REVISTA EMA
2001, VOL. 6, Nº 2, 141-158

RAZONAMIENTO EN GEOMETRÍA

CARMEN SAMPER, CECILIA LEGUIZAMÓN
Y LEONOR CAMARGO

Este artículo presenta algunas reflexiones adelantadas en el trabajo de investigación "Desarrollo del razonamiento a través de la geometría euclidiana" que llevamos a cabo en la actualidad. Se centra en dar una visión sobre el razonamiento en la actividad geométrica, los tipos de razonamiento que hemos identificado y una caracterización particular del razonamiento visual. Las ideas se ilustran por medio de relatos de situaciones vivenciadas con nuestros estudiantes de primer semestre, en cursos de geometría euclidiana, de la Universidad Pedagógica Nacional.

INTRODUCCIÓN

Un mes después de iniciado el semestre académico, se preguntó a los alumnos del curso Geometría Euclidiana I, *"¿Es cierto que la suma de las medidas de los ángulos interiores de un triángulo es 180° ?"* Las respuestas a la pregunta fueron sorprendentes, no sólo por la posición asumida frente a la validez del enunciado, sino también, por las diferentes formas de argumentar usadas por los alumnos para respaldarlas.

Se esperaba que al responder aceptaran la validez del enunciado pero manifestaran la imposibilidad, en el momento, de efectuar el razonamiento deductivo necesario para construir la demostración correspondiente, por falta de herramientas conceptuales. Se tenía esta expectativa ya que la orientación del curso estaba encaminada hacia la construcción formal del sistema axiomático de la geometría euclidiana, donde la única forma de validar afirmaciones es a través de la deducción, y los alumnos aún no disponían de los conocimientos necesarios para la demostración del teorema. Sin embargo, hubiesen aceptado o no la certeza del enunciado, se vislumbró en sus respuestas un proceso de raciocinio, aun cuando sus argumentos no tuviesen la estructura deductiva correspondiente.

De los 47 encuestados, 5 respondieron que la afirmación no era cierta respaldando su respuesta con explicaciones como: "no, porque pueden existir triángulos con menor abertura en sus ángulos tal que la suma sea menor a 180°"; "no, porque un triángulo puede tener medidas diferentes en sus lados; de la manera que sea el triángulo puede tener tres lados iguales, dos lados desiguales o tres lados desiguales”; “no se cumple porque $45° + 45° + 45° = 135°$”. Los demás estudiantes aceptaron la afirmación. Sus explicaciones fueron variadas, lo que condujo a hacer la siguiente clasificación de éstas:

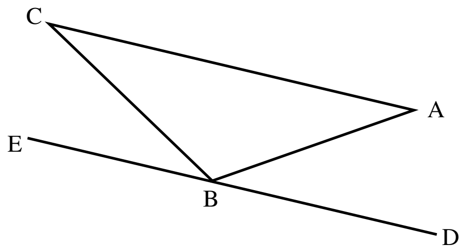
Usan la afirmación en su explicación (17 estudiantes): “sí es cierto porque no se puede obtener un triángulo donde la suma de sus ángulos interiores sea diferente a $180°$”; “sí porque si sumamos la medida de los ángulos y nos da más de $180°$ no sería un triángulo”; “como hemos discutido ya en algunas ocasiones todo lo que creemos saber lo hemos adquirido de manera empírica sin preguntarnos el por qué o si es verdadero o falso. En la escuela nos enseñaron que la suma de los ángulos interiores de un triángulo es 180°”.

Usan un ejemplo que cumple el enunciado (11 estudiantes): “sí porque $55° + 35° + 90° = 180°$”; “sí porque si tomamos un transportador y medimos los ángulos de un triángulo nos da $180°$”; “sí porque existe un triángulo que tiene un ángulo recto y los otros dos la mitad del recto”; “los triángulos tienen ángulos de medida $30°$, $60°$ y $90°$ y por lo tanto al sumar da $180°$“. La mayoría de los estudiantes que dieron ejemplos numéricos usaron triángulos rectángulos.

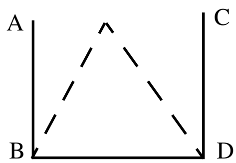
Usan un corolario del teorema (8 estudiantes): “sí porque equivale a la mitad de una circunferencia”; “el área de un triángulo es la mitad del área de un cuadrilátero cualquiera, así se sabe que la suma de las medidas de los ángulos interiores de un cuadrilátero es $360°$, entonces, por lo tanto, como un triángulo es la mitad de un cuadrilátero entonces la suma de sus ángulos será $360/2 = 180$”.

Usan una demostración visual (2 estudiantes): “sí porque si pegamos todos los ángulos, con sus respectivas medidas, nos dan dos ángulos de $90°$ lo cual es uno de $180°$”.

Usan una demostración formal (4 estudiantes): “como se muestra en la siguiente figura, el segmento $ED \parallel AC$. El $\angle ACB \cong \angle CBE$ y $\angle CAB \cong \angle ABD$. Es decir, el ángulo del triángulo más los demás ángulos congruentes y que están sobre ED forman $180°$.”



"Sí es cierto; si tomamos tres rectas nos daremos cuenta de que el $\angle ABD$ es de $90°$ y el otro $\angle CDB$ también mide 90°; la suma de estos ángulos es $180°$; ahora si giramos las rectas AB y CD para formar un triángulo nos queda un punto de intersección. De esta manera se quitan los ángulos de $90°$ pero se crea otro ángulo que es el complemento del espacio que le quitamos a los otros dos ángulos" (ver la figura siguiente).



El análisis de las explicaciones dadas por los estudiantes nos mostró un amplio espectro de argumentos, poniendo de manifiesto que en una clase de geometría confluyen muchas formas de razonar. Dado que la clasificación inicial de estos argumentos fue, de cierta forma artesanal, surgieron varias inquietudes: ¿qué es razonar?, ¿qué tan relevantes son las diversas formas de razonar en la construcción de significados geométricos?, ¿cómo clasificar estos argumentos en categorías más estructuradas?, ¿cuáles son las características esenciales que permiten identificar, en un discurso, la forma de razonar?, ¿cuál es la relación entre estas formas de razonar y aquellas aceptadas por la comunidad científica?

En este artículo presentamos algunas reflexiones adelantadas en nuestra acción investigativa, la cual pretende aclarar qué es razonar en geometría, qué tipos de razonamientos privilegia un ambiente que permite a los estudiantes expresarse libremente y cómo aportan tales razonamientos a la construcción de significado geométrico. El artículo se centra en una propuesta de clasificación de diversos tipos de razonamiento en geometría y en la caracterización particular del razonamiento visual. Las ideas se ilustran por medio de relatos de situaciones vivenciadas con nuestros estudiantes de primer semestre, en cursos de geometría euclidiana, de la Universidad Pedagógica Nacional. Antes de entrar en materia, se describe la corriente que, dentro de la Educación Matemática, enmarca el trabajo y la perspectiva de la geometría que está en concordancia con ella.

PERSPECTIVA SOCIO-CULTURAL EN LA EDUCACIÓN MATEMÁTICA

Una de las tareas centrales, en la que siempre ha estado empeñada la Educación Matemática, es el desarrollo de procesos de razonamiento en los estudiantes. Sin embargo, las corrientes formalistas que influyeron los currículos escolares desde mediados del siglo XX hasta los años 70, concibieron el razonamiento como la formación del pensamiento deductivo, propio para la demostración en matemáticas, y ligaron la enseñanza de la geometría escolar a esta concepción (Vasco, 1988; Hansen, 1998). La visión que se tenía del aprendizaje, como proceso receptivo de transferencia de conocimientos, y de la deducción formal, como la única forma aceptada de comunicación en matemáticas, hizo que la atención de la enseñanza se centrara en la construcción de demostraciones gobernadas por ciertas reglas y no en procesos de razonamiento asociados a dicha tarea.

Actualmente, en el panorama mundial, debido a las nuevas perspectivas culturales en la enseñanza de las matemáticas, las cuales obedecen a la influencia de las tendencias constructivista y socio-cultural bajo la línea ideológica de Ernst y de Tymoczko (Neubrand, 1998), y de Von Glaserfeld (Hershkowitz, 1998), se ha generado un movimiento que revive el interés por el estudio de la enseñanza y el aprendizaje de la geometría, favorecido por los avances en la Educación Matemática que han cuestionado la forma clásica de ver la geometría y por tanto de cómo enseñarla. Los objetos, fenómenos, problemas, teorías y métodos de la geometría se convierten entonces en materia de interés para la Educación Matemática.

Según las tendencias socio-culturales se tiene que:

- Las matemáticas son una necesidad social porque constituyen un vehículo de expresión, interpretación y comunicación de las diversas actividades humanas. Proporcionan las bases para planear estrategias y formular procedimientos, bajo esquemas de racionalidad científica. Ofrecen un lenguaje para representar relaciones cuantitativas y espaciales con las cuales se puede interpretar el mundo.
- El aprendizaje de las matemáticas escolares se construye sobre la base de diversos conocimientos, entre los cuales están los

intuitivos e informales —producto de la cultura personal—, aquellos que son resultado de la escolaridad anterior, y los conocimientos correspondientes a la matemática científica. La construcción del significado de los conceptos matemáticos se logra a través del establecimiento de vínculos entre dichos conocimientos.

- Las prácticas educativas deben propiciar la expresión libre y espontánea de ideas, que reflejan el campo de experiencias de los individuos, y la justificación de tales ideas mediante diferentes formas de argumentación. Este tipo de actividades se constituye en elemento potenciador del desarrollo de competencias comunicativas y cognitivas.

Bajo los presupuestos anteriormente descritos, se abre el panorama hacia una nueva visión de la actividad geométrica y de su enseñanza. Cobra relevancia tanto la tarea de identificar qué se entiende por razonar en geometría como la de determinar qué tipos de actividades propician, en la clase de geometría, diversas formas de razonamiento que, a la vez que sirvan para validar el conocimiento geométrico, aporten al desarrollo de mecanismos de argumentación, socialmente aceptados, en la búsqueda de consensos. En el contexto tradicional, la demostración en forma terminada era considerada de mayor trascendencia que el proceso que se hace para demostrar, y el razonamiento deductivo, usado para demostrar enunciados de la geometría y comprobar que éstos son universales, era el único admitido. La enseñanza descuidaba el desarrollo de otras competencias que la geometría posibilita y el nivel de desarrollo cognitivo del aprendiz mismo.

ACERCA DE LA GEOMETRÍA

La concepción de geometría acorde con los presupuestos constructivistas y socio-culturales está en estrecha relación con la concepción que integra los diferentes dominios de la geometría en torno a dos campos: el matemático y el de las ciencias naturales. Farrell (1987) amplía la apreciación anterior al considerar en la geometría dos aspectos inseparables:

- El aspecto producto, como sistema formal ya construido, el cual se aplica a problemas teóricos y/o del mundo real.
- El aspecto proceso, el cual permite la extensión del conocimiento y la comprensión del mundo ideal de la matemática y del mundo real.

El esquema de la Figura Nº 1, propuesto por Farrell (1987, p. 237), pretende ilustrar lo que es la actividad geométrica.

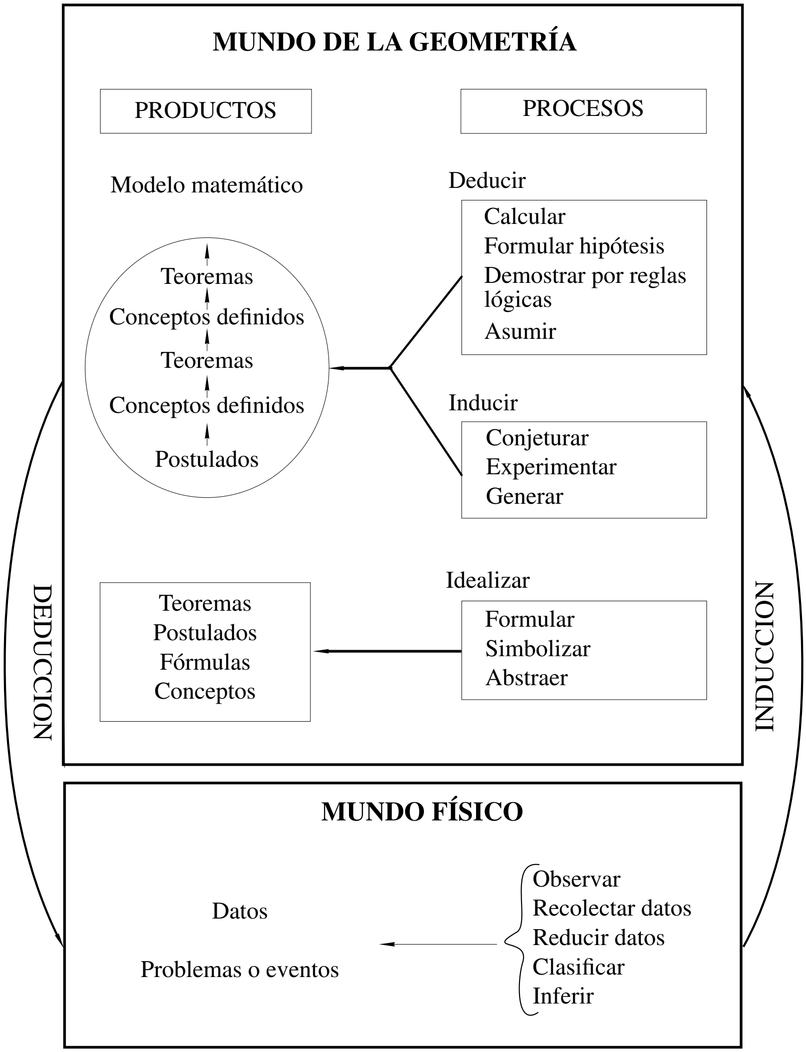


Figura Nº 1. Mundo matemático de Farrell, 1987

Dentro de la circunferencia se encuentran relacionados los elementos que forman un sistema deductivo. Es interesante ver que estos mismos elementos se incluyen en el rectángulo inferior izquierdo, con lo que se quiere sugerir que pueden ser estudiados individualmente y mostrar la importancia que tienen por sí mismos y no sólo como parte de una cadena deductiva. Al incluir al mundo físico en el diagrama, se pretende reflejar la conexión de éste con el mundo geométrico. Aspecto esencial del modelo son los procesos de razonamiento asociados a la actividad geométrica como: conjeturar, inducir, formular hipótesis, simbolizar y abstraer, listados en la parte derecha del esquema. Esto legitima la necesidad de ampliar la actividad geométrica a diferentes tipos de razonamiento, además del deductivo.

En síntesis, la geometría no es simplemente otro tópico de las matemáticas; su naturaleza y papel, como disciplina, le dan una posición única. Probablemente no hay mejor lugar que la geometría para dilucidar y discutir el concepto y el papel del razonamiento y de la demostración en matemáticas. El espectro completo de ver, entender o aceptar una afirmación o una línea de pensamiento, así como sugerir, convencer o persuadir, se puede encontrar e investigar en diversos campos geométricos.

RAZONAMIENTO EN GEOMETRÍA

Al reconocer a la matemática como construcción humana en permanente cambio y evolución, se evidencia que en el proceso de su desarrollo tienen lugar diferentes tipos de razonamiento, los cuales se asemejan de algún modo con la comunicación informal en la interacción cotidiana. Se puede evidenciar este reconocimiento en las siguientes definiciones de razonamiento, referenciadas por García y Serrano (1999, pp. 31-32):

> Rico (1995) identifica al razonamiento con la capacidad de establecer nuevas relaciones entre conceptos; estas relaciones se expresan en argumentos. Para Rico, en el trabajo con los alumnos de la Educación Obligatoria, un razonamiento es todo argumento suficientemente fundado que dé razón o justifique una propiedad.
>
> Sierpinska (1994) identifica al razonamiento como una red que hace parte de los actos de comprensión; cada uno de los actos de comprensión está acompañado del razonamiento.
>
> [La propuesta de los Estándares curriculares del NCTM, 1989] orienta al profesor para desarrollar procesos de razonamiento en los estudiantes a través de los espacios donde la explicación, la justificación y la conjetura son las herramientas que posibilitan su desarrollo. Está asociado a la adquisición del significado de conceptos y procedimientos matemáticos.
>
> [Según los Lineamientos curriculares de matemáticas del Ministerio de Educación Nacional de Colombia, 1998] al razonamiento mate-

> mático se le considera uno de los ejes curriculares asociado con la comunicación y resolución de problemas. Se le entiende como los actos en los cuales el niño justifica, conjetura, explica y predice entre otros actos.

Adicionalmente, Duval (1998, p. 45) define razonamiento como:

> Cualquier proceso que permita sacar nueva información de información dada se considera un razonamiento. Está referido a los procesos discursivos internos o externos para nombrar, discurrir o argumentar y a la organización deductiva de proposiciones, definiciones, etc., a partir de una teoría.

Como se deduce de los planteamientos anteriores, hoy los procesos de razonamiento son considerados como todas las acciones que las personas realizan, para comunicar y explicar a otros y a ellos mismos lo que ven, lo que piensan y lo que concluyen. Por tanto, se reconocen como funciones del razonamiento comprender, explicar y convencer, además de demostrar. El término "comprensión" hace referencia a acciones como manipular e interpretar sintáctica y semánticamente diversas representaciones de conceptos y procedimientos, y establecer relaciones entre éstos.

Esta nueva forma de ver el razonamiento, unida a la apreciación del mundo geométrico presentada en la sección anterior, nos permitió identificar características esenciales de lo que se considera razonar en geometría, las cuales sintetizamos a continuación: Esto es:

- establecer relaciones entre conceptos geométricos o información geométrica conocida;
- argumentar con razones fundadas acerca de una propiedad, relación o situación geométrica;
- comprender los distintos elementos que conforman una teoría geométrica;
- dar significado a los conceptos y procedimientos geométricos;
- comunicar, en forma convincente, los resultados de indagaciones en geometría.

TIPOS DE RAZONAMIENTO

Una de las hipótesis de trabajo en el estudio que estamos adelantando considera que existen diferentes formas argumentativas válidas, de acuerdo con el nivel de desarrollo del estudiante y su concepción sobre lo que es geometría. No es posible pretender que el estudiante acceda al proceso formal de razonamiento sin que haya experimentado situaciones que motiven su interés por validar afirmaciones geométricas de manera deductiva y que haya razonado de diferentes formas en su recorrido desde la geometría de los objetos físicos a la geometría de las estructuras. Esta hipótesis de trabajo coincide con lo expuesto por Bartolini y Boero (1998) cuando afirman que las diferentes clases de explicaciones y razonamientos dependen de tres factores, a saber: i) las distintas necesidades de actuación según el campo de experiencias del sujeto, ii) la apreciación personal de la situación, condicionada por las experiencias previas, matemáticas o no, el campo de visión personal y las prácticas culturales asociadas, y iii) la forma como se organiza y presenta la información, que depende del tipo de comunicación que se desea establecer, entre otras cosas.

En un ambiente de clase, en el que se favorece la participación de los estudiantes, es posible ver cómo, a pesar de tener claro que la tarea es realizar una demostración formal, surgen argumentos de naturaleza diferente. Por ejemplo, en una sesión de trabajo del curso de Geometría Euclidiana I, la profesora solicitó a los estudiantes demostrar que en todo triángulo isósceles, los ángulos opuestos a los lados congruentes son congruentes, teorema atribuido a Tales de Mileto. En el siguiente protocolo en el que se registra parte de un diálogo entre la profesora (P) y cinco estudiantes (E1, E2, E3, E4, E5), se presentan algunas de las sugerencias de los estudiantes:

E1: Sugiero dividir el triángulo en dos, trazando la altura.

P: Bien, ¿esto qué nos garantiza?

E1: Tendríamos dos triángulos con dos pares de lados correspondientes congruentes y un ángulo correspondiente congruente (el ángulo recto).

P: Pero el ángulo no está entre los lados congruentes, entonces no podemos garantizar la congruencia de los dos triángulos.[a]

E2: Entonces tracemos la mediatriz de la base del triángulo isósceles. Así podemos asegurar que los tres lados son congruentes.

P: Pero, ¿qué nos garantiza que la mediatriz pasa por el vértice del triángulo?

E3: Es claro, ¡ahí se ve!

P: ¿Cómo así?

E3: En todos los triángulos isósceles que he visto, eso pasa.

E4: Mire, si calcamos el triángulo y doblamos por la mediatriz lo podemos comprobar.

P: Pero ¿qué me asegura que eso sucede en todo triángulo isósceles?

E5: Si no se convence, hagamos la construcción.

---

a. En ese momento, los únicos criterios de congruencia que se conocían eran: el de los tres lados (LLL), el de dos lados y el ángulo comprendido entre ellos (LAL) y el de un lado y los dos ángulos adyacentes a él (ALA).

Como los estudiantes no vieron inmediatamente el camino para elaborar una demostración formal, tuvieron necesidad de hacer uso de otros tipos de razonamiento. Los estudiantes E3, E4 y E5 "se salieron" de los acuerdos establecidos para hacer una demostración, ya que en esta fase del curso se estaba en un punto de la construcción del sistema formal de la geometría euclidiana, en el cual se esperaba armar la demostración a partir de argumentos netamente deductivos, como intentaban hacerlo E1 y E2. Los estudiantes estaban perdidos porque, entre otras cosas, el dibujo no les daba pistas. Para enfrentar la tarea, E3 hizo uso solamente de una imagen visual, mientras que E4 y E5 utilizaron razonamientos informales.

Entonces, los tipos de razonamiento que hemos identificado en el trabajo geométrico son: el razonamiento visual, el razonamiento intuitivo o informal y el razonamiento inferencial. Estas formas de razonar, como lo muestra el protocolo anterior, no son excluyentes y, dependiendo de la complejidad cognitiva subyacente a la tarea, se complementan unas a otras. Una caracterización inicial de tales tipos de razonamiento es:

El razonamiento visual. Integra los procesos por medio de los cuales se obtienen conclusiones, a partir de las representaciones mentales de los objetos bi o tridimensionales y de las relaciones o transformaciones observadas en construcciones y manipulaciones (Clements y Battista, 1992). Está en estrecha relación con lo que Duval (1998) llama el proceso de visualización respecto a la representación del espacio, la exploración heurística o la visión sinóptica de una situación compleja. Retomando las respuestas dadas por los estudiantes a la pregunta sobre la suma de las medidas de los ángulos internos de un triángulo, aquella clasificada bajo la categoría titulada "Usan una demostración visual" es un ejemplo de este tipo de razonamiento.

El razonamiento intuitivo o informal. Tiene que ver con las ideas espontáneas que se emiten en el lenguaje natural, a través de la descripción, la explicación y la formulación de argumentos, producto del establecimiento de asociaciones u oposiciones. Este razonamiento, en geometría, se fomenta a partir de lo que Duval (1998) llama procesos constructivos de configuraciones que sirven como modelo para experimentar propiedades geométricas y a la vez verificar, explicar o aclarar un resultado. A partir de la exploración se sacan conjeturas basadas en la experiencia, de las cuales se obtienen los argumentos para explicar o convencer a otros, o comunicar una idea geométrica. Volviendo al ejemplo inicial, las respuestas clasificadas dentro de las tres primeras categorías, evidencian este tipo de razonamiento.

El razonamiento inferencial. Integra procesos inductivos, abductivos[1] y deductivos y hace referencia a la elaboración de discursos formales encaminados a la construcción de demostraciones para probar la validez de una afirmación; es el que finalmente permite comprender cómo se construye un sistema axiomático formal. La primera respuesta, clasificada en la categoría titulada "Usan una demostración formal" ejemplifica este tipo de razonamiento.

Aun cuando al enfrentar una situación se puede enfatizar en algún tipo de razonamiento en particular, existe una estrecha relación entre los diferentes tipos de razonamiento, que debe ser tenida en cuenta para alcanzar competencia y dominio en el campo geométrico. El razonamiento visual puede ser estimulado por el intuitivo e informal a través de la construcción de figuras geométricas con instrumentos manuales o tecnológicos, actividad que favorece en mayor medida este último tipo de razonamiento. Igualmente, la comprensión de una construcción geométrica, por ejemplo con regla y compás, involucra ciertos razonamientos de tipo inferencial que permiten explicar por qué se hace la construcción como se propone. Construir la bisectriz de un ángulo se reduce a construir dos triángulos congruentes que comparten un lado; se deduce que el ángulo inicial está conformado por los lados no comunes de un par de ángulos que son adyacentes. Por ser partes correspondientes de triángulos congruentes, son congruentes; por ende, el lado común de los ángulos es la bisectriz del ángulo original. El razonamiento visual propicia los procesos del razonamiento inferencial que llevan a la construcción de pruebas formales (como se observa en la segunda respuesta de la última categoría). Este hecho es utilizado en textos de geometría donde las figuras son representaciones que satisfacen las condiciones exigidas y por lo tanto, ponen en evidencia las relaciones geométricas que se quieren demostrar.

La complejidad de la actividad geométrica es de tal magnitud que estos procesos de razonamiento no se integran de la misma manera en cada per-

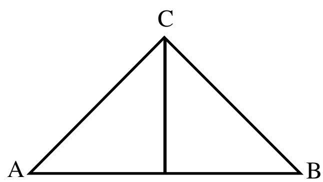
1. "Abducción" es un término propuesto por Peirce para referirse a una inferencia que incluye la preferencia de una hipótesis sobre otras que también explicarían ciertos hechos, siempre y cuando tal preferencia no esté basada sobre conocimiento previo que haga verdadera la hipótesis, ni sobre el examen de alguna de las hipótesis después de admitirlas como algo que está en prueba. La forma de inferencia es como sigue: (a) se observa un hecho sorprendente C; (b) pero si A fuese cierto, C sería obvio; (c) por lo tanto hay razón para sospechar que A es cierto. (Peirce, 1903)

sona. Sin embargo, Duval (1998) afirma que, desde la perspectiva del aprendizaje de la geometría, el problema básico de la enseñanza es lograr que los alumnos usen los diversos tipos de razonamiento en forma integral y se apoyen en aquellos que más posibilidades de conceptualización personal les brinden.

RAZONAMIENTO VISUAL

Como se mencionó en la introducción, haremos una caracterización específica del razonamiento visual. En ocasiones se suelen confundir el apoyo visual y el razonamiento visual propiamente dicho. Es necesario hacer una distinción entre estos aspectos.

El apoyo visual tiene como función principal la verificación subjetiva, fundamental para realizar cualquier razonamiento. Por ejemplo, el poder "ver" tres triángulos en la siguiente figura es una habilidad visual, previa al proceso de poder realizar inferencias respecto a propiedades de dichos triángulos. Algunos estudiantes sólo logran ver un triángulo, con una de sus alturas dibujada; otros, sólo ven dos triángulos.



La visualización de los triángulos no implica razonamiento: sólo se ve o no se ve. Es un caso de aprehensión puramente perceptual que comporta un interés especial a la matemática porque provee información, base para razonar. Por ejemplo, si la figura anterior ilustra la altura con respecto a la hipotenusa de un triángulo rectángulo y los estudiantes no identifican los tres triángulos rectángulos presentes en ella, no lograrán entender las relaciones numéricas entre los catetos, la hipotenusa y los segmentos en que ésta queda dividida por la altura, o entre la altura y los segmentos de la hipotenusa.

Como ya se mencionó, el apoyo visual es aprovechado por la mayoría de textos de geometría en donde, por medio de representaciones de figuras, se explicitan relaciones geométricas obviando explicaciones verbales. La colinealidad de puntos, la relación de ser ángulos opuestos por el vértice, la identificación de las transversales a rectas paralelas, la relación de interestancia o de formar ángulos que son par lineal (i.e., aquellos que son adyacentes y para los cuales la unión de sus lados no comunes es una recta), son ejemplos de ello. Sin embargo, el uso del apoyo visual para ahorrar explicaciones requiere un acuerdo previo sobre qué información se puede o no obtener de una figura para evitar el uso incorrecto de ésta. Es frecuente cometer el error de concluir, porque se ve en la figura, hechos que deben ser demostrados como la perpendicularidad de dos rectas o la congruencia de segmentos o ángulos.

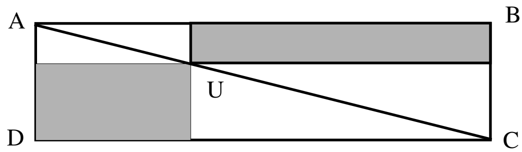
El razonamiento visual va más allá del apoyo visual. Hershkowitz (1998) comparte con Dreyfus, Hanna y Duval, la idea según la cual a veces se necesita algo más que habilidad visual para dar respuesta a un problema. Las decisiones que se tomen, con base en una figura, requieren hacer un razonamiento. El razonamiento visual, propiamente dicho, es aquel que liga la percepción visual con características, propiedades o relaciones geométricas. Surge como resultado de una compleja actividad mental analítico-sintética que destaca rasgos esenciales de lo que se está viendo y mantiene inhibidos otros que no lo son. Esto implica combinar dos procesos: uno de análisis, en donde se desmembra al objeto en sus características; y otro de síntesis, mediante el cual se construye una nueva estructura que se compara con la percepción anterior, para clasificarla dentro de ella o asignarle otra categoría.

El sólo mirar las figuras no es suficiente para ver lo que ellas representan. Por tal razón, hay que aprender a mirarlas matemáticamente, para desentrañar de ellas variada información, dependiendo de lo que se está buscando. En síntesis, esto significa:

- establecer relaciones entre conceptos geométricos o información geométrica conocida,
- dar significado a los conceptos y procedimientos geométricos,
- argumentar con razones fundadas acerca de una propiedad, relación o situación geométrica,
- comunicar, en forma convincente, los resultados de indagaciones en geometría,
- identificar el papel de los distintos elementos que dan estructura a una teoría axiomática.

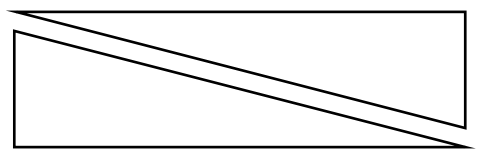
Clarifiquemos lo dicho aquí con un ejercicio que fue propuesto por una de las profesoras a un grupo de docentes de matemáticas durante una conferencia sobre el uso de calculadoras graficadoras en la enseñanza de la geometría:

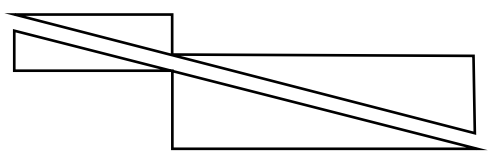
> En la siguiente figura, $\overline{AC}$ es la diagonal del rectángulo ABCD. Compare las áreas de los dos rectángulos sombreados, para distintas posiciones del punto U sobre la diagonal. (Duval, 1998)



Al mostrarles la figura anterior, la respuesta unánime fue "tienen área diferente". Usando la calculadora, se presentaron varias imágenes de la situación con el punto U en diferentes posiciones. La respuesta no varió sino hasta cuando U coincidió con el punto medio de la diagonal, en donde es evidente que las áreas son iguales. Como la posición de U era arbitraria, el cambio de respuesta llevó a los maestros a hacer un análisis más detallado de la situación, puesto que no esperaban que la posición de U originara una modificación en la relación entre las áreas de los rectángulos sombreados. El análisis impulsó en los maestros un cambio en la forma de observar la figura, dando paso al razonamiento visual.

Para resolver el conflicto suscitado, deben reconocerse dos subconfiguraciones de la figura inicial. Las subconfiguraciones necesarias son:

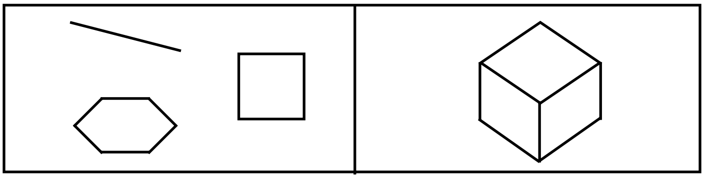




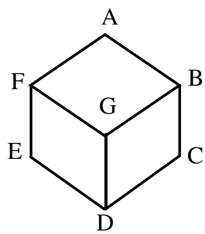
La mirada matemática de la situación consiste en reconocer que a cada uno de los triángulos congruentes de la primera subconfiguración se le quita una región de igual área (los dos rectángulos sombreados), porque los triángulos que quedan en la segunda imagen son, a su vez, congruentes dos a dos, conformando regiones de igual área.

Para que una figura dé lugar a un razonamiento visual, debe tener varias características:

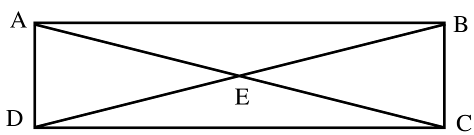
Ser la unión de varias configuraciones relacionadas entre sí, las cuales caracterizan la figura global. Por ejemplo, la figura de la izquierda no obedece a esta caracterización; la de la derecha, sí.



Estar acompañada de una afirmación que haga explícita alguna propiedad representada en la configuración. Por ejemplo, si en la figura de la derecha se añaden nombres a los vértices, inmediatamente se da la entrada matemática a la configuración y si además se afirma que ABCDEF es un hexágono regular, se produce una contextualización matemática de la figura. De lo contrario, podría representar otro objeto real, como una caja.



Tener la posibilidad de realizar acciones de desconfiguración y reconfiguración para encontrar relaciones geométricas o establecer propiedades. En el rectángulo ABCD se pueden intentar las siguientes reconfiguraciones:



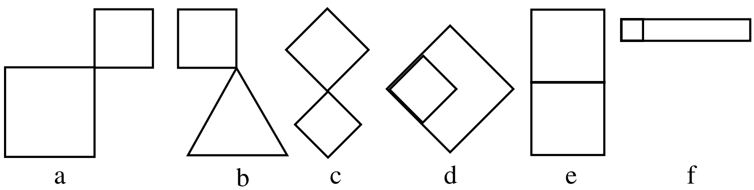
- La figura se ve como la unión de ΔAEB, ΔBEC, ΔCED y ΔDEA.
- El rectángulo se ve como la unión de ΔADC y ΔABC o de ΔADB y ΔCBD.

Pero, si la tarea es demostrar que las diagonales del rectángulo ABCD son congruentes, las reconfiguraciones propuestas no sirven. El estudiante debe hacer una reconfiguración en la que identifique los triángulos solapados

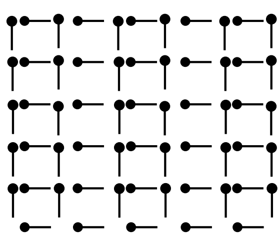
ΔDAC y ΔCBD. Si ésta no se encuentra, es imposible hacer la demostración. Esta organización es más compleja que las anteriores porque la unión de los triángulos no conforma la figura completa y además comparten una región del rectángulo.

En general, es necesario explorar diversas reconfiguraciones para encontrar la que conduzca a información útil para el objetivo. En una figura geométrica es posible encontrar más subconfiguraciones que aquellas que se hacen evidentes en su construcción o que se nombran en la hipótesis. Son todas las demás las que crean el poder heurístico de las figuras; las que dan las pautas claves para llegar a una solución. Poder distinguirlas no es una habilidad natural, implica un aprendizaje que debe ser propiciado por los docentes. Ejercicios como los siguientes contribuyen al desarrollo del razonamiento visual.

1) Un *cuadu* se define como una figura geométrica plana formada por dos cuadrados que comparten un vértice. Identifique cuáles de las siguientes figuras corresponden a un cuadu.



2) La siguiente figura es un arreglo cuadrado de fósforos organizados en celdas de 1x1. ¿Cuántos fósforos se necesitan para construir un cuadrado de lado 7 fósforos?, ¿n fósforos? (Hershkowitz, 1998).



En síntesis, el razonamiento visual puede funcionar por sí solo en un proceso demostrativo, o combinarse con otros tipos de razonamiento, no necesariamente en una fase previa a ellos. El proceso de razonamiento visual incluye una nueva forma de mirar una situación para tratar de llegar a una afirmación válida; se constituye en una explicación de por qué la afirmación es verdadera y por consiguiente, es una demostración en todo el sentido de la palabra.

REFLEXIONES FINALES

Algunos autores señalan que, si bien la preocupación por el razonamiento visual está renaciendo en la enseñanza de la matemática, aún es poco el esfuerzo pedagógico que se está realizando para desarrollarlo. Esto tiene varias causas, entre las que se destacan:

- el desconocimiento de este tipo de razonamiento,
- la idea de que la visualización es lo mismo que el razonamiento visual,
- la tendencia a considerar la visualización como una habilidad innata o de adquisición espontánea,
- la concepción rígida del espacio de la geometría, la cual no da lugar a actividades que permitan nutrir o desarrollar tanto la visualización como el razonamiento visual.

En conclusión, es importante lograr un cambio en la concepción de la enseñanza de la geometría y buscar estrategias para ampliar su dominio hacia la visualización y el razonamiento visual. La comunidad de educadores debe seguir ahondando en este campo, tanto a nivel investigativo como en la práctica de la enseñanza. Sin embargo no debe olvidarse que el razonamiento visual es apenas uno de los tipos de razonamiento que se deben cimentar y fomentar en la clase de geometría. Una perspectiva amplia obliga a una revisión curricular en la que tenga cabida el desarrollo de los diferentes tipos de razonamiento con miras a lograr estrategias argumentativas que posibiliten la búsqueda de consensos y permitan además, la construcción de sistemas formales.

REFERENCIAS

Bartolini, M. y Boero, P. (1998). Teaching and learning geometry in context. En C. Mammana y V. Villani (Eds.), *Perspectives on the teaching of geometry for the 21st century* (pp. 52-62). Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.

Clements, D. y Battista, M. (1992). Geometry and spatial reasoning. En D. Grouws (Ed.), *Handbook of research on mathematics teaching and learning: a project of the National Council of Teachers of Mathematics* (pp. 420-459). New York: National Council of Teachers of Mathematics.

Duval, R. (1998). Geometry from a cognitive point of view? En C. Mammana y V. Villani (Eds.), *Perspectives on the teaching of geometry for the 21st century* (pp. 37-52). Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.

Farrell, M. (1987). Geometry for secondary school teachers. En M. Lindquist y A. Shulte (Eds.), *Learning and teaching geometry, K-12* (pp. 236-250). 1987 Yearbook. Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.

García, G. y Serrano, C. (1999). *La comprensión de la proporcionalidad, una perspectiva social y cultural*. Bogotá: Grupo Editorial Gaia.

Hansen, V. (1998). General considerations on curricula designs in geometry. En C. Mammana y V. Villani (Eds), *Perspectives on the teaching of geometry for the 21st Century* (pp. 235-242). Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.

Hershkowitz, R. (1998). About reasoning in geometry. En C. Mammana y V. Villani (Eds.), *Perspectives on the teaching of geometry for the 21st century* (pp. 29-37). Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.

Neubrand, M. (1998). On the variety of influences on the teaching of geometry: a general list and some consequences. En C. Mammana y V. Villani (Eds.), *Perspectives on the teaching of geometry for the 21st century* (pp. 226-229). Dordrecht: Kluwer Academic Publishers.

Peirce, C.S. (1903). Abduction and induction. En J. Buchler (1955), *Philosophical writings of Peirce* (pp. 150-156). New York: Dover Publications.

Vasco, C. (1988). Sistemas geométricos. En O. Múnera (Comp.), *Un nuevo enfoque para la didáctica de las matemáticas* (vol. II, pp. 47-112). Bogotá: Dirección General de Capacitación y Perfeccionamiento Docente, Currículo y Medios Educativos, Ministerio de Educación Nacional.

Carmen Samper
Cecilia Leguizamón
Leonor Camargo
Departamento de Matemáticas
Universidad Pedagógica Nacional
Calle 72 Nº 11-86
Tels.: 347 1190 - 347 3575
Bogotá, Colombia