\ resta\ de\ enteros.}$

$x - 15 + 15 = -2 + 15, \textit{inverso aditivo}.$

$x = 13 \textit{ solución}.$

T_7. Escribe (v) o (f) según corresponda.

a. La suma de dos números enteros positivos es siempre un número positivo.
b. La suma de dos números enteros con diferente signo es positiva, si el número entero del mayor valor absoluto es negativo.
c. La diferencia de dos números enteros de diferente signo siempre es positiva.

Solución: En este caso para determinar la falsedad o veracidad de los enunciados que se plantean, es necesario tener en cuenta algunos conceptos y/o procedimientos para resolver operaciones con números enteros, planteando una expresión que tenga en cuenta el enunciado, teniendo en cuenta los posibles planteamientos triviales y darle valor de verdad, de esta manera con casos particulares, se puede llegar a generalizar el enunciado y encontrar el valor de verdad respectivo, es así como, las respuestas correctas serian:

V, F y F, respectivamente.

Por ejemplo:

a. Verdadero: 10 + 3 = 13, por contraejemplo tendríamos -10 + (-3) = - 10 – 3 = -13
b. Falso: 12 + (-4) = 12 – 4 = 8 por contraejemplo tendríamos -12 + 4 = -8
c. Falso: 11 – (- 4) = 11 + 4 = 15, por contraejemplo tendríamos -11 – (+4) = -7

T_8. Ayer a las 2:00, el termómetro marcaba 2°C. a las 00:00 la temperatura descendió 5°C. ¿Qué temperatura marcaba el termómetro a las 00:00?

Solución: Para dar solución a este problema es necesario plantear una operación que exprese el enunciado de manera matemática, es así como en la siguiente expresión 2 – (+5) = 2 – 5 = -3, el dos indica la temperatura inicial a las 2:00,como la temperatura en determinada hora descendió usamos el (-), como operador que disminución y el (+5) la temperatura que marca a las 00:00 horas el termómetro, de esta manera la temperatura actual en ese momento es (-3ºC) bajo cero.

T_9. Escribe cada uno de estos números como el cociente de otros dos.

a. -5 b. +8 c. -100 d. -2

Solución: Para dar solución a este ejercicio se debe tener en cuenta la descomposición de números en sus factores primos, los criterios de divisibilidad, m.c.m, M.C.D y la ley de los signos. Para este caso algunas de las posibles soluciones podrían ser:

a. -5 /1 = -5 ó 5 / -1 = -5 ó 25 / -5 = -5 etc.

b. 8 / 1 = 8 ó 16 / 2 = 8 ó 32 / 4 = 8 etc.

c. -200 / 2 = -100 ó 400 / -4 = -100 ó -600 / 6 =-100 etc.

d. 8 / -4 = -2 ó -10 / 5 = -2 etc.

T_{10}. Escribe -28 como producto de -4 por una suma de dos sumandos.

Solución: Para dar solución a este planteamiento se debe tener claridad acerca de la propiedad distributiva de la multiplicación respecto a la suma, por tanto una posible solución sería:

-4 x (5 + 2) = (-4 x 5) + (-4 x 2) = -20 + (-8) = -20 – 8 = -28

T_{11}. El producto de un número por el doble de su opuesto es uno de los cuatro números siguientes. Señalar y hallar el valor del número de partida. a. 25 b. 18 c. -72 d. 32

Solución: Este ejercicio se puede realizar a tanteo por medio de una ecuación, escribiendo la expresión y tomando como posibles soluciones las que nos dan como opciones de respuesta. Es así como al plantear la expresión se deben tener en cuenta los signos asociados a cada número y al enunciado, esto último porque de no tenerse en cuenta podemos pensar que hay dos soluciones. Es así como la siguiente expresión y solución de ella puede permitirnos encontrar la respuesta correcta.

$$x \cdot 2(-x) = -72 \; \textit{Ecuación inicial.}$$

$$x \cdot -2x = -72 \; \textit{Suprimir signo de agrupación.}$$

$-2x^2 = -72$ *Propiedad conmutativa que permite ver a* $x. -2x$ *como,* $x. x(-2)$.

$-\frac{1}{2} \cdot 2x^2 = -\frac{1}{2} \cdot -72$. *Propiedad uniforme (uso del inverso multiplicativo).*

$x^2 = 36$ *simplificación.*

$\sqrt{x^2} = \sqrt{6}$ *Raíz cuadrada.*

$|x| = 6$ *Definición del valor absoluto.*

$x = 6$ ó $x = -6$. *Solución.*

Tomando como muestra los enunciados anteriores y algunas de las soluciones que le dimos a estos enunciados, nos encontramos con algunas técnicas específicas con las cuales podemos solucionar los que se derivan de ellos y aún aquellos que no escribimos porque en su estructura son parecidos a los que les presentamos en éste texto.

Es así como hemos identificado que existen definiciones y conceptos claves para la solución de los ejercicios que plantea el texto escolar.

Es decir, existe una organización aritmética escolar que nos permite analizar y construir los elementos más relevantes de los números enteros teniendo en cuenta las técnicas identificadas de tipo algorítmico que permiten desarrollar cada ejercicio independientemente que tengan una variabilidad entre sí.

	Técnica	**Tareas.**
1	Posiciones relativas.	1, 2, 3, 5, 6, 7, 8.
2	Relación de orden.	4, 9.
3	Planteamiento de ecuación.	11,12, 13.
4	Criterio algorítmico	10, , 14, 15, 16, 17, 18, 19, 20, 21, 22, 23, 24, 25, 26, 27.

Tabla 6: Técnica de solución para agrupación de las tareas.

Podemos observar en la tabla anterior que la técnica de *criterio algorítmico* se encuentra recargada de tareas en comparación a la *técnica de planteamiento de ecuación,* que podría propiciar en muchos casos una manera más adecuada de introducir $\mathbb{Z}$ en un entorno algebraico dado que permite el trabajo con cantidades desconocidas y relaciona los signos que anteceden los enteros, en este sentido el texto escolar plantea muy pocas tareas que pongan de manifiesto el trabajo con esta técnica.

Elementos tecnológico-teóricos

Ahora mencionaremos las características de las técnicas y los elementos tecnológico-teóricos que se encuentran inmersos en la construcción de número entero en los textos escolares analizados.

A continuación daremos una descripción concreta de los conceptos, definiciones, teoremas y características claves que están en los textos y que permiten el uso de determinada técnica al momento de solucionar un problema matemático relacionado con los números enteros. Estos elementos los mostraremos de manera explícita para posterior a ello hacer una clasificación de cuales determinan una técnica usada y encontraremos los aspectos tecnológico-teóricos que hacen parte de la construcción de los números enteros presentes en la obra matemática propuesta por el texto escolar, presente en nuestro análisis.

Enunciados matemáticos (Em) propuestos por el texto escolar para el desarrollo de los números enteros

Em1. La ubicación de un objeto con respecto a un punto de referencia determina la posición relativa del mismo. Para determinar posiciones relativas se establecen sentidos contrarios:

Arriba/abajo

Atrás/adelante

Antes/después

Sobre/bajo

Em2. Los números enteros ($\mathbb{Z}$) son los números enteros positivos, los enteros negativos y el cero.

Em3. Los puntos situados a la derecha del cero representan los enteros positivos y los situados a la izquierda, los enteros negativos.

Em4. El valor absoluto de un número entero a se define como la distancia entre a y 0. Se simboliza /*a* /y es siempre una cantidad positiva.

Em5. Dado dos números enteros positivos, es mayor el que tiene mayor valor absoluto.

Em6. Dado dos números enteros negativos, es mayor el que tiene menor valor absoluto.

Em7. Al sumar dos números enteros del mismo signo, se suman sus valores absolutos y al resultado se le añade el signo de los sumandos.

Em8. Para sumar dos números enteros de distinto signo, se restan sus valores absolutos y se añade al resultado el signo del sumando que tiene mayor valor absoluto.

Em9. Dos números enteros son opuestos si su suma es 0. El opuesto de un número entero es otro número entero con el mismo valor absoluto y distinto signo.

***Em10*.** El opuesto del opuesto de un número es igual al mismo número.

Em11. El opuesto de una adición es igual a la adición de los opuestos de los sumandos.

Em12. Para restar dos números enteros, se suma al primero el opuesto del segundo.

Em13. Para calcular el producto de dos números enteros:

- ✓ se halla el producto de sus valores absolutos.
- ✓ Al resultado se añade el signo más (+) si ambos tienen el mismo signo, y el signo menos (-) si tienen distinto signo.

Em14. Para calcular el cociente de dos números enteros:

- ✓ Se halla el cociente de sus valores absolutos.
- ✓ Al resultado se le añade el signo (+) si ambos tienen el mismo signo, y el signo (-) si tienen distinto signo.

Em15. La propiedad distributiva: el producto de un número entero por una suma es igual a la suma de los productos de dicho número por cada sumando.

Em16. Sacar factor común consiste en escribir en forma de producto una suma en la que todos los sumandos poseen un factor común.

Em17. Para realizar operaciones con números enteros en las que no haya paréntesis, se sigue este orden:

- ✓ Se hacen las multiplicaciones y las divisiones.
- ✓ Se hacen las adiciones y las sustracciones

Em18. Se puede seguir el orden que se prefiera cuando:

- ✓ En las operaciones hay solamente adiciones y sustracciones.
- ✓ En las operaciones hay solamente multiplicaciones y divisiones.

Em19. Para realizar una serie de operaciones con números enteros, se sigue este orden:

- ✓ Se resuelven los paréntesis incluidos en cada corchete.
- ✓ Se resuelven los corchetes.
- ✓ Se hacen las multiplicaciones y las divisiones.
- ✓ Se hacen las adiciones y las sustracciones.

Em20. El número entero positivo y su correspondiente negativo se llaman *opuestos.*

Em21. Un número entero está formado por:

- ✓ Un signo (+ o -) que indica si es positivo o negativo.
- ✓ Un número que sigue al signo y que representa su valor absoluto.

Em22. Dos números enteros opuestos tienen el mismo valor absoluto y distinto signo.

Em23. El conjunto de dos números enteros se denota por Z.

***Em*24. a<b:** si a esta representada en la recta numérica, entonces a esta a la izquierda de b.

***Em*25. a**>b: si a esta representada en la recta numérica, entonces a esta a la izquierda de b.

Em26. Para sumar dos números enteros del mismo signo, se suman sus valores absolutos y se pone el mismo signo.

Em27. Para sumar dos números enteros de distinto signo, se restan sus valores absolutos (al mayor se le resta en menor) y se pone el signo del que tiene mayor valor absoluto.

Em28. Para sumar varios números enteros se puede:

- ✓ Sumar de dos en dos de izquierda a derecha.
- ✓ Sumar los números positivos por un lado, los negativos por otro, y sumar los resultados.

Em29. Para restar dos números enteros, se suma al primero el opuesto del segundo.

Em30. Para calcular el producto de dos números enteros:

- ✓ se halla el producto de sus valores absolutos.
- ✓ Se añade al resultado el signo según la regla de los signos.

Em31. Se puede aplicar la propiedad distributiva en sentido contrario transformando una suma en un producto; esta operación se llama sacar factor común.

Em32. Para calcular el cociente exacto de dos números enteros:

- ✓ se halla el cociente de sus valores absolutos.
- ✓ Se añade al resultado el signo según la regla de los signos.

Em33. Para realizar operaciones con números enteros en las que no hay paréntesis agrupando operaciones, se sigue este orden:

- ✓ se calculan las multiplicaciones y las divisiones.
- ✓ Se calculan las adiciones y las sustracciones.

Em34. Si aparecen varias operaciones del mismo orden, se hacen de izquierda a derecha.

Em35. Para realizar operaciones con números enteros en las que haya paréntesis, se sigue este orden:

- ✓ se resuelven las operaciones que estén dentro de los paréntesis. Si hay varios, unos dentro de otros, se empieza por los interiores.
- ✓ Se calculan las multiplicaciones y las divisiones de izquierda a derecha.
- ✓ Se calculan las adiciones y las sustracciones.

Em36. Cuando delante de un paréntesis hay un signo (-) se puede:

- ✓ Realizar primero las operaciones del paréntesis y luego cambiar el signo.
- ✓ Quitar los paréntesis, cambiando el signo de los números que tiene dentro, y luego operar.

Tareas propuestas en la unidad de los números enteros del libro de texto 6° y 7º.

En la parte introductoria del texto, donde se presentan las características de éste, en la pág. 17 se especifica el tipo de ejercicio que se propone al final de cada tema, en esta parte de ejercicios propuestos el estudiante debe aplicar los nuevos conceptos y procedimientos que permiten la consolidación de los contenidos de la página, los cuales se enumeran a partir del primer ejercicio de la primera página de contenido hasta el último antes de la autoevaluación. Estos ejercicios, el texto los clasifica según el grado de complejidad en:

- **Nivel Básico**
- **Nivel Medio**
- **Nivel Avanzado**

Cuya caracterización ya se realizó.

De esta manera, encontramos los planteamientos observando que en su mayoría, se presentan tareas de nivel básico y medio. Para lo cual plantearemos en un cuadro la cantidad de cada uno de ellos, propuestos al final de cada tema:

A. Posiciones relativas.
B. De los números naturales a los números enteros.
C. Números enteros en la recta numérica.
D. Valor absoluto.
E. Comparación de números enteros.
F. Adición de números enteros.
G. Opuesto de un número entero.

H. Sustracción de números enteros.

NIVELES	CONTENIDOS							
	A	B	C	D	E	F	G	H
Nivel Básico	1	2	1	4	3	2	2	2
Nivel Medio	1	1	1	2	1	2	2	2
Nivel Avanzado	0	0	0	0	0	0	0	0

Tabla 7: Cantidad de tareas propuestas por nivel (básico, medio y avanzado) según el contenido del texto escolar de 6º.

En los ejercicios que se plantean en la unidad de los números enteros, del texto de grado 6°, hasta operación de sustracción, se observa un nivel de complejidad básico, pues en su mayoría se presentan ejercicios de un grado de complejidad básico correspondiente al 56%, un 40% de ejercicios con un grado de complejidad medio, atribuyendo un 0% a los ejercicios de nivel avanzado.

De igual manera, al finalizar la unidad 10, correspondiente a la unidad de números enteros, el texto presenta unas actividades de resolución de problemas compuesta por 61 situaciones problemas, de las cuales 22 problemas, tienen un grado de complejidad Básico que corresponde a un 36%, 31 problemas que tienen un grado de complejidad Medio correspondiente a un 51%, y 8 problemas con un grado de complejidad avanzado que corresponde a un 13%.

Similar al análisis anterior, se planteará la segunda parte del contenido, donde se encuentra:

A. Multiplicación de números enteros.
B. División de números enteros.
C. Operaciones combinadas con números enteros.
D. Sacar factor común.
E. Operaciones combinadas con números enteros.

F. Operaciones con paréntesis.

Aunque en las dos últimas temáticas, consideramos que se pueden trabajar en un solo apartado, el texto los propone por separado.

NIVELES	CONTENIDO					
	A	B	C	D	E	F
Nivel Básico	1	1	2	1	1	0
Nivel Medio	1	4	3	2	1	3
Nivel Avanzado	0	0	0	0	0	0

Tabla 8: Cantidad de tareas propuestas por nivel (Básico, medio y alto) según contenido del texto escolar de 6º.

Igualmente, al finalizar esta unidad se plantean unos problemas matemáticos, los cuales están conformados por los tres niveles de complejidad, distribuidos de la siguiente manera:

De 62 problemas que se encuentran en esta sección, 15 problemas tienen un grado de complejidad básico que corresponde a un 24%, 38 problemas tienen un grado de complejidad medio correspondiente a un 61 %, y 9 problemas con un grado de complejidad avanzado que corresponde a un 15%.

De acuerdo a los datos anteriores, es de notar que las tareas que propone el texto escolar Serie Código Matemáticas 6 presentan la mayor concentración de tareas en un nivel básico y medio, dejando con un bajo porcentaje las tareas de nivel avanzado.

De esta manera, el texto propone introducir los números enteros en un entorno aritmético puesto que las tareas que allí encontramos son de tipo algorítmicas y en las cuales hay mayor concentración y cantidad de tareas; mientras que las tareas de nivel avanzado que propone el texto escolar son escasas y éstas son las que deberían permitir una mejor comprensión de los enteros dado que se encuentran en el campo de acción algebraico, pues las técnicas que las solucionan son más de planteamiento y solución de ecuaciones

Tareas propuestas en la unidad de los números enteros del texto escolar grado 7º

En esta unidad los ejercicios se clasifican de la misma manera. A continuación se presentan la cantidad de ejercicios y el nivel de complejidad que presentan.

A. Números enteros. Valor absoluto
B. Relación de orden entre los números enteros.
C. Adición de números enteros.
D. Sustracción de números enteros.

NIVELES	CONTENIDO			
	A	B	C	D
Nivel Básico	1	1	2	1
Nivel Medio	1	0	3	2
Nivel Avanzado	0	0	0	0

Tabla9: Cantidad de tareas propuestas por nivel (Básico, medio y avanzado) según contenido del texto escolar de 7º.

En el texto de grado séptimo no se encuentra diferencia alguna en relación a las tareas que se venían proponiendo, se observó en esta última tabla, que la mayor concentración de ellas (las tareas) se encuentra en un nivel básico y un nivel medio, el texto escolar carece de tareas de nivel avanzado, es así como, la obra matemática propuesta en los textos escolares abordan tareas puntuales y no hacen una aproximación al logos que vienen dado por tareas locales.

4.3 CONTRASTE ENTRE EL ANÁLISIS DEL PLAN DE ÁREA Y LOS TEXTOS ESCOLARES.

Lo que en esta parte del trabajo se pretende es hacer un contraste, entre lo que se propone en el plan de área de la Institución Escolar (IE) y lo que se propone en los textos escolares analizados en este trabajo, de igual manera poder observar de forma más clara como se plasma en esta obra matemática la coherencia vertical y la coherencia horizontal en cuanto al tema del sistema numérico analizado.

Para ello se iniciará presentando un contraste en los contenidos propuestos por ambos, el plan de área concerniente a grado sexto y el texto escolar "serie código matemáticas 6" para determinar la presencia o no, de la relación existente en el desarrollo de los números enteros, tanto en el grado 6° como en el grado 7°. Lo anterior se observa en las siguientes tablas:

PLAN DE ÁREA DE MATEMÁTICAS: temas y subtemas	**TEXTO ESCOLAR SERIE CÓDIGO MATEMÁTICAS 6: contenidos**
Números Enteros y sus subconjuntos. Escritura por extensión y comprensión.	Posiciones relativas.
Análisis de la pertenencia, la unión e intersección entre estos conjuntos.	De los números naturales a los números enteros.
Concepto de número opuesto (inverso aditivo).	Valor absoluto. Opuesto de un número entero.
Representación de enteros en la recta numérica.	Números enteros en la recta numérica.
Relaciones de orden.	Comparación de números enteros.
Adición y sustracción de enteros. Propiedades.	Adición de números enteros.
Multiplicación y división de enteros. Propiedades	Multiplicación de números enteros. Propiedad distributiva.
	División de números enteros.
	Sacar factor común. Operaciones combinadas con números enteros. Operaciones con paréntesis.

Tabla 10: Contraste entre los contenidos propuestos en el plan de área de 6º y el texto escolar "serie código matemáticas 6".

Haciendo un paralelo entre el plan de área y el texto escolar de grado 6º, se puede observar que en principio hay una correlación directa dado que el plan de área propone la enseñanza de los sistemas numéricos en particular el de los números enteros y sus propiedades y el texto escolar también lo menciona, sin embargo el plan de área carece de elementos que justifiquen la razón por la cual se enseñan los contenidos que enuncian y el texto escolar por su parte en las tareas que propone se observa el nivel operatorio y algorítmico que los establece.

A continuación de mencionan los contenidos propuestos en grado séptimo en el plan de área de matemáticas y el texto escolar “serie código matemáticas 7”.

PLAN DE ÁREA DE MATEMÁTICAS: temas y subtemas.	**TEXTO ESCOLAR SERIE CÓDIGO MATEMÁTICAS 7 Contenidos.**
Números enteros.	Números enteros. Valor absoluto.
Recta numérica.	Relación de orden entre los números enteros.
Operaciones entre enteros.	Adición de números enteros.
Propiedades de las operaciones entre enteros.	Sustracción de números enteros.
Potenciación.	Multiplicación de números enteros.
Radicación.	División exacta de números enteros
Ecuaciones.	Operaciones combinadas con números enteros

Tabla 11: Contraste entre los contenidos propuestos en el plan de área y el texto escolar “serie códigos matemáticas 7”.

En el caso de grado séptimo existe una correlación directa entre los contenidos propuestos en el plan de área y el texto escolar de grado séptimo, en este caso la obra matemática que en el plan de área se expone con relación a los textos escolares son puntuales en tanto brindan pautas de manera muy general de la enseñanza de los enteros y la transición que se da de $\mathbb{N}$ a $\mathbb{Z}$.

Dando una visión articuladora con relación al plan de área y los Lineamientos Curriculares (1998) y Estándares Básicos de Competencias de Matemáticas (2006) en cuanto a los contenidos a desarrollar en el tema de los sistemas numérico concernientes a los enteros, se puede observar una secuencialidad en los conocimientos a adquirir, existiendo un orden para alcanzar su dominio.

Sin embargo se ven presentes el fenómeno de enseñanza llamado “atomización de la enseñanza” dado que no se ve de manera clara la conexión que se hace entre los contenidos de un nivel a otro.

Si bien es cierto el plan de área menciona los estándares determinados por el documento del MEN (2006), no existe una correlación directa entre las formas de hacer en la propuesta de aula establecida; no posee de manera explícita cómo se lleva a cabo la integración de los sistemas numéricos y la secuencialidad que se da de los naturales a los enteros.

Observando la estructura de los textos escolares se puede decir que aunque hay algunas justificaciones que pertenecen al *logos* para la introducción del concepto de número entero en los textos escolares cuando hacen referencia al nivel avanzado, estas carecen de elementos potentes que puedan explicar las razones de ser de las tareas propuestas para ser abordadas, dado que la mayoría de enunciados matemáticos le están dando al estudiante una forma algorítmica de hacer limitando las riqueza que tienen las definiciones principales que le dan forma y estructura a los números enteros y esto asociado a las pocas tareas que propone el texto escolar permite identificar que hay ausencia de un concepto fuerte en la estructura y campo de acción de .

Con relación a las tareas que proponen los textos para desarrollar las habilidades en los estudiantes se puede observar que hay unos estándares a los que tales tareas no responden de manera adecuada, dado que carecen de elementos que para la ejecución de técnicas de abordaje de los siguientes aspectos.

- Justificar la pertinencia de un cálculo exacto o aproximado en la solución de un problema y lo razonable o no de las respuestas obtenidas.
- Resolver y formular problemas cuya solución requiere de la potenciación o radicación.

En los aspectos anteriores, como se mencionó, se observan tareas que requieren de una justificación para la solución, sin embargo no hay una ejemplificación genuina explicita de los pasos que se deben realizar y tampoco se ve clara algunas preguntas que podría ser cuestiones que los estudiantes se planteen antes de interpelar a una solución de manera algorítmica y vacía.

Relacionando las tareas propuestas por el texto escolar y las dimensiones que plantea Bruno (2001), se observa que de manera ligera se enuncian tareas de tipo de recta, aunque el texto escolar no realiza una explicación profunda de lo que debe permitir ésta dimensión y esto hace que exista una ruptura en la comprensión de los sistemas numéricos, en donde el estudiante carece de herramientas propias para la identificación de las restricciones de los naturales y posibilidades que brinda $\mathbb{Z}$.

Es así como, las dimensiones (Abstracta, de recta y contexto) que deben permitir al estudiante pasar de una a otra encontrando así técnicas para la solución de determinada tareas en las cuestiones de plantear y resolver y lo que plantea la TAD al respecto, el texto escolar no abordan en este sentido sus explicaciones, dado que en un gran porcentaje se da paso a tareas rutinarios sin establecer las relaciones existentes entre ellos.

Haciendo una comparación entre los enunciados matemáticos (Em), planteados por los textos escolares y relacionándolos con la obra matemática de referencia, los textos escolares están faltos en su mayoría del logos dado que en sus enunciados forman parte de las maneras de hacer algorítmica u operatoria y no hay preguntas que puedan cuestionar al estudiante explorando las respuestas posibles del porque aprende esos contenidos matemáticos, provocando un aprendizaje bastante segmentado. Esto se puede explicar si se tiene en cuenta la propuesta de Bolea & Cid (2007) de introducir $\mathbb{Z}$ en un entorno algebraico. Los textos escolares analizados se enmarcan en un entorno puramente numérico, donde lo algebraico tiende a ser una mera ejemplificación de lo que se propone para ser estudiado.

La propuestas de los textos escolares tienen una problemática implícita en tanto manifiesta tareas simples que se resuelven con técnicas básicas, reduciendo el problema al estudiante considerándolo incapaz de realizar tareas más complejas pertenecientes al logos, si bien la praxis es importante correlacionarla con el logos evitaría enseñanzas instantáneas. Es decir, se observa en los textos escolares que los porcentajes de tareas evidencien la falencia de tecnología y teoría, que los estudiantes pueden realizar.

Si bien es cierto, se ve una leve intención de los textos escolares analizados por hacer una transición de $\mathbb{N}$ a $\mathbb{Z}$, haciendo la revisión entre líneas se observa que dicha transición es superficial dado que bajo el título de “naturales a enteros”, sólo se menciona que con relación a la temperatura es importante saber que indica y para ello se debe anteceder dicha medida con un signo + ó -, que introduce a los enteros con relación a la posición relativa.

Por lo tanto, la propuestas presentes en las OM analizadas evidencian limitaciones en tanto se generaliza los contenidos a desarrollar, mostrando obras matemáticas puntuales que permiten solo la forma de hacer algorítmica, en el plan de área se mencionan objetivos, estándares y contenidos, en donde poco se evidencia la conexión de ellos, quedando así aspectos generales y con detalle que son más bien vanos y poco articuladores.

Por otro lado, la introducción de los números enteros carece de una sistematización que aluda a los aspectos integradores como lo menciona Bruno (2001) con relación a la unicidad de los sistemas numéricos, dado que los textos intentan hacer una relación, sin embargo se quedan cortos en el logos en sus dos componentes (tecnologías y teorías) que es de alguna manera uno de los componentes que ayudan a establecer las potencialidades y limitaciones de los nuevos sistemas numéricos. De ahí que ésta puede ser una dificultad añadida al introducir $\mathbb{Z}$ en un entorno aritmético.

Es así como podemos identificar lo que mencionan algunas investigaciones como la de Cid (2007), una de ellas es que introducir $\mathbb{Z}$ en un entorno algebraico permite ver las generalidades que en lo aritmético no se pueden trabajar por las limitaciones que presentan los naturales.

Otro aspecto que se debe mencionar es que los modelos concretos dejan ver los números enteros como objetos intermediarios de cálculo e impide ver la potencialidad que $\mathbb{Z}$ contiene al poder modelizar determinados sistemas y que los números antecedidos por signos son los que permiten avalarlos como números negativos y números positivos. (Cid & Bolea, 2007).

Finalmente, tal como lo menciona Bruno (2001) sería importante pensarse propuestas didácticas que planteen una visión unitaria de los sistemas numéricos. En los planes de área y libros de texto podría materializarse este trabajo que a largo plazo vaya impactando las aulas de clase, siempre y cuando, se reconozcan las razones de ser a las que responde las obras matemáticas relacionadas con los sistemas numéricos, en este caso $\mathbb{Z}$, y se analice la posibilidad de introducir $\mathbb{Z}$ en entornos algebraicos y no puramente aritméticos.

CAPÍTULO 5

CONCLUSIONES

BIBLIOGRAFÍA

5.1 CONCLUSIONES

Con relación a los análisis del plan de área, es necesario en las instituciones escolares, pensarse los planes de área como un elemento importante a la hora de explicitar las obras matemáticas que se pretenden enseñar. No será suficiente plantear unos criterios generales, y una secuenciación de contenidos para ser abordados, sino que se necesita un proceso de estudio donde los docentes puedan conocer las razones de ser de lo que se propone para ser enseñado. Esto exigiría cambiar la rigidez curricular que prima en muchas instituciones de nuestro medio, donde se tiende a considerar el conocimiento matemático como un corpus acabado de una vez por todas, y de esta manera, la transparencia del saber puesto en juego parece responder a la cultura pre-científica mencionada por Gascón (1998).

Si bien es cierto que los textos escolares son una guía que orienta el quehacer del maestro en la escuela proponiendo una manera de cómo llevar a cabo determinadas estrategias para la construcción del conocimiento matemático en el estudiante, no se puede pasar por alto que también se debe hacer una crítica frente a lo que dichos textos contienen, pues se puede observar en los textos escolares “Serie Código Matemáticas 6 y Serie Código Matemáticas 7” que la obra matemática con relación a los números enteros tiende a ser de tipo puntual en la medida en que la mayoría de ellas se encuentran en un nivel de desempeño básico orientada a un solo tipo de tareas con técnicas, la mayoría de ellas de tipo algorítmica, lo cual no permite que el estudiante cuestione aquello que está aprendiendo, como tampoco permite que el estudiante explore y proponga situaciones que lo lleven a una ampliación de las obras matemáticas puntuales a locales. Es decir, la ausencia de un logos más potente y articulador hace que probablemente se oculte el por qué el campo de lo aritmético es insuficiente para introducir con eficiencia el estudio de $\mathbb{Z}$.

Tanto el plan de área de las instituciones como los textos escolares deben proponerse la enseñanza de una manera integrada (en el sentido de OM como mínimo locales), pues de esta manera se le permite al estudiante, descubrir el por qué y el para qué de los conocimientos que adquieren, que puedan determinar de esta manera las limitaciones que tienen ciertos contenidos que hacen necesario el surgimiento de otros y las potencialidades que a su vez dichos contenidos tienen en su construcción del conocimiento matemático.

El análisis de los textos escolares mostró desde la Teoría Antropológica de lo Didáctico, que existe una limitación frente a las tareas, dado que en el texto no se ve una orientación fuerte en la manera de desarrollar el concepto de número entero, pues se olvidan las razones de ser de las OM propuestas, lo cual puede agudizar los fenómenos de autismo temático y atomización de la enseñanza de las matemáticas que se han explicitado en este trabajo.

No solo los textos escolares presentan una limitación en la construcción del conocimiento matemático, también se puede encontrar dicha limitación en la organización matemática propuesta en el currículo (Estándares Básicos de competencias en Matemáticas (2006), Lineamientos Curriculares de Matemáticas(1998), plan de área de matemáticas), pues estos tienden a sustraerse de una razón de ser de lo que se enseña (desde el punto de vista de los conceptos matemáticos involucrados), lo que a su vez, debería tenerse en cuenta para brindar pautas a los docentes en formación en el sentido de que puedan ser críticos frente a las propuestas curriculares emanadas del MEN, donde tomen conciencia de que el conocimiento matemático no debe ser tomado como transparente y debe ser la fuente inicial de dónde partan las problemáticas didácticas que se deberán asumir en la institución escolar.

Igualmente, el trabajo realizado sugiere tener mucho cuidado con los modelos concretos al abordar la enseñanza de los enteros en la escuela, dado que la literatura ha mostrado que pueden existir efectos contraproducentes en dicho enfoque al propiciar un significado de $\mathbb{Z}$ demasiado alejado de su naturaleza algebraica lo que puede llegar a ser fuente de numerosos obstáculos.

Por otro lado, dado que no existen suficientes trabajos sobre cómo llevar a cabo el abordaje de $\mathbb{Z}$ desde obras matemáticas de tipo local y regional teniendo en cuenta entornos algebraicos, estamos de acuerdo tal como lo plantea Cid & Bolea (2007) en que la mejor sugerencia por el momento para los docentes, es emplear reflexivamente los modelos concretos sin abusar de su uso y reconociendo las problemáticas asociadas al trabajo con estos modelos que pueden surgir en dicha introducción y que suelen ser ignoradas por muchos de los profesores.

Finalmente como aporte fundamental desde nuestra formación y realización de este trabajo de grado, enmarcado en el currículo propuesto, podemos decir que existen cuestiones que debemos tener siempre presentes en nuestro quehacer como docentes de matemáticas, dado que las propuestas en los textos escolares y planes de área, suelen tener ausencias que suelen pasar inadvertidas en el complejo mundo de la escuela, es decir, debemos reformular de manera crítica estas OM para que la enseñanza de las que somos parte responsable en las instituciones no agudicen los efectos negativos que se mencionan en las investigaciones, sino que al contrario, puedan ser un aporte para mejorar la formación de nuestros estudiantes y a su vez, la de nosotras mismas.

5.2 BIBLIOGRAFÍA

Bruno, A. (1997). La enseñanza de los números negativos: Aportaciones de una investigación, Números. *Revista Didáctica de las matemáticas*. pp. 5 – 18.

Bruno, A. (2001) La enseñanza de los números negativos: formalismo y significado de los números negativos. La Gaceta. Tenerife- España.

Bruno, A. (2001) Algunas investigaciones sobre la enseñanza de los números negativos. Universidad de la Laguna. España.

Bruno, A. (2003). Metodología de una investigación sobre métodos de enseñanza de problemas aditivos con números negativos. En J. Murillo, P. M. Arnal, R. Escolano, J. M. Gairín & L. Blanco (Eds.), Actas del VI Simposio de la Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática (SEIEM). pp. 137-156. Logroño: Universidad de La Rioja.

Cid, E. (2001). Los modelos concretos en la enseñanza de los números negativos. Departamento de matemáticas. Universidad de Zaragoza. España.

Cid, E. & Bolea, P. (2007). Diseño de un modelo epistemológico de referencia para introducir los números negativos en un entorno algebraico. Departamento de Matemáticas. Universidad de Zaragoza.

Chevallard, Y. (1999). El análisis de las prácticas docentes en la teoría antropológica de lo didáctico. Recherches en didactique des Mathematiques, Vol. 19, (2).

Chevallard, Y. Bosch M & Gascón, J. (1997): Estudiar Matemáticas. El eslabón perdido entre matemáticas y aprendizaje. Ed. Horsori. Barcelona.

Díaz, C., et al. TIMSS-Colombia. (1997). Análisis y resultados de las pruebas de matemáticas. Editorial Magisterio. Santafé de Bogotá.

Gascón, J. (1998). Evolución de la didáctica de las matemáticas como disciplina científica. Departamento de Matemáticas. Universidad Autónoma de Barcelona.

Gascón, J. (1999): Fenómenos y problemas en didáctica de las matemáticas. En Ortega, T. (Editor): Actas del III Simposio de la SEIEM, Valladolid, pp. 129-150.

Gascón, J. (2003): Efectos del "*autismo temático*" sobre el estudio de la Geometría en Secundaria. Universidad de Zaragoza. España.

Gascón, J. & Bosch, M. (2009): Aportaciones de la teoría antropológica de lo didáctico a la formación del profesorado de matemáticas de secundaria.

González, J., et al. (1990). Números enteros. Colección. Matemáticas: cultura y aprendizaje, Madrid- España.

MEN, (1998). Lineamientos Curriculares de Matemáticas, Santa Fe de Bogotá D.C.– Colombia. Ed. Magisterio

MEN, (2006). Estándares Básicos de Competencias en Matemáticas, Santa Fe de Bogotá D.C.– Colombia. Ed. Magisterio.

MEN, (2008). Estándares en el aula: Relatos docentes, documento Nº 9. Santa Fe de Bogotá D.C.– Colombia. Ed. Magisterio.

TIMMS, (2007): Recuperado el 22 de febrero del 2011 del sitio web http://www.icfes.gov.co/timss/phocadownload/2010/informe%20ejecutivo%20timss.pdf

ANEXOS

Números enteros

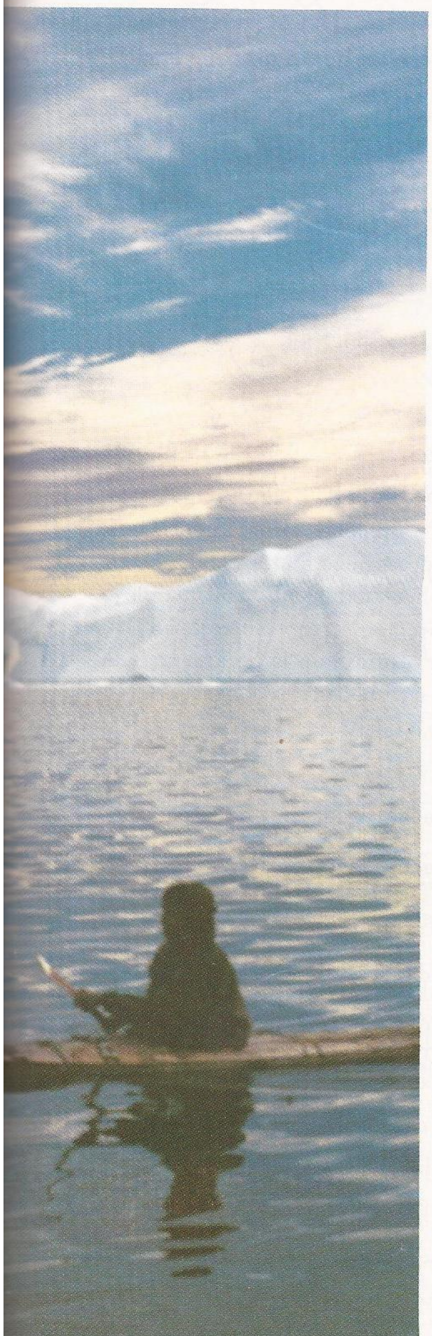
10

Pensamiento **numérico**

La temperatura 0 °C se lee "cero grados centígrados" y es la temperatura que indica el punto de congelación del agua. Por lo que 0 °C no quiere decir que no haya temperatura, a pesar del número cero.

Observa la fotografía. Estima la temperatura que tiene el agua.

En este capítulo aprenderás la diferencia entre los números positivos y los negativos, y cómo operar con ellos



¿Quién inventó el cero?

El símbolo 0 procede de la antigua Grecia, pero hay diferentes versiones sobre cómo surgió.

Algunas personas creen que este símbolo deriva de una moneda sin valor llamada *obol*. Los comerciantes usaban estas monedas como fichas para hacer cuentas en la arena. Cuando quitaban una de ellas, quedaba una marca redonda similar al cero.

Otros piensan que viene de la primera letra de la palabra griega *ouden*, que significa "nada".

El símbolo viajó de Grecia a la India, de la India a los países árabes y de ahí a Europa, a lo largo de cientos de años.

El cero es, pues, un símbolo de todos y de nadie; es universal.

Los números absurdos

El reconocimiento del valor matemático de los números negativos ha suscitado a lo largo de la historia numerosas controversias, ya que muchos matemáticos han alegado que en la naturaleza no existen cantidades negativas. Aunque ya eran conocidos desde la antigüedad, la oposición a ellos se extendió incluso hasta el siglo XIX. El alemán Michael Stifel (1487-1567) los denominaba "números absurdos" y Gerolamo Cardano (1501-1576), "números ficticios". El mismísimo René Descartes (1596 - 1650) se refería a ellos como "raíces falsas", y Francis Maseres (1731-1824) decía: "Sería deseable que los números negativos no hubieran sido admitidos en el álgebra y que se volvieran a eliminar de ella". Sin embargo, sin ellos no sería posible una operación tan elemental como la sustracción, ya que no habría solución para restas como $5 - 7$.

¿Cómo fueron llamados los números negativos a lo largo de la historia? ¿Qué importancia tuvieron en las matemáticas?

2. De los números naturales a los números enteros

A veces, no es suficiente con usar los números naturales para expresar de manera matemática situaciones de la vida cotidiana.

Por ejemplo, si en una ciudad la temperatura es de 25°C, se puede pensar que sus habitantes están disfrutando de una temperatura agradable o pasando mucho frío.

Es conveniente añadir un signo más (+) delante del 25 que indica si la temperatura es de 25°C sobre cero o un signo menos (−) si la temperatura es de 25°C bajo cero.

Los números naturales precedidos de un signo (+) se llaman **números enteros positivos** ($\mathbb{Z}^+$).

Los números naturales precedidos de un signo (−) se llaman **números enteros negativos** ($\mathbb{Z}^-$).

Los **números enteros** ($\mathbb{Z}$) son los números enteros positivos, los enteros negativos y el cero.

Es decir:

$$\mathbb{Z} = \mathbb{Z}^+ \cup \mathbb{Z}^- \cup \{0\}$$

Sabías que...

- El cero es el único número entero que no tiene signo: no es ni positivo ni negativo.
- Los números enteros positivos coinciden con los números naturales.

  $+1 = 1$ $+2 = 2$...

  Por eso, normalmente, cuando se escribe un número entero positivo *no se escribe el signo*.

EJERCICIO RESUELTO

- Expresa el número entero asociado a estas situaciones.
  a) La temperatura ambiente es de 5 °C bajo cero.
  b) La ciudad está a 650 m sobre el nivel del mar.
  c) Julián tiene unos ahorros de $ 400 000.
  d) *Pitágoras nació en el año 570 a.C.*
  e) Ana está en el quinto piso del edificio.
  f) El buceador se encuentra a 15 m de profundidad.

a) −5 b) +650 c) +400 d) −570 e) +5 f) −15

EJERCICIOS PROPUESTOS

3 Expresa con un número entero las siguientes informaciones.

a) El avión está volando a 9 500 m de altura.
b) La temperatura mínima de ayer fue de 3 °C bajo cero.
c) El garaje está en el segundo sótano.
d) El buceador está nadando a 20 m de profundidad.
e) Sergio debe $ 25 000.
f) La mamá de Ana María tiene un crédito de $ 8 000 000 con el banco.

4 Expresa cada enunciado con un número entero.

a) La latitud del ecuador.
b) La ciudad está al nivel del mar.

5 Indica el significado de los números −2, 0 y +4 en las siguientes situaciones.

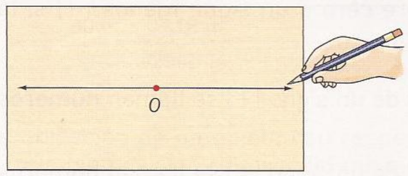
a) En un ascensor.
b) En una cuenta bancaria.
c) En un termómetro.
d) En el mar.

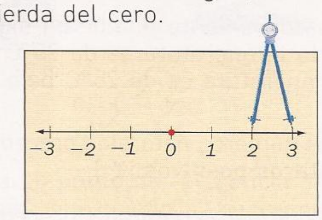
3. Números enteros en la recta numérica

Los números enteros se representan en una recta siguiendo estos pasos:

1.º **Se dibuja una recta** horizontal y se marca un punto en ella que representa el cero, 0, y se llama origen.

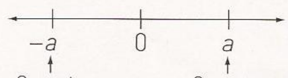
2.º **Se fija el 1**, y tomando como unidad su distancia al origen, se marcan puntos a la derecha y a la izquierda del cero.





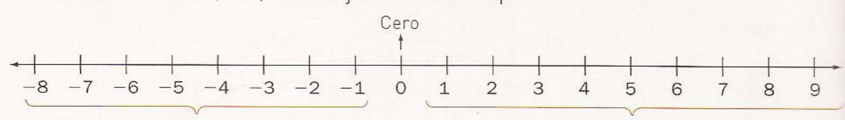
Recuerda

En la recta numérica los números que están a la misma distancia de cero y tienen signo contrario se llaman opuestos.



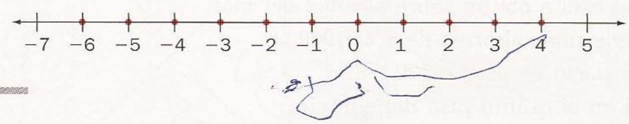
Los puntos situados a la **derecha** del cero representan los **enteros positivos**, y los situados a la **izquierda**, los **enteros negativos**.

En la recta numérica, el conjunto $\mathbb{Z}$ se representa así:



EJERCICIO RESUELTO

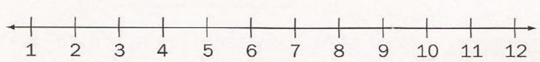
- Representa en una recta numérica los números enteros comprendidos entre −7 y 5.



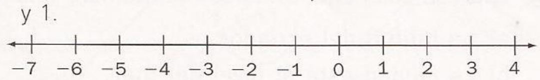
EJERCICIOS PROPUESTOS

6 Representa en la recta numérica:

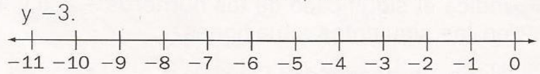
a) Los números enteros mayores que 7 pero menores que 13.



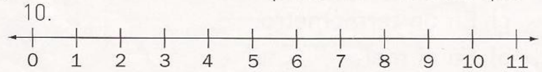
b) Los números enteros comprendidos entre −5 y 1.



c) Los números enteros comprendidos entre −11 y −3.

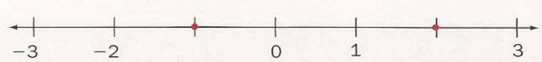


d) Los números enteros positivos menores que 10.

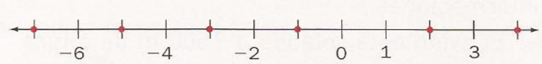


7 Indica qué números enteros están representados en cada recta numérica.

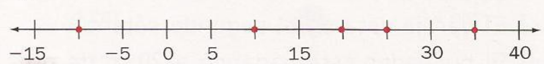
a)



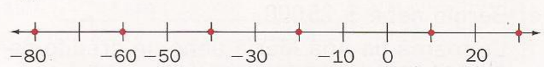
b)



c)

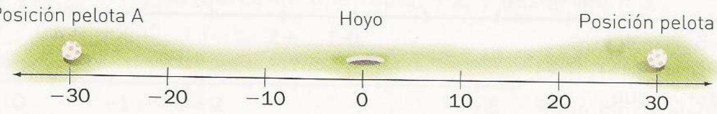


d)



4. Valor absoluto

Ejemplo. *En la recta numérica se representan las posiciones de unas pelotas de golf con respecto al hoyo.*

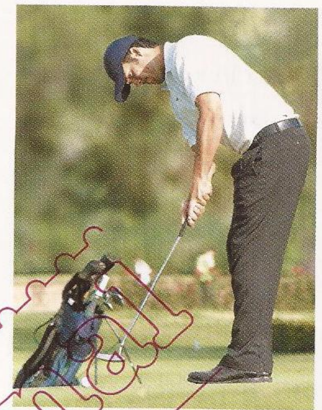


Los números +30 y −30 tienen el mismo **valor absoluto**, es decir, se encuentran a la misma **distancia de 0**.

El valor absoluto se simboliza escribiendo el número entre dos barras.

Distancia de −30 a 0 — Distancia de +30 a 0

$$\underbrace{|-30|}_{\text{Valor absoluto de } -30} = 30 \qquad \underbrace{|+30|}_{\text{Valor absoluto de } +30} = 30$$



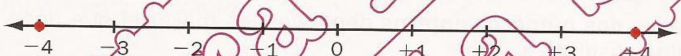
En el golf gana el jugador que hace el menor recorrido con el menor número de golpes.

> **Valor absoluto de un número entero *a***
>
> Se define como la distancia entre *a* y 0. Se simboliza $|a|$ y es siempre una cantidad positiva.

EJERCICIOS RESUELTOS

- Representa en una recta los números cuyo valor absoluto es 4.

  Hay dos números enteros cuyo valor absoluto es 4: +4 y −4, ya que su distancia al origen es 4 en ambos casos. Su representación es:



- Representa en la recta los números enteros cuyo valor absoluto es 1.

  Los números cuyo valor absoluto es 1 son dos: uno es positivo, +1, y el otro es negativo, −1.

EJERCICIOS PROPUESTOS

8 Calcula el valor absoluto de estos números.

a) $|-9|$ c) $|-3|$ e) $|0|$
b) $|+5|$ d) $|+7|$ f) $|-8|$

9 Halla el número que tiene por valor absoluto 7, y está situado entre −8 y −6.

10 El valor absoluto de un número es 12.

a) ¿Qué número puede ser?
b) ¿Qué número es, si se sabe que está a la izquierda del 0?

11 Escribe los números enteros que tengan por valor absoluto cada uno de los siguientes números:

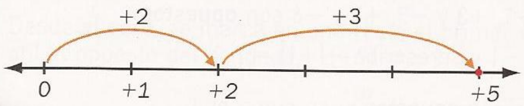
a) 3 b) 7 c) 12 d) 435 e) 0

12 El valor absoluto de un número es igual a 8 y se representa en la recta numérica a la izquierda del cero. ¿Cuál es el número?

13 Averigua el número entero cuyo valor absoluto es igual a 4, y en la recta numérica se representa a la derecha de −2.

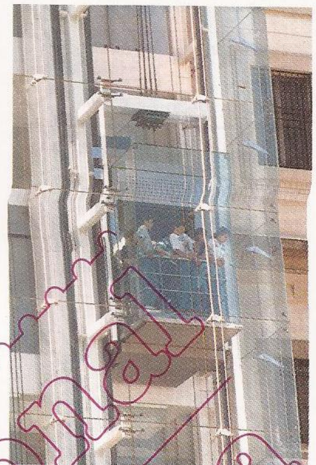
Ejemplo. *Un ascensor sube dos pisos, para y sube otros tres. ¿Cuántos pisos sube en total?*

Desde el cero, se marca en una recta, +2, y desde ahí +3.



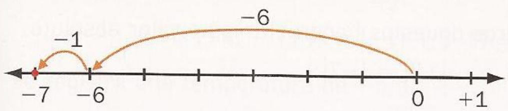
$(+2) + (+3) = +5$

Sube cinco pisos.



Un ascensor sirve para trasladar verticalmente personas o mercancías de un piso a otro.

Ejemplo. *Un ascensor baja seis pisos y luego baja un piso. ¿Cuántos pisos baja en total?*



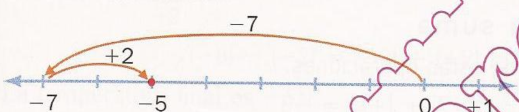
$(-6) + (-1) = -7$

Baja siete pisos.

Para **sumar dos números enteros del mismo signo**, se suman sus valores absolutos y al resultado se le añade el signo de los sumandos.

Suma de números enteros de distinto signo

Ejemplo. *Un ascensor baja siete pisos y luego sube dos. ¿En qué piso se encuentra al final?*



$(-7) + (+2) = -5$

Se encuentra en el piso −5.

Para **sumar dos números enteros de distinto signo**, se restan sus valores absolutos y se añade al resultado el signo del sumando que tiene mayor valor absoluto.

Para sumar más de dos números enteros, se pueden sumar de dos en dos o sumar el resultado de la suma de los positivos y la de los negativos.

Recuerda

El signo menos delante de un paréntesis cambia los signos de los números que hay dentro del paréntesis.

$+7 - [(-3) + 6] = 7 + 3 - 6$

EJERCICIO RESUELTO

- Realiza esta adición de números enteros: $(-4) + (+2) + (-6) + (+5)$

Se suman por separado los enteros positivos y los negativos.

$$(-4) + (+2) + (-6) + (+5) = [(+2) + (+5)] + [(-4) + (-6)] =$$
$$= (+7) + (-10) = -3$$

EJERCICIOS PROPUESTOS

18 Efectúa estas operaciones.

a) $(+9) + (+3)$ c) $(-8) + (-2)$

b) $(-10) + (+15)$ d) $(+1) + (-4)$

19 Realiza las siguientes adiciones.

a) $(+10) + (+5) + (-3)$

b) $(+9) + (-3) + (-12)$

20 Completa los números que faltan.

a) $(+6) + \square = +9$ c) $(-2) + \square = -3$

b) $\square + (-4) = +1$ d) $(+3) + \square = -4$

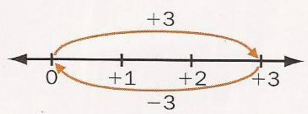
21 Halla el resultado de estas operaciones.

a) $(-13) + (+8) + (+7) + (-1)$

b) $(+6) + (-4) + (-3) + (+8)$

7. Opuesto de un número entero

Suma de opuestos



En todas estas adiciones el resultado es cero:

$$(+1) + (-1) = 0 \qquad (+3) + (-3) = 0 \qquad (+6) + (-6) = 0$$

Los números: +1 y −1, +3 y −3, +6 y −6 son **opuestos**.

El opuesto de +1 es −1 y se escribe $-(+1) = -1$

Dos números enteros son **opuestos** si su suma es 0.

El **opuesto de un número entero** es otro número entero con el mismo valor absoluto y distinto signo.

Observa que dos números opuestos tienen el mismo valor absoluto:

$$|+7| = |-7|$$

Opuesto del opuesto

Para obtener el opuesto del opuesto de −2, primero se halla el opuesto de −2, $-(-2) = +2$, y después el de este, $-(+2) = -2$.

El resultado obtenido es que el opuesto del opuesto de +2 es +2.

$$-[-(+2)] = +2$$

El **opuesto del opuesto** de un número es igual al mismo número.

Opuesto de una suma

Observa el resultado de estas operaciones.

$$(-7) + (+4) = -3$$

$$\boxed{-[(-7) + (+4)]} = -(-3) = +3$$

$$-(-7) = +7 \qquad -(+4) = -4$$

$$\boxed{-(-7) + -(+4)} = (+7) + (-4) = +3$$

El **opuesto de una adición** es igual a la adición de los opuestos de los sumandos.

EJERCICIO RESUELTO

- Comprueba que se cumple: $-[(+6) + (-2)] = -(+6) + -(-2)$

$$(+6) + (-2) = +4 \qquad -(+6) = -6 \qquad -(-2) = +2$$

$$-[(+6) + (-2)] = -(+4) = -4 \qquad -(+6) + -(-2) = (-6) + (+2) = -4$$

Se cumple que: $-[(+6) + (-2)] = -(+6) + -(-2)$

EJERCICIOS PROPUESTOS

√ **22** Halla el opuesto de cada uno de los siguientes números.

a) −4 b) +8 c) +15 d) −301

23 Escribe el valor absoluto del opuesto de estos números.

a) +4 b) −11 c) −200 d) +1 001

24 Obtén el opuesto del opuesto de −5.

√ **25** Comprueba si se cumplen estas igualdades.

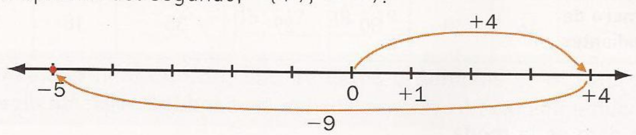
a) $-[(+4) + (+3)] = -(+4) + -(+3)$

b) $-[(-5) + (-8)] = -(-5) + -(-8)$

c) $-[(-7) + (+8)] = -(-7) + -(+8)$

Ejemplo. *La temperatura de una ciudad es de 4 °C a las 6:00 a.m. Si a las 3:00 p.m. hubo un descenso de 9 °C, ¿qué temperatura se registra a esa hora?*

Desde el cero, se marca en una recta el primer número, +4, y desde ahí el opuesto del segundo, $-(+9) = -9$.

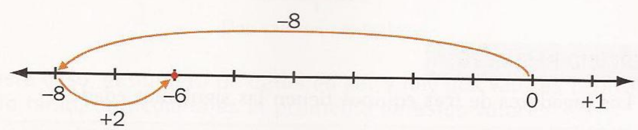


$$(+4) - (+9) = (+4) + (-9) = -5$$

Se registra una temperatura de −5 °C.

Ejemplo. *En cierto momento la temperatura de la ciudad es de −8 °C. Si aumenta 2 °C, ¿cuál es la temperatura final?*

Desde el cero, se marca en una recta el primer número, −8, y desde ahí el opuesto del segundo, $-(-2) = +2$.



$$(-8) - (-2) = (-8) + (+2) = -6$$

La temperatura final es −6 °C.

Para **restar dos números enteros**, se suma al primero el opuesto del segundo.

RECUERDA

Siempre se pueden restar números enteros. Con los números naturales no se pueden hacer restas como:

$$17 - 23$$

En cambio, con los números enteros sí se puede:

$$17 - 23 = 17 + (-23) = -6$$

RECUERDA

El signo (−) tiene dos significados.

Operación

$$12 - (-5)$$

Número negativo

EJERCICIO RESUELTO

- Calcula el resultado de estas sustracciones.

a) $(+7) - (+2)$
b) $(-3) - (-1)$
c) $(+8) - (-6)$
d) $(-5) - (+3)$

a) $(+7) - (+2) = (+7) + (-2) = +5$
b) $(-3) - (-1) = (-3) + (+1) = -2$
c) $(+8) - (-6) = (+8) + (+6) = +14$
d) $(-5) - (+3) = (-5) + (-3) = -8$

EJERCICIOS PROPUESTOS

26 Halla el resultado de estas operaciones.

a) $(-2) - (+8)$
b) $(+6) - (+7)$
c) $(-19) - (-20)$
d) $(-10) - (-4)$
e) $(+3) - (-9)$
f) $(+16) - (-2)$

27 En una resta de dos números enteros, uno de ellos es +15, y la diferencia es −2. ¿Cuál es el otro?

28 Averigua los números que faltan en estas igualdades.

a) $(-5) - (-6) = (-5) + \square = \square$
b) $(+3) - (-8) = (+3) + \square = \square$
c) $(-12) - \square = (-12) + (+6) = \square$

29 Expresa la resta $(+34) - (+47)$ como suma de dos números. ¿Cuál es su valor?

CÁLCULO MENTAL

35 Indica los números que faltan en la tabla.

Anterior	Número	Siguiente
13	14	15
-6	-5	
-13		
	-10	
		-8

36 Enumera todos los números enteros comprendidos entre estos pares.

a) -5 y 0 b) $+2$ y -2

37 Anota todos los números enteros cuyo valor absoluto sea menor que cada uno de los siguientes.

a) 2 c) 7
b) 5 d) 12

38 Halla el número que falta.

a) $(-6) - -(\square) = 0$
b) $-(\square) - 15 = 0$

39 Obtén el resultado.

a) $17 - (-15)$ c) $(-1) + (-3)$
b) $25 + (-4) + (-6)$ d) $-(-12) - (-8)$

40 Escribe el signo $<$ o $>$, según corresponda.

a) $-78 \square 26$ f) $-54 \square -29$
b) $-27 \square -49$ g) $45 \square -36$
c) $47 \square 38$ h) $29 \square -98$
d) $19 \square -29$ i) $-19 \square -18$
e) $-18 \square 36$ j) $0 \square -2$

EJERCICIOS PARA ENTRENAR

Números enteros. Valor absoluto

41 Expresa con números enteros.

a) La temperatura mínima es de 5 °C bajo cero.
b) El monte Aconcagua mide 7 010 m.
c) Euclides nació en el año 300 antes de Cristo.
d) La profundidad de la fosa de Tonga, en el océano Índico, es de 10 882 m.

42 ¿Qué números representan las letras en esta recta?

43 El valor absoluto de un número es igual a 8 y se representa en una recta a la izquierda del cero. ¿Cuál es el número?

44 Calcula el valor de las siguientes expresiones.

a) $|-15| =$ e) $|17| =$
b) $|-6 + 5| =$ f) $|-8 + (-9)| =$
c) $|-8| + |-7| =$ g) $|4| - |3| =$
d) $|0| =$ h) $||8| - |7|| =$

Comparación

45 ¿Qué número entero cumple estas dos condiciones?

- Es mayor que -2 y menor que 1.
- No coincide con su opuesto.

46 Escribe todos los números enteros que faltan.

a) $-4 < \ldots < +4$
b) $-10 < \ldots < 0$
c) $-1 < \ldots < +5$
d) $0 < \ldots < +7$

47 Ordena estos números de mayor a menor.

a) $-3, +5, -2, 0, -4$
b) $+6, 0, -3, -1, +5, +3$
c) $-1, +2, +1, -6, +4, -7$
d) $-2, -6, 0, +3, -5, +9$

48 Escribe los números que faltan.

a) $7 + (-1) = -(\square)$
b) $3 + -(-(\square)) = 0$

Adición y sustracción

49 Realiza las siguientes adiciones.

a) $10 + (-4) + (-2)$

b) $(-5) + (-3) + 10$

c) $(-3) + 15 + (-2) + 25$

d) $(-6) + 8 + (-25) + (-3)$

50 Copia esta tabla en tu cuaderno y complétala.

Resta	En forma de suma	Resultado
$12 - (-8)$	$12 + 8$	20
$(-15) - (-4)$	$\square + 4$	$\square$
$\square - 9$	$12 + (-\square)$	$\square$
$8 - \square$	$\square + 7$	15

51 Escribe verdadero (V) o falso (F), según corresponda.

a) La suma de dos números enteros positivos es un entero positivo. $\square$

b) La suma de dos números enteros negativos es un entero negativo. $\square$

c) La suma de dos números enteros con diferente signo es positiva, si el número entero de mayor valor absoluto es negativo. $\square$

d) La suma de dos números enteros con diferente signo es negativa, si el número entero de mayor valor absoluto es negativo. $\square$

e) La suma de dos números enteros de diferente signo siempre es negativa. $\square$

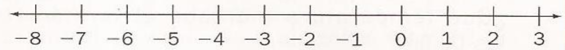
f) La diferencia de dos números enteros de diferente signo siempre es positiva. $\square$

52 Aplica el mismo color a los cuadros que contienen operaciones equivalentes.

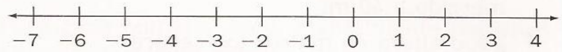
$-3 + -7$	$6 + (-6)$
$-7 + (-8)$	$0 + (-9)$
$-3 + [2 + (-5)]$	$-9 + 0$
$-4 + 2$	$-2 + (-1)$
$-7 + -3$	$(-3 + 2) + (-5)$
$-6 + 6$	$-3 + (-1)$

53 Representa en cada recta numérica la operación indicada. Luego, resuélvela.

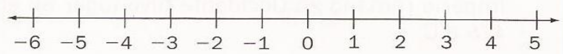
a) $-3 + (-5) =$



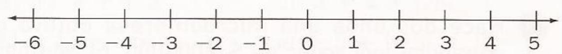
b) $4 - 8 =$



c) $5 + (-8) =$

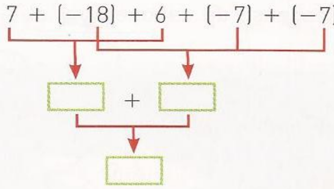


d) $-3 + 7 =$

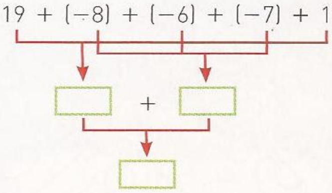


54 Suma todos los números enteros positivos, todos los enteros negativos, y luego, adiciona la sumas parciales obtenidas.

a) $7 + (-18) + 6 + (-7) + (-7)$



b) $19 + (-8) + (-6) + (-7) + 17$



55 Realiza las operaciones indicadas dentro de paréntesis y luego encuentra los resultados finales.

a) $(19 - 16) - [29 + (-19)] =$

b) $(26 - 37) + (-39 + 32) =$

c) $[23 - (-29)] + [29 - (-34)] =$

d) $(7 - 9) - (6 - 21) - 19 =$

56 Calcula el resultado en cada caso.

a) ¿Cuánto hay que sumarle a -6 para obtener -4?

b) ¿Qué número se debe adicionar con -20 para obtener -8?

PROBLEMAS PARA APLICAR

✓**57** Ayer a las 20:00, el termómetro marcaba 2 °C. A las 00:00 la temperatura descendió 5 °C.

¿Qué temperatura marcaba el termómetro a las 00:00?

58 Un avión vuela a 3500 m y un submarino está sumergido a 40 m.

¿Qué altura en metros los separa?

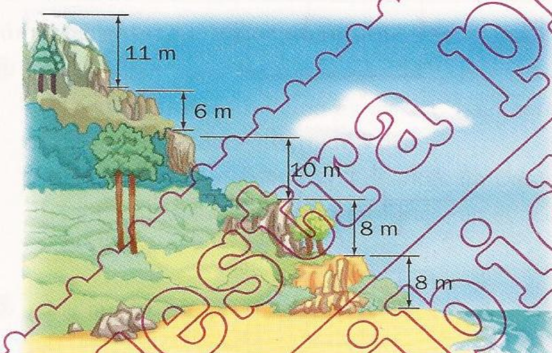
59 Roma fue fundada en el año 753 a.C. y el final del Imperio romano en Occidente tuvo lugar en el año 476 d.C.

¿Cuántos años transcurrieron desde la fundación de Roma hasta el final del Imperio?

60 Hace dos años una microempresa obtuvo unas ganancias por valor de $ 2000000. El año pasado tuvo pérdidas de $ 520000.

¿Cuál fue el resultado global de la microempresa en los dos últimos años?

61 Un grupo de amigos, con un monitor, hicieron el fin de semana descenso de cañones por el siguiente itinerario.



a) Expresa el recorrido con números enteros.

b) Calcula cuántos metros descendieron en total.

62 La latitud de una ciudad es de unos 40° N y la de otra, de unos 58° S.

¿Cuál es, en valor absoluto, la diferencia entre las latitudes de las dos ciudades?

63 En un juego de "La escalera", Leonor queda, después del primer turno, cuatro escalones arriba de la salida; en el segundo, queda dos escalones arriba de la salida, y en el tercero, cinco escalones por debajo. Representa con números enteros los desplazamientos que realizó Leonor en cada turno.

64 Daniel fue al hospital a visitar a un amigo, subió al ascensor y pulsó el piso en el que está su amigo, pero antes de llegar hizo el siguiente recorrido:

1.° Sube cinco pisos.
2.° Baja siete pisos.
3.° Sube diez pisos.
4.° Sube cuatro pisos.
5.° Baja tres pisos.

¿En qué piso se encuentra su amigo?

65 En un juego de golf, la bola de Juan quedó 7 cm antes del hoyo, y la de Ramón pasó sobre el hoyo y quedó 5 cm después, sobre la misma línea de la de Juan. ¿Qué distancia separa las dos bolas?

66 En cierta nevera la temperatura desciende 5 °C cada 15 min. Si la temperatura inicial es 15 °C, ¿cuánto tiempo alcanzará los −35 °C?

67 Un buzo se encuentra a 90 m de profundidad en el mar. Si tarda en llegar a la superficie 30 min a un ritmo constante, ¿cuántos metros asciende cada 6 min?

68 Ayer, a las 8 p.m., el termómetro marcaba 2 °C. A las 12 p.m. la temperatura descendió 5 °C. ¿Qué temperatura marcaba el termómetro a las 12 p.m.?

69 Un avión vuela a 3 500 m de altura y un submarino está sumergido en el mar 40 m. ¿Qué altura en metros los separa?

70 Entre un número positivo y su opuesto hay 25 números. ¿Cuál es el número positivo?

71 Entre un número negativo y su opuesto hay 19 números. ¿Cuál es el número negativo?

72 La ciudad de Roma fue fundada en el año 753 a. C. y en el año 800 d. C. fue coronado Carlomagno. ¿Cuántos años transcurrieron entre estos dos hechos?

73 La suma de dos números enteros es −35. Si uno de ellos es 42, ¿cuál es el otro número?

74 Aníbal nació en el año 274 antes de Cristo, y el Cid, en el año 1003. ¿Cuántos años transcurrieron entre los dos nacimientos?

REFUERZO

Operaciones con números enteros

75 Expresa estos datos con números enteros.

a) El submarino está a 110 m.

b) María va a escalar 800 m.

c) El suelo del pozo de una mina está a 518 m de profundidad.

76 Representa en una recta todos los números enteros cuyo valor absoluto sea mayor que 2 y menor que 7.

77 Ordena estos números de menor a mayor.

a) $+7, -5, -3, +4, 0$

b) $+8, +6, -2, -4, -9$

78 Escribe el número que falta.

a) $(-4) + -(\square) = 0$ b) $\square = -(-(-2))$

79 Describe una situación para cada número entero.

a) 25 d) 18

b) 243 e) 13 425

c) 21 000 f) 112 000

80 Enumera todos los enteros comprendidos...

a) entre $+2$ y -2 d) entre -5 y 0

b) entre -6 y $+1$ e) entre $+8$ y $+3$

c) entre -4 y -8 f) entre 0 y $+10$

81 Para cada número, anota mentalmente todos los enteros cuyo valor absoluto sea menor que él.

a) 2 c) 5

b) 7 d) 12

82 Realiza las siguientes adiciones.

a) $17 + 9 + 3$ d) $3 + 4 + (28)$

b) $-1 + (-5)$ e) $-5 + (-5) + 10$

c) $-12 + (-8) + (-7)$ f) $10 + (-4) + (-6)$

83 Realiza las siguientes sustracciones.

a) $15 - 7$ d) $15 - (-7)$

b) $-12 - 8$ e) $-(-12) - (-8)$

c) $20 - 17$ f) $20 - (-17)$

AMPLIACIÓN

84 Escribe cada uno de estos números como diferencia de dos números enteros.

a) 77 b) -113 c) -217 d) 0

85 Realiza las siguientes adiciones.

a) $10 + (-4) + (-3)$

b) $(-5) + (-3) + 10$

c) $(-3) + 15 + (-2) + 25$

d) $(-6) + 8 + (-25) + (23)$

86 Sustituye cada $\square$ por el número adecuado.

a) $27 + 9 + (-5) + 8 = \square + (-5) + 8 =$
$= \square + 8 = \square$

b) $-12 + 10 + (-7) + 9 = \square + 2 = \square$

c) $10 + (-11) + 15 + 11 = 0 + \square = \square$

87 Completa.

Sumandos	Suma de positivos	Suma de negativos	Suma total
−4, 5, 8, −3	13	27	6
8, −12, 7, −4			
8, −9, 6, −5,			

88 Realiza las siguientes operaciones, haciendo en primer lugar las de los paréntesis.

a) $(25 - 8) - (-8 + 15)$

b) $-15 - (-12 + 3) + (-15 + 8)$

c) $-10 + (-15 + 8) - (-8 + 19)$

89 Sustituye cada $\square$ por el número adecuado.

a) $45 - (-12 + 35) = 45 - \square = \square$

b) $(-18 + 7) - (-12 + 9) = -11 - \square = \square$

90 Realiza las siguientes operaciones suprimiendo en primer lugar los paréntesis.

a) $14 - (-8 + 10)$

b) $[18 + (-4)] - (-15 + 9)$

c) $(-40 + 18) - (-16 + 29)$

91 Sustituye cada $\square$ por el número adecuado:

a) $-14 - (-12 + 15) = -14 + \square + (-15) = \square$

b) $(-18 + 9) - (-23 + 15) =$
$= -18 + \square + 23 + \square = \square$

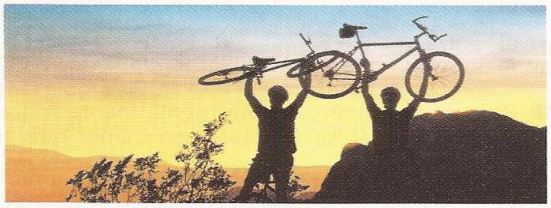
c) $[15 + (-4) + 3] - (-16 + 23) =$
$= 15 + \square + \square + 16 + \square = \square$

> actividades

PARA INTERPRETAR Y RESOLVER

92 Las dos excursiones

La figura muestra el momento en que Juan y Luis parten de excursión en sus bicicletas.



La tabla recoge el punto kilométrico en que se encuentra cada uno a lo largo del trayecto.

	11:00	11:30	12:00	12:30	13:00
Juan	150	160	172	180	185
Luis	122	114	102	90	75

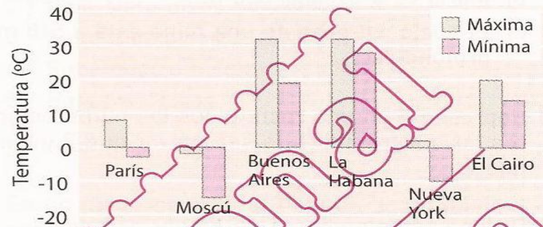
a) ¿Quién ha recorrido más distancia?

b) ¿Quién pedalea más deprisa desde las 12:30 hasta el final del trayecto?

c) Elabora una tabla que muestre la distancia que separa a Juan de Luis en cada momento.

93 Frío y calor

El gráfico muestra las temperaturas máximas y mínimas alcanzadas el 1 de enero en varias capitales mundiales.



a) Indica las temperaturas más alta y más baja y en qué lugares se alcanzan. Halla la diferencia entre ambas.

b) ¿En qué ciudad hay más diferencia entre la temperatura máxima y la mínima? Calcula dicha diferencia.

c) Ordena las ciudades en orden creciente de temperaturas mínimas.

AUTOEVALUACIÓN

1 Expresa estas cantidades con números enteros.

a) La altura del Everest es de 8848 m.

b) María debe $ 52000.

c) El coche está en el tercer sótano del aparcamiento.

d) Euclides nació en el año 300 a.C.

2 Sustituye las letras por los números que representan, e indica el valor absoluto de cada uno.

3 Calcula el resultado de estas sumas y restas.

a) 18 − 22 − 5 c) −12 − (−10) + 6

b) −10 + 15 − 35 d) 5 − (−9) − 9

4 El anterior de un número es −7.

a) ¿Cuál es su opuesto?

b) ¿Y su valor absoluto?

5 Completa los números que faltan.

Número	−15	12	−7	
Número + (−2)	−17			0

6 Realiza las siguientes adiciones.

a) 32 + 49 e) 5 + (−8)

b) (−10) + 15 f) 18 + (−25)

c) (−12) + (−10) g) 18 + (−22) + (−5)

d) 5 + (−4) + (−12) h) (−10) + (−12) + (−2)

7 Realiza las siguientes sustracciones.

a) 15 − (−10) d) 18 − (−4)

b) (−14) − 32 e) (−8) − (+3)

c) (−6) − (−4) f) 5 − (+3) − (−3)

8 Entre las 7 a.m. y el mediodía la temperatura subió 12 °C. Si a las 7 a.m. la temperatura era de 25 °C, ¿qué temperatura indicaba el termómetro al mediodía?

PARA INTERPRETAR Y RESOLVER

92 **Las dos excursiones**

La figura muestra el momento en que Juan y Luis parten de excursión en sus bicicletas.

La tabla recoge el punto kilométrico en que se encuentra cada uno a lo largo del trayecto.

	11:00	11:30	12:00	12:30	13:00
Juan	150	160	172	180	185
Luis	122	114	102	90	75

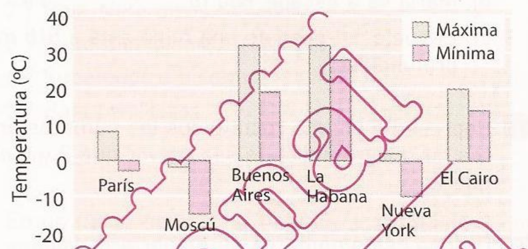
a) ¿Quién ha recorrido más distancia?

b) ¿Quién pedalea más deprisa desde las 12:30 hasta el final del trayecto?

c) Elabora una tabla que muestre la distancia que separa a Juan de Luis en cada momento.

93 **Frío y calor**

El gráfico muestra las temperaturas máximas y mínimas alcanzadas el 1 de enero en varias capitales mundiales.



a) Indica las temperaturas más alta y más baja y en qué lugares se alcanzan. Halla la diferencia entre ambas.

b) ¿En qué ciudad hay más diferencia entre la temperatura máxima y la mínima? Calcula dicha diferencia.

c) Ordena las ciudades en orden creciente de temperaturas mínimas.

AUTOEVALUACIÓN

1 Expresa estas cantidades con números enteros.

a) La altura del Everest es de 8848 m.

b) María debe $ 52000.

c) El coche está en el tercer sótano del aparcamiento.

d) Euclides nació en el año 300 a.C.

2 Sustituye las letras por los números que representan, e indica el valor absoluto de cada uno.

3 Calcula el resultado de estas sumas y restas.

a) $18 - 22 - 5$

b) $-10 + 15 - 35$

c) $-12 - (-10) + 6$

d) $5 - (-9) - 9$

4 El anterior de un número es -7.

a) ¿Cuál es su opuesto?

b) ¿Y su valor absoluto?

5 Completa los números que faltan.

Número	-15	12	-7	
Número + (-2)	-17			0

6 Realiza las siguientes adiciones.

a) $32 + 49$

b) $(-10) + 15$

c) $(-12) + (-10)$

d) $5 + (-4) + (-12)$

e) $5 + (-8)$

f) $18 + (-25)$

g) $18 + (-22) + (-5)$

h) $(-10) + (-12) + (-2)$

7 Realiza las siguientes sustracciones.

a) $15 - (-10)$

b) $(-14) - 32$

c) $(-6) - (-4)$

d) $18 - (-4)$

e) $(-8) - (+3)$

f) $5 - (+3) - (-3)$

8 Entre las 7 a.m. y el mediodía la temperatura subió 12 °C. Si a las 7 a.m. la temperatura era de 25 °C, ¿qué temperatura indicaba el termómetro al mediodía?