UNA INTRODUCCIÓN AL CONCEPTO DE ENTERO ENFATIZANDO EN EL NÚMERO NEGATIVO EN EL GRADO SÉPTIMO DE LA EDUCACIÓN BÁSICA

NATHALY NAVIA ORTEGA

VANESSA OROZCO CASTILLO

UNIVERSIDAD DEL VALLE
INSTITUTO DE EDUCACIÓN Y PEDAGOGÍA
LICENCIATURA EN EDUCACIÓN BÁSICA, ÉNFASIS EN MATEMÁTICAS
SANTIAGO DE CALI, FEBRERO DE 2012

UNA INTRODUCCIÓN AL CONCEPTO DE ENTERO ENFATIZANDO EN EL NÚMERO NEGATIVO EN EL GRADO SÉPTIMO DE LA EDUCACIÓN BÁSICA

NATHALY NAVIA ORTEGA
Código: 0436975

VANESSA OROZCO CASTILLO
Código: 0539128

Trabajo de grado presentado para optar por el título de Licenciada en Educación Básica con Énfasis en Matemáticas.

DIRECTORA DE TRABAJO DE GRADO:
Mg. LIGIA AMPARO TORRES RENGIFO

UNIVERSIDAD DEL VALLE
INSTITUTO DE EDUCACIÓN Y PEDAGOGÍA
LICENCIATURA EN EDUCACIÓN BÁSICA, ÉNFASIS EN MATEMÁTICAS
SANTIAGO DE CALI, FEBRERO DE 2012

Nota de aceptación

Jurado

María Cristina Velasco

Jurado

Octavio Augusto Pabón

Santiago de Cali, Febrero de 2012

UNIVERSIDAD DEL VALLE
INSTITUTO DE EDUCACIÓN Y PEDAGOGÍA
ÁREA DE EDUCACIÓN MATEMÁTICA

Acta de Evaluación de Trabajo de Grado

Tenga en cuenta: 1. Marque con una **X** la opción escogida.
2. diligencie el formato con una letra legible.

Título del Trabajo:	Una introducción al concepto de entero enfatizando en el número negativo en el grado séptimo de la Educación básica.
Se trata de:	Proyecto [ ] Informe Final [X]
Director:	Ligia Amparo Torres R
1er Evaluador:	María Cristina Velasco
2do Evaluador:	Octavio Augusto Pabón
Fecha y Hora	Año: 2012 Mes: 03 Día: 09 Hora:

Estudiantes

Nombres y Apellidos completos	Código	Programa Académico
Nathaly Narla Ortega	0436975	3469
Vanessa Orozco Castillo	0539128	3469

Evaluación

Aprobado	X	Meritorio		Laureado	
Aprobado con recomendaciones		No Aprobado		Incompleto	

En el caso de ser **Aprobado con recomendaciones** (diligenciar la página siguiente), éstas deben presentarse en un plazo de ____________ (máximo un mes) **ante**:

Director del Trabajo		1er Evaluador		2do Evaluador	

En el caso que el Informe Final se considere **Incompleto**, se da un plazo de máximo de ____________ semestre(s) para realizar una nueva reunión de evaluación el:

Año:		Mes:		Día:		Hora:	

En el caso que no se pueda emitir una evaluación por falta de conciliación de argumentos entre Director, Evaluadores y Estudiantes; expresar la **razón del desacuerdo** y las **alternativas** de solución que proponen (diligenciar la página siguiente).

Firmas:

	Mª Cristina Velasco	
Director del Trabajo de Grado	1er Evaluador	2do Evaluador

TABLA DE CONTENIDO

ÍNDICE DE TABLAS

ÍNDICE DE ILUSTRACIONES

RESUMEN

El presente trabajo se inscribe en la línea de formación de Didáctica de las Matemáticas de la Licenciatura en Educación Básica con énfasis en Matemáticas del Área de Educación Matemática, del Instituto de Educación y Pedagogía (I.E.P) de la Universidad del Valle.

Esta investigación aborda una compleja problemática relativa a la enseñanza y aprendizaje de los números de enteros en la escuela; para lo cual se tomó como punto de partida algunas investigaciones realizadas por autores como, Bruno, (1997), Cid, (2003), y González, et al., (1999) las cuales reportan errores, dificultades y obstáculos en la construcción de este concepto desde la perspectiva histórica y didáctica. Además para abordar tal problemática se propuso una secuencia didáctica que permitiera introducir el concepto de número entero a partir de números relativos en contextos significativos para los estudiantes de grado 7° de la Educación Básica.

Para el diseño de la secuencia se tuvo en cuenta como insumo otra diseñada por los docentes Chaparro, Póveda & Fernández, (2006), del municipio de Duitama[1], la cual fue reformulada teniendo en cuenta algunos aspectos matemáticos y didácticos relacionados con el número relativo, número negativo como opuesto al número positivo, valor absoluto, entre otros. Este trabajo intentó dar cuenta de algunos fenómenos relacionados con los procesos de aprendizaje de los números enteros negativos, fundamentalmente. Para tal efecto, se trabajó con un grupo de 37 estudiantes del grado 7°, del Colegio la Presentación El Paraíso de la ciudad de Cali. En el desarrollo del trabajo se utilizó una metodología de tipo interactivo, cualitativo e interpretativo.

Entre los resultados de la implementación y el análisis de estos, se encontró que los estudiantes valoran los contextos que permiten la significación de algunos aspectos relacionados con el número negativo, como también, se identificaron algunas dificultades relacionadas con la representación de cantidades y números enteros en la recta numérica y el concepto de valor absoluto, como objeto matemático. Sin embargo, respecto a la estructura aditiva los estudiantes significaron mejor la adición de enteros en el contexto de la recta numérica.

Se espera que este trabajo aporte al proceso de formación en la práctica investigativa de profesores de matemáticas y sea el inicio de una propuesta viable, para que se tenga en cuenta en próximas investigaciones relativas a este concepto matemático.

[1]Secuencia didáctica *Jugando con los números enteros* realizada en el marco del Programa de capacitación y acompañamiento a docentes de Cundinamarca y Duitama para el desarrollo de los niveles de competencia de matemáticas y diseño de secuencias didácticas a partir de las experiencias significativas de los maestros, MEN (2006).

PALABRAS CLAVES: Número relativo, entero negativo, secuencia didáctica, didáctica de las matemáticas.

INTRODUCCIÓN

La enseñanza de las matemáticas es un proceso que ha crecido y evolucionado a través de los tiempos; actualmente, uno de los intereses en la enseñanza se ha centrado especialmente en el "aprendizaje significativo"[2] de los estudiantes, en buena medida por el reconocimiento de los profesores de qué existen contenidos, contextos y procesos matemáticos que presentan dificultades a los estudiantes, para que ellos lleguen a una comprensión, interpretación y correcta utilización para operarlos; de otra parte, porque se han desarrollado investigaciones y teorías didácticas que aportan a estos procesos de enseñanza. Uno de estos conceptos es el de los números enteros, particularmente los enteros negativos, de los cuales se señala por la investigación, Bruno, (1997), Cid, (2003), y González, et al., (1999) y por la práctica docente de las autoras, que una gran mayoría de estudiantes presentan dificultades fundamentalmente relacionadas con los conceptos y las operaciones elementales que se realizan con ellos.

Además la enseñanza de los enteros se reduce a definirlos y a presentar el concepto, pero no hay una reflexión sobre los cambios conceptuales, es decir, este paso de los números naturales a los números enteros positivos, negativos y el cero, no sólo implica ampliar el concepto de número, sino que también obliga a cambios conceptuales en las operaciones y las relaciones entre ellos, que están determinadas por sus propiedades y características matemáticas. Uno de estos cambios en el que se presentan dificultades, es el relacionado con el significado del signo menos, cuando se pasa de trabajar en el contexto de los naturales a trabajar en un contexto más amplio como el de los enteros, donde el signo menos en los naturales tiene un significado de disminución y en los enteros esta idea ya no está; una resta no significa disminución, y una suma no significa aumento. La tensión fuerte está en el cambio de pasar de esa mirada particular de los signos como se interpretaban en el contexto de los naturales, es decir, en el conjunto de los números naturales tienen unas características distintas a cuando son número enteros, y además el signo menos tiene un doble significado, cuando es un operador binario porque necesita dos elementos o como operador unario porque le cambia el signo a el número determinando el opuesto. Entonces, el simple hecho de ampliar el significado de número, de ver que la suma y la resta en términos de operador es la misma, presenta dificultades en la enseñanza, es decir, se asume que por dar la definición ya está clara la diferencia que hay cuando se pasa de definir la suma y la resta de los naturales a los enteros.

[2]Aprendizaje significativo, se entiende en este trabajo en el sentido formulado por Ausubel, (2002), el cual plantea que es una teoría de aprendizaje que pone énfasis en lo que ocurre en el aula cuando los estudiantes aprende; en la naturaleza de ese aprendizaje, en las condiciones que se requieren para que éste se produzca, en sus resultados y, consecuentemente, en su evaluación.

Por estas razones, en este trabajo se hizo un esfuerzo por identificar algunos elementos teóricos, en términos de lo curricular, lo didáctico y lo matemático, que permita a los estudiantes comprender estas diferencias significativas del signo más $(+)$ y el signo $(-)$ cuando se pasa de los naturales a los enteros, por medio de la reformulación de una secuencia didáctica llamada *Jugando con los números enteros*, buscando promover el trabajo individual y en equipo, superando las dificultades en los estudiantes; aspectos fundamentales para que el desarrollo de este concepto sea mucho más interesante y fácil para los estudiantes.

Los conceptos matemáticos que se abordaron en este trabajo son: los números enteros partiendo del número relativo, comparación de enteros, opuesto, relación de orden, valor absoluto y finalmente una aproximación a la adición desde la recta numérica; con el interés de mejorar el proceso de enseñanza y aprendizaje, y lograr que los estudiantes puedan formalizar el concepto de número entero en tanto que objeto matemático, es importante anotar que en este trabajo no se aborda la estructura multiplicativa siendo el campo de su aprendizaje otro campo de dificultades en el cual se tienden a aplicar las propiedades de los signos para la adición en el producto y viceversa, por lo tanto este trabajo deja abierta posibilidades de indagación al respecto.

Este trabajo de grado se presenta en varios capítulos, en el primer capítulo, se aborda la problemática del número negativo en la introducción al concepto de número entero, teniendo como referencia las investigaciones en didáctica de las matemáticas, para orientar la enseñanza de este concepto matemático a través de una secuencia didáctica relativa a los números enteros haciendo énfasis en dificultades relativas a los números negativos, también se presenta la justificación, los objetivos, y los antecedentes, de este trabajo.

En el segundo capítulo, se da cuenta del marco teórico de referencia, en el cual se presentan algunos elementos teóricos, que contemplan aspectos relativos a la dimensión didáctica, curricular, y matemática, que aportan elementos conceptuales y procedimentales para hacer la reformulación de la secuencia didáctica.

En el tercer capítulo, se aborda el rediseño e implementación de la secuencia didáctica propuesta, la cual está apoyada en referentes teóricos, didácticos, curriculares y matemáticos, expuestos en el marco teórico. Se presenta la metodología adoptada en el rediseño de la secuencia y las diferentes fases que la componen. Luego se exponen los resultados y análisis de resultados de las producciones de los estudiantes, con el propósito de observar los procedimientos realizados por ellos y validar los errores y dificultades validados por la investigación.

En el cuarto capítulo, se presentan las conclusiones que surgen a partir del proceso de sistematización y análisis de los resultados en la implementación de la secuencia aplicada a los estudiantes y conclusiones generales dando algunos aportes para profesores que encuentren interés en continuar el desarrollo de esta misma problemática.

CAPITULO I: ASPECTOS GENERALES DE LA INVESTIGACIÓN

En este capítulo se aborda la problemática del número negativo en la introducción al concepto de número entero. Teniendo como referencia las investigaciones acerca de este concepto, se busca orientar su enseñanza a través de una secuencia didáctica que otorgue especial valor a las dificultades relativas a los números negativos, que trate de abordar algunas de las problemáticas planteadas por los autores, y presenta la justificación, los objetivos, el marco contextual donde se ubica la institución seleccionada, se caracteriza parte de la comunidad educativa, teniendo en cuenta aspectos como el estrato económico, la población académica, entre otros, y los antecedentes, como elementos de apoyo para este trabajo.

1.1PLANTEAMIENTO DEL PROBLEMA

Teniendo en cuenta diferentes investigaciones (Bruno, 1997; Cid, 2003, González 1999) con relación al estudio de los números enteros negativos, se puede considerar que existen problemáticas alrededor de los procesos de enseñanza y aprendizaje de estos conceptos matemáticos. Una de estas problemáticas tiene que ver con la falta de conocimiento del desarrollo histórico de los números negativos por parte de los docentes; es decir, el desconocimiento de los fenómenos históricos por los que tuvieron que pasar los números enteros negativos a largo de su desarrollo para poder llegar a su formalización. Lo expuesto se hace viable en la manera como se introducen estos números en la escuela, de forma abrupta; tomándolos como un concepto ya establecido, y que no presenta dificultades en su construcción al no reconocerse que han tenido que pasar por un largo y complejo proceso de aceptación hasta ser considerados como números. De hecho, su aceptación duró más de 1000 años. Estas dificultades históricas permiten diseñar modelos didácticos, que permitan llevar un proceso desde lo intuitivo hacia lo formal, en la construcción de este concepto, de manera que estas dificultades no continúen a lo largo de la vida escolar.

Por otro lado, estas investigaciones reportan que al enseñar los números enteros negativos, se supone que los estudiantes modifican por sí mismos ideas muy arraigadas que tienen sobre los números positivos. Sin embargo, debido a que estas ideas han sido construidas a lo largo de su escolaridad, este paso de los números naturales a los números enteros positivos, negativos y el cero, no sólo implica ampliar el concepto de número, sino que también obliga a cambios conceptuales en las operaciones y las relaciones entre ellos, que están determinadas por sus propiedades y características matemáticas. Además, la forma de introducir los números negativos en la escuela se hace por medio de la enseñanza de reglas y algoritmos para operar con números naturales, por lo cual pareciera que se transfieren las mismas relaciones y propiedades, esto puede ser un obstáculo en el aprendizaje de un sistema numérico a otro, como es el paso de los números naturales a los números enteros. Lo que significa que se enseñan los números negativos únicamente como opuestos a los positivos, sin considerarlos como objetos de naturaleza distinta a los positivos.

Otro aspecto importante y que causa dificultad en la construccion de los números enteros, es lo relacionado al signo menos, debido a que este símbolo presenta un doble papel: como operador binario o unario, en el primer caso se tiene en cuenta para definir una operación asociado a una cantidad, y en el segundo caso para determinar el opuesto de un número, es aquí donde se evidencia un obstáculo para los estudiantes, ya que al centrarse en el número hay tendencia a ignorar el signo que le precede para determinar su opuesto, esto se manifiesta al resolver las operaciones de manera incorrecta, y se presenta cuando secomienza a enseñar matemáticas en la escuela, al no resaltar la importancia del cero y de la negatividad como elementos fundamentales en la construcción del concepto de números enteros, siendo que este es uno de los conceptos más dificiles de adquirir por los estudiantes debido al conocimiento arraigado que ellos tienen de los números naturales, de ahí que sea difícil, entender las operaciones en las que se tiene tiende a ignorar el "$-$" del número identificándolo con el signo de la operación.

Al respecto, Fory (2010) comenta:

> Se quiere llamar la atención sobre un hecho que en muchas ocasiones no se tiene en cuenta en la introducción de los números enteros y es lo relativo al signo menos, dado que este signo que acompaña a los enteros negativos juega un doble papel, por un lado, en la expresión $3 - 5$, hace referencia a una operación, mientras que en la expresión $3 + (-5)$ no hace referencia a una operación, sino que permite caracterizar al opuesto de 5, en otras palabras, el signo menos debe ampliar su significado, ya no sólo ha de remitir una operación sino que introduce la idea de opuesto.

Otra problemática con relación a los números negativos está asociada a la idea del número negativo y positivo como número relativo[3], lo cual consiste en considerarlo en varios contextos (temperatura, nivel del mar, cronología, entre otros) como una transformación de cantidades que suponen una disminución o un aumento de una cantidad inicial. Los números relativos expresan en este caso cantidades relativas con una estructura de doble número natural, es decir números naturales con direcciones contrarias, siendo estas distintas de los números enteros, de este modo se espera que el estudiante comprenda que los números no sólo se usan para hacer referencia a magnitudes o cantidades positivas, sino que existen cantidades relativas, las cuales pueden ser positivas, negativas o cero de acuerdo con la posición que ocupen según sea el punto (o valor) de referencia elegido.

[3]El número relativo ha sido caracterizado por González, J. L, Iriarte, M, Jimeno, M, Ortiz, A, Sanz, E. & Vargas-Machuca, I. (1999 p.72) como un número entero contextualizado, es por tanto la parte intuitiva-concreta del número entero. Estos números representan clases o posiciones en una serie ordenada con primer elemento (Citado por Fory, 2010).

Desde otra perspectiva, es también preciso identificar otra problemática y es la asociada a la dificultad de representación gráfica sobre la recta real, el no utilizara de cuadamente este modelo presenta dificultades debido a que se toman los números negativos como contradictorios a los positivos, según MacLaurin, d'Alembert, Carnot & Cauchy (citado por Cid, 2003), se toman los negativos como los opuestos a los positivos, esta diferencia hace que los estudiantes establezcan el modelo de recta numérica como dos semirrectas opuestas que funcionan separadamente, no facilitando su extensión de manera unificada.

Bruno (1997), menciona que la poca familiaridad con las representaciones de los números positivos en la recta influye, evidentemente, en las representaciones de los negativos, por esto en sus conclusiones indica que la recta necesita un trabajo directo en el aula y que no es un modelo sencillo que los estudiantes utilicen de forma espontánea, dice que ha constatado que se consigue mayor comprensión en las representaciones en la recta si se asocian a situaciones reales.

González et al. (1999) señala, que la recta numérica es un modelo que proporciona una interpretación bastante jugosa de los números enteros y que además posee múltiples utilizaciones en matemáticas, y que no está muy explotado en los libros de texto. El tratar el número entero a través de la recta numérica es una forma de concretizarlo, es decir, bajo distintas interpretaciones o conceptualizaciones que pueden tener ellos como sus operaciones, esto ayuda a la capacidad de los estudiantes para ordenar los números en la recta numérica, determinando a la vez cuándo un número es mayor o menor que otro, tanto en los positivos como negativos.

También Bruno (1997) cita en su documento a Bell (1986) para decir que coincide con su idea:

> Defender que la enseñanza de los números negativos debe llevar a los estudiantes a establecer lazos con la realidad, lo mismo que los números positivos que ya conocían. Desde esta perspectiva, nos parece que el modelo de la recta es más adecuado, ya que puede ser utilizado en situaciones cotidianas en las que se usan los números negativos (ascensor, temperatura, nivel del mar. . .) y resulta adecuado para la enseñanza de los racionales y los reales, y no sólo de los enteros. Además, la recta integra el conocimiento previo de los estudiantes y facilita el aprendizaje de las posteriores extensiones numéricas.

A partir de estas consideraciones, en este trabajo se considera pertinente enfocar la enseñanza de este concepto matemático a través de una secuencia didáctica relativa a los números enteros priorizando dificultades relativas a los números negativos, que trate de abordar algunas de las problemáticas expuestas, por ello interesa responder la siguiente pregunta:

¿Cómo a través de una secuencia didáctica, se puede hacer un acercamiento significativo al concepto de número entero enfatizando en el número negativo en el grado séptimo de la Educación Básica?

Para afrontar este interrogante nos apoyamos en el trabajo de una secuencia didáctica diseñada e implementada por los docentes del municipio de Duitama (Chaparro, Póveda & Fernández, (2006), la cual se caracteriza por partir de ideas intuitivas y contextualizadas del número relativo (número negativo) hacia conceptualizaciones más formales del concepto matemático propuesto en el estudio (ver anexo 1: Secuencia Didáctica *Jugando con los números enteros*).

En este trabajo se reformulará y aplicará la secuencia didáctica señalada, para promover un acercamiento al concepto de número entero negativo, por medio de actividades lúdicas, buscando obtener información sobre los elementos de su rediseño y pertinencia, enfatizando en las problemáticas que se han identificado en el número entero negativo.

La reformulación de la secuencia didáctica tuvo en cuenta elementos estructurales de la secuencia inicial que fueron complementados por medio de actividades y tareas que buscaban promover el paso de lo intuitivo a lo formal, con relación a sus tres situaciones:

1. Situación 1: Acerquémonos al concepto de número entero a partir del número relativo.
2. Situación 2: Caractericemos el número entero negativo.
3. Situación 3: Estructura aditiva de enteros.

1.2. JUSTIFICACIÓN

El presente trabajo indaga sobre algunos elementos de los procesos de enseñanza y aprendizaje del número entero negativo, por medio de actividades que aporten a la reflexión de la construcción de este concepto en los estudiantes de grado séptimo, del Colegio La Presentación El Paraíso de la ciudad de Cali (Ver anexo 2: Marco contextual). Esta indagación se hace a un grupo de estudiantes a través de una secuencia didáctica que tiene como propósito fundamental favorecer un acercamiento a los números enteros negativos con un referente construido desde actividades que permitan una significación y resignificación de este concepto matemático y la posibilidad de su uso conceptual y operativo en la resolución de problemas en distintos contextos, que se ha reformulado para propósitos de este trabajo.

Se espera que este trabajo aporte al desarrollo del pensamiento numérico de los estudiantes objeto de estudio en este trabajo, tal como lo plantean los Lineamientos Curriculares del Ministerio de Educación Nacional (1998), sentido numérico es "una intuición sobre los números que surge de todos los diversos significados del número". A través, de la implementación de la secuencia, se espera que se formalicen algunas ideas que el estudiante intuitivamente ha construido sobre el concepto de número negativo a lo largo de su vida escolar, pues se considera que la utilización intuitiva del concepto de número no se prolongue indefinidamente, pues la intuición se puede convertir en un obstáculo para el estudiante. Esto significa que los estudiantes adquieran una comprensión de las operaciones que existen entre los números, las diferentes maneras de representación, sus propiedades, posibles caminos de solución en diferentes contextos y la manera de relacionarlos con los problemas de la vida cotidiana, cómo relación en contextos no matemáticos, es decir, el número entero aún no formalizado, todos estos aspectos ayudarían a que se logre un desarrollo significativo en la formalización por parte de los estudiantes en el pensamiento numérico.

Otro aspecto importante tiene que ver con la pertinencia de la temática, objeto de análisis en este trabajo, ya que los números negativos son parte del currículo escolar, central para el desarrollo del pensamiento numérico. Generalmente esta temática ha sido tratada sin considerar la importancia que tienen para lograr la extensión numérica de los naturales a los enteros, tal como lo expresa el Ministerio de Educación Nacional en los Estándares Básicos de Competencias en Matemáticas (2006), en el sentido que el concepto de número negativo se puede ver como el resultado de la cuantificación de ciertos cambios en las medidas de una magnitud, o de la medida relativa de una magnitud con respecto a un punto de referencia, que usualmente se ha identificado con el cero, aunque este no es el único punto de referencia que se puede tomar. Este paso de los números naturales a los números enteros positivos y negativos (con el cero como entero) no sólo amplía el concepto de número, sino que también obliga a cambios conceptuales en las operaciones y las relaciones entre ellos, configurando así sistemas numéricos diferentes. Así, pues el aprendizaje del número no solo se realiza a lo largo de toda la Educación Básica, sino que debe sufrir transformaciones a fin de lograr que estos aprendizajes puedan realizarse y permitan alcanzar aprendizajes duraderos, hacer explícitos los obstáculos conceptuales que se dan al pasar de un sistema de numeración a otro y además alcanzar unas competencias en el manejo de un conjunto de procesos, conceptos, proposiciones, modelos y teorías en diversos contextos, los cuales permiten configurar las estructuras conceptuales de los diferentes sistemas numéricos necesarios para la Educación Básica y Media y su uso eficaz por medio de los distintos sistemas de numeración con los que se representan tal como lo plantean los Estándares Básico de Competencias (2006).

Así mismo, se espera que este trabajo aporte ideas que favorezcan la intervención didáctica de los profesores en función de las necesidades y las prioridades de los estudiantes en las dificultades para la construcción de los conceptos y relaciones del número entero negativo, motivando de esta manera a que ellos busquen distintos caminos de solución y propongan soluciones según las exigencias de los lineamientos oficiales sobre el aprendizaje de las matemáticas; en tanto este trabajo aportará algunas reflexiones y recomendaciones en este sentido.

1.3 OBJETIVOS

1.3.1 Objetivo General

Introducir el concepto de número entero enfatizando en la construcción del número negativo, a un grupo de estudiantes de grado séptimo de la Educación Básica, a través de la implementación de una secuencia didáctica.

1.3.2 Objetivos Específicos

- Integrar algunos aspectos de las dimensiones matemáticas, curriculares y didácticas relacionadas con la construcción del concepto de número entero, al proceso de diseño y gestión de una secuencia didáctica para el grado séptimo de la Educación Básica.

- Identificar a través de la implementación de la secuencia didáctica sobre los números enteros, elementos conceptuales y procedimentales que den cuenta de algunas de las dificultades reportadas por las investigaciones estudiadas.

1.4 ANTECEDENTES

Algunas de las investigaciones sobre los números enteros negativos que son referentes básicos de este trabajo de grado son:

La autora presenta una revisión de trabajos de carácter experimental sobre números negativos con el objetivo de establecer algunos criterios para debatir sobre la investigación futura en este tema, así mismo presenta las principales ideas teóricas, conclusiones e implicaciones didácticas de una investigación realizada con alumnos de 12 - 13 años de edad sobre la enseñanza de los números negativos.

Las ideas que presenta, forman parte de la visión que tiene de la enseñanza de los números en general y están relacionadas con los aspectos que ha investigado como lo son la resolución de problemas aditivos con números negativos y las formas más eficaces de enseñanza que permitan a los alumnos modelizar situaciones simples mediante el uso de números negativos; es decir, que los alumnos trasladen situaciones contextualizadas y gráficas a la dimensión abstracta y operen correctamente en ella.

De igual forma presenta investigaciones que han abarcado diferentes objetivos, en los cuales enfatizan sobre la resolución de problemas aditivos, en concreto los procedimientos de resolución de los problemas por parte de estudiantes de secundaria y el estudio de métodos de enseñanza de estos problemas (Bruno, 1997).

La autora realiza un estudio exploratorio sobre dificultades en los números enteros en una bibliografía (alrededor de 200 trabajos, entre artículos y capítulos de libros), de difícil integración porque son aportaciones de autores de diversa procedencia (profesores de matemáticas, investigadores en didáctica de las matemáticas, etc.) y con objetivos muy diferentes (comunicar experiencias de clase, dar su opinión sobre la docencia, investigar fenómenos didácticos, poner a punto determinadas herramientas teóricas de la didáctica de las matemáticas, etc.). Las afirmaciones que se hacen en dichos trabajos tienen un estatuto muy variado: desde simples opiniones a asertos basados en las experiencias docentes o contrastadas por algún tipo de validación científica realizada, en este último caso, desde marcos teóricos muy diferentes. Todo esto hace que las conclusiones de unos y otros autores sean difícilmente integrables en un cuerpo teórico común e, incluso, se encuentre con afirmaciones contradictorias que coexisten sin que hasta el momento, nadie se haya tomado el trabajo de rebatirlas y obtener información de este objeto de estudio, para lograr construir un modelo para el desarrollo de los números enteros (Cid, 2003).

El trabajo de grado, inscrito en la línea de investigación en Didáctica de las Matemáticas, para la identificación de obstáculos didácticos presentes en los textos escolares de matemáticas del grado séptimo en la enseñanza de la operación de adición en el conjunto de los números enteros y posterior análisis del contenido teórico para establecer el estatus, que se le da a los números enteros, así como el análisis de las actividades propuestas; buscando identificar si ellas generan o no obstáculos didácticos en el aprendizaje de la operación de adición en el contexto numérico de los enteros. Este trabajo, se sustenta desde la perspectiva de la didáctica de las matemáticas concretamente en lo referente a los procesos de la transposición de conocimiento matemático (del saber sabio al saber transpuesto), y los tipos de obstáculos didácticos que pueden ser introducidos en este proceso (Fory, 2010).

Los autores presentan un trabajo de investigación sobre la didáctica de los números enteros, aportando una visión completa del tema, desde sus fundamentos hasta la planificación curricular, contando con los aportes de, José Luis González Marí (Capitulo 1); María Dolores Iriarte Bustos e Inmaculada Vargas-Machuca de Alva (Capítulo 2); José Luis González Marí (Capítulo 3); Manuela Jimeno Pérez (Capítulo 4); Alfonso Ortiz Comas (Capítulo 5); Inmaculada Vargas-Machuca de Alva y María Dolores Iriarte Bustos (Capítulo 6); Antonio Ortiz Villarejo, José Luis González Marí, Esteban Sanz Jiménez y Alfonso Ortiz Comas (Capítulo 7).

En el proceso de elaboración del libro dos grandes obstáculos intervinieron en su elaboración, uno los inconvenientes didácticos del tema aparentemente arduo y comprometido por naturaleza, y sistemáticamente eludido, ignorado o tratado superficialmente en publicaciones de Didáctica de la Matemática, donde tuvieron que profundizar en la parte Histórica y la Epistemología y llevar a cabo comprobaciones experimentales para indagar acerca de la situación real, conocimientos, errores y obstáculos en el proceso de enseñanza y aprendizaje de los conceptos, las leyes y reglas en juego. En consecuencia, clarificar los fundamentos de la didáctica del número entero, para llegar así a encontrar una posible vía de solución a los problemas planteados, o bien, una confirmación de lo ya conocido, fue unos de los objetivos del trabajo del grupo. El segundo, la escasez de información al respecto y la ayuda de un libro escrito por el Colectivo Periódica Pura, uno de los pocos textos dedicados a la Didáctica de los números enteros, se iba generando la idea de que era posible aportar algo nuevo a lo que se conocía hasta entonces. Por lo tanto, nuevos enfoques y aportaciones junto a un abanico de planteamientos didácticos ya conocidos, completaban el perfil de lo que fue el resultado final del libro (González, et al., 1999).

CAPITULO II: MARCO TEÓRICO DE REFERENCIA

En este apartado se presentan algunos elementos teóricos, que contemplan aspectos relativos a la *dimensión didáctica* que da cuenta de algunos de los fenómenos concernientes a la enseñanza y aprendizaje del concepto de número entero negativo, a la *dimensión curricular* que presenta aspectos relativos a su vínculo con las propuestas curriculares vigentes para la enseñanza y aprendizaje de las matemáticas en Colombia, en particular al concepto de número entero negativo, y a la *dimensión matemática* que da cuenta del concepto teórico del número entero negativo.

El marco teórico aporta elementos para hacer la reformulación de la secuencia didáctica, con la caracterización y aproximación desde lo matemático, lo didáctico y lo curricular relativo a este concepto matemático.

2.1 DIMENSIÓN DIDÁCTICA

Un análisis didáctico de una determinada noción se usa en la Didáctica de las Matemáticas, para identificar y caracterizar una serie de fenómenos relativos al aprendizaje y enseñanza de una noción o concepto matemático en contextos escolares. Puede plantearse en términos de dificultades, errores y limitaciones de los estudiantes en términos de su aprendizaje (Filloy, 1999). Es por esto que en este apartado se tomará en cuenta las investigaciones reportadas por Cid (2003), Bruno (1997), y González et al., (1999) que exponen las dificultades de aprendizaje que se presentan en la enseñanza de los números enteros negativos y desde las distintas propuestas de enseñanza que aparecen en los textos escolares para el acercamiento a la introducción de los números enteros negativos.

Estas propuestas surgen a partir de las investigaciones realizadas por los autores anteriormente citados, en las cuales el proceso de adquisición de conocimiento matemático a través del texto escolar, reflejan una serie de obstáculos que no permiten el avance de los estudiantes en su proceso de aprendizaje hacia el concepto de número entero negativo.

Con relación a lo anterior, se plantea los puntos de vista que desde las investigaciones asociadas al componente didáctico, proponen los autores nombrados anteriormente sobre el concepto de número entero negativo:

2.1.1 Sobre las dificultades de aprendizaje y errores de los alumnos

En el trabajo La Investigación Didáctica sobre los Números negativos: Estado de la Cuestión Coquin -Vienot (citado por Cid, 1985), sobre dificultades en el aprendizaje de los números enteros negativos, hace parte de investigaciones sobre propuestas de enseñanza en el análisis de errores que presentan los estudiantes, en un cuestionario donde se analizan las estrategias de resolución empleadas y los errores cometidos por estudiantes de 11 a 15 años, se destacan las siguientes concepciones:

- Los números enteros se manejan como si se tratasen de naturales; lo que significa que el signo '$-$' se interpreta como símbolo de la resta entre números naturales o bien se ignora, lo que producen muchas respuestas erróneas.

- El número está considerado como la medida de una cantidad y no puede ser más que positiva es decir, se reconoce que los enteros negativos son menores que los positivos, pero la relación de orden entre los negativos se establece en el mismo sentido que sus valores absolutos.

- Se resuelve correctamente los problemas que ponen en juego la estructura aditiva de Z, pero se utiliza N, siempre que sea posible y permita obtener la respuesta correcta; si no se trabaja separando a los positivos de los negativos. No se produce la unificación del conjunto de los enteros, pero los unos se definen por oposición de los otros.

- Las estrategias de resolución en Z ponen de manifiesto su homogenización: positivos y negativos son tratados como un todo, es decir no se manejan por separado. La relación de orden entre enteros negativos se establece correctamente y empiezan a utilizarse las relaciones de compatibilidad entre el orden y la suma de enteros.

En los estudios realizados por Bruno (1997), donde presenta algunas consideraciones sobre la enseñanza y aprendizaje de los números negativos, expone ideas que se apoyan en las investigaciones realizadas, tanto por otros autores como propias, donde destaca las siguientes dificultades:

- Los estudiantes tienen la idea de que no existen números menores que cero, es decir, los significados más familiares que han trabajado en la escolaridad sobre los números positivos y de las operaciones con ellos conducen a que los estudiantes tengan la idea de que no hay otros números menores que los positivos.

- Los cambios que se producen en la simbología $(+a = a)$, lo que indica que la presentación a los estudiantes de los números enteros positivos con una escritura y una denominación diferentes a las que ya se conocían (antes: $1, 2, 3$ ..., naturales; ahora: $+1, +2, +3, ...$, enteros positivos) conduce a que sea muy difícil la consideración del antiguo sistema numérico como parte del nuevo.

- El surgimiento de nuevas reglas operatorias, como la de los signos para la suma y el producto, es decir, en los problemas de combinación de variaciones, cuando las dos variaciones tienen signos opuestos son más complejos que cuando tiene el mismo signo.

En los estudios realizados por González et al., (1999) sobre dificultades en el aprendizaje de los números enteros negativos se destacan las siguientes:

- El enseñar el número entero, buscando situaciones concretas para justificar propiedades de estos números; pero por otro lado, el situarlos de entrada en el plano formal, también tiene el peligro de reducirlos a un formalismo vacío, presto a ser olvidado y causar errores y confusiones.

- La creencia arraigada en la experiencia de cada cual, que identifica el número con cantidad, lo que indica que al no abandonar el plano de lo real, es difícil concebir los números negativos, porque, simplemente no son necesarios, ejemplo: Nadie dice, "tengo-300 puntos" ni "tengo $-1/2$ metro".

- La suma como aumento, es decir, si un número se identifica con cantidad, la adición se asocia con la acción de añadir una cantidad a otra, por lo que conlleva siempre a un aumento; por lo que al hacerles la pregunta: "¿Puedes encontrar un número que sumado a 5 dé 2?" responden que no es posible.

- La sustracción como disminución, también permanece ligada al plano de la acción y la identifican con quitar y por tanto, con disminución, por lo cual donde no hay no se puede quitar.

- El orden entre los negativos es el mismo que el orden natural, es decir, en la serie natural los números van aumentando a medida que van estando más alejados del origen, pero el trasladar esta secuencia a los negativos es la causa de que los estudiantes al preguntarles "¿Cuál es el número mayor a -3 unidades?" respondan "-4", por lo que se refleja el obstáculo de identificar número con cantidad.

Estas dificultades reportadas, por investigaciones hasta ahora estudiadas se tendrán en cuenta en la propuesta de actividades de la secuencia didáctica que se implementará en estudiantes de grado séptimo, además sirve como marco de referencia para el análisis de los resultados de los estudiantes que participan del estudio; con el objeto de validar algunas de ellas en el ámbito de la educación Colombiana.

2.1.2 Desde las propuestas de enseñanza.

A continuación se mencionan algunas de las propuestas de enseñanza que han reportado las investigaciones anteriormente señaladas, en los cuales este trabajo se apoya para trabajar el marco teórico.

En estudios realizados por Cid (2003), donde se hacen contribuciones de diversos autores, que tienen objetivos diferentes (investigar fenómenos didácticos, comunicar experiencias de clase, etc.), con la finalidad de determinar algunas herramientas teóricas desde la didáctica de matemáticas sobre los números negativos, se hace una clasificación de distintas propuestas para la introducción de los números enteros negativos, una de ellas es la propuesta de introducir los números negativos desde los modelos concretos, entendidos como una estrategia por medio de la experiencia, donde los estudiantes puedan construir y dar sentido a las reglas de funcionamiento del objeto matemático en estudio, este modelo se puede presentar por medio de actividades y juegos colectivos. Una de las formas de introducir los modelos concretos, es la introducción de estos modelos en los libros de texto en la Educación Secundaria, a partir de: Modelo de neutralización y Modelo de desplazamiento.

Modelo de neutralización: En este modelo, los signos 'más' y 'menos' se refieren a medidas de cantidades de magnitud de sentidos opuestos que se neutralizan entre sí, en las operaciones suma con acciones de *añadir*, *reunir*, la resta se relaciona con la acción de *quitar*, por ejemplo en recursos como las fichas o bloques de colores.

El uso que se hace de este modelo en los actuales libros de texto estudiados por los autores se observa en, deudas y haberes, pérdidas o ganancias, puntuaciones positivas o negativas y con personas que suben y bajan o salen de un lugar.

Modelo de desplazamiento: En este modelo, los signos 'más' y 'menos' indican posiciones en torno a un origen o desplazamientos en sentidos opuestos, en las operaciones suma como un desplazamiento aplicado a una posición para obtener otra posición, la resta como la operación inversa de la suma y la multiplicación como una composición repetida de desplazamientos, el orden se interpreta con los números enteros en términos de posiciones e indicando que un número entero es menor que otro, cuando la posición del primer número es anterior al correspondiente número.

El uso de este modelo en los actuales libros de texto estudiados por los autores se observa en: el termómetro, avances o retrocesos a lo largo de un camino, altitudes, ascensores o escaleras, años antes y después de Cristo, para ubicar estos desplazamientos en la recta numérica.

Es importante destacar la influencia que ha tenido estos modelos en el sistema educativo en España, asimismo, la introducción de los modelos concretos en los libros de texto no se abarca en un único modelo, diversos modelos de neutralización y de desplazamiento son los más elegidos ya que se considere el más adecuado depende de la operación en los números enteros, por ejemplo, para introducir la estructura aditiva de los enteros es común encontrar varios modelos de neutralización y por medio del modelo de desplazamiento para introducir la estructura multiplicativa.

A su vez, desde otra perspectiva Bruno (1997), menciona en sus investigaciones, que no suele establecerse una relación entre los diferentes sistemas numéricos por tanto sugiere que una visión unitaria de la enseñanza de los sistemas numéricos contribuiría a establecer las correctas relaciones entre ellos, es decir, es necesario conectar los conjuntos numéricos, de modo que el estudiante pueda relacionar aquellos conocimientos que ha adquirido, donde este nuevo conocimiento suponga una ampliación del antiguo, de tal forma que ese conocimiento no sea aislado de los otros, lo cual es importante en el momento en que se integran nuevos números, por ejemplo al realizar las extensiones numéricas como es el paso de los números enteros positivos a los enteros negativos.

Para dar cuenta de esto, en esta investigación la autora presenta tres dimensiones consideradas para la enseñanza de los números enteros negativos, que surgen a partir de una amplia diversidad de ideas alrededor del concepto de número negativo, con las cuales se podrían hacer estas extensiones de manera que los estudiantes lograrían construir una visión más integrada de los mismos: *dimensión abstracta* en donde se sitúan los conocimientos referidos a los sistemas numéricos como estructuras matemáticas y las formas de escrituras de los números que son propiedades, símbolos, reglas operatorias entre otros, d*imensión de la recta* en la cual se ubica la representación de los números sobre una recta, basada en la identificación de los números con los puntos de la recta y la *dimensión contextual* en donde se encuentran las utilidades y usos de los números en las situaciones reales y los problemas contextualizados que se modelizan mediante números y operaciones con ellos. Es de igual importancia destacar que estas dimensiones se relacionan entre sí: Recta↔abstracta, abstracta↔contextual, y contextual↔recta (Figura 1).

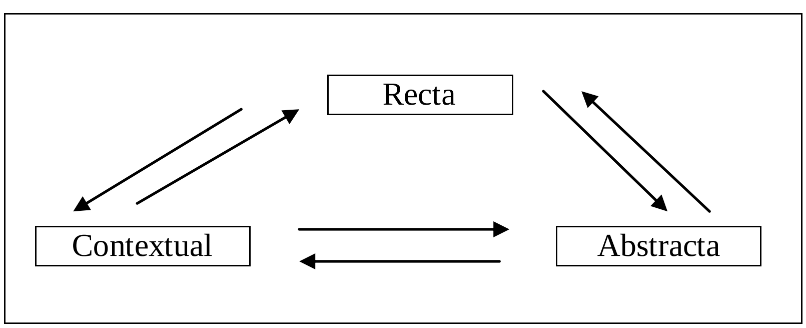


Figura 1: Relaciones entre las dimensiones

El conocimiento numérico no se limita al conocimiento de las tres dimensiones, sino también abarca las relaciones entre ellas, es decir, la expresión en una dimensión de un conocimiento dado en otra.

Por otro lado González et al., (1999) expone algunas propuestas de enseñanza tratando de relacionar los obstáculos y concepciones que han observado a lo largo de la historia en la enseñanza y aprendizaje de los enteros, a partir del análisis de estudios epistemológicos, donde se contemplan los acercamientos que tienen los textos escolares en el trabajo con los números enteros negativos, por lo cual ha hecho una clasificación para llegar al conocimiento de estos números a través de: la extensión aritmética, situaciones concretas, construcción conjuntista y la recta numérica.

Por extensión de la aritmética: Se parte de los números *N*, para dar validez a expresiones como $0 - 1, -3, -4$, etc. Para definir nuevos números (números negativos) estos números, por definición, son los opuestos aditivos de los correspondientes números naturales $1, 3, 4$, etc. En este nuevo conjunto se definen las operaciones y una relación de orden, de manera que se mantengan los resultados y propiedades de los *N*.

En este sentido se podrían considerar tres alternativas: a) se amplían las definiciones de cantidad y operaciones aritméticas. El estudio de los números enteros está justificado por la enseñanza del álgebra, se trata de mostrar al estudiante el comportamiento de las llamadas “cantidades algebraicas”. b) se extienden las leyes fundamentales de las operaciones aritméticas. Según González et al., (1999) esta vía pretende ser fiel a la construcción histórica de los números enteros utilizando el principio de permanencia de Hankel, que las leyes de las operaciones con los números ya conocidos se conserven para el nuevo dominio, de forma que ello no origine contradicción; c) se extienden las variaciones que tienen lugar en los resultados de operaciones aritméticas en función de las variaciones de sus elementos. Para esto se necesita tener afianzadas las variaciones de las sumas, diferencias y productos en función de sus elementos constituyentes (sumandos, minuendos, sustraendo y factores) es decir, se trata de inducir esos nuevos objetos según las modificaciones de las diferencias en función de los sustraendos o minuendos, como números menores en una unidad que la diferencia anterior en la serie recurrente.

Situaciones concretas: Las operaciones básicas con enteros pueden ser aprendidas cuando el estudiante ha comprendido los conceptos por medio de la relación que tenga en diversas situaciones concretas, y lograr la adquisición de aprendizaje de propiedades desde un punto de vista intuitivo, esto servirá como fundamento para el aprendizaje de los aspectos más abstractos y formales que se han de trabajar posteriormente. A partir de esto se pretende hacer ver que los números positivos y negativos, no solo encuentran en las matemáticas y al mismo tiempo se intenta que el estudiante descubra o intuya el comportamiento de los nuevos números por medio del modelo o modelos introducidos (reales o ficticios), en los que subyace la aritmética de los números enteros o al menos parte de ella.

Construcción conjuntista: Trata de dar existencia al número entero desde un punto de vista matemático primordialmente (como clase de equivalencia) y de hacer hincapié en el conjunto de los números enteros ya que posee una estructura algebraica de anillo de integridad totalmente ordenado, en el que está incluido, por construcción, el semianillo de los números naturales identificado con el subconjunto Z^+ por esto dicen que el número entero hay que enseñarlo como entidad matemática; de igual manera pretenden que el estudiante adquiera la noción de estructura algebraica siguiendo la tendencia Bourbakista.

A través de la recta numérica: La opción de tratar los números enteros bajo el soporte de la recta numérica, admite el número entero como extensión del número ordinal. Pensamos que tal vez es más fácil para el niño admitir esta extensión que una extensión cardinal (González et al., 1999). En el modelo de la rectase indica una posición de un valor numérico, se sitúan los números naturales de la forma ya conocida y en la otra parte de la recta se sitúan puntos simétricos a los anteriores a igual distancia, a los que se les asocia unos nuevos números (negativos) que denotan distinto sentido al de los naturales, a partir de esto se aplican operaciones aritméticas en la recta numérica.

Por otra parte, Bruno y Martinón (1994) y Hernández (1997) citadas en González et al.(1999), realizan estudios sobre las estrategias de resolución de problemas con números negativos, en el que ponen de manifiesto que los alumnos resuelven bien los problemas cuando utilizan la recta numérica y otros procedimientos intuitivos (en general los entrevistados resuelven bien los problemas en el terreno no simbólico) pero tienen dificultades y cometen errores cuando los intentan resolver directamente mediante números y operaciones o cuando se les pide que justifiquen simbólicamente lo que han realizado intuitivamente. Las entrevistas ponen de manifiesto: a) la existencia de determinados desajustes entre la comprensión de los problemas por medio de la representación simbólica y la que se produce a través de otros tipos de representaciones (verbal, gráfica, etc.); desajustes que dificultan los necesarios procesos de traducción entre los diferentes sistemas de representación; b) cómo los alumnos tratan de solucionar sin éxito dichos desajustes; c) qué tipos de dificultades y errores aparecen y d) cuáles son las preferencias que manifiestan.

Estas propuestas describen la importancia de reconocer el sentido que tienen los números enteros negativos para la enseñanza de las matemáticas, desarrollar el concepto de número entero negativo con todas sus relaciones e interpretaciones en el entorno escolar conlleva un proceso a largo plazo, por ello es fundamental tener en cuenta que las habilidades que se pretenden desarrollar en los estudiantes en el manejo de este concepto, no serán de fácil apropiación si no se crea un modelo a partir de propuestas concretas.

Estas investigaciones evidencian que a pesar de que existan variedad de obstáculos en los números enteros negativos que resultan una barrera para su comprensión, se señala importante determinar algunas de estas propuestas para tener mejores resultados con relación a la práctica educativa, pues el manejo del concepto de número negativo conlleva tiempo y es necesario para que los estudiantes comprendan, interpreten y los usen con sentido en las diferentes aplicaciones.

Para efectos del trabajo que aquí se propone, estos modelos de enseñanza permitirán integrar ciertas acciones a la secuencia partiendo de elementos empíricos (modelos concretos), para ir avanzando a aspectos más formales de la enseñanza y aprendizaje del número entero negativo (reconocimiento de propiedades, operaciones, relaciones y representaciones).

2.1.3 Sobre la secuencia didáctica

Teniendo en cuenta que las matemáticas, lo mismo que otras áreas del conocimiento, están presentes en el proceso educativo para contribuir al desarrollo integral de los estudiantes con la perspectiva de que puedan asumir los retos del siglo XXI. Se propone pues una educación matemática que propicie aprendizajes de mayor alcance y más duraderos que los tradicionales, que no sólo haga énfasis en el aprendizaje de conceptos y procedimientos sino en procesos de pensamiento ampliamente aplicables y útiles para aprender cómo aprender (MEN, 1998).

En este trabajo se asume la intervención en el aula como una estrategia investigativa que permite registrar ciertas acciones de pensamiento matemático para sacar algunas conclusiones alrededor de un problema de investigación, en este sentido esta intervención se hace a través de situaciones problema tal como lo definen los Lineamientos Curriculares del área de Matemáticas (1998):

> El acercamiento de los estudiantes a las matemáticas, a través de situaciones problemáticas procedentes de la vida diaria, de las matemáticas y de las otras ciencias es el contexto más propicio para poner en práctica el aprendizaje activo, la inmersión de las matemáticas en la cultura, el desarrollo de procesos de pensamiento y para contribuir significativamente tanto al sentido como a la utilidad de las matemáticas.

Esta propuesta se presenta en los Lineamientos porque, tradicionalmente los estudiantes aprenden matemáticas formales y abstractas, descontextualizadas, y luego aplican sus conocimientos a la resolución de problemas presentados en un contexto. Con frecuencia “estos problemas de aplicación” se dejan para el final de una unidad o para el final del programa, razón por la cual se suelen omitir por falta de tiempo.

Además se considera que, las aplicaciones y los problemas no deben ser sólo problemas de aplicación, sino que ellos pueden y deben utilizarse como contexto dentro del cual tiene lugar el aprendizaje. El contexto tiene un papel preponderante en todas las fases del aprendizaje y la enseñanza de las matemáticas, es decir, no sólo en la fase de aplicación sino en la fase de exploración y en la de desarrollo, donde los alumnos descubren o reinventan las matemáticas.

En esta visión exige que se creen situaciones problemáticas en las que los estudiantes puedan explorar problemas, plantear preguntas y reflexionar sobre modelos (MEN, 1998).

La importancia que presenta la Secuencia Didáctica para el Currículo de Matemáticas, es que la práctica de la educación matemática debe tener en cuenta cómo enseñar mejor los saberes matemáticos, y lograr procesos mediante la teoría didáctica como parte fundamental en el desarrollo cognitivo de sus estudiantes. (Revista N° 21- Didáctica de la Matemática. Consideraciones, 2010)

La Secuencia Didáctica se entiende como un plan de aula que tiene una intencionalidad, donde se determina de una manera clara los aspectos de la enseñanza y aprendizaje necesarios para distribuir y ordenar el trabajo en el aula de clases, estableciendo momentos claramente diferenciados para la construcción del significado matemático en estudio por parte del profesor y estudiantes, de los compromisos y responsabilidades de las partes involucradas. Igualmente el tiempo requerido para su implementación, la descripción de la actividad, los materiales didácticos y los referentes teóricos para la actividad (Guerrero, Sánchez & Lurdury, 2006).

Para lograr esto es necesario tener en cuenta las fases que requiere la secuencia como lo son, una llamada actividad diagnóstica, cuyo propósito fundamental es indagar por las concepciones del estudiante sobre la temática de estudio, es aquí donde se observa las concepciones de los estudiantes, de acuerdo a los conocimientos que tengan sobre el concepto a desarrollar y la pertinencia de trabajar los contenidos propuestos por el profesor. Otra fase, es la participación por parte de los estudiantes, será la intervención que ellos presenten en el momento de desarrollar la secuencia, y finalmente el análisis de resultados, que va orientado a la construcción de la noción a desarrollar, este paso es muy importante ya que se evidenciaran los resultados y dificultades que presentan los estudiantes al abordar la secuencia, para extraer conclusiones y posibles recomendaciones a profesores en formación o investigadores (Aguilar, García & Pérez, 1997).

Por tanto, en este trabajo la secuencia propuesta se sitúa en la dimensión didáctica matemática, ya que se refiere a los fenómenos del aprendizaje y de la enseñanza de las matemáticas, es decir alude a conocimientos particulares, comprende los diferentes tipos de dificultades que presentan los estudiantes con relación al contenido enseñado; de la misma manera la didáctica de las matemáticas estudia los procesos de enseñanza y aprendizaje de los saberes matemáticos en los aspectos teóricos conceptuales y de resolución de problemas, tratando de caracterizar los factores que condicionan dichos procesos. Se interesa por determinar el significado que los alumnos atribuyen a los términos y símbolos matemáticos, a los conceptos y proposiciones, así como a la construcción de estos significados como consecuencia de la instrucción. En la revista N° 21, Didáctica de la Matemática. Consideraciones (como se cita en Godino & Batanero, 1996).

Por lo anterior, la Secuencia que se reformula llamada *Jugando con los Números Enteros*, diseñada e implementada por docentes del municipio de Duitama (Chaparro, O. Póveda, D. Fernández, R), consta de algunas situaciones significativas de los números enteros, divididas en tres situaciones: Situación 1, *Acerquémonos al concepto de número entero*, esta situación está conformada por tres actividades: actividad 1, *Usando enteros en la línea del tiempo y los inventos*, esta actividad contiene seis preguntas, actividad 2, *Jugando con los enteros,* esta actividad contiene diez preguntas, actividad 3, *Secuencias de enteros,* esta actividad contiene dos preguntas.

Situación 2, *Relaciones de orden entre números enteros*, esta situación está conformada por cuatro actividades: actividad 1, *El laberinto*, esta actividad contiene siete preguntas, actividad 2, *Desplazamiento entre enteros*, esta actividad contiene cuatro preguntas, actividad 3, *El crucinúmero*, esta actividad contiene cinco preguntas, actividad 4, *Uniendo números opuestos*, esta actividad contiene seis preguntas.

Situación 3, *Estructura aditiva de enteros,* esta situación está conformada por cuatro actividades: actividad 1, *La pista de los enteros*, esta actividad contiene siete preguntas, actividad 2, *Juguemos dominó*, esta actividad contiene tres preguntas, actividad 3, contiene tres preguntas, y la actividad 4, *Aplicando lo que sabemos sobre los números enteros,* que contiene tres preguntas.

En esta secuencia didáctica, se concatena lo que se debe aprender desde los Estándares en:

COHERENCIA VERTICAL

Cuarto a quinto:

- Resolver y formular problemas cuya estrategia de solución requiera de las relaciones y propiedades de los números naturales y sus operaciones.
- Justificar regularidades y propiedades de los números, sus relaciones y operaciones utilizando calculadoras.

Sexto a séptimo:

- Establecer conjeturas sobre propiedades y relaciones de los números, utilizando calculadoras o computadores.
- Resolver y formular problemas utilizando las propiedades básicas de la teoría de números, en contextos reales y matemáticos.

Octavo a noveno:

- Utilizar números reales en sus diferentes representaciones en diversos contextos.

COHERENCIA HORIZONTAL

Pensamiento Espacial y Sistemas Geométricos:

- Identificar características de localización de objetos (números) en sistemas de representación cartesiana y geográfica.

Pensamiento Métrico y Sistemas de Datos:

- Resolver y formular problemas que requieren técnicas de estimación.

Pensamiento Variacional y Sistemas Algebraicos y Analíticos:

- Describir y representar situaciones de variación relacionando diferentes representaciones (diagramas, expresiones verbales, generalidades y tablas).

La secuencia se implementará con el fin de intentar resolver preguntas sobre algunas problemáticas acerca de las dificultades en la construcción del concepto de número entero negativo, mediante la observación y análisis de la secuencia, que permita un acercamiento al concepto del número negativo en el rediseño e implementación de situaciones didácticas, en el grado séptimo de la educación Básica.

2.2 DIMENSIÓN CURRICULAR

Entre los aspectos a tener en cuenta en el componente curricular, se encuentran los documentos oficiales: Lineamientos Curriculares de matemáticas (MEN, 1998) y los Estándares Básicos de Competencias en Matemáticas (MEN, 2006). En los Lineamientos Curriculares se propone que el estudio de los números debe potenciar el desarrollo del pensamiento numérico. Para ello centra su atención en la comprensión, representación, el uso, el sentido y significado de los números, sus relaciones y operaciones dentro de cada sistema numérico.

El desarrollo del pensamiento numérico teniendo como base el estudio de los números negativos, se trata de magnitudes en las cuales la medición se puede expresar con respecto a un punto de referencia (como el caso de las altitudes o profundidades con respecto al nivel del mar, la temperatura y el tiempo tomando como referencia el nacimiento de Cristo, etc.), o bien de variaciones en la medida de una magnitud (por ejemplo, aumento o disminución del peso de una persona, cambio en la temperatura de una habitación, variación del precio del dólar en mercado cambiario, etc.). Por lo tanto, lo positivo o negativo del número significa, independiente si es entero o racional, en el primer caso uno de los dos sentidos posibles con respecto al punto de referencia, y en el segundo caso el sentido de la variación (aumento o disminución) en la medida de una magnitud cualquiera.

Igualmente en los Estándares Básicos de Competencias en Matemáticas, se estudian los diferentes sistemas numéricos como un eje central sobre el cual estructurar el currículo de matemáticas, se trata de mostrar la importancia del desarrollo centrado en los procesos de conceptualización de los alumnos que los lleven a la construcción de un pensamiento ágil, flexible, con sentido y significado para su vida cotidiana, integrado en unidades complejas que le brinden autonomía intelectual, y sobre todo, que se logre la formación de un ciudadano con una cultura matemática mínima que le permita mejorar su calidad de vida.

Así, desde el estudio de los Sistemas Numéricos, se pueden desarrollar habilidades para comprender los números, usarlos en métodos cualitativos o cuantitativos, realizar estimaciones y aproximaciones, y en general, para poder utilizarlos como herramientas de comunicación, procesamiento e interpretación de la información en contexto con el fin de fijarse posturas críticas frente a ella, y así participar activamente en la toma de decisiones relevantes para su vida personal o social.

A medida que los alumnos tienen la oportunidad de usar los números y pensar en ellos en contextos significativos, el pensamiento numérico evoluciona a través de los métodos de cálculo (escrito, mental, calculadoras y estimación), de los procesos de estimación y aproximación, y sobre todo, de la construcción conceptual de las operaciones matemáticas de orden aditivo y multiplicativo a partir de la actividad matemática ligada a la solución de problemas. Igualmente se espera que a lo largo de toda la educación básica y media, los alumnos desarrollen paulatinamente procesos descriptivos, explicativos y argumentativos, asociados con los sistemas numéricos, los de numeración y el uso y significado de ambos en contextos científicos y de la vida cotidiana individual.

Entre los aspectos que se encuentran en los Estándares, con respecto al pensamiento numérico se citan los siguientes:

Primero a tercero:

- Reconozco significados del número en diferentes contextos (medición, conteo, comparación, codificación, localización entre otros).
- Describo situaciones que requieren el uso de medidas relativas.
- Reconozco propiedades de los números (ser par, ser impar...) y relaciones entre ellos (ser mayor que, ser menor que, ser múltiplo de, ser divisible por....) en diferentes contextos.
- Justifico regularidades y propiedades de los números, sus relaciones y operaciones.

Cuarto a quinto:

- Identifico y uso medidas relativas en distintos contextos.

Sexto a séptimo:

- Resuelvo y formulo problemas en contextos de medidas relativas y de variaciones en las medidas.

En los Lineamientos Curriculares en el área de matemática, se puede apreciar que en el desarrollo del pensamiento numérico no se establece desde la formalización de los números enteros, hay una postura más desde la construcción de los números enteros en el aspecto de número relativo, entendido como número contextualizado, donde los estudiantes se acercan al desarrollo del pensamiento numérico por medio de situaciones didácticas como propuesta de trabajo en el aula.
En el estudio del pensamiento numérico, los puntos de referencia absolutos o relativos son importantes, sobre todo, cuando se trata de hacer interpretaciones de los números enteros y de sus operaciones en la recta numérica, o de utilizarlos para representar situaciones de la vida real.

Al respecto, MEN (1998) comenta:

> Por ejemplo, -5 puede ser representado como el punto de la recta que está 5 unidades a la izquierda del cero, pero también puede ser representado por un desplazamiento de 5 unidades hacia la izquierda, desde un punto cualquiera de la recta, por ejemplo un desplazamiento desde 20 hasta 15. En ambos casos, el -5 expresa una cantidad de 5 unidades contadas hacia la izquierda del punto de referencia, lo cual indica que el punto final representa un valor 5 unidades menor que el punto inicial, pero en el caso que el punto de referencia es absoluto, es decir el cero, entonces el resultado coincide con el punto geométrico de la recta que representa el número -5.

Lo anterior permite concluir que la propuesta curricular Colombiana parte de aspectos empíricos relacionados con las medidas relativas y avanza hacia cierta conceptualización por parte de los estudiantes. Por tanto las referencias nombradas son importantes para el trabajo propuesto.

2.3 DIMENSIÓN MATEMÁTICA

> El periodo de los negativos que va desde su aparición hasta su aceptación duró más de 1000 años, y la historia de su aceptación como números, fue un proceso lleno de avances y retrocesos, de oscilaciones que van del total rechazo a su aceptación como "artificios del cálculo", de intentos infructuosos por dotarlos de una existencia real. Y esta larga y azarosa historia no se cerró hasta el siglo pasado. El problema de los negativos, que había atormentado durante mucho tiempo a los matemáticos, terminó cuando éstos abandonaron la empresa de descubrirlos en la naturaleza y comenzaron a verlos como creaciones intelectuales. La solución supuso, pues, una inversión en la forma de entender la relación entre lo real y lo formal. Desde una perspectiva se vio claro que la justificación de los negativos sólo proviene de las leyes lógicas y aritméticas (González et al., 1999, pp. 21 - 22).

Los números negativos se contraponen a los naturales y fraccionarios positivos, tanto por la forma en que surgieron como por la fecha de su aparición histórica. Los negativos tienen su origen en la práctica matemática y más concretamente, en las manipulaciones algebraicas y se intentó en numerosas ocasiones encajar esas nuevas ideas con las que ya se conocían. Fue necesario por tanto crear un conjunto nuevo e introducir el principio de permanencia, para obtener un resultado coherente, formalmente válido y totalmente satisfactorio.

Así, se ampliaba formalmente el campo numérico, construyéndose un nuevo conjunto Z a partir de N, de tal manera que se pudiera establecer un isomorfismo entre N y una parte de Z que se suele llamar Z^{+} o conjunto de los enteros positivos.

> Los números positivos, negativos y el cero, números con signo o más formalmente, números enteros son el resultado de una de las ampliaciones del campo numérico, en concreto la que se produce por la simetrización del semigrupo aditivo de los números naturales y, consecuentemente, como tal ampliación, por la conservación de todas las demás propiedades fundamentales, en particular de la multiplicación y el orden en N. Se trata de una ampliación motivada por necesidades matemáticas, realizada formalmente, y que zanjó un desarrollo histórico largo, plagado de dificultades y "sorprendente" (Glaeser (1981) citado en González et al., 1999).

Así pues, los números enteros funcionan porque se han construido así para que lo hagan, constituyen un modelo matemático aplicable a un dominio muy amplio que se extiende a través de la aritmética, el álgebra y la geometría y forman parte del conocimiento constituido. Sin embargo, la situación no es igualmente clara en el campo de la Educación Matemática, en el que se pretende que los estudiantes aprendan en poco tiempo y en edades tempranas, por necesidades curriculares, lo que la humanidad ha tardado tanto tiempo en comprender y construir.

> Además, el conocimiento matemático está relacionado con determinados contextos y su creación se encuentra condicionada por ellos. En unos casos se trata de contextos concretos relacionados con la realidad física (medida, cantidades, espacio físico, sucesos, etc.), y en otros, se trata de contextos matemáticos sin relación aparente con dicha realidad (estructuras, geometrías no euclídeas, teoría de funciones, etc.). En estos casos la creación matemática busca completar el conocimiento ya existente, descubrir nueva propiedades y relaciones, simplificar y dar coherencia a todo lo anterior, buscar alternativas válidas, etc. (González et al., 1999).

Por esto, los números enteros son un conocimiento matemático elemental que es importante y a la vez didácticamente complejo, por cuanto que, por un lado, incide en el paso de la aritmética al álgebra, afecta a grandes áreas de las matemáticas y constituye un ingrediente básico en la educación del pensamiento numérico y algebraico, y su tratamiento didáctico no se deduce claramente de la construcción matemática ni se puede posponer íntegramente a niveles escolares más avanzados o ajustarse directamente a las pautas intuitivas y constructivas que se recomiendan en la actualidad para la enseñanza de las matemáticas elementales.

2.3.1 Axiomas fundamentales de los números enteros

Axioma 0. Existen dos funciones $s, p: Z \times Z \rightarrow Z$ llamadas, respectivamente, *adición y multiplicación.* Si $(a, b) \in Z \times Z$, $s(a, b)$y $p(a, b)$ se simbolizan respectivamente $a + b$, ab y se llaman la *suma y el producto* de a y b. observemos que $a + b$ y ab siendo imágenes de (a, b)bajo las funciones s y p, son elementos únicos de Z; se suele decir que Z es *cerrado* con respecto a las operaciones adición y multiplicación. Dicha propiedad de unicidad permite afirmar que estas operaciones son *bien definidas.*

Si $a = b$ y $c = d$, entonces $(a, c) = (c, d)$ y por tanto $a + c = b + d$; es decir, se puede sumar un mismo número entero a ambos lados de una igualdad.

S_1: Si $a, b, c \in$ a Z, entonces $(a + b) + c = a + (b + c)$

P_1: Si $a, b, c \in Z$, entonces $(ab)\, c = a\, (bc)$

S_2: Si $ab \in Z$, entonces $a + b = b + a$

P_2: Si $a, b \in Z$, entonces $ab = ba$

S_3: Existe un único entero 0 (cero) tal que $a + 0 = a$, para todo $a \in Z$ (0 se llama el *neutro* para la adición)

P_3: Existe un único entero $1 \neq 0$ tal que $a1 = a$, para todo $a \in Z$ (1 se llama el *neutro* para la multiplicación)

S_4: Si $a \in Z$, entonces existe un único $-a \in Z$ (el *opuesto* de a) tal que $a + (-a) = 0$

P_4: Sean $a, b, c \in Z, a \# 0$. Si $ab = ac$, entonces $b = c$ (propiedad cancelativa de la multiplicación)

P_5: Si $a, b, c \in Z$, entonces $a(b + c) = ab + ac$

Observación: También Z es cerrado para la operación definida por $a - b = a + (-b), a, b \in Z$; la cual se denomina *sustracción.*

Ahora procederemos a considerar varias propiedades de Z como simples teoremas que se deducen a partir de los axiomas anteriores.

Teorema 1

Si $a, b, c \in Z$ *y* $a + b = a + c$, *entonces* $b = c$.

Demostración:

Según s_4,existe $-a$ tal que $a + (-a) = 0 = (-a) + a$ (por s_2), entonces a partir de $a + b = a + c$ y el axioma 0, $(-a) + (a + b) = (-a) + (a + c)$ de donde por s_1,$(-a + a) + b = (-a + a) + c$, es decir, $0 + b = 0 + c$, por lo tanto $b = c$.

Teorema 2

Para todo $a \in Z, a0 = 0$

Demostración:

Según s_3y p_5, $a0 = a(0 + 0) = a0 + a0$ y también $a0 + 0 = 0$; por consiguiente $a0 + a0 = a0 + 0$ y el teorema 1 implica $a0 = 0$.

Teorema 3

Si $a, b \in Z$, *entonces*

i. $-(-a) = a$

ii. $(-a)b = a(-b) = -(ab)$

iii. $(-a)(-b) = ab$

Demostración:

i. $(-a) + a = 0\ y\ (-a) + [-(-a)] = 0$ (de acuerdo con s_4). Entonces $(-a + [-(-a)] = (-a) + a$ y por el teorema 1, $-(-a) = a$.

ii. $(-a)\,b + ab = b\,(-a) + ba = b\,(-a + a) = 0$. Igualmente $-(ab) + ab = 0$ y finalmente $(-a)\,b = a\,(-b)$.

Axiomas de orden

Existe un subconjunto de Z llamado *"enteros positivos",* Z^+ con las siguientes propiedades:

O_1: Si $a, b \in Z^+$, entonces $a + b$y $ab \in$ a Z^+(Z^+es cerrado para la adición y la multiplicación).

O_2: Dado cualquier $a \in$ Z, $a \in Z^+$, o, $a = 0$, o, $-a \in Z^+$ (las disyunciones son exclusivas). Cuando $-a \in Z^+$ se dice que a es negativo.

Teorema 4

$1 \in Z^+$

Demostración:

$1 \neq 0$ por *p_3,* entonces $1 \in Z^+$ o $-1 \in Z^+$(según *O_2);* si $-1 \in Z^+$, entonces $(-1)(-1) = 1 \in Z^+$, lo cual contradice a *O_2*.

Definición:

Sean $a, b \in Z$; las expresiones *"a es menor que b",* $a < b$ y *"b es mayor que a",* $b > a$ son equivalentes y significan $b - a \in Z^+$. Además $a \leq b$ significa $a < b$ o $a = b$;
$a < b < c$ equivale a, $a < b$ y $b < c$.

Teorema 5

Sean $a, b, c \in Z$, entonces

i. *$a \in Z^+$si, y sólo si, $a > 0$*

ii. $Si\ a > 0\ y\ b > 0\ entonces\ a + b > 0\ y\ ab > 0$

iii. $a > 0, o, a = 0, o, -a > 0$

iv. $aa = a^2 \geq 0$

v. $Si\ a > 0\ y\ b < 0\ entonces\ ab < 0$

vi. $Si\ ab > 0\ y\ b > 0\ entonces\ a > 0$

vii. $Si\ a > 0, ab < ac\ si, y\ sólo\ si, b < c$

Demostración:

vi. Supondremos que $a \leq 0$ y llegaremos a una contradicción. En efecto, si $a = 0$ entonces $ab = 0;\ si\ a < 0$, como $b > 0$ tendremos $ab < 0$, en cualquiera de los dos casos obtendremos una contradicción con la hipótesis.

Definición:

Sea$a \in Z$, *el valor absoluto* de$a$, $|a|$ se define por:

$$|a| = \begin{cases} a, si\ a \geq 0 \\ -a, si\ a < 0 \end{cases}$$

Teorema 6

$Si\ a, b \in Z\ entonces$

i. $|-a| = |a|$

ii. $|ab| = |a|\,|b|$

iii. $-|a| <= a <= |a|$

iv. Si $b > 0, |a| \leq b\ si, y\ sólo\ si, -b \leq a \leq b$

v. $|a + b| \leq |a| + |b|$

2.3.2 El número entero por medio del modelo de la escala numérica.

Para describir la posición de un punto sobre una recta, se necesita un punto de referencia y los dos sentidos de la recta, una unidad de medida para considerar las distancias de los puntos al origen, o la distancia entre los puntos de una recta.

Tomando un punto A como origen y un segmento AA_1 como una unidad de medida, se determinan una serie de puntos A_1, A_2, $A_3 \dots, A_n$, tal que la distancia entre los puntos consecutivos sea la misma distancia entre A y A_1. Los puntos A_i de esta semirrecta, se pueden identificar con los números naturales, el punto A con el0, el punto A_1 con el 1, y así sucesivamente. El punto A_1 está a una unidad de distancia del origen, el punto A_2 a dos unidades de distancia, etc.

Sobre la otra semirrecta se realiza un proceso análogo, pues para cualquier punto A_i, existe un punto A'_i, tal que la distancia de ambos al origen es la misma. Estos puntos tienen las mismas condiciones que los anteriores, la distancia de A'_i, al origen es 1, la distancia de A'_2 al origen es 2, etc., en este caso es necesario una nueva serie numérica para la otra semirrecta, números que indican la misma distancia pero en distinto sentido, a estos números es a lo que se denomina "números negativos" y se denotaran por, $-1, -2, -3, \dots, -n$ ..., donde N es un número positivo.
Así se ha establecido una escala en la recta identificando puntos con números, lo que ha dado lugar a un nuevo conjunto numérico al que se denomina conjunto de los números enteros, formados por los números naturales, los números negativos y el cero.

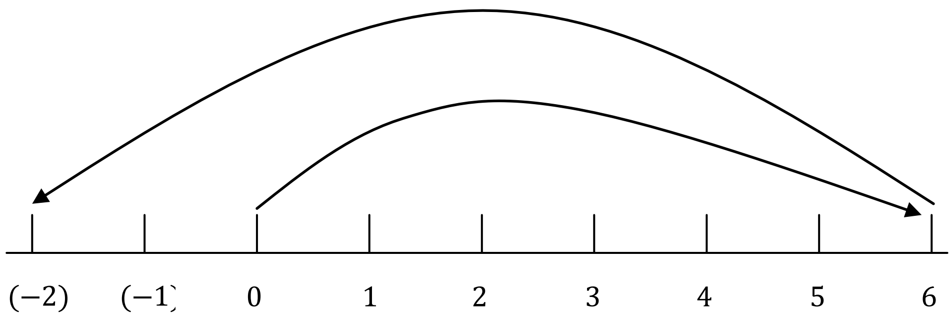
2.3.3 Adición a través de la recta numérica

> La idea intuitiva que empezó con Girard, de que lo positivo puede considerarse como un avance y lo negativo como un retroceso no parece primar en la mayoría de los textos, sino que viene a continuación, una vez creada la teoría de los enteros: "Después de haber considerado el sistema numérico en un aspecto, vamos a emplear ahora otro esquema conceptual válido para estudiar los números. Este esquema considerado para muchos como el mejor modo de abordar el sistema numérico". (Lovell, K., 1962 citado en González et al., 1999).

El tratar el número entero a través de la recta numérica es otra forma de concretizarlo. A su vez es extender la semirrecta numérica de los conocidos, por tanto se parte de un conocimiento de los naturales sobre el soporte de la recta geométrica. El número entero vendrá representado por un punto de la recta (aspecto estático) o bien por una distancia, desplazamiento, vector o salto (aspecto dinámico), pudiendo estar contextualizado (trayectos realizados por personas, ascensores, etc.) o no.

Necesariamente cuando se pasa a las operaciones sobre la recta numérica, la mayoría de las ocasiones el número entero tiene que aparecer en su aspecto dinámico, simultaneándose en ocasiones el número entero como punto de la recta y como operador.

Ejemplo en el que se da una de las reglas de la adición para visualizarla en la recta numérica:

> Si el número a es positivo y el b es negativo, para sumarlos gráficamente se le lleva una flecha hacia la derecha con origen en cero y extremo en a. A continuación, se traza otra flecha con origen en a y que recorra hacia la izquierda b unidades. El extremo de esta flecha indica el resultado de la suma (Ed. Anaya, 1987, Citado en González et al., 1999).
>
> 
>
>
> *Primero sumamos gráficamente los números* 6 *y* (-8). *La segunda flecha tiene de extremo* (-2). *La suma de* 6 *y* (-8) *es* (-2) *y se expresa:* $6 + (-8) = (-2)$.

La opción de tratar los números enteros bajo el soporte de la recta numérica admite el número entero como extensión del número ordinal. Pensamos que tal vez es más fácil para el niño admitir esta extensión que una extensión cardinal. A su vez las operaciones quedan visualizadas y si se parte de un trabajo previo da la aritmética en la recta numérica creemos fácil el admitir las distintas reglas de las operaciones con los nuevos números. (González et al., 1999)

2.3.4Orden y representación de los números enteros Z.

Para definir un orden en Zque conserve el orden de los naturales y que incluya los elementos de Z^{-}. Para ello se recurre a la representación que ubica el cero como punto de referencia; a su derecha se colocan de manera progresiva los elementos de Z^{+}y a la izquierda, los elementos de Z^{-}. Esta es una denominación al nominal que permite una visualización integral de Z^{-}y Z^{+}:

$$\ldots\bullet \quad \bullet \quad \bullet \quad \bullet \quad \bullet \quad \bullet \quad \bullet\ldots$$

$$\ldots 3 \quad 2 \quad -1 \quad 0 \quad 1 \quad 2 \quad 3 \ldots$$

Dado un número entero $x \in Z$, se presenta uno y sólo uno de los tres casos siguientes: $x = 0$, $x \in Z^-$, $x \in Z^+$. Además, hay que tener en cuenta que $x \in Z^+$, entonces $-x \in Z^-$; si $x \in Z^-$, entonces $-x \in Z^+$.
Se suele denominar a los elementos de Z^+ los enteros positivos y a los elementos de Z^- los enteros negativos.
En este orden de los enteros permite definir formalmente el orden en todo Z, a través de la resta[4]:

Dados dos números enteros a y b pertenecientes a Z, decimos que $a < b$ si $b - a \in Z^+$. Cuando $a < b$ también escribiremos $b > a$. Además escribiremos $a \leq b$ si $a < b$ o $a = b$.

2.3.5 La relación "mayor que" y "menor que"

Si a y b son número enteros, se dice a es menor que b, si $b - a$ es positivo, y se escribe $a < b$. También en este caso se dice que b es mayor que a y se escribe $b > a$. Esto significa que, en la recta, a esta a la izquierda de b (si se ha dibujado de tal manera que 0 está a la izquierda de 1). En particular, la expresión $a > 0$ quiere decir que a es positivo y la expresión $a < 0$ significa que a es negativo.

Dos relaciones adicionales de orden que son importantes[5]:

1. a **es menor o igual a** b, dado por
   $a \leq b$ sí y sólo si $a < b$ o $a = b$.

2. a **es mayor o igual a** b, dado por
   $a \geq b$ sí y sólo si $a > 0$ o $a = b$.

2.3.6 Distancia y valor absoluto.

Dada una recta el cero (0) es la coordenada del punto O y x es la coordenada de un punto P. Se usa la expresión "distancia entre los números 0 y x", que se denota $d\,(0, x)$, con el significado intuitivo de "longitud del segmento $\overline{OP}$", o "distancia entre O y P" con esta correspondencia, debe ser claro que si x es positivo entonces la distancia entre 0 y x es el opuesto de x, $-x$ (por ejemplo, la distancia entre 0 y -5 es $-(-5) = 5$). Además si se define la distancia entre cero y cero como cero, entonces

---

[4]Zill, D. y Dewar J. (1993). Algebra y Trigonometría. McGraw-Hill.
[5]Robledo J. (2007). Pre Cálculo e Introducción a Máxima Parte I. Departamento de Matemáticas Facultad de Ciencias, Universidad del Valle, Cali, Colombia. pp. 26-29

la distancia entre 0 y un número entero x, cualquiera que él sea, se puede expresar a través de la fórmula siguiente:

$$d(0,x)=\begin{cases} x, si\ x>0 \\ 0, si\ x=0 \\ -x, si\ x<0 \end{cases}$$

Esta fórmula de distancia está relacionada con el concepto algebraico conocido como: **valor absoluto.** Por ejemplo, $d(0,5) = 5 = |5|, d(0,-5) = -(-5) = 5 = |-5|, d\ (0,0) = 0 = |0|$. Formalmente, el valor absoluto de un número entero x, se define de la siguiente manera:

$$|x|=\begin{cases} x, si\ x>0 \\ 0, si\ x=0 \\ -x, si\ x<0 \end{cases} \qquad |x|=\begin{cases} x, si\ x\ \geq 0 \\ -x, si\ x<0 \end{cases}$$

Se observa que las dos formas de expresar el valor absoluto son equivalentes. (Robledo J, 2007).

Teniendo en cuenta la dimensión matemática expuesta en este trabajo, es importante resaltar que estos elementos son un horizonte que se plantean para no perder de vista que los números enteros negativos, desde la perspectiva matemática tienen una formalización, a partir de unas propiedades y relaciones que ellos cumplen y no se deben de dejar a un lado enseñando solo los enteros desde aspectos empíricos.

Así mismo, los números negativos se pueden introducir en un marco geométrico, ya sea como una necesidad de ampliar el campo de los números naturales o como objetos geométricos. Dentro del marco geométrico existen diversos modelos para la introducción de estos números, y generalmente todos ellos utilizan la recta numérica como soporte intuitivo. Uno de los modelos que se presenta, establece una escala numérica sobre una recta.

CAPITULO III: UNA SECUENCIA DIDÁCTICA PARA LA INTRODUCCIÓN DEL NÚMERO ENTERO, A PARTIR DE LO RELATIVO Y LO NEGATIVO EN LA ESCUELA

En este capítulo se aborda el rediseño e implementación de una secuencia didáctica propuesta, la cual está apoyada en referentes teóricos didácticos, curriculares y matemáticos, expuestos en el marco teórico de referencia (Capitulo II).

En primer lugar se presenta la metodología adoptada en el rediseño de la secuencia y las diferentes fases que la componen. En segundo lugar se exponen los aspectos metodológicos de implementación, sistematización y análisis de los resultados de la secuencia didáctica rediseñada. Cada situación se describe de manera general, y se explicita los aspectos relacionados con su implementación: Colegio, fecha, grado, número de estudiantes, la organización del trabajo en el aula, la orientación de las estudiantes de trabajo de grado en las actividades y la participación por parte de los estudiantes.

3.1 METODOLOGÍA DE LA INVESTIGACIÓN

La metodología adoptada es de tipo cualitativo e interpretativo, a través de la cual se observaran algunos fenómenos relacionados con los procesos de enseñanza y aprendizaje con relación a la construcción de los números enteros negativos en estudiantes de grado séptimo del Colegio La Presentación El Paraíso de la ciudad de Cali.

Este proceso metodológico se organiza a través de varias fases que permitirán alcanzar los objetivos propuestos en este trabajo.

Fase I: Identificación y organización previa de una secuencia didáctica para proponerla como estrategia, validar y documentar la problemática planteada.

Fase II: Reformulación de una secuencia didáctica ya diseñada (Chaparro, Póveda & Fernández, (2006)), a la luz de un marco teórico identificado con unos elementos didácticos, curriculares y matemáticos para sustentar el problema de investigación.

Fase III: Implementación de la secuencia didáctica reformulada, con el propósito de validar información sobre ciertas dificultades, procedimientos y desempeños asociados a la construcción del número entero negativo. En esta etapa, se prestará atención a los procedimientos empleados, estrategias de solución, y errores que se desprenden de sus respuestas con relación al concepto de número entero negativo, esto con el fin de realizar estudios comparativos entre estudiantes; y poner de manifiesto las dificultades en la comprensión de este conocimiento matemático.

Fase IV: Organización y análisis de resultados de la implementación según las actividades propuestas en la secuencia didáctica, con el propósito de hacer un análisis a la luz del marco teórico propuesto en este documento, por medio de la identificación de características comunes, se procede al análisis de las respuestas obtenidas en el desempeño de los estudiantes. Se agruparan las respuestas para así facilitar una clasificación de la información en categorías descriptivas donde se describen y conocen algunas situaciones, saberes y actitudes con relación al desarrollo de la secuencia de didáctica.

3.2SOBRE EL DISEÑO DE LA SECUENCIA DIDÁCTICA

En este trabajo se reformuló una secuencia didáctica llamada *"Jugando con los números enteros"* diseñada e implementada por docentes del municipio de Duitama (Omaira Chaparro, Dorila Póveda, Rafael A. Fernández), la cual tiene como propósito abordar el estudio del concepto de número entero, algunas de sus representaciones, operaciones y relaciones; la secuencia consta de tres situaciones: la situación 1, presenta tres actividades alusivas a la conceptualización de los números enteros, la situación 2, presenta cuatro actividades alusivas a las Relaciones de orden entre números enteros, y finalmente la situación 3, presenta cuatro actividades alusivas a la estructura aditiva de los enteros.

Teniendo en cuenta los aspectos de la secuencia inicial, se reformuló la secuencia de la siguiente manera: situación 1, *Acerquémonos al concepto de número entero a partir del número relativo*, esta situación está conformada por una actividad: actividad 1, *Usando enteros en la línea del tiempo con inventos importantes en la historia de la humanidad*, esta actividad contiene cinco preguntas.

Situación 2, *caractericemos el número entero negativo*, esta situación está conformada por tres actividades: actividad 1, *el número negativo como opuesto al número positivo*, esta actividad contiene seis preguntas, actividad 2, *El valor absoluto: cantidad y distancia,* esta actividad contiene tres preguntas, actividad 3, *El número negativo como menor que cero y menor que cualquier positivo*, esta actividad contiene seis preguntas.

Situación 3, *Estructura aditiva de enteros,* esta situación está conformada por tres actividades: actividad 1, *La pista de las medidas,* esta actividad contiene cuatro preguntas, actividad 2, *La carrera del valor absoluto,* esta actividad contiene dos preguntas, y la actividad 3, que contiene tres preguntas.

En el desarrollo didáctico de la secuencia se utiliza el término "situaciones", para designar aspectos, cuestiones y tareas interesantes para los estudiantes al trabajar en el aula de clases. Las "situaciones" indican las distintas fases en que aparece dividida la secuencia didáctica planteada, orientará a los estudiantes con información que se les presentará de una forma más sencilla e interesante y así llegar a la aplicación de la secuencia didáctica propuesta. (González et al., 1999, pp. 172).

La secuencia didáctica está diseñada en tres situaciones, cada situación es una situación problema, que abarca desde aspectos empíricos por medio de situaciones contextuales hasta llegar a un aspecto formal, de manera que se puedan articular los elementos curriculares, matemáticos y didácticos que se van a trabajar en la introducción del concepto de número entero, haciendo énfasis en el número negativo, y sus diferentes tipos de representaciones, partiendo del número relativo, hasta llegar a la formalización del número entero.

La secuencia didáctica tiene como propósito intentar resolver preguntas sobre algunas problemáticas de la comprensión que los estudiantes tienen del concepto de número entero, enfatizando en el número negativo, las dificultades en la construcción de este concepto, y en la identificación de los errores conceptuales que están tras las problemáticas encontradas, de manera que las situaciones orientarán a los estudiantes con información que le resultará de forma más sencilla para la aplicación de la secuencia propuesta y así llegar a su desarrollo.

3.2.1 Contenidos matemáticos

En el diseño de la secuencia didáctica donde se presentan actividades correspondientes a cada una de las situaciones, se tiene en cuenta la intencionalidad y la pertinencia de las preguntas basadas en los contenidos matemáticos a ser movilizados, su organización y continuidad a través de las actividades propuestas.

En la primera situación, el contenido matemático movilizado parte del número relativo al número entero, por medio de ejercicios que acercaran a los estudiantes al uso de la recta numérica, a través de la ubicación adecuada de los signos (positivos y negativos) que acompañan a las números enteros, de manera que a partir de actividades contextualizadas como los inventos que están en la época del nacimiento de Cristo, permitan reconocer por qué se puede asignar a una cantidad ubicada en la recta numérica el signo más y menos, tomando al nacimiento de Cristo como un punto de referencia, y puedan establecer su relación con el cero, es decir, verlo como un cero relativo, así mismo por medio de la ubicación de los valores (fechas) en la recta introducir cuando un número es mayor que otro por medio de la comparación de fechas ubicadas a ambos lados del cero. De igual forma, introducir las características que presentan los números enteros como números opuestos, por medio de inventos que tengan las mismas fechas antes y después de Cristo. Esta primera situación busca reconocer que el concepto de número entero negativo como relativo, es el resultado de la cuantificación de ciertos cambios de la medida relativa de una magnitud con respecto a un punto de referencia, identificado con el cero.

En la segunda situación, el contenido matemático movilizado parte de propiedades que permitan caracterizar el número entero enfatizando en el negativo, por medio de actividades que permitan ver el número negativo como opuesto al número positivo, de manera que al escribir fechas con igual valor numérico pero diferente signo, vayan construyendo las características principales de los números opuestos y de igual forma puedan reconocer que la ubicación de números opuestos en la recta es simétrica respecto a cero, es decir, dos números enteros que se encuentren a la misma distancia de un punto de referencia tomado como el cero en la recta numérica, se denominan números enteros opuestos, y por tanto, todo número entero negativo tiene su opuesto en un número entero positivo. De ahí se pasa a introducir el valor absoluto, por medio de la cantidad y distancia, así teniendo en cuenta que la relación entre números opuestos diferentes de cero, corresponde al valor del número, es decir, a su valor absoluto, entonces “Los números opuestos tienen igual valor absoluto y diferente signo”. Por lo cual, los números que son coordenadas de puntos simétricos respecto al cero, tienen igual valor absoluto. Igualmente cuando las coordenadas sean positivas o negativas, la distancia siempre va a ser positiva.

Partiendo de este concepto se presentan actividades que permitan ver el número negativo como menor que cero y menor que cualquier positivo, teniendo en cuenta la consigna que se les presenta antes de realizar las actividades: “Al comparar dos números enteros se debe tener cuidado que cuando los dos son negativos, es mayor el que tiene menor valor absoluto”, donde lo que prevalece en esta parte es la noción de orden en los números enteros.

En la tercera y última situación, se aborda la aplicación de la suma de números enteros en la recta numérica, donde por medio de actividades lúdicas como la pista de las medidas, se introduce la suma por medio de desplazamientos que deben hacer los estudiantes con las orientaciones dadas para llegar a la meta, a partir de esta actividad se presentan situaciones problema donde deben realizar avances y retrocesos para saber en dónde queda la ficha, y escribir como plantearían esos movimientos de manera operativa. Por medio de los desplazamientos que deben realizar los estudiantes en la pista de las medidas, se introduce la suma a través de la recta numérica, en donde por medio de consignas se guía al estudiante para que sumen de manera gráfica en la recta números positivos y negativos, y se incita a que escriban como podrían plantear de manera operativa las sumas gráficas que realizaron en la recta. En el siguiente punto se aborda por medio de la representación gráfica de la suma en la recta, propiedades referentes a conceptos trabajados anteriormente como lo es el valor absoluto, a través de consignas que permiten al estudiante aplicar el concepto de valor absoluto de una manera más formal, por último a través de actividades lúdicas como lo es el dominó realicen operaciones, que permiten resolver problemas matemáticos que involucran sumas y contextos relativos del número entero.

Esta secuencia se ajusta en cada una de las situaciones, de acuerdo al proceso histórico por los que tuvieron que llegar los números enteros hasta su formalización, esto se debe a que el proceso se inicia con un grado de generalidad (el orden y la comparación se encuentran en la mayor parte de las situaciones cotidianas), desde situaciones elementales (cronología) a situaciones más complejas (estructura aditiva), para alcanzar en cada una de ellas una fase superior a la etapa anterior; a partir de un acercamiento en principio intuitivo del número relativo, para pasar al número entero como útil matemático; aquí se produce una descontextualización para finalmente llegar al número entero como objeto matemático.

3.2.2 Perspectivas de desempeño

La secuencia didáctica tiene como propósito abordar el estudio del concepto de número entero, algunas de sus representaciones, operaciones, relaciones e indagar sobre los diferentes tipos de respuestas dadas por los estudiantes, a partir del trabajo en el aula, para lograr la construcción del número entero enfatizando en el número negativo, para esto se contara con el conocimiento que tenga cada uno de los estudiantes acerca de este concepto matemático.

Se espera que a través del trabajo en el aula, se promueva en los estudiantes el uso de las matemáticas en situaciones significativas, las cuales les ayuden a construir nuevos conocimientos y los usen para hacer diferentes razonamientos, logrando que en estos se puedan integrar las dimensiones en las cuales se pueda construir una visión integrada de los números enteros por medio de las relaciones entre ellas.

De igual manera, se pretende reconocer la relación que existe, entre lo propuesto en este trabajo a la luz de lo que han planteado los autores, y lo que han desarrollado los estudiantes en el resultado del trabajo durante la implementación de la secuencia didáctica. De esta forma, comprobar la relación que hay o no entre lo propuesto en el trabajo y lo que interpretan los estudiantes del concepto de números enteros, sus aplicaciones, métodos de solución, etc.

En la secuencia didáctica que se ha reformulado se plantea una serie de situaciones en las cuales primero se parte del reconocimiento de los conceptos hacia la caracterización de estos por parte de los estudiantes, en cada situación se pretende alcanzar un objetivo en particular, en el caso de la Situación 1, Acerquémonos al concepto de número entero a partir del número relativo,que tiene como propósito determinar a partir de la interacción con actividades contextualizadas, cómo los estudiantes adquieren la noción de número relativo.

Seguidamente se propone una Situación 2, Caractericemos el número entero negativo,la cual pretende que el estudiante identifique y reconozca propiedades que caractericen el número entero negativo,que permitan su identificación, su resolución y sus usos en los diferentes contextos matemáticos, resolviendo ejercicios y problemas de manera que los estudiantes puedan ordenar números, reconozcan los números opuestos, empleen el valor absoluto, determinando a la vez cuándo un número es mayor o menor que otro, tanto en números positivos como negativos.

Finalmente una situación 3, Estructura aditiva de enteros,la cual pretende acercar al estudiante con el reconocimiento de la adición, es decir, como una relación de cualquier par de números enteros (entre valores positivos, negativos, positivos y negativos), al proponer y resolver una serie de ejemplos y ejercicios que involucren la aplicación de la adición de números enteros, de manera que se puedan identificar las estrategias que tienen los estudiantes para dar sentido y significado a la operación de adición.

En general se pretende un acercamiento significativo por medio de las situaciones problema donde los estudiantes le den sentido al concepto de número entero, haciendo énfasis en los negativos.

3.2.3. La secuencia

SITUACIÓN 1: ACERQUÉMONOS AL CONCEPTO DE NÚMERO ENTERO A PARTIR DEL NÚMERO RELATIVO

LOGRO: A partir de la interacción con actividades contextualizadas, los estudiantes adquieran la noción de número relativo.

ACTIVIDAD 1: USANDO ENTEROS EN LA LÍNEA DEL TIEMPO CON INVENTOS IMPORTANTES EN LA HISTORIA DE LA HUMANIDAD

1. Realiza en forma individual la siguiente lectura:

“GRANDES INVENTOS DE LA HUMANIDAD”

Desde siempre el ser humano ha buscado por todos los medios a su alcance, la forma de mejorar su calidad de vida, con su gran inteligencia ha desarrollado herramientas que le han hecho la vida más fácil y sencilla.

Los siguientes, son algunos de los inventos que han cambiado para siempre la historia de la humanidad.

Los primeros hombres median el tiempo en días. Sabían aproximadamente la duración del año observando las estaciones y podían medir el tiempo en meses, mirando la luna. Los primeros instrumentos para medir el tiempo fueron los relojes de sol y de agua, inventados hacia el año 1500 antes de Cristo; se cree que el primer reloj mecánico se hizo en China en el año 1088 después de Cristo, medía unos $10\ m$ de altura y estaba accionado por agua.



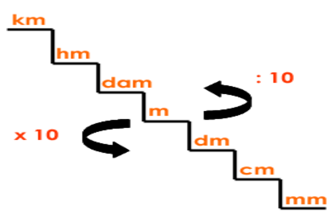
Así como el hombre empezó a medir el tiempo observando estaciones y mirando la luna, los viajeros tuvieron la necesidad de indicar su rumbo para orientarse, un instrumento que ayudó a esto fue la brújula, que se inventó en China hacia el año 1000 después de Cristo y llegó a Europa 100 años después. La primera brújula fue una aguja de hierro sobre un trozo de corcho o caña que flotaba en un vaso de agua.

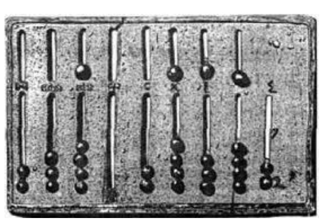
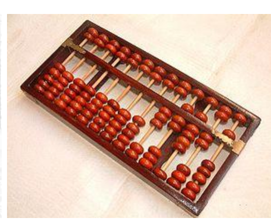
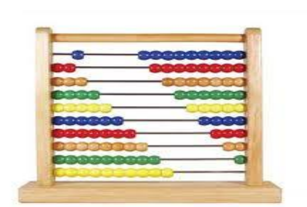
Otro aspecto por el cual se preocupó el hombre, fue por medir las masas, en el año 4500 antes de Cristo, el hombre logró pesar objetos con el primer instrumento creado como fue la balanza, en Siria se usó para pesar oro en polvo con pesas de piedra pulidas con gran precisión.

La inexactitud en los diversos sistemas de medición rudimentarios, fue una de las causas más frecuentes de polémicas o disputas entre comerciantes, funcionarios de instituciones y ciudadanos, en Europa. En el año 1791 después de Cristo, tras el derrocamiento de la monarquía, la Asamblea Nacional Francesa abolió el sistema tradicional de pesas y medidas por uno denominado "métrico" (medida) en múltiplos de diez.

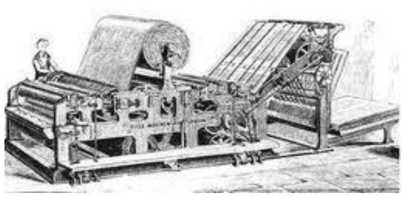
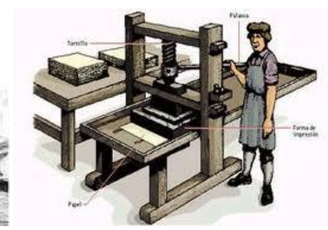
El primer instrumento para ayudar a contar fue el ábaco, consistía en bolas perforadas que se desplazaban sobre alambres sujetos a un marco, con las que se conseguía operar para representar números; se construyó en Babilonia hacia el año 3000 antes de Cristo, otro instrumento que se inventó para hacer cálculos fue la primera máquina calculadora creada en Francia en 1642 después de Cristo.

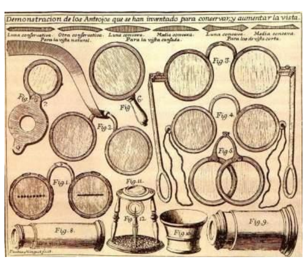
Por otra parte, la primera evidencia de que el hombre ha tenido la necesidad de comunicarse por escrito son los petroglifos dejados en cavernas prehistóricas, pero fue hasta el año 1300 años antes de Cristo, donde apareció el primer alfabeto en Siria. Los primeros libros que se imprimieron fueron pergaminos impresos con moldes de madera, creados en China y Corea, hacia el año 700 después de Cristo.



En el año 1500 después de Cristo se inventó la imprenta, fue la máquina responsable de una de las revoluciones sociales y tecnológicas más importantes para la época, el primer libro elaborado mediante este sistema fue La Biblia de 42 líneas.

Por otro lado se cree que las gafas se usaron por primera vez en Italia hacia el año 1285 después de Cristo y su uso se incrementó, debido a que estas mejoraban la visión de las personas para leer o seguir trabajando en labores delicadas.



Otro invento importante del hombre fue el descubrimiento de la pólvora, los chinos descubrieron como mezclar salitre, azufre y carbón de encina para hacer pólvora. La usaron por primera vez en el año 850 después de Cristo, la pólvora se empleaba sólo para cohetes y juegos de artificio sin ninguna intención de guerra.



Otros inventos significativos para tener presente son: En el año 3500 antes de Cristo se invento la rueda en la ciudad de Ur Mesopotamia. En el año 400 antes de Cristo la primera teoría atómica de Demóclito, que afirma que la materia es discontinua y estaba formada por partículas indivisibles llamadas átomos. En el año 450 antes de Cristo se inventó la polea en Grecia y en el año 100 antes de Cristo el descubrimiento de la cuchara de mineral magnética eran mágicas, se detenían siempre con el mango apuntando hacia la misma dirección.



2. Con otro compañero del curso haz la siguiente actividad:

Recorten las siguientes fichas que contienen fechas y nombres de inventos, establezcan correspondencia entre cada fecha y el invento asociado a ella.

3500 a.C	3000 a.C	1500 a.C	1791 d.C	700 d.C	4500 a.C
450 a.C	100 a.C	400 a.C	1000 d.C	1088 d.C	1285 d.C
850 d.C	1642 d.C	1300 a.C	1500 d.C		

Invento de la rueda	*Construcción del ábaco*	*Reloj de sol y agua*	*Invención de la imprenta*	*Impresión de los primeros libros en China y Corea*	*Teoría atómica de Demóclito*
Invento de la polea	*Invención del sistema métrico decimal*	*Invento de la brújula*	*Creación del primer reloj mecánico*	*Primera vez que se usaron las gafas*	*Construcción de la primera calculadora*
Descubrimiento de la cuchara de mineral magnética	*Empezó el hombre a pesar objetos*	*Invento del primer alfabeto*	*Primera vez que se usó la pólvora*		

3. En la mitad de una tira cuadriculada que se ha entregado a cada pareja, tracen una línea horizontal y divídanla en una escala de 100 en 100. Ubiquen en uno de los puntos de la escala al CERO (0), que corresponde al nacimiento de Cristo. Ubiquen las fechas que recortaron en la escala que han diseñado.

A las fechas que quedaron a la izquierda del cero anteceda el signo menos y a las fechas que quedaron a la derecha del cero anteceda el signo más.

a. ¿Por qué se puede asignar el signo más y el signo menos a una cantidad ubicada en la escala de hechos históricos?

b. Expliquen la razón por la cual se puede tomar la fecha del nacimiento de Cristo, como punto de referencia (cero) para diferenciar las fechas de los inventos.

c. Entre los números ubicados a la derecha del cero ¿Cuál es mayor? Justifica tu respuesta.

d. Y entre uno ubicado a la derecha y a la izquierda del cero ¿Cuál es mayor? Justifica tu respuesta.

e. Entre los números ubicados a la izquierda del cero ¿Cuál es menor? Justifica tu respuesta.

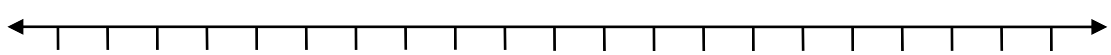
4. Tomen los datos que aparecen en la tira de papel que vienen trabajando y ubíquenlos en una recta en la hoja de block que se les entregará.

a. Ubiquen dos inventos que tienen la misma fecha antes y después de Cristo. ¿Qué características presentan? y ¿A qué distancia del cero están estas cantidades?

b. ¿De qué depende que se escriba una cantidad a la derecha o izquierda del cero?

5. Realiza en forma individual la siguiente actividad:

Tomando como referencia el año de tu nacimiento, ubica algunos acontecimientos importantes que hayan pasado antes y después de tu nacimiento, utilice el signo menos $(-)$ y el signo más $(+)$ para representar estas cantidades, como se hizo en el punto anterior. (Los valores que tienen el signo menos los llamaremos negativos y los valores que tiene el signo más los llamaremos positivos).



a. Establezca una relación entre el año de tu nacimiento y el cero.

b. Compara dos números que corresponden a fechas de acontecimientos de tu vida indicando cual es el mayor. Justifica tu respuesta.

c. Para discutir en clase: ¿Necesariamente la ubicación del cero, corresponde a la mitad en la recta numérica? Justifiquen su respuesta.

SITUACIÓN 2: CARACTERICEMOS EL NÚMERO ENTERO NEGATIVO

LOGRO: Identificar y reconocer propiedades que caractericen el número entero negativo resolviendo ejercicios y problemas en contexto.

ACTIVIDAD 1: EL NÚMERO NEGATIVO COMO OPUESTO AL NÚMERO POSITIVO

1. Realicen las actividades de la 2 hasta la 6 con un compañero del curso.

Lean la siguiente narración mencionada en la situación 1.

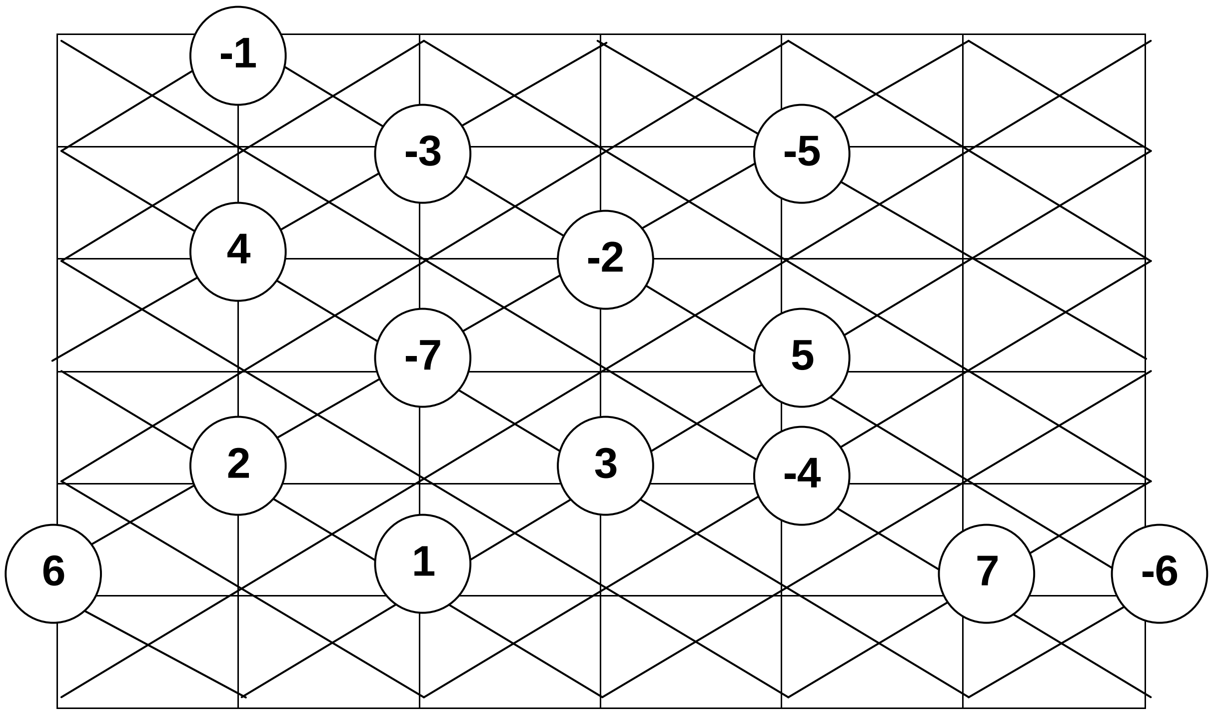
"Los primeros instrumentos para medir el tiempo fueron los relojes de sol y de agua, inventados hacia el año 1500 antes de Cristo; ya en el año 1500 después de Cristo se inventó la imprenta, que fue la máquina responsable de una de las revoluciones sociales y tecnológicas más importantes para la época. El primer libro elaborado mediante este sistema fue La Biblia de 42 líneas".

a. Escriban las dos fechas presentes en la narración, utilizando signos más $(+)$ y menos $(-)$, de acuerdo a la referencia del nacimiento de Cristo.

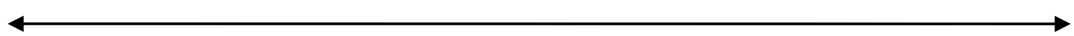
b. Escriban varias parejas de números que cumplan esta característica.

c. ¿Qué característica tienen estos números?

2. Siguiendo las líneas propuestas del dibujo unan números que cumplan con la característica anterior, (estos números se denominan números opuestos). Deben tener cuidado porque ningún camino puede sobreponerse o cruzarse con otro. Utilicen diferentes colores:



3. Ubiquen en la siguiente recta los números que aparecen en el esquema anterior, según una escala determinada.



a. ¿Que pueden decir respecto a la ubicación de los números opuestos con relación al cero en la recta numérica?

b. Expliquen la siguiente afirmación escribiendo sus comentarios al respecto:

"La ubicación de números opuestos en la recta es simétrica respecto a cero"

c. Escribe el opuesto de -5 _______

Escribe el opuesto de -77 _______

Escribe el opuesto de -38 _______

Escribe el opuesto de -56 _______

Justifica tu respuesta.

d. Según las respuestas que escribieron anteriormente, explica la característica de los números negativos como opuestos a los positivos.

4. Unan los números de la columna izquierda con sus opuestos en la columna derecha.

-1
4
0
-2
5
3
-4
1
-5
-3
2

-5
-4
-3
-2
-1
0
1
2
3
4
5

Escriban en que se parecen estos números y en qué se diferencian.

5. En una hoja cuadriculada tracen una recta horizontal, marquen sobre ella el mayor número de puntos posibles, de tal manera que estén separados por una distancia de 1 centímetro (*El centímetro es una unidad de medida*).[6]

Asignen a uno de los puntos el cero (0), hacia la derecha del cero (0), numeren los demás puntos en este orden $(1, 2, 3,4 \dots)$.

Ahora numeren los puntos que quedan hacia la izquierda del cero (0) así: $(-1, -2, -3, -4 \dots)$.

- Encima del *punto* numerado con 2 (que es la coordenada de este punto), escriban A

[6]Actividades 5 y 6, tomado de: Arce J, Castrillón G, Soto C (1990). Geometría 6. 2ª Edición. (modificado). Editorial Gnomon Ltda. Cali, Colombia. pp. 6 - 9

- Encima del *punto* numerado con 6 (que es la coordenada de este punto), escriban B
- Encima del *punto* numerado con -2 (que es la coordenada de este punto), escriban C
- Encima del *punto* numerado con -6 (que es la coordenada de este punto), escriban D
- Encima del *punto* numerado con 0 (que es la coordenada de este punto), escriban P

Si $A\ y\ B$ son dos puntos de una línea recta, podrás escribir $Dist\ (A, B)$ para significar la distancia entre los puntos $A\ y\ B$.

Halle el valor de las siguientes distancias:

a. $d(2, 0)$

b. $d(-2, 0)$

c. $d(6, 0)$

d. $d(-6, 0)$

e. ¿Cómo son los valores de las distancias, cuyas coordenadas son números opuestos? Justifica tu respuesta.

f. ¿Los valores de las distancias pueden ser negativos? Justifica tu respuesta.

6. Comparen las siguientes distancias mediante ser "igual a", "menor o mayor a".

a. $Dist\ (P, A)$ con $Dist\ (P, C)$

¿Son iguales? o ¿Son diferentes? Justifica tu respuesta.

b. $Dist\ (P, B)$ con $Dist\ (P, D)$

¿Son iguales? o ¿Son diferentes? Justifica tu respuesta.

c. ¿Cómo son las distancias de los puntos cuyas coordenadas son números opuestos?

Dos números enteros que se encuentran a la misma distancia de un punto de referencia tomado como el cero en la recta numérica, pero en sentido contrario uno del otro, se denominan **números enteros opuestos**, entonces todo número entero negativo tiene su opuesto en un número entero positivo.

ACTIVIDAD 2: EL VALOR ABSOLUTO: CANTIDAD Y DISTANCIA

Según las respuestas de los punto 4 y 5 de la actividad anterior, lo común entre números opuestos diferentes de cero, corresponde al valor del número, es decir, a su valor absoluto. Entonces “Los números opuestos tienen igual valor absoluto y diferente signo”. Además, los números que son coordenadas de puntos simétricos respecto al cero, tienen igual valor absoluto.

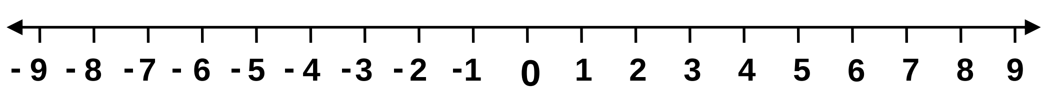
1. Realiza las siguientes actividades de manera individual.

Escribe el valor absoluto de los siguientes números (esta característica se escribe entre dos barras).

NÚMEROS ENTEROS	EN VALOR ABSOLUTO	RESULTADO
1		
-8		
-15		
30		
45		
-200	**|-200|**	
0		

2. Realiza las siguientes actividades[7]:

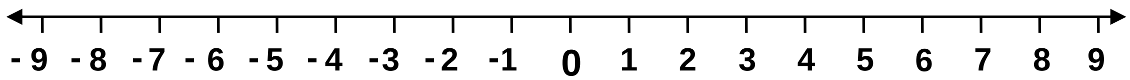
a. Señala en la recta los lugares que ocupan los enteros, que tienen valor absoluto igual a 3. Justifica tu respuesta.



[7] Actividades a y c, tomadas de: Proyecto Descartes matemáticas (modificado). Recuperado el 16 de mayo de 2011, de Google: http://recursostic.educacion.es/descartes/web/

b. El valor absoluto de un número es 12. ¿Cuál es el número, si se sabe que está a la izquierda del cero? ¿Cuál es el número, si se sabe que está a la derecha del cero?

c. Señala en la recta los lugares que ocupan todos los enteros cuyo valor absoluto esté entre 1 y 4. Justifiquen su respuesta.



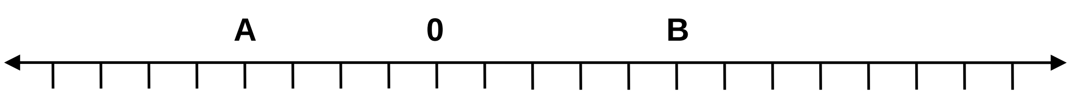
d. ¿Cuál es el valor absoluto de cero? Justifica tu respuesta.

e. ¿El valor absoluto de un número puede ser negativo? Justifica tu respuesta.

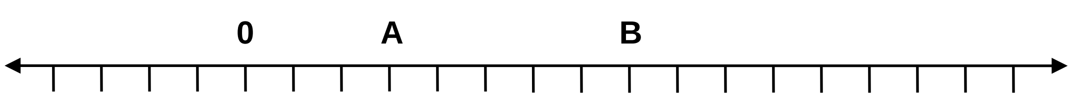
El valor absoluto de un número que representa la coordenada de un punto A en la recta, está dado por el valor de la diferencia del punto A, al punto B cuya coordenada es 0 (cero). Es decir, "el valor absoluto de un número, es el valor de la distancia que le separa del cero en la recta numérica".

3. Señale las coordenadas de los puntos A y B, y halle sus valores absolutos.

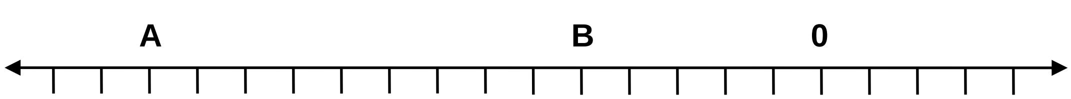
a.



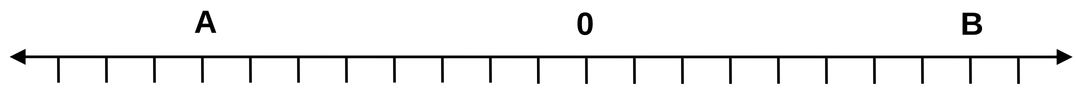
b.



c.



d.



ACTIVIDAD 3: EL NÚMERO NEGATIVO COMO MENOR QUE CERO Y MENOR QUE CUALQUIER POSITIVO

EL LABERINTO

Con otro compañero del curso haz la siguiente actividad.

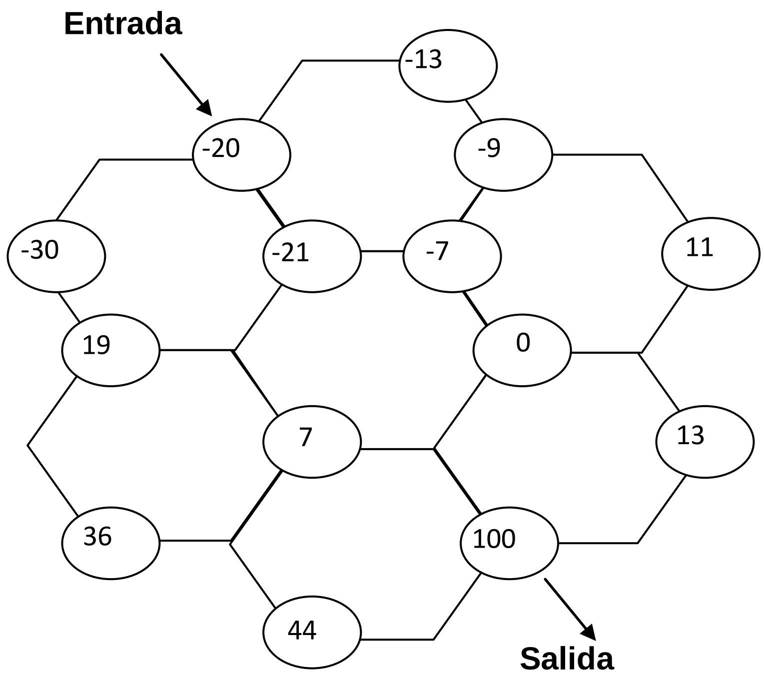
1. Para realizar la siguiente actividad tengan en cuenta que "Al comparar dos números enteros se debe tener cuidado que cuando los dos son negativos, es mayor el que tiene menor valor absoluto".

a. Realicen una discusión en clase respecto a la afirmación anterior.

b. Indiquen las consecuencias desde lo numérico, si se toma al contrario la afirmación anterior, es decir, entre dos negativos es mayor el que se encuentra más alejado del cero en la recta numérica.

2. Realiza las actividades de la 2 hasta la 6, de forma individual:

Para salir del laberinto de números enteros, se debe avanzar sobre los lados de los hexágonos pasando siempre por un número entero mayor. Indica la ruta que se debes seguir utilizando un color.



a. Ubica en una recta numérica los números enteros por los que avanzaste en el laberinto para encontrar la salida.

b. Establece una relación entre lo realizado en el laberinto y la recta.

3. En esta actividad se utilizarán los símbolos $< \ y \ >$, para representar la relación "es menor que" y "es mayor que", respectivamente.

- Con los números del laberinto, utiliza los símbolos $< \ y \ >$, proponiendo ejemplos para comparar:

a. 2 números negativos.

b. 2 números positivos.

c. 1 número negativo y 1 positivo.

d. ¿Qué estrategia(s) utilizaste para saber que se cumplía la relación entre los números enteros?

4. Ordena los números enteros que ubicaste en la recta de mayor a menor.

☐	>	☐	>	☐	>	☐	>	☐	>	☐

5. Indique en cada pareja de números propuesta, cuál número es mayor.

a. $(19, 36)$

b. $(-13, -9)$

c. $(0, -21)$

d. $(-30, 30)$

e. ¿Qué estrategia utilizaste para saber cuál número es mayor?

6. Teniendo en cuenta las actividades anteriores responde las siguientes preguntas y justifica tu respuesta:

a. ¿Todo número positivo es mayor que cero?

b. ¿Todo número negativo es menor que cero? Da un ejemplo.

c. ¿Todo número negativo es menor que todo número positivo? Da un ejemplo.

d. De dos números negativos, ¿Es mayor el que está más cerca del cero? ¿O el que está más lejos del cero? Da un ejemplo.

e. De dos números positivos, ¿Es mayor el que está más lejos del cero?

SITUACIÓN 3: ESTRUCTURA ADITIVA DE ENTEROS

LOGRO: Proponer y resolver ejercicios que involucren la aplicación de la adición y sustracción de números enteros.

ACTIVIDAD 1: LA PISTA DE LAS MEDIDAS[8]

Realiza la actividad con otro compañero.

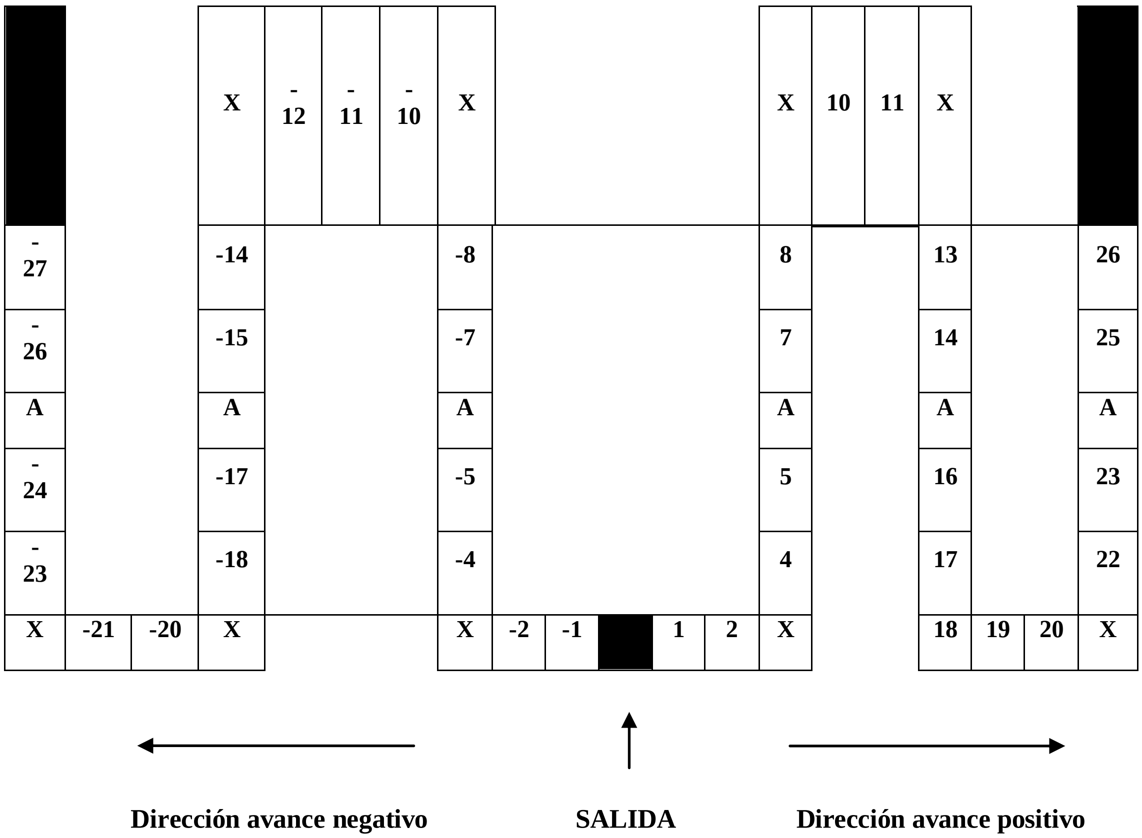
1. Materiales: Tablero pista de las medidas, fichas de diferente color, 2 dados (1 dado verde con valores positivos, 1 dado rosado con valores negativos).

- Utilizando una ficha de diferente color para cada jugador. Se ubican en la salida.
- El grupo decide el orden de los turnos para jugar.
- El juego se empieza, lanzando los dos dados (verde y rosado), y para llegar a la meta se procede de la siguiente manera:

  El dado verde marcado con los números $0, 1, 2, 3, 4, 5$ (positivos), hará correr la ficha en la dirección de avance positivo y el dado marcado con los números $-0, -1, -2, -3, -4, -5$ (negativos), hará correr la ficha en la dirección de avance negativo en sentido contrario a la flecha del tablero.(Cuando sale el 0, no hay avances).
- Cuando un jugador cae en un espacio marcado con **X,** debe retroceder 4 espacios.
- Cuando un jugador cae en un espacio marcado con **A,** debe adelantar 4 espacios.
- El primer jugador que llegue a cualquiera de las dos metas será el ganador del juego.

[8]Tomado de: Arce J, Castrillón G, Soto C (1990). Geometría 6. 2ª Edición. (modificado). Editorial Gnomon Ltda. Cali, Colombia. pp. 61 - 62

META 2 **LA PISTA DE LAS MEDIDAS** **META 1**



2. A partir de la actividad realizada respondan las siguientes preguntas:

   a. Si un jugador en el primer lanzamiento saca $5\ y\ -5$, ¿Dónde queda ubicada la ficha?

   b. Si un jugador tiene dos dados verdes (positivos) y en el primer lanzamiento saca $4\ y\ 1$, ¿Dónde queda ubicada la ficha? ¿Se obtiene un avance o retroceso? ¿Cómo se puede calcular operativamente el avance o retroceso en este caso?

   c. Si un jugador tiene dos dados rosados (negativos) y en el primer lanzamiento saca -4 $y\ -2$ ¿Dónde queda ubicada la ficha? ¿Se obtiene un avance o retroceso? ¿Cómo se puede calcular operativamente el avance o retroceso en este caso?

   d. Si un jugador tiene dos dados uno verde (positivo) y uno rosado (negativo) y en el primer lanzamiento saca $-9\ y\ 4$ ¿Dónde queda ubicada la ficha? ¿Se obtiene un avance o retroceso? ¿Cómo se puede calcular operativamente el avance o retroceso en este caso?

3. ACERQUÉMONOS A LA SUMA A TRAVÉS DE LA RECTA NUMÉRICA

Realiza las actividades del punto 3 y 4 de forma individual.

Si el número $a$es positivo y el número b es negativo, para sumarlos gráficamente se le lleva una flecha hacia la derecha con origen en cero (0) y extremo en a. A continuación, se traza otra flecha con origen en a y que recorra hacia la izquierda $b$unidades. El extremo de esta flecha indica el resultado de la suma.

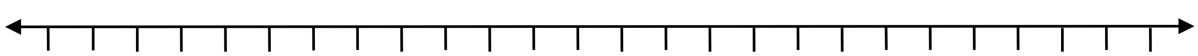
En la siguiente recta numérica, utiliza lo dicho anteriormente para resolver los ejercicios:

a. $6\ y\ (-8)$

b. $4\ y\ (-7)$

Si el número a es negativo y el número b es positivo, para sumarlos gráficamente se le lleva una flecha hacia la izquierda con origen en cero (0) y extremo en a. A continuación, se traza otra flecha con origen en a y que recorra hacia la derecha b unidades. El extremo de esta flecha indica el resultado de la suma.

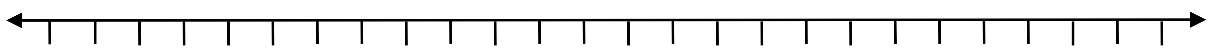
c. $(-9)\ y\ 2$



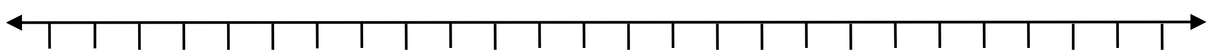
d. $(-3)\ y\ 15$

Si el número a es negativo y el número b es negativo, para sumarlos gráficamente se le lleva una flecha hacia la izquierda con origen en cero (0) y extremo en a. A continuación, se traza otra flecha con origen en a y que recorra hacia la izquierda b unidades. El extremo de esta flecha indica el resultado de la suma.

e. $(-3)\ y\ (-5)$



f. $(-1)\ y\ (-8)$



g. ¿Cómo podrías representar operativamente los ejercicios que realizaste anteriormente?

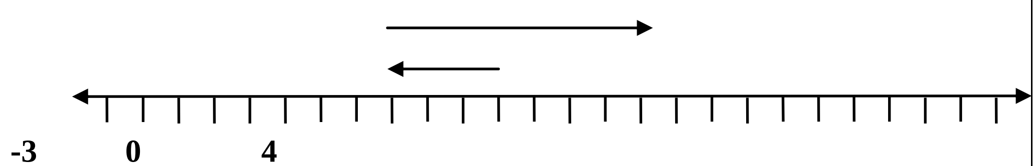
Para sumar dos números enteros positivos, se suman sus valores absolutos y el resultado tiene el mismo signo. Ejemplo: $2 + 5$, entonces:
$|2| + |5| = 2 + 5 = 7$, y como son positivos tengo que $2 + 5 = +7$

Para sumar dos números enteros negativos, se suman sus valores absolutos y el resultado tiene el mismo signo. Ejemplo: $-8 + (-2)$, entonces:
$|-8| + |-2| = 8 + 2 = 10$, y como son negativos tengo que $-8 + (-2) = -10$

Para sumar dos números enteros positivo y negativo (o negativo y positivo), se restan sus valores absolutos (al número mayor se le resta el número menor), y el resultado tiene el signo del número con mayor valor absoluto. Ejemplo: $3 + (-7)$, entonces:
$|-7| - |3| = 7 - 3 = 4$, y como el signo del número con mayor valor absoluto es negativo, tengo que $3 + (-7) = -4$

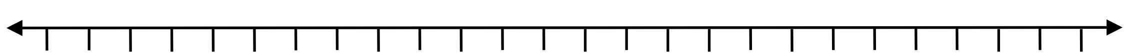
4. Utiliza la representación en la recta para graficar los siguientes casos, regístralos numéricamente con su resultado:

Si se tiene en cuenta el proceso anterior para representar la suma de los números de las coordenadas $-3\ y\ 7$, se obtiene:

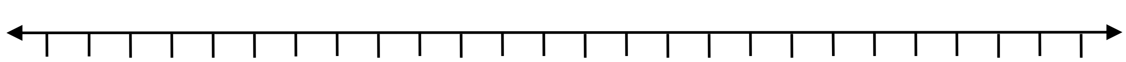


Lo que se puede representar por: $-3 + 7 = 4$

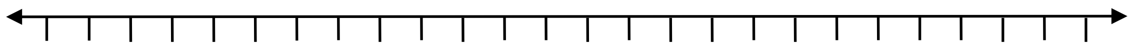
a. $(-10 + 5) =$



b. $(5 + 9) =$

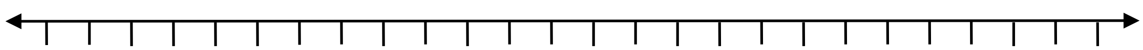


c. $(-3) + (-7) =$



d. $[(5 + 9)] + (-12) =$

e. $[(-3) + (-7)] + 11 =$

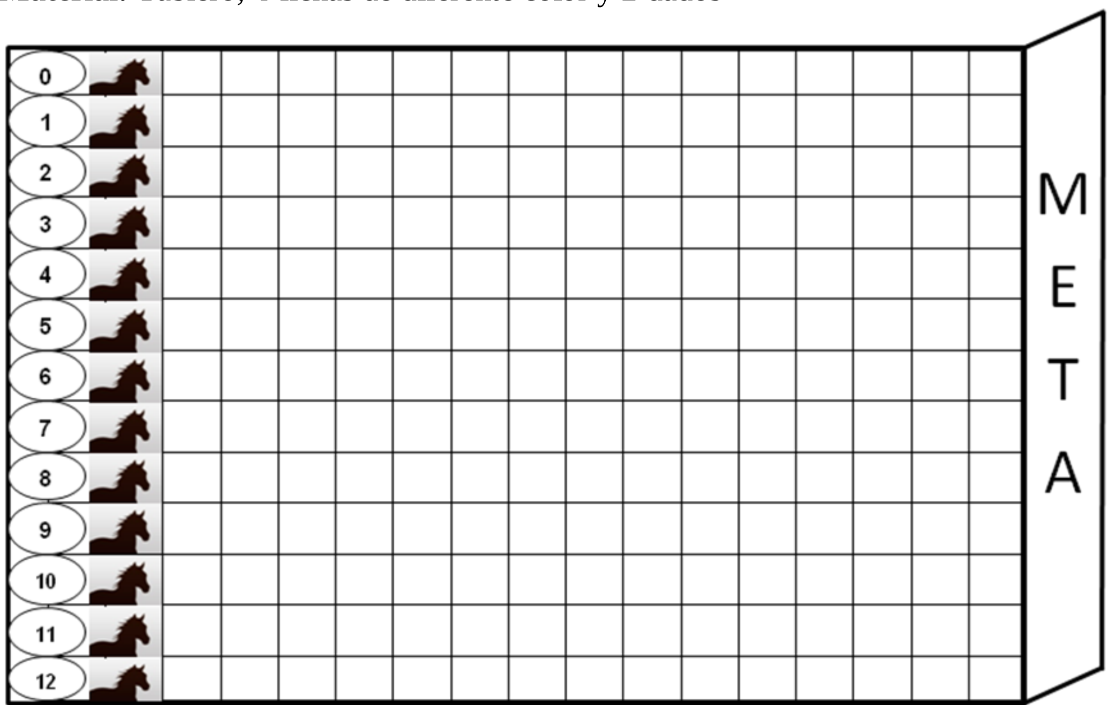


f. Escribe las dificultades que tuviste para realizar el ejercicio.

ACTIVIDAD 2: LA CARRERA DEL VALOR ABSOLUTO

1. En grupos de cuatro compañeros, realicen la siguiente actividad.

Material: Tablero, 4 fichas de diferente color y 2 dados



PASO 1. Cada jugador escoge una ficha de diferente color. (Esta ficha representará su caballo en el juego.)

PASO 2. Cada jugador escoge el número de su caballo del $(0\ al\ 12)$, y ubica su ficha en la tabla sobre el círculo correspondiente al número que escogió. (no pueden haber dos jugadores con el mismo número de caballo).

PASO 3. El grupo escoge el método para elegir quien empieza el juego.

PASO 4. El jugador elegido para empezar el juego lanza un dado, y el siguiente jugador lanza el otro dado, el último jugador en tirar debe hacer una resta (valor del primer dado menos valor del segundo dado), y luego halla el valor absoluto de la cantidad resultante, siendo esta el número de veces que debe avanzar con su ficha. Escriban cada uno de los lanzamientos que permiten realizar el avance de cada jugador, la operación y su resultado.

PASO 5. El jugador que avanzó con su ficha, ahora lanzará el primer dado, y el siguiente jugador repetirá la instrucción dada en el PASO 4. El juego continua repitiendo el PASO 4 y 5 hasta que haya un ganador.

PASO 6. Gana la partida el jugador cuyo caballo llegue primero a la meta.

2. JUGUEMOS DOMINÓ

a. Formen grupos de 3 estudiantes y mediante el empleo del dominó jueguen uniendo la operación indicada con su resultado y luego escriban las operaciones que realizaron.

b. Indiquen si en el dominó hay una operación y su respuesta sea la solución a la siguiente situación:

"Un ascensor está en el piso 0. La gente que está en los pisos de arriba toca para que suba el ascensor. El ascensor sube y está en el piso 5, la gente vuelve a tocar pero ahora en los pisos del sótano. El ascensor baja 9 pisos, ¿En qué piso se encuentra ahora el ascensor?

Escríbanla y justifiquen su respuesta.

ACTIVIDAD 3

Realiza esta actividad de manera individual

1. Una persona buscando una dirección efectúa los siguientes desplazamientos: 8 cuadras hacía el sur, se devuelve 5 cuadras, nuevamente 7 cuadras hacia el sur, se devuelve 2 cuadras y encuentra la dirección.

a. Realiza un gráfico donde se pueda visualizar los desplazamientos de la persona.

b. ¿Cuál es el punto de referencia a partir del cual se hacen los desplazamientos? ¿Por qué?

c. ¿Qué desplazamientos debe hacer la persona para llegar a la posición inicial, si se encuentra en el último desplazamiento que realizó para encontrar la dirección?

d. ¿Para quedar a 2 cuadras de donde partió?

e. ¿Para retroceder 5 cuadras de la posición inicial?

2. Escribe las estrategias que utilizaste para resolver los problemas.

3.3 GENERALIDADES DE LA IMPLEMENTACIÓN

Para presentar la secuencia didáctica se realizó una metodología tipo taller, donde la interpretación y construcción de saberes desde el punto de vista de los estudiantes son aspectos que se destacan en este tipo de trabajo en el aula de clases. La comprensión, análisis, discusión, y registros de lo que sucedió en el aula se hizo mediante la de toma de notas, grabaciones, muestras de trabajo elaboradas por los estudiantescomo herramientas fundamentales en este proceso.

Esta secuencia didáctica se implementó en el Colegio la Presentación El Paraíso, a estudiantes del grado $7 - A$, cada situación de la secuencia presenta diversas actividades, que fueron aplicadas en varias sesiones, la primera situación se presentó en 3 sesiones, cada sesión de 60 minutos, la segunda situación en 3 sesiones, cada sesión de 60 minutos y la tercera situación en 4 sesiones, cada sesión de 60 minutos (10 sesiones en total).

La implementación de la situación 1: *Acerquémonos al concepto de número entero a partir del número relativo*, corresponde al primer análisis en el cual los estudiantes desarrollan un proceso de aproximación intuitiva al concepto de los números enteros, enfatizando en el número negativo, en contextos.

La implementación de la situación 2: *Caractericemos el número entero negativo*, corresponde a la segunda parte del análisis, en la cual los estudiantes deben identificar y reconocer propiedades que caractericen el número entero negativo resolviendo las actividades planteadas en la situación.

La implementación de la situación 3: *Estructura aditiva de números enteros*, corresponde a la tercera y última parte del análisis, en la cual los estudiantes deben proponer y resolver ejercicios que involucren la aplicación de la adición, por medio de la recta, hasta llegar a su formalización.

Se dio inicio a las actividades luego de repartir a cada estudiante o grupo de estudiantes una copia y el material (en la situación 1 y 3). Las estudiantes de trabajo de grado, realizaron la lectura del contenido haciendo una descripción del enunciado de cada actividad, y presentaron cada una de las preguntas asociadas a esta.

Los estudiantes empezaron a desarrollar las actividades, realizando preguntas sobre contenidos y procesos de la situación, posteriormente en la plenaria realizada por las estudiantes de trabajo de grado, la mayor parte de preguntas estaban dirigidas a la interpretación de algunos enunciados en donde se pedía los procedimientos efectuados por los estudiantes.

3.4 RESULTADOS Y ANÁLISIS DE RESULTADOS

Es importante anotar que la secuencia didáctica está conformada por 3 situaciones. La situación 1, con 1 actividad y 5 preguntas, la situación 2, con 3 actividades y cada actividad con $6, 3\ y\ 6$ preguntas respectivamente, y la situación 3, con 3 actividades y cada actividad con $4, 2\ y\ 3$ preguntas respectivamente; cada actividad esta direccionada a través de preguntas y tareas específicas.

A continuación se presentan los resultados y análisis de la implementación de esta secuencia didáctica realizada en 34 estudiantes del 7º grado del Colegio La Presentación El Paraíso. Estos resultados se presentan a partir de la tipificación de los datos obtenidos en cada una de las situaciones de la secuencia, abordando cada pregunta, de manera que se agrupan las respuestas similares y las respuestas que no están dentro de una tipología descrita se ubica en la tipología de respuestas sin categoría (Ver ejemplos, anexo 4), todas estas tipologías se presentan en tablas que describen el tipo respuestas de los estudiantes, la frecuencia relativa y la frecuencia absoluta; luego se realiza un análisis de lo observado según el porcentaje de las respuestas, para ello se tiene en cuenta lo propuesto en las perspectivas de desempeño. El análisis se exhibe, en algunos casos, en preguntas individuales y en otros en grupos de preguntas y sus resultados para finalmente realizar algunas observaciones, frente a los objetivos planteados en cada situación.

SITUACIÓN 1: ACERQUÉMONOS AL CONCEPTO DE NÚMERO ENTERO A PARTIR DEL NÚMERO RELATIVO

Implementada en el grado: 7-A

Fecha: 01 Noviembre de 2011

Número de estudiantes: 34

Organización del trabajo en el aula		
Actividad 1	**Ejercicios del 1 al 4**	**Parejas**
Actividad 1	**Ejercicio 5**	**Individual**

ACTIVIDAD 1: USANDO ENTEROS EN LA LÍNEA DEL TIEMPO CON INVENTOS IMPORTANTES EN LA HISTORIA DE LA HUMANIDAD

1. Realiza en parejas la siguiente lectura:

"GRANDES INVENTOS DE LA HUMANIDAD"

Desde siempre el ser humano ha buscado por todos los medios a su alcance, la forma de mejorar su calidad de vida, con su gran inteligencia ha desarrollado herramientas que le han hecho la vida más fácil y sencilla.

Los siguientes, son algunos de los inventos que han cambiado para siempre la historia de la humanidad.

Los primeros hombres median el tiempo en días. Sabían aproximadamente la duración del año observando las estaciones y podían medir el tiempo en meses, mirando la luna. Los primeros instrumentos para medir el tiempo fueron los relojes de sol y de agua, inventados hacia el año 1500 antes de Cristo; se cree que el primer reloj mecánico se hizo en China en el año 1088 después de Cristo, medía unos $10\ m$ de altura y estaba accionado por agua.

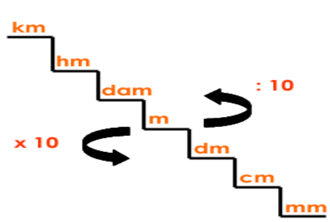
Así como el hombre empezó a medir el tiempo observando estaciones y mirando la luna, los viajeros tuvieron la necesidad de indicar su rumbo para orientarse, un instrumento que ayudó a esto fue la brújula, que se inventó en China hacia el año 1000 después de Cristo y llegó a Europa 100 años después. La primera brújula fue una aguja de hierro sobre un trozo de corcho o caña que flotaba en un vaso de agua.

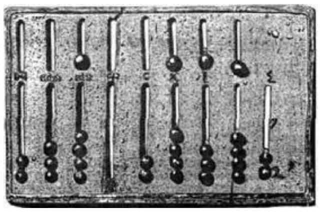
Otro aspecto por el cual se preocupó el hombre, fue por medir las masas, en el año4500 antes de Cristo, el hombre logró pesar objetos con el primer instrumento creado como fue la balanza, en Siria se usó para pesar oro en polvo con pesas de piedra pulidas con gran precisión.

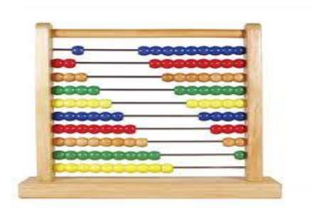
  

La inexactitud en los diversos sistemas de medición rudimentarios, fue una de las causas más frecuentes de polémicas o disputas entre comerciantes, funcionarios de instituciones y ciudadanos, en Europa. En el año 1791 después de Cristo, tras el derrocamiento de la monarquía, la Asamblea Nacional Francesa abolió el sistema tradicional de pesas y medidas por uno denominado “métrico” (medida) en múltiplos de diez.

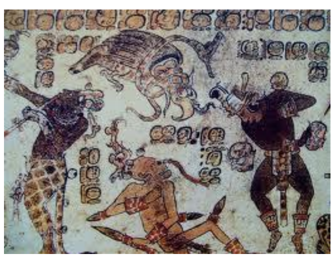
 

El primer instrumento para ayudar a contar fue el ábaco, consistía en bolas perforadas que se desplazaban sobre alambres sujetos a un marco, con las que se conseguía operar para representar números; se construyó en Babilonia hacia el año 3000 antes de Cristo, otro instrumento que se inventó para hacer cálculos fue la primera máquina calculadora creada en Francia en 1642 después de Cristo.

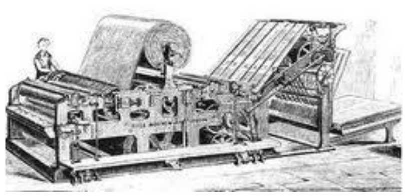
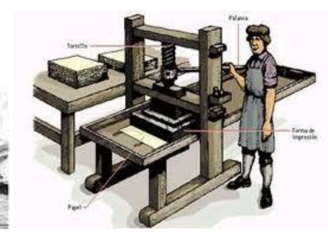




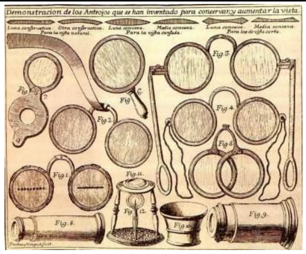
Por otra parte, la primera evidencia de que el hombre ha tenido la necesidad de comunicarse por escrito son los petroglifos dejados en cavernas prehistóricas, pero fue hasta el año 1300 años antes de Cristo, donde apareció el primer alfabeto en Siria. Los primeros libros que se imprimieron fueron pergaminos impresos con moldes de madera, creados en China y Corea, hacia el año 700 después de Cristo.



En el año 1500 después de Cristo se inventó la imprenta, fue la máquina responsable de una de las revoluciones sociales y tecnológicas más importantes para la época, el primer libro elaborado mediante este sistema fue La Biblia de 42 líneas.

Por otro lado se cree que las gafas se usaron por primera vez en Italia hacia el año 1285 después de Cristo y su uso se incrementó, debido a que estas mejoraban la visión de las personas para leer o seguir trabajando en labores delicadas.

Otro invento importante del hombre fue el descubrimiento de la pólvora, los chinos descubrieron como mezclar salitre, azufre y carbón de encina para hacer pólvora. La usaron por primera vez en el año 850 después de Cristo, la pólvora se empleaba sólo para cohetes y juegos de artificio sin ninguna intención de guerra.

Otros inventos significativos para tener presente son: En el año 3500 antes de Cristo se invento la rueda en la ciudad de Ur Mesopotamia. En el año 400 antes de Cristo la primera teoría atómica de Demóclito, que afirma que la materia es discontinua y estaba formada por partículas indivisibles llamadas átomos. En el año 450 antes de Cristo se inventó la polea en Grecia y en el año 100 antes de Cristo el descubrimiento de la cuchara de mineral magnética eran mágicas, se detenían siempre con el mango apuntando hacia la misma dirección.

Se inicia la primera actividad de la situación 1, entregando la lectura por parejas, dando un tiempo de 15 minutos para su lectura, las actividades en esta primera situación están planteadas por medio de situaciones reales (inventos relevantes en la historia de la humanidad),que junto a la utilización de gráficos logran que las actividades sean agradables para los estudiantes. Estas actividades buscan desarrollar en los estudiantes capacidades para observar características del número entero como número relativo, por medio del trabajo en equipo e individual, para lograr un acercamiento al aprendizaje de este concepto.

Por medio de la lectura se pretende que los estudiantes relacionen las fechas de los inventos antes de Cristo y después de Cristo con los números enteros como relativos, de manera que puedan asignar a los números los signos que le corresponden, para establecer un orden según un punto de referencia (cero como el nacimiento de Cristo), de manera que puedan representarlos en la recta numérica y determinar un orden ascendente a derecha y descendente a izquierda, de manera que los estudiantes puedan alcanzar el logro propuesto en esta situación.

2. Realicen las actividades de la 2 hasta la 4 con un compañero del curso.

Recorten las siguientes fichas que contienen fechas y nombres de inventos, establezcan correspondencia entre cada fecha y el invento asociado a ella.

3500 a. C	3000 a. C	1500 a. C	1791 d. C	700 d. C	4500 a. C
450 a. C	100 a. C	400 a. C	1000 d. C	1088 d. C	1285 d. C
850 d. C	1642 d. C	1300 a. C	1500 d. C		

Invento de la rueda	*Construcción del ábaco*	*Reloj de sol y agua*	*Invención de la imprenta*	*Impresión de los primeros libros en China y Corea*	*Teoría atómica de Demóclito*
Invento de la polea	*Invención del sistema métrico decimal*	*Invento de la brújula*	*Creación del primer reloj mecánico*	*Primera vez que se usaron las gafas*	*Construcción de la primera calculadora*
Descubrimiento de la cuchara de mineral magnética	*Empezó el hombre a pesar objetos*	*Invento del primer alfabeto*	*Primera vez que se usó la pólvora*		

En la pregunta 2 de esta actividad se pide que los estudiantes recorten los recuadros que contienen nombres y fechas de los inventos, para que después realicen una correspondencia entre cada uno de estos, es decir, que a cada fecha le ubiquen su invento como lo dice en el relato, para que luego las organicen en un orden cronológico en la recta numérica, respecto a un punto de referencia que en este caso es el nacimiento de Cristo.

En la realización de esta pregunta no se encontró ninguna dificultad para asociar los inventos a sus fechas correspondientes, pero en el tiempo para recortar las fichas se extendieron mucho e hicieron una relectura para poder asociar cada invento con la fecha. Debido al receso que debían tomar, algunas perdieron las fichas y las realizaron con el papel sobrante.

Ante la lectura surgen preguntas como:

E: ¿Cómo ubicar los valores antes y después en la recta?

E: ¿Primero ubico el cero en la mitad y luego acomodo las fecha según sea a. C y d. C?

E: ¿Las fechas en la recta deben ir en el orden de la lectura?

E: ¿Debemos poner el menos a las fechas, los de antes son los positivos y los después los negativos?

E: ¿Cómo acomodar los negativos y los positivos, de menor a mayor?

Por lo cual las estudiantes de trabajo de grado dan indicaciones generales debido a que el objetivo de la pregunta es que a partir de los hechos cronológicos los estudiantes lleguen a un conocimiento lo más completo y razonado posible, por medio de interpretaciones y observaciones acerca de estos hechos, de manera que se pueda analizar las estrategias que utilizan para organizar las fechas y ubicarlas en la recta numérica.

3.	En la mitad de una tira cuadriculada que se ha entregado a cada pareja, tracen una línea horizontal y divídanla en una escala de 100 en 100. Ubiquen en uno de los puntos de la escala al CERO (0), que corresponde al nacimiento de Cristo. Ubiquen las fechas que recortaron en la escala que han diseñado.

TIPO DE RESPUESTA	F. R	F. A
TIPO 1: Estudiantes que utilizan una escala numérica con los valores de 100 en 100, pero con dificultades al ubicar los valores picos (1285 lo ubican en el 1200), y organizan las fechas en forma ascendente a la derecha y descendente a izquierda respecto al cero como punto de referencia.	4	12%
TIPO 2: Estudiantes que no utilizan una escala numérica, organizan las fechas en forma ascendente a la derecha y descendente a izquierda respecto al cero como punto de referencia.	22	65%
TIPO 3: Estudiantes que no ubican los segmentos sobre la recta que la dividen en una escala determinada, que permita reconocerla como una recta numérica en uno de sus lados (derecho), y organizan las fechas en forma ascendente a la derecha y descendente a izquierda respecto al cero como punto de referencia.	2	6%
TIPO 4: Estudiantes que no utilizan una escala numérica, ubican las fechas arbitrariamente y combinan las fechas a. C y d. C en ambos lados de la recta respecto al cero como punto de referencia.	2	6%
TIPO 5: Estudiantes que no utilizan una escala numérica, ubican las fechas arbitrariamente en la recta y ponen positivos a la izquierda y negativos a la derecha respecto al cero como punto de referencia.	2	6%
TIPO 6: Estudiantes que no utilizan una escala numérica, y no determinan un patrón de medida. Ubican las fechas arbitrariamente en la recta respecto al cero como punto de referencia.	2	6%
TOTAL	34	100%

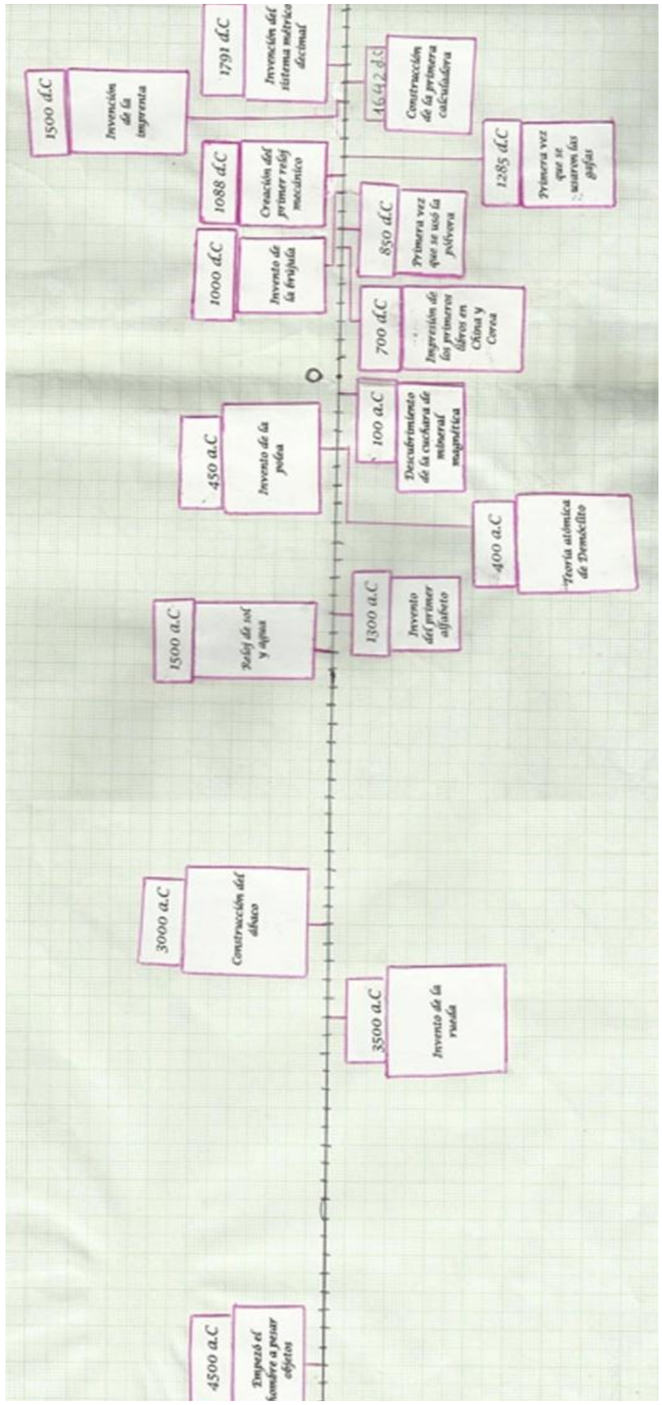
Tabla 1. Tipologías de las respuestas a la pregunta 3.

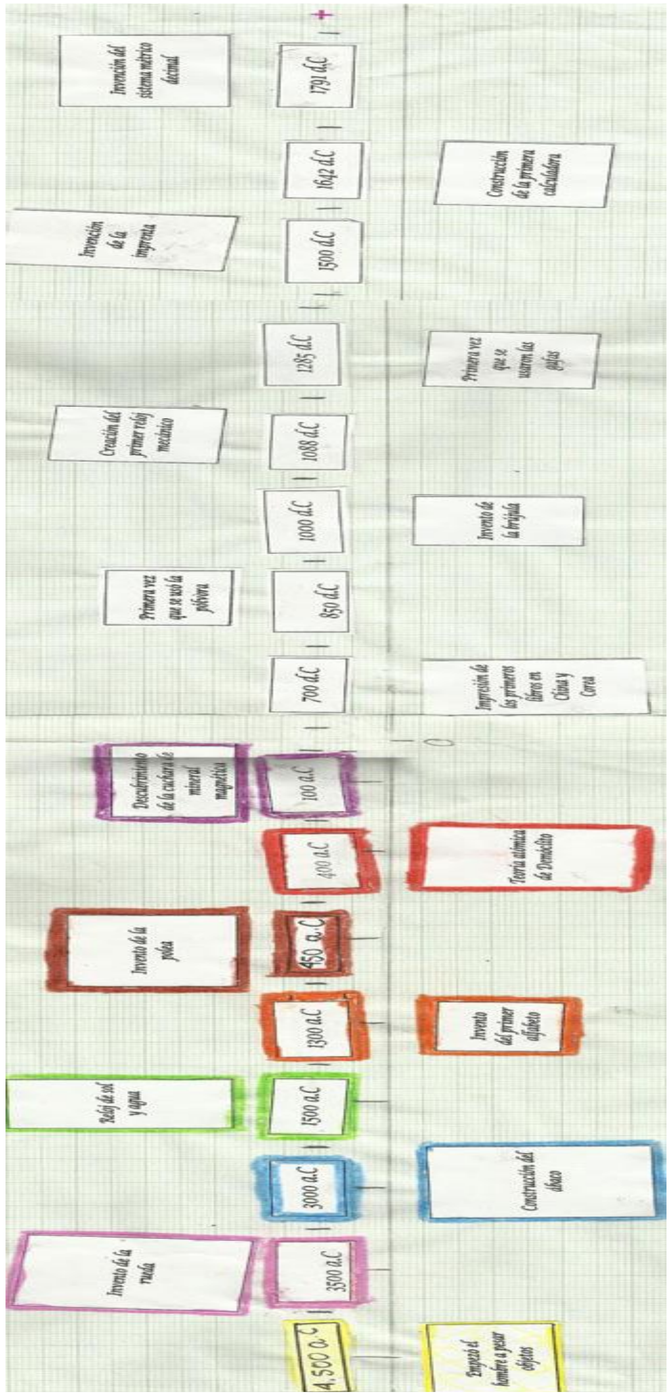

Ilustración 1. Estudiante trazando la recta. Actividad 3, situación 1.


Ilustración 2. Estudiantes asociando fechas en la recta. Actividad 3, situación 1.

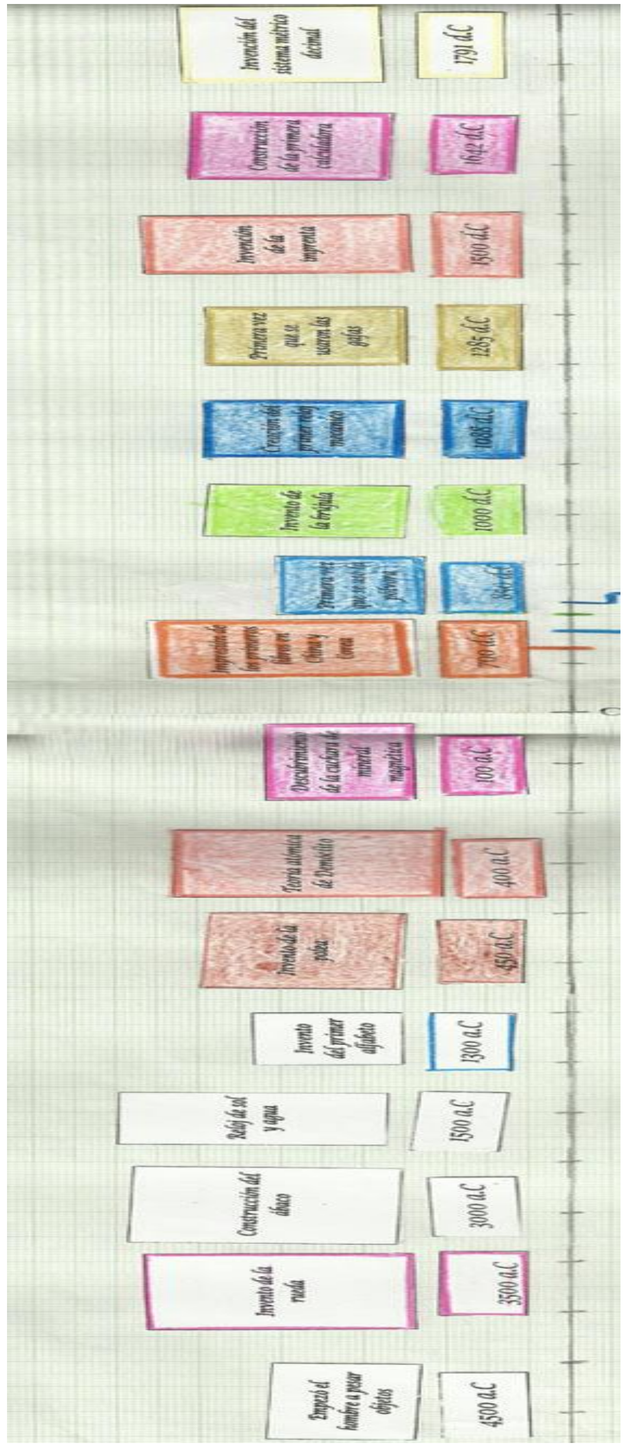
Teniendo en cuenta los resultados de la pregunta 3 en su primera parte expuestos en la tabla 1, se puede apreciar que la mayoría de los estudiantes (88%) no utilizan un patrón para determinar una escala que permita reconocer una recta numérica, por lo cual se puede considerar que presentan dificultad al representarla y al dibujar los segmentos donde van a ir ubicados los valores de las fechas, (que según las indicaciones debía hacerse en una escala de 100 en 100). Además, ubican los hechos históricos determinados por sus fechas en forma diversa, la mayoría (28 de 34) las ubican en forma ascendente a la derecha y descendente a la izquierda del cero. En otros casos (6 de 34) ubican de forma arbitraria, aún mezclando en un mismo lado de la recta fechas antes de Cristo y después de Cristo. Dos estudiantes del grupo realizan la escala en la forma solicitada, determinando una recta con una escala de 100 en 100, ubican los números de las fechas en forma ascendente a la derecha y descendente a la izquierda del cero, pero tienen dificultad para los números "picos" (1285 lo ubican en el 1200).

De lo anterior, se puede deducir que construir una recta numérica no es un proceso simple, pues se requiere una claridad conceptual con relación a elementos métricos, tener en cuenta un patrón de medida, una escala de variación y ubicar un punto de referencia. Lo que parece indicar que a los estudiantes en su escolaridad se les da "siempre" la recta y ellos solo ubican los números de acuerdo a un punto de referencia. Otro aspecto que sobresale, tiene que ver con la posibilidad de subdividir la unidad para ubicar puntos intermedios, aspecto que no es claro en ningún estudiante. Esta dificultad está registrada en el marco teórico cuando se habla sobre la dificultad de representación gráfica sobre la recta real, esta presenta dificultades debido a que se toman los números negativos como contradictorios a los positivos, se toman los negativos como los opuestos a los positivos, esta diferencia hace que los estudiantes establezcan el modelo de recta numérica como dos semirrectas opuestas que funcionan separadamente, no facilitando su extensión de manera unificada.


4500 a.C
Empezó el hombre a pesar objetos
3500 a.C
Invento de la rueda
3000 a.C
Construcción del ábaco
1500 a.C
Reloj de sol y agua
1300 a.C
Invento del primer alfabeto
450 a.C
Invento de la polea
400 a.C
Teoría atómica de Demócrito
100 a.C
Descubrimiento de la cuchara de mineral magnética
0
700 d.C
Impresión de los primeros libros en China y Corea
850 d.C
Primera vez que se usó la pólvora
1000 d.C
Invento de la brújula
1088 d.C
Creación del primer reloj mecánico
1285 d.C
Primera vez que se usaron las gafas
1500 d.C
Invención de la imprenta
1642 d.C
Construcción de la primera calculadora
1791 d.C
Invención del sistema métrico decimal



4,500 a.C
Empezó el hombre a pesar objetos
3500 a.C
Invento de la rueda
3000 a.C
Construcción del ábaco
1500 a.C
Reloj de sol y agua
1300 a.C
Invento del primer alfabeto
450 a.C
Invento de la polea
400 a.C
Teoría atómica de Demócrito
100 a.C
Descubrimiento de la cuchara de mineral magnética
0
700 d.C
Impresión de los primeros libros en China y Corea
850 d.C
Primera vez que se usó la pólvora
1000 d.C
Invento de la brújula
1088 d.C
Creación del primer reloj mecánico
1285 d.C
Primera vez que se usaron las gafas
1500 d.C
Invención de la imprenta
1642 d.C
Construcción de la primera calculadora
1791 d.C
Invención del sistema métrico decimal
+


Empezó el hombre a pesar objetos
4500 a.C
Invento de la rueda
3500 a.C
Construcción del ábaco
3000 a.C
Reloj de sol y agua
1500 a.C
Invento del primer alfabeto
1300 a.C
Invento de la polea
450 a.C
Teoría atómica de Demócrito
400 a.C
Descubrimiento de la cuchara de mineral magnética
100 a.C
Invento de la brújula
1000 d.C
Creación del primer reloj mecánico
1088 d.C
Primera vez que se usaron las gafas
1285 d.C
Invención de la imprenta
1500 d.C
Construcción de la primera calculadora
1642 d.C
Invención del sistema métrico decimal
1791 d.C

a. ¿Por qué se puede asignar el signo más y el signo menos a una cantidad ubicada en la escala de hechos históricos?

TIPO DE RESPUESTA	F. R	F. A
TIPO 1: Estudiantes que escriben que se puede asignar el signo más y menos, porque hay un orden cronológico, unas antes de Cristo (-) y otras después de Cristo (+).	12	35%
TIPO 2: Estudiantes que escriben que se puede asignar el signo más y menos, para diferenciar un número de otro.	6	18%
TIPO 3: Estudiantes que escriben que se puede asignar el signo más y menos, porque se parte del cero como punto de referencia, para saber cuáles son antes y después, para asignar el signo más y menos.	8	24%
TIPO 4: Estudiantes que escriben que se puede asignar el signo más y menos, para saber cuáles son positivos y negativos	4	12%
TIPO 5: Respuestas sin categoría.	4	12%
TOTAL	34	100%

Tabla 2. Tipologías de las respuestas a la pregunta 3a.

b. Expliquen la razón por la cual se puede tomar la fecha del nacimiento de Cristo, como punto de referencia (cero) para diferenciar las fechas de los inventos.

TIPO DE RESPUESTA	F.R	F. A
TIPO 1: Estudiantes que responden que la razón por la cual se puede tomar la fecha del nacimiento de Cristo como el cero (0), porque es un punto de referencia.	7	21%
TIPO 2: Estudiantes que responden que la razón es, porque se inicia a contar las fechas en la historia.	10	29%
TIPO 3: Estudiantes que responden que la razón es, para diferenciar los positivos y negativos.	6	18%
TIPO 4: Estudiantes que responden que la razón es, porque el nacimiento de Cristo divide la historia.	4	12%
TIPO 5: Respuestas sin categoría.	7	21%
TOTAL	34	100%

Tabla 3. Tipologías de las respuestas a la pregunta 3b.

Con relación a los apartados a y b de la pregunta 3 expuestos en la tabla 2 y 3, los cuales solicitan la explicación de la asignación del signo más y menos para valores numéricos a la izquierda y derecha del punto de referencia y la explicación de por qué la fecha de nacimiento de Cristo se puede tomar como cero absoluto, se encuentran en las tablas 2 y 3 los siguientes resultados: 30 estudiantes de 34 dan razón de porque se pueden asignar el signo más o menos a cantidades ubicadas en la recta numérica; sobresalen las explicaciones que "*diferencian lo antes y después*", pero sólo 8 estudiantes relacionan este hecho con el cero, ("existe un antes y un después con relación a algo") y 12 estudiantes lo relacionan con el nacimiento de Cristo, lo que parece indicar que existe una diferenciación de las cantidades positivas y negativas con relación a un punto de referencia, esto se reafirma en las respuestas encontradas en el apartado 3b,en las cuales 12 de 34 estudiantes relacionan el nacimiento de Cristo como un punto de referencia (cero) para diferenciar los positivos de los negativos.

Respecto a las respuestas sin categoría de los apartados a y b, se puede apreciar que 2de las 34 estudiantes dan una razón del porque se pueden relacionar los valores de las fechas con la asignación de los signos $(+)\ y\ (-)$, respecto a un punto de referencia (cero), escribiendo: *"los números antes de Cristo se les coloca el $-$ porque eran mayores algunos números y el $+$ porque los números sí son muy menores"* pero se contradicen al dar el ejemplo: -700 d. C y 1000 a.C. Esto se corrobora en las respuestas de la pregunta b, los estudiantes no logran establecer la fecha del nacimiento de Cristo como un punto de referencia, que en la recta numérica se puede tomar como el cero (0), para ubicar los números a izquierda o derecha de este, sino que relacionan esta fecha con el año cero (0), ("lo toman como el cero absoluto"),de donde surgen los inventos, escribiendo que *"la fecha del nacimiento está en toda la mitad de la línea"*.

Esta dificultad de ubicar los signos más $(+)$ y menos $(-)$ a los valores de la recta, está registrada en el marco teórico de referencia cuando se habla sobre entender el significado de los números con signo y reconocer que proporcionan un método favorable, es decir, los signos más $(+)$ y menos $(-)$, tienen funciones diferentes, indicando cuándo un número es positivo o negativo, y mostrando el lugar donde se deben ubicar para indicar direcciones opuestas.

c. Entre los números ubicados a la derecha del cero ¿Cuál es mayor? Justifica tu respuesta.

TIPO DE RESPUESTA	F.R	F.A
TIPO 1: Estudiantes que responden que, es mayor el que está ubicado "más a la derecha del cero".	4	12%
TIPO 2: Estudiantes que responden que, es mayor el último número ubicado en la recta numérica hacia el lado positivo.	6	18%
TIPO 3: Estudiantes que responden que, la distancia al cero es mayor que las demás.	16	47%
TIPO 4: Respuestas sin categoría.	8	24%
TOTAL	34	100%

Tabla 4. Tipologías de las respuestas a la pregunta 3c.

d. Y entre uno ubicado a la derecha y a la izquierda del cero ¿Cuál es mayor? Justifica tu respuesta.

TIPO DE RESPUESTA	F.R	F.A
TIPO 1: Estudiantes que responden que entre un número ubicado a la derecha y a la izquierda del cero, es mayor los de la derecha porque todo número positivo es mayor.	20	59%
TIPO 2: Estudiantes que responden que, son mayores los números de la izquierda.	4	12%
TIPO 3: Respuestas sin categoría.	10	29%
TOTAL	34	100%

Tabla 5. Tipologías de las respuestas a la pregunta 3d.

Según los resultados de los apartados c y d de la pregunta 3, se puede afirmar que la mayoría de estudiantes (76% en la c y 59% en la d) establecen las relaciones de orden, indicando cuando un número es mayor que otro, expresando que entre los números ubicados a la derecha e izquierda del cero son mayores lo de la derecha "*porque todo número positivo es mayor*". Por otro lado, 4 de 34 estudiantes establecen que los números ubicados a la izquierda son mayores que los ubicados a la derecha.

Los resultados anteriores parecen indicar que la mayoría de los estudiantes llegan a identificar cuando un número es mayor que otro respecto a un punto de referencia, en relación al signo, ubicación y distancia de los números en la recta numérica.

e. Entre los números ubicados a la izquierda del cero ¿Cuál es menor? Justifica tu respuesta.

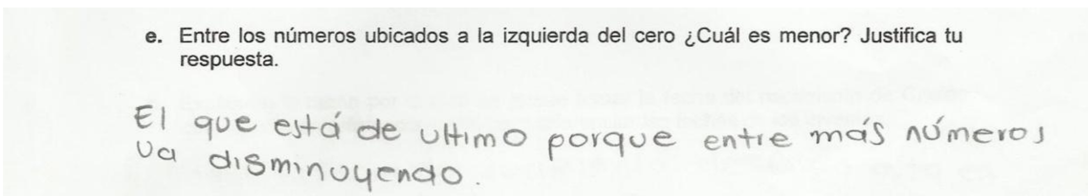
TIPO DE RESPUESTA	F.R	F.A
TIPO 1: Estudiantes que responden que entre los números ubicados a la izquierda del cero, son menores los números que están más alejados del cero.	12	35%
TIPO 2: Estudiantes que responden que, son menores los números que están más cerca del cero.	18	53%
TIPO 3: Respuestas sin categoría.	4	12%
TOTAL	34	100%

Tabla 6. Tipologías de las respuestas a la pregunta 3e.

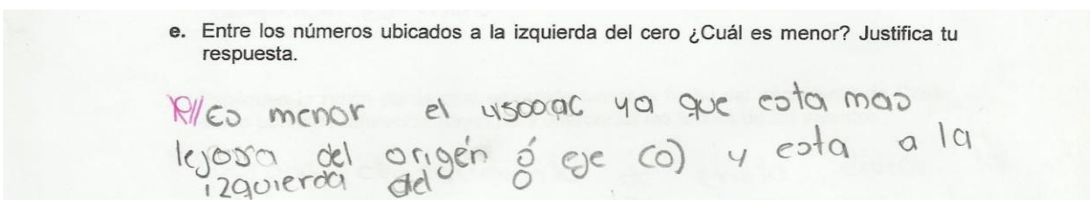
Teniendo en cuenta los resultados del apartado e en la pregunta 3,expuestos en la tabla 6, se puede apreciar que la mayoría de los estudiantes (65%) se les dificulta entender una relación de orden en los enteros negativos, es decir, al comparar dos enteros negativos mediante la relación "cual es menor" escriben que "*son menores los* *que están más cerca del cero*”, justificando que es porque *“son los que tienen menor porcentaje de años que los otros”* y dan como ejemplo *el -100 a. C,* lo que hace pensar que miran solo el valor del número sin tener en cuenta el signo y su ubicación en la recta numérica.

González et al., (1999). Al respecto plantea que “los errores en una relación de orden están provocados porque los estudiantes no realizan la inversión de las relaciones ≪más que≫ y ≪menos que≫, y por ello contestan erróneamente, y en otros casos, invierten con éxito la primera relación y no la segunda, y el ejercicio queda reducido a una respuesta mecánica al que están acostumbrados a expresar, pero son pocos los que son capaces de abstraer la relación correcta”.

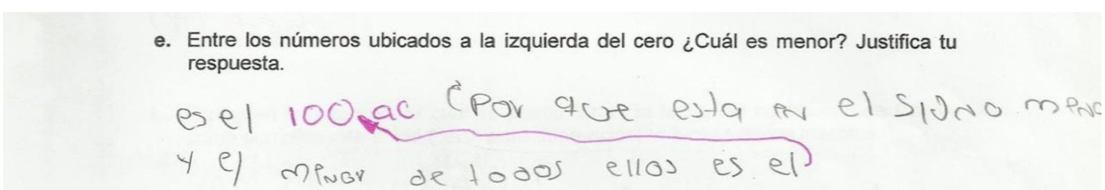
12 de 34 estudiantes dan su Justificación diciendo que es menor el que “*está más lejos del origen y además está a la izquierda del cero”.* Esto se puede evidenciar en algunos de los registros de los estudiantes expuestos a continuación:


e. Entre los números ubicados a la izquierda del cero ¿Cuál es menor? Justifica tu respuesta.

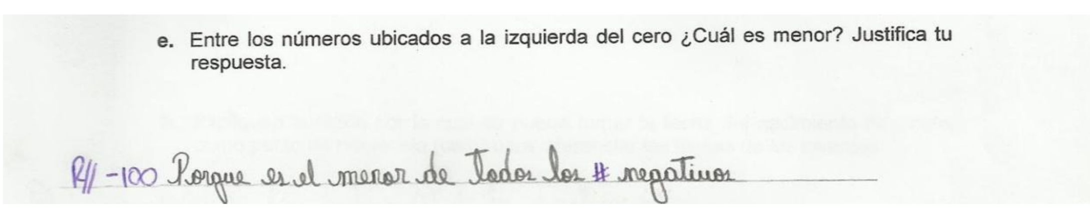
El que está de ultimo porque entre más números va disminuyendo.


e. Entre los números ubicados a la izquierda del cero ¿Cuál es menor? Justifica tu respuesta.

R// Es menor el 4500 ac ya que esta mas lejosa del origén ó eje (o) y esta a la izquierda del 0


e. Entre los números ubicados a la izquierda del cero ¿Cuál es menor? Justifica tu respuesta.

es el 100 ac ¿Por que esta en el signo menos y el menor de todos ellos es el


e. Entre los números ubicados a la izquierda del cero ¿Cuál es menor? Justifica tu respuesta.

R// -100 Porque es el menor de Todos los # negativos

Esta dificultad está registrada en el marco teórico de referencia cuando se habla sobre la dificultad para tener claro la relación de orden con respecto a los números enteros, es decir, el número está considerado como la medida de una cantidad y no puede ser más que positiva, por lo tanto, se reconoce que los enteros negativos son menores que los positivos, pero la relación de orden entre los negativos se establece en el mismo sentido que sus valores absolutos.

4. Tomen los datos que aparecen en la tira de papel que vienen trabajando y ubíquenlos en una recta en la hoja de block que se les entrega.

TIPO DE RESPUESTA	F.R	F.A
TIPO 1: Estudiantes que realizan un cambio de escala (de una unidad de escala mayor a una unidad menor), pero no ubican una unidad – patrón. "Conservan" el orden ascendente a derecha y descendente a izquierda respecto al punto de referencia (0) de las fechas.	22	61%
TIPO 2: Estudiantes que realizan el cambio de escala, pero no ubican una unidad – patrón. Ubicando las fechas a. C a la derecha del punto de referencia (0), con signo $(+)$ y las fechas d.C a la izquierda del punto de referencia (0), con signo $(-)$. Conservan el orden ascendente y descendente con respecto al punto de referencia.	2	6%
TIPO 3: Estudiantes que realizan un cambio de escala (de una unidad de escala mayor a una unidad menor), pero no ubican una unidad – patrón. Conservando el orden ascendente a derecha y descendente a izquierda respecto al punto de referencia (0), sin realizar la recta, pero las fechas ubicadas a la izquierda del cero (a. C) les anteceden el signo $(+)$, y a las fechas ubicadas a la derecha del cero (d.C), les anteceden el signo $(-)$.	2	6%
TIPO 4: Estudiantes que realizan el cambio de escala, pero no ubican una unidad – patrón, y ubican el orden de las fechas arbitrariamente.	6	17%
TIPO 5: Estudiantes que no realizan el cambio de escala (de una escala mayor a menor, lo hacen como en la actividad 1), para lo cual añaden otras hojas de papel y ubican el orden de las fechas arbitrariamente.	4	11%
TOTAL	36	100%

Tabla 7. Tipologías de las respuestas a la pregunta 4.

Se aprecia que el 90% de los estudiantes, realizan un cambio de escala (de una escala mayor a menor), en otros casos (4 de 36) no hacen el cambio de escala de la hoja milimetrada a la hoja de block entregada, sino que encuentran la necesidad de añadirle a la hoja entregada, hojas a los lados, para similar el tamaño de la hoja milimetrada. A pesar del cambio de escala, prevalece la falta de un patrón y sus subdivisiones que permita una ubicación adecuada de los datos dados. Como se puede apreciar estas repuestas corroboran la dificultad expuesta en la pregunta 3, dado que no se había hecho ninguna socialización, se evidencian las mismas dificultades en los estudiantes, (no determinan un patrón de medida, ubican fechas arbitrariamente, no subdividen la unidad para ubicar puntos intermedios, etc.). Esto parece que se da puesto que aún no se había introducido ninguna reflexión respecto al aspecto métrico de la recta (la socialización se hizo al final de la situación 1).

Se invento la inprenta se elaboro mientras este sgs. la biblia

El pimer relog mecanico se ... en china.

Los chinos descubrieron el invento la polvora.

Descubrimiento de la cuchara de mineral magnetica.

Se invento la polea en grecia

Se creo el primer relog mecanico en china.

Se invento la rueda en mesopotamia

1791 - 1642 - 1500 - 1285 - 1088 - 1000 - 850 - 700 0 100 400 450 1300 1500 3000 3500 4500

Fue la primera maquina calculadora creada en francia

las gafas se usaron por primera vez en italia.

Un instumento que ayudo a esto fue la brujula que se invento en china.

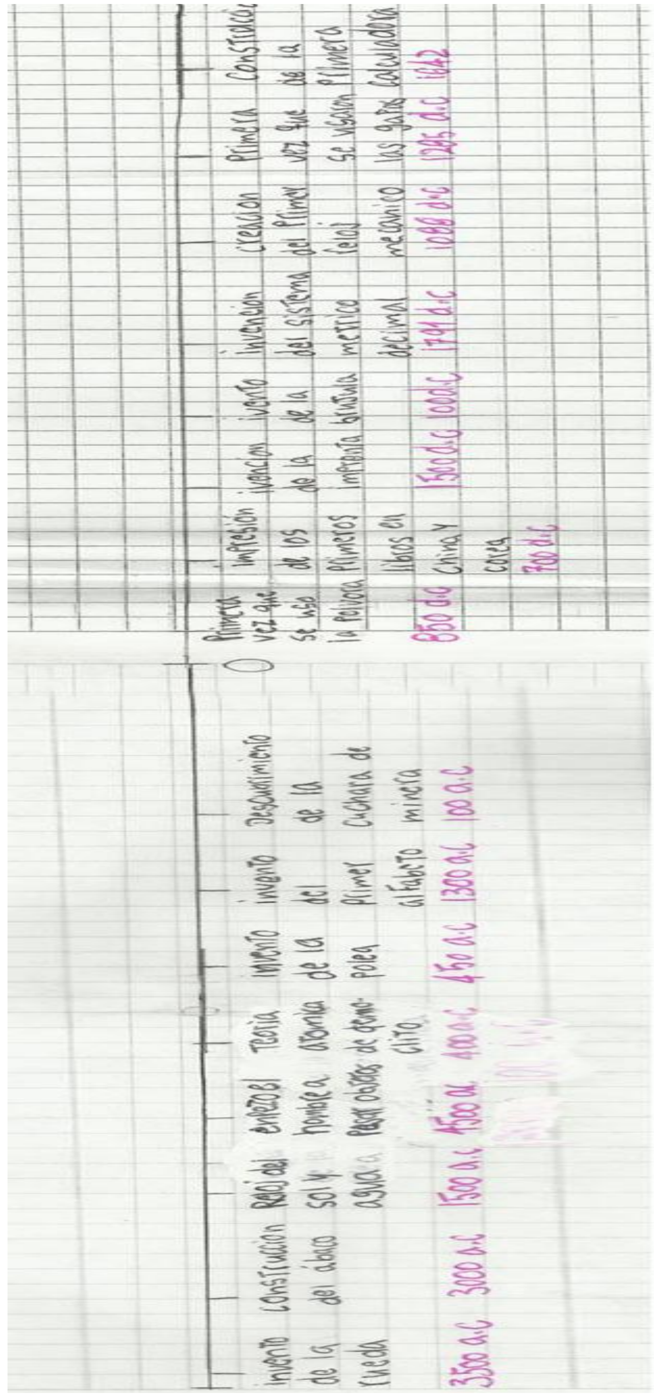
Los primeros libros impresos fueron los pergaminos.

La primera teoria atomica de Democlito.

Los petroglifos dejados en cavernas prehistoricas.

En babilonia se creo el abaco.

Se creo la balanza en Siria.


invento de la rueda
3500 a.C
construcción del ábaco
3000 a.C
Reloj del sol y agua
1500 a.C
empezó el hombre a pasar objetos
4500 a.C
Teoría atómica de demo-clito
400 a.C
invento de la polea
450 a.C
invento del primer alfabeto
1300 a.C
Descubrimiento de la cuchara de minera
100 a.C
Primera vez que se uso la pólvora
850 d.C
impresión de los primeros libros en China y corea
700 d.C
invención de la imprenta
1500 d.C
invento de la brújula
1000 d.C
invención del sistema métrico decimal
1791 d.C
creación del primer reloj mecánico
1088 d.C
Primera vez que se usaron las gafas
1285 d.C
Construcción de la primera calculadora
1642

a.	Ubiquen dos inventos que tienen la misma fecha antes y después de Cristo. ¿Qué características presentan? y ¿A qué distancia del cero están estas cantidades?

TIPO DE RESPUESTA	F.R	F.A
TIPO 1: Estudiantes que ubican la misma fecha a. C y d. C (1500), describen que estas fechas son iguales pero con signos diferentes, establecen que la distancia con respecto al cero es la misma.	12	33%
TIPO 2: Estudiantes que ubican la misma fecha a. C y d. C, describen que estas fechas son iguales pero con signos diferentes, pero no establecen igual distancia entre las dos fechas, escribiendo las distancias con los inventos anteriores a estas fechas (1500 a. C está a 1300 a. C de distancia y 1500 d. C está a 1285 d. C de distancia).	2	6%
TIPO 3: Estudiantes que ubican la misma fecha a. C y d. C, describen que estas fechas son iguales pero con signos diferentes, expresando que 1500 a. C está a 4 cm y 1500 d. C está a 5 cm, con respecto al cero.	6	17%
TIPO 4: Estudiantes que ubican la misma fecha a. C y d. C, sin identificar alguna característica. Establecen la medida de la distancia de las dos fechas con respecto al cero en cm, expresando que 1500 a. C está a 5cm y 1500 d. C está a 6cm.	6	17%
TIPO 5: Respuestas sin categoría.	10	28%
TOTAL	36	100%

Tabla 8. Tipologías de las respuestas a la pregunta 4a.

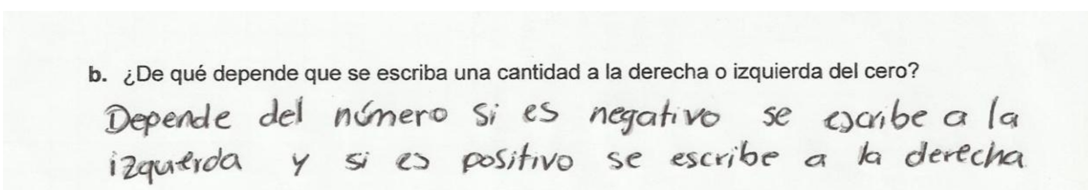
Con relación a las respuestas del apartado *a* de la pregunta 4 expuestas en la tabla 8, la cual requiere que los estudiantes ubiquen dos inventos que tengan el mismo valor de fecha antes y después de Cristo, escriban las características que presentan estas fechas y la distancia de estas cantidades respecto al cero. El 82% de los estudiantes identifican los inventos que tienen las mismas fechas; 20 estudiantes de 36 describen que las características de estas fechas es que "*son iguales pero con signos diferentes*, pero sólo 12 de los 20, establecen que la distancia de estas fechas respecto al cero es la misma. Por otro lado, 12 estudiantes establecen la relación entre las dos fechas, dependiendo de la distancia en (cm) que ocupan las fechas en la recta (*1500 a. Cesta a 4 cm y 1500 d. C está a 5 cm*), lo que parece indicar que para los estudiantes no es claro reconocer cuándo dos cantidades están a igual distancia del cero, si estas tienen el mismo valor, pero signos diferentes, lo que ratifica que no hay un nivel de abstracción sobre la recta, sino que están en un nivel donde consideran a la recta solo como la figura que tienen dibujada, es decir, para ellos no hay un nivel de generalización de la recta sino la recta que han plasmado en el papel. De aquí que vemos la importancia de implementar en la escuela los números negativos en un marco geométrico, ya sea como una necesidad de ampliar el campo de los números naturales o como objetos geométricos, en donde estos marcos generalmente utilizan la recta numérica como soporte intuitivo, ya que el tratar el número entero a través de la recta numérica es otra forma de concretizarlo, es decir, la opción de tratar los números enteros bajo el soporte de la recta numérica admite el número entero como extensión del número ordinal y tal vez sería más fácil para el niño admitir esta extensión que una cardinal. (González et al., 1999, pp. 145).

b. ¿De qué depende que se escriba una cantidad a la derecha o izquierda del cero?

TIPO DE RESPUESTA	F.R	F.A
TIPO 1: Estudiantes que escriben que una cantidad se ubica a la derecha o izquierda del cero (0), dependiendo del signo.	6	17%
TIPO 2: Estudiantes que escriben que un número o fecha se ubica a la derecha si es positivo (+) y a la izquierda si es negativo (-).	18	50%
TIPO 3: Respuestas sin categoría.	12	33%
TOTAL	36	100%

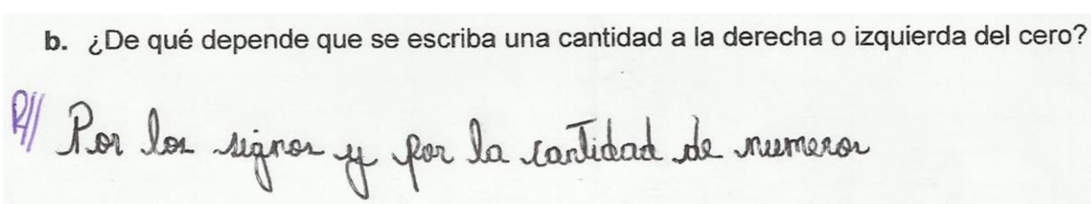
Tabla 9. Tipologías de las respuestas a la pregunta 4b.

En esta pregunta podemos observar que el 67% de los estudiantes dan la respuesta correcta a la pregunta b, según las expectativas de desempeño descritas, es decir, reconocen que una cantidad se ubica a la derecha o izquierda del cero, según el signo (a la derecha si es positivo $(+)$ y a la izquierda si es negativo $(-)$, estableciendo de esta manera, la relación de dependencia que existe entre el signo y la ubicación en la recta que le corresponde. En este caso aparece por primera vez una independencia del contexto (fechas de inventos) para dar la respuesta. Estas se ubican en un nivel más general pues hacen referencia al número en sí mismo.



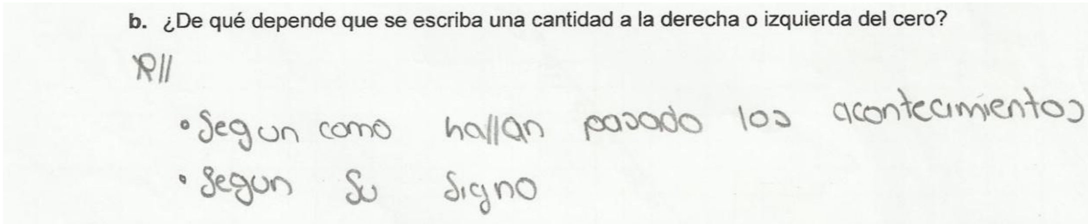
b. ¿De qué depende que se escriba una cantidad a la derecha o izquierda del cero?

Depende del número si es negativo se escribe a la izquierda y si es positivo se escribe a la derecha



b. ¿De qué depende que se escriba una cantidad a la derecha o izquierda del cero?

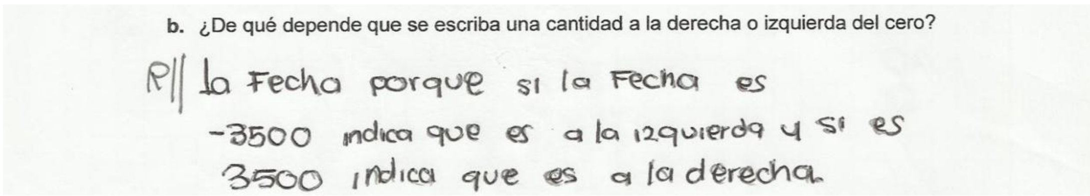
R// Por los signos y por la cantidad de numeros



b. ¿De qué depende que se escriba una cantidad a la derecha o izquierda del cero?

R//

- Segun como hallan pasado los acontecimientos
- Segun su signo



b. ¿De qué depende que se escriba una cantidad a la derecha o izquierda del cero?

R// la Fecha porque si la Fecha es -3500 indica que es a la izquierda y si es 3500 indica que es a la derecha.

Sin embargo, algunos estudiantes (12 de 36) escriben sus respuestas sin hacer alusión a lo solicitado, justificando que "*cada invento tiene su año" y "que los números no son los mismos pero se escriben así"*, en estos estudiantes parece evidenciarse que ven de forma aislada la relación que hay entre el signo y su ubicación en la recta. Tomando como referencia a González donde plantea que: el orden depende de las relaciones asimétricas, las cuales tienen siempre dos sentidos como antes y después, mayor y menor, etc., es decir, al parecer los estudiantes no ven la existencia de dos sentidos contrapuestos y que esto implica la existencia de un orden.

5. Tomando como referencia el año de tu nacimiento, ubica algunos acontecimientos importantes que hayan pasado antes y después de tu nacimiento, utilice el signo menos $(-)$ y el signo más $(+)$ para representar estas cantidades, como se hizo en el punto anterior. (Los valores que tienen el signo menos los llamaremos negativos y los valores que tiene el signo más los llamaremos positivos).

TIPO DE RESPUESTA	F.R	F.A
TIPO 1: Estudiantes que ubican el año de su nacimiento como punto de referencia (0), y sitúan las fechas antes y después de su nacimiento en forma ascendente a la derecha y descendente a la izquierda, considerando un patrón (1 cm por año).	19	63%
TIPO 2: Estudiantes que ubican el año de su nacimiento como punto de referencia (0), no establecen un orden ascendente y descendente con respecto a la fecha de su nacimiento.	2	7%
TIPO 3: Estudiantes que ubican el año de su nacimiento como el punto de referencia, pero no lo asignan como cero (0). Establecen un orden ascendente y descendente con respeto a la fecha de su nacimiento.	2	7%
TIPO 4: Estudiantes que ubican el año de su nacimiento como punto de referencia (0), sitúan las fechas después de su nacimiento en forma ascendente a la derecha, pero al ubicar las fechas antes de su nacimiento se confunden al establecer el orden.	5	17%
TIPO 5: Respuestas sin categoría.	2	7%
TOTAL	30	100%

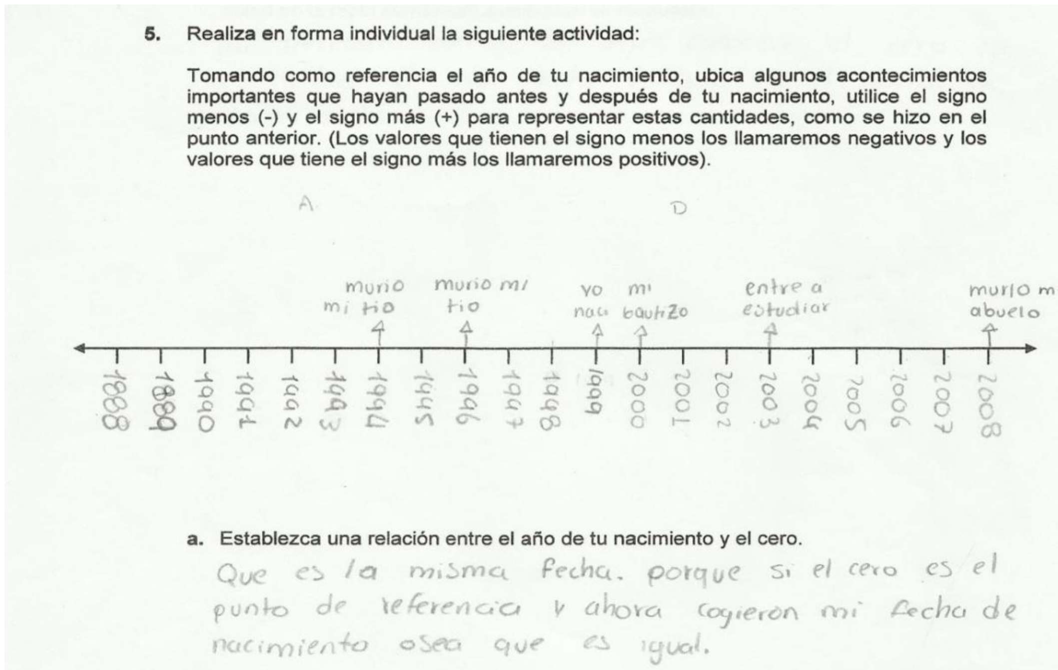
Tabla 10. Tipologías de las respuestas a la pregunta 5.

a. Establezca una relación entre el año de tu nacimiento y el cero.

TIPO DE RESPUESTA	F.R	F.A
TIPO 1: Estudiantes que establecen la relación como un punto de referencia.	12	40%
TIPO 2: Estudiantes que no establecen la relación como un punto de referencia, sino que relacionan la fecha como un evento muy significativo para la familia.	15	50%
TIPO 3: Estudiantes que indican que desde el cero se pueden ubicar y dividir los números positivos y negativos.	3	10%
TOTAL	30	100%

Tabla 11. Tipologías de las respuestas a la pregunta 5a.

Según los resultados de la pregunta 5 y 5a expuestos en las tablas10 y 11, se puede apreciar que: el 87% de los es estudiantes ubican el año de su nacimiento como punto de referencia, el resto (13%) ubican la fecha como referencia pero no la asignan como un cero; lo que parece indicar que logran comprender que la fecha de su nacimiento se puede ver como un cero (0) relativo, es decir, se puede ver la relatividad de cantidades, respecto a una situación inicial, como en este caso el año de su nacimiento, y lograr el reconocimiento de que muchos hechos o fechas, se pueden tomar como cero (0) en un contexto determinado. Por otro lado 21 estudiantes de 30 establecen un orden en las fechas de manera ascendente a la derecha y descendente a la izquierda, y sólo 19 consideran un patrón de medida (1 cm por año), lo que parece indicar que el haber dado un recta con un patrón de división favorece que el estudiante haga conteos para ubicar los datos que necesita e inclusive darles el mismo valor a la escala (a veces de 1 en 1 o de 2 en 2).

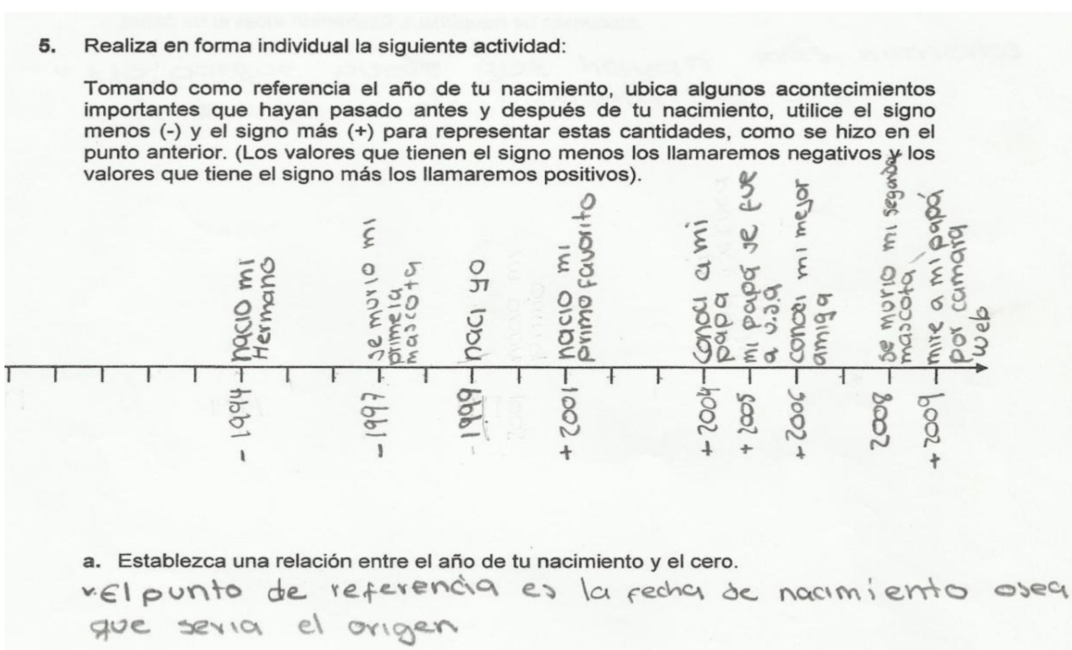


5. **Realiza en forma individual la siguiente actividad:**

Tomando como referencia el año de tu nacimiento, ubica algunos acontecimientos importantes que hayan pasado antes y después de tu nacimiento, utilice el signo menos (-) y el signo más (+) para representar estas cantidades, como se hizo en el punto anterior. (Los valores que tienen el signo menos los llamaremos negativos y los valores que tiene el signo más los llamaremos positivos).

a. Establezca una relación entre el año de tu nacimiento y el cero.

Que es la misma fecha. porque si el cero es el punto de referencia y ahora cogieron mi fecha de nacimiento osea que es igual.



5. **Realiza en forma individual la siguiente actividad:**

Tomando como referencia el año de tu nacimiento, ubica algunos acontecimientos importantes que hayan pasado antes y después de tu nacimiento, utilice el signo menos (-) y el signo más (+) para representar estas cantidades, como se hizo en el punto anterior. (Los valores que tienen el signo menos los llamaremos negativos y los valores que tiene el signo más los llamaremos positivos).

a. Establezca una relación entre el año de tu nacimiento y el cero.

El punto de referencia es la fecha de nacimiento osea que seria el origen

Sin embargo, se observa que al preguntarles en el apartado 5a sobre la relación que encuentran entre el cero y el año de su nacimiento solo 12 de 34 estudiantes justifican que la fecha de su nacimiento "*es un punto de referencia*" que equivale al cero, el resto relacionan la fecha como un evento muy significativo para la familia.

Al respecto, Bruno (2001) cita a Glaeser diciendo:

> En la ambigüedad de los dos ceros, Glaeser se refiere con esto a las dificultades que hubo entre los matemáticos (Stevin, MacLaurin, D'Alembert, Carnot, Cauchy y, quizá, (Euler y Laplace) para pasar de un cero absoluto, un cero que significaba la ausencia de cantidad de magnitud, a un cero origen elegido arbitrariamente. Uno de los razonamientos más extendidos entre los matemáticos que se oponían a la consideración de las cantidades negativas como cantidades reales y no como meros artificios del cálculo, era que no se podía admitir la existencia de cantidades que fueran "menos que nada"

b. Compara dos números que corresponden a fechas de acontecimientos de tu vida indicando cual es el mayor. Justifica tu respuesta.

TIPO DE RESPUESTA	F.R	F.A
TIPO 1: Estudiantes que comparan dos números (fechas), justificando que el mayor es aquel que está más alejado del cero (su fecha de nacimiento).	10	33%
TIPO 2: Estudiantes que comparan dos números (fechas), justificando que el mayor valor es aquel que está después y en los valores positivos.	9	30%
TIPO 3: Estudiantes que comparan dos números (fechas), y no escriben justificación.	2	7%
TIPO 4: Estudiantes que sólo indican con un número (fecha), describiendo que ese número (fecha) es mayor.	2	7%
TIPO 5: Estudiantes que comparan dos números (fechas), justificando que el mayor es el que está más cerca del cero (su fecha de nacimiento).	2	7%
TIPO 6: Respuesta sin categoría.	5	17%
TOTAL	30	100%

Tabla 12. Tipologías de las respuestas a la pregunta 5b.

Teniendo en cuenta los resultados de la pregunta 5b expuestos en la tabla anterior, se puede apreciar que 19 de 30 estudiantes comparan dos fechas indicando cual es mayor y justificando que "*es la que está más alejada del cero",* otros dicen que es porque *"está en los valores positivos"* y *"porque está después y tiene más alto valor"*. El 7% de los estudiantes comparan dos números (-1996 y +2010) y justifican que *"es mayor el -1996 porque está más cerca al cero"*. El resto no justifican y otros sólo escriben un número (fecha), diciendo que ese número es mayor porque "*fue después y es positivo*".

De lo anterior, se puede deducir que la mayoría de los estudiantes al trabajar con actividades contextualizadas por medio de la recta numérica, tienen ideas acertadas sobre cuando un número es mayor que otro, aunque estén ligadas a un contexto (mayor porque sucede más alejado de su nacimiento), haciendo comparaciones entre un número positivo y uno negativo o entre dos números positivos. Se resalta que para algunos estudiantes no es fácil reconocer cuando un número es mayor que otro al comparar valores positivos y negativos.

c. Para discutir en clase: ¿Necesariamente la ubicación del cero, corresponde a la mitad en la recta numérica? Justifiquen su respuesta.

TIPO DE RESPUESTA	F.R	F.A
TIPO 1: Estudiantes que indican, que la ubicación del cero necesariamente corresponde a la mitad de la recta numérica.	12	40%
TIPO 2: Estudiantes que indican, que la ubicación del cero no necesariamente corresponde a la mitad de la recta numérica.	16	53%
TIPO 3: Estudiantes que no indican si la ubicación del cero debe ir o no en la mitad de la recta numérica.	2	7%
TOTAL	30	100%

Tabla 13. Tipologías de las respuestas a la pregunta 5c.

Los resultados expuestos en la pregunta 5c, evidencian que el 53% de los estudiantes logran reconocer que la ubicación del cero no necesariamente corresponde a la mitad de la recta numérica, justificando que "*el cero puede ir en cualquier parte de la recta numérica, porque pueden haber más números en un lado que en el otro*" y *"porque no importa donde lo ponga, no va a alterar nada*. De estos resultados podemos inferir que los estudiantes al parecer, tienen una conceptualización de la recta válida, es decir, reconocen que es infinita, por lo tanto el cero (0) puede estar ubicado en cualquier lugar de ella. Sin embargo se muestra que el 40% de los estudiantes escriben que el cero va necesariamente en la mitad de la recta, justificando que *"es el punto de origen y desde ahí comienzan todos los números"* y "*porque hay que dividir la recta en la mitad para comparar los números".* Esta forma de ubicar el cero en la mitad de la rectapuede darse porque en la enseñanza y en los libros de texto se les presenta de esa manera.

Al final de la situacion 1 las estudiantes de trabajo de grado hacen una plenaria sobre los procesos desarrollados en cada pregunta, de manera que los estudiantes, muestran que reconocen la recta numérica como una representación en la cualse pueden leer algunas propiedades de los números, aspecto importane en la construcción de número entero.

Por todo lo expuesto anteriormente se puede concluir que, en esta primera parte de la secuencia se puede ver que hay aspectos que no son tan elementales para los estudiantes, que involucran la representación gráfica en la recta numérica y la capacidad para ordenar y ubicar números en ella, haciendo corresponder a determinadas situaciones contextualizadas los números enteros positivos cuando tenga el signo más $(+)$ y los negativos cuando tenga el signo menos $(-)$.

Por último, las investigaciones de González et al. (1999), muestran que:

> El orden que inducen los modelos concretos no es el de los números enteros: mientras en Z se define un orden total, los modelos concretos inducen dos órdenes parciales y opuestos referidos a las regiones positiva y negativa. Por estas y otras razones didácticas, se plantea la construcción de un nuevo objeto matemático, el 'número natural relativo'. Dicho número que, según el autor, refleja mejor el comportamiento de los modelos, ocuparía una posición intermedia entre el número natural y el entero. Así pues, según esta propuesta, el trabajo en la escuela con situaciones de comparación conduciría a la noción de 'número natural relativo' desde la cual, más adelante, habría que pasar a la de número entero.

SITUACIÓN 2: CARACTERICEMOS EL NÚMERO ENTERO NEGATIVO

Implementada en el grado: 7-A

Fecha: 23 Noviembre de 2011

Número de estudiantes: 36

Organización del trabajo en el aula		
Actividad 1	**Ejercicios del 1 al 6**	**Parejas**
Actividad 2	**Ejercicios del 1 al 3**	**Individual**
Actividad 3	**Ejercicio 1**	**Individual**
	Ejercicios del 2 al 6	**Parejas**

ACTIVIDAD 1: EL NÚMERO NEGATIVO COMO OPUESTO AL NÚMERO POSITIVO

1. Realicen las actividades de la 2 hasta la 6 con un compañero del curso.

Lean la siguiente narración mencionada en la situación 1.

"Los primeros instrumentos para medir el tiempo fueron los relojes de sol y de agua, inventados hacia el año 1500 antes de Cristo; ya en el año 1500 después de Cristo se inventó la imprenta, que fue la máquina responsable de una de las revoluciones sociales y tecnológicas más importantes para la época. El primer libro elaborado mediante este sistema fue La Biblia de 42 líneas".

a. Escriban las dos fechas presentes en la narración, utilizando signos más $(+)$ y menos $(-)$, de acuerdo a la referencia del nacimiento de Cristo.

TIPO DE RESPUESTA	F.R	F.A
TIPO 1: Estudiantes que escriben las dos fechas presentes en la narración, utilizando signos más $(+)$ y menos $(-)$ de acuerdo a lo antes y después del nacimiento de Cristo.	28	78%
TIPO 2: Estudiantes que escriben las dos fechas presentes en la narración, anteponiendo en uno de los números el signo menos $(-)$ y en el número positivo no antepone el signo más $(+)$.	8	22%
TOTAL	36	100%

Tabla 14. Tipologías de las respuestas a la pregunta 1a.

Con relación a las respuestas del apartado a de la pregunta 1, se puede observar que el 78% de los estudiantes logran relacionar en las dos fechas presentes de la narración los signos que le corresponden, de acuerdo a la posición de estos: indicando los números que están ubicados después del nacimiento de Cristo con el signo $(+)$, y los antes del nacimiento de Cristo el signo $(-)$.

Los 8 estudiantes restantes usan como estrategia, anteponer el signo $(-)$ a los valores antes del nacimiento de Cristo, pero omiten el signo $(+)$ a los valores que están después del nacimiento de Cristo, lo que parece indicar que, los estudiantes no anteponen este signo porque los valores son positivos.

Los resultados anteriores indican que, la mayoría de los estudiantes logran reconocer por medio de actividades contextualizadas como las propuestas en esta situación, el número entero como número relativo, ya que la asignación de los signos positivos o negativos dependen del sentido que se decida, pero una vez fijado el sentido ya sea (positivo o negativo), el sentido opuesto a éste será el (negativo o positivo).

b. Escriban varias parejas de números que cumplan esta característica.

TIPO DE RESPUESTA	F.R	F.A
TIPO 1: Estudiantes que escriben parejas de números que tiene el mismo valor numérico, pero diferente signo, anteponiendo los signos más $(+)$ y menos $(-)$.	24	67%
TIPO2: Estudiantes que escriben parejas de números, anteponiendo en uno de los números el signo menos $(-)$, y en el número positivo no anteceden el signo más $(+)$.	6	17%
TIPO 3: Estudiantes que escriben parejas de números, estableciendo una relación de igualdad entre ambos números, por ej.$(-2500 = +2500)$, o relación de sí y sólo $(\leftrightarrow)$ entre ambos números $(-2030 \leftrightarrow +2030)$.	4	12%
TIPO 5: Estudiantes que no realizan la actividad.	2	6%
TOTAL	36	100 %

Tabla 15. Tipologías de las respuestas a la pregunta1b.

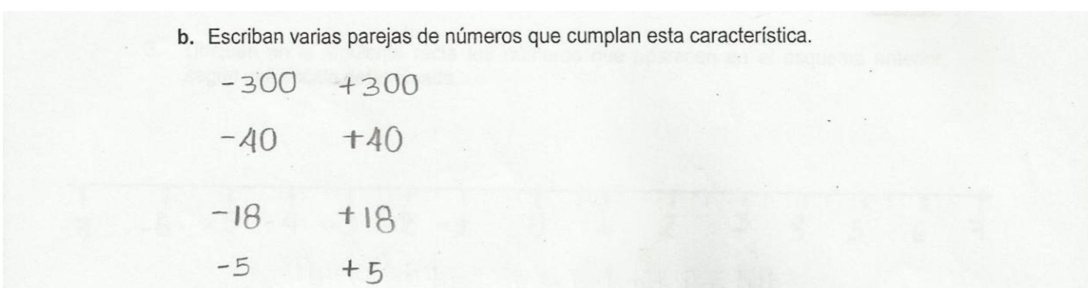
c. ¿Qué característica tienen estos números?

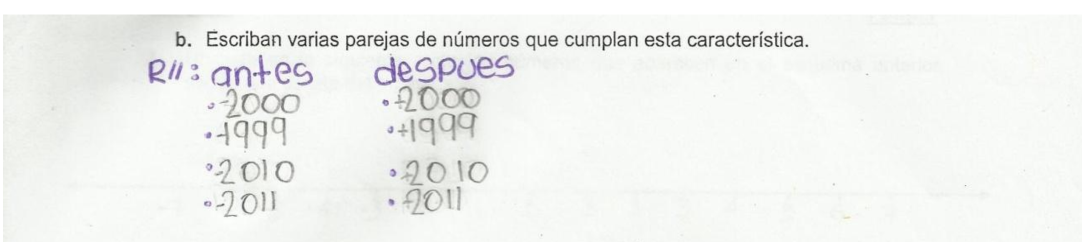
TIPO DE RESPUESTA	F.R	F.A
TIPO 1: Estudiantes que describen que la característica de estos números, es que tienen el mismo número pero con signos diferentes.	21	61%
TIPO2: Estudiantes que describen solo una característica, expresando que estos números sólo tiene diferente signo.	4	11%
TIPO 3: Estudiantes que describen que la característica que tienen, es que los números son diferentes y tienen diferente signo.	4	11%
TIPO 4: Estudiantes que describen que la característica que tienen, es que los números son iguales.	2	6%
TIPO 5: Estudiantes que no describen las características estos números, relacionándolos con fechas de acontecimientos de su vida (nacieron diferentes niñas en diferentes años).	4	11%
TOTAL	36	100%

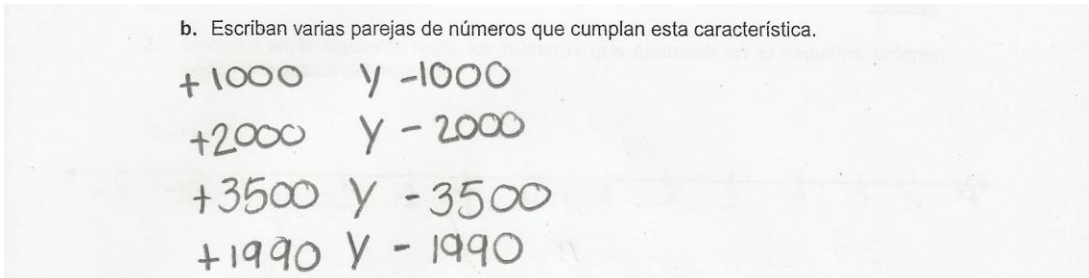
Tabla 16. Tipologías de las respuestas a la pregunta 1c.

Según los resultados de los apartados b y c de la pregunta 1, se puede afirmar que la mayoría de estudiantes (84% en la b y 72% en la c), hallan parejas de números que cumplen la característica de tener el mismo valor numérico, pero diferente signo, anteponiendo los signos más $(+)$, a las cantidades positivas y menos $(-)$, a las cantidades negativas.

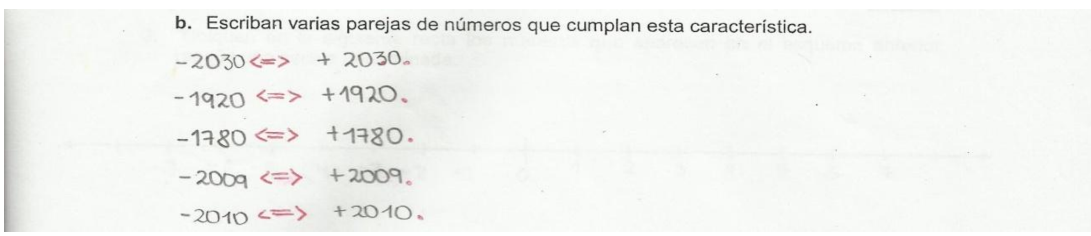
Estas son algunos de los casos más representativos en cuanto a lo que se ha dicho anteriormente:





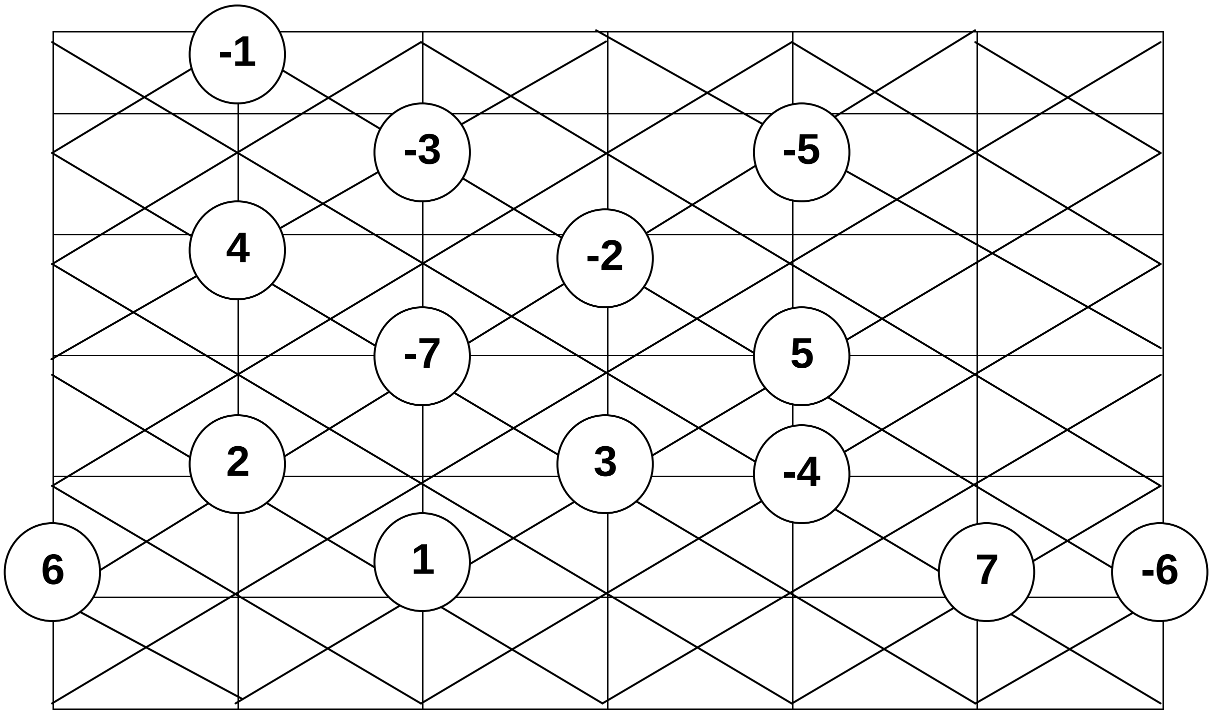


Por otro lado, se puede observar que 4 de 36 estudiantes en la b y 2 en la c, escriben sus respuestas estableciendo una relación de igualdad entre ambos números, por ej. $(-2500 = +2500)$, o relación de sí y sólo ($\leftrightarrow$) entre ambos números $(-2030 \leftrightarrow +2030)$, lo que parece indicar que, entre las parejas sólo observan el valor absoluto del número, es decir, hay tendencia a ignorar el signo que le precede, y no observan la posición de estos, ni los símbolos$(= \; y \; \leftrightarrow)$ que utilizan para escribir los números que cumplen con la característica de ser opuestos.



Otro grupo de Estudiantes 8 de 36 en la c, describen que la característica que tienen estos números es que "*son diferentes y tienen diferente signo*", o los relacionan con fechas de acontecimientos de su vida, lo que parece mostrar que no identifican cuándo se debe anteponer los signos $(+)\ o\ (-)$ en cantidades que presentan igual número, y aún no identifican que los valores (absolutos) de estos números son los mismos.

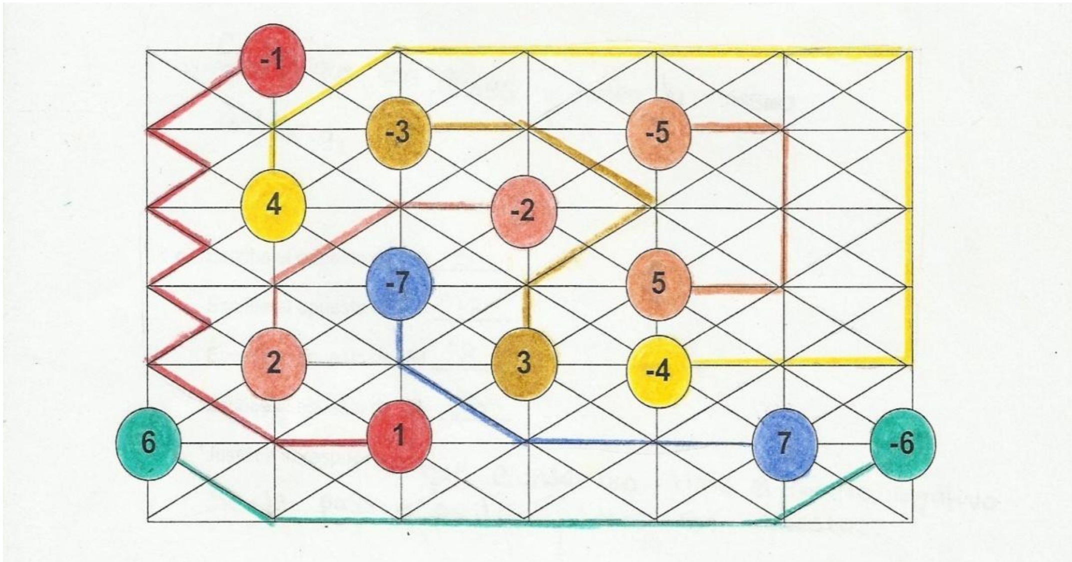
2.	Siguiendo las líneas propuestas del dibujo unan números que cumplan con la característica anterior, (estos números se denominan números opuestos). Deben tener cuidado porque ningún camino puede sobreponerse o cruzarse con otro. Utilicen diferentes colores:



TIPO DE RESPUESTA	F.R	F.A
TIPO 1: Estudiantes que unen los números opuestos presentes en el esquema, teniendo en cuenta la característica que estos presentan, (tener el mismo valor, pero signo diferente) y siguen las indicaciones que se presentan en la actividad.	36	100%
TOTAL	36	100%

Tabla 17. Tipologías de las respuestas a la pregunta 2.

Según los resultados expuestos en la pregunta 2, se puede decir que, el 100% de los estudiantes logra encontrar una estrategia para unir los números haciendo corresponder a cada uno de ellos su opuesto y evitar que las líneas se crucen, reconociendo la característica que estos presentan, diferenciando en cada número presente su opuesto por medio de los signos $(+)$ y $(-)$.



3.	Ubiquen en la siguiente recta los números que aparecen en el esquema anterior, según una escala determinada.

TIPO DE RESPUESTA	F.R	F.A
TIPO 1: Estudiantes que ubican en la recta los números que aparecen en el esquema, según una escala determinada (escalas de 1/2 cm, 1 cm, 2 cm…) ubicando los negativos a la izquierda del cero y los positivos a la derecha del cero.	30	83%
TIPO 2: Estudiantes que ubican en la recta los números que aparecen en el esquema, pero no siguen una escala determinada.	4	11%
TIPO 3: Estudiantes que ubican en la recta los números que aparecen en el esquema, según una escala determinada, pero al ubicar los números 1 y -1 utilizan una escala menor que la de los demás números (0.5 cm).	2	6%
TOTAL	36	100%

Tabla 18. Tipologías de las respuestas a la pregunta 3.

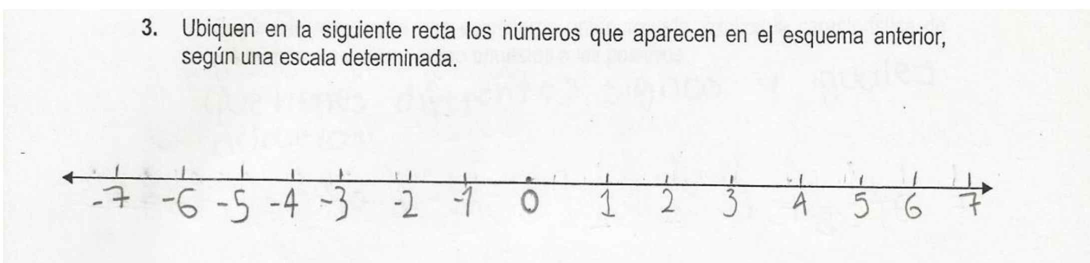
De acuerdo con los resultados encontrados en la pregunta 3, se obtuvieron los siguientes resultados:

Un 83% de los estudiantes logran ubicar en la recta los números del esquema dado (*números opuestos*), definiendo la posición del cero, donde creyeron conveniente. Eligieron un patrón de medida apropiado (escalas de 1/2 cm, 1 cm, 2 cm) para definir distancias entre los números y establecieron el orden de ubicación de los números: positivos a la derecha del cero y los negativos a la izquierda del cero.

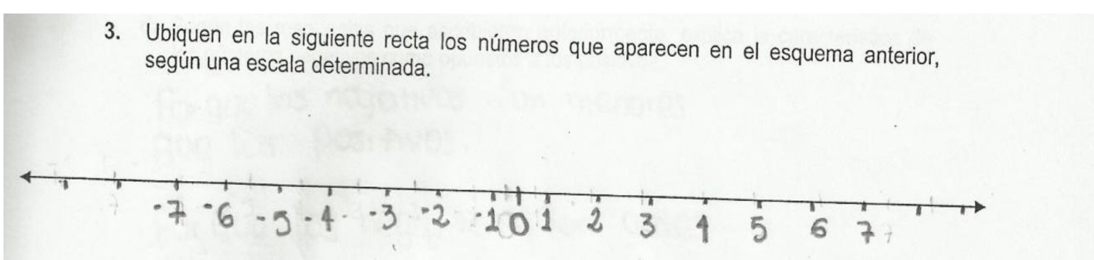
Lo anterior permite apreciar que, los estudiantes aunque en la consigna no se hace alusión al cero y la recta que se da no es metrizada, realizan la actividad reconociendo al cero como punto de referencia, aspecto importante para pasar del número relativo al número entero. Cid (2003), dice al respecto:

> "El empleo de números con signo se generalizó al atribuir arbitrariamente el estatuto de "positivo" o "negativo" a las medidas de las cantidades de magnitud, según el papel que representaban en la situación. El signo es algo circunstancial, provisional, que sirve para indicar la oposición de unas cantidades respecto a otras en el transcurso de la acción. Así pues, el carácter "relativo" de los números positivos y negativos pudo jugar un papel importante en su creación y aceptación y suponer un obstáculo a una concepción que asuma el signo como algo intrínseco al propio número.

El 11% ubica los números sin establecer la escala determinada, sin embargo en estos casos los números están correctamente ubicados, los positivos a la derecha del cero y los negativos a la izquierda del cero. En estos estudiantes prevalece la dificultad anotada según las respuestas encontradas en la pregunta 3 de la situación 1.



El 4% restante, ubica los números según una escala determinada, pero al ubicar los números 1 y -1 utilizan una escala menor que la de los demás números.



De acuerdo con los resultados encontrados se puede decir que, hay un avance en el empleo de la recta, desligando el contexto para ubicarse en la parte numérica, lo que comprueba que los estudiantes se desenvuelven mejor a partir de realizar ejercicios enmarcados en un contexto en diferentes situaciones, para luego pasar a un cálculo formal con números enteros, ejercicio que no se hace en la enseñanza actual de los números enteros, debido a que se introducen solo de manera contextual, tanto en las situaciones que presentan como en las técnicas que utilizan para resolverlos, y no enfatizan en la parte aritmética y formal en el que son necesarios como estrategia de resolución.

a. ¿Que pueden decir respecto a la ubicación de los números opuestos con relación al cero en la recta numérica?

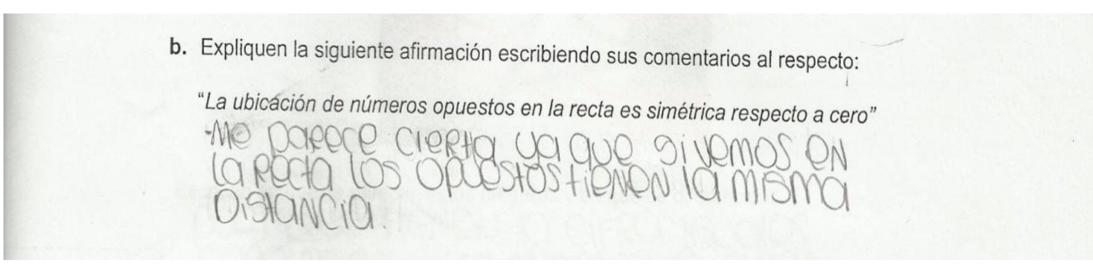
TIPO DE RESPUESTA	F.R	F.A
TIPO 1: Estudiantes que describen que la relación que hay entre los números opuestos y el cero en la recta numérica, es que tienen igual distancia al cero en la recta numérica.	30	83%
TIPO2: Estudiantes que describen que la relación que hay entre los números opuestos y el cero en la recta numérica, es que a la derecha son números positivos y a la izquierda son números negativos.	6	17%
TOTAL	36	100%

Tabla 19. Tipologías de las respuestas a la pregunta 3a.

b. Expliquen la siguiente afirmación escribiendo sus comentarios al respecto:

"La ubicación de números opuestos en la recta es simétrica respecto a cero"

Según los resultados de los apartados a y b de la pregunta 3, se observa que un 83% de los estudiantes en la pregunta a, reconocen la relación entre los números opuestos y el cero, justificando que, *"tienen igual distancia al cero"*, un 17% de la a, al parecer solo describen la ubicación de los números cuándo estos son positivos o negativos.

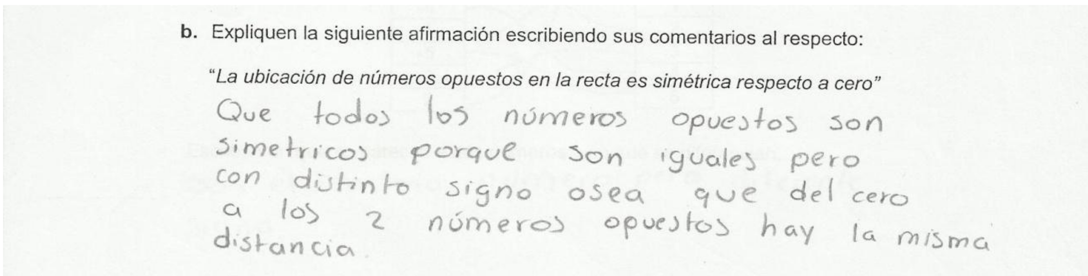


b. Expliquen la siguiente afirmación escribiendo sus comentarios al respecto:

"La ubicación de números opuestos en la recta es simétrica respecto a cero"

-Me parece cierta ya que si vemos en la recta los opuestos tienen la misma distancia.

En cuanto a la afirmación de la pregunta b, la cual se hizo con todo el grupo de estudiantes como un refuerzo de la pregunta a, se destacan aspectos como: relacionar cuándo los números opuestos son simétricos respecto al cero, justificando que *"todos* *los números son simétricos porque tienen la misma distancia”* o *“del cero a cualquier número sea positivo o negativo la distancia es igual”*. Lo que indica que, los estudiantes razonan sobre la relación de simetría cuando los números son opuestos y están ubicados sobre en la recta numérica, al concluir que están a la misma distancia del cero, pero en sentidos opuestos.


b. Expliquen la siguiente afirmación escribiendo sus comentarios al respecto:

“La ubicación de números opuestos en la recta es simétrica respecto a cero”

Que todos los números opuestos son simetricos porque son iguales pero con distinto signo osea que del cero a los 2 números opuestos hay la misma distancia

c. Escribe el opuesto de -5 _______

Escribe el opuesto de -77 _______

Escribe el opuesto de -38 _______

Escribe el opuesto de -56 _______

Justifica tu respuesta.

TIPO DE RESPUESTA	F.R	F.A
TIPO 1: Estudiantes que escriben el opuesto de los números negativos dados, justificando que los opuestos de los números negativos son los positivos.	12	33%
TIPO2: Estudiantes que justifican que lo que cambia en el número es el signo (cuando un número es positivos cambia a negativo).	12	33%
TIPO 3: Estudiantes que justifican que son números iguales pero con diferente signo.	4	11%
TIPO 4: Estudiantes que justifican que todos los números positivos van a la derecha y los negativos a la izquierda.	2	6%
TIPO 5: Estudiantes que escriben el opuesto de los números negativos, pero no justifican sus respuestas.	6	17%
TOTAL	36	100%

Tabla 20. Tipologías de las respuestas a la pregunta3c.

d. Según las respuestas que escribieron anteriormente, explica la característica de los números negativos como opuestos a los positivos.

TIPO DE RESPUESTA	F.R	F.A
TIPO 1: Estudiantes que escriben que la característica de los números negativos como opuestos a los positivos es que los números tienen la misma distancia desde el cero, pero en sentido contrario (diferentes) el uno del otro.	4	11%
TIPO2: Estudiantes que escriben que la característica de los números negativos como opuestos a los positivos es que los números son contrarios, están a la izquierda.	2	6%
TIPO 3: Estudiantes que escriben que la característica de los números negativos como opuestos a los positivos es que son los mismos números pero uno es negativo y otro positivo (tienen diferentes signos).	18	50%
TIPO 4: Estudiantes que escriben que la característica de los números negativos como opuestos a los positivos es que los números negativos siempre son menores que los positivos.	6	17%
TIPO 5: Estudiantes que escriben que la característica de los números negativos como opuestos a los positivos es que los números negativos van antes del cero y tienen el signo menos.	6	17%
TOTAL	36	100%

Tabla 21. Tipologías de las respuestas a la pregunta 3d.

4.	Unan los números de la columna izquierda con sus opuestos en la columna derecha.

-1
4
0
-2
5
3
-4
1
-5
-3
2

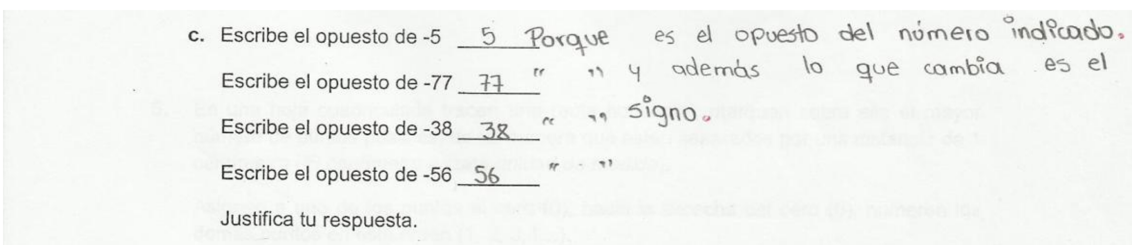
-5
-4
-3
-2
-1
0
1
2
3
4
5

Escriban en que se parecen estos números y en qué se diferencian.

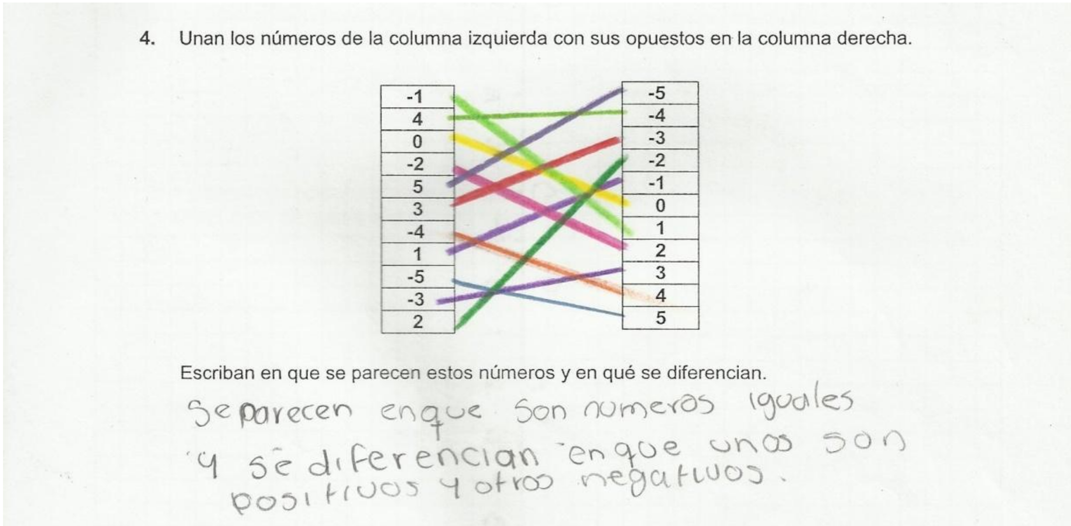
TIPO DE RESPUESTA	F.R	F.A
TIPO 1: Estudiantes que responden que los números se parecen, por ser el mismo número y se diferencian porque tienen signos contrarios.	26	72%
TIPO2: Estudiantes que responden que los números se parecen, porque tienen la misma distancia desde el cero, y se diferencian porque unos son positivos y otros negativos.	2	6%
TIPO 3: Estudiantes que responden que los números se parecen, en el valor absoluto y se diferencian en que uno tiene signo menos (negativo) y el otro es positivo.	2	6%
TIPO 4: Sin categoría.	6	17%
TOTAL	36	100%

Tabla 22. Tipologías de las respuestas a la pregunta 4.

En las respuestas encontradas de la pregunta 3 en los apartados b y c, se puede observar que el 100% de los estudiantes logra asignar a cada número negativo su número opuesto. Así mismo, algunos estudiantes en el apartado c, justifican que "*el opuesto de un número tiene el mismo valor, pero signo contrario*". Lo que exhibe que los estudiantes logran tener una apropiación de este concepto a través de las actividades presentadas en los apartados anteriores, donde las características de los opuestos permite que los estudiantes puedan establecer una idea general de estos, para relacionar el número relativo fuera de un contexto, e introducir propiedades del número entero.


c. Escribe el opuesto de -5 5 Porque es el opuesto del número indicado.
Escribe el opuesto de -77 77 " " y además lo que cambia es el
Escribe el opuesto de -38 38 " " signo.
Escribe el opuesto de -56 56 " "
Justifica tu respuesta.

Por otro lado, en los resultados de la pregunta 4, se puede decir que un 84% de los estudiantes identifican en cada número presentado su respectivo opuesto, describiendo algunas características de similitud o diferencia, justificando en algunos casos que se parecen porque, *"son el mismo número y se diferencian porque tienen signos contrarios"*.



4. Unan los números de la columna izquierda con sus opuestos en la columna derecha.

-1	-5
4	-4
0	-3
-2	-2
5	-1
3	0
-4	1
1	2
-5	3
-3	4
2	5

Escriban en que se parecen estos números y en qué se diferencian.

Se parecen en que son numeros iguales y se diferencian en que unos son positivos y otros negativos.

Otro grupo de estudiantes, el 17% que pertenecen a las respuestas sin categoría, al parecer solo observan la parte relativa de los números al justificar que, *"los números se diferencian en que unos son positivos y otros negativos"*. Lo que parece indicar que los estudiantes solo anteceden el signo (+) o (-) según sea el caso, lo cual ocasiona dificultad al reconocer cuando los números son opuestos. Aspecto identificado por Cid (2002), donde habla que:

> Una de las dificultades del alumno para comprender y manipular correctamente los números positivos y negativos, aparece en la manipulación de los signos $+$ y $-$ en las expresiones algebraicas, tanto numéricas como contextuales, que conduce a errores donde la tendencia de los alumnos a interpretar como signo predicativo lo que, en ocasiones, debe entenderse como signo operativo unario. De ahí que, ante una expresión como $-x$, digan que representa un número negativo, en vez de decir que representa el opuesto de x (y que $-x$ será negativo si x es positivo y positivo si x es negativo).

5. En una hoja cuadriculada tracen una recta horizontal, marquen sobre ella el mayor número de puntos posibles, de tal manera que estén separados por una distancia de 1 centímetro (*El centímetro es una unidad de medida*).

Asignen a uno de los puntos el cero (0), hacia la derecha del cero (0), numeren los demás puntos en este orden $(1, 2, 3,4 \ldots)$.

Ahora numeren los puntos que quedan hacia la izquierda del cero (0) así: $(-1, -2, -3, -4 \ldots)$.

- Encima del *punto* numerado con 2 (que es la coordenada de este punto), escriban A

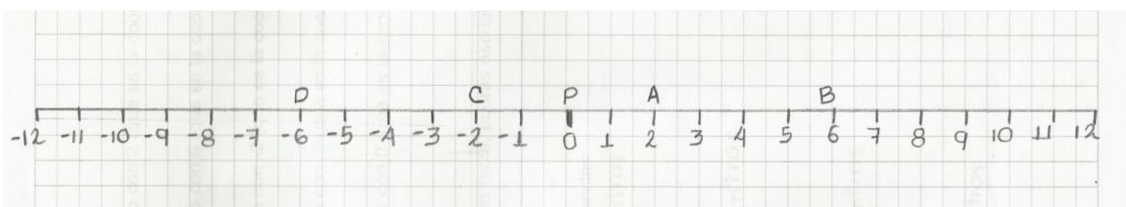
- Encima del *punto* numerado con 6 (que es la coordenada de este punto), escriban B

- Encima del *punto* numerado con -2 (que es la coordenada de este punto), escriban C

- Encima del *punto* numerado con -6 (que es la coordenada de este punto), escriban D

- Encima del *punto* numerado con 0 (que es la coordenada de este punto), escriban P

En esta pregunta se puede observar que el 94% de los estudiantes colocan puntos (A, B, C, D, P), estableciendo la numeración en la recta con una medida de 1cm, ordenando los números y determinando la distancia entre ellos, ubicando los números positivos y negativos de acuerdo a la posición que tengan con respecto al cero (que es el origen), y a cada punto de esa recta les colocan una letra mayúscula para denotar la coordenada que le corresponde. Por otro lado, 2 de las 36 estudiantes, trazan la recta y ubican puntos sobre ella pero no establecen la medida indicada, pero si asignan las coordenadas con sus respectivos puntos (A, B, C, D, P), ubicando los números positivos a la derecha del cero y negativos a la izquierda del cero.



Se puede apreciar que, la mayoría de los estudiantes no presentan ninguna dificultad al realizar la recta y ubicar la escala de 1 cm, debido a que se había hecho una socialización respecto a la dificultad encontrada en la pregunta 3 y 5 de la situación 1, donde se logra superar los obstáculos exhibidos por parte de los estudiantes.

Tomando como referencia investigaciones hechas por Cid et al. (2002), muestran que:

> La interpretación de los números con signo como puntos de la recta permite interpretar el orden entre ellos desde un punto de vista espacial: *un número con signo aes menor que otro b si está situado a la izquierda de b sobre la recta numérica*.
>
> Por otro lado, la aparición de magnitudes vectoriales y relativas contribuyó también al afianzamiento de los números con signo como números. En las magnitudes

vectoriales: velocidades, aceleraciones, fuerzas, etc., para caracterizar una cantidad de magnitud no basta con un número que exprese su medida sino que es necesario un vector que incorpora además especificaciones sobre su dirección y sentido. En las magnitudes relativas: temperaturas, etc., la medida cero no indica ausencia de cantidad de magnitud, sino que representa la medida de una cierta cantidad de magnitud a la que convencionalmente se le atribuye ese valor para que sirva de referencia a la medida de otras cantidades de la misma magnitud.

Si $A\ y\ B$ son dos puntos de una recta, podrás escribir $Dist\ (A, B)$ para significar la distancia entre los puntos $A\ y\ B$.

Halle el valor de las siguientes distancias:

a. $d(2, 0)$

TIPO DE RESPUESTA	F.R	F.A
TIPO 1: Estudiantes que hayan a 2 como el valor de la distancia, entre los puntos (A, P), que tienen como coordenadas a (2,0), añadiendo la unidad (2cm).	18	50%
TIPO2: Estudiantes que hayan a 2 como el valor de la distancia, pero no definen la unidad de medida en cm.	16	44%
TIPO 3: Estudiantes que no respondieron.	2	6%
TOTAL	36	100%

Tabla 23. Tipologías de las respuestas a la pregunta 5a.

b. $d(-2, 0)$

TIPO DE RESPUESTA	F.R	F.A
TIPO 1: Estudiantes que hayan 2 como el valor de la distancia, entre los puntos (C, P), que tienen como coordenadas a (-2, 0), la escriben en forma positiva.	16	44%
TIPO2: Estudiantes que hayan a 2 como el valor de la distancia, sin asignar a los cm como unidad de medida, la escriben en forma positiva.	4	11%
TIPO 3: Estudiantes que hayan el valor de la distancia, entre los puntos (C, P) como -2, que tienen como coordenadas a (-2,0), y la escriben en forma negativa.	14	39%
TIPO 4: Estudiantes que no respondieron.	2	6%
TOTAL	36	100%

Tabla 24. Tipologías de las respuestas a la pregunta 5b.

c. $d(6,0)$

TIPO DE RESPUESTA	F.R	F.A
TIPO 1: Estudiantes que hayan a 6 como el valor de la distancia, entre los puntos (B, P), que tiene como coordenada a (6,0).	18	50%
TIPO2: Estudiantes que hayan a 6 como el valor de la distancia, sin asignar a los cm como unidad de medida, que tiene como coordenada a (6,0).	16	44%
TIPO 3: Estudiantes que no respondieron.	2	6%
TOTAL	36	100%

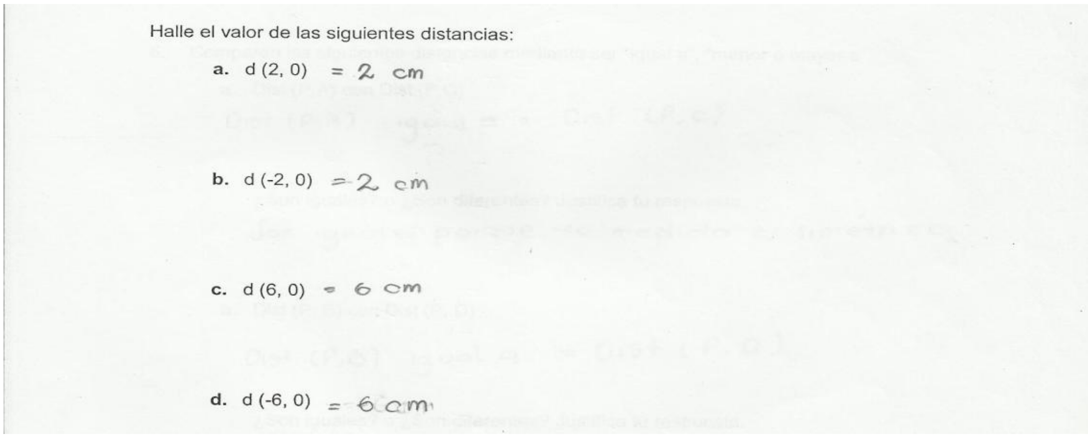
Tabla 25. Tipologías de las respuestas a la pregunta 5c.

d. $d(-6,0)$

TIPO DE RESPUESTA	F.R	F.A
TIPO 1: Estudiantes que hayan a 6 como el valor de la distancia, entre los puntos (D, P), que tiene como coordenadas a (-6,0), y la escriben en forma positiva.	16	44%
TIPO2: Estudiantes que hayan a 6 como el valor de la distancia, sin asignar a los cm como unidad de medida, que tiene como coordenadas a (-6,0), y la escriben de forma positiva.	4	11%
TIPO 3: Estudiantes que hayan a -6 como el valor de la distancia, entre los puntos (D, P), que tienen como coordenadas a (-6,0), y la escriben en forma negativa.	2	6%
TIPO 4: Estudiantes que hayan a -6 como el valor de la distancia, sin asignar a los cm como unidad de medida, que tiene como coordenadas a (-6,0), y la escriben en forma negativa.	12	33%
TIPO 5: Estudiantes que no respondieron.	2	6%
TOTAL	36	100%

Tabla 26. Tipologías de las respuestas a la pregunta 5d.

En este conjunto de respuestas de los apartados a, b, c y d de la pregunta 5, se puede observar que cuando la distancia corresponde a puntos que van de 0 a un valor positivo como en la pregunta a y c, el 94% de los estudiantes lo hacen correctamente, sin embargo cuando deben calcular la distancia de 0 a un punto con coordenada negativa preguntas b y d, el 55% de los estudiantes lo hacen correctamente, pero se observa que el 39% responden que la distancia es negativa. Lo anterior parece evidenciar que en la interpretación que hacen, solo observan la posición en la que se encuentran los números, es decir, los estudiantes describen solo la magnitud aludiendo que la distancia depende del signo que acompaña la coordenada.



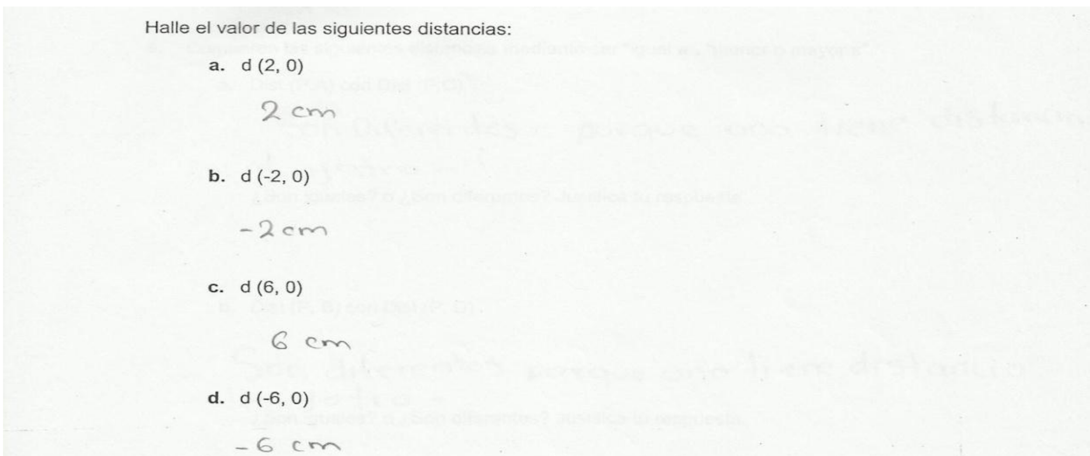
Halle el valor de las siguientes distancias:

a. d (2, 0) = 2 cm

b. d (-2, 0) = 2 cm

c. d (6, 0) = 6 cm

d. d (-6, 0) = 6 cm



Halle el valor de las siguientes distancias:

a. d (2, 0)

2 cm

b. d (-2, 0)

-2 cm

c. d (6, 0)

6 cm

d. d (-6, 0)

-6 cm

Teniendo en cuenta lo anterior, cabe resaltar que los estudiantes describen la información que la recta presenta, para esto, los estudiantes no solo necesitan observar la recta sino abstraerla característica que se les está presentando, que la distancia debe ser positiva independientemente del valor en que se encuentre la coordenada, es decir, no puede ser negativa porque la distancia da cuenta de la cantidad de magnitud(lo que separa un número de otro), por tanto se debe tomar conciencia que esto no tiene que ver con la posición o la dirección ya que al variar la magnitud (sea positiva o negativa), la distancia siempre va a ser positiva.Aspecto identificado por Cid et al., (2002) donde habla que:

> La existencia de magnitudes vectoriales y relativas permitió utilizar los números con signo para expresar cantidades de magnitud unidireccionales (en las que los signos expresan uno u otro sentido dentro de la misma dirección) y relativas (en las que el signo indica si la cantidad de magnitud es mayor o menor que la cantidad de magnitud tomada como origen).

e.	¿Cómo son los valores de las distancias, cuyas coordenadas son números opuestos? Justifica tu respuesta

TIPO DE RESPUESTA	F.R	F.A
TIPO1: Estudiantes que aluden que las distancias son iguales, cuando corresponden a coordenadas de números opuestos porque están a la misma distancia aunque en posiciones contrarias.	26	73%
TIPO 2: Estudiantes que aluden que las distancias son iguales, cuando corresponden a coordenadas de números opuestos, porque cada punto es simétrico.	6	17%
TIPO 3: Respuestas sin categoría.	4	11%
TOTAL	36	100%

Tabla 27. Tipologías de las respuestas a la pregunta 5e.

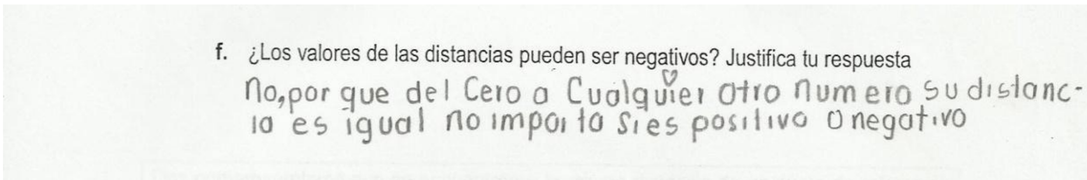
f.	¿Los valores de las distancias pueden ser negativos? Justifica tu respuesta.

TIPO DE RESPUESTA	F.R	F.A
TIPO 1: Estudiantes que justifican que los valores de las distancias no pueden ser negativas, porque del cero a cualquier otro número su distancia es igual, sin importar si es positivo o negativo y dan ejemplos: (no se dice voy a retroceder -3cuadras sino, voy a retroceder 3 cuadras).	12	33%
TIPO 2: Estudiantes que justifican que los valores de las distancias no pueden ser negativos, porque la distancia no se puede contar como los números.	4	11%
TIPO 4: Estudiantes que justifican que los valores de las distancias sí pueden ser negativos porque a la izquierda del cero los valores son negativos y son los opuestos.	12	34%
TIPO 6: Respuestas sin justificación.	4	11%
TIPO 7: Respuestas sin categoría.	4	11%
TOTAL	36	100%

Tabla 28. Tipologías de las respuestas a la pregunta 5f.

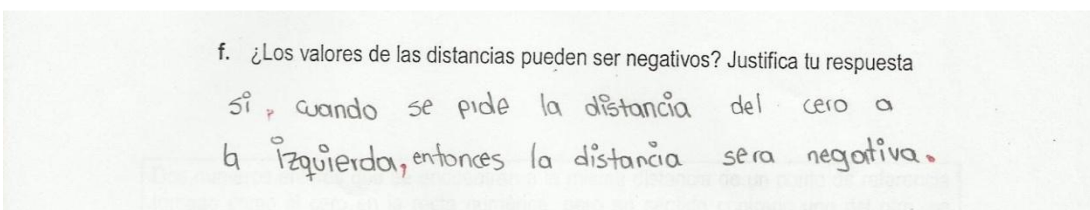
La mayoría de los estudiantes 32 de 36, identifican que las distancias entre números opuestos son iguales, y los argumentos son de dos clases: en el primero dicen que *"están a la misma distancia"*, por lo cual se podría decir que ellos reconocen una característica común de los números opuestos importante para la construcción del valor absoluto como distancia, en el segundo justifican *"que son simétricos*", lo cual reafirma que los números opuestos son coordenadas de puntos simétricos en la recta.

También se observan otro tipo de argumentos de los estudiantes (16 de 36), donde determinan que para los valores negativos las distancias no pueden ser negativas, ya que *"del cero a cualquier otro número su distancia es igual, sin importar si es* *positivo o negativo"*. Cabe resaltar que esta conclusión de los estudiantes es correcta por lo expuesto en el apartado anterior, donde los estudiantes deben identificar una cantidad de magnitud sin importar si esta varía o no, por lo cual su distancia siempre será positiva.


f. ¿Los valores de las distancias pueden ser negativos? Justifica tu respuesta

No, por que del Cero a Cualquier Otro numero su distanc-ia es igual no importa Si es positivo O negativo

Sin embargo, en el apartado f cuando se pregunta si los valores de las distancias pueden ser negativas, 12 de 36 estudiantes en sus respuestas se basan en el signo del número, expresando que *"los valores de las distancias sí pueden ser negativos, porque a la izquierda del cero los valores son negativos"*, coherente con el apartado b y d, estos estudiantes muestran una dificultad al no reconocer a la distancia como la cantidad de magnitud que separa a esto, sino que asocian el valor de la distancia al valor del número. Tal respuesta parece indicar que los estudiantes no se apoyan en lo que han logrado interpretar anteriormente, es decir, no abstraen la característica indicada de los valores de las distancias en los números opuestos.


f. ¿Los valores de las distancias pueden ser negativos? Justifica tu respuesta

sí, cuando se pide la distancia del cero a la izquierda, entonces la distancia sera negativa.

6. Comparen las siguientes distancias mediante ser “igual a”, “menor o mayor a”.   **a.** $Dist\ (P, A)$ con $Dist\ (P, C)$ ¿Son iguales? o ¿Son diferentes? Justifica tu respuesta.

TIPO DE RESPUESTA	JUSTIFICACIÓN	F.R	F. A
TIPO 1: Estudiantes que comparan las distancias del 0 al 2 y del 0 al -2, y la escriben en forma positiva.	• Son iguales porque tienen la misma distancia. • Son iguales porque la medida de la distancia es simétrica. • Son iguales porque tienen 1 cm de distancia. • Son iguales porque tienen igual número pero diferente signo.	24	67%
TIPO2: Estudiantes que comparan las distancias, justificando que son iguales porque tienen la misma distancia (del 0 al 2 y del 0 al -2), pero al dar los valores del ejemplo ponen la distancia en términos negativos y positivos, es decir la distancia de 0 a 2 = 2 y la distancia de 0 a -2 = -2.		4	11%
TIPO 3: Estudiantes que comparan las distancias, justificando que son diferentes porque tienen diferentes signos.		6	17%
TIPO 4: Respuestas sin categoría.		2	6%
TOTAL		36	100%

Tabla 29. Tipologías de las respuestas a la pregunta 6a.

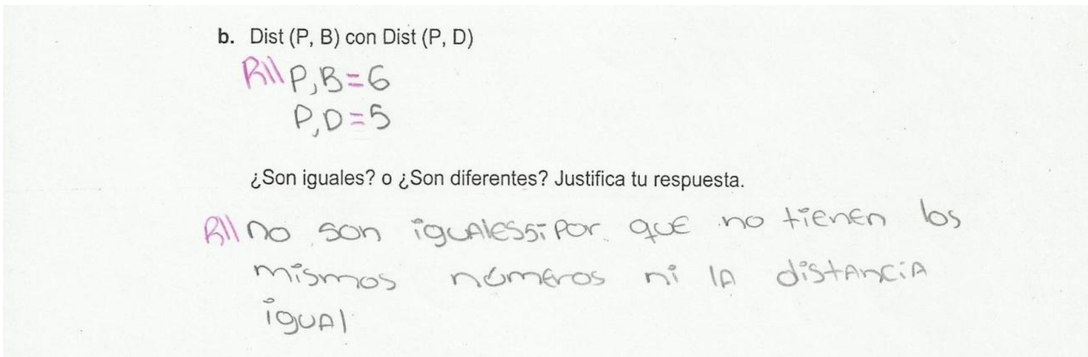
b. $Dist\ (P,B)$ con $Dist\ (P,D)$¿Son iguales? o ¿Son diferentes? Justifica tu respuesta.

TIPO DE RESPUESTA	JUSTIFICACIÓN	F.R	F.A
TIPO 1: Estudiantes que comparan las distancias del 0 al 6 y del 0 al -6, y la escriben en forma positiva.	• Son iguales porque tienen la misma distancia. • Son iguales porque la medida de la distancia es simétrica. • Son iguales porque tienen 6 cm de distancia. • Son iguales porque tienen igual número pero diferente signo	26	73%
TIPO2: Estudiantes que comparan las distancias, justificando que son iguales porque tienen la misma distancia (del 0 al 6 y del 0 al -6), pero al dar los valores del ejemplo ponen la distancia en términos negativos y positivos, (6, -6), es decir la distancia de 0 a 6 = 6 y la distancia de 0 a -6 = -6.		4	11%
TIPO 3: Estudiantes que comparan las distancias, justificando que no son iguales porque no son los mismos números y las distancias son diferentes, una es positiva y otra negativa.		4	11%
TIPO 4: Respuestas sin categoría.		2	6%
TOTAL		36	100%

Tabla 30. Tipologías de las respuestas a la pregunta 6b.

En los resultados obtenidos se puede observar que el 72% de los estudiantes reconocen cuando dos cantidades positivas y negativas *(del 0 al 2 o al 6 y del 0 al -2 o al -6)* son iguales justificando que *"tienen la misma distancia, dando la respuesta en valores positivos"*. En el caso de algunos estudiantes (4 de 36), justifican que las distancias son iguales pero al dar los valores del ejemplo ponen la distancia en términos negativos y positivos, (6, -6), es decir la distancia de 0 a 6 = 6 y la distancia de 0 a -6 = -6, por lo que se deduce que hay una contradicción entre los justificado y el ejemplo dado, pero parece ser un error que cometen al escribir los signos, mas no en la conceptualización de la relación en la distancia como tal.

También se encontraron estudiantes cuyas respuestas difieren de las anteriores al justificar que las distancias no son iguales porque *"no son los mismos números y las* *distancias son diferentes, una es positiva y otra negativa”*, este tipo de respuestas muestran que los estudiantes no alcanzan a establecer relaciones donde se destaca el significado de distancia entre dos magnitudes (positiva y negativa) como se puede observar en el siguiente registro.



Teniendo en cuenta que al utilizar los mismos puntos en el apartado 5, se ratifica que la mayoría de los estudiantes reconocen que los números opuestos tienen distancias iguales, sin embargo a pesar de reincidir en la pregunta con los mismos valores, algunos estudiantes caen en el mismo error diciendo que la distancia es negativa.

c. ¿Cómo son las distancias de los puntos cuyas coordenadas son números opuestos?

TIPO DE RESPUESTA	F.R	F.A
TIPO 1: Estudiantes que escriben las distancias de los puntos cuyas coordenadas de números opuestos, son iguales porque tienen la misma distancia a izquierda y derecha del cero, pero diferente signo.	20	55%
TIPO 2: Respuestas sin categoría.	6	17%
TIPO 3: Estudiantes que no respondieron.	10	28%
TOTAL	36	100%

Tabla 31. Tipologías de las respuestas a la pregunta 6c.

Según las respuestas de la pregunta 6 en el apartado c, se puede decir que, la mayoría (55%) de los estudiantes escriben que las distancias de los puntos cuyas coordenadas de números opuestos son iguales, “*porque tienen la misma distancia a izquierda y derecha del cero”*. Esto se ha corroborado en las respuestas presentes en la pregunta 4 de esta actividad, lo que muestra que los estudiantes han podido consolidar la característica de un número opuesto respecto a su distancia.

c. ¿Cómo son las distancias de los puntos cuyas coordenadas son números opuestos?

iguales, por que no importa si esta Ubicado a la derecho o a la izquierdo del 0 siempre van a tener la Misma distancia

El conjunto de actividades correspondientes a la situación 2 actividad 1, logra afianzar el concepto de números opuestos, por esto se presentan diferentes maneras de aplicarlo, iniciando con la asignación de los signos con dos valores que son iguales pero que tienen diferente posición con respecto a un punto de referencia, también por medio de la recta donde se muestra una característica, y es la simetría de los números opuestos respecto al cero, esto con la intención de que los estudiantes logren reconocer los números opuestos y sus características en diferentes contextos.

ACTIVIDAD 2: EL VALOR ABSOLUTO: CANTIDAD Y DISTANCIA

Según las respuestas de los punto 4 y 5 de la actividad anterior, lo común entre números opuestos diferentes de cero, corresponde al valor del número, es decir, a su valor absoluto. Entonces “Los números opuestos tienen igual valor absoluto y diferente signo”. Además, los números que son coordenadas de puntos simétricos respecto al cero, tienen igual valor absoluto.

1. Realiza las siguientes actividades de manera individual.

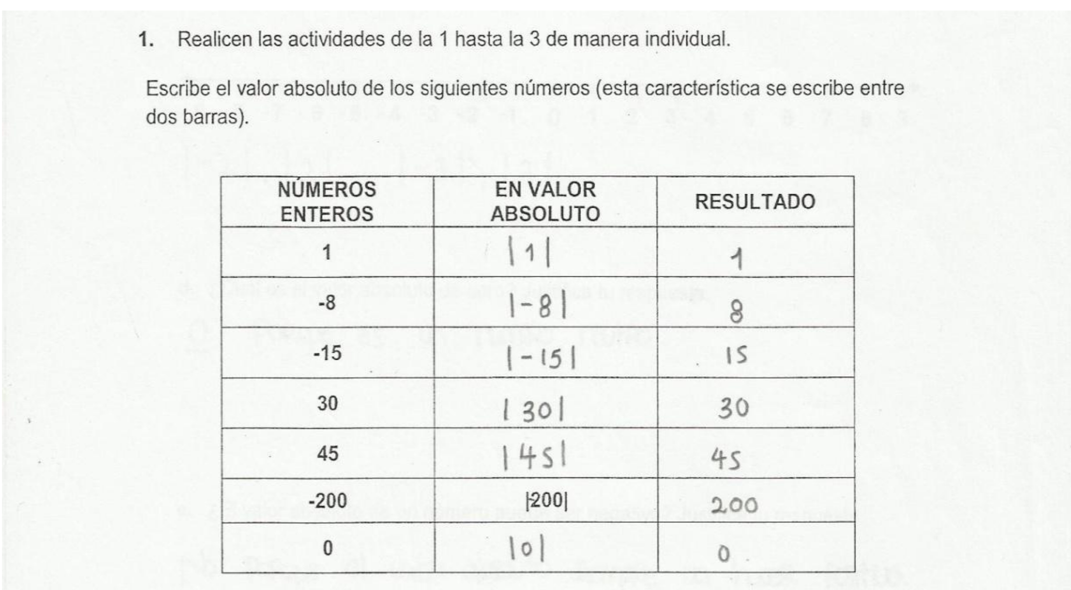
Escribe el valor absoluto de los siguientes números (esta característica se escribe entre dos barras).

NÚMEROS ENTEROS	EN VALOR ABSOLUTO	RESULTADO
1		
-8		
-15		
30		
45		
-200	**|-200|**	
0		

TIPO DE RESPUESTA	F.R	F.A
TIPO 1: Estudiantes que completan la tabla en forma correcta.	19	73%
TIPO 2: Estudiantes que en la segunda columna, no consideran el signo del número, todos los escriben positivos, y el resultado lo escribe correctamente.	4	15%
TIPO 3: Estudiantes que escriben en la segunda columna el valor absoluto del número opuesto y no del solicitado, pero el resultado lo escriben correctamente.	2	8%
TIPO 5: Estudiantes que escriben los números de la tabla, pero no dan su resultado.	1	4%
TOTAL	26	100%

Tabla 32. Tipologías de las respuestas a la pregunta 1.

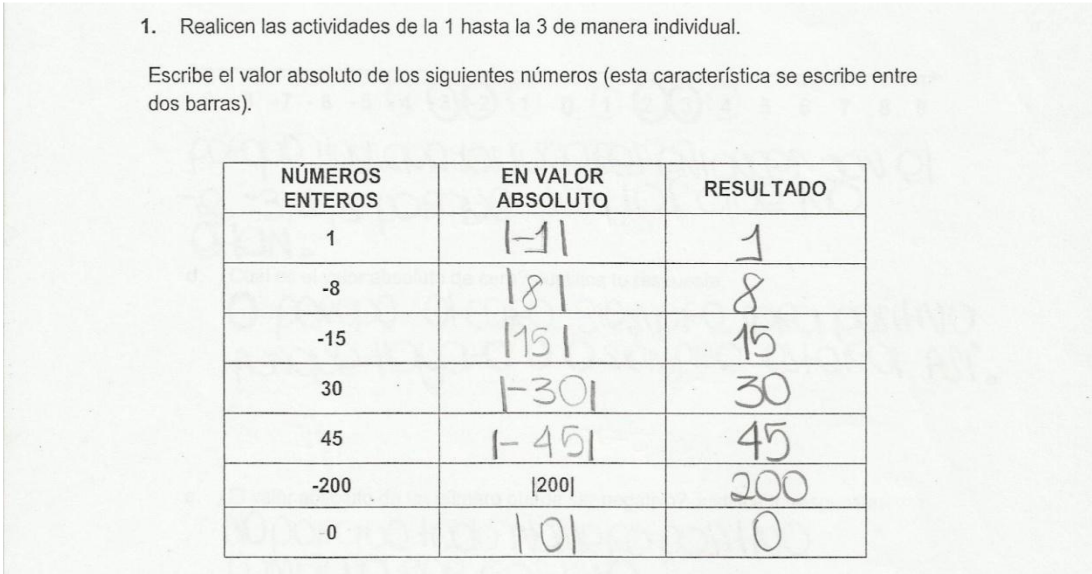
De acuerdo a las respuestas de la pregunta 1, se observa que el 73% de los estudiantes escriben los números en valor absoluto y dan el resultado como se indica en el ejemplo dado en la tabla. Se encuentra también que el 27% de los estudiantes logran poner los números propuestos entre el valor absoluto, pero al hallar su resultado se han encontrado las siguientes dificultades: algunos expresan el valor absoluto de un número negativo como si fuera uno positivo (-8 como $|8|$) y dan el resultado en valores positivos, otros casos escriben el opuesto del número entero que se da (1 como$|-1|$) y dan el resultado en valores positivos. Lo que parece indicar que solo están relacionando estos valores con los números opuestos por ello hacen el cambio de signo en los números de la tabla, a pesar de esto, los estudiantes escriben los resultados en valores positivos.



1. Realicen las actividades de la 1 hasta la 3 de manera individual.

Escribe el valor absoluto de los siguientes números (esta característica se escribe entre dos barras).

NÚMEROS ENTEROS	EN VALOR ABSOLUTO	RESULTADO
1	|1|	1
-8	|-8|	8
-15	|-15|	15
30	|30|	30
45	|45|	45
-200	|200|	200
0	|0|	0



1. Realicen las actividades de la 1 hasta la 3 de manera individual.

Escribe el valor absoluto de los siguientes números (esta característica se escribe entre dos barras).

<table>
<tr><th>NÚMEROS ENTEROS</th><th>EN VALOR ABSOLUTO</th><th>RESULTADO</th></tr>
<tr><td>1</td><td>|-1|</td><td>1</td></tr>
<tr><td>-8</td><td>|8|</td><td>8</td></tr>
<tr><td>-15</td><td>|15|</td><td>15</td></tr>
<tr><td>30</td><td>|-30|</td><td>30</td></tr>
<tr><td>45</td><td>|- 45|</td><td>45</td></tr>
<tr><td>-200</td><td>|200|</td><td>200</td></tr>
<tr><td>0</td><td>|0|</td><td>0</td></tr>
</table>

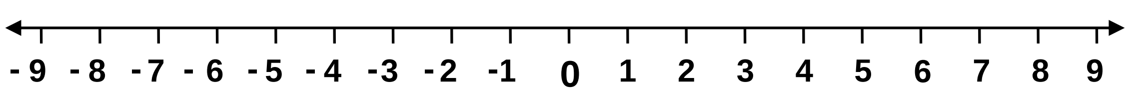
Con los resultados anteriores se puede observar que algunos estudiantes resuelven en forma correcta los números en valor absoluto, según las condiciones dadas, en otros casos los conduce a dar una respuesta fragmentada, sin poder alcanzar la solución correcta, puesto que, esta definición de valor absoluto acarrea dificultades a la hora de su comprensión, al parecer en la escritura no lo hacen correctamente, lo que indica que la asimilación de la escritura del valor absoluto es un proceso, por eso a la mayoría de los estudiantes le resulta difícil su interpretación y por consiguiente su aplicación.

Por lo anterior como dice Cerizola, Pérez & Martínez. (2010).

> La notación algebraica se constituye en otro factor de incomprensión, especialmente en la segunda parte de la definición: "$-x\ si\ x < 0$". El signo menos delante de la x induce a asumir que se trata de un número negativo, produciendo interpretaciones erróneas al evitar la condición $x < 0$. Como consecuencia, resulta difícil aceptar que el valor absoluto de un número real es siempre mayor o igual a cero.

2. Realiza las siguientes actividades:

a. Señala en la recta los lugares que ocupan los enteros, que tienen valor absoluto igual a 3, respecto al cero. Justifica tu respuesta.



TIPO DE RESPUESTA	JUSTIFICACIÓN	F.R	F.A
TIPO 1: Estudiantes que señalan en la recta a 3 y -3 que tienen valor absoluto igual a 3.	• Tienen la misma distancia al cero y el valor absoluto da el mismo resultado. • El valor absoluto de 3 y -3 es igual a 3. • Tienen la misma distancia, son iguales pero los diferencia el signo. • Tienen igual valor. • El valor absoluto siempre es positivo (ej. $\|-3\| = 3$). • El valor absoluto de un negativo pasa a positivo. • El valor absoluto de 3 es 3, y ningún otro número da el mismo resultado.	14	54%
TIPO 2: Respuestas sin categoría.		11	42%
TIPO 3: Estudiantes que no respondieron.		1	4%
TOTAL		26	100%

Tabla 33. Tipologías de las respuestas a la pregunta 2a.

b. El valor absoluto de un número es 12. ¿Cuál es el número, si se sabe que está a la izquierda del cero?

TIPO DE RESPUESTA	F.R	F.A
TIPO 1: Estudiantes que responden que el número que está a la izquierda del cero es el -12, porque su valor absoluto es 12.	6	23%
TIPO2: Estudiantes que responden que el número que está a la izquierda del cero es el -12, porque está a la izquierda del cero y son negativos.	12	46%
TIPO 3: Estudiantes que responden que el número que está a la izquierda del cero es el -12, porque su valor absoluto es -12.	3	12%
TIPO 4: Respuestas sin categoría.	4	15%
TIPO 5: Estudiantes que no respondieron.	1	4%
TOTAL	26	100%

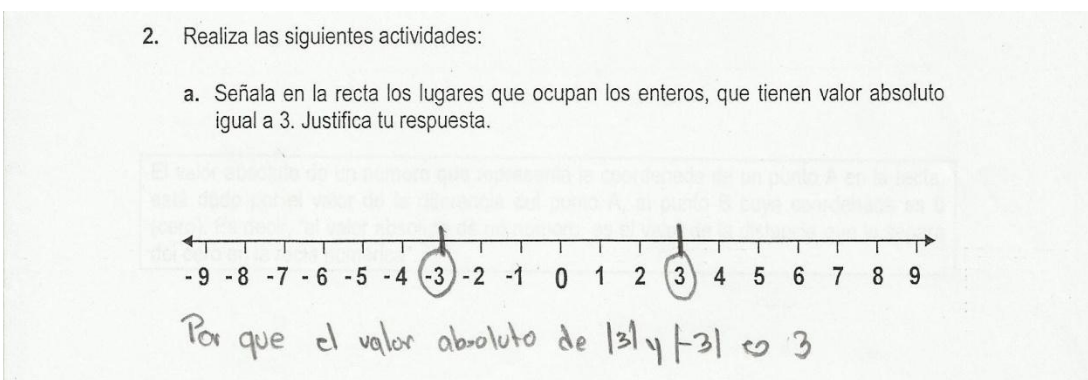
Tabla 34. Tipologías de las respuestas a la pregunta 2b.

b1. ¿Cuál es el número, si se sabe que está a la derecha del cero?

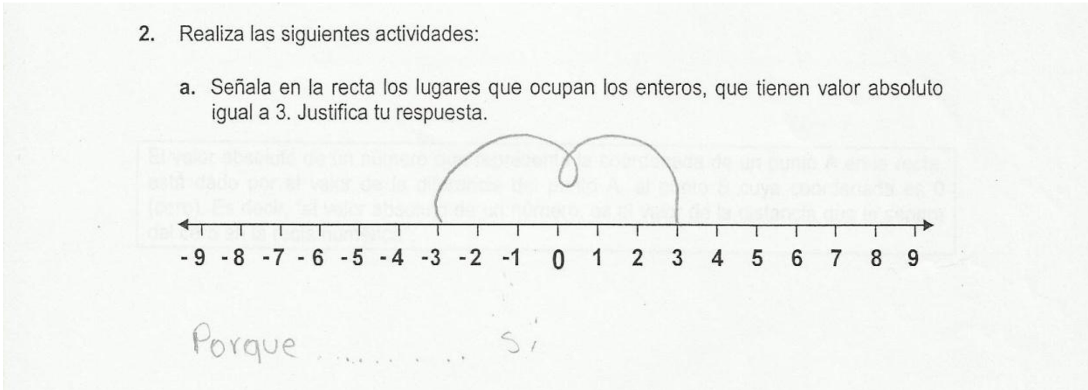
TIPO DE RESPUESTA	F.R	F.A
TIPO 1: Estudiantes que justifican que justifican que el número que está ubicado a la derecha del cero es 12, porque su valor absoluto es 12.	3	12%
TIPO2: Estudiantes que justifican que justifican que el número que está ubicado a la derecha del cero es 12, porque está a la derecha y es positivo.	9	35%
TIPO 3: Estudiantes que justifican que justifican que el número que está ubicado a la derecha del cero es 12, sin justificar su respuesta.	13	50%
TIPO 4: Estudiantes que no respondieron.	1	4%
TOTAL	26	100%

Tabla 35. Tipologías de las respuestas a la pregunta 2b1.

Según las respuestas encontradas en la pregunta2a se muestra que, el 55% de los estudiantes señalan en la recta los lugares que ocupan los enteros que tiene valor absoluto igual a tres,esto se observa en el esquema que realizan los estudiantes donde escriben que la distancia del 3 al origen es 3 unidades, igualmente la distancia del punto -3 al origen es 3, la notación simbólica que utilizan es $|-3|$ o $|3| = 3$, justificando que "*tienen la misma distancia al cero y el valor absoluto da el mismo resultado*". Estodeja ver que los estudiantes reconocen que cualquier número tiene su representación en la recta numérica, donde el valor absoluto de un número representa la distancia del punto al origen.



En esta misma pregunta el 42% de los estudiantes señala en la recta aquellos números cuyo resultado en valor absoluto es tres, pero al dar sus justificaciones no logran aportar un procedimiento o sustentación que según las características de estos números permita observar el análisis que les ayudó llegar a su resultado.

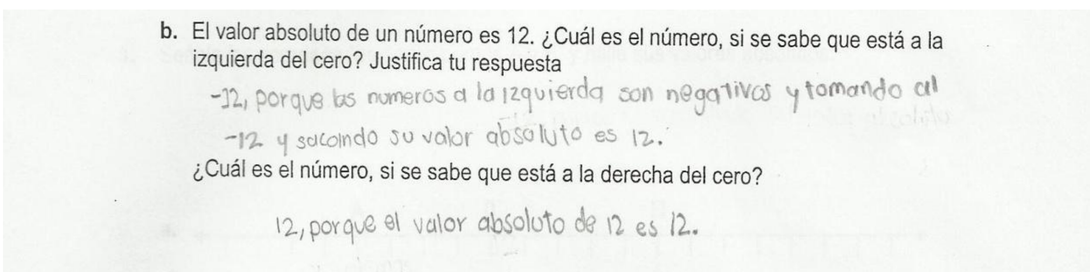


2. Realiza las siguientes actividades:

a. Señala en la recta los lugares que ocupan los enteros, que tienen valor absoluto igual a 3. Justifica tu respuesta.

Porque .... Si

En el caso de la pregunta 2 en el apartado b y b1, en los que se pide al estudiante hallar los números del valor absoluto cuyo resultado da 12, se puede inferir que no se encontró dificultad alguna, puesto que se evidencia que el mayor porcentaje de los estudiantes logran establecer a través de la recta numérica, que los números que cumplen esta propiedad son el 12 y el -12, donde se muestra que el valor absoluto en una cantidad positiva la deja igual y a una cantidad negativa le cambia el signo, justificando que "*son los números que se encuentran a la derecha e izquierda del cero y su valor absoluto es 12"*.Esto se puede evidenciar en algunos de los registros de los estudiantes expuestos a continuación:



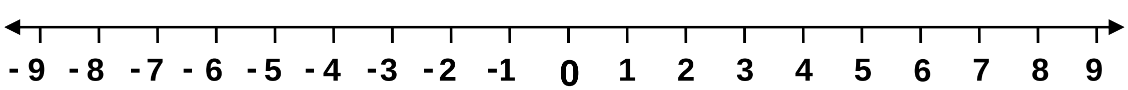
b. El valor absoluto de un número es 12. ¿Cuál es el número, si se sabe que está a la izquierda del cero? Justifica tu respuesta

-12, porque los numeros a la izquierda son negativos y tomando al -12 y sacando su valor absoluto es 12.

¿Cuál es el número, si se sabe que está a la derecha del cero?

12, porque el valor absoluto de 12 es 12.

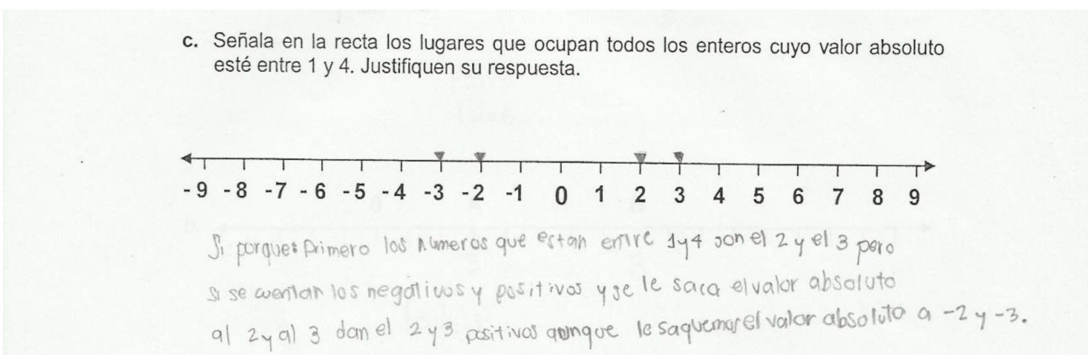
c. Señala en la recta los lugares que ocupan todos los enteros cuyo valor absoluto está entre 1 y 4. Justifiquen su respuesta.



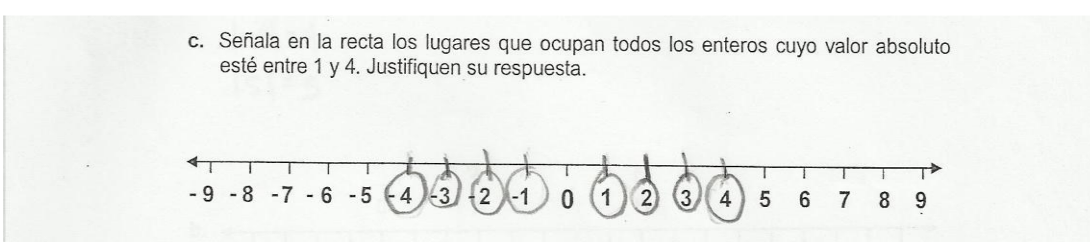
TIPO DE RESPUESTA	F.R	F.A
TIPO1: Estudiantes que señalan en la recta los lugares (-3, -2, 2 y 3), justificando que su valor absoluto es igual está entre 1 y 4.	11	43%
TIPO 2: Estudiantes que señalan en la recta los lugares ((-3, -2, -1, 1, 2 y 3 sin el 0), (-4, -3, -2, -1, 1, 2, 3 y 4, sin el 0) y el (2, 3) sin justificar sus respuestas.	7	27%
TIPO 4: Estudiantes que no respondieron.	7	27%
TIPO 5: Respuestas sin categorías.	1	4%
TOTAL	26	100%

Tabla 36. Tipologías de las respuestas a la pregunta 2c.

Las respuestas dadas por el 43% de los estudiantes, en donde señalan en la recta los lugares (-3, -2, 2 y 3), parece indicar que reconocen que en el valor absoluto de un númerono importa en qué lado de la recta numérica está representado, el resultado del valor absoluto siempre va a ser positivo. Esto se evidencia cuando los estudiantes reconocen que si un número es positivo, es decir está a la derecha del cero, entonces: $|a| = a$ y si está a la izquierda del origen, es decir si el número es negativo, entonces $|-a| = a$ dado que su valor absoluto indica la posición relativa del número respecto a un origen ubicado como el cero. Esto se puede evidenciar en el marco teórico donde se hace referencia a las propiedades del valor absoluto.



Por otro lado, el 27% de los estudiantes parece no identificar el valor absoluto de los números que están entre 1 y 4, señalando todos los números que se encuentran desde el -4 hasta el 4, excluyendo el cero, y no logran dar una justificación respecto a sus respuestas.

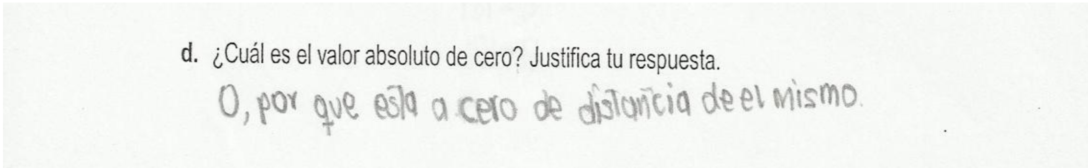


d. ¿Cuál es el valor absoluto de cero? Justifica tu respuesta.

TIPO DE RESPUESTA	JUSTIFICACIÓN	F.R	F.A
TIPO 1: Estudiantes que justifican que el valor absoluto de cero es cero.	• Porque está a cero de distancia del mismo. • Porque el resultado no cambia por el valor absoluto. • Porque el cero siempre es positivo al sacarle el valor absoluto. • Porque el cero no es ni positivo ni negativo. • Porque el cero es un número neutro no tiene valor.	18	70%
TIPO 2: Estudiantes que justifican que el valor absoluto de cero es cero, porque el cero no tiene valor absoluto.		2	8%
TIPO 3: Estudiantes justifican que el valor absoluto de cero es cero, porque el valor absoluto de cero es negativo.		1	4%
TIPO 4: Estudiantes que escriben que el valor absoluto de cero es cero, pero no justifican su respuesta.		4	15%
TIPO 5: Estudiantes que no respondieron.		1	4%
TOTAL		26	100%

Tabla 37. Tipologías de las respuestas a la pregunta 2d.

En las respuestas de la pregunta 2 apartado d, puede observarse que la mayor parte de los estudiantes (96%) responde que el valor absoluto del cero es cero, justificando que *"el resultado no cambia porque el cero siempre es positivo al sacarle el valor absoluto"* y *"porque el cero es un número neutro que no tiene valor"*, pero solo el 4% justifica en términos de distancia escribiendo que es cero "*porque está a cero distancia de el mismo",* lo que parece indicar que los estudiantes reconocen el valor absoluto de un número solo de forma mecánica, tal como se lo presentan los libros de texto o se lo enseñan sus maestros, al decir que el valor absoluto de un número siempre va a ser positivo, sin tener en cuenta sus propiedades y la correspondencia que este tiene con la distancia desde el cero.


d. ¿Cuál es el valor absoluto de cero? Justifica tu respuesta.

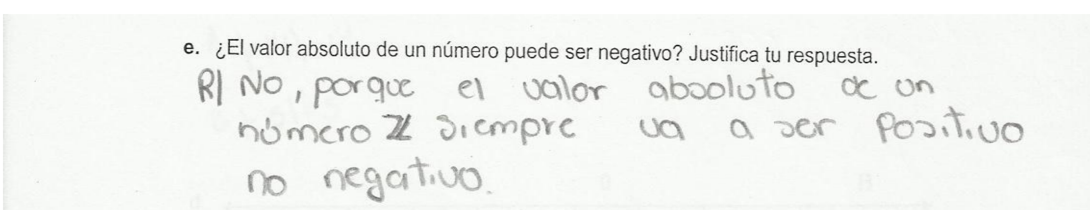
0, por que esta a cero de distancia de el mismo.

e. ¿El valor absoluto de un número puede ser negativo? Justifica tu respuesta.

TIPO DE RESPUESTA	F.R	F.A
TIPO 1: Estudiantes que escriben que el valor absoluto de un número no puede ser negativo, justificando que todo valor absoluto aunque sea positivo o negativo siempre va a dar un número positivo.	22	85%
TIPO2: Estudiantes que escriben que el valor absoluto de un número no puede ser negativo, justificando que el valor absoluto solo toma los números positivos.	1	4%
TIPO 3: Estudiantes que escriben que el valor absoluto de un número no puede ser negativo, sin justificar su respuesta.	2	8%
TIPO 4: Estudiantes que no respondieron.	1	4%
TOTAL	26	100%

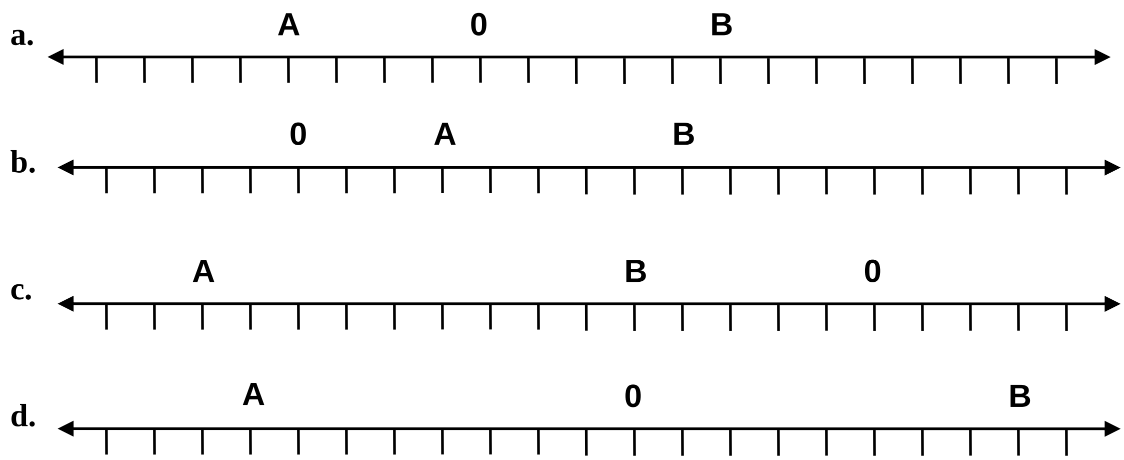
Tabla 38. Tipologías de las respuestas a la pregunta 2e.

De acuerdo a los resultados obtenidos, se muestra que el 97% de los estudiantes utilizan procedimientos que permiten llegar a concluir que el valor absoluto de un número no puede ser negativo, puesto que las distancias no pueden ser negativas, porque cuando se habla de estas distancias se alude a una cantidad referencial en la que se indica que el objeto va en dirección opuesta a su punto de partida, y se utiliza como una convención. Esto se llama cantidad algebraica que indica tanto el valor absoluto, como el valor relativo. Por ejemplo, si se dice que una temperatura es de –5º, es porque hay 5º (valor absoluto); y además, cuando se dice que los 5° son bajo cero es (valor relativo). Además, cabe resaltar que los estudiantes logran superar la dificultad expuesta en el apartado 5f de la actividad 1, donde la mayoría concluyo que si habían distancias negativas en los números ubicados a la izquierda del cero.


e. ¿El valor absoluto de un número puede ser negativo? Justifica tu respuesta.

R/ No, porque el valor absoluto de un número Z siempre va a ser positivo no negativo.

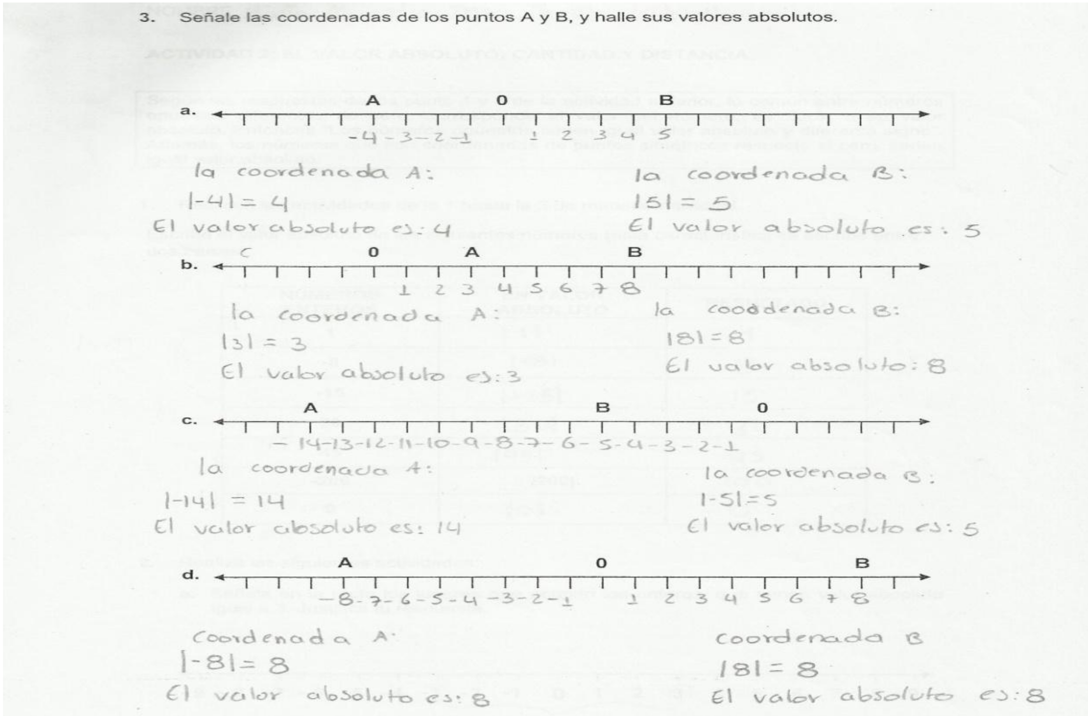
3. a, b, c, d Señale las coordenadas de los puntos A y B, y halle sus valores absolutos.



TIPO DE RESPUESTA	F.R	F.A
TIPO 1: Estudiantes que señalan las coordenadas de los puntos dados, y hallan su valor absoluto.	16	62%
TIPO2: Estudiantes que señalan las coordenadas de los puntos dados, sin hallar su valor absoluto	6	23%
TIPO 3: Estudiantes que señalan las coordenadas de los puntos dados, escribiendo el valor absoluto de un número negativo como si fuera uno positivo (-4 = |4|) y dan el resultado en valores negativos.	3	12%
Tipo 4: Estudiantes que no respondieron.	1	4%
TOTAL	26	100%

Tabla 39. Tipologías de las respuestas a la pregunta 3a, b, c y d.

En esta pregunta se puede observar que la mayoría (25 de 26 estudiantes) escriben las coordenadas en la recta de los puntos A y B que le corresponden, y 19 estudiantes hallan su valor absoluto. Lo que parece indicar que los estudiantes reconocen que el valor absoluto de un número, es el valor de la distancia que le separa del cero en la recta numérica, y por tanto esta es positiva. Sin embargo, 3 de estos estudiantes lo hacen escribiendo el valor absoluto de un número negativo como si fuera uno positivo (-4 = |4|) y da el resultado en valores negativos, lo que muestra que estos estudiantes aún se confunden con la idea de número opuesto, dificultad presente en la pregunta 5b y d de la actividad 1, donde describen solo la magnitud aludiendo que la distancia depende del signo que acompaña la coordenada.



A partir del análisis de los trabajos realizados por los estudiantes en la actividad 2, se puede decir que, la gran mayoría recurrió a la idea de la noción de valor absoluto de un número según la definición: “*es el número sin el signo*”, lo que causa dificultades al no reconocer sus propiedades, sino trabajar de manera sistemática, sin embargo algunos estudiantes utilizan el registro gráfico de la recta para resolver las preguntas. Un 4% ignora la notación de barras del valor absoluto y trabajan entre corchetes, al parecer el 9% de los estudiantes utilizó el método de “ensayo y error”, obteniendo la solución, pero no logran explicar ni describir cual fue su proceso para llegar al resultado.

Al final de la actividad 2, los estudiantes se sintieron atraídos ante una instrucción no rutinaria de este concepto matemático, donde asumieron un papel activo al socializar cada una de las respuestas y llegar a una conclusión significativa para todos. Se rescata también el hecho significativo de que ellos apreciaron la utilidad en el uso de la representación gráfica de la recta para encontrar el valor absoluto de un número.

ACTIVIDAD 3: EL NÚMERO NEGATIVO COMO MENOR QUE CERO Y MENOR QUE CUALQUIER POSITIVO

1. Para realizar la siguiente actividad tengan en cuenta que “Al comparar dos números enteros se debe tener cuidado que cuando los dos son negativos, es mayor el que tiene menor valor absoluto”.

a. Realicen una discusión en clase respecto a la afirmación anterior y escriban sus comentarios al respecto.

TIPO DE RESPUESTA	JUSTIFICACIÓN	F.R	F.A
TIPO 1: Estudiantes que responden que entre dos números negativos es mayor el que tiene menor valor absoluto, justificando que :	• Es mayor porque está más cerca del cero. • Es mayor el que tiene menor distancia al cero. • Es mayor el que está más a la derecha.	13	100%
TOTAL		13	100%

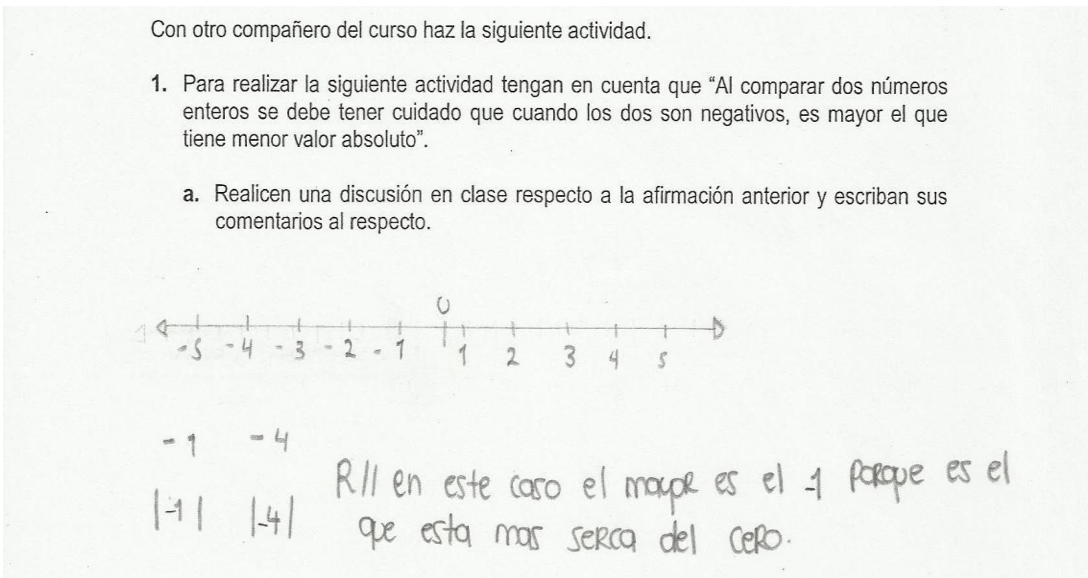
Tabla 40. Tipologías de las respuestas a la pregunta 1a.

b. Indiquen las consecuencias desde lo numérico, si se toma al contrario la afirmación anterior, es decir, entre dos negativos es mayor el que se encuentra más alejado del cero en la recta numérica.

TIPO DE RESPUESTA	F.R	F.A
TIPO 1: Estudiantes que responden que es falso que entre dos números negativos es mayor el que se encuentra más alejado del cero en la recta, porque es mayor el número que se encuentra más cerca del cero en los números negativos.	8	62%
TIPO2: Estudiantes que responden que es verdadero que entre dos números negativos es mayor el que se encuentra más alejado del cero en la recta.	2	15%
TIPO 3: Estudiantes que responden que es falso que entre dos números negativos es mayor el que se encuentra más alejado del cero en la recta, justificando que este cambio crearía confusión.	3	23%
TOTAL	13	100%

Tabla 41. Tipologías de las respuestas a la pregunta 1b.

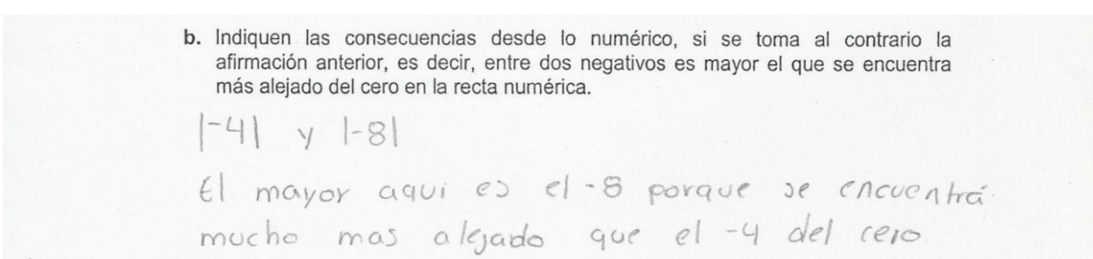
Según los resultados de la pregunta 1 del apartado a y b en la actividad 3, donde se pide que analicen la afirmación “Al comparar dos números enteros se debe tener cuidado que cuando los dos son negativos, es mayor el que tiene menor valor absoluto”, se observa que después de haberse realizado un trabajo a priori del concepto de valor absoluto y luego una socialización de las respuestas dadas, se refleja que el 100% de los estudiantes logran un proceso primario para la apropiación de este concepto, al determinar un criterio que permita aplicar el concepto de valor absoluto en números positivos o negativos, especialmente cuándo se esté comparando dos números enteros negativos,concluyendo que *“entre más lejos de 0, su valor es menor, porque está más a la izquierda en la recta numérica”.* Esta conclusión permite determinar que en los enteros negativos, es mayor el que tiene menor valor absoluto. Lo anterior parece señalar que los estudiantes van logrando un proceso en el cambio conceptual del valor absoluto, al pasar de una “simple” definición a una más formal; es decir, los estudiantes asimilan gradualmente y comprenden que el valor absoluto está caracterizado por unas propiedades y características que lo determinan.


Con otro compañero del curso haz la siguiente actividad.

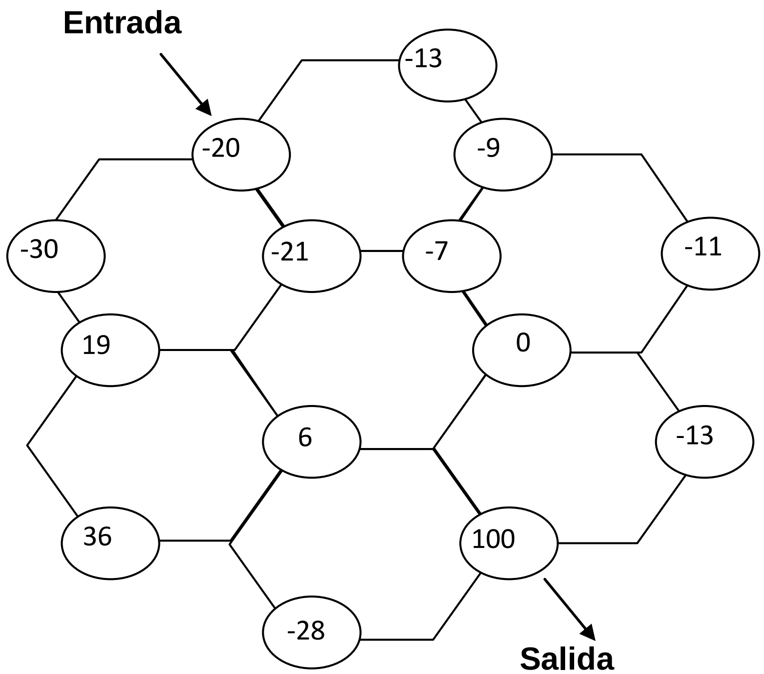
1. Para realizar la siguiente actividad tengan en cuenta que “Al comparar dos números enteros se debe tener cuidado que cuando los dos son negativos, es mayor el que tiene menor valor absoluto”.

   a. Realicen una discusión en clase respecto a la afirmación anterior y escriban sus comentarios al respecto.

Cuando se cambia el criterio, es decir, tomar al contrario la afirmación anterior, se observa que el 15% de los estudiantes presentan dificultades en la conceptualización del valor absoluto entre dos números negativos, justificando que, *“entre dos números negativos es mayor el que se encuentra más alejado del cero en la recta”,* esta respuesta refleja dificultades al parecer sintácticas del contenido relativo al valor absoluto cuando se tiene que comparar dos números negativos.


b. Indiquen las consecuencias desde lo numérico, si se toma al contrario la afirmación anterior, es decir, entre dos negativos es mayor el que se encuentra más alejado del cero en la recta numérica.

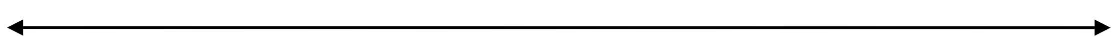
2.	Para salir del laberinto de números enteros, se debe avanzar sobre los lados de los hexágonos pasando siempre por un número entero mayor. Indica la ruta que se debes seguir utilizando un color.



TIPO DE RESPUESTA	F.R	F.A
TIPO 1: Estudiantes que indican la ruta para salir del laberinto de números enteros, avanzando por los lados de los hexágonos y pasando por un número entero mayor.	22	88%
TIPO2: Estudiantes que indican una ruta para salir del laberinto de números enteros, avanzando por los lados de los hexágonos, pero su recorrido lo hacen pasando por los números enteros menores y mayores, Ej. (-20, -21, 6, -28, 100)	2	8%
TIPO 3: Estudiantes que no indican la ruta	1	4%
TOTAL	25	100%

Tabla 42. Tipologías de las respuestas a la pregunta 2.

a.	Ubica en una recta numérica los números enteros por los que avanzaste en el laberinto para encontrar la salida.



TIPO DE RESPUESTA	F.R	F.A
TIPO 1: Estudiantes que ubican en la recta numérica los números enteros por los que avanzaron en el laberinto, según el orden descendente a izquierda y ascendente a derecha.	23	92%
TIPO2: Estudiantes que ubican en la recta numérica los números enteros por los que avanzaron en el laberinto, ubicando en orden ascendente positivo y negativo, sin tener en cuenta el signo del número, y no establecen un punto de referencia para diferenciar valores positivos y negativos.	1	4%
TIPO 3: Estudiantes que no respondieron	1	4%
TOTAL	25	100%

Tabla 43. Tipologías de las respuestas a la pregunta 2a.

b. Establece una relación entre lo realizado en el laberinto y la recta.

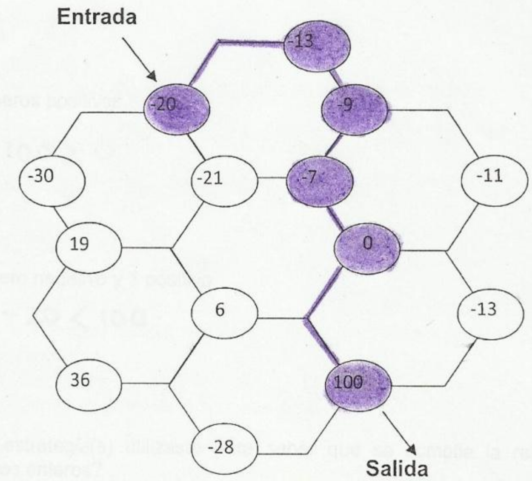
TIPO DE RESPUESTA	F.R	F.A
TIPO 1: Estudiantes que establecen una relación entre el laberinto y la recta, escribiendo que los números están en orden y así distinguir entre los números menores y mayores.	13	52%
TIPO2: Estudiantes que establecen una relación entre el laberinto y la recta, escribiendo que son los mismos números (positivos y negativos), pero se organiza mejor en la recta numérica.	7	28%
TIPO 3: Estudiantes que no respondieron	5	20%
TOTAL	25	100%

Tabla 44. Tipologías de las respuestas a la pregunta 2b.

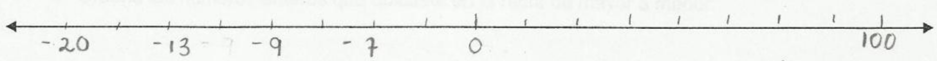
En la pregunta 2 se evidencia que el 88% de los estudiantes logran cruzar el laberinto de forma correcta según las indicaciones dadas, un 92% de los estudiantes en el apartado a, logran ordenar los números de la ruta en el laberinto según el orden descendente a izquierda y ascendente a derecha y colocar estos números en la recta numérica, precisando cuándo un número entero es mayor que otro, y así encontrar alguna relación entre lo realizado en el laberinto y la recta, como por ejemplo: *"los números están en orden* (es decir, el orden por donde deben cruzar el laberinto, es el mismo de la recta) *y así distinguimos entre los números menores y mayores"*. Al parecer los estudiantes reconocen que todos los números por los cuales cruzaron el laberinto, pueden ordenarse en una recta numérica, para determinar si un número es mayor o menor que otro, dependiendo del lugar que ocupa en ella.

2. Realiza las actividades de la 2 hasta la 6, de forma individual:

Para salir del laberinto de números enteros, se debe avanzar sobre los lados de los hexágonos pasando siempre por un número entero mayor. Indica la ruta que se debes seguir utilizando un color.



a. Ubica en una recta numérica los números enteros por los que avanzaste en el laberinto para encontrar la salida.



3. a, b, c. En esta actividad se utilizarán los símbolos $<$ y $>$, para representar la relación “es menor que” y “es mayor que”, respectivamente. Con los números del laberinto, utiliza los símbolos $<$ y $>$, proponiendo ejemplos para comparar:

- 2 números negativos, 2 números positivos, 1 número negativo y 1 positivo.

TIPO DE RESPUESTA	F.R	F.A
TIPO 1: Estudiantes que comparan entre parejas de números enteros (negativos, positivos, negativo y positivo), utilizando los símbolos > y < para establecer la relación "mayor que", "menor que".	16	64%
TIPO 2: Estudiantes que comparan entre parejas de números (negativos, positivos, negativo y positivo), utilizan los símbolos > y <, pero escriben los números a un lado y el símbolo por fuera de ellos, no establecen la relación "mayor que", menor que". Ej.: (-9 -7 >)	3	12%
TIPO 3: Estudiantes que comparan entre parejas de números, utilizan los símbolos > y <, para establecer la relación "mayor que", "menor que", pero en los números positivos indican el número de menor valor como si fuera mayor que el otro Ej.: (100 < 9), y al comparar los números negativos indican los mayores por el valor del número sin tener en cuenta el signo que le antecede, Ej.: (-20 > -13).	3	12%
TIPO 4: Estudiantes que comparan entre parejas de números (positivos, negativos, negativo y positivo), para establecer la relación "mayor que", "menor que", pero al comparar los números negativos indican el mayor por el valor del número sin tener en cuenta el signo que le antecede.	2	8%
TIPO 5: Estudiantes que comparan entre parejas de números (negativos, positivos, negativo y positivo), pero no utilizan los símbolos > y < para establecer las relación "mayor que", "menor que".	1	4%
TOTAL	25	100%

Tabla 45. Tipologías de las respuestas a la pregunta 3a, b, c.

d. ¿Qué estrategia(s) utilizaste para saber que se cumplía la relación entre los números enteros?

TIPO DE RESPUESTA	F.R	F.A
TIPO 1: Estudiantes que escriben una relación entre los números enteros para saber cuál es mayor o menor, justificando que se guían por el signo (+ y -), entre dos números negativos es mayor el que está más cerca del 0, y entre dos positivos es mayor el que está más alejado del cero, y entre uno positivo y negativo es mayor el positivo.	11	44%
TIPO 2: Estudiantes que escriben una relación entre los números enteros para saber cuál es mayor o menor, justificando que es por la distancia o la cantidad del número.	3	12%
TIPO 3: Respuestas sin categoría.	6	24%
TIPO 4: Estudiantes que no respondieron.	5	20%
TOTAL	25	100%

Tabla 46. Tipologías de las respuestas a la pregunta 3d.

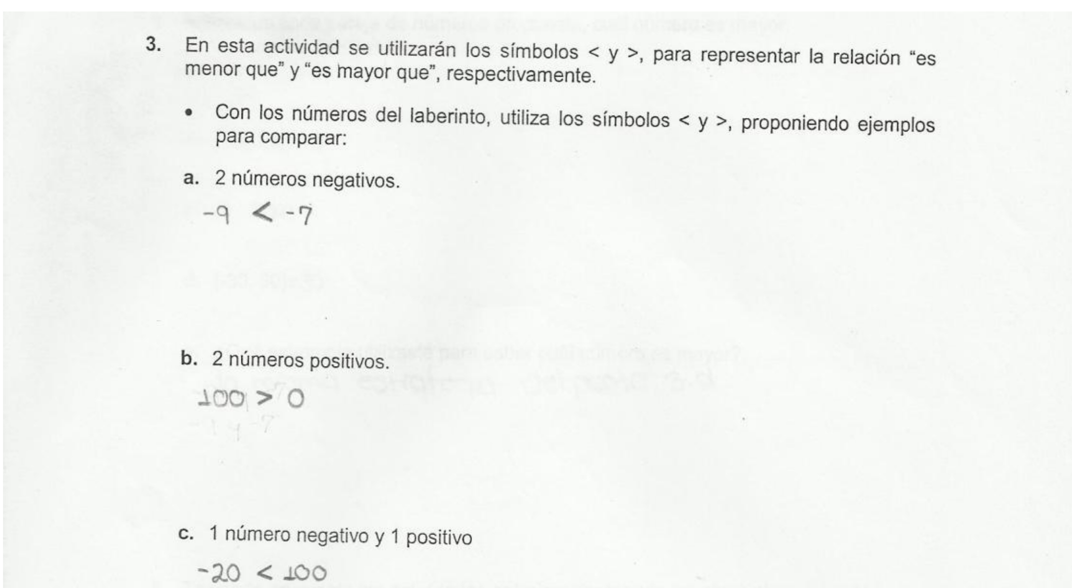
4. Ordena los números enteros que ubicaste en la recta de mayor a menor.

	>		>		>		>		>		>	

TIPO DE RESPUESTA	F.R	F.A
TIPO 1: Estudiantes que ordenan los números enteros de la recta, de mayor a menor.	9	36%
TIPO 2: Estudiantes que ordenan los números enteros de la recta, indicando los mayores por el valor del número, sin tener en cuenta el signo que le antecede.	7	28%
TIPO 3: Estudiantes que escriben los números enteros como los ubicaron en la recta (escanear recta), sin tener en cuenta el orden de mayor a menor. Ej. (Escanear 1 cuadro).	3	12%
TIPO 4: Estudiantes que ordenan números enteros cualesquiera, en orden de mayor a menor.	3	12%
TIPO 5: Estudiantes que ordenan números enteros cualesquiera, en orden de menor a mayor, sin tener en cuenta el símbolo > y <.	1	4%
TIPO 6: Respuestas sin categoría.	2	8%
TOTAL	25	100%

Tabla 47. Tipologías de las respuestas a la pregunta 4.

En la pregunta 3, se refleja que el 64% de los estudiantes en el apartado a, b, c, comparan entre parejas de números, cuándo un número de ellos es mayor, menor o igual al otro, utilizando los símbolos $> \; o \; <$ correspondientes.


3. En esta actividad se utilizarán los símbolos < y >, para representar la relación "es menor que" y "es mayor que", respectivamente.

- Con los números del laberinto, utiliza los símbolos < y >, proponiendo ejemplos para comparar:

a. 2 números negativos.

-9 < -7

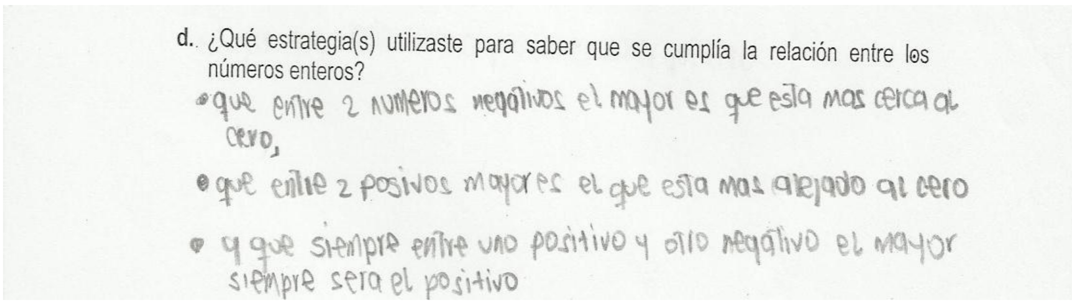
b. 2 números positivos.

100 > 0

c. 1 número negativo y 1 positivo

-20 < 100

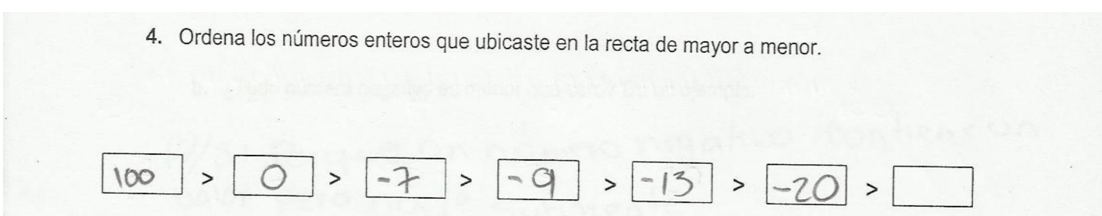
En la pregunta d, el 56% de los estudiantes logra encontrar una definición que le permita argumentar del porque se puede decir que un número es mayor que otro, justificando que *“entre dos números negativos es mayor el que está más cerca del 0, y entre dos positivos es mayor el que está más alejado del cero, y entre uno positivo y negativo es mayor el positivo”*, al tener claro la relación de orden con respecto a los números enteros.



d. ¿Qué estrategia(s) utilizaste para saber que se cumplía la relación entre los números enteros?

- que entre 2 numeros negativos el mayor es que esta mas cerca al cero,
- que entre 2 posivos mayores el que esta mas alejado al cero
- y que siempre entre uno positivo y otro negativo el mayor siempre sera el positivo

En la pregunta 4 se observa que el 36% de los estudiantes, sitúan en los recuadros los números enteros por los que avanzaron en el laberinto para encontrar la salida y los asignan en orden mayor a menor. Pero el 40% no logra ordenar de forma correcta los números de la recta en los recuadros dados, presentándose algunas situaciones como las siguientes: indican los números mayores por el valor del número, sin tener en cuenta el signo que le antecede, o estudiantes que no tienen en cuenta el orden de mayor a menor. Al parecer a los estudiantes se les dificulta situar los números bajo este esquema donde deben ubicar los números dependiendo de la comparación que se asigne.



4. Ordena los números enteros que ubicaste en la recta de mayor a menor.

100 > 0 > -7 > -9 > -13 > -20 > ☐

Al respecto González et al., (1999) dice:

> Da la impresión que la escuela no hace mucho hincapié en la reflexión sobre las nociones de orden, ni en el uso de un vocabulario relativo al orden, ni en su representación por esquemas. Estas nociones aparecen en plan silvestre y separadas de lo que posiblemente han estudiado sobre desigualdades. Las situaciones de comparación, tan frecuentes en la vida social, constituyen la base experimental donde puede surgir el concepto de orden total, pero al parecer la escuela no las afronta no las analiza suficientemente.

En términos generales los resultados indican que la mayoría de los estudiantes pueden establecer relaciones de orden entre los números, al observar que hay números enteros mayores o menores que otros, y reconocer características como: definir que un número es menor, cuando está ubicado a la izquierda de otro en la recta numérica, o sea, está más lejos del 0 y, definir que un número es mayor, cuando se ubica a la derecha de otro y está más alejado del cero.

5. Indique en cada pareja de números propuesta, cuál número es mayor.

a. $(19, 36)$

b. $(-13, -9)$

c. $(0, -21)$

d. $(-30, 30)$

TIPO DE RESPUESTA	F.R	F.A
TIPO 1: Estudiantes que indican entre cada pareja de números, cuál es el mayor.	14	56%
TIPO 2: Estudiantes que indican entre cada pareja de números positivos que el mayor es 19.	2	8%
TIPO 4: Estudiantes que indican entre la pareja de números negativos que el mayor es -13.	2	8%
TIPO 6: Estudiantes que indican entre la pareja de números positivos y negativos que el mayor es -21.	3	12%
TIPO 9: Estudiantes que indican entre la pareja de igual valor numérico pero diferente signo (30, -30), escribiendo que ambos son iguales.	3	12%
TIPO 10: Estudiantes que no respondieron.	1	4%
TOTAL	25	100%

Tabla 48. Tipologías de las respuestas a la pregunta 5a, b, c, d.

e. ¿Qué estrategia utilizaste para saber cuál número es mayor?

TIPO DE RESPUESTA	JUSTIFICACIÓN	F.R	F.A
TIPO 1: Estudiantes que comparan entre las parejas de números para saber cuál de ellos es mayor.	• Los positivos mayores que los negativos, el cero es mayor que los negativos • En los negativos es mayor el que está más cerca del cero, y en los positivos los mayores están más alejados del cero. • Contando su distancia al cero, cuál estaba más cerca y cuál más lejos.	15	60%
TIPO 2: Estudiantes que utilizan la estrategia para saber cuál de los números es mayor, dependiendo de los signos, si el número es positivo o negativo.		6	24%
TIPO 3: Estudiantes que no respondieron.		4	16%
TOTAL		25	100%

Tabla 49. Tipologías de las respuestas a la pregunta 5e.

6. Teniendo en cuenta las actividades anteriores responde las siguientes preguntas y justifica tu respuesta:

a. ¿Todo número positivo es mayor que cero?

TIPO DE RESPUESTA	F.R	F.A
TIPO 1: Estudiantes que afirman que todo número positivo es mayor que cero, porque los números positivos están a la derecha del cero y hay más distancia, son mayores.	20	80%
TIPO 2: Estudiantes que afirman que todo número positivo es mayor que cero, porque el cero no tiene valor absoluto.	2	8%
TIPO 3: Estudiantes que afirman que todo número positivo no es mayor que cero, porque el cero es mayor.	2	8%
TIPO 4: Estudiantes que no respondieron.	1	4%
TOTAL	25	100%

Tabla 50. Tipologías de las respuestas a la pregunta 6a.

b. ¿Todo número negativo es menor que cero? Da un ejemplo

TIPO DE RESPUESTA	F.R	F.A
TIPO 1: Estudiantes que escriben que todo número negativo es menor que cero, justificando que es verdad porque los negativos están a la izquierda del cero y todo número negativo es menor que cero, con algunos ejemplos.	20	80%
TIPO 2: Estudiantes que escriben que es falso porque el cero es menor que todos los demás números.	2	8%
TIPO 3: Estudiantes que escriben que todo número negativo es menor que cero es falso, justificando que el cero es primero que el negativo por eso es mayor.	2	8%
TIPO 4: Estudiantes que no respondieron.	1	4%
TOTAL	25	100%

Tabla 51. Tipologías de las respuestas a la pregunta 6b.

c. ¿Todo número negativo es menor que todo número positivo? Da un ejemplo.

TIPO DE RESPUESTA	F.R	F.A
TIPO 1: Estudiantes que afirman que todo número negativo es menor que todo número positivo, porque los números positivos son mayores que los negativos, los positivos aumentan porque están a la derecha, por su signo, con algunos ejemplos.	17	68%
TIPO 2: Estudiantes que afirman que todo número negativo no es menor que todo número positivo, pero justifican que todo número positivo siempre será mayor que un negativo (se contradicen).	3	12%
TIPO 3: Respuestas sin categoría.	4	16%
TIPO 4: Estudiantes que no respondieron.	1	4%
TOTAL	25	100%

Tabla 52. Tipologías de las respuestas a la pregunta 6c.

d. De dos números negativos, ¿Es mayor el que está más cerca del cero? ¿O el que está más lejos del cero? Da un ejemplo.

TIPO DE RESPUESTA	F.R	F.A
TIPO 1: Estudiantes que afirman que entre dos números negativos es mayor el que está más alejado del cero, justificando con algunos ejemplos.	20	80%
TIPO 2: Estudiantes que afirman que entre dos números negativos es mayor el que está más alejado del cero.	2	8%
TIPO 3: Respuestas sin categoría.	1	4%
TIPO 4: Estudiantes que no respondieron.	2	8%
TOTAL	25	100%

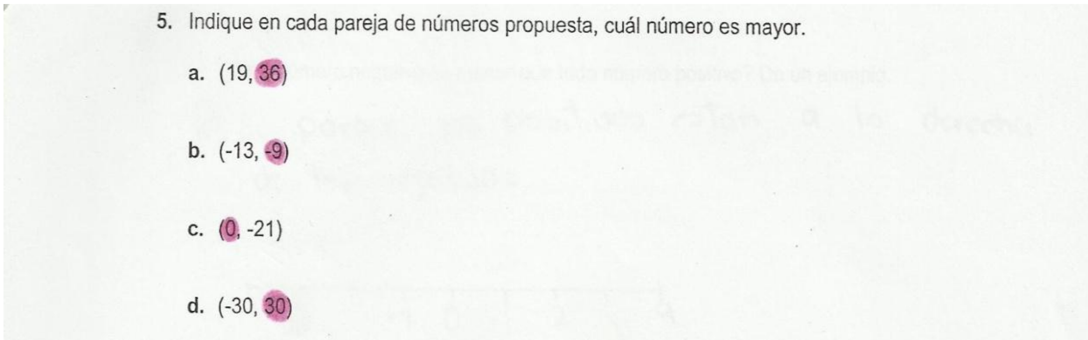
Tabla 53. Tipologías de las respuestas a la pregunta 6d.

e. De dos números positivos, ¿Es mayor el que está más lejos del cero?

TIPO DE RESPUESTA	F.R	F.A
TIPO 1: Estudiantes que afirman que entre dos números positivos es mayor el que está más lejos del cero porque tiene mayor cantidad, con algunos ejemplos.	17	68%
TIPO 2: Estudiantes que afirman que entre dos números positivos es mayor el que está más cerca del cero, porque son iguales.	2	8%
TIPO 3: Respuestas sin categoría.	4	16%
TIPO 4: Estudiantes que no respondieron.	2	8%
TOTAL	25	100%

Tabla 54. Tipologías de las respuestas a la pregunta 6e.

En este grupo de preguntas se resalta que la mayoría de estudiantes en las preguntas 5 y 6 logra reconocer los enunciados reflexionando sobre el orden de los números cuando se hacen comparaciones de menor o mayor entre estos, llegando a expresar y generalizar sus ideas con las siguientes características: “*Todo número entero positivo es mayor que 0, todo número entero positivo es mayor que cualquier número entero negativo, todo número entero negativo es menor que 0, todo número entero negativo es menor que cualquier entero positivo”*, aspecto importante para dar sentido y significado al orden entre números, al reconocer que si se comparan, siempre hay un orden de menor, mayor o igual entre ellos.



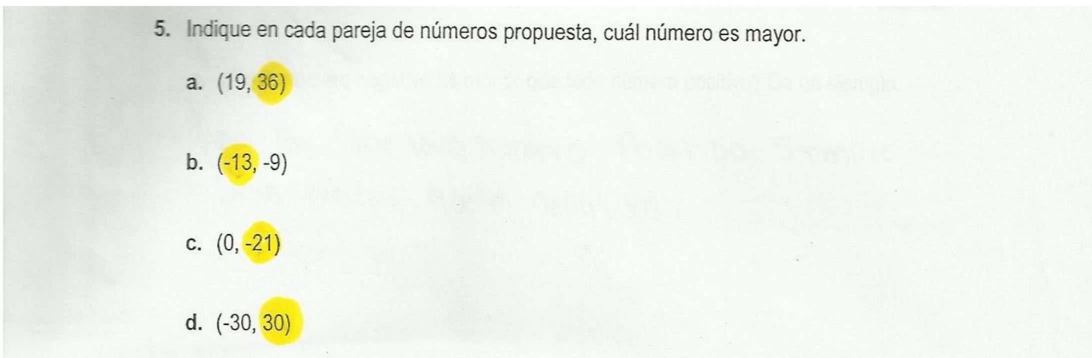
5. Indique en cada pareja de números propuesta, cuál número es mayor.

a. (19, 36)

b. (-13, -9)

c. (0, -21)

d. (-30, 30)



5. Indique en cada pareja de números propuesta, cuál número es mayor.

a. (19, 36)

b. (-13, -9)

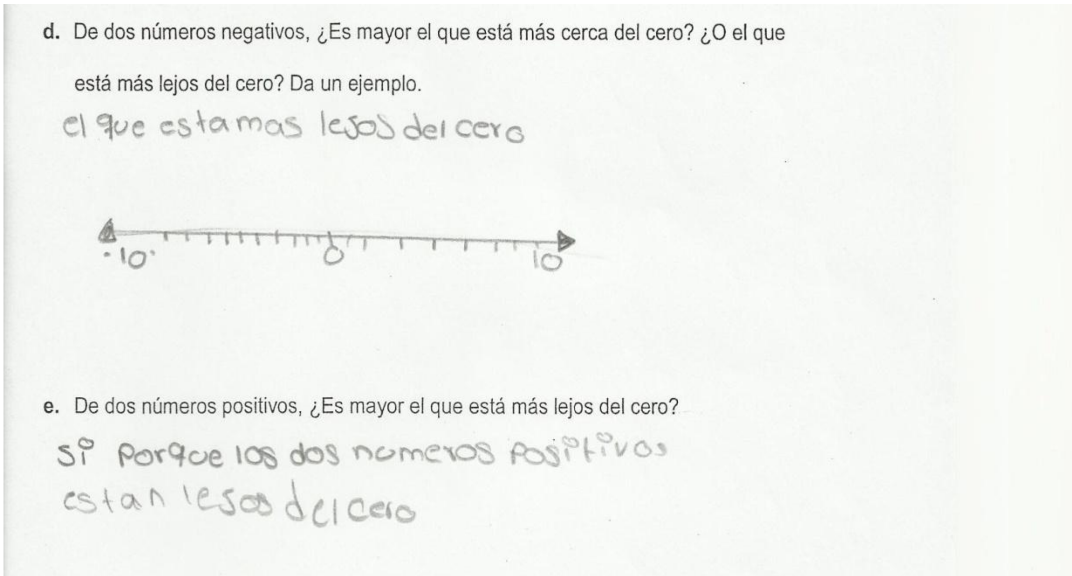
c. (0, -21)

d. (-30, 30)

Aspecto identificado por Cid (2003), donde habla que:

> Se acepta que un número entero negativo es un número natural precedido del signo menos y que dados dos números enteros es mayor el que está situado a la derecha del otro en la recta numérica. Los números negativos representan cantidades que tienen alguna característica, cuya existencia se marca con el signo menos. Debido a esta connotación negativa, la relación de orden en estos números se invierte respecto a los naturales: una cantidad negativa es menor cuanto mayor es su valor absoluto.

Sin embargo, en algunos estudiantes no se tuvo tan buenos resultados al presentarse los enunciados con números negativos, ya que en esta parte se tienen que tomar en cuenta las características específicas de estos números, en cuanto a los signos para poder hacer la comparación, lo cual manifiestan en sus justificaciones, como es el caso de:



d. De dos números negativos, ¿Es mayor el que está más cerca del cero? ¿O el que está más lejos del cero? Da un ejemplo.

el que estamos lejos del cero

-10 0 10

e. De dos números positivos, ¿Es mayor el que está más lejos del cero?

si porque los dos numeros positivos estan lesos del cero

Lo que da cuenta que, cuando se presentan enunciados matemáticos a los estudiantes se les hace más difícil el tratar de interpretar y abstraer la información de lo que se enuncia, por tanto llegar a un razonamiento, es decir, cuando se enfrentan con un ejercicio verbal no saben cómo empezar, ni siquiera leer el enunciado correctamente, y si lo hacen tratan de llegar de inmediato a la respuesta ó quieren los pasos exactos para llegar a ella.

Hasta ahora se han planteado actividades que requerían el uso de los números opuestos, orden en los números enteros y el valor absoluto, aspectos fundamentales en la construcción de contenidos y conceptos de los números enteros, que da paso a una formalización de estos (estructura aditiva), por lo tanto el número entero no es solo la parte algebraica que se presente, sino que es una estructura ordenada ligada a su proceso de construcción.

SITUACIÓN 3: ESTRUCTURA ADITIVA DE ENTEROS

Implementada en el grado: 7-A

Fecha: 2 Diciembre de 2011

Número de estudiantes: 22

Organización del trabajo en el aula		
Actividad 1	**Ejercicios del 1 al 2**	**Parejas**
	Ejercicios 3 y 4	**Individual**
Actividad 2	**Ejercicios del 1 al 2**	**Grupos de 4 estudiantes**
Actividad 3	**Ejercicios del 1 al 3**	**Individual**

ACTIVIDAD 1: LA PISTA DE LAS MEDIDAS

Realiza la actividad con otro compañero

1. **Materiales:** Tablero pista de las medidas, fichas de diferente color, 2 dados (1 dado verde con valores positivos, 1 dado rosado con valores negativos).

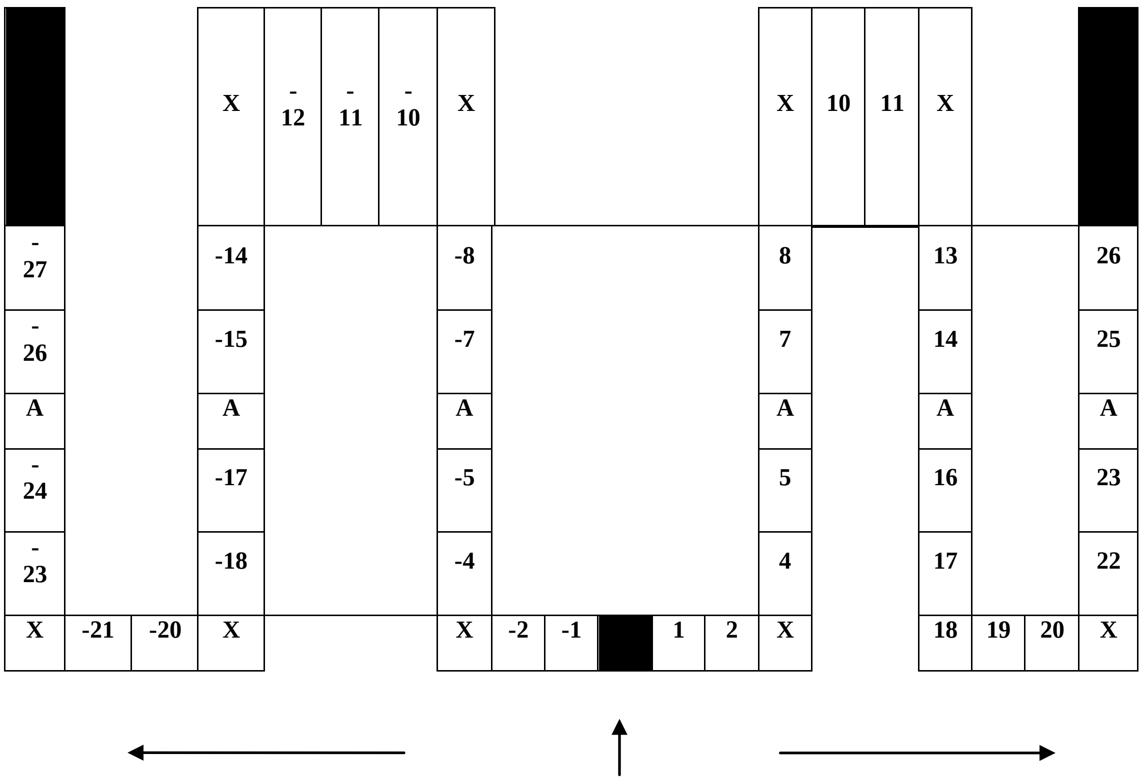
- Utilizando una ficha de diferente color para cada jugador. Se ubican en la salida.
- El grupo decide el orden de los turnos para jugar.

El juego se empieza, lanzando los dos dados (verde y rosado), y para llegar a la meta se procede de la siguiente manera:

- El dado verde marcado con los números $0, 1, 2, 3, 4, 5$ (positivos), hará correr la ficha en la dirección de avance positivo y el dado marcado con los números $0, -1, -2, -3, -4, -5$ (negativos), hará correr la ficha en la dirección de avance negativo en sentido contrario a la flecha del tablero. (Cuando sale el 0, no hay avances).
- Cuando un jugador cae en un espacio marcado con **X,** debe retroceder 4 espacios.

- Cuando un jugador cae en un espacio marcado con **A,** debe adelantar 4 espacios.
- El primer jugador que llegue a cualquiera de las dos metas será el ganador del juego.

META 2 **LA PISTA DE LAS MEDIDAS** **META 1**



Dirección avance negativo **SALIDA** **Dirección avance positivo**

Esta actividad se realizó en parejas, a cada pareja se le entrego una hoja de block en donde estaba impreso el tablero de La pista de las medidas, dos fichas de diferente color, un dado verde con valores positivos y un dado rosado con valores negativos. Cada uno de los integrantes empezó a jugar siguiendo las instrucciones para avanzar en el tablero, algunos estudiantes pidieron explicación sobre las instrucciones que se debían seguir, y realizaron preguntas como:

E: ¿A qué lado se debe llegar primero?

E: ¿Si cae en X que pasa?

E: ¿Cada una tira con un dado o con los dos?

A medida que iba avanzando el juego algunas parejas de estudiantes, manifestaron dificultad al realizar los desplazamientos en el lado izquierdo de la pista, al parecer debido a que al tener que recorrer el valor del dado negativo, en el lado que correspondía a los números negativos, se confundían al no saber si debían hacerlo hacia el lado derecho o el lado izquierdo de donde se encontraba la ficha.

Se dio un tiempo de 15 minutos aproximadamente para que los estudiantes realizaran la actividad, solo una pareja logro llegar a la meta en este tiempo, a las demás parejas se le dio la indicación de que ganaba el integrante que estuviera más cerca de una de las meta.

Con esta actividad se pretendía acercar a los estudiantes al concepto de adición por medio de los desplazamientos sobre la representación en la recta numérica, de tal forma que al avanzar y retroceder en el tablero logren encontrar la posición final, para esto se cuenta con la ayuda de los dados quienes dan la orientación de avanzar o retroceder sobre la recta y las fichas para ir señalando los recorridos, al final se busca que los estudiantes logren hacer los mismos desplazamientos y encontrar su posición final con ayuda del cálculo operativo, profundizando en un aspecto más formal de la suma en la recta numérica, al respecto Cid (2003), dice que:

> Se interpreta la suma y resta de números naturales como movimientos sobre la recta numérica, a derecha o izquierda del primer término, respectivamente. Esta estrategia se extiende a los casos: $-a + b,$ con a, b pertenecientes a N, y $a - b$, con a, b pertenecientes a N y $a < b$, asumiendo, en el primer caso, que el movimiento se inicia a la izquierda de cero y, en el segundo, que hay que atravesar el cero. Las operaciones se extienden a pares de números que tienen el mismo signo. Se asume que hay un sentido positivo: hacia la derecha, y un sentido negativo: hacia la izquierda, y que sumar números positivos significa avanzar en el sentido positivo y sumar negativos avanzar en el sentido negativo.

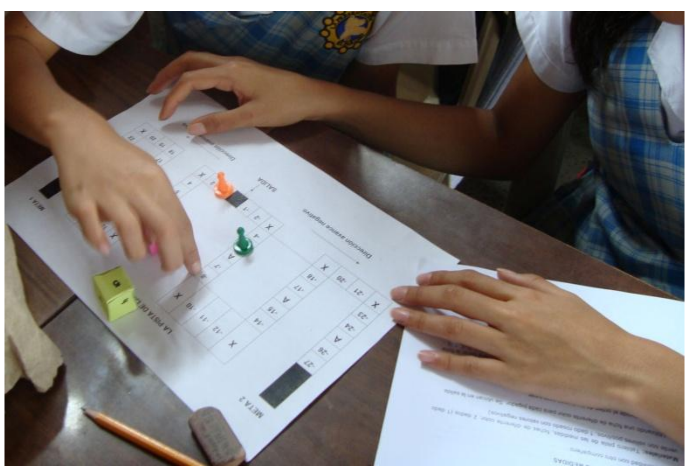


Ilustración 3. Estudiantes jugando La pista de las Medidas

2. A partir de la actividad realizada respondan las siguientes preguntas:

a. Si un jugador en el primer lanzamiento saca $5\ y\ -5$ ¿Dónde queda ubicada la ficha?

TIPO DE RESPUESTA	F.R	F.A
TIPO 1: Estudiantes que responden que la ficha vuelve a quedar en la salida o si empieza desde otro número vuelve a quedar ahí porque son números opuestos.	15	100%
TOTAL	15	100%

Tabla 55. Tipologías de las respuestas a la pregunta 2a.

b. Si un jugador tiene dos dados verdes (positivos) y en el primer lanzamiento saca 4 y 1 ¿Dónde queda ubicada la ficha? ¿Se obtiene un avance o retroceso? ¿Cómo se puede calcular operativamente el avance o retroceso en este caso?

TIPO DE RESPUESTA	F.R	F.A
TIPO 1: Estudiantes que responden que la ficha quedaría ubicada en la casilla 5, se obtiene un avance y escriben la operación 4 + 1 = 5.	11	74%
TIPO 2: Estudiantes que responden que la ficha quedaría ubicada en la casilla 5, obteniendo un avance, pero no responden como se puede calcular operativamente.	3	20%
TIPO 3: Estudiantes que sólo responden que la ficha queda ubicada en la casilla 5.	1	7%
TOTAL	15	100%

Tabla 56. Tipologías de las respuestas a la pregunta 2b.

c. Si un jugador tiene dos dados rosados (negativos) y en el primer lanzamiento saca -4 $y\ -2$ ¿Dónde queda ubicada la ficha? ¿Se obtiene un avance o retroceso? ¿Cómo se puede calcular operativamente el avance o retroceso en este caso?

TIPO DE RESPUESTA	F.R	F.A
TIPO 1: Estudiantes que responden que la ficha quedaría ubicada en la casilla -6, obteniendo un retroceso y la operación se puede calcular por medio de una suma.	4	27%
TIPO 2: Estudiantes que responden que la ficha quedaría ubicada en la casilla -6, obteniendo un retroceso porque los dados son negativos y se puede calcular operativamente por medio de una resta.	4	27%
TIPO 3: Estudiantes que no responden donde queda ubicada la ficha, pero escriben que obtienen un retroceso y se puede calcular la operación sumando y escriben 2 + 4 = 6.	1	7%
TIPO 4: Estudiantes que responden que la ficha quedaría ubicada en la casilla -6, obteniendo un avance y escriben la operación -4 + -2 = 6.	1	7%
TIPO 5: Estudiantes que responden que la ficha quedaría ubicada en la casilla -2, se obtiene un retroceso, y se puede calcular operativamente haciendo una suma pero hacia lo negativo.	3	20%
TIPO 6: Estudiantes que no responden donde queda ubicada la ficha, pero escriben que obtienen un retroceso y se puede calcular por medio de una resta porque los dos números son negativos.	2	13%
TOTAL	15	100%

Tabla 57. Tipologías de las respuestas a la pregunta 2c.

d. Si un jugador tiene dos dados uno verde (positivo) y uno rosado (negativo) y en el primer lanzamiento saca $-9\ y\ 4$ ¿Dónde queda ubicada la ficha? ¿Se obtiene un avance o retroceso? ¿Cómo se puede calcular operativamente el avance o retroceso en este caso?

TIPO DE RESPUESTA	F.R	F.A
TIPO 1: Estudiantes que responden que si en el primer lanzamiento un jugador saca -9 y 4, la ficha quedaría ubicada en la casilla -5, se obtiene un retroceso y se puede calcular operativamente restando los dos números -9 - 4 = -5.	9	60%
TIPO 2: Estudiantes que no responden donde queda ubicada la ficha, pero escriben que se obtiene un retroceso y se puede calcular operativamente restando.	1	7%
TIPO 3: Estudiantes que responden que la ficha quedaría ubicada en la casilla -5, obteniendo un avance y no responden como se puede calcular operativamente.	1	7%
TIPO 4: Sin categoría.	4	27%
TOTAL	15	100%

Tabla 58. Tipologías de las respuestas a la pregunta 2d.

En la pregunta 2 en el apartado a, observamos que el 100% de los estudiantes responden que la ficha quedaría en la misma casilla si un jugador saca 5 y -5 en su primer lanzamiento, porque *"La ficha no se mueve"* y *"porque son números opuestos"*. En el apartados b, la mayoría de los estudiantes (74%), responden que al lanzar dos dados positivos en el primero lanzamiento *"se obtiene un avance, porque los números son positivos*" y se puede calcular operativamente por medio de una suma escribiendo 4 + 1 = 5, al lanzar los dos dados negativos, sólo el 27% de los estudiantes responden de manera correcta justificando que *"se obtiene un retroceso porque los números son negativos*" y escriben que se puede calcular operativamente por medio de una suma pero no escriben la operación, por lo cual se evidencia que la mayoría de estudiantes (73%) presentan dificultades al momento de trabajar con números negativos, por lo que no les es tan familiar realizar "operaciones" en diferentes contextos con estos números, lo que parece indicar que están en un nivel contextual (como lo son los avances y retrocesos en la pista de las medidas),algunos no responden como se puede calcular operativamente, y los que lo hacen manifiestan que se haría por medio de una resta (-2 - -4 = -2) y otros que se haría por medio de una suma (2 + 4 = 6 , -4 + -2 = 6) lo que parece evidenciar que se confunden al hablar de suma en los números negativos, sin embargo, algunos de los estudiantes se encuentran en un nivel más operativo, en el cual simbolizan las acciones.

Hasta aquí se puede apreciar una introducción al concepto de suma desde una perspectiva posicional, es decir, la operación depende de los avances o retrocesos de las fichas. El contexto es un elemento fundamental en la construcción de la idea de suma, sin embargo, la última pregunta de los apartados b, c y d (¿Cómo se puede calcular operativamente el avance o el retroceso en este caso?), presiona a los estudiantes a expresar simbólicamente la operación, por lo cual a la mayoría se les dificulta llegar a simbolizar las acciones, porque aún se encuentran ligados al contexto (juego).

3. ACERQUÉMONOS A LA SUMA A TRAVÉS DE LA RECTA NUMÉRICA

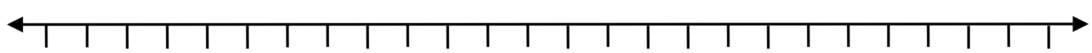
Realiza las actividades del punto 3 y 4 de forma individual.

- Si el número a es positivo y el número b es negativo, para sumarlos gráficamente se le lleva una flecha hacia la derecha con origen en cero (0) y extremo en a. A continuación, se traza otra flecha con origen en a y que recorra hacia la izquierda b unidades. El extremo de esta flecha indica el resultado de la suma.

- Si el número a es negativo y el número b es positivo, para sumarlos gráficamente se le lleva una flecha hacia la izquierda con origen en cero (0) y extremo en a. A continuación, se traza otra flecha con origen en a y que recorra hacia la derecha b unidades. El extremo de esta flecha indica el resultado de la suma.

- Si el número a es negativo y el número b es negativo, para sumarlos gráficamente se le lleva una flecha hacia la izquierda con origen en cero (0) y extremo en a. A continuación, se traza otra flecha con origen en a y que recorra hacia la izquierda b unidades. El extremo de esta flecha indica el resultado de la suma.

En la siguiente recta numérica, utiliza lo dicho anteriormente para resolver los ejercicios:



a. $6\ y\ (-8)$

b. $4\ y\ (-7)$

c. $(-9)\ y\ 2$

d. $(-3)\ y\ 15$

e. $(-3)\ y\ (-5)$

f. $(-1)\ y\ (-8)$

TIPO DE RESPUESTA	F.R	F.A
TIPO 1: Estudiantes que suman gráficamente enteros, siguiendo las indicaciones dadas en los recuadros, en forma correcta.	12	63%
TIPO 2: Estudiantes que suman gráficamente enteros, pero al sumar los números negativos lo hacen en forma incorrecta.	2	11%
TIPO 3: Estudiantes que suman gráficamente enteros, pero al sumar números con signos diferentes lo hacen en forma incorrecta (el número negativo (-3) y el positivo (15) traza las dos flechas con origen en cero (0) y escriben el resultado con signo negativo (-12), y al sumar los números negativos hacen el trazo de las flechas siguiendo las indicaciones pero escriben los resultados con signos positivos).	1	5%
TIPO 4: Sin categoría.	4	21%
TOTAL	19	100%

Tabla 59. Tipologías de las respuestas a la pregunta 3a, b, c, d, e, f.

g. ¿Cómo podrías representar operativamente los ejercicios que realizaste anteriormente?

TIPO DE RESPUESTA	F.R	F.A
TIPO 1: Estudiantes que representan operativamente las sumas realizadas en la recta numérica, de forma acertada.	7	37%
TIPO 2: Estudiantes que representan operativamente las sumas realizadas en la recta numérica, de forma incorrecta.	1	5%
TIPO 3: Estudiantes que responden que representarían los ejercicios operativamente por medio de la recta numérica.	5	26%
TIPO 5: Estudiantes que responden que representarían los ejercicios operativamente por medio de números y diferente signo.	3	16%
TIPO 6: Estudiantes que no responden.	3	16%
TOTAL	19	100%

Tabla 60. Tipologías de las respuestas a la pregunta 3g.

Según los resultados encontrados en la pregunta 3, se puede decir que, el 63% de los estudiantes logra representar gráficamente parejas de números enteros de diferentes signos, siguiendo las indicaciones dadas en los recuadros, y logran relacionar lo que han trabajado en la recta con la suma de enteros, logrando llegar a su resultado.

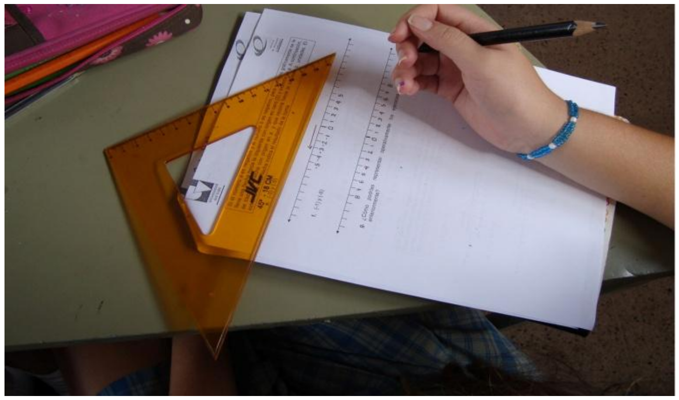
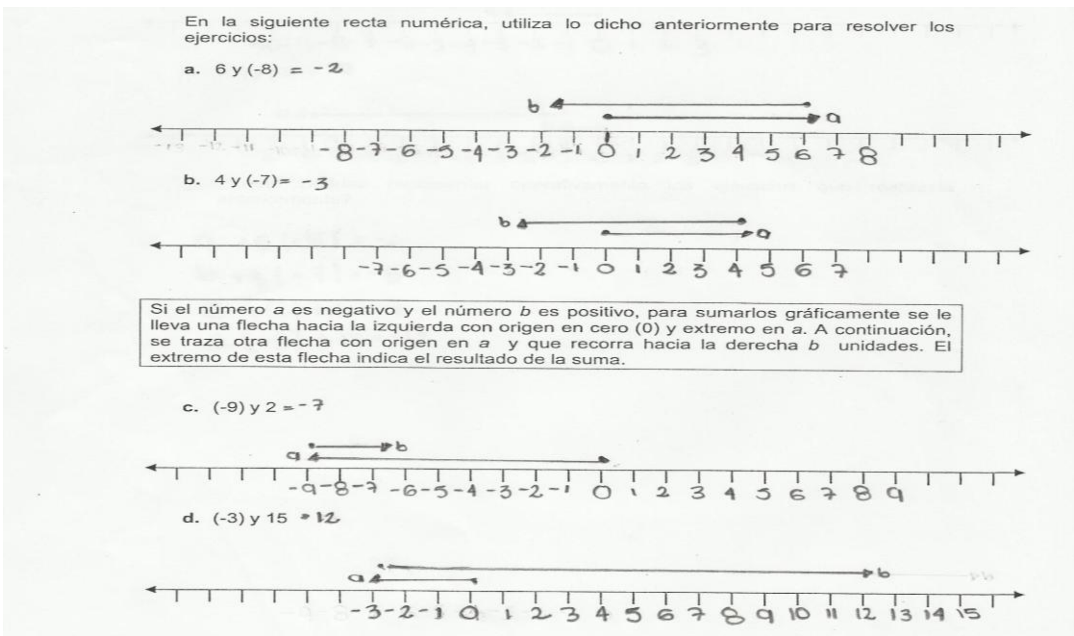


Ilustración 4. Estudiante realizando las rectas. Actividad 3, situación 3.



En la siguiente recta numérica, utiliza lo dicho anteriormente para resolver los ejercicios:

a. 6 y (-8) = -2

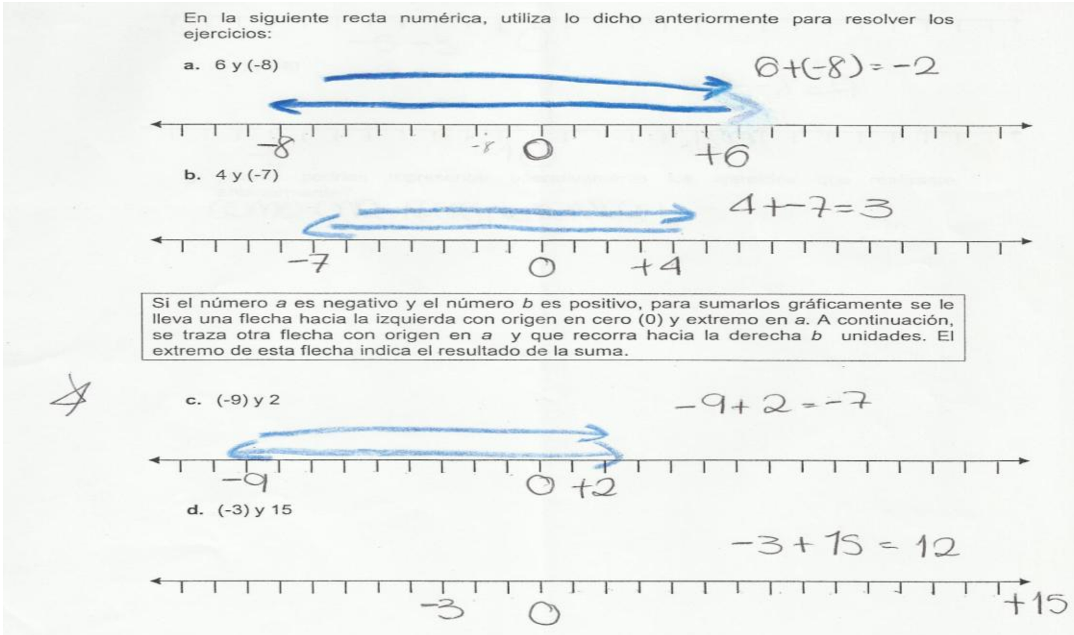
b. 4 y (-7)= -3

Si el número *a* es negativo y el número *b* es positivo, para sumarlos gráficamente se le lleva una flecha hacia la izquierda con origen en cero (0) y extremo en *a*. A continuación, se traza otra flecha con origen en *a* y que recorra hacia la derecha *b* unidades. El extremo de esta flecha indica el resultado de la suma.

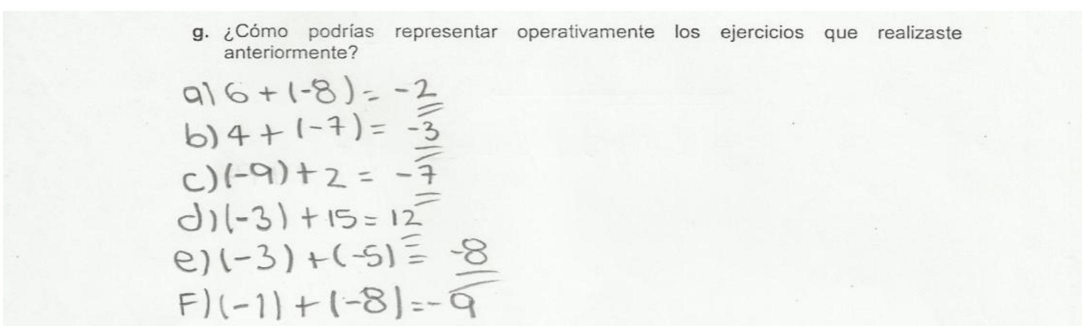
c. (-9) y 2 = -7

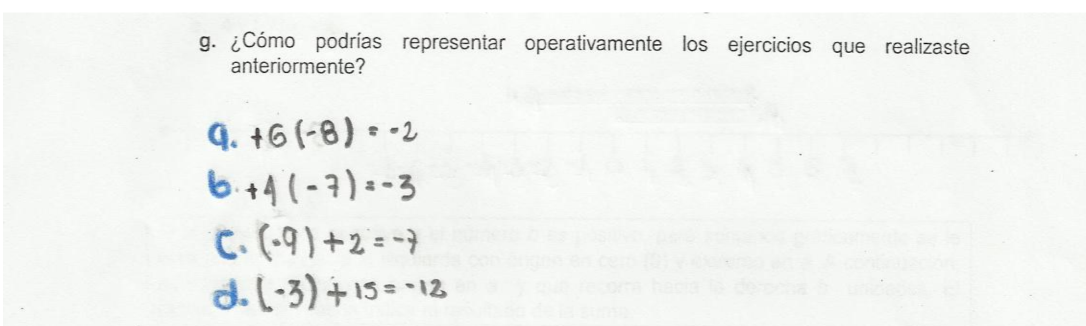
d. (-3) y 15 = 12

En otros casos el 16% de los estudiantes no logran graficar los números pues se les dificulta graficar dos números negativos o negativos y positivos, en ambos casos grafican erróneamente, al sumar el número negativo (-3) y el positivo (15) traza las dos flechas con origen en cero (0) y escriben el resultado con signo negativo (-12), y al sumar los números negativos hacen el trazo de las flechas siguiendo las indicaciones pero escriben los resultados con signos positivos, y otros estudiantes trazan la flecha con origen en cero (0) y extremo en *a* (-3 y -1), luego se ubican en el resultado de la suma como punto de origen y dirigen la flecha *b* unidades hasta el extremo *a*, lo que no les permite reconocer la operación y no logran llegar al resultado correcto.



En el apartado 3g, solo el 37% de los estudiantes logra representar de forma operativa lo realizado en la recta y encontrar su resultado que coincidiera con la forma gráfica, sin embargo, el 5% de los estudiantes al representar operativamente las sumas realizadas en la recta, de números con diferente signo, escriben el signo del número, omitiendo el signo de la operación $(+6\,(-8), +4\,(-7))$, y no escriben operativamente los ejercicios de la suma de dos enteros negativos.





De igual forma, se observa que el resto de los estudiantes lo hacen incorrectamente, al trabajar en la recta numérica sólo de manera contextual, pues los estudiantes no reconocen la interpretación de la operación de adición, al no observar las operaciones como leyes de composición binarias, sino que hacen una distinción entre los dos elementos dados, considerando uno de ellos como el operador aditivo. Esto se refleja en una de las respuestas dada por un estudiante; $(-6 + 8, -3 + 5)$. Donde al parecer solo reconoce la operación que puede dar solución al problema planteado, pero omite los signos que acompañan a los números, lo que ocasiona que su respuesta sea incorrecta.

Con relación a lo anterior se puede apreciar que, los estudiantes en un contexto nuevo como el de la recta numérica también construyen significados de las operaciones en la adición de números negativos, en términos de direccionalidad (vectores), allí es donde toma sentido, la mayoría de los estudiantes lo hacen correctamente, al trabajar la suma en la recta y expresarla en términos operativos, es decir, los estudiantes se les facilita pasar de lo contextual al trabajar con las utilidades y usos de los números, que pasar desde lo abstracto, ya que los estudiantes no están acostumbrados a redactar problemas que se resuelvan con una determinada operación, al trabajarlas formalmente en términos de la adición, por ello, es primordial hacer cambios de lo contextual a lo abstracto y de lo abstracto a lo contextual.

Tomando como referencia a Bruno (1997), donde habla que:

> En la suma se distinguen si las interpretaciones utilizadas son del tipo puntos-flechas o del tipo tres flechas. En ocasiones estas representaciones pueden venir acompañadas de un problema aditivo verbal. Por ello, se distingue el tipo de estructura a la que se asocian. En este caso de dos cambios: $V1 + V2 = Vt$ (variación primera $+$ variación segunda $=$ variación total). Por lo tanto, se observa que en los libros de texto, los estudiantes aprenden a representar sumas en la recta, no tanto las restas y las multiplicaciones, y nunca observaran la representación de una división. Al parecer desfavorece en el sentido de que la recta no es una representación válida para todas las operaciones.

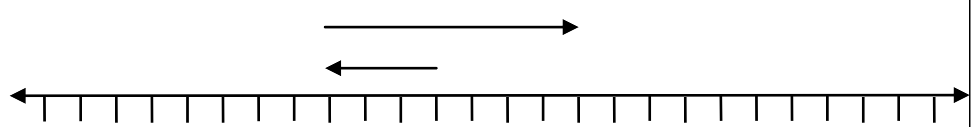
Para sumar dos números enteros positivos, se suman sus valores absolutos y el resultado tiene el mismo signo. Ejemplo: $2 + 5$, entonces:
$|2| + |5| = 2 + 5 = 7$, y como son positivos tengo que $2 + 5 = +7$

Para sumar dos números enteros negativos, se suman sus valores absolutos y el resultado tiene el mismo signo. Ejemplo: $-8 + (-2)$, entonces:
$|-8| + |-2| = 8 + 2 = 10$, y como son negativos tengo que $-8 + (-2) = -10$

Para sumar dos números enteros positivo y negativo (o negativo y positivo), se restan sus valores absolutos (al número mayor se le resta el número menor), y el resultado tiene el signo del número con mayor valor absoluto. Ejemplo: $3 + (-7)$, entonces: $|-7| - |3| = 7 - 3 = 4$, y como el signo del número con mayor valor absoluto es negativo, tengo que $3 + (-7) = -4$

4. Utiliza la representación en la recta para graficar los siguientes casos, regístralos numéricamente con su resultado:

Si se tiene en cuenta el proceso anterior para representar la suma de los números de las coordenadas $-3 \ y \ 7$, se obtiene:



-3 **0** **4**

Lo que se puede representar por: $-3 + 7 = 4$

a. $(-10 + 5) =$
b. $(5 + 9) =$
c. $(-3) + (-7) =$
d. $[(5 + 9)] + (-12) =$
e. $[(-3) + (-7)] + 11 =$

TIPO DE RESPUESTA	F.R	F.A
TIPO 1: Estudiantes que utilizan la representación en la recta para sumar números enteros de forma correcta, realizando las sumas según la indicación dada del valor absoluto.	1	5%
TIPO 2: Estudiantes que utilizan de forma incorrecta, la representación en la recta para sumar números, al no realizar las sumas según la indicación dada del valor absoluto.	13	69%
TIPO 3: Sin categoría.	5	26%
TOTAL	19	100%

Tabla 61. Tipologías de las respuestas a la pregunta 4a, b, c, d, e

.

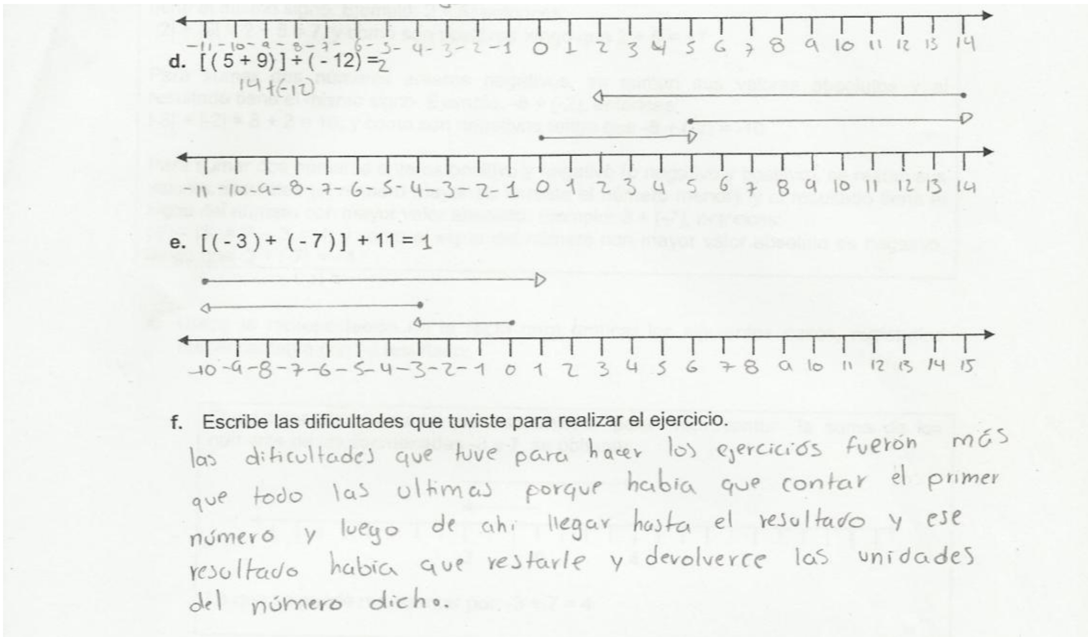
f. Escribe las dificultades que tuviste para realizar el ejercicio.

TIPO DE RESPUESTA	F.R	F.A
TIPO 1: Estudiantes que escribieron que no tuvieron ninguna dificultad.	2	11%
TIPO 2: Estudiantes que escriben que tuvieron dificultades al realizar los ejercicios donde había que realizar la suma de tres números con diferente signo y al realizar la suma de manera gráfica se confundían.	10	53%
TIPO 3: Estudiantes que no respondieron.	7	37%
TOTAL	19	100%

Tabla 62. Tipologías de las respuestas a la pregunta 4f.

En esta pregunta 4, se observa que el 74% de los estudiantes utilizan la representación en la recta para graficar los casos propuestos (sumar números enteros positivos, negativos, negativos más positivos, y sumas de tres números con diferente signo), y los registran numéricamente, pero el 69% de ellos no opera por medio del valor absoluto para llegar al resultado.

En el apartado 4f, el 53% expresa dificultades al realizar la suma de tres números con diferente signo, donde al parecer los estudiantes conocían y resolvían los ejercicios, pero las respuestas reflejan que en su mayoría estaban erróneas, pues al realizar la suma de manera gráfica se les dificultaba. Al analizar la solución de los ejercicios se notó que la dificultad estaba presente en la consigna, ya que esta no da claridad para que los estudiantes realicen la actividad teniendo en cuenta el recuadro donde se explica la suma de números enteros con valor absoluto, a pesar de que se dio una orientación en clase los estudiantes no la tuvieron en cuenta, por ello se encuentran respuestas erróneas, por lo cual hay tendencia en resolver los ejercicio de acuerdo a las actividades anteriores y no toman en cuenta el valor absoluto.



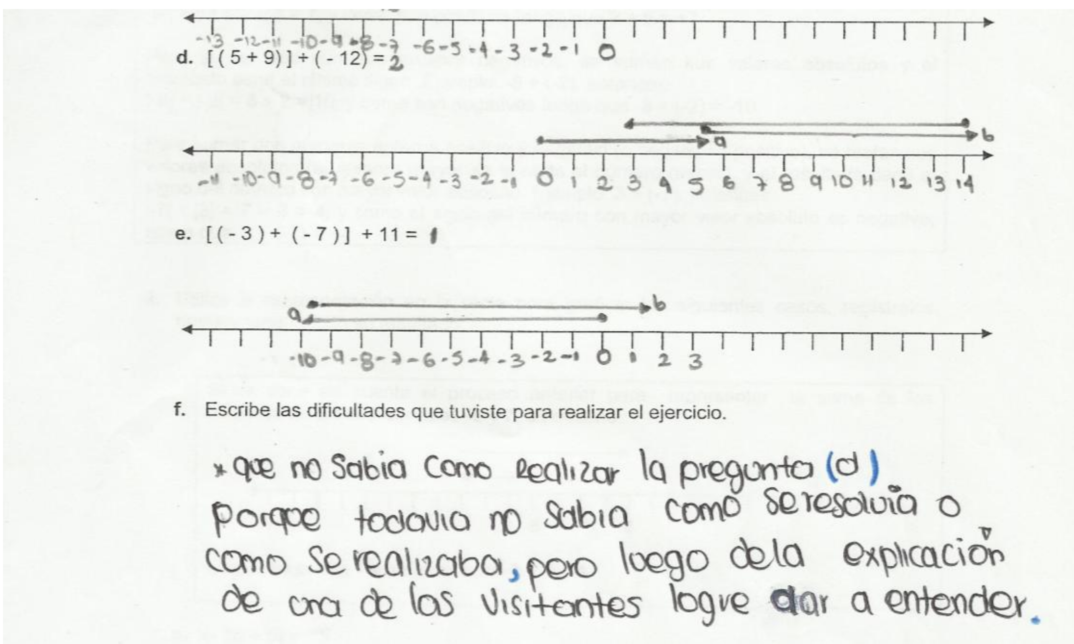
d. [(5 + 9)] + (- 12) = 2

14+(-12)

e. [(- 3) + (- 7)] + 11 = 1

f. Escribe las dificultades que tuviste para realizar el ejercicio.

las dificultades que tuve para hacer los ejercicios fuerón más que todo las ultimas porque habia que contar el primer número y luego de ahi llegar hasta el resultado y ese resultado habia que restarle y devolverce las unidades del número dicho.



d. [(5 + 9)] + (- 12) = 2

e. [(- 3) + (- 7)] + 11 = 1

f. Escribe las dificultades que tuviste para realizar el ejercicio.

* que no Sabia Como Realizar la pregunta (d) porque todavia no Sabia como Se resolvia o como Se realizaba, pero luego de la explicación de una de los Visitantes logre dar a entender.

Al final de esta actividad se llegó al consenso de los resultados y un debate donde los estudiantes lograron reconocer los errores cometidos, esto con el ánimo de consolidar conceptos y esclarecer dudas.

De lo anterior, se puede decir que los estudiantes mostraron mayor éxito cuando resolvían los ejercicios por medio de la recta numérica que a través de las operaciones, en los ejercicios donde ambos números eran positivos o negativos, se observa que fue relativamente sencillo resolver la operación con ellos, pero en los ejercicios que involucran distintos números, las respuestas fueron erróneas en 53% de los casos.

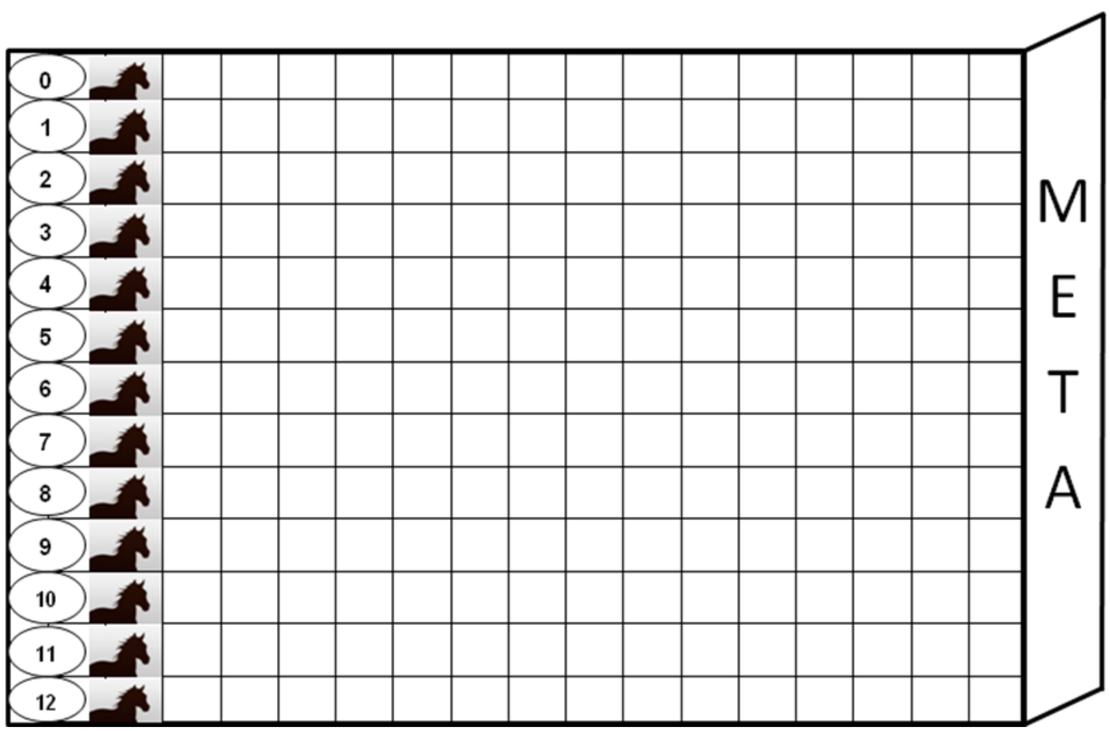
Tomando como referencia a González et al., (1999), donde señala que:

> Respecto a la adición, la mayoría de los alumnos utilizan con éxito el modelo de desplazamientos a lo largo de la recta numérica, existiendo poca diferencia entre los ítems de desplazamientos y los puramente numéricos. Los errores se producen por la utilización de la regla que parece consistir en "ignorar el signo del primer entero y luego sumar los numerales si el segundo es positivo y restarlos si es negativo". Los ítems con respuestas correctas negativas tienden a ser ligeramente más difíciles que los que tienen respuestas positivas.

ACTIVIDAD 2: LA CARRERA DEL VALOR ABSOLUTO

1. En grupos de cuatro compañeros, realicen la siguiente actividad.

Material: Tablero, 4 fichas de diferente color y 2 dados



PASO 1. Cada jugador escoge una ficha de diferente color. (Esta ficha representará su caballo en el juego.)

PASO 2. Cada jugador escoge el número de su caballo del (0 al 12), y ubica su ficha en la tabla sobre el círculo correspondiente al número que escogió. (no pueden haber dos jugadores con el mismo número de caballo).

PASO 3. El grupo escoge el método para elegir quien empieza el juego.

PASO 4. El jugador elegido para empezar el juego lanza un dado, y el siguiente jugador lanza el otro dado, el último jugador en tirar debe hacer una resta (valor del primer dado menos valor del segundo dado), y luego halla el valor absoluto de la cantidad resultante, siendo esta el número de veces que debe avanzar con su ficha. Escriban cada uno de los lanzamientos que permiten realizar el avance de cada jugador, la operación y su resultado.

PASO 5. El jugador que avanzó con su ficha, ahora lanzará el primer dado, y el siguiente jugador repetirá la instrucción dada en el PASO 4. El juego continua repitiendo el PASO 4 y 5 hasta que haya un ganador.

PASO 6. Gana la partida el jugador cuyo caballo llegue primero a la meta.

Esta actividad se realizó en grupos de cuatro estudiantes, a cada grupo se le entrego una hoja de block en donde estaba impreso el tablero de La carrera del valor absoluto y las instrucciones para realizar el juego, cuatro fichas de diferente color y dos dados. Cada uno de los integrantes del grupo para empezar a jugar debía seguir las reglas planteadas en el juego para avanzar en el tablero.

A medida que iba avanzando el juego algunos grupos de estudiantes, manifestaron dificultades al realizar las restas según le indicaban los dados, especialmente en los casos donde el primer número era menor que el segundo, como por ejemplo. $(3 - 6)$, donde el jugador debía restar los valores de los dados, encontrar su resultado y luego hallar el valor absoluto de la cantidad resultante, al no realizar bien la operación no lograba encontrar el verdadero valor el cual le permitirá avanzar en el tablero. Cada jugador creaba su estrategia de juego para acercarse lo más que se pudiera a la meta, y al final se determinaba entre los jugadores el más cerca no otorgándosele de esta manera ser el ganador de la carrera.

El objetivo de este juego era utilizar un elemento auxiliar, lúdico de gran importancia para lograr positivamente algunos de los objetivos de la secuencia, como el poder ampliar y reforzar el concepto de valor absoluto, y acercar implícitamente a los estudiantes a la adición en los números enteros, el cual para su realización requiere de conocimientos matemáticos, que se han adquirido en los diferentes niveles planteados en la secuencia, básicamente conceptos trabajados en la situación 2, así como las operaciones de suma en el conjunto de los números enteros, por medio de un material didáctico para ellos, con ayuda de la tabulación de los datos como resultado de los juegos, donde cada uno registra los datos y realiza las operaciones necesarias para encontrar los resultados, dando justificaciones sobre ellos.

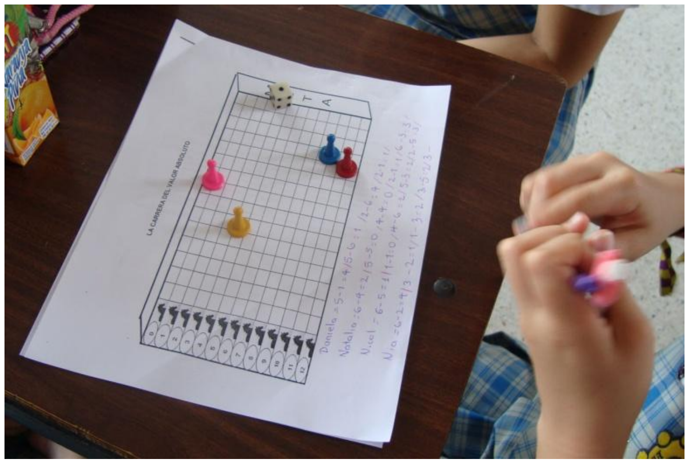


Ilustración 5. Estudiantes jugando La carrera del valor absoluto.

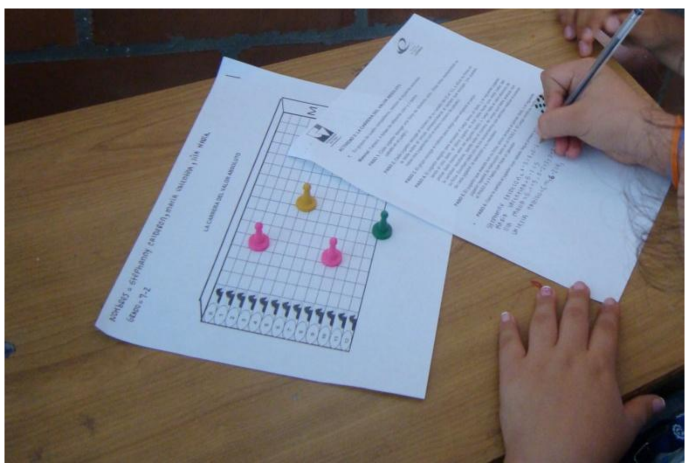


Ilustración 6. Estudiante resolviendo operaciones del juego valor absoluto.

En términos generales se puede decir que la experiencia resultó muy positiva debido a que se logró avanzar en la introducción de la suma por medio del juego y también por el ambiente creado, donde la curiosidad ante la actividad hizo que los estudiantes atendieran con entusiasmo este tipo de trabajo, y se convirtió en una actividad lúdica y entretenida. Los estudiantes respondieron de forma motivada y presentaron interés en el juego propuesto, además de ser una experiencia enriquecedora para todos, hubo un avance en la parte conceptual de la estructura aditiva en los números enteros.

2. JUGUEMOS DOMINÓ

a. Formen grupos de 3 estudiantes y mediante el empleo del dominó jueguen uniendo la operación indicada con su resultado y luego escriban las operaciones que realizaron.

-6+(-8)	-19	-9+(-7)	-8	4+3	-16	-5-13	-9		
15-3	-7	-7-6	8	-15+(-4)	9	-6+12	-10	9+7	-6
5+3	-2	-6+(-9)	-5	-10+2	-14	10+(-1)	-7	1+3	10
-8+1	-13	5+(-3)	11	-9-8	-2	4-9	-15	-6+4	-4
-3-4	-6	-6-4	14	-4-1	16	5+(-9)	-17	10+0	-18
7+4	12	-6+0	-13	8+6	4	-10+(-3)	7	5-14	-5

La actividad se llevó a cabo en grupos de 3 estudiantes, se reparten 9 fichas del dominó a cada estudiante, cada jugador en su turno debe tomar una de sus fichas y ponerla en juego en uno de los dos extremos abiertos, de tal forma que los valores de uno de los lados de la ficha coincida con los valores de la ficha que le corresponda su única respuesta.

Una vez que el jugador ha colocado la ficha en su lugar, su turno termina y pasa al siguiente jugador. Es posible que un jugador se vea imposibilitado a realizar su jugada cuando ninguna de sus fichas coincida con los valores de los extremos del juego. En este caso hay que "prestar" una pieza del juego (si quedan) o "pasar" su turno y pasa al siguiente jugador, hasta que al final solo uno de ellos sea el ganador.
Los estudiantes en su mayoría estaban relacionados con este juego, por ello fue más fácil direccionar la dinámica a seguir, se observó que no presentaron grandes dificultades, pero es importante resaltar que algunos de los estudiantes preguntaron lo siguiente:

E: ¿Cómo empezamos el juego?

E: ¿Con qué ficha empiezo?

E: ¿En la hoja tenemos que colocar las operaciones para saber cuánto da?

Lo que se pretende demostrar en este trabajo es, afianzar en los estudiantes el proceso de aprendizaje de las operaciones matemáticas, en este caso de la adición, conocer estructuras aditivas básicas, mediante un modelo matemático como es el juego del dominó adaptado de manera que los estudiantes puedan hacer operaciones aditivas y encontrar los resultados luego de hacer la operación indicada.

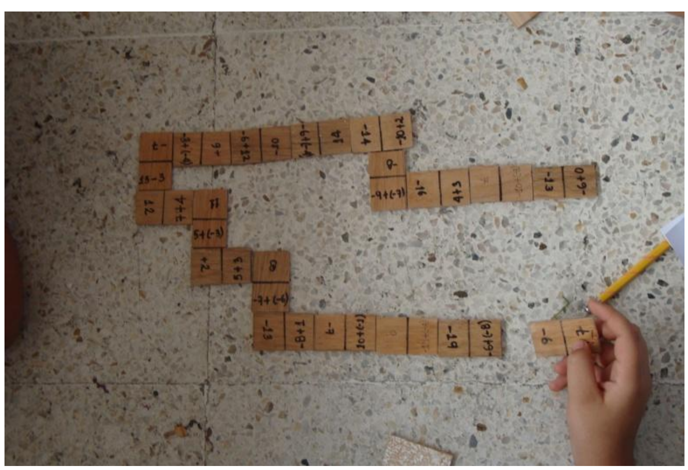


Ilustración 7. Dominó de enteros.

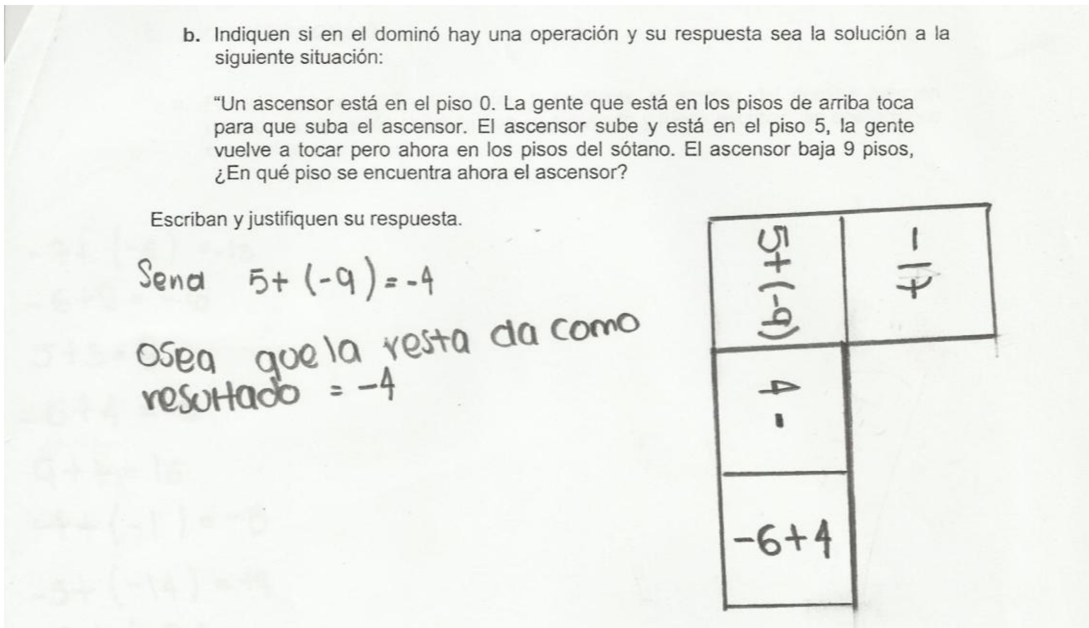
Ilustración 8. Estudiantes jugando dominó de enteros.

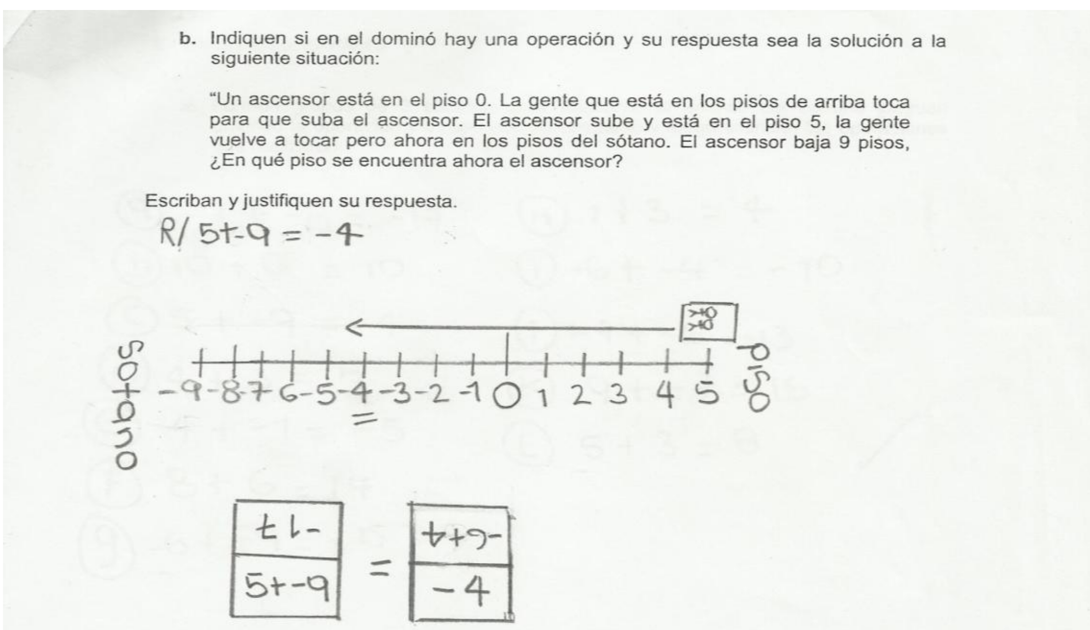
> **b.** Indiquen si en el dominó hay una operación y su respuesta sea la solución a la siguiente situación:
>
> "Un ascensor está en el piso 0. La gente que está en los pisos de arriba toca para que suba el ascensor. El ascensor sube y está en el piso 5, la gente vuelve a tocar pero ahora en los pisos del sótano. El ascensor baja 9 pisos, ¿En qué piso se encuentra ahora el ascensor?"
>
> Escriban y justifiquen su respuesta.

TIPO DE RESPUESTA	F.R	F.A
TIPO 1: Estudiantes que indican que la operación y su respuesta en el dominó que corresponde a la situación que es: $(5 + (-9)\, y\, -4)$. Dibujan las fichas del dominó correspondientes a estas operaciones.	4	57%
TIPO 2: Estudiantes que sólo indican la respuesta correcta a la situación que se les presentó escribiendo que es -4.	2	29%
TIPO 3: Estudiantes que indican que la operación y su respuesta en el dominó, a la situación que se les presentó es: $((-10) + 1\, y\, 8 + 6 = 14)$ escribiendo que la respuesta es 14.	1	14%
TOTAL	7	100%

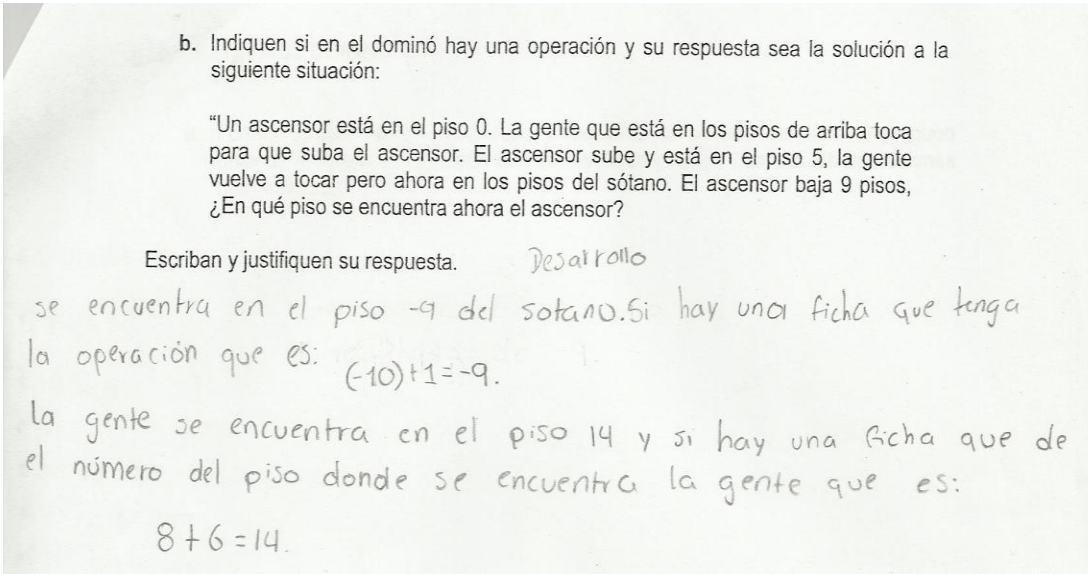
Tabla 63. Tipologías de las respuestas a la pregunta 2b.

En la pregunta 2, apartado b, podemos observar que la mayoría (86%) de los estudiantes logró identificar en el dominó, la operación que correspondía a la situación planteada, por lo tanto se puede decir que, con el desarrollo de las actividades anteriores se logra que los estudiantes puedan resolver problemas matemáticos que involucran sumas en contextos relativos del número entero, lo cual indica que se ha logrado una apropiación por parte de los estudiantes en cuanto a que ya han dejado atrás la parte contextual del número entero y han logrado pasar a un aspecto más formal de este.





De otro lado, un 14% de estudiantes indican que la operación que responde a la situación que se les presentó es: $((-10) + 1\, y\, 8 + 6 = 14)$ escribiendo que la respuesta es 14, lo que indica que ellos no analizan bien el enunciado planteado y se les dificulta simbolizar la operación de forma correcta, y por ende encontrar su resultado.



b. Indiquen si en el dominó hay una operación y su respuesta sea la solución a la siguiente situación:

"Un ascensor está en el piso 0. La gente que está en los pisos de arriba toca para que suba el ascensor. El ascensor sube y está en el piso 5, la gente vuelve a tocar pero ahora en los pisos del sótano. El ascensor baja 9 pisos, ¿En qué piso se encuentra ahora el ascensor?

Escriban y justifiquen su respuesta. Desarrollo

se encuentra en el piso -9 del sotano. Si hay una ficha que tenga la operación que es: (-10)+1=-9.

la gente se encuentra en el piso 14 y si hay una ficha que de el número del piso donde se encuentra la gente que es:

8+6=14.

De lo anterior se puede decir que, cerca del 30% de los estudiantes, dan respuestas acertadas sin presentar las operaciones correspondientes en las fichas. Esto parece indicar que se avanza en el cálculo mental, donde los estudiantes cuando se le presentan operaciones "sencillas", les resulta más cómodo resolverlas de esta manera, así aprenden y aplican distintas estrategias y técnicas de cálculo mental, que si las realizaran con lápiz y papel, explorando diferentes caminos para calcular y operar los números, favoreciendo el afianzamiento de habilidades de concentración y atención. Esto es importante ya que como lo establecen los lineamientos, desarrollar y aplicar estrategias de cálculo mental es una de las competencias básicas que deben adquirir los estudiantes de secundaria, donde ellos comprenden que hay diferentes modos de trabajar con los números y que tan sólo tienen que escoger el más apropiado para cada cálculo.

Se resalta la importancia de plantear situaciones problema, contextualizadas tal como afirma Bruno (1997):

> Los problemas aditivos juegan un papel importante en una enseñanza de los números negativos, ya que través de su resolución puede trabajarse la identificación de la suma y la resta, y pueden utilizarse como medio para llegar a comprender la operatoria, hacer surgir las propiedades y las reglas que rigen a los números negativos. Por otro lado, con los números negativos pueden plantearse problemas con similar estructura que con los números positivos, por lo que los problemas se convierten en otro elemento unificador de la enseñanza numérica.

ACTIVIDAD 3

Realiza esta actividad de manera individual **1.** Una persona buscando una dirección efectúa los siguientes desplazamientos: 8 cuadras hacía el sur, se devuelve 5 cuadras, nuevamente 7 cuadras hacia el sur, se devuelve 2 cuadras y encuentra la dirección. **a.** Realiza un gráfico donde se pueda visualizar los desplazamientos de la persona.

TIPO DE RESPUESTA	F.R	F.A
TIPO 1: Estudiantes que realizan de gráfico un plano cartesiano para visualizar los desplazamientos que realiza la persona.	16	73%
TIPO 2: Estudiantes que realizan de gráfico una recta numérica para visualizar los desplazamientos que realiza la persona.	6	27%
TOTAL	22	100%

Tabla 64. Tipologías de las respuestas a la pregunta 1a.

b. ¿Cuál es el punto de referencia a partir del cual se hacen los desplazamientos? ¿Por qué?

TIPO DE RESPUESTA	F.R	F.A
TIPO 1: Estudiantes que responden que el punto de referencia a partir del cual se hacen los desplazamientos, es el cero (0), justificando que es el punto de referencia u origen donde empieza a hacer el desplazamiento la persona.	12	55%
TIPO 2: Estudiantes que responden que el punto de referencia a partir del cual se hacen los desplazamientos, es el 8 o (-8), justificando que desde ahí empiezan a hacerse los desplazamientos.	4	18%
TIPO 3: Estudiantes que responden que el punto de referencia a partir del cual se hacen los desplazamientos, es la mitad o el centro, justificando que desde ahí se divide el sur y norte.	2	9%
TIPO 4: Estudiantes que responden que el punto de referencia a partir del cual se hacen los desplazamientos, es el 1, justificando que es donde empieza a buscar la dirección.	1	5%
TIPO 5: Estudiantes que responden que el punto de referencia a partir del cual se hacen los desplazamientos, es la persona, justificando que es la que va a hacer el recorrido y también porque pueden escoger cualquier cosa como punto de referencia.	2	9%
TIPO 6: Estudiantes que no respondieron.	1	5%
TOTAL	22	100%

Tabla 65. Tipologías de las respuestas a la pregunta 1b.

c. ¿Qué desplazamientos debe hacer la persona para llegar a la posición inicial, si se encuentra en el último desplazamiento que realizó para encontrar la dirección?

TIPO DE RESPUESTA	F.R	F.A
TIPO 1: Estudiantes que responden que el desplazamiento que debe hacer la persona si se encuentra en el último desplazamiento para llegar a la posición inicial, es de 8 cuadras.	5	23%
TIPO 2: Estudiantes que responden que el desplazamiento que debe hacer la persona si se encuentra en el último desplazamiento para llegar a la posición inicial, es de 7 cuadras hacia el norte.	3	14%
TIPO 3: Estudiantes que responden que el desplazamiento que debe hacer la persona si se encuentra en el último desplazamiento para llegar a la posición inicial, es de 2 cuadras.	6	27%
TIPO 4: Estudiantes que responden que el desplazamiento que debe hacer la persona si se encuentra en el último desplazamiento para llegar a la posición inicial, es devolviéndose para encontrar la dirección.	4	18%
TIPO 5: Sin categoría.	3	14%
TIPO 6: Estudiantes que no respondieron.	1	5%
TOTAL	22	100%

Tabla 66. Tipologías de las respuestas a la pregunta 1c.

d. ¿Para quedar a 2 cuadras de donde partió?

TIPO DE RESPUESTA	F.R	F.A
TIPO 1: Estudiantes que responden que el desplazamiento que debe hacer la persona para quedar a 2 cuadras de donde partió, es retrocediendo -2 cuadras al sur.	8	36%
TIPO 2: Estudiantes que responden que el desplazamiento que debe hacer la persona para quedar a 2 cuadras de donde partió, es avanzando -2 cuadras.	1	5%
TIPO 3: Estudiantes que responden que el desplazamiento que debe hacer la persona para quedar a 2 cuadras de donde partió, es de -3 cuadras.	3	14%
TIPO 4: Estudiantes que responden que el desplazamiento que debe hacer la persona para quedar a 2 cuadras de donde partió, es retrocediendo 6 cuadras al sur.	2	9%
TIPO 5: Estudiantes que responden que el desplazamiento que debe hacer la persona para quedar a 2 cuadras de donde partió, es de 7 cuadras.	3	14%
TIPO 6: Sin categoría.	2	9%
TIPO 7: Estudiantes que no respondieron.	3	14%
TOTAL	22	100%

Tabla 67. Tipologías de las respuestas a la pregunta 1d.

e. ¿Para retroceder 5 cuadras de la posición inicial?

TIPO DE RESPUESTA	F.R	F.A
TIPO 1: Estudiantes que responden que el desplazamiento que debe hacer la persona para retroceder 5 cuadras de la posición inicial, es de 5 cuadras al sur y quedaría ubicada en el -5.	4	18%
TIPO 2: Estudiantes que responden que el desplazamiento que debe hacer la persona para retroceder 5 cuadras de la posición inicial, es de 5 cuadras al norte.	8	36%
TIPO 3: Sin categoría.	6	27%
TIPO 4: Estudiantes que no respondieron.	4	18%
TOTAL	22	100%

Tabla 68. Tipologías de las respuestas a la pregunta 1e.

2. Escribe las estrategias que utilizaste para resolver los problemas.

TIPO DE RESPUESTA	F.R	F.A
TIPO 1: Estudiantes que responden que la estrategia que utilizaron para resolver los problemas, fue por medio de la representación gráfica del plano cartesiano ubicando las coordenadas norte y sur.	8	36%
TIPO 2: Estudiantes que responden que la estrategia que utilizaron para resolver los problemas, fue por medio de la recta, ubicando un punto de referencia (cero) y teniendo en cuenta los signos.	6	27%
TIPO 3: Sin categoría.	4	18%
TIPO 5: Estudiantes que no respondieron.	4	18%
TOTAL	22	100%

Tabla 69. Tipologías de las respuestas a la pregunta 2.

En estos ejercicios el 100% de los estudiantes inicialmente realizan un gráfico como el plano cartesiano o la recta numérica para visualizar los desplazamientos que realiza la persona y resolver el problema, el 55% de los estudiantes en el apartado b, ubican como punto de referencia el cero (0), pero el 41% de los estudiantes contestaron incorrectamente en la pregunta c, debido a que no tomaron en cuenta que el desplazamiento que debe hacer la persona para llegar a la posición inicial, es de 8 cuadras, si se encuentra en el último desplazamiento, por el contrario justificaron que debía hacerse desplazamientos de 7 o 2 cuadras, igualmente se reflejan la mismas dificultades para encontrar los desplazamientos de la persona en las preguntas d y e, donde al parecer no entendieron bien el problema ya que no saben establecer que un desplazamiento hacia el norte es positivo y hacia el sur es negativo representados según el punto de referencia establecido.

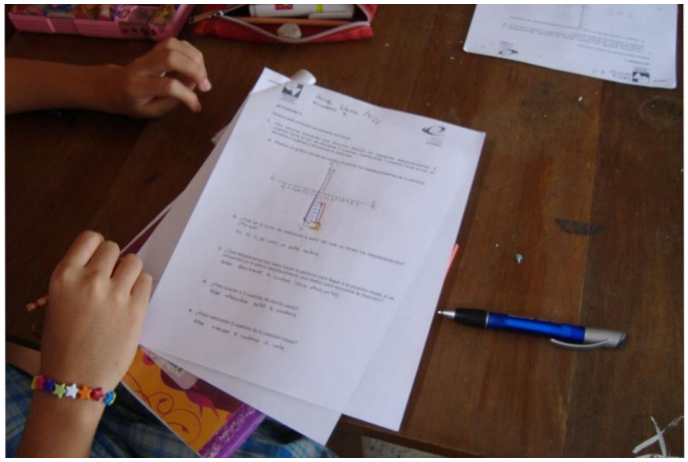


Ilustración 9. Estudiante realizando gráfica de desplazamientos. Situación 3.

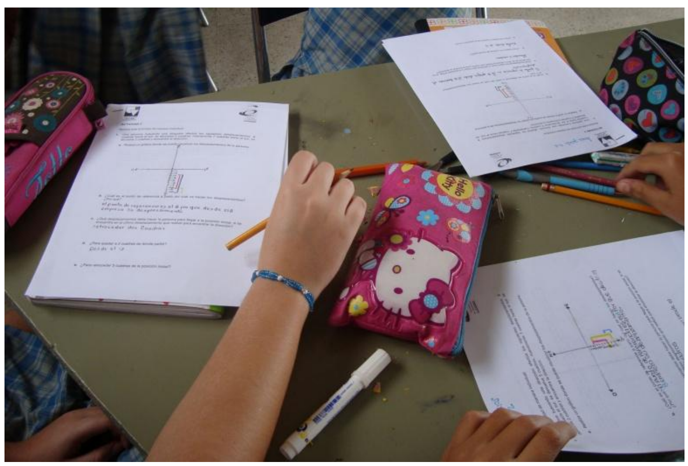
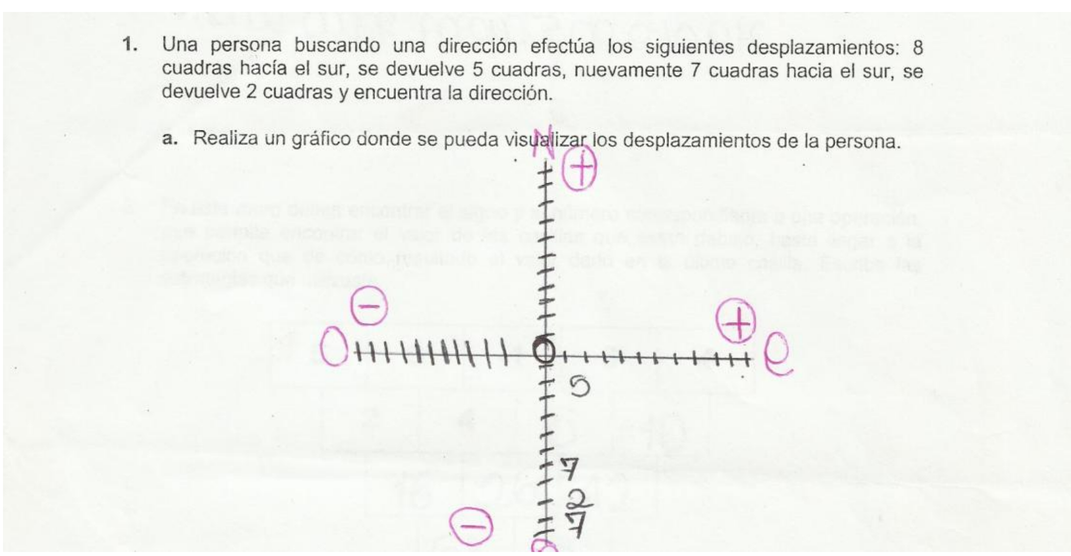


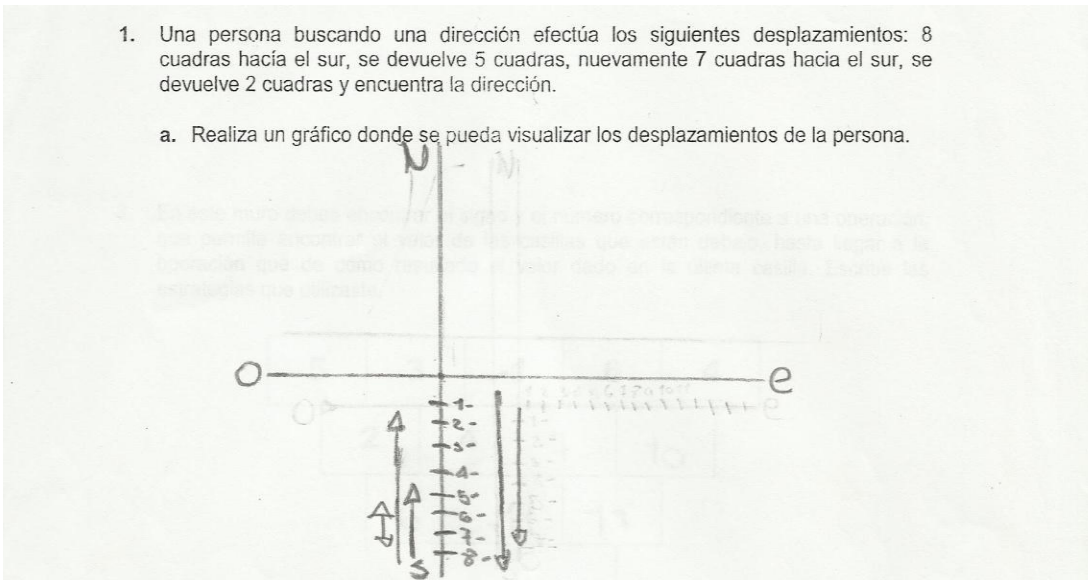
Ilustración 10. Representaciones en el plano cartesiano. Actividad 3, situación 3.



1. Una persona buscando una dirección efectúa los siguientes desplazamientos: 8 cuadras hacía el sur, se devuelve 5 cuadras, nuevamente 7 cuadras hacia el sur, se devuelve 2 cuadras y encuentra la dirección.

   a. Realiza un gráfico donde se pueda visualizar los desplazamientos de la persona.

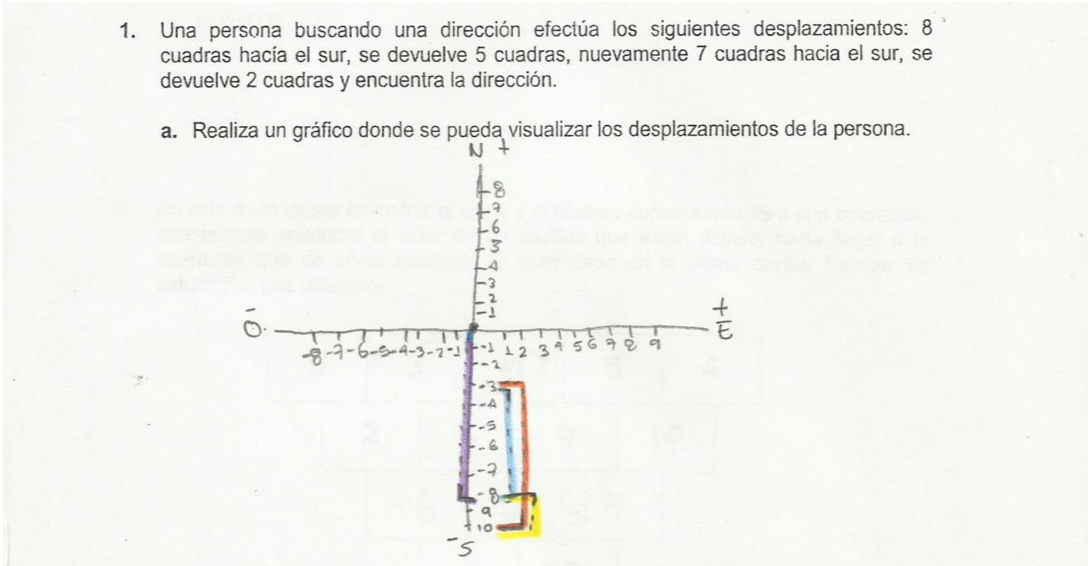
Un 5% de los estudiantes presentan dificultad en el manejo de la recta numérica, al responder que el punto de referencia a partir del cual se hacen los desplazamientos, es el uno (1), justificando que es donde empieza a buscar la dirección; es decir, el conteo se empieza a partir del número uno, sin tener en cuenta la distancia que se ha recorrido entre el punto inicial (0) y el uno (1), lo cual evidencia en los estudiantes aún la dificultad en el manejo de la recta numérica como representación de los números enteros.

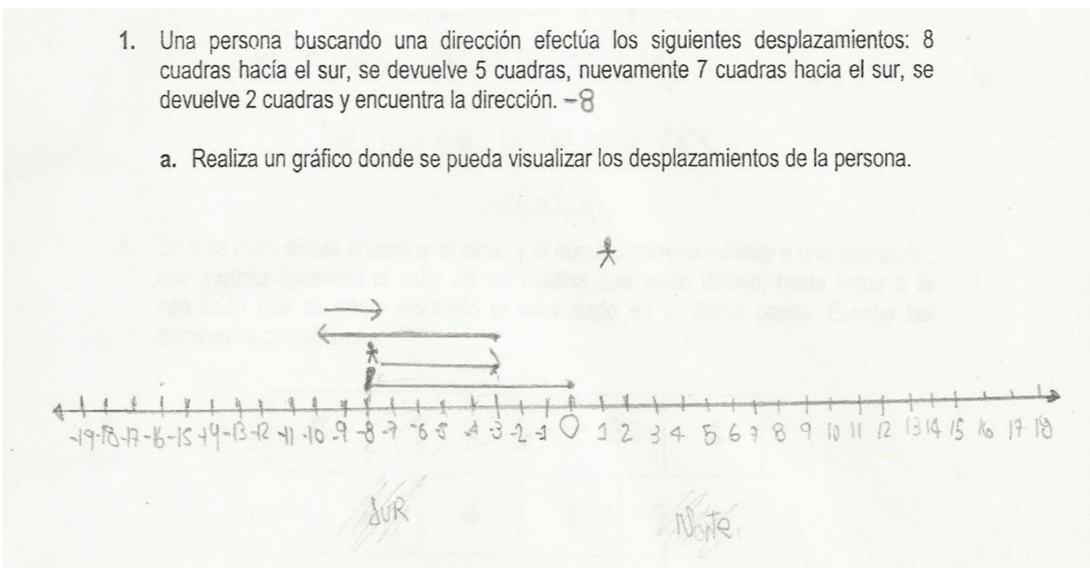


1. Una persona buscando una dirección efectúa los siguientes desplazamientos: 8 cuadras hacía el sur, se devuelve 5 cuadras, nuevamente 7 cuadras hacia el sur, se devuelve 2 cuadras y encuentra la dirección.

   a. Realiza un gráfico donde se pueda visualizar los desplazamientos de la persona.

Sin embargo, un promedio del 33% de los estudiantes contestaron correctamente, utilizando como estrategia el plano cartesiano o una recta numérica para resolver los problemas, al reconocer los desplazamientos según el signo que se le indique, hacia arriba positivos y hacia abajo negativos, cuando se trabaja en el plano cartesiano o derecha positivos e izquierda negativos cuando se trabaja en la recta, logrando visualizar en su gráfico lo que se pedía, esto es muy significativo ya que por lo menos hay una relación entre lo cantidad de longitud recorrida y el valor numérico.





Con estas preguntas se pretendía que los estudiantes entendieran el significado de los números con signo, que en este tipo de problemas proporcionan un medio útil para indicar una dirección como es el caso de los desplazamientos que debe realizar una persona, a su vez indicando la estrategia que le ayuda a encontrar la solución. Lo que indica que los estudiantes además de entender el problema dan sentido y significado a las operaciones, como lo manifiestan algunos investigadores como González et al., (1999), donde habla que:

> El hecho de introducir nuevos factores, unido al proceso de simbolización supone un aislamiento del número entero contextualizado, lo que supone un hecho básico para el logro del entero formalizado. Ya que el estudiante reconoce la operación y las relaciones entre operaciones las cuales toma en cuenta para construir significado de ellas.

De lo anterior es importante resaltar que, el trabajo de esta última situación es una alternativa de introducción al aprendizaje de la adición en los números enteros, a partir de conocimientos previos y procedimientos concretos, que ya manejan los estudiantes, para que a través de una serie de actividades (básicamente juegos grupales), los estudiantes lleguen posteriormente a la construcción individual de los procesos conceptuales y por último conseguir la representación simbólica y formal de los conceptos adquiridos.

3.5 ALGUNAS CONCLUSIONES DE LA IMPLEMENTACIÓN

A partir de los resultados de la implementación de la secuencia, aplicada a estudiantes de grado séptimo del colegio La Presentación el Paraíso, y sus análisis se puede concluir que:

1. La presentación de un contenido matemático, a través de una serie de actividades organizadas en forma de una secuencia estructurada, permite a los estudiantes lograr el paso de un nivel básico a uno más complejo; en este caso, de lo concreto, intuitivo y contextual a un nivel más operativo. Es importante resaltar aquí, que a pesar que la secuencia no concluye con actividades que permitan evaluar el proceso específico del aprendizaje de la suma de números enteros, trató de introducir, conceptualizar y formalizar este concepto, por medio de actividades que desde lo contextual llevaran a lo operativo.

2. Las actividades realizadas a través de la secuencia no fueron suficientes para conceptualizar todo lo relativo a los números enteros, sin embargo, permitieron validar algunas dificultades reportadas por la investigación relacionadas con el paso del número natural al número negativo. Se logró una indagación sobre la construcción del número entero a partir de la significación del número negativo siendo una propuesta viable que inicia ideas prácticas y pedagógicas, que refuerzan el abordaje de este concepto matemático y que articula elementos orientados por los Lineamientos Curriculares y Estándares Básicos de Competencias en Matemáticas, al favorecer el desarrollo del pensamiento numérico en estudiantes de grado séptimo relativo al significado del número y sus operaciones.

3. Los estudiantes presentaron avances conceptuales, al dar significado a lo negativo en diferentes contextos; por ejemplo: el número negativo como relativo, como opuesto al número positivo, y el valor absoluto como cantidad y distancia, etc. Además, al representar situaciones concretas a través de lo numérico, al relacionar propiedades de la recta numérica con propiedades numéricas y viceversa. Así mismo el concepto de valor absoluto ligado al concepto de distancia y a lo simbólico. Todo esto es fundamental en la construcción de las operaciones de los números enteros. Tal como es reportado en las investigaciones estudiadas en relación con lo matemático y didáctico.

4. Los estudiantes mostraron mayor interés cuando resolvían las actividades que involucraban operaciones con la recta, y mostraban mayor seguridad en los resultados que daban en esta, que los que obtenían a través de operaciones aritméticas. Los estudiantes demostraron agrado y reconocieron que este trabajo fue de gran ayuda en la resolución de los ejercicios, ya que solo se había utilizado la recta para representar puntos sobre ella. Teniendo en cuenta lo anterior, se puede decir que el trabajo de los problemas aditivos por medio de la recta es necesario, ya que puede ser uno de los caminos que el estudiante pueda tomar para llegar a plantear y comprender las operaciones y propiedades formales de la suma.

5. La introducción temprana en la secuencia didáctica de la recta numérica presentó dificultades en los estudiantes, que participaron de este estudio, relacionadas con metrizar una recta numérica dada sin unidades. Esto se manifiesta en dos aspectos, el primero al hacer divisiones desiguales con una unidad dada, y el segundo, asignar espacios o longitudes mayores si el número correspondiente al punto era de mayor valor (espacio menor entre el cero y el uno, y espacio mayor entre el dos y el tres).

6. La implementación de la secuencia didáctica permitió que los estudiantes lograran dar sentido y significado a los contenidos matemáticos que intervienen en cada una de las situaciones que se presentaron en un ambiente participativo en las clases, donde los resultados obtenidos en su mayoría satisfacen lo esperado en cuanto a interpretación, procedimientos y superación de dificultades reportadas por las investigaciones estudiadas. En este sentido se considera en la actividad matemática de aula, no enfatizar sólo en el desarrollo de actividades procedimentales, sino que a partir de una pregunta se pueda buscar diferentes caminos a la respuesta teniendo como referencia un marco teórico, donde los estudiantes sean partícipes de su propio desarrollo, en donde el análisis de los resultados sea objeto de observación y estudio que permita alcanzar un desarrollo significativo de los contenidos propuestos.

7. La metodología de implementación, en el aula de clase, rescata el trabajo colaborativo en equipo por parte de las autoras de este trabajo de grado (dos), como una estrategia que ayuda a la organización del trabajo, puesto que mientras una tomó el rol de dar las explicaciones, otra tomó el rol de documentar lo que pasaba con los estudiantes. Estos roles se intercambiaron en cada actividad. En las plenarias se participó conjuntamente complementándose las intervenciones según el caso, todo esto llevó al intercambio de saberes con los estudiantes hacia la puesta en común de los conceptos involucrados en las actividades. Por tanto, se enfatiza en la importancia de que a pesar que un docente esta solo en un salón de clase, la escuela debe fomentar o promover un trabajo en equipo de los docentes.

8. El diseño e implementación de una secuencia didáctica para una introducción al número entero desde una perspectiva didáctica, es valioso porque permite abordar a partir de los resultados en los estudios acerca de la problemática en los números enteros, hacer un análisis de problemas en el aprendizaje y enseñanza en matemáticas, que permita poner a prueba los hallazgos teóricos en el contexto educativo, para después de la implementación, analizar la información y evidenciar si aún se observan los mismos problemas antes expuestos, y así tener una enfoque más amplio para crear estrategias que permitan llegar a resultados significativos acerca de este tema.

CAPITULO IV: CONCLUSIONES GENERALES

A continuación se presentan las conclusiones generales del trabajo atendiendo a los objetivos, la metodología y los desarrollos personales en la realización de este trabajo.

1. El propósito general de este trabajo se logra en tanto se introduce el concepto de número entero a partir de la conceptualización del número negativo como relatico, como opuesto de lo positivo y relacionado con el valor absoluto, esto se evidencia porque la implementación de la secuencia didáctica permitió que los estudiantes lograran dar sentido y significado a los contenidos matemáticos que intervienen en cada una de las situaciones que se presentaron en un ambiente participativo en las clases, donde los resultados obtenidos en su mayoría satisfacen lo esperado en cuanto a interpretación, procedimientos y superación de dificultades reportadas por las investigaciones estudiadas. En este sentido se considera en la actividad matemática de aula, no enfatizar sólo en el desarrollo de actividades procedimentales, sino que a partir de una pregunta se pueda buscar diferentes caminos a la respuesta teniendo como referencia un marco teórico, donde los estudiantes sean partícipes de su propio desarrollo, en donde el análisis de los resultados sea objeto de observación y estudio que permita alcanzar un desarrollo significativo de los contenidos propuestos.

2. Además, las actividades propuestas en la secuencia, permitieron validar algunas dificultades reportadas por la investigación relacionadas con el paso del número natural al número negativo. Se logró una indagación sobre la construcción del número entero a partir de la significación del número negativo siendo una propuesta viable que inicia ideas prácticas y pedagógicas, que refuerzan el abordaje de este concepto matemático y que articula elementos orientados por los Lineamientos Curriculares y Estándares Básicos de Competencias en Matemáticas, al favorecer el desarrollo del pensamiento numérico en estudiantes de grado séptimo relativo al significado del número y sus operaciones.

3. Para el desarrollo de este trabajo de grado, fue necesario afianzar conceptos desde un marco teórico afortunado, porque las investigaciones permitieron tener mayor claridad sobre las situaciones que se pueden presentar en la escuela en torno a la problemática planteada, aclaraciones desde el punto de vista matemático, brindaron la posibilidad de reconocer algunas dificultades, procesos y contextos con relación a la enseñanza y aprendizaje de los números enteros, desde las perspectivas histórica ,matemática, didáctica y curricular, para así poder tener una comprensión teórica y tener una base al momento de llevarlos al aula.

4. Este trabajo logra integrar aspectos matemáticos, curriculares y didácticos en el diseño de la secuencia didáctica y en el proceso de su implementación y gestión en el aula de clase. Desde lo matemático integra los conceptos de valor absoluto, estructura aditiva, representación en la recta numérica, distancia entre puntos, entre otros; con otros curriculares relacionados con diferentes significados del número negativo y significado de la adición de números enteros para el desarrollo del pensamiento numérico en la escuela. Además, se pudo verificar algunas de las dificultades reportadas en las investigaciones sobre los números enteros; considerar asumir los números con signo da lugar a una ruptura frente a la visión tradicional que considera los números como nociones que dan cuenta del resultado de una medida de una cantidad de magnitud absoluta. En efecto, es necesario entender que existen números menores que el cero, que el cero no siempre denota ausencia de cantidad de magnitud y que sumar no siempre significa aumentar.

5. A partir de esta investigación, se reconoce que los estudiantes reflejan antecedentes importantes al parecer desde los inicios de su escolaridad, donde se muestra que hay grandes dificultades en la apropiación de la operación de adición, desde la perspectiva operativa; parece que estas dificultades surgen, porque en la escuela los conocimientos en los años iniciales en matemáticas son referidos a los números naturales y en el momento de introducir los números negativos se hace por medio de la enseñanza de reglas y algoritmos para operar con números naturales; entonces los estudiantes transfieren las mismas relaciones y propiedades de los naturales a los enteros, esto puede ser un obstáculo en el paso de un sistema numérico a otro. Los estudiantes en este sentido no observan que hay una ruptura entre la forma de operar en el conjunto de los números naturales y las operaciones con los números enteros. Es así como los estudiantes participantes de este estudio operaron aditivamente con mayor facilidad en la recta numérica que simbólicamente.

6. A partir del desarrollo del trabajo en el aula de clase, se hizo evidente la importancia que tuvo para el proceso de conceptualización, el trabajo individual, en equipo y en una plenaria, dado que esta estrategia metodológica permitió poner en juego los saberes, interpretaciones, opiniones e ideas que los estudiantes tienen, para la construcción del concepto de número entero, es decir, esta perspectiva es importante porque integra y articula el trabajo personal de los estudiantes donde aparecen sus diferentes resultados y sus diferentes argumentaciones para luego poner en común una plenaria donde surgen dificultades de manera que se pueden hacer aclaraciones para llegar a la construcción del concepto de número entero.

7. Uno de los aspectos más significativos en relación con la propuesta metodológica del desarrollo del trabajo, alude al aporte del trabajo experimental en el espacio del salón de clase, que se tradujo en una ampliación teórica del mismo diseño de

la secuencia y su posterior análisis; que finalmente dio lugar a una versión mucho más elaborada para el trabajo en relación con los números enteros en el salón de clase. De igual importancia, en relación con los objetivos propuestos fue la coherencia entre la metodología y los referentes teóricos adoptados que emergieron de una revisión sistemática de una bibliografía especializada.

8. Desde un punto de vista personal, este trabajo es una práctica investigadora formativa; parte de una búsqueda de unas referencias bibliográficas, que aportan elementos fundamentales en el reconocimiento de factores, como dificultades que se presentan en la conceptualización del número entero, especialmente en el número negativo, en particular cuando deben realizar operaciones con estos, al observar que la gran mayoría de los estudiantes cometen errores en la solución de los ejercicios y problemas propuestos, causando rechazo en el trabajo donde se involucren dichos números. Por esto, consideramos que este trabajo es una contribución a la enseñanza de este concepto, por medio de actividades lúdicas de trabajo en equipo e individual, tratando de encontrar la forma en que el aprendizaje de este concepto sea mucho más agradable y fácil para los estudiantes.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

Aguilar, García & Pérez. (1997). La práctica docente a partir del modelo DECA y la teoría de situaciones didácticas. Recuperado el 13 de abril, 2011, de http://www.cientec.or.cr/matematica/pdf/P-Fernando-Gerrero.pdf

Bruno, A. (1997). La enseñanza de los números negativos: aportaciones de una investigación, Revista de didáctica de las matemáticas 1(29) (pp. 5-18). Universidad de la Laguna.

Bruno, A. (2001). La enseñanza de los números negativos: formalismo y significado, Gaceta de la Real Sociedad Matemática Española (pp. 415-427). España: Universidad de la Laguna.

Bruno, A. (2003). Algunas investigaciones sobre la Enseñanza de los números negativos, Cuarto Simposio de la Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática (pp. 119-130). España: Universidad de Huelva.

Cerizola, Pérez & Martínez. (2010).Una Noción matemática básica y aparentemente simple: el Valor absoluto de un Número real. Recuperado el 30 de enero, 2012, de: www.ucor.edu.ar/paginas/REDUC/cerizola.pdf

Cid, E. (2000). Obstáculos epistemológicos en la enseñanza de los números negativos, Actas de las XV Jornadas del Seminario Interuniversitario de Investigación en Didáctica de las Matemáticas, Boletín del SI-IDM, 10.

Cid, E. (2003). La investigación didáctica sobre los números negativos: estado de la cuestión. Pre-publicaciones del seminario matemático "García Galdeano". Universidad de Zaragoza.Recuperado el 05 de abril, 2011, de: http://www.unizar.es/galdeano/preprints/2003preprint25.pdf

Cid, Godino & Batanero. (2002). Sistemas numéricos y su didáctica para maestros. Proyecto Edumat - Maestros. Universidad de Granada.Recuperado el 13 de septiembre, 2011, de: http://www.ugr.es/local/jgodino/edumat-maestros/

Chaparro, O; Póveda, D & Fernández, (2006). Secuencia Didáctica: Jugando con los números enteros. Colegio Salesiano – Duitama, Cundinamarca. Asesora Ligia Amparo Torres R. Universidad del Valle – Instituto de Educación y pedagogía.

Didáctica de las Matemáticas. Consideraciones. Recuperado el 08 de mayo, 2011, de: http://www.mendomatematica.mendoza.edu.ar

Filloy, E. (1999). Aspectos teóricos del álgebra educativa. Grupo editorial Iberoamericana. México.

Fory, O. (2010). Obstáculos didácticos en la adición de números enteros en textos escolares**.** Tesis de pregrado Recurso electrónico. Cali, Valle, Colombia. Universidad del Valle.

González, J. L, Iriarte, M, Jimeno, M, Ortiz, A, Sanz, E. & Vargas-Machuca, I. (1999). Números Enteros. En: Matemáticas Cultura y Aprendizaje Vol. 6 Madrid: Ed. Síntesis. pp. 21-104.

Maz, A. & Rico, L. (2009). Números Negativos en los siglos XVIII y XIX: fenomenología y representaciones. Vol. 7 Córdoba: Ed. Eos. pp. 537-554

MEN, (1998). Lineamientos Curriculares para el área de Matemáticas, Santa Fé de Bogotá D.C. Colombia: Ed. MEN

MEN, (2006). Estándares Básicos de Competencias en Matemáticas. En Estándares Básicos de Competencias en Lenguaje, Matemáticas, Ciencias y Ciudadanía. (pp. 46 - 94). Santa Fé de Bogotá D.C. Colombia. Ed. MEN

Robledo J. (2007). Pre Cálculo e Introducción a Máxima Parte I. Departamento de Matemáticas Facultad de Ciencias, Universidad del Valle, Cali, Colombia. pp. 26-29

SEDUCA, (2006). Interpretación e Implementación de los Estándares Básicos de Matemáticas, Módulo 1, Pensamiento Numérico y Sistemas Numéricos. Medellín-Colombia pp. 31-49

Suárez M. (1994). Elementos del álgebra. Centro de Editorial Universidad del Valle. Cali, Colombia. pp. 9 – 12

Zill, D. y Dewar J. (1993).Algebra y Trigonometría. McGraw-Hill.

ANEXOS

ANEXO 1: SECUENCIA DIDÁCTICA INICIAL

VER ARCHIVO ADJUNTO EN EL CD

ANEXO 2: MARCO CONTEXTUAL

COLEGIO LA PRESENTACIÓN EL PARAÍSO

Historia[9]

La primera Comunidad de la Presentación llegó a Cali en 1945 a fundar una obra social para la promoción de la mujer que funcionó en el Barrio San Nicolás. Al año siguiente 1946 se fundó el Colegio Aguacatal por petición de damas ex alumnas del colegio San Facön de Bogotá lideradas por María Teresa García de Lloreda con el apoyo del Arzobispo Alberto Uribe Urdaneta y de los padres Jesuitas.

Se consigue la licencia de funcionamiento por parte de la Secretaria de Educación Departamental el día 27 de Octubre de 1975, Res. 5598 de 1976.

Por resolución 1122 de Diciembre 27 de 1991 cambia de nombre la institución por el de Colegio La Presentación El Paraíso como se le conoce actualmente. En este año se entrega a la sociedad la primera promoción de Bachilleres Comerciales.

En el año 2006, el colegio realiza una alianza con la Universidad Lummen Gentium, para hacer realidad la articulación y abrir más caminos a los estudiantes al finalizar sus estudios en la institución. Los estudiantes del Nivel 11º realizan sus pasantías en la Universidad Santiago de Cali, con la cual se realizó un convenio para que realizaran las prácticas empresariales.

El 20 de Junio de 2008, el Colegio recibió la Certificación otorgada por ICONTEC. Dicha certificación se otorgó a las actividades de Diseño y Prestación del Servicio Educativo en los Niveles de Preescolar, Básica Primaria y Media Técnica Comercial.

El colegio La Presentación se encuentra conformado por tres sedes, de las cuales La Presentación El Paraíso es la principal, se encuentra ubicado en la parte urbana del municipio de Santiago de Cali, departamento del Valle del Cauca, en el barrio El Paraíso con dirección Cra 28B Nº 33E-29, perteneciente a la comuna 12, localizado en la parte centro-oriente de la Ciudad de Cali. Las otras dos sedes son: La presentación Aguacatal y La presentación Cascajal.

La Institución cuenta con familias residentes en un 10.1% en el Barrio El Paraíso, un 30% de familias viven en los barrios aledaños (Rodeo, Villanueva, Doce de Octubre, Eduardo Santos, Santa Mónica Popular, Calipso, Sindical), y el resto del porcentaje está distribuido por todo el perímetro urbano de la ciudad 53.5% y el 6.4 no responde.

Las familias pertenecen en un 86.3% al estrato 1, 2, 3. Son estudiantes con pocos recursos económicos, con padres y madres empleados que luchan continuamente para dar a sus hijos una educación de calidad.

[9] Tomado del Proyecto Educativo Institucional del Colegio La Presentación El Paraíso.

La edad de la población estudiantil refleja que el mayor porcentaje está entre los 7, 11, 13 y 15 años, el porcentaje mínimo es del 0.2 % de estudiantes con 17- 18 años.

La institución y su columna estructural como lo es el P.E.I., tiene un énfasis en valores, parte de una visión del ser humano integral; este ser singular e irrepetible crece como persona a través de las siguientes características: capacidad de pensar en forma crítica, profunda y original, capacidad de decidir por sí mismo sobre su proyecto de vida, capacidad de amar y trascender su individualidad para formar comunidad, reconoce una "praxis" (conjunto de prácticas sociales y de modo más general, la historia concreta de la misión educativa de la comunidad Presentación), creadora de tres "superestructuras" esenciales: Material (necesidades económicas y de relación con el medio), Conciencia (Reflexión económica, política, jurídica artística, filosófica, ideológica y ante todo espiritual y religiosa), Lenguaje (convivencia en la práctica asumiendo en sentido real de las cosas). Estas, inmersas en el quehacer educativo diario cimentado en el: ver (interpretar y aprender), juzgar (reflexionar y argumentar), actuar (transformar, crear y proponer), desembocan en el ser (trascendente, progresista e integral).

Fundamentos metodológicos

El método es el modo de hacer las cosas más fácilmente y con mejores resultados. Cada corriente, lineamiento, tendencia o escuela pedagógica, busca los elementos más adecuados para el logro de objetivos que presenta su filosofía educativa, en la metodología de la educación personalizada se implementan unos recursos para facilitar la personalización, teniendo en cuenta la persona del estudiante y los fundamentos tanto filosóficos como axiológicos que hemos mencionado:

Las personas, el tiempo, la programación, guías de trabajo, la evaluación y la autoevaluación, los espacios, el trabajo personal o en grupo, las sustentaciones teóricas-prácticas, las puestas en común, las clases comunitarias, el trabajo extractase, las actividades generales. Lo más importante de esta metodología es el espíritu que anime a los miembros de la comunidad educativa para la formación personalizante.

Filosofía institucional

El Colegio La Presentación El Paraíso, es una institución privada de tipo confesional, pluralista, sin ánimo de lucro, calendario B, presta el servicio educativo en los niveles de Preescolar, Básica y Media Técnica comercial, cuyo propósito fundamental es la participación activa, responsable y consciente, en el proceso de formación integral del hombre y la mujer, para que se hagan protagonistas de su propio crecimiento, con el fin que intervengan con acierto en el devenir histórico de su entorno, su departamento, su país y del mundo.

Se compromete con la calidad del servicio ofrecido a través del mejoramiento continuo de sus procesos, la formación integral de los estudiantes, la consolidación del énfasis comercial para el desarrollo de competencias básicas, laborales y ciudadanas y el despliegue de valores, a través de la evangelización.

Para ello, cuenta con un recurso humano competente, un currículo ajustado a las necesidades y expectativas del medio social y cultural y una planta física adecuada para la prestación del servicio educativo, todo esto optimizando los recursos y procesos.

Misión

La institución educativa presentación El Paraíso, de carácter privado, dirigida por las Hermanas de la caridad Dominicas de la Presentación de la Santísima Virgen, que presta un servicio educativo a la niñez y a la juventud, desde una perspectiva Humano-Cristiana e iluminada por los principios pedagógicos de Marie Poussepin brinda una formación integral y técnica con especialidad en comercial para contribuir a la construcción de una sociedad justa, fraterna, democrática y solidaria.

Visión

Hacia el año 2016 la institución será líder en la formación de jóvenes críticos de la realidad, con compromiso social, político y evangelizador, desde un currículo permanente y abierto a paradigmas que posibilite el acceso a la educación superior y al campo laboral.

Objetivo institucional

Acompañar al educando en su autorrealización personal y comunitaria para que opte por Cristo "Aquí y ahora, convirtiéndose en ciudadano según el hombre nuevo del evangelio", comprometido en la construcción de una sociedad justa, democrática y solidaria.

Objetivos específicos

1. Impulsar la formación de personas cristianas no por denominación sino por compromiso, capaces de crecer en la fe y manifestarla en la vida.
2. Cultivar el espíritu cívico para llegar a conocer y amar nuestra patria, haciéndola cada vez más grande.
3. Promover el espíritu crítico y científico con el fin de enfrentar a las personas con la realidad actual de los últimos adelantos.
4. Estimular a las personas en el descubrimiento de sus valores y vocaciones para su realización y proyección a la comunidad.

Objetivo de la modalidad comercial

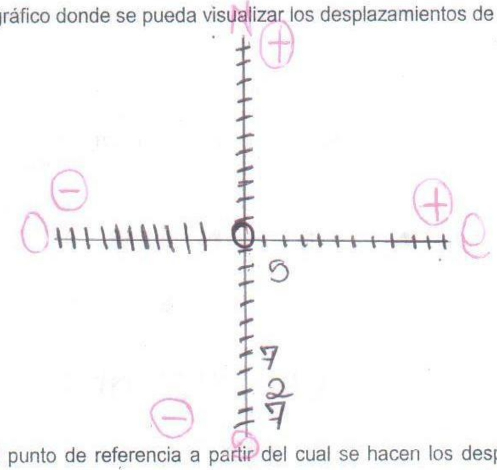
Desarrollar en la estudiante sus potencialidades como persona integral a través de un aprendizaje autónomo, creativo, práctico y de compromiso, asumiendo actitudes y aptitudes positivas, frente a sí misma, la comunidad y el trabajo; respondiendo de ese modo a las demandas del medio.

El Colegio, a través de su formación en valores y estrategias del mejoramiento continuo aporta para que en un ambiente de sana convivencia se pueda desarrollar el proceso académico, la formación de Competencias Laborales Generales en todos los estudiantes de educación básica y media es uno de los objetivos de la política de Articulación de la Educación con el Mundo Productivo, propuesta por el Ministerio de Educación Nacional.

ANEXO 3: RESPUESTAS SIN CATEGORÍA

1. Una persona buscando una dirección efectúa los siguientes desplazamientos: 8 cuadras hacía el sur, se devuelve 5 cuadras, nuevamente 7 cuadras hacia el sur, se devuelve 2 cuadras y encuentra la dirección.

   a. Realiza un gráfico donde se pueda visualizar los desplazamientos de la persona.



   b. ¿Cuál es el punto de referencia a partir del cual se hacen los desplazamientos? ¿Por qué?

   es el numero 0 porque haci me puedo diferenciar el problema que nos colocan!

   c. ¿Qué desplazamientos debe hacer la persona para llegar a la posición inicial, si se encuentra en el último desplazamiento que realizó para encontrar la dirección?

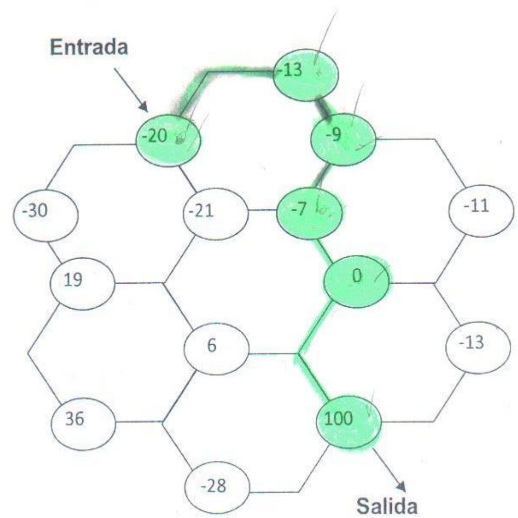
   devolverme para encontrar la direccion,

   c. ¿Qué desplazamientos debe hacer la persona para llegar a la posición inicial, si se encuentra en el último desplazamiento que realizó para encontrar la dirección?

   Devolverce para encontrar la Direccion.

2. Realiza las actividades de la 2 hasta la 6, de forma individual:

Para salir del laberinto de números enteros, se debe avanzar sobre los lados de los hexágonos pasando siempre por un número entero mayor. Indica la ruta que se debes seguir utilizando un color.



a. Ubica en una recta numérica los números enteros por los que avanzaste en el laberinto para encontrar la salida.

b. Establece una relación entre lo realizado en el laberinto y la recta.

pues lo mismo pero esta mas organizado en la recta

b. ¿De qué depende que se escriba una cantidad a la derecha o izquierda del cero?

DE QUE NO SON LOS MISMOS PERO SEASEN ASI.

a. Establezca una relación entre el año de tu nacimiento y el cero.

ES COMO EL DIA EN QUE NACI Y EL CERO FUE COMO EL PRINCIPIO DE TODO.

b. Compara dos números que corresponden a fechas de acontecimientos de tu vida indicando cual es el mayor. Justifica tu respuesta.

2000, 2004 EL 2004 ES MAYOR PERO NO POR LO QUE SEA SINO PORQUE FUE EL AÑO QUE ESTUDIE.

b. ¿De qué depende que se escriba una cantidad a la derecha o izquierda del cero?

- Porque el antes es cuando pasaron las cosas antes de todo.
- El despoes es que las cosas pasaron ya a lo ultimo.

a. Establezca una relación entre el año de tu nacimiento y el cero.

Pues [illegible] que tienen que trabajar
mucho para compiarnos los pañales
los teteros, por que somos dos

b. Compara dos números que corresponden a fechas de acontecimientos de tu vida indicando cual es el mayor. Justifica tu respuesta.

2010 y 2007
el mayor es el 2010
por que es mayor que 2007
y es positivo

EL LABERINTO

Con otro compañero del curso haz la siguiente actividad.

1. Para realizar la siguiente actividad tengan en cuenta que "Al comparar dos números enteros se debe tener cuidado que cuando los dos son negativos, es mayor el que tiene menor valor absoluto".

   a. Realicen una discusión en clase respecto a la afirmación anterior y escriban sus comentarios al respecto.

R1 • Debe ser el mayor 5.
• tiene relacion a eso de lo que esta más cerca del 0, es mayor

   b. Indiquen las consecuencias desde lo numérico, si se toma al contrario la afirmación anterior, es decir, entre dos negativos es mayor el que se encuentra más alejado del cero en la recta numérica.

falso porque
el mayor es el que más serca del cero cuando es negativo

- porque nos enredarian por completo
- Nos hace sacar 1.0 en el examen
- los dos tienen valor absoluto
- causa la Muerte
- causa el despido de la profesora que nos enseño eso.

ANEXO 4: ALGUNAS PRODUCCIONES DE LOS ESTUDIANTES

SITUACIÓN 1: ACERQUÉMONOS AL CONCEPTO DE NÚMERO ENTERO A PARTIR DEL NÚMERO RELATIVO

ACTIVIDAD 1: USANDO ENTEROS EN LA LÍNEA DEL TIEMPO CON INVENTOS IMPORTANTES EN LA HISTORIA DE LA HUMANIDAD

1. Realiza en forma individual la siguiente lectura:

“GRANDES INVENTOS DE LA HUMANIDAD”

Desde siempre el ser humano ha buscado por todos los medios a su alcance, la forma de mejorar su calidad de vida, con su gran inteligencia ha desarrollado herramientas que le han hecho la vida más fácil y sencilla.

Los siguientes, son algunos de los inventos que han cambiado para siempre la historia de la humanidad.

Los primeros hombres median el tiempo en días. Sabían aproximadamente la duración del año observando las estaciones y podían medir el tiempo en meses, mirando la luna. Los primeros instrumentos para medir el tiempo fueron los relojes de sol y de agua, inventados hacia el año 1500 antes de Cristo; se cree que el primer reloj mecánico se hizo en China en el año 1088 después de Cristo, medía unos $10\ m$ de altura y estaba accionado por agua.



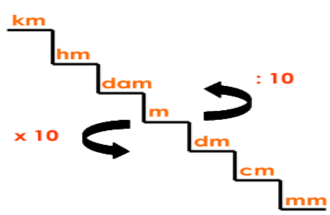
Así como el hombre empezó a medir el tiempo observando estaciones y mirando la luna, los viajeros tuvieron la necesidad de indicar su rumbo para orientarse, un instrumento que ayudó a esto fue la brújula, que se inventó en China hacia el año 1000 después de Cristo y llegó a Europa 100 años después. La primera brújula fue una aguja de hierro sobre un trozo de corcho o caña que flotaba en un vaso de agua.



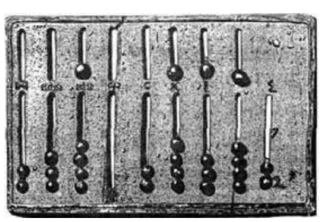
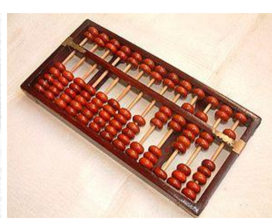
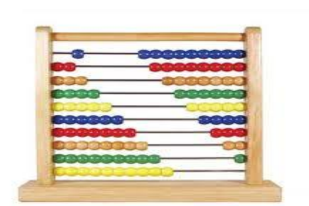
Otro aspecto por el cual se preocupó el hombre, fue por medir las masas, en el año 4500 antes de Cristo, el hombre logró pesar objetos con el primer instrumento creado como fue la balanza, en Siria se usó para pesar oro en polvo con pesas de piedra pulidas con gran precisión.



La inexactitud en los diversos sistemas de medición rudimentarios, fue una de las causas más frecuentes de polémicas o disputas entre comerciantes, funcionarios de instituciones y ciudadanos, en Europa. En el año 1791 después de Cristo, tras el derrocamiento de la monarquía, la Asamblea Nacional Francesa abolió el sistema tradicional de pesas y medidas por uno denominado “métrico” (medida) en múltiplos de diez.

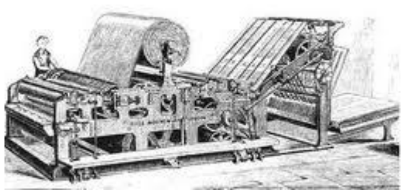
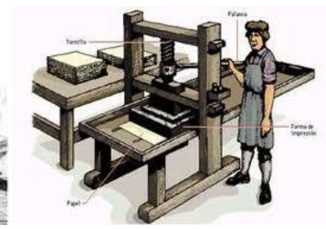
El primer instrumento para ayudar a contar fue el ábaco, consistía en bolas perforadas que se desplazaban sobre alambres sujetos a un marco, con las que se conseguía operar para representar números; se construyó en Babilonia hacia el año 3000 antes de Cristo, otro instrumento que se inventó para hacer cálculos fue la primera máquina calculadora creada en Francia en 1642 después de Cristo.

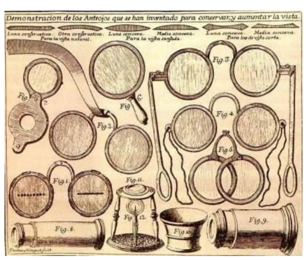
Por otra parte, la primera evidencia de que el hombre ha tenido la necesidad de comunicarse por escrito son los petroglifos dejados en cavernas prehistóricas, pero fue hasta el año 1300 años antes de Cristo, donde apareció el primer alfabeto en Siria. Los primeros libros que se imprimieron fueron pergaminos impresos con moldes de madera, creados en China y Corea, hacia el año 700 después de Cristo.



En el año 1500 después de Cristo se inventó la imprenta, fue la máquina responsable de una de las revoluciones sociales y tecnológicas más importantes para la época, el primer libro elaborado mediante este sistema fue La Biblia de 42 líneas.

Por otro lado se cree que las gafas se usaron por primera vez en Italia hacia el año 1285 después de Cristo y su uso se incrementó, debido a que estas mejoraban la visión de las personas para leer o seguir trabajando en labores delicadas.



Otro invento importante del hombre fue el descubrimiento de la pólvora, los chinos descubrieron como mezclar salitre, azufre y carbón de encina para hacer pólvora. La usaron por primera vez en el año 850 después de Cristo, la pólvora se empleaba sólo para cohetes y juegos de artificio sin ninguna intención de guerra.



Otros inventos significativos para tener presente son: En el año 3500 antes de Cristo se invento la rueda en la ciudad de Ur Mesopotamia. En el año 400 antes de Cristo la primera teoría atómica de Demóclito, que afirma que la materia es discontinua y estaba formada por partículas indivisibles llamadas átomos. En el año 450 antes de Cristo se inventó la polea en Grecia y en el año 100 antes de Cristo el descubrimiento de la cuchara de mineral magnética eran mágicas, se detenían siempre con el mango apuntando hacia la misma dirección.



Universidad del Valle

la presentación el paraiso

instituto de educación y pedagogía

NOMBRE(S): Natalia Salazar y Karen Blanco 72.

2. Realicen las actividades de la 2 hasta la 4 con un compañero del curso.

Recorten las siguientes fichas que contienen fechas y nombres de inventos, establezcan correspondencia entre cada fecha y el invento asociado a ella.

Universidad del Valle

instituto de educación y pedagogía

3. En la mitad de una tira cuadriculada que se ha entregado a cada pareja, tracen una línea horizontal y divídanla en una escala de 100 en 100. Ubiquen en uno de los puntos de la escala al CERO (0), que corresponde al nacimiento de Cristo. Ubiquen las fechas que recortaron en la escala que han diseñado.

A las fechas que quedaron a la izquierda del cero anteceda el signo menos y a las fechas que quedaron a la derecha del cero anteceda el signo más.

a. ¿Por qué se puede asignar el signo más y el signo menos a una cantidad ubicada en la escala de hechos históricos?

R// • Segun su orden cronológico pueden estar ubicado antes o despues de cristo si estan antes es menos y si esta despues es mas

b. Expliquen la razón por la cual se puede tomar la fecha del nacimiento de Cristo, como punto de referencia (cero) para diferenciar las fechas de los inventos.

R// porque el nacimiento de cristo divide la historia ya que fue una epoca muy importante para nosotros

c. Entre los números ubicados a la derecha del cero ¿Cuál es mayor? Justifica tu respuesta.

R// Es mayor 1791 dc ya que es el que esta mas lejos del Origen ó eje (0)

d. Y entre uno ubicado a la derecha y a la izquierda del cero ¿Cuál es mayor? Justifica tu respuesta.

R// Es mayor el que esta a la derecha porque siempre el positivo es mayor que el negativo.

e. Entre los números ubicados a la izquierda del cero ¿Cuál es menor? Justifica tu respuesta.

R// Es menor el 4500 aC ya que esta mas lejosa del origén ó eje (0) y esta a la izquierda del 0

Universidad del Valle

Natalia Salazar O. y Karen Blanco
7-2
Colegio la presentación el paraiso

instituto de educación y pedagogía

4. Tomen los datos que aparecen en la tira de papel y ubíquenlos en una recta en la hoja de block que se les entregará.

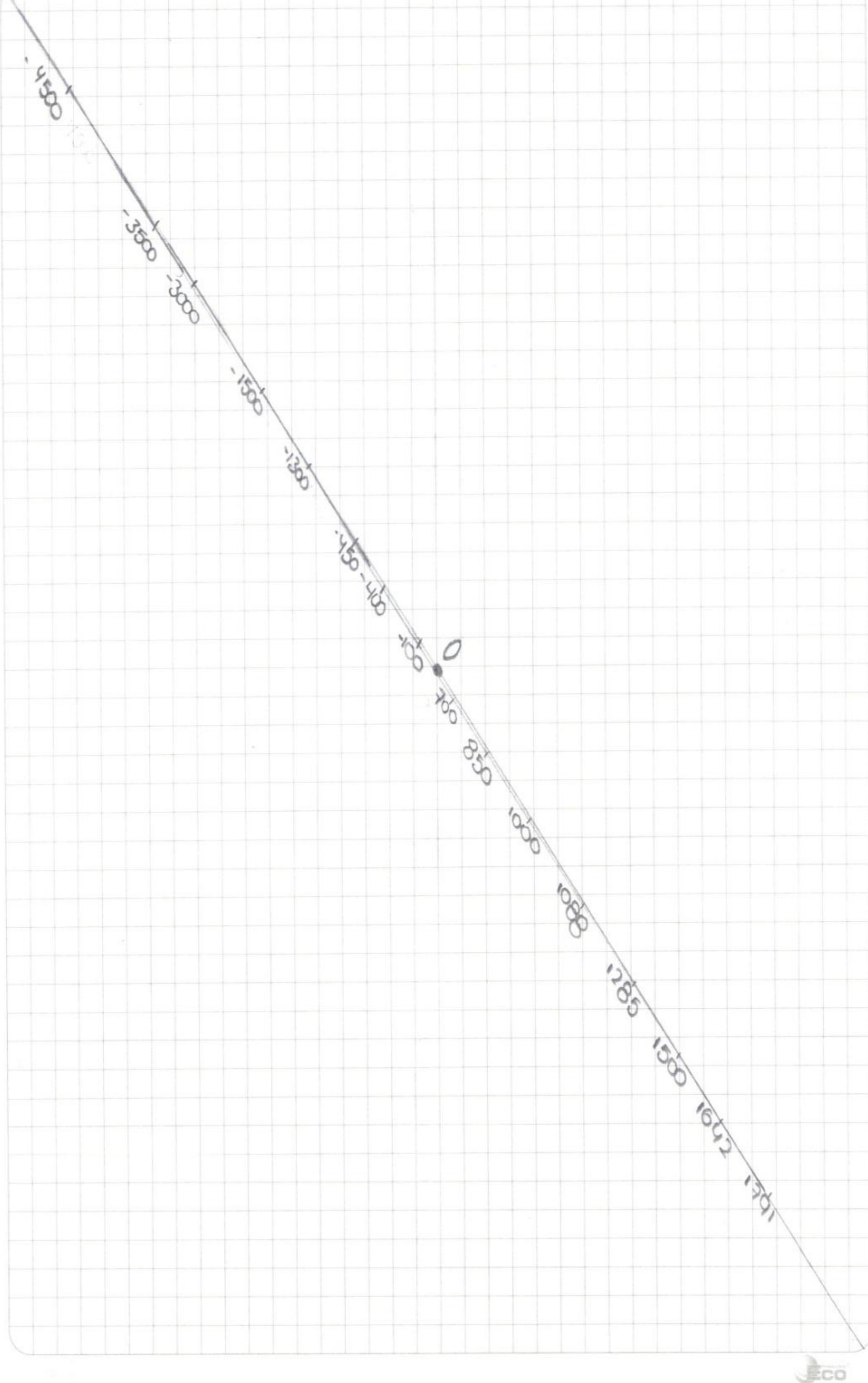
a. Ubiquen dos inventos que tienen la misma fecha antes y después de Cristo. ¿Qué características presentan? y ¿A qué distancia del cero están estas cantidades?

R//
- -1500 ac = Reloj de sol y agua
- +1500 dc = imprenta
- uno es positivo y otro negativo

* 1500 de distancia desde el cero a cada lado, suceden 4 acontecimientos desde el cero hasta -1500 y 5 acontecimientos desde el cero hasta +1500

b. ¿De qué depende que se escriba una cantidad a la derecha o izquierda del cero?

R//
- Segun como hallan pasado los acontecimientos
- Segun su signo
-



-4500
-3500
-3000
-1500
-1300
-450
-400
-100
0
700
850
1000
1088
1285
1500
1642

Noviembre 9 2011

Colegio la presentacion el paraiso

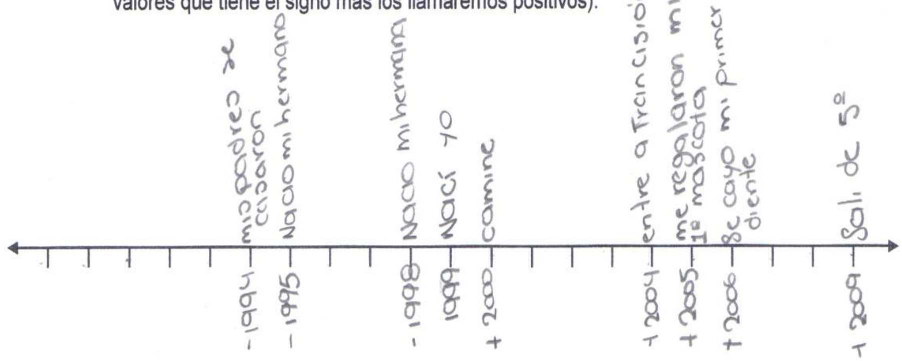
Universidad del Valle

instituto de educación y pedagogía

NOMBRE: natalia Salazar 7-2

5. Realiza en forma individual la siguiente actividad:

Tomando como referencia el año de tu nacimiento, ubica algunos acontecimientos importantes que hayan pasado antes y después de tu nacimiento, utilice el signo menos (-) y el signo más (+) para representar estas cantidades, como se hizo en el punto anterior. (Los valores que tienen el signo menos los llamaremos negativos y los valores que tiene el signo más los llamaremos positivos).



a. Establezca una relación entre el año de tu nacimiento y el cero.

Porque el punto de referencia es la fecha de mi nacimiento (1999)

b. Compara dos números que corresponden a fechas de acontecimientos de tu vida indicando cual es el mayor. Justifica tu respuesta.

R/ A Nacio mi hermana -1998
b Sali de 5º +2009

es mayor la b sali de 5º +2009 porque esta mas lejos a la derecha del eje (1999) y porque es positivo

c. Para discutir en clase: ¿Necesariamente la ubicación del cero, corresponde a la mitad en la recta numérica? Justifiquen su respuesta.

R// No, porque pueda que hayan más números a la derecha que a la izquierda

Universidad del Valle

instituto de educación y pedagogía

UNA INTRODUCCIÓN AL CONCEPTO DE ENTERO, ENFATIZANDO EN LA CONSTRUCCIÓN DEL NÚMERO NEGATIVO, EN EL GRADO SÉPTIMO DE LA EDUCACIÓN BÁSICA

COLEGIO: colegio la presentacion el paraiso.

NOMBRE (S): Natalia Salazar y Gabriela Zorrilla

GRADO: 7-2

FECHA: NOVIEMBRE-23-2011

Querido estudiante a continuación encontrará una serie de situaciones problema, las cuales va a resolver siguiendo las indicaciones que se darán en el transcurso de cada actividad. Recuerda que debes incluir todos los pasos que hiciste para lograrlo.

SITUACIÓN 2: CARACTERICEMOS EL NÚMERO ENTERO NEGATIVO

ACTIVIDAD 1: EL NÚMERO NEGATIVO COMO OPUESTO AL NÚMERO POSITIVO

1. Realicen las actividades de la 2 hasta la 6 con un compañero del curso.

   Lean la siguiente narración mencionada en la situación 1.

"Los primeros instrumentos para medir el tiempo fueron los relojes de sol y de agua, inventados hacia el año 1500 antes de Cristo, ya en el año 1500 después de Cristo se inventó la imprenta, fue la máquina responsable de una de las revoluciones sociales y tecnológicas más importantes para la época, el primer libro elaborado mediante este sistema fue La Biblia de 42 líneas".

a. Escriban las dos fechas presentes en la narración, utilizando signos más (+) y menos (-), de acuerdo a la referencia del nacimiento de Cristo.

-1500 antes de cristo

+1500 despues de cristo

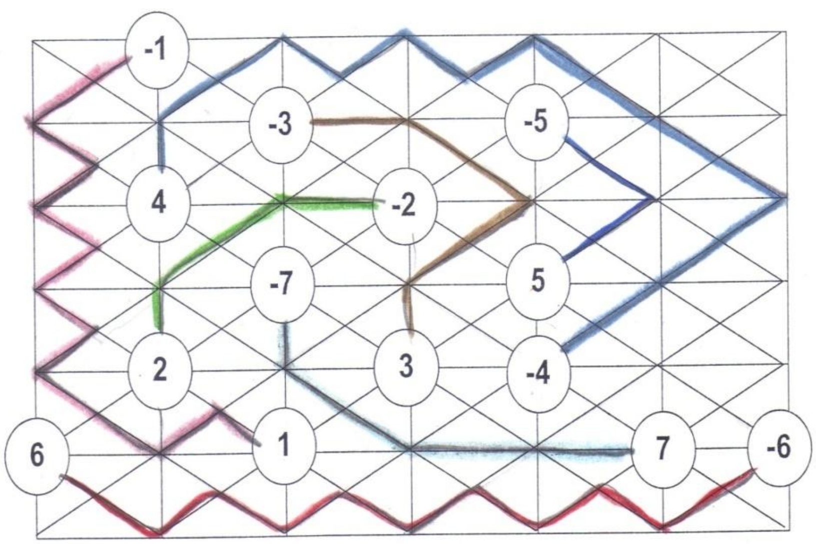
b. Escriban varias parejas de números que cumplan esta característica.

−1450, +1450
−24, +24
−4650, +4650
−2000, +2000

c. ¿Qué característica tienen estos números?

Que tienen igual cifra pero diferente signo

2. Siguiendo las líneas propuestas del dibujo, unan números que cumplan con la característica anterior, (estos números se denominan números opuestos). Deben tener cuidado porque ningún camino puede sobreponerse o cruzarse con otro. Utilicen diferentes colores:



Universidad del Valle

instituto de educación y pedagogía

3. Ubiquen en la siguiente recta los números que aparecen en el esquema anterior, según una escala determinada.

-7 -6 -5 -4 -3 -2 -1 0 1 2 3 4 5 6 7

a. ¿Que pueden decir respecto a la ubicación de los números opuestos con relación al cero en la recta numérica?

Que tienen la misma distancia desde el cero

b. Expliquen la siguiente afirmación escribiendo sus comentarios al respecto:

"La ubicación de números opuestos en la recta es simétrica respecto a cero"

-Me parece cierta ya que si vemos en la recta los opuestos tienen la misma distancia.

c. Escribe el opuesto de -5 5

Escribe el opuesto de -77 77

Escribe el opuesto de -38 38

Escribe el opuesto de -56 56

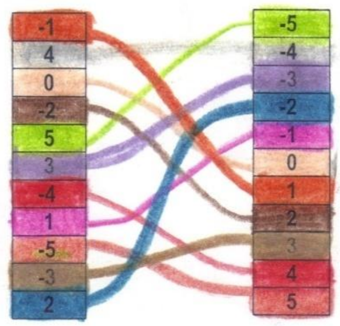
pues que todo numero negativo siempre lo opuesto va a ser positivo.

Justifica tu respuesta.

d. Según las respuestas que escribieron anteriormente, explica la característica de los números negativos como opuestos a los positivos.

QUE TIENEN SIGNOS DIFERENTES, QUE TIENEN LA MISMA DISTANCIA DESDE EL CERO

4. Unan los números de la columna izquierda con sus opuestos en la columna derecha.



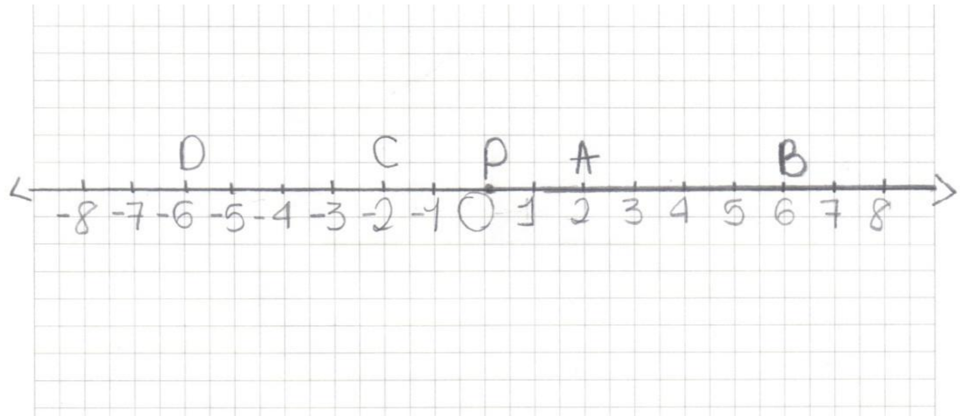
Escriban en que se parecen estos números y en qué se diferencian.

PUES QUE TIENEN LA CIFRA IGUALES PERO NO SON LOS MISMOS SIGNOS.

5. En una hoja cuadriculada tracen una recta horizontal, marquen sobre ella el mayor número de puntos posibles, de tal manera que estén separados por una distancia de 1 centímetro (*El centímetro es una unidad de medida*).

Asignen a uno de los puntos el cero (0), hacia la derecha del cero (0), numeren los demás puntos en este orden (1, 2, 3,4…).

Ahora numeren los puntos que quedan hacia la izquierda del cero (0) así: (-1, -2, -3,-4…).


D
C
P
A
B
-8 -7 -6 -5 -4 -3 -2 -1 0 1 2 3 4 5 6 7 8

Universidad del Valle

instituto de educación y pedagogía

- Encima del *punto* numerado con 2 (que es la coordenada de este punto), escriban A
- Encima del *punto* numerado con 6 (que es la coordenada de este punto), escriban B
- Encima del *punto* numerado con -2 (que es la coordenada de este punto), escriban C
- Encima del *punto* numerado con -6 (que es la coordenada de este punto), escriban D
- Encima del *punto* numerado con 0 (que es la coordenada de este punto), escriban P

Si A y B son dos puntos de una línea recta, podrás escribir Dist (A, B) para significar la distancia entre los puntos A y B.

Halle el valor de las siguientes distancias:

a. d (2, 0)

2

b. d (-2, 0)

2

c. d (6, 0)

6

d. d (-6, 0)

-6

Universidad del Valle

instituto de educación y pedagogía

UNA INTRODUCCIÓN AL CONCEPTO DE ENTERO, ENFATIZANDO EN LA CONSTRUCCIÓN DEL NÚMERO NEGATIVO, EN EL GRADO SÉPTIMO DE LA EDUCACIÓN BÁSICA

COLEGIO: la presentacion el Paraiso

NOMBRE (S): Karen Blanco y Natalia Salazar

GRADO: 7-2

FECHA: Dic -2 -2011

Querido estudiante a continuación encontrará una serie de situaciones problema, las cuales va a resolver siguiendo las indicaciones que se darán en el transcurso de cada actividad. Recuerda que debes incluir todos los pasos que hiciste para lograrlo.

SITUACIÓN 3: ESTRUCTURA ADITIVA DE ENTEROS

ACTIVIDAD 1: LA PISTA DE LAS MEDIDAS

Realiza la actividad con otro compañero

1. **Materiales:** Tablero pista de las medidas, fichas de diferente color, 2 dados (1 dado verde con valores positivos, 1 dado rosado con valores negativos)

   - Utilizando una ficha de diferente color para cada jugador. Se ubican en la salida.
   - El grupo decide el orden de los turnos para jugar.
   - El juego se empieza, lanzando los dos dados (verde y rosado), y para llegar a la meta se procede de la siguiente manera:

     El dado verde marcado con los números 0,1,2,3,4,5 (positivos), hará correr la ficha en la dirección de avance positivo y el dado marcado con los números -0,-1,-2,-3, -4,-5 (negativos), hará correr la flcha en la dirección de avance negativo en sentido contrario a la flecha del tablero.(Cuando sale el 0, no hay avances).
   - Cuando un jugador cae en un espacio marcado con **X,** debe retroceder 4 espacios.
   - Cuando un jugador cae en un espacio marcado con **A,** debe adelantar 4 espacios.

- El primer jugador que llegue a cualquiera de las dos metas será el ganador del juego.

2. A partir de la actividad realizada respondan las siguientes preguntas:

   a. Si un jugador en el primer lanzamiento saca 5 y -5 ¿Dónde queda ubicada la ficha?

   R/ en la salida ya que 5 + -5 = 0 osea no corre nada porque si sacamos el valor absoluto de los dos números es 5 y si se restan queda en 0

   b. Si un jugador tiene dos dados verdes (positivos) y en el primer lanzamiento saca 4 y 1 ¿Dónde queda ubicada la ficha? ¿Se obtiene un avance o retroceso? ¿Cómo se puede calcular operativamente el avance o retroceso en este caso?

   R/ en el número 5, se obtiene un avance se puede calcular sumando

   c. Si un jugador tiene dos dados rosados (negativos) y en el primer lanzamiento saca -4 y -2 ¿Dónde queda ubicada la ficha? ¿Se obtiene un avance o retroceso? ¿Cómo se puede calcular operativamente el avance o retroceso en este caso?

   R/ en el -6 se obtiene un retroceso se puede calcular sumando los dos números

   d. Si un jugador tiene dos dados uno verde (positivo) y uno rosado (negativo) y en el primer lanzamiento saca -9 y 4 ¿Dónde queda ubicada la ficha? ¿Se obtiene un avance o retroceso? ¿Cómo se puede calcular operativamente el avance o retroceso en este caso?

   R/ en el -5 se obtiene un retroceso se puede calcular restando los dos Números.

Natalia Salazar O. Dic-7-2011 7-2

Universidad del Valle

instituto de educación y pedagogía

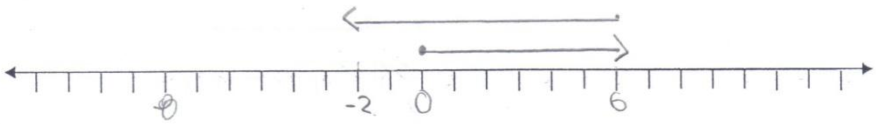
3. ACERQUÉMONOS A LA SUMA A TRAVÉS DE LA RECTA NUMÉRICA

Realiza las actividades del punto 3 y 4 de forma individual.

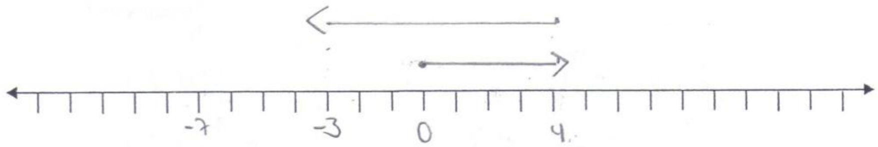
Si el número *a* es positivo y el número *b* es negativo, para sumarlos gráficamente se le lleva una flecha hacia la derecha con origen en cero (0) y extremo en *a*. A continuación, se traza otra flecha con origen en *a* y que recorra hacia la izquierda *b* unidades. El extremo de esta flecha indica el resultado de la suma.

En la siguiente recta numérica, utiliza lo dicho anteriormente para resolver los ejercicios:

a. 6 y (-8)

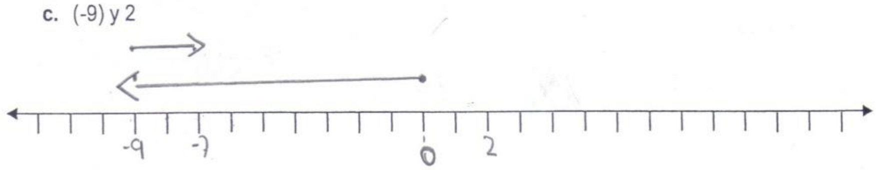


b. 4 y (-7)

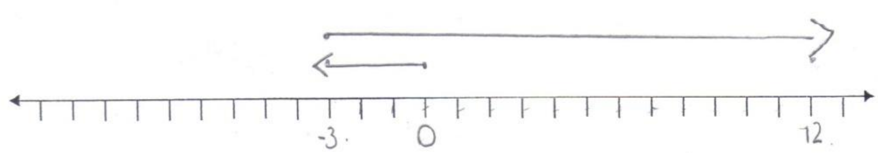


Si el número *a* es negativo y el número *b* es positivo, para sumarlos gráficamente se le lleva una flecha hacia la izquierda con origen en cero (0) y extremo en *a*. A continuación, se traza otra flecha con origen en *a* y que recorra hacia la derecha *b* unidades. El extremo de esta flecha indica el resultado de la suma.

c. (-9) y 2



d. (-3) y 15



Natalia Salazar Orozco 7-2
Dic-7-2011

Universidad del Valle

instituto de educación y pedagogía

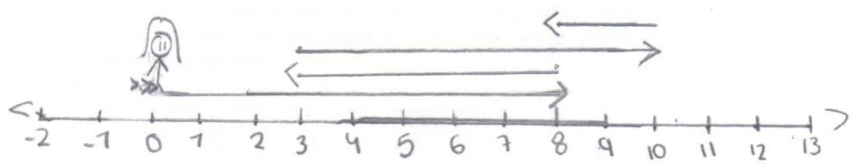
ACTIVIDAD 3

Realiza esta actividad de manera individual

1. Una persona buscando una dirección efectúa los siguientes desplazamientos: 8 cuadras hacía el sur, se devuelve 5 cuadras, nuevamente 7 cuadras hacia el sur, se devuelve 2 cuadras y encuentra la dirección.

   a. Realiza un gráfico donde se pueda visualizar los desplazamientos de la persona.

   R//



   la direccion esta en 8

   b. ¿Cuál es el punto de referencia a partir del cual se hacen los desplazamientos? ¿Por qué?

   R/ es la persona ya que yo puedo coger cualquier cosa como punto de referencia y yo decidí coger la persona,

   c. ¿Qué desplazamientos debe hacer la persona para llegar a la posición inicial, si se encuentra en el último desplazamiento que realizó para encontrar la dirección?

   R/ tiene que retroceder 8 cuadras para llegar a la posicion inicial

   d. ¿Para quedar a 2 cuadras de donde partió?

   tengo que devolverme 2 Cuadras.

   e. ¿Para retroceder 5 cuadras de la posición inicial?

   R/. queda en -5 de la Posicion inicial.